

Beitrag
zur Boden-Bauwerk-Interaktion
in nichtbindigen Böden
infolge hochdynamischer Anregung

Jörg Zimbelmann

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

(Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Gutachter/Gutachterin:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Conrad Boley
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Stefan Hiermaier

Die Dissertation wurde am 16.06.2015 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften am 17.06.2015 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 27.11.2015 statt.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2010 bis 2015 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Bodenmechanik und Grundbau der Universität der Bundeswehr München.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Conrad Boley. Mit der Bearbeitung der BMVg-Studie „Auswirkungen künstlich ausgelöster Erdbeben nach Waffenwirkung“ hat mir Professor Boley nicht nur die Möglichkeit zur Promotion sondern auch gleichzeitig ein interessantes und anspruchsvolles Thema gegeben. Sowohl bei der Bearbeitung der Studie als auch der vorliegenden Dissertation hat Professor Boley mir große Freiheiten eingeräumt, wofür ich mich herzlich bedanke.

Nicht weniger herzlich danke ich Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Stefan Hiermaier für seine Bereitschaft zur Übernahme des Koreferats als auch für seine wertvollen Beiträge. Vor allem sein in dieser Arbeit mehrfach zitiertes Buch „Structures Under Crash and Impact“ sowie seine Vorlesung „Finite Methoden und Stoffgesetze in der Hochdynamik“ haben mir sehr geholfen und sind jedem zu empfehlen, der sich mit ähnlichen Fragestellungen befassen möchte.

Frau Dipl.-Ing. (FH) Heidi Noack als Aufgabenstellerin der oben genannten BMVg-Studie und Initiatorin der vorliegenden Fragestellung gilt mein besonderer Dank, da es die vorliegende Dissertation ohne sie nicht gäbe.

Ein großes Dankeschön möchte ich den wissenschaftlichen Mitarbeitern anderer Institute – insbesondere den Herren Dr.-Ing. Lars Rüdiger, Dipl.-Ing. Andreas Dörr und Dipl.-Ing. Stefan Kopowski vom Institut für Mechanik und Statik sowie Dr.-Ing. Florian Loos (ehemals Institut für Mathematik und Bauinformatik) – und natürlich auch Herrn Dr.-Ing. Claas Meier von BoleyGeotechnik (ehemals Institut für Bodenmechanik und Grundbau) aussprechen. Vielen Dank für Eure Bereitschaft, Euer Wissen zu teilen, für anregende Diskussionen, und für Eure Kameradschaft.

Den Kolleginnen und Kollegen des Institutes für Bodenmechanik und Grundbau danke ich für fünf interessante Jahre sowie die gute Zusammenarbeit.

Königsdorf, im Juni 2015

Jörg Zimbelmann

Kurzfassung

Unterirdische Explosionen können ein größeres Schadenspotential aufweisen als vergleichbare freie Explosionen in Luft, da sie in Abhängigkeit der maßgebenden Einflussgrößen wie Explosivstoffmasse, Überdeckung bzw. Ladungstiefe und anstehender Baugrund deutlich größere Drücke und längere Einwirkungsauern (d.h. größere Impulse) erzeugen können und die Drücke und Partikelbewegungen mit steigender Entfernung gegebenenfalls langsamer abnehmen.

Für zivile Anwendungsbereiche wie die Kampfmittelräumung, Sprengvortriebe sowie den Tagebau mit in der näheren Umgebung anstehender Bebauung ist ein Hilfsmittel wünschenswert, anhand dessen:

- die sichere Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$, in der ein Gebäude unbeschädigt bleibt, sowie
- die Grenzentfernung $r_{\text{hor, lim}}$, in der ein Gebäude zwar beschädigt wird aber nicht vollständig zusammenbricht

schnell und einfach abgeschätzt werden können.

In der vorliegenden Arbeit werden die theoretischen Grundlagen explosionsinduzierter Wellen dargestellt, und es wird auf die diesbezüglichen Besonderheiten von Böden eingegangen. Da maßgebliche Forschungsergebnisse zum Bodenverhalten unter hochdynamischer Beanspruchung bei mittleren und hohen Verzerrungsraten erst innerhalb der letzten 10 bis 15 Jahre erzielt wurden, ist in der einschlägigen Literatur keine Zusammenfassung bekannt. Infolgedessen ist dies ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer Entscheidungshilfe, zur Bestimmung der oben erwähnten sicheren Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$ sowie der Grenzentfernung $r_{\text{hor, lim}}$. Die Vorgehensweise wird beispielhaft für oberflächennahe, unterirdische Explosionen einer Ladungsmasse von 125 kg TNT, einen trockenen Sand als Baugrund und flachgegründete Gebäude ohne Kellergeschoss vorgeführt. Grundlage bilden numerische Simulationen mit dem kommerziellen Hydrocode AUTODYN. Um die Ausbreitung der explosionsinduzierten Welle bis in genügend große Entfernungen verfolgen zu können, wurde die Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“ entwickelt. Die numerisch ermittelten Zeitverläufe des Luftdrucks, der Partikelgeschwindigkeit und der Schubverzerrungen innerhalb des Baugrunds wurden mit Blick auf die maßgebenden Schadensbilder „Luftstoß“, „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“ sowie „Unzulässige Winkelverdrehungen der Fundamente infolge Sackungen“ ausgewertet. Das Ergebnis sind zwei Diagramme für die sichere Entfernung sowie die Grenzentfernung in Abhängigkeit der Ladungstiefe unter Geländeoberkante, in welcher der Explosivstoff gezündet wird.

Abstract

Explosions below the soil surface may contain an even more devastating potential than comparable free explosions in air, because – depending on the determining factors such as explosive charge weight, depth of burial and in-situ soil conditions – they can produce significantly greater pressures and longer exposure times (i.e. stronger momenta), and the pressures and particle movements may decay more slowly with increasing distance.

For civil applications such as clearance of explosive ordnance, explosive tunneling and surface mining in the vicinity of buildings a tool with which:

- the safe distance $r_{\text{hor, safe}}$ above which a building remains undamaged
- the limiting distance $r_{\text{hor, lim}}$ at which a building is damaged but does not collapse completely

may be evaluated in a fast and simple manner is desirable.

In this study the theoretical basics of explosion-induced waves are presented, while going into detail with regard to soils. As authoritative research results for soil behavior under high dynamic loads at medium and high strain rates have been obtained only within the last 10 to 15 years, no summary concerning this matter is known in the corresponding literature. Consequently, this is a focus of this study.

The aim of this work is to develop a decision support for determination of the above-mentioned safe distance $r_{\text{hor, safe}}$ and the limiting distance $r_{\text{hor, lim}}$. The procedure is exemplarily demonstrated for near-surface, underground explosions with a charge mass of 125 kg of TNT, a dry sand as foundation soil and a building with shallow foundation and no basement. As a first step numerical simulations with the commercial hydrocode AUTODYN were carried out. In order to track the explosion-induced wave up to sufficiently large distances, the modeling strategy called the "moving window" was developed. The numerical histories of air pressure, particle velocity and shear strains within the subsoil were evaluated with respect to the relevant damage profiles "air blast", "foundation-induced excitation of the structure to vibrations" and "excessive inclination of the foundation due to sagging". As a result two charts are presented for the safe distance and the limiting distance both as a function of the explosive's depth of burial.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	XIII
Tabellenverzeichnis	XIX
Verwendete Symbole und Abkürzungen.....	XXI
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Zielsetzung.....	1
1.2 Aufbau der Arbeit.....	2
2 Theoretische Grundlagen der Wellenausbreitung	5
2.1 Wellen in elastischen, isotropen, homogenen Medien	5
2.1.1 Longitudinal- und Scherwellen im elastischen Raum	5
2.1.2 Ebene elastische Wellen in einem zylindrischen Stab	7
2.1.3 Oberflächenwellen	9
2.2 Plastische Kompressionswellen und Schockwellen	11
2.3 Vereinfachte Schockbetrachtung.....	14
2.3.1 Riemann-Problem und Rankine-Hugoniot-Gleichungen	14
2.3.2 v_s - v_l -Beziehung und Zustandsgleichung	17
2.3.3 Entspannung hinter der Schockfront	18
2.3.4 Entropie und Energie bei Schockbelastung und Entlastung	20
2.4 Wellenphänomene an Grenzflächen.....	22
2.4.1 Der allgemeine Fall.....	22
2.4.2 Senkrechttes Auftreffen einer ebenen Welle auf eine Grenzfläche.....	23
2.4.2.1 <i>Elastische Wellen</i>	23
2.4.2.2 <i>Reflexionsfaktoren bei Schockwellen</i>	25
2.4.3 Wellenfortpflanzung parallel zu einer freien Oberfläche	25
2.4.4 Refraktion	26
3 Bodenverhalten bei (hoch)dynamischer Beanspruchung.....	29
3.1 Kompressionsversuche bei mittleren und hohen Verzerrungsraten	29
3.1.1 Der Split-Hopkinson pressure bar	30
3.1.1.1 <i>Klassische Konfiguration</i>	30
3.1.1.2 <i>Pulse Shaping</i>	33
3.1.1.3 <i>Der modifizierte SHPB für Versuche mit Lockergestein</i>	34
3.1.2 Der Planar-Platten-Versuch	36
3.1.2.1 <i>Versuchsaufbau und -ablauf</i>	36

3.1.2.2	<i>Auswertung mittels Impedanz-Match-Methode</i>	38
3.1.2.3	<i>Ermittlung der Kompressionskurve $p(\rho)$ bei Böden</i>	39
3.1.3	Versuchsergebnisse zur Kompression aus der Literatur	40
3.1.3.1	<i>Sande</i>	40
3.1.3.2	<i>Bindige Böden</i>	44
3.2	Qualitative Beschreibung der Effekte bei Kompression	48
3.2.1	Kompressionsphasen	48
3.2.2	Qualitative Beschreibung der maßgebenden Einflussgrößen	50
3.2.2.1	<i>Anfangsporenzahl e_0</i>	50
3.2.2.2	<i>Korngrößen(verteilung) und Morphologie</i>	51
3.2.2.3	<i>Sättigungsgrad und Wassergehalt</i>	53
3.2.2.4	<i>Verzerrungsrate</i>	54
3.3	Das Entlastungsverhalten von Böden	55
3.4	Zum Scherverhalten von Böden	58
3.4.1	Einfluss des Spannungs- und Verzerrungszustands	58
3.4.2	Zum Einfluss geringer Verzerrungsraten auf die Scherfestigkeit	59
3.4.3	Zur Scherfestigkeit bei mittleren Verzerrungsraten	60
3.4.3.1	<i>Ableitung der Scherfestigkeit aus modifizierten SHPB-Versuchen</i>	60
3.4.3.2	<i>Dynamische Triaxialversuche bei mittleren Verzerrungsraten</i>	62
3.4.4	Pressure-Shear Plate Impact	62
3.5	Zusammenfassung des aktuellen Wissensstands und Aufzeigen ungelöster Fragestellungen	64
4	Erdstoß	67
4.1	Einflussgrößen und allgemeine Zusammenhänge	67
4.2	Explosionen	68
4.2.1	Allgemeine Definitionen	68
4.2.1.1	<i>Explosion ↔ Sprengung</i>	68
4.2.1.2	<i>Deflagration ↔ Detonation</i>	68
4.2.2	Explosive Stoffe	69
4.2.3	Kennwerte und Vergleichbarkeit von Explosivstoffen	70
4.2.4	Das vereinfachte ZDN-Modell	71
4.3	Großmaßstäbliche Erdstoßversuche und empirische Erdstoßmodelle	72
4.3.1	Das Modell nach Drake & Little von 1983	72
4.3.1.1	<i>Maximalwerte der Partikelgeschwindigkeit und des Drucks</i>	75
4.3.1.2	<i>Zeitverläufe des (Über-)Drucks und der Partikelgeschwindigkeit</i>	77

4.3.2	Das Modell nach Drake et al. von 1989.....	78
4.3.2.1	<i>Peak-Werte der Partikel- und Schockwellengeschwindigkeit, des Drucks und der Partikelverschiebung</i>	78
4.3.2.2	<i>Zeitverlauf der Partikelgeschwindigkeit</i>	79
4.3.3	Vergleich der Drakeschen Modelle von 1983 und 1989.....	81
4.4	Schadensbilder aufgrund von Explosionen im Boden.....	83
4.5	Berechnung und Bemessung bei Erd- und Luftstoß.....	84
4.5.1	Entkoppelter \Leftrightarrow gekoppelter Berechnungsansatz.....	84
4.5.2	Ersatzsysteme.....	85
4.6	Zusammenfassung.....	87
5	Zur Abschätzung der Auswirkungen unterirdischer Explosionen auf Gebäude.....	89
5.1	Vorbemerkungen.....	89
5.2	Komponenten der Entscheidungshilfe für unterschiedliche Schadensbilder.....	90
5.2.1	Kriterium 1 – „Luftstoß“.....	90
5.2.2	Kriterium 2 – „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“.....	91
5.2.2.1	<i>Prinzipielles Vorgehen</i>	91
5.2.2.2	<i>Zulässige Partikel- und Fundamentalschwinggeschwindigkeiten aus der Literatur</i>	92
5.2.3	Kriterium 3 – „Unzulässige Winkelverdrehung infolge Sackungen“.....	94
5.2.3.1	<i>Zusammenhang zwischen dynamischer Scherung und Sackungen</i>	94
5.2.3.2	<i>Prinzipielles Vorgehen</i>	97
5.3	Simulationen mit AUTODYN.....	99
5.3.1	Materialmodelle.....	99
5.3.1.1	<i>Luft</i>	99
5.3.1.2	<i>Explosivstoff TNT</i>	100
5.3.1.3	<i>Sand</i>	100
5.3.2	Gleichungslöser und verwendete Einstellungen.....	102
5.3.3	1D-Wedge-Berechnungen und Konvergenz.....	102
5.3.4	Modellierungsstrategie.....	105
5.3.4.1	<i>Modellierungsansätze in der einschlägigen Literatur</i>	105
5.3.4.2	<i>Modellierungsansatz des „mitlaufenden Fensters“</i>	106
5.4	Auswertung der berechneten Zeitverläufe.....	114
5.4.1	Auffälligkeiten in den AUTODYN-Ergebnissen.....	114
5.4.2	Auswertung des Kriteriums Nr. 1 „Luftstoß“.....	116
5.4.2.1	<i>Näherungsfunktion für den Überdruck $p_1(t)$ des Luftstoßes</i>	116
5.4.2.2	<i>Sichere Entfernung $r_{hor, safe}$ und Grenzentfernung $r_{hor, lim}$ bei Luftstoß</i>	121

5.4.3	Auswertung des Kriteriums Nr. 2 „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“	122
5.4.4	Auswertung des Kriteriums Nr. 3 „Unzulässige Winkelverdrehung infolge Sackungen“	128
5.5	Ergebnis.....	131
6	Zusammenfassung und Ausblick	135
	Literaturverzeichnis.....	139
	Anhang	151
A	Grundlagen der Kontinuumsmechanik	A-1
A.1	Allgemeines.....	A-1
A.2	Kinematik.....	A-1
A.2.1	Konfiguration und materieller Körper	A-1
A.2.2	Lagrangesche und Eulersche Betrachtungsweise.....	A-3
A.2.3	Deformationsgradient, Jacobi-Determinante und Verschiebungsgradient.....	A-4
A.2.4	Polare Zerlegung und Deformationstensoren.....	A-4
A.2.5	Verzerrungstensoren	A-5
A.2.6	Partikelgeschwindigkeit und materielle Zeitableitungen	A-5
A.2.7	Geschwindigkeitsgradient, Verzerrungsgeschwindigkeits- und Spintensor	A-6
A.2.8	Verzerrungsratentensoren	A-7
A.2.9	Geometrische Linearisierung	A-7
A.2.10	Volumendehnung und Kompression.....	A-8
A.3	Spannungen (Kinetik)	A-8
A.3.1	Spannungstensor σ	A-9
A.3.2	Hauptspannungen, Spannungsdeviator und Invarianten	A-10
A.3.3	Oktaederspannungen und Haigh-Westergaard-Koordinaten.....	A-12
A.3.4	Materielle Objektivität.....	A-15
A.4	Bilanzgleichungen.....	A-17
A.4.1	Massenbilanz	A-17
A.4.2	Impulsbilanz.....	A-18
A.4.3	Energiebilanz	A-18
A.4.4	Prinzip der Irreversibilität und Entropiebilanz.....	A-20
A.5	Konstitutive Gleichungen.....	A-21
A.5.1	Lineare, isotrope Elastizität.....	A-21
A.5.2	Plastizität.....	A-23
A.5.2.1	<i>Fließflächen</i>	A-24
A.5.2.2	<i>Be- und Entlastungskriterium</i>	A-27

A.5.2.3	<i>Fließregel</i>	A-28
A.5.2.4	<i>Ergänzende Anmerkungen</i>	A-29
B	Ergänzungen zu v_S-v_I-Beziehungen	B-1
C	Modellierung von Böden mit AUTODYN	C-1
C.1	Identifikation eines geeigneten Stoffgesetzes für Böden unter hochdynamischer Beanspruchung	C-1
C.1.1	Shock EOS	C-1
C.1.2	P- α EOS	C-3
C.1.3	Compaction EOS Linear	C-5
C.2	In AUTODYN implementierte Festigkeitsmodelle.....	C-5
C.2.1	Festigkeitsmodelle nach von Mises sowie Drucker & Prager.....	C-6
C.2.2	Festigkeitsmodell „Mo Granular“	C-6
C.3	Das SAND-Modell in AUTODYN	C-7
C.3.1	Das ursprüngliche Modell nach Laine & Sandvik	C-7
C.3.2	Modifikationen des ursprünglichen SAND-Modells	C-8
C.3.2.1	<i>Das CU-ARL-Modell</i>	C-8
C.3.2.2	<i>Modifikation des Entlastungsvorgangs</i>	C-8
C.4	3-Phasen-Bodenmodelle für Explosionsbeanspruchung	C-10
C.5	Identifikation eines geeigneten Stoffgesetzes für Böden unter hochdynamischer Beanspruchung	C-12
C.6	Stoffgesetz-Parameter des gewählten Materials SAND_Mod3a	C-12
D	Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung	D-1
D.1	<i>Fourier</i> -Reihe und <i>Fourier</i> -Transformation für zeitkontinuierliche Funktionen.....	D-1
D.2	Abtastung, diskrete Signalfolgen und DFT	D-2
D.3	DFT bei nicht-periodischen Signalfolgen, Leckphänomen und Fensterung	D-3
D.4	Komplexität und schnelle <i>Fourier</i> -Transformation (FFT).....	D-6

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1 Dolinenartige Sackung unterhalb eines Einsatzfahrzeugs (links), Hohlraumbildung unterhalb eines Gebäudes und Abriss der gesamten Gebäudeecke (rechts)	1
Abbildung 2.1 Infinitesimales Volumenelement mit Variation der Spannungen	5
Abbildung 2.2 Stab und Stabelement bei Beanspruchung durch Longitudinalwellen (Links), Scherwellen (Mitte) und Torsionswellen (Rechts).....	8
Abbildung 2.3 Wellengeschwindigkeits-verhältnisse von Longitudinalwellen (P), Scherwellen (S) und <i>Rayleigh</i> -Wellen (R) im elastischen Halbraum; aus <i>Studer et al.</i> [16, p. 44]	9
Abbildung 2.4 Horizontale und vertikale Verhältnisse der Partikel- verschiebungsamplituden von <i>Rayleigh</i> -Wellen im elastischen Halbraum in Abhängigkeit der Tiefe z und der Wellenlänge L_R ; aus <i>Studer et al.</i> [16, p. 44].....	10
Abbildung 2.5 Dämpfungsverhältnisse unterschiedlicher Wellentypen im homogenen, isotropen, elastischen Halbraum infolge eines vertikal oszillierenden Kreisfundaments an der Halbraumoberfläche; aus <i>Studer et al.</i> [16, p. 176].....	10
Abbildung 2.6 Einaxialer Spannungszustand in einem Stab – Spannungs-Verzerrungs- Kurve (links), Wellenform zu unterschiedlichen Zeitpunkten (rechts); nach <i>Meyers</i> [13, p. 69].....	11
Abbildung 2.7 Idealisierte σ_1 - ε_1 - und p - θ -Kompressionskurve im einaxialen Verzerrungszustand.....	12
Abbildung 2.8 Belastungskurve (links), Nichtlineare Kompressionskurve (Mitte) und Profil der plastischen Welle zu unterschiedlichen Zeitpunkten (rechts); nach <i>Hiermaier</i> [18, p. 156].....	14
Abbildung 2.9 <i>Riemann</i> -Problem mit den Zustandsvariablen vor und hinter der Schockfront	15
Abbildung 2.10 „Schneepflug“-Prinzip für ein Fluid mit Geschwindigkeit $v_0 = 0$ im Ausgangszustand.....	15
Abbildung 2.11 Zustandsfläche, <i>Hugoniot</i> -Kurve und <i>Rayleigh</i> -Gerade; nach <i>Hiermaier</i> [18, p. 169].....	18
Abbildung 2.12 Rechteckiger Schockimpuls (links), p - V' -Kurve mit <i>Rayleigh</i> -Gerade der Belastung, Entspannungsisentrope und zwei Entlastungssprüngen (rechts), nach <i>Cooper</i> [20, p. 224]	19
Abbildung 2.13 Zeitliche Entwicklung des ursprünglich rechteckigen Schockimpulses infolge Entlastung durch zwei Entlastungssprünge, nach <i>Cooper</i> [20, p. 224].....	19
Abbildung 2.14 Zeitliche Entwicklung des ursprünglich rechteckigen Schockimpulses infolge Entlastung durch sechs Entlastungssprünge	20

Abbildung 2.15	Relative Positionen der <i>Hugoniot</i> -Kurven und Isentropen, Geometrische Interpretation des Energie- und Entropiezuwachses bei Schockbelastung; nach <i>Zel'dovich & Raizer</i> [21, pp. 57-67]	21
Abbildung 2.16	Auftreffen einer ebenen Longitudinalwelle unter dem Einfallswinkel φ_1 auf die Grenzfläche zweier Medien unterschiedlicher Impedanz; nach <i>Meyers</i> [13, p. 46]	23
Abbildung 2.17	Spannung und Partikelgeschwindigkeit bei Reflexion am freien Ende (links) und am starren Ende (rechts)	24
Abbildung 2.18	Effekte einer ebenen Welle, die parallel zur freien Oberfläche verläuft; nach <i>Rinehart</i> [15, p. 98].....	26
Abbildung 2.19	Entstehung einer Refraktionswelle; aus <i>Studer et al.</i> [16, p. 92].....	27
Abbildung 3.1	Abgrenzung unterschiedlicher Testmethoden hinsichtlich der Verzerrungsrate und der relevanten dynamischen Effekte; in Anlehnung an <i>Nemat-Nasser</i> [24] [25]	29
Abbildung 3.2	Klassischer <i>Split-Hopkinson</i> pressure bar – Prinzipdarstellung	31
Abbildung 3.3	Vereinfachtes <i>Lagrange</i> -Diagramm der Wellenfortpflanzung in einem <i>Split-Hopkinson</i> pressure bar; nach <i>Ramesh</i> [26, p. 3]	31
Abbildung 3.4	Verzerrungs-Zeit-Verläufe für SHPB-Versuche mit Kalkstein ohne (links) und mit Puls Shaping (rechts); aus <i>Frew et al.</i> [30]	34
Abbildung 3.5	Modifizierte SHPB-Konfiguration – Spannungskomponenten und Parameter.....	35
Abbildung 3.6	Schematische Darstellung des Planar-Platten-Versuchs – Messung der Schockwellengeschwindigkeit v_S mittels (a) VISAR, (b) Spannungssensoren	37
Abbildung 3.7	Ebene Schockkompressionswelle und von den Rändern einfallende Entspannungswellen; nach <i>Field et al.</i> [28]	37
Abbildung 3.8	Impedanz-Match-Methode – (a) Idealisierte Messwertkurven, (b) Vereinfachtes <i>Lagrange</i> -Diagramm, (c) Ermittlung der gesuchten <i>Hugoniot</i> -Kurve in der σ_x - v_1 -Ebene; nach <i>Chapman et al.</i> [37].....	38
Abbildung 3.9	Mögliche Anordnung von Spannungssensoren bei Felsgestein – G1 und G2 zur Messung der Horizontalspannung, G3 zur Aufzeichnung der Axialspannung; aus <i>Espinosa & Nemat-Nasser</i> [39].....	40
Abbildung 3.10	Vergleich der <i>Hugoniot</i> -Kurven eines Sandes – v_S - v_1 -Beziehungen (links), einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ (rechts).....	41
Abbildung 3.11	Schockdaten aus der Literatur für trockene Sande – (a) v_S - v_1 - Beziehungen, (b) einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$	44
Abbildung 3.12	Vergleich der <i>Hugoniot</i> -Daten von Tonen – v_S - v_1 -Beziehungen (links), einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ (rechts)	45
Abbildung 3.13	Schockdaten aus der Literatur für bindige Böden – (a) v_S - v_1 - Beziehungen, (b) einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$	47
Abbildung 3.14	Kompressionsphasen bei Lockergestein – v_S - v_1 -Beziehung (links), einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ (rechts)	49

Abbildung 3.15	Kugelpackungen – Einfach kubisch und kubisch flächenzentriert; nach <i>Richart et al.</i> [14] und <i>Benz</i> [62].....	50
Abbildung 3.16	Einfluss der Korngrößenverteilung (FQS: enggestufter Feinsand, CQS: enggestufter Grobsand, WGS: weitgestufter Sand) – Kompressionskurve $\sigma_x(\epsilon_x)$ (links) und Druck-Porenzahl-Diagramm $e(\sigma_x)$ (rechts); aus <i>Huang et al.</i> [69].....	52
Abbildung 3.17	Einfluss der Korngrößenverteilung für trockene Sande bei hohen Verzerrungsraten – v_s - v_1 -Beziehung (links) und einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ (rechts); Daten von <i>Dianov et al.</i> [42]	52
Abbildung 3.18	Einfluss des Anfangssättigungsgrads S_{r0} auf das einaxiale Kompressionsverhalten von Böden; nach <i>Omidvar et al.</i> [61]	54
Abbildung 3.19	Einfluss des Anfangssättigungsgrads S_{r0} auf das Kompressionsverhalten von Sanden bei hohen Verzerrungsraten; Daten von <i>Chapman et al.</i> [37]	54
Abbildung 3.20	Idealisiertes Be- und Entlastungsverhalten von Böden.....	55
Abbildung 3.21	Be- und Entlastungspfade eines Sandes (links), Schallgeschwindigkeit und Druck bei Be- und Entlastung (rechts); nach <i>Laine & Larsen</i> [75]	56
Abbildung 3.22	Kompressionskurven und Entlastungspfade aus modifizierten SHPB-Versuchen mit Sand – Druck-Porenzahl-Diagramm von <i>Luo et al.</i> [33] (links), $\sigma_x(\epsilon_x)$ -Diagramm von <i>Bragov et al.</i> [36].....	56
Abbildung 3.23	Bestimmung des Entlastungsverhaltens aus einem Schockzustand nach <i>Braithwaite et al.</i> [76] – (a) Versuchsaufbau, (b) <i>Hugoniot</i> -Kurve und Entlastungspfade in der $\sigma_x(v_1)$ -Ebene	57
Abbildung 3.24	Kompressionskurven granularer Materialien in Abhängigkeit des Spannungszustands; nach <i>Richart et al.</i> [14],	58
Abbildung 3.25	Kompressionskurven aus SHPB-Versuchen – (a) Einfluss des seitlichen Stützdrucks; aus <i>Kabir et al.</i> [72], (b) Einfluss des Hülsenmaterials; aus <i>Lu et al.</i> [31].....	59
Abbildung 3.26	Scherparameter für das <i>Mohr-Coulombsche</i> Bruchkriterium in unterschiedlichen Ebenen – $\phi^\# = f(\phi)$ (links), $c^\#/c = f(\phi)$ (rechts)	61
Abbildung 3.27	Einfluss des Wassergehalts w_0 (links) bzw. des Sättigungsgrads S_{r0} (rechts) auf den „Reibungswinkel“ $\phi^\#$; Daten von <i>Abdel-Malek et al.</i> [80]	61
Abbildung 3.28	Pressure-Shear Plate Impact – (a) Versuchsaufbau nach <i>Nemat-Nasser</i> [25], (b) <i>Lagrange</i> -Diagramm nach <i>Vogler et al.</i> [82].....	63
Abbildung 4.1	Einteilung der explosiven Stoffe; nach <i>Heinze</i> [87], <i>Köhler et al.</i> [90], <i>Roschlau</i> [89]	69
Abbildung 4.2	Eigenschaften und Kennwerte von Explosivstoffen nach DIN 20163 [91]	70
Abbildung 4.3	Vereinfachtes ZDN-Modell – p - V' - <i>Hugoniot</i> -Kurven (links), p - x -Diagramm einer Detonationswelle (rechts); nach <i>Cooper</i> [20]	71
Abbildung 4.4	Kopplungsfaktor f für Lockergestein nach <i>Bulson</i> [98].....	75

Abbildung 4.5	Peak-Partikelgeschwindigkeit $v_{1,\max}(R = r/W^{1/3})$ nach <i>Drake & Little</i> [3]. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$, Bodenparameter gemäß Tabelle 4-1	76
Abbildung 4.6	Spitzenüberdruck $p_{1,\max}(R = r/W^{1/3})$ nach <i>Drake & Little</i> [3]. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$, Bodenparameter gemäß Tabelle 4-1	76
Abbildung 4.7	Idealisierter Verlauf der Partikelgeschwindigkeit $v_1(t)$ für die empirischen Modelle nach <i>Drake & Little</i> [3] sowie <i>Drake et al.</i> [96]	80
Abbildung 4.8	<i>Drake & Little</i> [3] \Leftrightarrow <i>Drake et al.</i> [96] – Peak-Partikelgeschwindigkeit $v_{1,\max}(R_{\text{TNT}})$. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$	81
Abbildung 4.9	<i>Drake & Little</i> [3] \Leftrightarrow <i>Drake et al.</i> [96] – Spitzenüberdruck $p_{1,\max}(R_{\text{TNT}})$. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$	81
Abbildung 4.10	<i>Drake & Little</i> [3] \Leftrightarrow <i>Drake et al.</i> [96] – Partikelgeschwindigkeit $v_1(t)$ infolge $W_{\text{TNT}} = 1$ kg bei $r = 2,0$ m. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$	82
Abbildung 4.11	<i>Drake & Little</i> [3] \Leftrightarrow <i>Drake et al.</i> [96] – Überdruck $p_1(t)$ infolge $W_{\text{TNT}} = 1$ kg bei $r = 2,0$ m. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$	83
Abbildung 4.12	Mögliche Schadensbilder infolge Explosionen innerhalb des Baugrunds	84
Abbildung 4.13	(a) Amplituden der Systemantworten in Abhängigkeit der Hauptfrequenz, (b) „Diskrete“ Massenverteilung zur Berücksichtigung lokaler Eigenformen; aus <i>Lu et al.</i> [102]	86
Abbildung 5.1	„Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“ – Vorgehen in Anlehnung an DIN 4150-3 [107], Anhang D.2	91
Abbildung 5.2	Zulässige Partikel- und Fundamentgeschwindigkeitsspektren $v_{1,\text{zul}}(f)$ nach <i>Lu et al.</i> [108] und AASTP-1 [105] sowie $v_{F,\text{zul}}(f)$ nach DIN 4150-3 [107]	94
Abbildung 5.3	Normierter Schubmodul in Abhängigkeit der dynamischen Schubverzerrungsamplitude γ ; aus [114]	95
Abbildung 5.4	Polynomische Funktionen $\gamma_{tl}(I_p)$ sowie $\gamma_{tv}(I_p)$ auf Basis der Diagramme von <i>Vuketic</i> [110] sowie <i>Hsu & Vuketic</i> [111]	97
Abbildung 5.5	Veränderung des Porenanteils infolge Sackung	98
Abbildung 5.6	Definitionen der Setzung s , der Verkantung α sowie der Winkelverdrehung β	99
Abbildung 5.7	Vergleich SAND_Mod3a \Leftrightarrow <i>Drakesche</i> Modelle – Maximale Partikelgeschwindigkeit $v_{1,\max}(R_{\text{TNT}})$	101
Abbildung 5.8	Vergleich SAND_Mod3a \Leftrightarrow <i>Drakesche</i> Modelle – Spitzenüberdruck $p_{1,\max}(R_{\text{TNT}})$	101
Abbildung 5.9	1D-Wedge-Modell mit ebenem Keilsegment für den Vollraum	103
Abbildung 5.10	Konvergenzuntersuchung mit dem 1D-Wedge-Modell – Gesamtmodell (links), Modellspitze mit TNT-Ladung (rechts)	103
Abbildung 5.11	Spitzendrucke $p_{1,\max}$ für Entfernungen $75 \text{ m} \leq x \leq 125 \text{ m}$ in Abhängigkeit der Elementanzahl n und der Elementbreite dx	104
Abbildung 5.12	Druck-Zeitverläufe in der Entfernung $x = 75 \text{ m}$ ($R = 15 \text{ m/kg}^{1/3}$) in Abhängigkeit der Elementbreite dx	105

Abbildung 5.13	Radialsymmetrische 2D-Berechnung mit sukzessivem Remapping – Vergrößerung des Modellbereichs mit dem Faktor 2 bei konstanter Zellenanzahl; aus <i>Laine & Larsen</i> [99].....	106
Abbildung 5.14	2D-Modellaufbau für die Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“	108
Abbildung 5.15	Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“ – Berechnungsschritte 1 bis 8 (hier: Tiefe des Ladungsschwerpunkts $d = 0,5$ m)	109
Abbildung 5.16	Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“ – Aufteilung der gesamten Welle bzw. des Zeitverlaufs in einzelne Wellen- bzw. Zeitabschnitte	110
Abbildung 5.17	Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“ – Wellenfront des zweiten Zeitabschnitts (transmittierte Welle) und künstlich erzeugte reflektierte Wellenfront	111
Abbildung 5.18	Künstliche Sprünge in den Zeitverläufen infolge Unterteilung der Welle in zwei Abschnitte für die in Abbildung 5.17 markierten Messpunkte.....	113
Abbildung 5.19	Vergleich der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $v_y(t)$ für die in Abbildung 5.20 markierten Messpunkte	114
Abbildung 5.20	Übergang der Wellenfront über gekoppelte Knoten – Schachbrettmuster in der Wellenfront und der reflektierten Störung (beispielhaft für $d = 2,0$ m).....	115
Abbildung 5.21	Spitzenwerte des Drucks in unterschiedlichen Tiefen x in Abhängigkeit der horizontalen Entfernung $y = r_{\text{hor}}$ (beispielhaft für $d = 2,0$ m)	116
Abbildung 5.22	Spitzenluftdruck $p_{1,\text{max}}$ in $x = 1,5$ m über Geländeoberkante – Vergleich der AUTODYN-Werte mit den Näherungswerten gemäß Formel (5.27) und Tabelle 5-4	117
Abbildung 5.23	Einfluss der Ladungstiefe d_{TNT} auf den Spitzenluftdruck $p_{1,\text{max}}$ (hier: bei $r_{\text{hor}} = 5,0$ m) – Vergleich der AUTODYN-Werte mit einem Polynomansatz für die Parameter A , n und B in Formel (5.27).....	118
Abbildung 5.24	Einfluss der Ladungstiefe d_{TNT} auf den Spitzenluftdruck $p_{1,\text{max}}$ – Vergleich des multiplikativen Ansatzes (5.28) mit den AUTODYN-Werten	118
Abbildung 5.25	Startzeit t_a und Peakzeit t_p des Luftdruck – Vergleich der AUTODYN-Werte mit den Näherungswerten gemäß Gleichung (5.29) und Tabelle 5-5.....	119
Abbildung 5.26	Dämpfungskoeffizient α – Vergleich der AUTODYN-Werte mit der Näherungsformel (5.30)	120
Abbildung 5.27	Luftdruck-Zeitverläufe – Vergleich der original AUTODYN-Daten und der zugehörigen gleitenden Mittelwerte mit den Näherungsformeln	121

Abbildung 5.28	Horizontale Entfernung $r_{\text{hor,safe/lim}}$ in Abhängigkeit der Ladungstiefe d_{TNT} für unterschiedliche zulässige Werte des Spitzenluftdrucks $p_{1,\text{zul}} \dots$	122
Abbildung 5.29	Gleitende Mittelwertbildung – v_x und v_y für $d_{\text{TNT}} = 0,5$ m bei $r_{\text{hor}} = 30$ m und $x = -6$ m	122
Abbildung 5.30	Vertikale Partikelgeschwindigkeit $v_x(t)$ für unterschiedliche Messpunkttiefen x , hier beispielhaft für $r_{\text{hor}} = 30$ m und Ladungstiefen $d_{\text{TNT}} = 0,5$ m bzw. $d_{\text{TNT}} = 2,0$ m	123
Abbildung 5.31	Normierte Betragsspektren der horizontalen Partikelgeschwindigkeit v_y für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT} und Messwerttiefe x , hier beispielhaft für $r_{\text{hor}} = 22,5$ m	125
Abbildung 5.32	Spitzenwert $v_{y,\text{max}}$ der horizontalen Partikelgeschwindigkeit für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT} und Messpunkttiefen x	126
Abbildung 5.33	Sichere horizontale Entfernung $r_{\text{hor,safe}}$ für unbeschädigte Bauwerke in Abhängigkeit der Ladungstiefe d_{TNT} und der Gründungstiefe x	128
Abbildung 5.34	Horizontale Grenzentfernung $r_{\text{hor,lim}}$ für beschädigte aber noch tragfähige Bauwerke in Abhängigkeit der Ladungstiefe d_{TNT} und der Gründungstiefe x	128
Abbildung 5.35	Ermittlung der Näherungsfunktion $ \varepsilon_{xy} _{\text{max}} = f(r_{\text{hor}})$ für den maximalen Betrag der Schubverzerrungen, hier beispielhaft für $d_{\text{TNT}} = 0,5$ m und $x = -1,0$ m	129
Abbildung 5.36	Sackungsbedingte Winkelverdrehung $\tan \beta = f(r_{\text{hor}})$ für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT}	130
Abbildung 5.37	Horizontale Grenzentfernungen $r_{\text{hor,lim}}$ für das Schadensbild „Unzulässige Winkelverdrehung der Fundamente infolge Sackungen“	131
Abbildung 5.38	Sichere horizontale Entfernung $r_{\text{hor,safe}}$ für unbeschädigte Bauwerke	133
Abbildung 5.39	Horizontale Grenzentfernung $r_{\text{hor,lim}}$ für beschädigte Bauwerke mit Resttragfähigkeit	133

Tabellenverzeichnis

Tabelle 3-1	Parameter und Schockdaten für Sande aus der Literatur	42
Tabelle 3-2	Parameter und Schockdaten für bindige Böden aus der Literatur	46
Tabelle 4-1	Bodenparameter für unterschiedliche Böden [4, p. 138]	74
Tabelle 4-2	Bodenparameter für unterschiedliche Böden gemäß <i>Drake et al.</i> [96]	79
Tabelle 5-1	Schadensausmaß in Abhängigkeit des Freifeld-Spitzenüberdrucks in Luft; Auszug aus Tabelle 5.1-1 von <i>Steidinger & Krüning</i> [106]	90
Tabelle 5-2	Zulässige Fundamentalschwinggeschwindigkeiten $v_{F,zul}$ gemäß DIN 4150-3 [107]	93
Tabelle 5-3	Polynomkoeffizienten für $\gamma_{tl}(I_p)$ und $\gamma_{tv}(I_p)$ gemäß Gleichung (5.10).....	96
Tabelle 5-4	Koeffizienten A, B und n in Gleichung (5.27) für unterschiedliche Ladungstiefen	117
Tabelle 5-5	Koeffizienten $a_{a/p}$ und $b_{a/p}$ in Gleichung (5.29) für unterschiedliche Ladungstiefen	119
Tabelle 5-6	Koeffizienten a, b und c zur Berechnung des Dämpfungskoeffizienten α (5.30) für unterschiedliche Ladungstiefen.....	120
Tabelle 5-7	Spitzenwert $v_{y,max}$ der horizontalen Partikelgeschwindigkeit – Koeffizienten A und n für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT} und Messpunkttiefen x	127
Tabelle 5-8	Koeffizienten A, B und n für Gleichung (5.40), $a_{a/p}$ und $b_{a/p}$ für Gleichung (5.41) sowie a bis c für Gleichung (5.42), jeweils für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT}	134

Verwendete Symbole und Abkürzungen

Lateinische Großbuchstaben

C_c	Kompressionsbeiwert im eindimensionalen Kompressionsversuch nach DIN 18135	
C_s	Schwellbeiwert im eindimensionalen Kompressionsversuch nach DIN 18135	
$D_{(TNT)}$	Skalierte Tiefe des Schwerpunkts einer Explosivstoffladung unter Geländeoberkante	$[m/kg^{1/3}]$
E	Elastizitätsmodul	$[N/mm^2]$
E	Innere Energie	$[J]$
E_{kin}	Kinetische Energie	$[J]$
E_s	Steifemodul	$[N/mm^2]$
G	Schubmodul	$[N/mm^2]$
$I_i (i = [1; 3])$	Invarianten des <i>Cauchy</i> schen Spannungstensors	variabel
I_p	polares Trägheitsmoment	$[mm^4]$
I_p	Plastizitätszahl	$[-]$
I_D	bezogene Lagerungsdichte	$[-]$
I_T	Torsionsträgheitsmoment	$[mm^4]$
$J_i (i = [1; 3])$	Invarianten des Spannungsdeviators	variabel
K	Kompressionsmodul	$[N/mm^2]$
Q	Wärme	$[J]$
$R_{(TNT)}$	Skalierte Entfernung vom Ladungsschwerpunkt	$[m/kg^{1/3}]$
S	Spannungsdeviator	$[N/mm^2]$
S	Entropie	$[J/K]$
S_i	Parameter einer v_s - v_1 -Beziehung	variabel
S_r	Sättigungsgrad	$[-]$
T	Absolute Temperatur	$[K]$
V	Volumen	$[m^3]$
V^c	Spezifisches Volumen	$[m^3/kg]$
V_F	Übertragungsfaktor	$[-]$
$W_{(TNT)}$	Masse einer Explosivstoffladung/ Ladungsmasse	$[kg]$

Z	Impedanz	[kg/(m ² ·s)]
---	----------	--------------------------

Lateinische Kleinbuchstaben

c	Kohäsion	[kN/m ²]
c	Wellengeschwindigkeit (allgemein)	[m/s]
c ₀	Parameter einer v _s -v ₁ -Beziehung	[m/s]
c _{el,L}	Elastische Longitudinalwellengeschwindigkeit in einem Stab	[m/s]
c _B	Kompressionswellen-/ Schallgeschwindigkeit in einem idealen Fluid	[m/s]
c _P	Longitudinal-/ Primärwellengeschwindigkeit	[m/s]
c _S	Schub-/ Sekundärwellengeschwindigkeit	[m/s]
c _U	Geschwindigkeit der Entlastungswelle im komprimierten Material	[m/s]
c _r	Reflexionsfaktor	[-]
c [*]	Kohäsion in der p-q-Ebene	[kN/m ²]
d _(TNT)	Tiefe des Schwerpunkts einer Explosivstoffladung unter Geländeoberkante	[m]
e _i	Kartesische Basisvektoren (i = 1, 2, 3)	[-]
e	Spezifische innere Energie	[J/kg]
e	Porenzahl	[-]
f	Erdstoßkopplungsfaktor	[-]
f	Frequenz	[Hz]
n	Porenanteil	[-]
p	Isotroper Druck	[N/mm ²]
q	<i>Roscoe</i> -Invariante	[N/mm ²]
r	Abstand vom Ladungszentrum	[m]
r _{hor}	Horizontale Entfernung vom „Epizentrum“ einer Explosion	[m]
s	Setzung	[m]
t	Zeit ab Explosion	[ms]

t_a	Ankunftszeit der Explosionswelle am Beobachtungspunkt	[ms]
t_p	Zeitpunkt, an dem am Beobachtungspunkt der Spitzenüberdruck erreicht wird	[ms]
v	Partikelgeschwindigkeit	[m/s]
w	Wassergehalt	[-]
v_F	Fundamentalschwinggeschwindigkeit	[m/s]
v_S	Schockgeschwindigkeit	[m/s]

Griechische Buchstaben

α	Verkantung aufgrund von Differenzsetzungen benachbarter Fundamente	[°]
β	Winkelverdrehung aufgrund von Differenzsetzungen benachbarter Fundamente	[°]
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	Linearisierter Verzerrungstensor (Ingenieurverzerrungen)	[-]
$\varepsilon_{ij}^{\dot{}} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij}$	Verzerrungsdeviator	[-]
ε_x	Stauchung in Richtung der Axialspannung in (hochdynamischen) Kompressionsversuchen	[-]
ε_θ	Dehnung in Umfangsrichtung in (hochdynamischen) Kompressionsversuchen	[-]
$\dot{\varepsilon}$	Axiale Verzerrungsrate in SHPB-Versuchen auf Grundlage der Ingenieurverzerrungen	[1/s]
ε_V	(Linearisierte) Volumendehnung	[-]
γ_{ij}	Schubverzerrung/ Gleitung/ Scherung	[-]
γ_{tl}	lineare zyklische Grenzscherung	[-]
γ_{tv}	volumetrische zyklische Grenzscherung	[-]
η	relative Kompression	[-]
θ	Kompression	[-]
κ	Isentropenexponenten für Luft	[-]
λ	Erste Lamé-Konstante	[N/mm ²]
μ	Zweite Lamé-Konstante (Schubmodul)	[N/mm ²]

ν	Querdehnzahl	[-]
ξ	Seitendruckbeiwert	[-]
ρ	Dichte	[kg/m ³]
ρ_{00}	Dichte eines porösen Materials vor Schockbelastung	[kg/m ³]
ρ_{MPD}	Maximum Pack Density – Dichte im Punkt der maximalen Lagerungsdichte D_{max}	[kg/m ³]
ρ_s	Dichte des porenfreien Materials	[kg/m ³]
ρ_{TMD}	Theoretical Maximum Density – Dichte am Punkt vollständiger Verdichtung, wo der gesamte Porenraum zusammengepresst ist	[kg/m ³]
σ	<i>Cauchy</i> scher Spannungstensor	[N/mm ²]
σ_i (i = [1; 3])	Haupt(normal)spannung	[N/mm ²]
$\sigma_x = \sigma_1$	Axialspannung und erste Hauptspannung in (hochdynamischen) Kompressionsversuchen	[N/mm ²]
σ_y	Zweite Hauptspannung	[N/mm ²]
	Fließgrenze	
σ_{HEL}	<i>Hugoniot</i> Elastic Limit	[N/mm ²]
τ	Schubspannung	[N/mm ²]
φ	Reibungswinkel	[°]
φ	Einfalls-/ Ausfallswinkel einer Welle an einer Grenzfläche	[°]
φ^*	Reibungswinkel in der p-q-Ebene	[°]
$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	Tensor der linearisierten Starrkörperrotationen um die Koordinatenachsen	[-]
ω	Kreisfrequenz	[Hz]

Indizes

0	Präshockzustand vor Ankunft der Stoßwelle
1	Postschockzustand nach Durchgang der Stoßwelle

1 Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Im Zuge des Bundeswehreinsatzes in Afghanistan kam es ab Frühjahr 2007 zu Schäden, die von dolinenartigen Sackungen¹ der unbebauten Geländeoberfläche (siehe Abbildung 1.1, links) bis hin zu Sackungen im Bereich von Gebäudefundamenten und daraus resultierenden Gebäudeschäden (Abbildung 1.1, rechts) reichten. Die Ursache der Sackungen lag in der metastabilen Struktur der afghanischen Lössböden mit hohen Porenanteilen und schwachen interpartikularen Bindungskräften begründet. Wie die Untersuchungen von *Meier* [1], [2] zeigten, wurden die Sackungen durch Wasserzutritt ausgelöst (Hydrokonsolidation), was Schwächungen und auch die komplette Auflösung der mineralischen, für die Festigkeit des trockenen Lössbodens maßgeblichen Festkörperbrücken zur Folge hatte. Von Seiten des Bundesministeriums der Verteidigung wurde die Frage aufgeworfen, ob ähnliche Sackungen auch durch dynamische Anregung – d.h. durch Erdbeben und vor allem durch unterirdische Explosionen infolge Bomben- und Granateinschlägen – ausgelöst werden können.



Abbildung 1.1 Dolinenartige Sackung unterhalb eines Einsatzfahrzeugs (links), Hohlraumbildung unterhalb eines Gebäudes und Abriss der gesamten Gebäudeecke (rechts)

Bei Explosionen dehnen sich die gasförmigen Reaktionsprodukte schlagartig aus und erzeugen eine sogenannte Stoß- oder Schockwelle mit sehr hohen Drücken und extremen Verzerrungsraten. Die Besonderheiten unterirdischer Explosionen sind, dass sie – in Abhängigkeit der maßgebenden Einflussgrößen wie Explosivstoffmasse, Überdeckung bzw. Ladungstiefe und anstehender Baugrund – deutlich größere Drücke und längere Einwirkungsauern (d.h. größere Impulse) erzeugen können und die Drücke und Partikelbewegungen mit steigender Entfernung gegebenenfalls langsamer abnehmen als bei vergleichbaren freien Explosionen in Luft [3, p. 1], [4, pp. 17-19].

¹ Der Begriff der Sackung wird im Folgenden für Umlagerungen innerhalb des Korngerüst und einer damit einhergehenden, schlagartigen, vom Druck der überlagernden Schichten unabhängigen Verringerung des Porenraums verwendet.

Explosionen und deren Auswirkungen auf Gebäude werden mittels sogenannter Hydrocodes² simuliert. Beispiele für derartige Berechnungen, über die in der einschlägigen Literatur berichtet wurde, sind:

- die Bemessung unterirdischer Schutzbauten auf die Auswirkungen unterirdischer Explosionen in Boden und Fels [5], [6], [7], [8] sowie
- das Szenario eines terroristischen Anschlags mit einer Kontaktexplosion auf Geländeoberkante oder der Explosion leicht oberhalb der Geländeoberkante [9], [10] [11].

Hydrocode-Berechnungen sind meistens sehr zeitaufwendig und erfordern ein gewisses Maß an Spezialwissen auf dem Gebiet der Hochdynamik. Für zivile Anwendungsbereiche wie die Kampfmittelräumung, Sprengvortriebe sowie den Tagebau, wo in der näheren Umgebung der unterirdischen Explosion Bebauung ansteht, ist deshalb ein Hilfsmittel wünschenswert, das eine erste Abschätzung im Hinblick auf die Fragen:

- „Wie groß muss der horizontale Abstand (sichere Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$) zwischen einem Gebäude und dem „Epizentrum“ einer Explosion – gekennzeichnet durch den Explosivstoff, die Ladungsmasse und die Ladungstiefe – mindestens sein, damit das Gebäude nicht beschädigt wird?“
- „Wie groß ist die minimale horizontale Grenz Entfernung $r_{\text{hor, lim}}$ zwischen einem Gebäude und dem „Epizentrum“ einer unterirdischen Explosion, bei deren Einhaltung das Tragwerk zwar beschädigt wird aber nicht vollständig zusammenbricht?“

ermöglicht.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer entsprechenden Entscheidungshilfe. Diese besteht aus Diagrammen, anhand derer die sichere Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$ für unbeschädigte Bauwerke sowie die Grenz Entfernung $r_{\text{hor, lim}}$ schnell und einfach abgelesen werden können. Die Vorgehensweise wird beispielhaft für oberflächennahe, unterirdische Explosionen einer Ladungsmasse von 125 kg TNT, einen trockenen Sand als Baugrund und flachgegründete Gebäude ohne Kellergeschoss vorgeführt.

1.2 Aufbau der Arbeit

Ein Teil der bei Explosionen freigesetzten Energie breitet sich in Wellenform innerhalb des Baugrunds (und bei genügend kleiner Ladungstiefe auch innerhalb der Luft) aus. In Kapitel 2 werden deshalb die theoretischen Grundlagen der Wellenausbreitung erläutert, die für das Verständnis der weiteren Kapitel erforderlich sind. Es wird der Unterschied zwischen elastischen und plastischen Wellen sowie Stoß- bzw. Schockwellen aufgezeigt und auf die maßgebenden Parameter – Spannungsniveau, Verzerrungszustand, Form der

² Hydrocodes sind explizite Gleichungslöser, welche zur Berechnung instationärer, dynamischer Problemstellungen die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen lösen [5].

Kompressionskurve und Verzerrungsrate – eingegangen. Des Weiteren werden die wichtigsten Grenzflächeneffekte erläutert.

Für die meisten Materialien sind deren Eigenschaften vom Verzerrungszustand, der Größe der Verzerrungen, der Verzerrungsrate und der Temperatur abhängig. Um bei hochdynamischen Fragestellungen wie Explosionen und explosionsinduzierten Wellen realistische numerische Ergebnisse erzielen zu können, müssen die konstitutiven Gleichungen auf der Grundlage hochdynamischer Experimente – mit Verzerrungsraten und Spannungen in derselben Größenordnung wie bei Explosionen – entwickelt werden. Bereits in den 1960er-Jahren waren erste Forschungen zum Verhalten von Böden unter hochdynamischen Beanspruchungen durchgeführt worden. Viele maßgebende Erkenntnisse wurden jedoch erst innerhalb der letzten 10 bis 15 Jahre gewonnen. In Kapitel 3 werden die wichtigsten hochdynamischen Versuche vorgestellt, wobei auf die Besonderheiten bei der Untersuchung von Böden eingegangen wird. Des Weiteren wird der aktuelle Stand des Wissens hinsichtlich der experimentellen Ergebnisse und des Bodenverhaltens unter hochdynamischer Beanspruchung bei mittleren und hohen Verzerrungsraten zusammengetragen. Probleme und offene Fragestellungen werden aufgezeigt. Dies ist neben der erwähnten Entscheidungshilfe ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit, da bislang keine entsprechende Zusammenfassung für Böden unter hochdynamischer Beanspruchung bekannt ist.

In Kapitel 4 wird der Bogen zur eigentlichen Fragestellung geschlagen. Es werden die Grundlagen von Explosionen erläutert und ein vereinfachtes Gedankenmodell vorgestellt, bei dem die Reaktionsfront innerhalb des Explosivstoffs als Stoßwelle aufgefasst wird. Des Weiteren werden zwei empirische Modelle vorgestellt, anhand derer eine explosionsinduzierte Wellenausbreitung im Boden – im Folgenden als Erdstoß bezeichnet – näherungsweise berechnet werden kann. Dies ermöglicht eine Bewertung des in den Hydrocode-Berechnungen in Kapitel 5 verwendeten Materialmodells für Boden. Außerdem werden die möglichen Auswirkungen von Erdstoß auf Gebäude und die Schadensbilder vorgestellt.

In Kapitel 5 wird für die relevanten Schadensbilder „Luftstoß“, „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“ sowie „Unzulässige Winkelverdrehungen der Fundamente infolge Sackungen“ das prinzipielle Vorgehen zur Entwicklung der Entscheidungshilfe erläutert. Grundlage der Diagramme sind die Freifeld-Zeitverläufe des Luftdrucks, der Partikelgeschwindigkeit und der Schubverzerrungen innerhalb des Baugrunds als Ergebnis von Hydrocode-Simulationen. Da die für verwandte Fragestellungen in der einschlägigen Literatur beschriebenen Modellierungsansätze nicht zielführend sind, wurde die Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“ entwickelt. Diese wird in Abschnitt 5.3 einschließlich der Vor- und Nachteile ausführlich beschrieben. Die Berechnungen wurden beispielhaft für die Explosion einer Ladungsmasse von 125 kg TNT in einem trockenen Sand durchgeführt, wobei die Ladungstiefe variiert wurde. Abschnitt 5.4 befasst sich mit der Auswertung der numerischen ermittelten Zeitverläufe im Hinblick auf die einzelnen Schadensbilder. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die einzelnen Komponenten der Entscheidungshilfe zusammengefügt. Das Kapitel schließt mit dem Ergebnis dieser Arbeit –

den zwei Diagrammen, anhand derer für oberflächennahe, unterirdische Explosionen die sichere Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$ für unbeschädigte Bauwerke sowie die Grenzentfernung $r_{\text{hor, lim}}$ abgelesen werden können.

In Kapitel 6 werden die maßgebenden Aussagen und Ergebnisse der vorhergehenden Kapitel nochmals knapp und übersichtlich zusammengefasst. Des Weiteren werden Verbesserungsansätze für das im Zuge dieser Arbeit entwickelte Verfahren genannt.

In Anhang A sind die Grundlagen der Kontinuumsmechanik dargestellt. Diese sind nicht Schwerpunkt dieser Arbeit und wurden entsprechend nur bis zu einem Punkt aufgearbeitet, der für das Verständnis der Modellierung und der verwendeten Materialmodelle relevant sind.

In Anhang B wird die Bedeutung des Parameters c_0 in v_S - v_1 -Beziehungen von Böden näher erläutert.

In Anhang C werden verschiedene, in AUTODYN implementierte Materialmodelle, die in der einschlägigen Literatur zur Modellierung von Böden verwendet wurden, verglichen. Das für die eigenen numerischen Simulationen in Abschnitt 5.3 gewählte Materialmodell und die Änderungen im Vergleich zu dem in AUTODYN implementierten, originalen SAND-Modell nach *Laine & Sandvik* [12] werden ausführlich beschrieben.

In Anhang D sind die Grundlagen der *Fourier*-Transformation zusammengefasst.

2 Theoretische Grundlagen der Wellenausbreitung

2.1 Wellen in elastischen, isotropen, homogenen Medien

2.1.1 Longitudinal- und Scherwellen im elastischen Raum

Zur Herleitung der Wellengleichungen im elastischen Raum sind die folgenden Schritte erforderlich (siehe unter Anderem [13, p. 31ff], [14, p. 75ff] und [15, p. 17ff]). Die Gleichungen (2.1) und (2.2) sind materialunabhängig.

- Variation der Spannungen am infinitesimalen Volumenelement

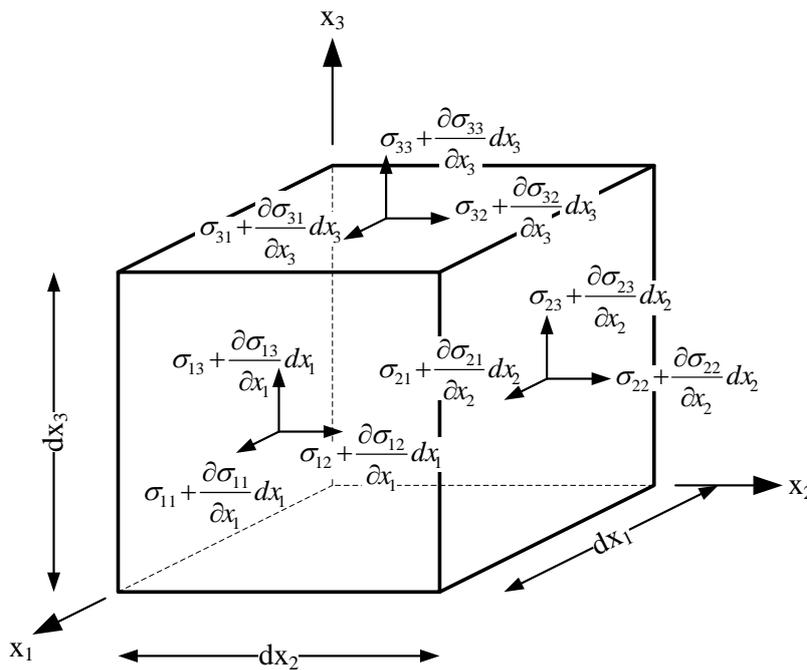


Abbildung 2.1
 Infinitesimales
 Volumenelement mit
 Variation der Spannungen

- Gleichgewicht mit resultierendem äußeren Kraftvektor \mathbf{t} :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{grad} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \cdot \sigma_{ji} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_k} \delta_{kj} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \sigma_{ji,j} \mathbf{e}_i = \sigma_{ij,j} \mathbf{e}_i = \mathbf{t} \quad (2.1)$$

- Berücksichtigung der Impulsbilanz (2.2) unter der Annahme, dass keine Volumenkräfte wirken:

$$\text{grad} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} = \rho \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad \sigma_{ji,j} = \rho \cdot \ddot{x}_i = \rho \cdot \ddot{u}_i \quad (2.2)$$

- Einsetzen der konstitutiven Gleichungen für lineare, isotrope Elastizität (2.3):

$$\lambda \cdot \varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij,j} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk,i} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij,j} = \rho \cdot \ddot{u}_i \quad (2.3)$$

- Berücksichtigung der linearisierten kinematischen Gleichungen (2.4) für infinitesimale Verzerrungen:

$$\lambda \cdot u_{k,ki} + \mu \cdot (u_{i,jj} + u_{j,ij}) = (\lambda + \mu) \cdot u_{j,ij} + \mu \cdot u_{i,jj} = \rho \cdot \ddot{u}_i \quad (2.4)$$

Die Bewegungsgleichung (2.4) im homogenen, isotropen linear elastischen Raum kann unter Berücksichtigung der Volumenverzerrung (2.5)³ sowie des *Laplace*-Operators (2.6) auch in der Form (2.7) dargestellt werden, was ausgeschrieben für die drei Raumrichtungen auf die Gleichungen (2.8) führt.

$$\varepsilon_{V,lin} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I} = \varepsilon_{ii} = \text{div}(\mathbf{u}) = \text{grad} \cdot \mathbf{u} = u_{i,i} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{V,lin} = \varepsilon_{kk} = \frac{-3\nu}{E} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{kk} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk} = 3 \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m = -3 \frac{1-2\nu}{E} p$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (2.6)$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \varepsilon_{V,i} + \mu \cdot \nabla^2 u_i = \rho \cdot \ddot{u}_i \quad (2.7)$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \varepsilon_{V,1} + \mu \cdot \nabla^2 u_1 = (\lambda + \mu) \cdot (u_{1,11} + u_{2,12} + u_{3,13}) + \mu \cdot (u_{1,11} + u_{1,22} + u_{1,33}) = \rho \cdot \ddot{u}_1$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \varepsilon_{V,2} + \mu \cdot \nabla^2 u_2 = (\lambda + \mu) \cdot (u_{1,21} + u_{2,22} + u_{3,23}) + \mu \cdot (u_{2,11} + u_{2,22} + u_{2,33}) = \rho \cdot \ddot{u}_2 \quad (2.8)$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \varepsilon_{V,3} + \mu \cdot \nabla^2 u_3 = (\lambda + \mu) \cdot (u_{1,31} + u_{2,32} + u_{3,33}) + \mu \cdot (u_{3,11} + u_{3,22} + u_{3,33}) = \rho \cdot \ddot{u}_3$$

Im homogenen, isotropen linear elastischen Raum existieren für Gleichung (2.7) genau zwei Lösungen. Die erste Lösung (2.9) erhält man durch Differenzieren der Bewegungsgleichungen (2.8)₁ bis (2.8)₃ nach x_1 , x_2 und x_3 und anschließende Addition. Dies ist die Wellengleichung einer Longitudinalwelle von allgemeiner Form bzw. der Störung ε_v , die sich mit der Wellengeschwindigkeit $c_{el,P}$ (2.10) ausbreitet. Die Partikel schwingen in Wellenfortpflanzungsrichtung. Für $G = 0$ erhält man daraus die Schallgeschwindigkeit $c_{el,B}$ (2.11) in einem idealen Fluid.

$$(\lambda + \mu) \cdot \nabla^2 \varepsilon_v + \mu \cdot \nabla^2 \varepsilon_v = \rho \cdot \ddot{\varepsilon}_v$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon_v = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \varepsilon_v \quad (2.9)$$

$$c_{el,P} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E_S}{\rho}} \quad (2.10)$$

$$c_{el,B} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{c_{el,P}^2 - \frac{4}{3}c_{el,S}^2} \quad (2.11)$$

Durch Differenzieren der Bewegungsgleichung (2.7) nach zwei unterschiedlichen Indizes und anschließende Differenzbildung wird in Gleichung (2.13) der ε_v -Term eliminiert. Berücksichtigung der geometrisch linearen Starrkörperrotationen ω_{ij} (2.12) bzw. (A-44) führt

³ Hinsichtlich einer Herleitung wird auf Anhang A und die Gleichungen (A-46) bzw. (A-132) verwiesen.

auf die zweite Lösung der Gleichung (2.7) – die Störung (2.14) der Starrkörperrotation ω_{ij} , die sich mit der Wellengeschwindigkeit $c_{el,S}$ (2.15) fortpflanzt.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.12)$$

$$\mu \cdot \nabla^2 (u_{i,j} - u_{j,i}) = \rho \cdot (\ddot{u}_{i,j} - \ddot{u}_{j,i}) \quad (2.13)$$

$$\mu \cdot \nabla^2 \omega_{ij} = \rho \cdot \ddot{\omega}_{ij} \quad (2.14)$$

$$c_{el,S} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.15)$$

Zu-Null-Setzen des ε_v -Terms in Gleichung (2.7) führt auf Gleichung (2.16). Isochore Deformationen sind das Merkmal reiner Schubverzerrungen. Die zugehörige Scherwelle (2.16) breitet sich mit derselben Wellengeschwindigkeit $c_{el,S}$ (2.15) aus wie die Rotationswelle (2.14). Scher- und Rotationswellen werden auch als Transversalwellen bezeichnet. Die Schwingungsrichtung der Partikel ist dabei senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung.

$$\mu \nabla^2 u_i = \rho \cdot \ddot{u}_i \quad (2.16)$$

Für einzelne Wellen können mittels der Impulsbilanz (2.2) die linearen Zusammenhänge (2.17) und (2.18) zwischen der Partikelgeschwindigkeit v und der akustischen Impedanz Z gezeigt werden⁴.

$$\text{Longitudinalwelle} \quad \sigma = Z_{P/L} \cdot v = \rho \cdot c_{el,P/L} \cdot \dot{u} \quad (2.17)$$

$$\text{Transversalwelle} \quad \tau = Z_S \cdot v = \rho \cdot c_{el,S} \cdot \dot{u} \quad (2.18)$$

2.1.2 Ebene elastische Wellen in einem zylindrischen Stab

Elastische Bodenparameter als Eingangswerte für seismische Berechnungen können z.B. anhand des Resonant-Column-Versuchs⁵ bestimmt werden. Der *Split-Hopkinson* pressure bar (siehe Abschnitt 3.1.1) dient zur Ermittlung der Bodenparameter bei mittleren Verzerrungsraten. Die Auswertung dieser Versuche beruht auf der Annahme einer eindimensionalen Wellenausbreitung in einem elastischen Stab mit kreisförmigem Querschnitt. Für die drei Bewegungsformen der Longitudinal-, Schub- und Torsionsschwingung nach Abbildung 2.2 können unter der Voraussetzung ebener Querschnitte sowie weiterer idealisierender Annahmen die entsprechenden Wellengleichungen als Sonderfälle aus der Bewegungsgleichung (2.4) bzw. (2.7) hergeleitet werden.

⁴ Dies gilt nicht für die Überlagerung zweier Wellen [17, p. 30].

⁵ Hinsichtlich einer Versuchsbeschreibung wird auf die einschlägige Literatur (z.B. *Studer, Laue & Koller* [18, p. 104ff] verwiesen).

Unter der Annahme eines einaxialen Spannungszustands mit σ_{11} in Stablängsrichtung⁶, $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \cdot \epsilon_{11}$ und $\epsilon_{ij} = 0$ für $i \neq j$ folgt aus Gleichung (2.3) die Longitudinalwellengleichung (2.19)₁ mit der zugehörigen Longitudinalwellengeschwindigkeit $c_{el,L}$ (2.19)₂ in einem Stab mit konstantem Querschnitt. Für Schub- bzw. Torsionsbeanspruchung gelten analog die Gleichungen (2.20) und (2.21).

$$c_{el,L}^2 \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad c_{el,L} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}{1-\nu}} \cdot c_{el,P} \quad (2.19)$$

$$c_{el,S}^2 \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad c_{el,S} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.20)$$

$$c_{el,T}^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad c_{el,T} = \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{\rho \cdot I_p}} \quad (2.21)$$

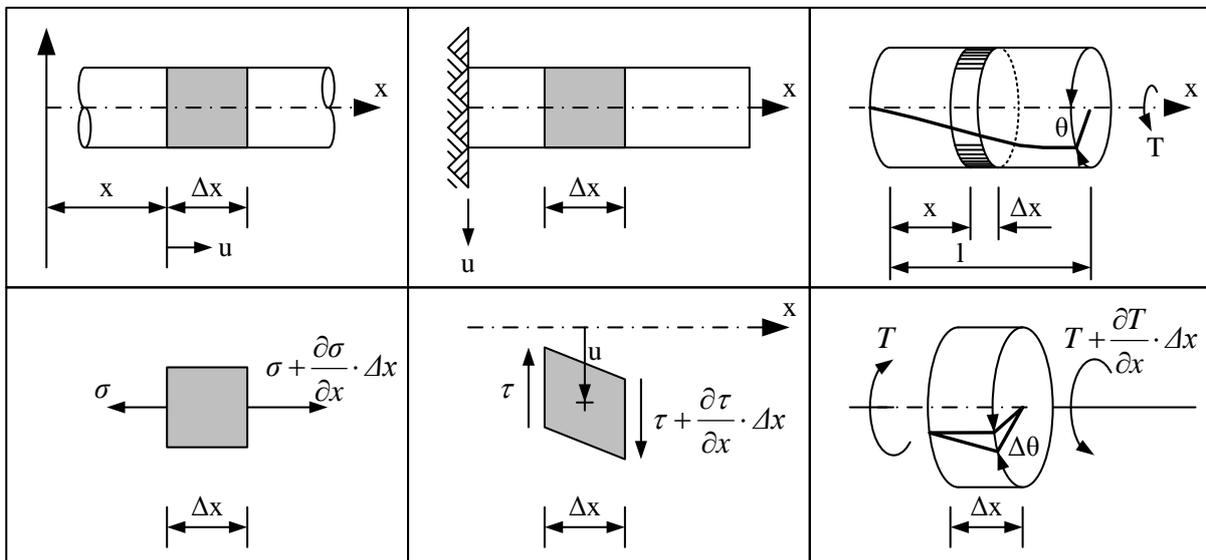


Abbildung 2.2 Stab und Stabelement bei Beanspruchung durch Longitudinalwellen (Links), Scherwellen (Mitte) und Torsionswellen (Rechts)

Die Wellengleichungen (2.19) bis (2.21) stellen hyperbolische, lineare, homogene, partielle Differentialgleichungen zweiten Grades dar. Die Lösung kann sowohl durch Trennung der Veränderlichen (*Bernoulli-Lösung*) als auch mit dem Ansatz von *D'Alembert* erfolgen [13, p. 50f]. Bei der *Bernoulli-Lösung* (2.22) wird die n-te Eigenform $u_n(x, t)$ durch einen Produktansatz dargestellt. Die Funktion $T(t)$ stellt den Zeitverlauf durch eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω dar, und die Funktion $X(x)$ beschreibt den Ortsverlauf durch eine ebenfalls harmonische Schwingung mit der Periode ω/c_{el} . Zur Bestimmung der

⁶ Dies ist gleichbedeutend mit der Vernachlässigung von Trägheitskräften infolge Partikelverschiebungen quer zur Stabachse.

⁷ Im Fall zylindrischer Querschnitte ist das polare Trägheitsmoment I_p gleich dem Torsionsträgheitsmoment I_T ($I_p = I_T = \pi/2 \cdot r^4$), sodass die Wellengeschwindigkeiten bei Schub- und Torsionsbeanspruchung identisch sind.

Koeffizienten A, B, C, D muss das Anfangs-Randwertproblem mit den Anfangsbedingungen $u(x, t = 0)$ und $\dot{u}(x, t = 0)$ gelöst werden. Die Randbedingungen führen auf die charakteristische Gleichung des jeweiligen Systems und die entsprechenden Eigenkreisfrequenzen ω_n . Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Überlagerung aller Eigenschwingungen gemäß Gleichung (2.23).

$$u_n(x, t) = X(x) \cdot T(t) = \left[A \cdot \cos\left(\frac{\omega_n}{c_{el}} x\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\omega_n}{c_{el}} x\right) \right] \cdot [C \cdot \cos(\omega_n t) + D \cdot \sin(\omega_n t)] \quad (2.22)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (2.23)$$

Der Lösungsansatz nach *D'Alembert* gemäß Gleichung (2.24) ist vor allem bei stoßartigen Belastungen vorteilhaft. Dazu wird die Verschiebung $u(x, t)$ durch Überlagerung der linkslaufenden Störung $F(c_{el} \cdot t - x)$ mit der rechtslaufenden Störung $G(c_{el} \cdot t + x)$ dargestellt.

$$u(x, t) = F(c_{el} \cdot t - x) + G(c_{el} \cdot t + x) \quad (2.24)$$

2.1.3 Oberflächenwellen

Im elastischen Halbraum sind neben Longitudinal- und Transversalwellen auch *Rayleigh*-Wellen möglich. Die Annahme einer ebenen Wellenfront senkrecht zur Geländeoberfläche und Berücksichtigung der Randbedingung einer spannungsfreien Oberfläche führt auf die Wellengeschwindigkeitsverhältnisse $c_{el,R}/c_{el,S}$ bzw. $c_{el,R}/c_{el,P}$ (siehe Abbildung 2.3), wobei stets $c_{el,R} < c_{el,S} < c_{el,P}$ gilt. Für die genaue Herleitung wird auf *Richart et al.* [14, p. 80ff] verwiesen.

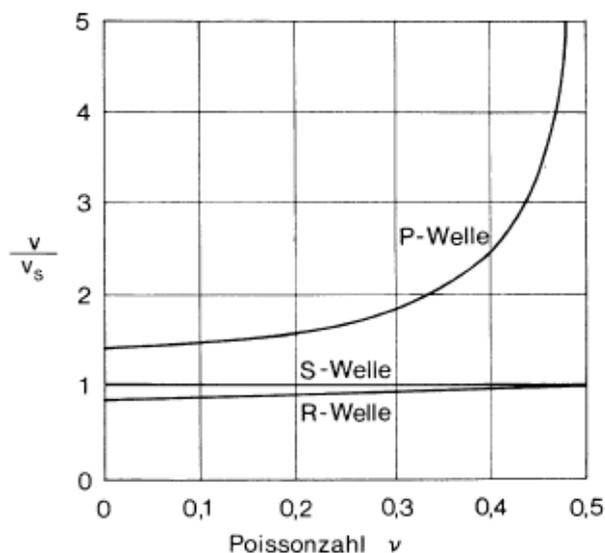


Abbildung 2.3 Wellengeschwindigkeitsverhältnisse von Longitudinalwellen (P), Scherwellen (S) und *Rayleigh*-Wellen (R) im elastischen Halbraum; aus *Studer et al.* [16, p. 44]

Rayleigh-Wellen sind Oberflächenwellen. Mit zunehmender Tiefe z klingen die Verschiebungsamplituden u_x in Wellenfortpflanzungsrichtung sowie u_z senkrecht zur Oberfläche exponentiell ab (siehe Abbildung 2.4). Hochfrequente Wellen mit kurzer Wellenlänge L_R werden schneller gedämpft als niederfrequente Wellen. Die Partikel bewegen

sich auf einer elliptischen Bahn. Im oberen Scheitelpunkt der Ellipse zeigt die Partikelgeschwindigkeit entgegen der Wellenfortpflanzungsrichtung. In Tiefen $0,15 < z/L_R < 0,2$ ändern die Partikel die Umlaufrichtung.

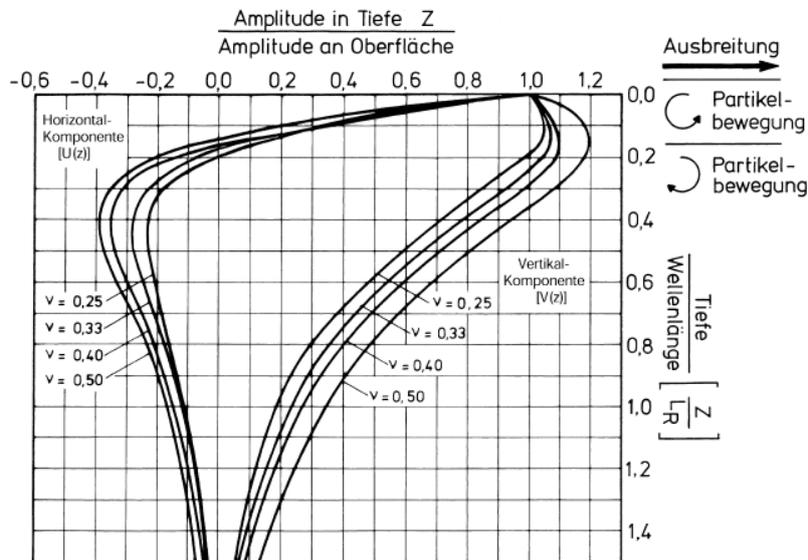


Abbildung 2.4
Horizontale und vertikale Verhältnisse der Partikelverschiebungsamplituden von *Rayleigh*-Wellen im elastischen Halbraum in Abhängigkeit der Tiefe z und der Wellenlänge L_R ; aus *Studer et al.* [16, p. 44]

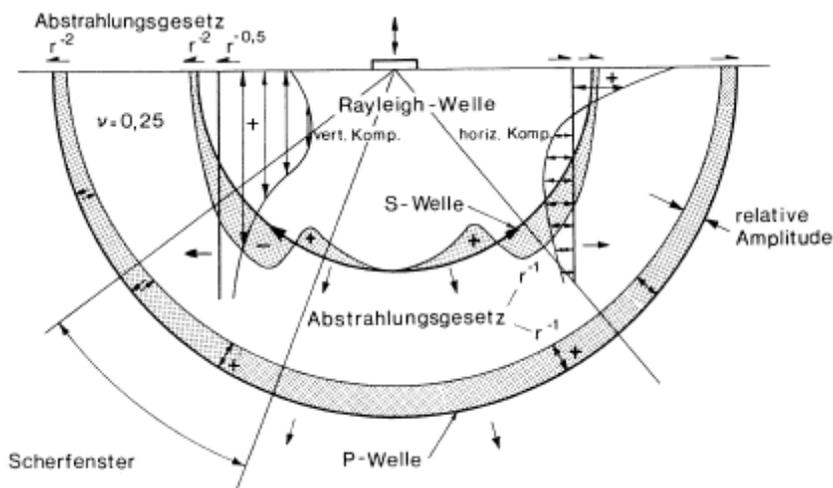


Abbildung 2.5
Dämpfungsverhältnisse unterschiedlicher Wellentypen im homogenen, isotropen, elastischen Halbraum infolge eines vertikal oszillierenden Kreisfundaments an der Halbraumoberfläche; aus *Studer et al.* [16, p. 176]

Im Gegensatz zu den kugelförmigen Wellenfronten der P- und S-Welle, breitet sich die *Rayleigh*-Welle radial mit einer zylindrischen Wellenfront aus (siehe Abbildung 2.5). Mit zunehmendem Abstand r von der Belastungsquelle nehmen die Energiedichte und die Partikelverschiebungsamplituden ab (geometrische Dämpfung). Während die Amplituden der P- und S-Wellen an der Halbraumoberfläche mit einem Faktor r^{-2} und in Bereichen außerhalb des Oberflächeneinflusses mit einem Faktor r^{-1} gedämpft werden, beträgt der Dämpfungsfaktor bei R-Wellen lediglich $r^{-1/2}$. Die angegebenen Dämpfungsfaktoren gelten jedoch nur für die Wellenfront. Hinter der Wellenfront ist die Dämpfung keine einfache Funktion des Abstands r mehr, da sich die Wellenform ständig ändert [15, p. 42]. Da *Rayleigh*-Wellen neben der geringeren geometrischen Dämpfung und der damit verbundenen größeren Reichweite auch noch den Großteil der eingeleiteten Schwingungsenergie

transportieren⁸, bergen sie das größte Zerstörungspotential für Gründungen auf und nahe der Geländeoberfläche.

2.2 Plastische Kompressionswellen und Schockwellen

Schockwellen sind immer Kompressionswellen. Der Einfachheit halber werden im Folgenden Druckspannungen und daraus resultierende Stauchungen bzw. Kompression mit positivem Vorzeichen dargestellt.

Auf der linken Seite von Abbildung 2.6 ist die Spannungs-Verzerrungs-Kurve für den **einaxialen Spannungszustand** in einem Stab (mit $\sigma_{ij} = 0$ für $i, j \neq 1$ sowie $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \cdot \varepsilon_{11}$ und $\varepsilon_{ij} = 0$ für $i \neq j$) dargestellt. Die Steigung $\partial\sigma_{11}/\partial\varepsilon_{11}$ ist für $\sigma_{11} > \sigma_y$ kleiner als der E-Modul und nimmt mit σ_{11} stetig ab. Entsprechend laufen plastische – oberhalb der Fließgrenze σ_y ausgelöste – Wellenpakete mit einer geringeren Geschwindigkeit $c_{pl,L}$ als der elastischen Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit $c_{el,L}$ (2.19)₂, und es gilt:

$$c_{el,L} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{\partial\sigma_{11}/\partial\varepsilon_{11}|_{\sigma_{11} < \sigma_y}}{\rho}} > c_{pl,L} = \sqrt{\frac{\partial\sigma_{11}/\partial\varepsilon_{11}|_{\sigma_{11} \geq \sigma_y}}{\rho}} \quad (2.25)$$

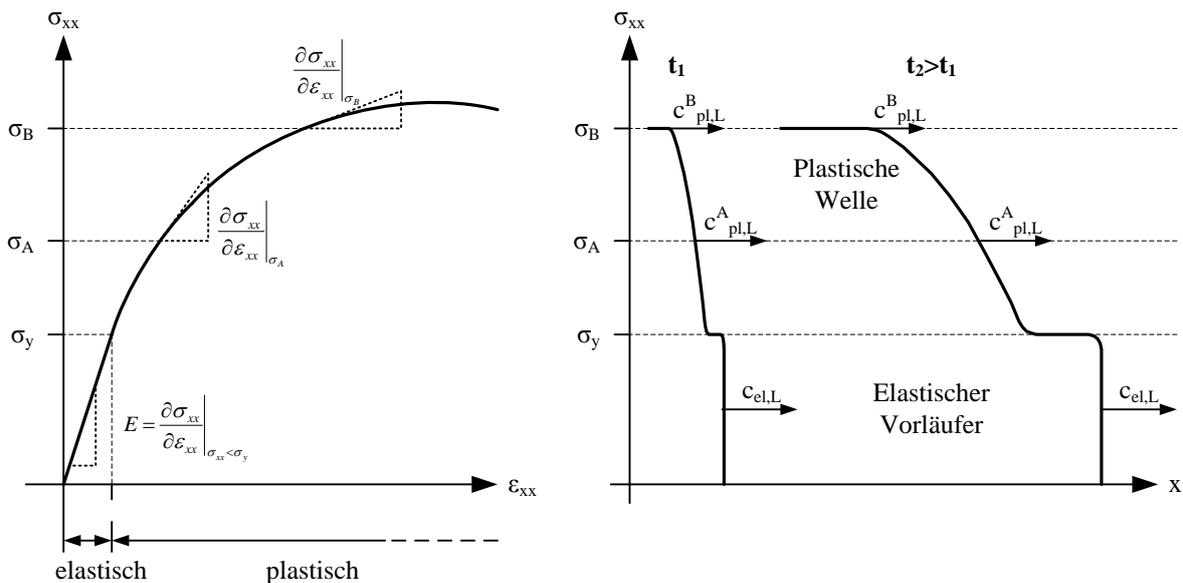


Abbildung 2.6 Einaxialer Spannungszustand in einem Stab – Spannungs-Verzerrungs-Kurve (links), Wellenform zu unterschiedlichen Zeitpunkten (rechts); nach Meyers [13, p. 69]

Die unterschiedlichen Wellengeschwindigkeiten führen dazu, dass die im elastischen Bereich ausgelösten Wellenpakete den plastischen Wellenpaketen enteilen (siehe Abbildung 2.6, rechts). Die Welle wird in eine elastische Vorläuferwelle und eine nachlaufende plastische Welle aufgespalten. Das „Auseinanderziehen“ (oder „Zusammenschieben“) der Wellenform

⁸ Ein Material mit Querdehnzahl $\nu = 0,25$ überträgt 67 % der eingeleiteten Energie durch die R-Welle, 26 % durch die S-Welle und lediglich 7 % durch die P-Welle [16, p. 91].

aufgrund der Druckabhängigkeit der Wellengeschwindigkeit und der daraus folgenden Ausbreitung der Wellenpakete mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten wird Dispersion genannt.

Bereits im elastischen Bereich ist die Wellengeschwindigkeit $c_{el,P}$ (2.10) in einem **einaxialen Verzerrungszustand** (mit der Hauptverzerrung ε_1 und $\varepsilon_i = 0$ für $i \neq 1$ sowie $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) größer als die Wellengeschwindigkeit $c_{el,L}$ (2.19)₂ für den einaxialen Spannungszustand. Unter der Voraussetzung elastisch-ideal-plastischen Materialverhaltens mit $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$ und $\varepsilon_m^p = \varepsilon_{kk}^p = 0$ sowie der *von Mises*-Fließbedingung für einaxiale Verzerrungszustände (2.26) bzw. (A-143) gilt für die maximale Hauptspannung:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \quad (2.26)$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\nu)} \cdot \varepsilon_1 + \frac{2}{3} \sigma_y = K \cdot \varepsilon_1 + \frac{2}{3} \sigma_y = \sigma_m + \frac{2}{3} \sigma_y \quad (2.27)$$

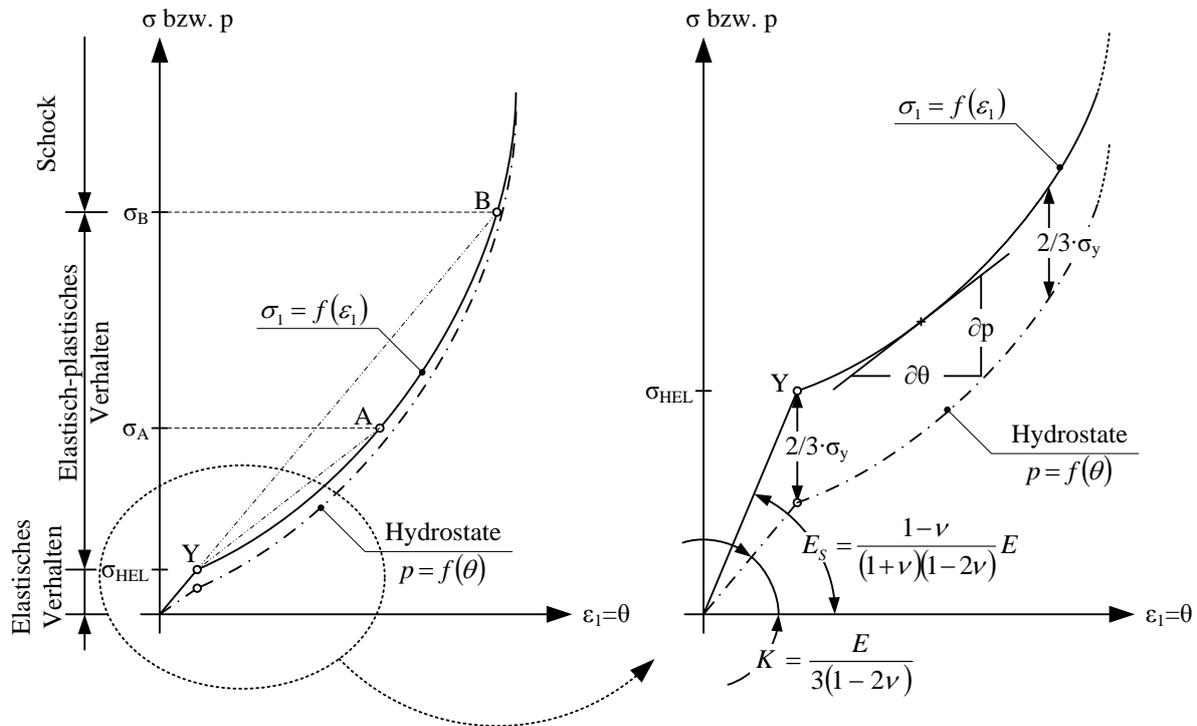


Abbildung 2.7 Idealisierte σ_1 - ε_1 - und p - θ -Kompressionskurve im einaxialen Verzerrungszustand

Die σ_1 -Kurve ist demnach bezüglich der hydrostatischen Kompressionskurve $p = f(\theta)$ um $2/3 \cdot \sigma_y$ nach oben verschoben (siehe Abbildung 2.7). Die maximale Hauptspannung im einaxialen Verzerrungszustand beim Erreichen der Fließgrenze wird auch als *Hugoniot*

Elastic Limit σ_{HEL} bezeichnet [17, p. 81]⁹. Die Anfangssteigung der σ_1 -Kurve entspricht dem Steifemodul E_S (2.28) bzw. (A-137), jene der hydrostatischen Kompressionskurve dem Kompressionsmodul K (2.29) bzw. (A-133).

$$E_s = \frac{1-\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot E = K + \frac{4}{3}G \quad (2.28)$$

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1-2\nu)} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_v} = \frac{-p}{\varepsilon_v} = \frac{-p}{\theta} \quad (2.29)$$

Für $\sigma_1 \gg \sigma_y$ gilt $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_3 \approx \sigma_m$, woraus für die Kompressionswellen- und die Schallgeschwindigkeit $c_p \approx c_B$ folgt. Der Spannungszustand wird mit genügend großem σ_1 hydrostatisch, was gleichbedeutend ist mit der Aussage, dass der Momentanwert des Schubmoduls im Vergleich zum Momentanwert des Kompressionsmoduls vernachlässigbar gering ist. Letzterer entspricht der Tangentensteigung der Kompressionskurve. Mit der Definition des spezifischen Volumens V' (2.30)₁ sowie der Kompression θ (2.31) und (A-47) können der Tangentenkompressionsmodul (2.32) und der Momentanwert der Schallgeschwindigkeit c_B (2.33) berechnet werden.

$$V' = \frac{1}{\rho} \quad \frac{\partial \rho}{\partial V'} = -\frac{1}{(V')^2} = -\rho^2 \quad (2.30)$$

$$\theta = \frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{V'_0 - V'}{V'_0} \quad \frac{\partial \theta}{\partial V'} = -\frac{1}{V'_0} \approx -\frac{1}{V'} \quad (2.31)$$

$$K = \frac{\partial p}{\partial \theta} = -V' \frac{\partial p}{\partial V'} = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (2.32)$$

$$c_B^2 = \frac{K}{\rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} = -(V')^2 \frac{\partial p}{\partial V'} \quad (2.33)$$

Abbildung 2.8 (Mitte) zeigt eine nichtlineare, elastisch-plastische Kompressionskurve¹⁰. Unterhalb des elastischen Grenzwerts bei $(p_0|V'_0)$ verhält sich das Material linear elastisch, und die bis dahin ausgelösten Wellenpakete pflanzen sich alle mit der gleichen elastischen Wellengeschwindigkeit $c_{\text{el},B}$ fort. Für Drücke $p > p_0$ nehmen die Steigung der Kompressionskurve $\partial p / \partial V'$ und damit die Schallgeschwindigkeit c_B (hier: Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit) stark ab. Oberhalb des Kurvenwendepunkts $(p_1|V'_1)$ nimmt der Kompressionsmodul mit steigendem Druck wieder zu, und die bei $p > p_1$ ausgelösten Wellenpakete holen die im Druckintervall $[p_0;p_1]$ ausgelösten Wellenpakete ein.

⁹ Das *Hugoniot* Elastic Limit σ_{HEL} und die Fließgrenze im einaxialen Spannungszustand σ_y sind nicht identisch, sondern es gilt: $\frac{\sigma_{\text{HEL}}}{\sigma_y} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$

¹⁰ Abbildung 2.8 und die Gleichungen (2.32) bis (2.35) sind nur für isotherme Bedingungen exakt. Eine vollständige thermodynamische Beschreibung der Bedingungen für die Existenz und die Stabilität einer Schockwelle hinsichtlich der Form der Zustandsfläche $p(V', e)$ ist bei *Hiermaier* [9, p. 159] zu finden.

Die Überlagerung dieser Wellenpakete führt zu einem Aufsteilen der Wellenfront und der Bildung einer Schockwelle. Grundvoraussetzung dafür ist die Konvexität der nichtlinearen Kompressionskurve. Diese wird mathematisch durch die Gleichungen (2.34) und (2.35) ausgedrückt, die gleichzeitig erfüllt sein müssen. Die Konvexität resultiert aus dem einaxialen Verzerrungszustand, wie ein qualitativer Vergleich von Abbildung 2.6 und Abbildung 2.7 zeigt.

$$\frac{\partial p}{\partial V'} < 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial (V')^2} > 0 \quad (2.35)$$

Neben der Konvexität ist eine ausreichend schnelle Lastaufbringung für die Existenz von Schockwellen zwingend erforderlich. Bei zu langsamer Belastungsgeschwindigkeit (bzw. Verzerrungsrate) ist die zeitliche Verzögerung zwischen den Druckinkrementen zu groß, so dass die langsameren Wellenpakete bereits abgeklungen sind, bevor sie eingeholt werden können [18, p. 155].

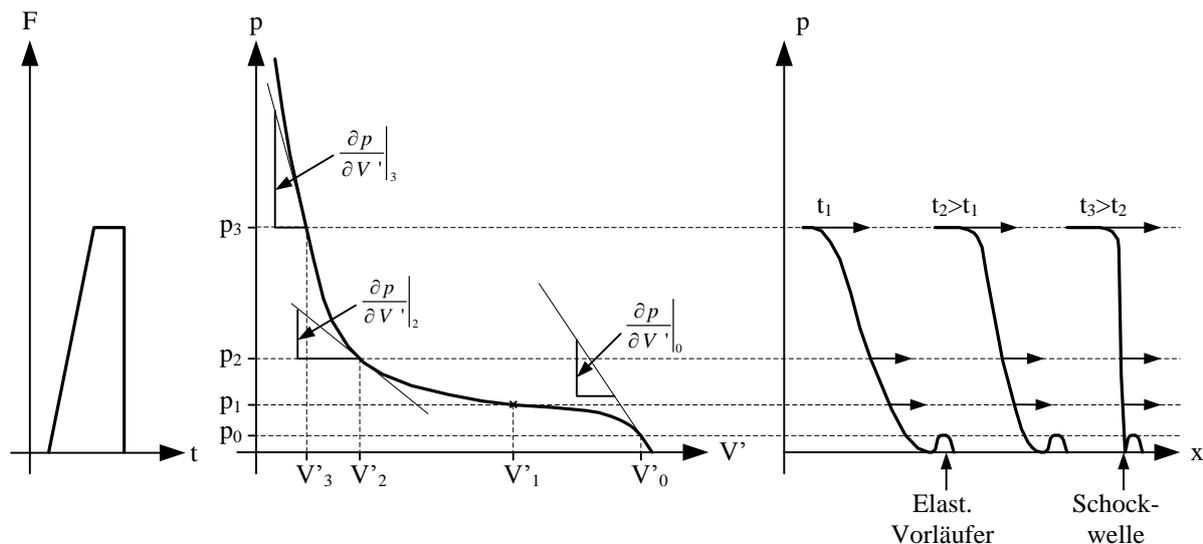


Abbildung 2.8 Belastungskurve (links), Nichtlineare Kompressionskurve (Mitte) und Profil der plastischen Welle zu unterschiedlichen Zeitpunkten (rechts); nach *Hiermaier* [18, p. 156]

2.3 Vereinfachte Schockbetrachtung

2.3.1 Riemann-Problem und Rankine-Hugoniot-Gleichungen

Abbildung 2.9 zeigt das sogenannte *Riemann-Problem*: eine ebene Schockwelle, die als Diskontinuität aufgefasst wird, läuft mit der Schockgeschwindigkeit v_S durch ein Fluid¹¹. Die Ausdehnung des Materials senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Schockwelle ist sehr viel

¹¹ Die Annahme eines Fluids ist gleichbedeutend mit einem Schubmodul $G = 0$ und wird auch als hydrodynamischer Ansatz bezeichnet.

größer als in Ausbreitungsrichtung, was einem einaxialen Verzerrungszustand entspricht. Beim Durchgang der Schockfront werden die Partikelgeschwindigkeit v sowie die Zustandsgrößen Druck p , Dichte ρ und spezifische innere Energie e schlagartig verändert, wobei jedoch die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie erfüllt sein müssen. Der Prächockzustand wird dabei mit Index „0“ und der geschockte Zustand mit Index „1“ beschrieben.

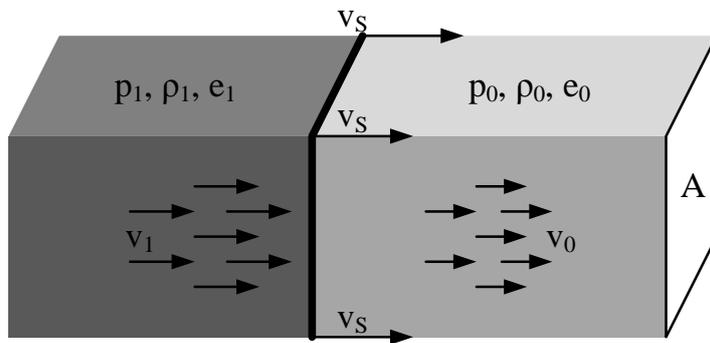


Abbildung 2.9 Riemann-Problem mit den Zustandsvariablen vor und hinter der Schockfront

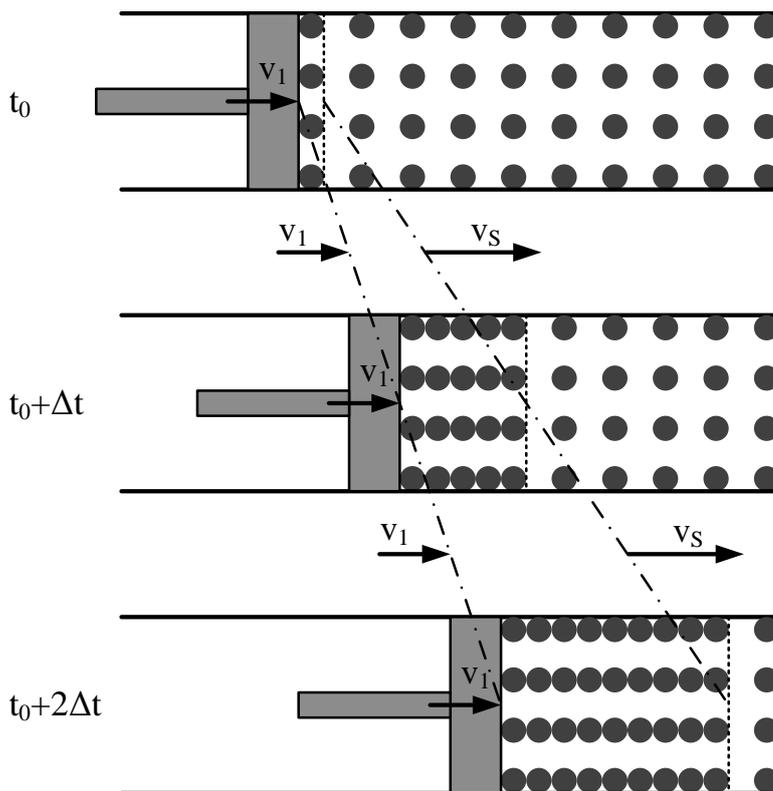


Abbildung 2.10 „Schneepflug“-Prinzip für ein Fluid mit Geschwindigkeit $v_0 = 0$ im Ausgangszustand

Die Schockfront durchläuft innerhalb eines Zeitinkrements dt das Volumen $v_S \cdot A \cdot dt$, wobei sie das Volumen $(v_S - v_0) \cdot A \cdot dt$ im Zustand 0 einholt und das Volumen $(v_S - v_1) \cdot A \cdot dt$ im Zustand 1 hinter sich lässt. Dabei wird unterstellt, dass stets $v_S > v_1$ gilt, was anhand Abbildung 2.10 veranschaulicht werden kann.

Die zuströmende und die abfließende Masse müssen gleich sein woraus die Masseerhaltung (2.36) folgt. Die Impulsänderung $\rho_1 \cdot (v_s - v_1) \cdot A \cdot dt \cdot v_1 - \rho_0 \cdot (v_s - v_0) \cdot A \cdot dt \cdot v_0$ innerhalb des durchströmten Volumens muss durch den Kraftstoß $(p_1 - p_0) \cdot A \cdot dt$ auf die Ränder des Kontrollvolumens ausgeglichen werden. Gleichsetzen beider Terme ergibt die Impulsbilanzen (2.37) bzw. (2.38).

$$\rho_0 \cdot (v_s - v_0) = \rho_1 \cdot (v_s - v_1) \quad (2.36)$$

$$\rho_1 \cdot (v_s - v_1) \cdot v_1 - \rho_0 \cdot (v_s - v_0) \cdot v_0 = p_1 - p_0 \quad (2.37)$$

$$\rho_0 \cdot (v_s - v_0) \cdot (v_1 - v_0) = p_1 - p_0 \quad (2.38)$$

Die Zunahme der inneren Energie sowie der kinetischen Energie

$$(E_1 + E_{kin,1}) - (E_0 + E_{kin,0}) = \left(e_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) \cdot \rho_1 \cdot (v_s - v_1) \cdot A \cdot dt - \left(e_0 + \frac{v_0^2}{2} \right) \cdot \rho_0 \cdot (v_s - v_0) \cdot A \cdot dt$$

muss der durch die Druckkräfte geleisteten äußeren Arbeit $p_1 \cdot A \cdot v_1 \cdot dt - p_0 \cdot A \cdot v_0 \cdot dt$ entsprechen. Unter Berücksichtigung der Masseerhaltung (2.36) lautet die Energiebilanz

$$\rho_0 \cdot (v_s - v_0) \cdot \left(e_1 - e_0 + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} \right) = p_1 \cdot v_1 - p_0 \cdot v_0 \quad (2.39)$$

Für ein Fluid, das im Ausgangszustand in Ruhe ist, führt das Einsetzen der Randbedingung $v_0 = 0$ in die Gleichungen (2.36), (2.38) und (2.39) auf die *Rankine-Hugoniot*-Gleichungen (2.40) bis (2.42).

$$\rho_0 \cdot v_s = \rho_1 \cdot (v_s - v_1) \quad (2.40)$$

$$p_1 - p_0 = \rho_0 \cdot v_s \cdot v_1 \quad (2.41)$$

$$p_1 \cdot v_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot v_s \cdot v_1^2 + \rho_0 \cdot v_s \cdot (e_1 - e_0) \quad (2.42)$$

$$e_1 - e_0 = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_0) \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_0) \cdot (V'_0 - V'_1) \quad (2.43)$$

Geschicktes Umformen und Einsetzen der Gleichungen (2.40) und (2.41) in (2.42) führt auf Gleichung (2.43). Diese beschreibt die *Hugoniot*-Kurve und kann als eine Darstellung der Energieerhaltung (2.42) aufgefasst werden, die nur noch von thermodynamischen Größen abhängt. Die *Hugoniot*-Kurve beschreibt alle für den betrachteten Ausgangszustand (p_0, V'_0, e_0) möglichen Schockzustände (p_1, V'_1, e_1) ¹². Weder die Schockbelastung noch die Entspannung erfolgen entlang der *Hugoniot*-Kurve. Die *Hugoniot*-Kurve für Erstbelastung

¹² Entsprechend dieser Definition kann eine v_s - v_1 -Beziehung als Darstellung der *Hugoniot*-Kurve in der v_s - v_1 -Ebene interpretiert werden [9, p. 166].

eines im Ausgangszustand in Ruhe ($v_0 = 0$) befindlichen Materials wird als *Principal Hugoniot* bezeichnet.

2.3.2 v_s - v_1 -Beziehung und Zustandsgleichung

Mit den *Rankine-Hugoniot*-Gleichungen stehen drei Gleichungen für fünf unbekannte Größen (p_1 , V'_1 , e_1 , v_1 und v_s) zur Verfügung. Durch Einsetzen einer experimentell zu bestimmenden v_s - v_1 -Beziehung (2.44) in die *Rankine-Hugoniot*-Gleichungen können alle Parameter in Abhängigkeit einer Unbekannten angegeben werden, was die Darstellung der *Hugoniot*-Kurve in unterschiedlichen Ebenen ermöglicht.

$$v_s = c_0 + \sum_{i=1}^n S_i \cdot v_1^i \quad (2.44)$$

Für eine Vielzahl von Materialien ist die v_s - v_1 -Beziehung annähernd linear ($i = 1$). Der Parameter c_0 wird dann oft der elastischen Schallgeschwindigkeit $c_{el,B}$ (2.11) gleichgesetzt. Wie in Anhang B dargestellt ist, entspricht bei Böden der Parameter c_0 der Kompressionswellengeschwindigkeit $c_{el,P}$ nach Gleichung (2.10). Der Parameter S_1 kann nach Gleichung (2.45) als der Kehrwert der maximal möglichen Kompression gedeutet werden [19, p. 94]. Für poröse Materialien wie Böden und Felsgestein sowie für Materialien, die unter Schockbeanspruchung eine Phasenänderung erfahren, ist die v_s - v_1 -Beziehung immer nichtlinear [13, p. 106], [18, p. 167 & 203] bzw. abschnittsweise linear mit entsprechenden Knicken.

$$S_1 = \frac{1}{\theta_{\max}} = \frac{\rho_{1,\max}}{\rho_{1,\max} - \rho_0} \quad (2.45)$$

Alle Zustände thermodynamischen Gleichgewichts, die ein Material einnehmen kann, liegen auf der Zustandsfläche (siehe Abbildung 2.11). Diese kann mittels der *Hugoniot*-Kurve in Kombination mit zusätzlichen Annahmen – wie z.B. der Theorie nach *Grüneisen* – generiert werden. Die *Hugoniot*-Kurve verläuft innerhalb der Zustandsfläche. Die sprunghafte Zustandsänderung erfolgt bei Schockbelastung entlang eines Nicht-Gleichgewichts-Pfads. Diese sogenannte *Rayleigh*-Linie verbindet den Ausgangszustand (p_0 , V'_0 , e_0) mit dem Schockzustand (p_1 , V'_1 , e_1) und verläuft außerhalb der Zustandsfläche.

Innerhalb der p - V' -Ebene wird unterstellt, dass die *Rayleigh*-Linie eine Gerade ist. Aus den *Rankine-Hugoniot*-Gleichungen folgt (unter der Voraussetzung $v_0 = 0$) die Steigung der *Rayleigh*-Linie in der p - V' -Ebene (2.46). Umformen der Gleichung (2.38) für $v_0 \neq 0$ ergibt die Steigung der *Rayleigh*-Linie in der p - v_1 -Ebene (2.47). Beide Gleichungen belegen die konvexe Form der Zustandsgleichung.

$$\frac{p_1 - p_0}{V'_1 - V'_0} = -\rho_0^2 \cdot v_s^2 \quad (2.46)$$

$$\frac{p_1 - p_0}{v_1 - v_0} = \rho_0 \cdot (v_s - v_0) \quad (2.47)$$

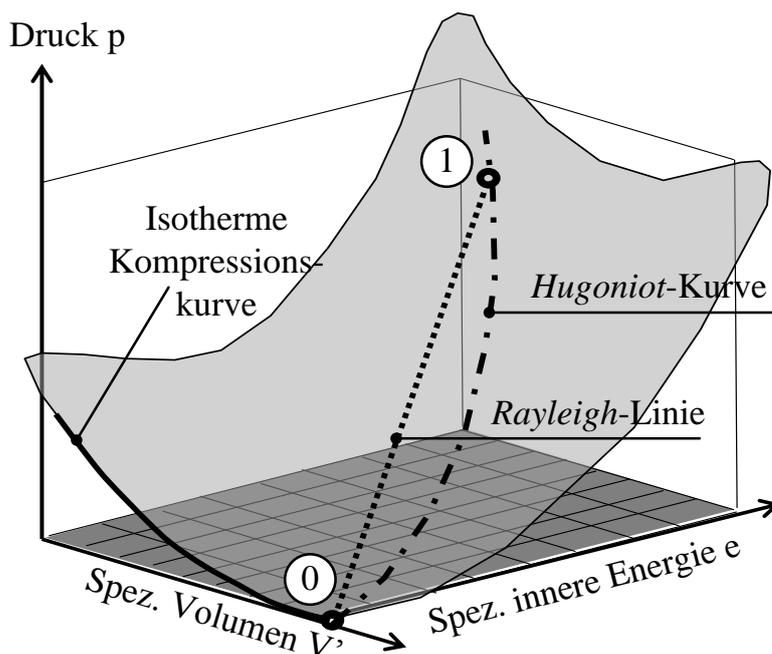


Abbildung 2.11
Zustandsfläche, Hugoniot-
Kurve und Rayleigh-
Gerade; nach Hiermaier
[18, p. 169]

2.3.3 Entspannung hinter der Schockfront

An der Rückseite des Schockimpulses wird unterstellt, dass die Entspannung adiabatisch erfolgt ($dQ = 0$). Da zudem nur die elastischen Verzerrungsanteile reversibel sind, ist die Entlastung ein isentroper Prozess ($dS = 0$). Aus der Energiebilanz für Fluide (2.48) bzw. (A-121) folgt Gleichung (2.49) als Pfad innerhalb der Zustandsfläche, entlang dessen sich das Material kontinuierlich entspannt. Wie von Hiermaier [18, p. 178 & 207] erläutert, kann die Entspannungsisentropie durch Überführung der differentiellen in eine schrittweise Betrachtung und unter Berücksichtigung der Zustandsgleichung iterativ ermittelt werden.

$$dE = T \cdot dS - p \cdot dV \quad (2.48)$$

$$de = -p \cdot dV' = \frac{p}{\rho^2} \cdot d\rho \quad (2.49)$$

Zur qualitativen Beschreibung des Entlastungsvorgangs für einen rechteckigen Schockimpuls wird in Abbildung 2.12 angenommen, dass die Entlastung nicht kontinuierlich sondern in zwei Sprüngen – von $(p_B|V'_B)$ nach $(p_{U1}|V'_{U1})$ und weiter auf den Druck $p_{U2} = p_A$ des Ausgangszustands vor der Schockbeanspruchung – erfolgt. Die Gerade des ersten Entlastungssprungs hat eine größere Steigung als die Rayleigh-Gerade der Belastung. Somit ist der erste Entlastungssprung schneller als die Schockfront ($c_{U1} > v_S$). Entsprechend ist die Wellengeschwindigkeit der zweiten Entlastungsstufe langsamer als die Schockfront ($c_{U2} > v_S$). Daraus folgt die zeitliche Entwicklung der Schockwellenrückseite gemäß Abbildung 2.13. Bereits bei sechs Entlastungssprüngen wird die Entspannungsisentropie recht gut angenähert, und in der zugehörigen Abbildung 2.14 ist ein deutliches Auseinanderziehen der Impulsrückseite zu erkennen. Der Grenzübergang $\Delta V' \rightarrow 0$ für die Größe der

Entlastungssprünge führt auf einen kontinuierlichen Entlastungsprozess entlang der Entspannungsisentrope.

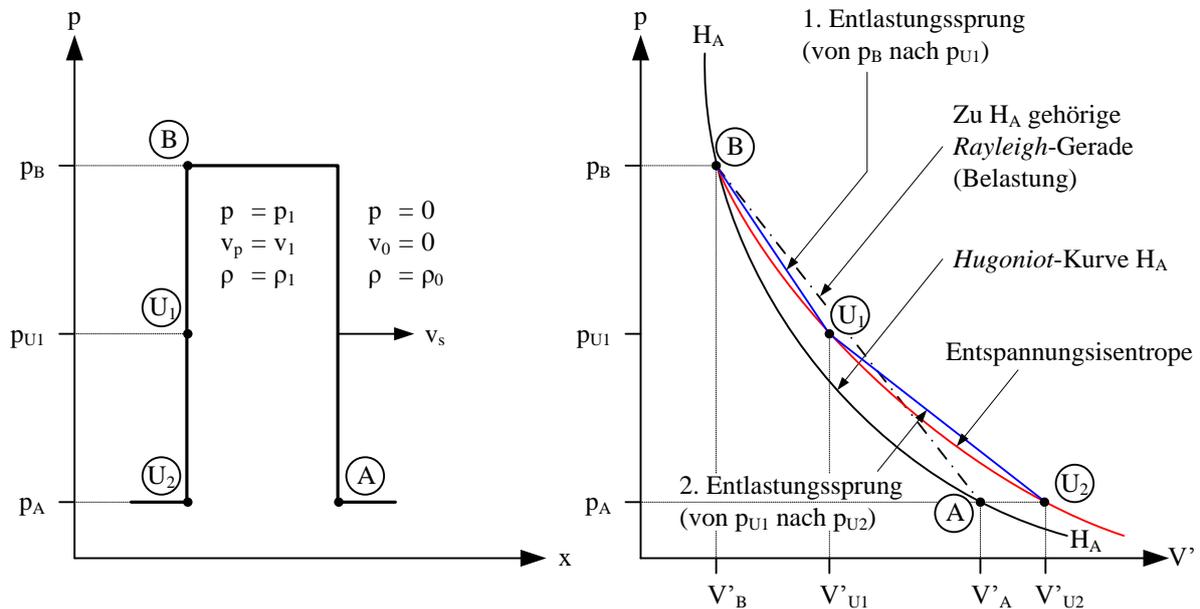


Abbildung 2.12 Rechteckiger Schockimpuls (links), p - V' -Kurve mit Rayleigh-Gerade der Belastung, Entspannungsisentrope und zwei Entlastungssprüngen (rechts), nach Cooper [20, p. 224]

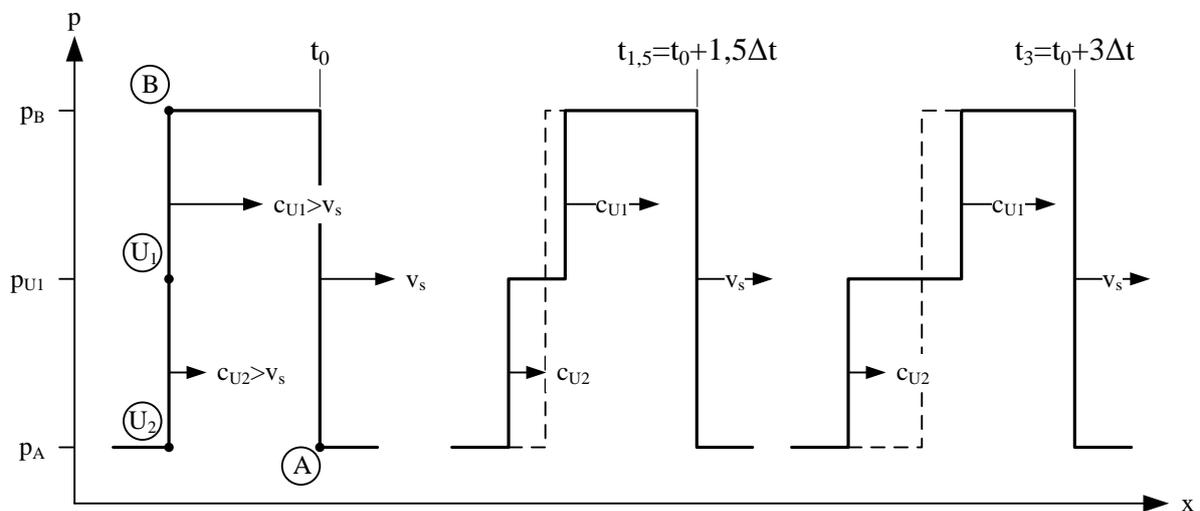


Abbildung 2.13 Zeitliche Entwicklung des ursprünglich rechteckigen Schockimpulses infolge Entlastung durch zwei Entlastungssprünge, nach Cooper [20, p. 224]

Entspannungswellen laufen somit von hinten in die Schockfront, wobei der Kopf der Entspannungswelle schneller und deren Ende langsamer als die Schockfront sind. Dies führt zu einem „Auseinanderziehen“ der hinteren Begrenzung des Schockimpulses – dem Entspannungsfächer. Wird die Schockfront vom Kopf der Entspannungswelle eingeholt, nehmen der Druck und die Geschwindigkeit an der Schockfront ab. Aufgrund der stetigen Druckreduzierung an der Schockfront durch die Entspannungswelle wird schließlich ein

Druckniveau erreicht, bei dem das geschockte Material ein elastisch-plastisches Verhalten zeigt. Die Folge ist eine Aufteilung der Schockfront in eine plastische Welle und eine schnellere elastische Welle, wodurch auch die Vorderseite des ursprünglich rechteckförmigen Schockimpulses auseinandergezogen wird (siehe Abbildung 2.6, rechts).

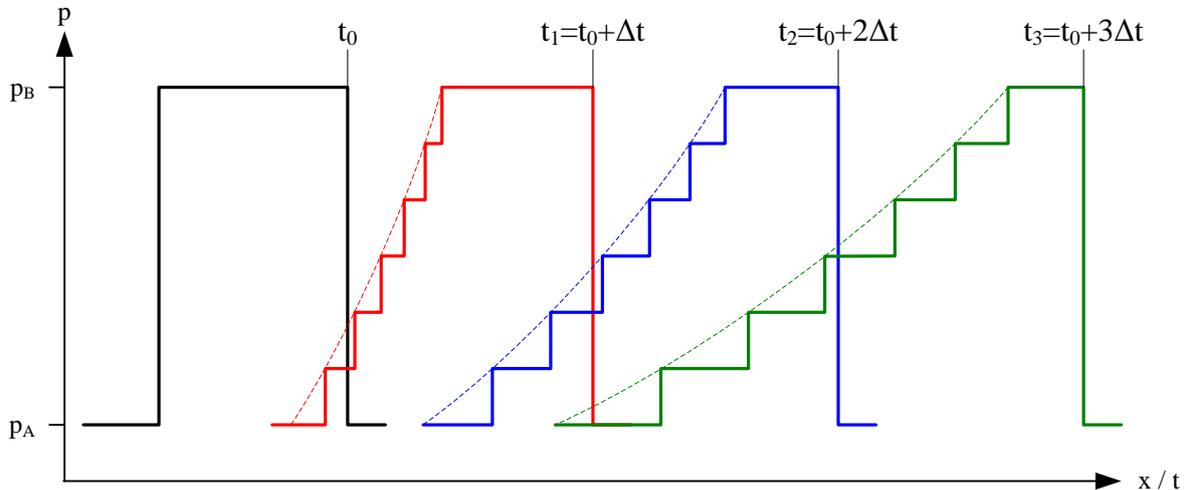


Abbildung 2.14 Zeitliche Entwicklung des ursprünglich rechteckigen Schockimpulses infolge Entlastung durch sechs Entlastungssprünge

2.3.4 Entropie und Energie bei Schockbelastung und Entlastung

Für schwache Schocks strebt nach Gleichung (2.50) die Schockwellengeschwindigkeit v_S (2.46)₁ gegen die Schallgeschwindigkeit c_B (2.33). Die *Hugoniot*-Kurve $H^{(0)}$ verläuft im Ausgangszustand $(p_0|V'_0)$ also tangential zur Kompressionsisentrope $S^{(0)}$ (siehe Abbildung 2.15). Je stärker der Schock ist, desto größer wird die Schockwellengeschwindigkeit v_S . Entsprechend verläuft die Erstbelastungs-*Hugoniot*-Kurve stets oberhalb der Kompressionsisentrope, und die Schockwelle breitet sich im ungestörten Material mit Überschallgeschwindigkeit aus ($v_S > c_{B,0}$). Dies entspricht einer Zunahme der Entropie bei Schockkompression, und die Erhaltungsgleichungen (2.36) bis (2.39) für Masse, Impuls und Energie beschreiben einen irreversiblen Prozess [21, p. 56].

$$\lim_{\substack{p_1 \rightarrow p_0 \\ V_1 \rightarrow V'_0}} v_S^2 = \lim_{\substack{p_1 \rightarrow p_0 \\ V_1 \rightarrow V'_0}} \left(-\frac{1}{\rho_0^2} \frac{p_1 - p_0}{V'_1 - V'_0} \right) = -\frac{1}{\rho_0^2} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V'} \right)_S = c_{B,0}^2 \quad v_S > c_{B,0} \quad (2.50)$$

Die Schockwelle bewegt sich nach Gleichung (2.51) relativ zum geschockten Material mit Unterschallgeschwindigkeit. Die Isentrope $S^{(1)}$ durch $(p_1|V'_1)$ ist die Entspannungsisentrope und tangential zu einer zweiten *Hugoniot*-Kurve $H^{(1)13}$ mit $(p_1|V'_1)$ als Ausgangszustand¹⁴.

¹³ Bei „künstlicher“ Verlängerung der *Hugoniot*-Kurve $H^{(1)}$ in den Bereich unterhalb ihres Ausgangszustands $(p_1|V'_1)$, verläuft diese durch den ursprünglichen Ausgangszustand $(p_0|V'_0)$ der Erstbelastungs-*Hugoniot*-Kurve $H^{(0)}$.

¹⁴ Der Verlauf der Entspannungsisentrope $S_{(1)}$ oberhalb der Erstbelastungs-*Hugoniot*-Kurve $H_{(0)}$ wie in Abbildung 2.15 dargestellt trifft für poröse und granulare Materialien nicht zu. Deren Entspannungsverhalten wird durch das Matrixmaterial bzw. das Granulat bestimmt. Die Entlastungsgeschwindigkeit $c_{B,1}$ ist größer als

$$\lim_{\substack{p_1 \rightarrow p_0 \\ V_1 \rightarrow V_0}} (v_s - v_1)^2 = \lim_{\substack{p_1 \rightarrow p_0 \\ V_1 \rightarrow V_0}} \left(-\frac{1}{\rho_1^2} \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} \right) = -\frac{1}{\rho_1^2} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V'} \right)_s = c_{B,1}^2 \quad v_s - v_1 > c_{B,1} \quad (2.51)$$

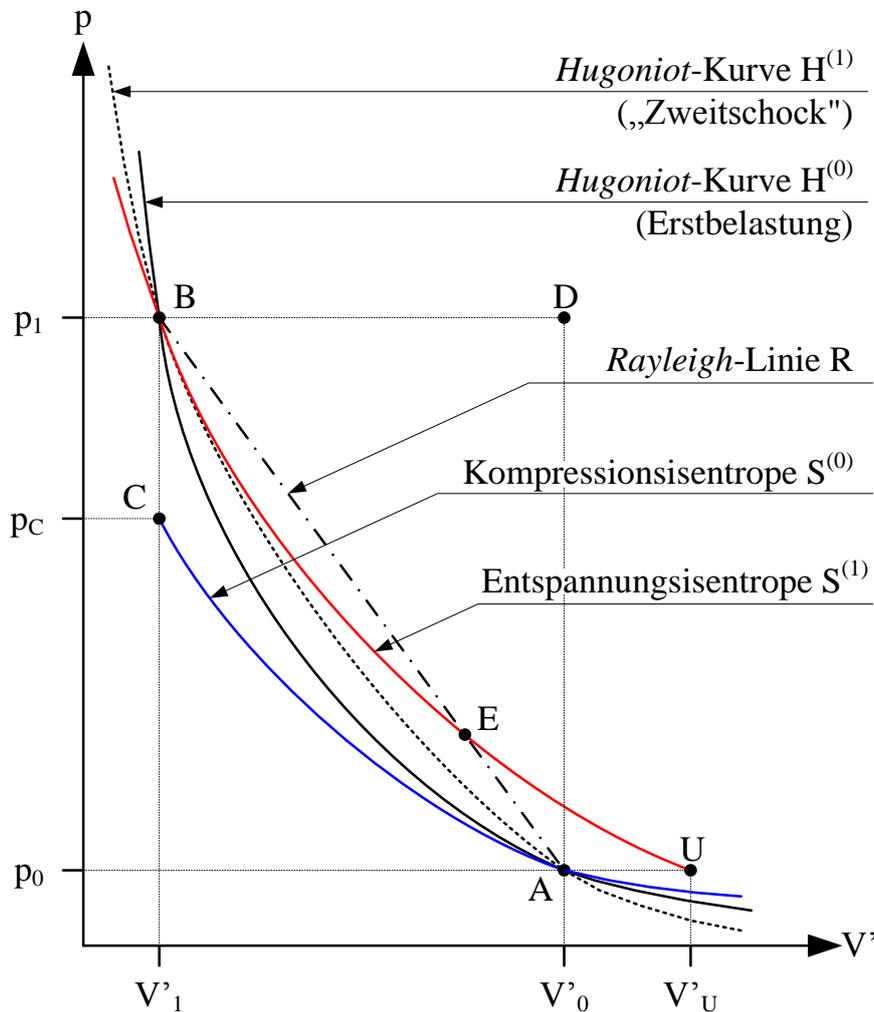


Abbildung 2.15 Relative Positionen der *Hugoniot*-Kurven und Isentropen, Geometrische Interpretation des Energie- und Entropiezuwachses bei Schockbelastung; nach *Zel'dovich & Raizer* [21, pp. 57-67]

Die Zunahme der spezifischen Energie $\Delta e = e_1 - e_0$ bei Schockbelastung gemäß der *Hugoniot*-Gleichung (2.43) entspricht der Trapezfläche $V_0'ARBV_1'$ unterhalb der *Rayleigh*-Linie in der p - V' -Ebene (siehe Abbildung 2.15). Der Unterschied zwischen isentroper Kompression und Schockkompression ist der Entropiezuwachs $\Delta S = S_1 - S_0$, dargestellt durch die Fläche $ARBCS^{(0)}$ zwischen der Kompressionsisentrope $S^{(0)}$ und der *Rayleigh*-Linie. Die innerhalb eines vollständigen Be- und Entlastungszyklus dissipierte Energie entspricht der Differenz der Fläche $V_0'ARBV_1'$ unterhalb der *Rayleigh*-Linie abzüglich der Fläche $V_U'UERAV_0'$ unterhalb der Entspannungsisentrope $S^{(1)}$.

die Schockgeschwindigkeit v_s , und die Entspannungsisentrope liegt unter der Erstbelastungs-*Hugoniot*-Kurve [54].

Für ein im Ausgangszustand in Ruhe befindliches Fluid mit $v_0 = 0$ kann durch Einsetzen von v_s nach Gleichung (2.40) in Gleichung (2.41) der Zuwachs der spezifischen kinetischen Energie Δe_{kin} (2.52) berechnet werden, was der Fläche des Dreiecks ABD in Abbildung 2.15 entspricht. Für sehr starke Schockwellen mit $p_1 \gg p_0$ wird nach Gleichung (2.53) der totale Energiezuwachs gleichmäßig auf die innere und die kinetische Energie aufgeteilt.

$$\Delta e_{kin} = e_{1,kin} - e_{0,kin} = \frac{1}{2} \cdot (p_1 - p_0) \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot (p_1 - p_0) \cdot (V'_0 - V'_1) \quad (2.52)$$

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \Delta e_{kin} = \lim_{p_1 \rightarrow \infty} \Delta e = \frac{p_1}{2} \cdot (V'_0 - V'_1) \quad (2.53)$$

2.4 Wellenphänomene an Grenzflächen

Die Grundlagen des Wellenübertrags an Grenzflächen werden nachfolgend für elastische Wellen erläutert. Prinzipiell sind sie jedoch auch für Schockwellen gültig.

2.4.1 Der allgemeine Fall

Die akustische Impedanz Z (2.54) ist als Produkt der elastischen Wellengeschwindigkeit c_{el} (je nach Wellentyp) und der Dichte ρ definiert. Bei Schockwellen ist die Impedanz Z keine konstante Größe sondern von der Dichte ρ , der Schockgeschwindigkeit v_s und vom Druck p abhängig. Je größer die Impedanz ist, desto steiler ist die zu diesem Material gehörige p - v -*Hugoniot*-Kurve.

$$Z = \rho \cdot c_{el} \quad (2.54)$$

Trifft eine ebene Wellenfront (Longitudinal- oder SV-Welle¹⁵) unter dem Winkel φ_1 auf die Grenzfläche zwischen zwei Materialien unterschiedlicher Impedanzen, so wird die Wellenenergie in der Regel auf je eine reflektierte Longitudinal- und Transversalwelle (unter den Winkeln φ_2 und φ_3), die in das Ausgangsmaterial A zurücklaufen, sowie je eine in das Material B transmittierte Longitudinal- und Transversalwelle (unter den Winkeln φ_4 bzw. φ_5) aufgeteilt (siehe Abbildung 2.16). Die beiden neuen Scherwellen sind dann ebenfalls SV-Wellen. Die Ausfallswinkel φ_2 bis φ_5 können nach dem *Snellschen* Gesetz (2.55) ermittelt werden.

$$\frac{\sin \varphi_1}{c_{el,P/S}^A} = \frac{\sin \varphi_2}{c_{el,P}^A} = \frac{\sin \varphi_3}{c_{el,S}^A} = \frac{\sin \varphi_4}{c_{el,P}^B} = \frac{\sin \varphi_5}{c_{el,S}^B} \quad (2.55)$$

¹⁵ Als SV-Wellen werden polarisierte Scherwellen bezeichnet, deren Partikel sich nur in der Lauebene der Welle bewegen. Analog finden bei SH-Wellen nur Partikelbewegungen senkrecht zur Lauebene der Welle statt. Jede Scherwelle kann vektoriell in eine SV- und eine SH-Welle aufgeteilt werden. SH-Wellen erzeugen jedoch nur (reflektierte und eine transmittierte) SH-Wellen.

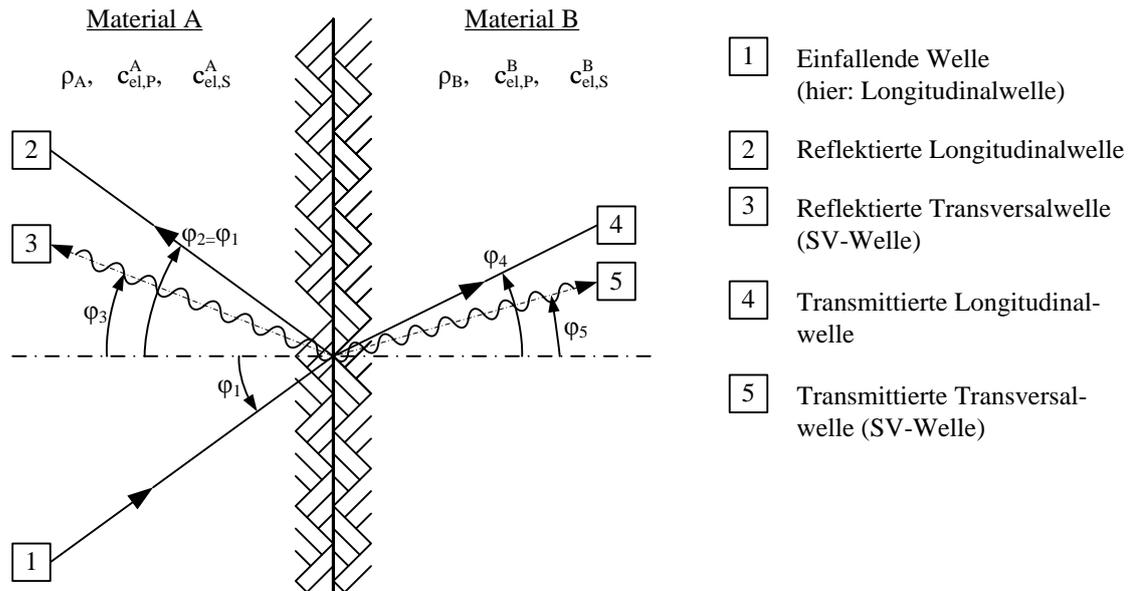


Abbildung 2.16 Auftreffen einer ebenen Longitudinalwelle unter dem Einfallswinkel φ_1 auf die Grenzfläche zweier Medien unterschiedlicher Impedanz; nach Meyers [13, p. 46]

2.4.2 Senkrechttes Auftreffen einer ebenen Welle auf eine Grenzfläche

2.4.2.1 Elastische Wellen

Zur Berechnung der Spannungsamplituden der reflektierten und transmittierten Wellenpakete müssen an der Grenzfläche die entsprechenden Randbedingungen für die Spannungen und Partikelverschiebungen berücksichtigt werden. Im Sonderfall des lotrechten Auftreffens einer Longitudinal- oder Scherwelle auf eine Grenzfläche mit zug- und schubfestem Verbund werden nur gleichartige Wellen erzeugt. Wird unterstellt, dass „Druck als Druck“ reflektiert wird, so ist die Partikelgeschwindigkeit der reflektierten Welle entgegen jener der einfallenden Welle gerichtet, und die Spannungsamplitudenverhältnisse hängen ausschließlich von den Impedanzen Z_A und Z_B ab. Mit den Indizes I für die einfallende Welle, R für die reflektierte und T für die transmittierte Welle gilt:

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{2 \cdot Z^B}{Z^B + Z^A} = \frac{2 \cdot \rho^B \cdot c_{el}^B}{\rho^B \cdot c_{el}^B + \rho^A \cdot c_{el}^A} \quad (2.56)$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \frac{Z^B - Z^A}{Z^B + Z^A} = \frac{\rho^B \cdot c_{el}^B - \rho^A \cdot c_{el}^A}{\rho^B \cdot c_{el}^B + \rho^A \cdot c_{el}^A} \quad (2.57)$$

Aus Gleichung (2.56) ist ersichtlich, dass die Spannungen der transmittierten Welle stets von gleichem Vorzeichen wie jene der einfallenden Welle sind. Gilt $Z_B = Z_A$, so findet keine Reflexion statt und die einfallende Welle läuft ungestört über die Materialgrenze.

Für $Z_B < Z_A$ erleidet das Ausgangsmaterial A eine Belastungsumkehr. Druck wird als Zug reflektiert und umgekehrt. Im Grenzfall der Reflexion an einem „losen/freien Ende“ ($Z_B \rightarrow 0$) wird keine transmittierte Welle erzeugt. Die reflektierte Welle ist dann von gleicher Intensität

wie die einfallende Welle ($|\sigma_R/\sigma_I| = 1$). Die Partikelgeschwindigkeit am freien Ende ist doppelt so groß wie bei der einfallenden bzw. reflektierten Welle¹⁶.

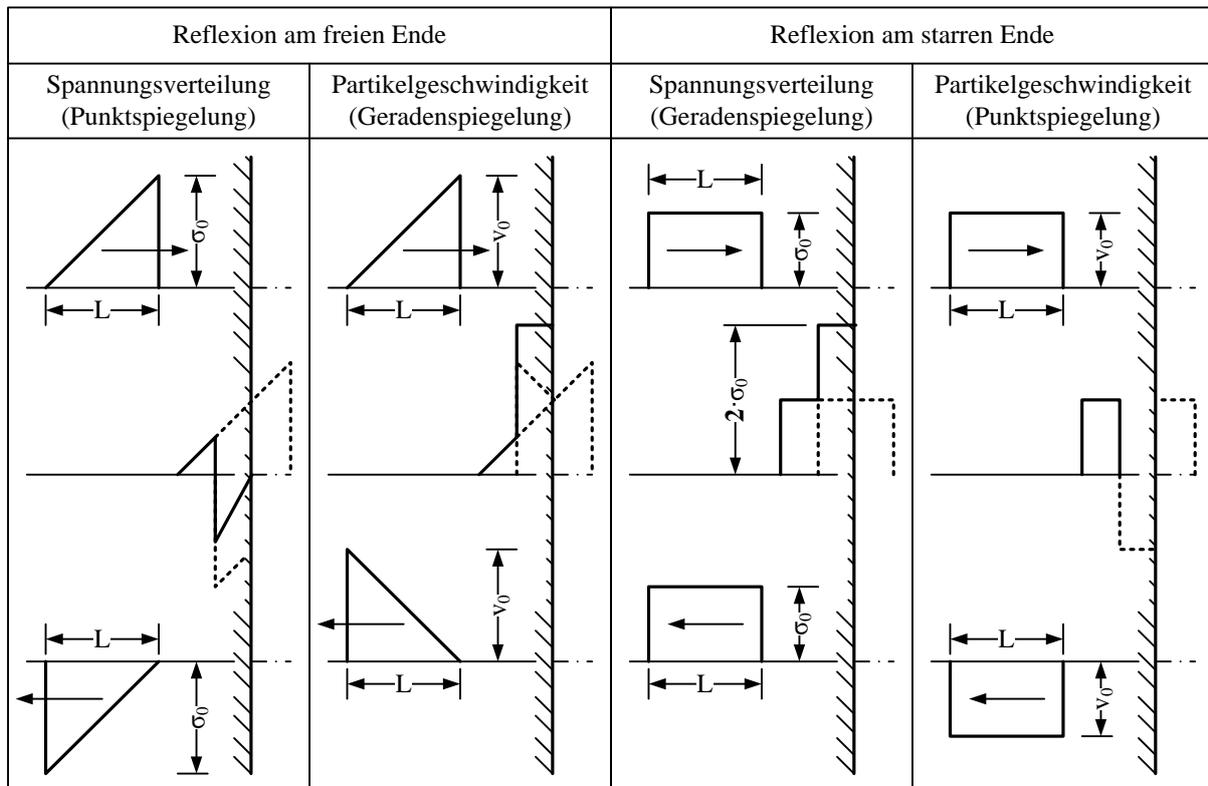


Abbildung 2.17 Spannung und Partikelgeschwindigkeit bei Reflexion am freien Ende (links) und am starren Ende (rechts)

Im Fall $Z_B > Z_A$ sind die Spannungen der reflektierten und der einfallenden Welle von gleichem Vorzeichen. Die Intensität der transmittierten Welle ist dann größer als jene der einfallenden Welle, und die einfallende Welle wird beim Übergang von einem „weichen“ zu einem „harten“ Material verstärkt. Der maximale elastische Verstärkungsfaktor¹⁷ von 2 wird während der Überlagerung der einfallenden und reflektierten Welle bei Reflexion an einem „starren Ende“ – dies entspricht dem Fall $Z_B \rightarrow \infty$ – erreicht (siehe Abbildung 2.17). Die zugehörige Partikelgeschwindigkeit am starren Ende ist stets Null.

¹⁶ Die Länge des Zeitintervalls, in der diese Aussage gilt, ist von der Form der einfallenden Welle abhängig. Beim Rechteckimpuls gilt für die Partikelgeschwindigkeit am freien Ende $v_{IF} = 2 \cdot v_1$ während der Interaktion von einfallender und reflektierter Welle, wohingegen dies bei einem dreiecksförmigen Impuls (siehe Abbildung 2.17, links) nur zum Zeitpunkt des Auftreffens der Wellenfront gilt.

¹⁷ Der Verstärkungsfaktor entspricht dem Spannungs- bzw. Druckverhältnis von reflektierter zu einfallender Welle σ_R/σ_I an der reflektierenden Fläche im Zeitraum der Überlagerung. Das Verhältnis der entsprechenden Überdrücke wird als Reflexionsfaktor bezeichnet. Für sehr hohe Spannungen bzw. Drücke sind die Absolutwerte von Druck und Überdruck annähernd gleich, so dass Verstärkungsfaktor und Reflexionsfaktor gleichgesetzt werden können.

2.4.2.2 Reflexionsfaktoren bei Schockwellen

Hinsichtlich der Verhältnisse der Partikelgeschwindigkeiten und der Drücke von reflektierter zu einfallender Welle besteht ein signifikanter Unterschied zwischen elastischen Wellen und Schockwellen. So zeigten *Gebbeken & Döge* [22] beispielhaft für Stoßwellen in idealen Gasen, dass der Reflexionsfaktor vor allem vom Druckniveau der einfallenden Stoßwelle sowie der Dichte und der Steifigkeit des reflektierenden Materials abhängt. Unter der Annahme eines konstanten Isentropenexponenten für Luft von $\kappa = 1,4$ gilt für den Reflexionsfaktor $2 > c_r > 8$. Die untere Schranke für schwache Schockwellen mit $p_1 \rightarrow p_0$ entspricht der elastischen Lösung. Da der Isentropenexponent κ mit steigendem Druck abnimmt, liegt der tatsächliche obere Grenzwert im Bereich $c_{r,max} \approx 12-14$. Der Grund für diese hohen Reflexionsfaktoren $c_r > c_{r,el} = 2$ ist, dass zu der Überlagerung der Drücke aus einfallender und reflektierter Stoßwelle noch der dynamische Druck – auch als Staudruck bezeichnet – hinzukommt. Dieser ist unter anderem von den Abmessungen der reflektierenden Fläche und der Länge der (Über-)Druckphase der einfallenden Welle abhängig.

Prinzipiell gelten diese Aussagen auch für Stoßwellen in Locker- und Festgestein. *Gerdyukov et al.* [23] führten Schockversuche an einem Sand mit Axialspannungen in Wellenfortpflanzungsrichtung von $6 \text{ MPa} < \sigma_I < 230 \text{ MPa}$ durch. Die Schockwelle wurde in diesen Versuchen an einer als starr anzusehenden Stahlplatte (dem unteren Ende des Probenbehälters) reflektiert. Für Spannungen der einfallenden Welle von $\sigma_I \approx 40-45 \text{ MPa}$ wurden Verstärkungsfaktoren im Bereich $2,73 < \sigma_R/\sigma_I < 4,44$ gemessen. Diese im Vergleich zu idealen Gasen kleineren Werte folgen aus der Porosität des Sandes und der damit verbundenen Dämpfung.

2.4.3 Wellenfortpflanzung parallel zu einer freien Oberfläche

Läuft eine ebene Wellenfront parallel zu einer freien Oberfläche, so verlieren die Gleichungen (2.56) und (2.57) ihre Gültigkeit, und das Phänomen kann nicht mehr mittels einer geschlossenen mathematischen Lösung sondern nur noch qualitativ beschrieben werden.

In Abbildung 2.18 breitet sich die ebene Kompressionswelle MN parallel zur freien Oberfläche MA eines elastischen Körpers aus. Die Elemente an der freien Oberfläche können sich ungehindert ausdehnen. Aufgrund der aufwärts gerichteten Materialentspannung werden in jedem Punkt A der freien Oberfläche beim Durchgang der ebenen Wellenfront zwei weitere Wellen ausgelöst – eine longitudinale Entspannungswelle sowie eine Scherwelle. Die Longitudinalwellen bilden keine zusammenhängende Wellenfront. Der Kreisbogen AC trennt den Bereich, in dem sich die Entspannungswellen fortpflanzen, vom Bereich ACNB mit reiner Partikelgeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung der ursprünglichen Welle. Mit zunehmender Entfernung vom freien Rand wird die vertikale Partikelgeschwindigkeitskomponente schnell kleiner. Die *Schmidtsche* Front ist die zusammenhängende Wellenfront der Scherwellen. Der Winkel θ zwischen dieser Scherwellenfront und der freien Oberfläche ist nach Gleichung (2.58) allein von der Querdehnzahl ν abhängig.

$$\sin \theta = \frac{c_{el,S}}{c_{el,P}} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2 \cdot (1-\nu)}} \quad (2.58)$$

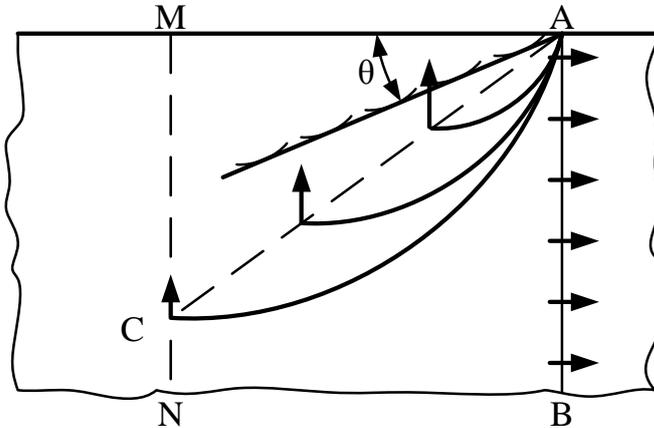


Abbildung 2.18 Effekte einer ebenen Welle, die parallel zur freien Oberfläche verläuft; nach Rinehart [15, p. 98]

Sowohl die longitudinalen Spannungswellen als auch die Schwerwellen entziehen der ursprünglichen Wellenfront ständig Energie, weshalb deren Amplitude mit zunehmender Laufentfernung ständig abnimmt. Das schlussendliche Resultat des beschriebenen Prozesses ist die Entstehung einer *Rayleigh*-Oberflächenwelle. In zylindrischen Stäben, wie sie z.B. beim Resonant-Column-Test oder beim *Split-Hopkinson* pressure bar zur Bestimmung dynamischer Kennwerte verwendet werden, führen diese Randeffekte zu Oszillationen im Messsignal.

2.4.4 Refraktion

Für einen geschichteten Baugrund wie in Abbildung 2.19 dargestellt mit den Longitudinalwellengeschwindigkeiten $c_{el,P,1} < c_{el,P,2}$ existiert gemäß dem *Snellschen* Gesetz (2.55) ein kritischer Einfallswinkel (2.59), für den der Ausfallswinkel der Druckwelle in der unteren Schicht zu 90° wird. Die transmittierte Welle pflanzt sich in der unteren Schicht entlang der Schichtgrenze mit der größeren Geschwindigkeit $c_{el,P,2}$ fort. Dabei erzeugt sie in der oberen Schicht eine Wellenfront mit dem Winkel $\varphi_{1,krit}$ zur Schichtgrenze – die Wellenfront der refraktierten Welle.

$$\varphi_{1,krit} = \arcsin \frac{c_{el,P,1}}{c_{el,P,2}} \quad (2.59)$$

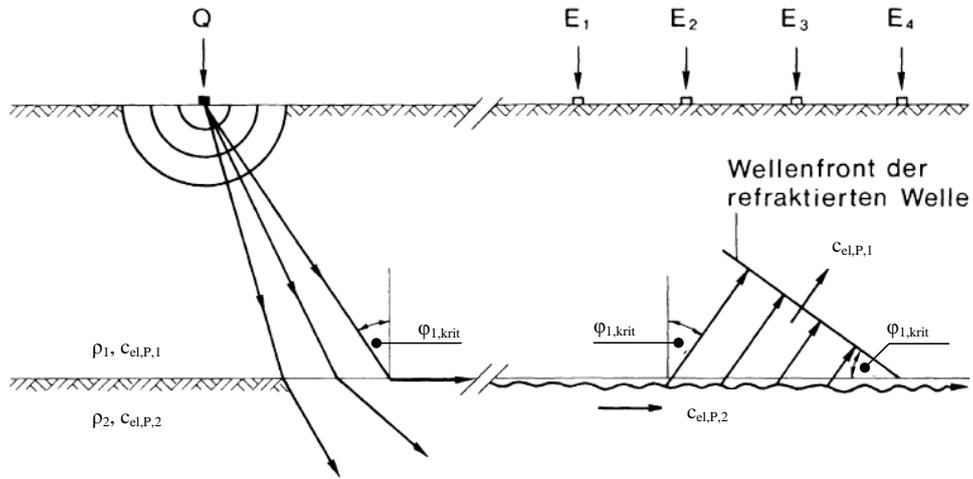


Abbildung 2.19 Entstehung einer Refraktionswelle; aus *Studer et al.* [16, p. 92]

3 Bodenverhalten bei (hoch)dynamischer Beanspruchung

Die bei vielen Materialien gültige Annahme, das Kompressionsverhalten sei die maßgebende Eigenschaft unter Schockbeanspruchung, trifft auf poröse und besonders auf granulare Materialien wie Böden nicht zu. Eine Zustandsgleichung muss neben dem Kompressionsverhalten unter Erstbelastung auch das anschließende Entlastungs- und Wiederbelastungsverhalten beschreiben. Des Weiteren kann auch bei Drücken im Gigapascal-Bereich nicht generell ein hydrodynamischer Spannungszustand unterstellt werden. Der Einfluss der Scherfestigkeit muss somit bei hohen Drücken und Verzerrungsraten berücksichtigt werden.

Die in numerischen Modellen verwendeten konstitutiven Gleichungen müssen das Materialverhalten über den gesamten Bereich der möglichen Spannungs- und Verzerrungszustände hinreichend genau beschreiben. Somit müssen die experimentellen Spannungs- und Verzerrungszustände für die Ableitung der Materialparameter zu jedem Zeitpunkt des Versuchs genau definiert sein und den realen Bedingungen entsprechen [18, p. 353f].

3.1 Kompressionsversuche bei mittleren und hohen Verzerrungsraten

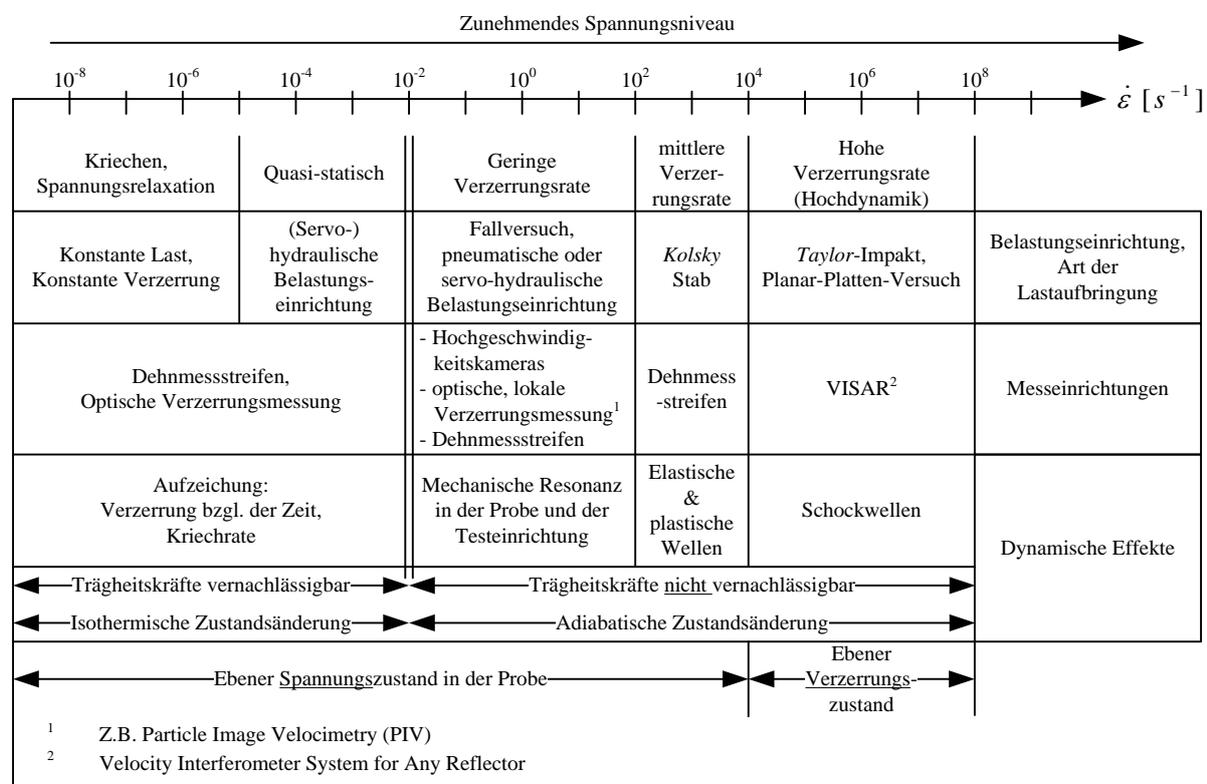


Abbildung 3.1 Abgrenzung unterschiedlicher Testmethoden hinsichtlich der Verzerrungsrate und der relevanten dynamischen Effekte; in Anlehnung an Nemat-Nasser [24] [25]

Die sich unter einer bestimmten Belastung einstellende Spannung ist für die meisten Materialien eine Funktion der Verzerrungen, der Verzerrungsrate und der Temperatur [26]. Extreme Spannungen und Drücke sind versuchstechnisch nur in Kombination mit entsprechend hohen Verzerrungsraten realisierbar. Da diese zeitabhängig sind, erfolgt in Abbildung 3.1 die Einteilung der Testmethoden hinsichtlich der maximal erzielbaren Verzerrungsrate. Bei Verwendung der linearen Ingenieurverzerrungen kann die Verzerrungsrate mittels Gleichung (3.1) dargestellt werden, wobei l die Probenlänge zum betrachteten Zeitpunkt t , l_0 die Ausgangsprobenlänge und v_1 die Deformationsgeschwindigkeit beschreiben.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{l_0} \cdot \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{v_1}{l_0} \quad (3.1)$$

Im Folgenden werden der *Split-Hopkinson pressure bar* als repräsentativer Versuch bei mittleren Verzerrungsraten sowie – stellvertretend für Versuche bei höchsten Verzerrungsraten – der Planar-Platten-Versuch näher erläutert.

3.1.1 Der *Split-Hopkinson pressure bar*

3.1.1.1 Klassische Konfiguration

Der *Split-Hopkinson pressure bar* (SHPB)¹⁸ besteht aus einem Eingangsstab und einem Ausgangsstab zwischen denen eine zylindrische Probe angeordnet ist (siehe Abbildung 3.2).

Auf das freie Ende des Eingangsstabes wird ein Schlagbolzen geschossen. Dies löst im Schlagbolzen und im Eingangsstab jeweils eine elastische Kompressionswelle $\varepsilon_I(t)$ aus (siehe Abbildung 3.3). Unter der Voraussetzung, dass die Impedanz des Stabmaterials größer ist als jene des Probenmaterials, wird die Wellenenergie an der Grenzschicht „Eingangsstab/Probe“ wie folgt aufgeteilt: in den Eingangsstab wird eine Zugwelle $\varepsilon_R(t)$ reflektiert, und durch die Probe läuft eine Kompressionswelle, die an der Grenzschicht „Probe/Ausgangsstab“ eine transmittierte Kompressionswelle $\varepsilon_T(t)$ im Ausgangsstab und eine in die Probe zurück reflektierte Kompressionswelle erzeugt. Aufgrund der höheren Impedanz des Ausgangsstabes nimmt die Axialspannung der in die Probe zurückreflektierten Welle zu. Dieser Vorgang der Reflexion an den Grenzschichten der Probe bei schrittweiser Erhöhung der Axialspannung innerhalb der Probe wiederholt sich mehrfach („Ring-Up“), bis die Axialspannung ausreichend hoch ist, um in der Probe plastische Deformationen hervorzurufen. Ab diesem Zeitpunkt kann von einem ausgeglichenen Spannungszustand in der Probe ausgegangen werden¹⁹. In der klassischen Konfiguration wird unterstellt, dass sich die Probe in einem

¹⁸ Die Bezeichnung *Split-Hopkinson pressure bar* bezeichnet einen Kompressionsversuch, wohingegen der allgemeinere Begriff des *Kolsky bars* Versuchskonfigurationen für Kompressions-, Zug-, Torsionsbeanspruchung oder eine Kombination aus diesen Belastungsarten beschreibt [27].

¹⁹ Nach *Davies & Hunter* [91] kann ab drei Mehrfachreflexionen innerhalb der Probe von einem ausgeglichenen Spannungszustand ausgegangen werden. Somit muss die Länge des Impulses mindestens dreimal so groß wie die Ausgangslänge l_{s0} der Probe sein. *Ramesh* [27] nennt eine untere Grenze von fünf Mehrfachreflexionen.

einaxialen Spannungszustand nach Gleichung (3.2) bzw. (A-130) befindet, was jedoch nur für Reibungsfreiheit an den Probenenden korrekt ist.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E \cdot \varepsilon_{11} \\ \sigma_{ij} &= 0 \text{ für } i, j \neq 1 \end{aligned} \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} \quad (3.2)$$

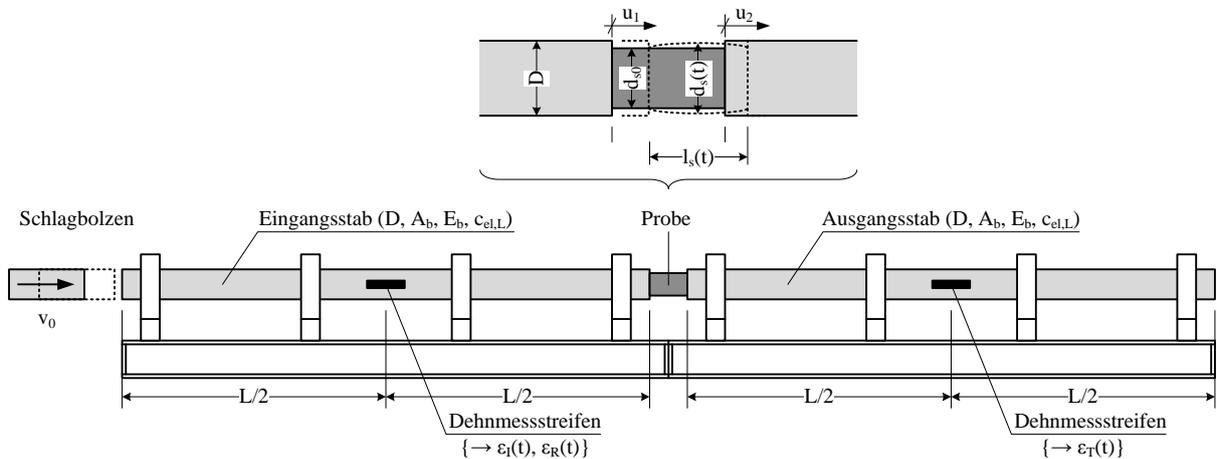


Abbildung 3.2 Klassischer Split-Hopkinson pressure bar – Prinzipdarstellung

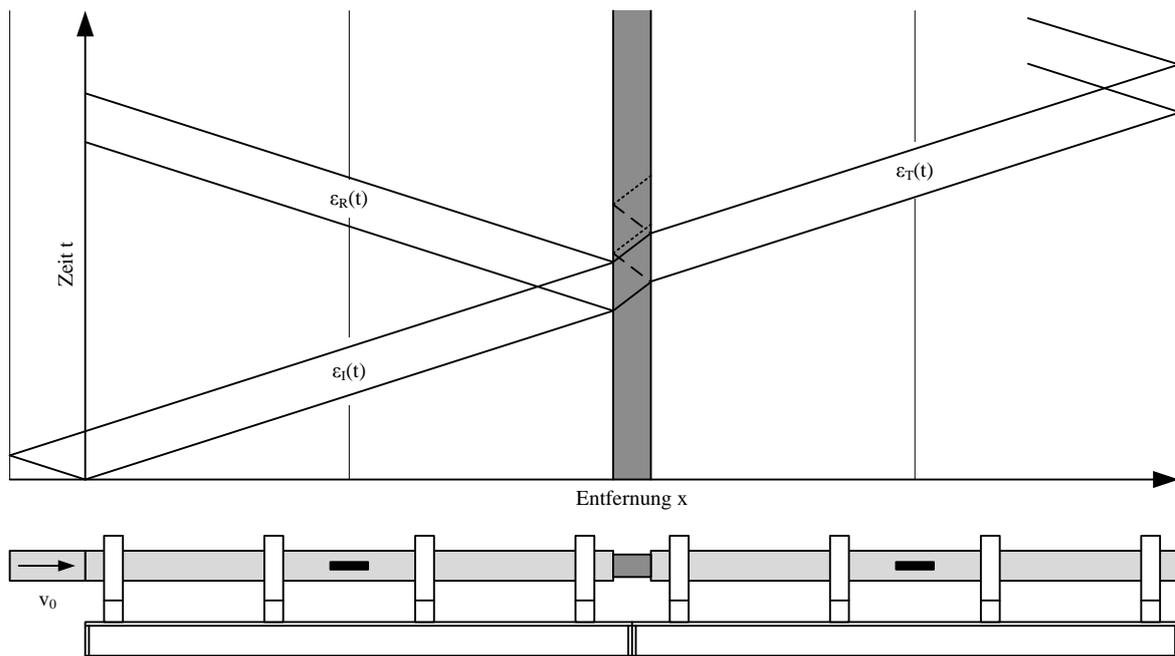


Abbildung 3.3 Vereinfachtes Lagrange-Diagramm der Wellenfortpflanzung in einem Split-Hopkinson pressure bar; nach Ramesh [26, p. 3]

Die für die Auswertung erforderlichen Verzerrungs-Zeit-Verläufe $\varepsilon_I(t)$, $\varepsilon_R(t)$ und $\varepsilon_T(t)$ werden mittels Dehnmessstreifen aufgezeichnet. Für die Auswertung des Spannungs-Verzerrungs-Verhaltens müssen die folgenden zwei fundamentalen Bedingungen erfüllt sein:

- Für den Ein- und Ausgangsstab muss die elastische 1D-Wellentheorie gemäß Abschnitt 2.1.2 gelten.
- Die Probenverzerrungen müssen gleichmäßig über die Probenlänge verteilt sein, und es muss ein ausgeglichener Spannungszustand in der Probe herrschen.

Unter der Annahme positiver Verzerrungen für Kompression, positiver Spannungen bei Druck sowie positiver Partikelgeschwindigkeiten v_1 und v_2 an den Probenenden und den geometrischen Bezeichnungen gemäß Abbildung 3.2 gilt:

$$v_1(t) = \dot{u}_1 = c_{el,L} \cdot [\varepsilon_I(t) - \varepsilon_R(t)] \quad (3.3)$$

$$v_2(t) = \dot{u}_2 = c_{el,L} \cdot \varepsilon_T(t) \quad (3.4)$$

Die wahre mittlere Verzerrungsrate in der Probe errechnet sich anhand des Momentanwertes der Probenlänge $l_s(t)$ zu

$$\dot{\varepsilon}_s(t) = \frac{v_1 - v_2}{l_s(t)} = \frac{c_{el,L}}{l_s(t)} \cdot [\varepsilon_I(t) - \varepsilon_R(t) - \varepsilon_T(t)] \quad (3.5)$$

Aus der Annahme eines ausgeglichenen Spannungszustands innerhalb der Probe gemäß Gleichung (3.6) mit den Kräften F_1 im Eingangsstab (3.7) und F_2 im Ausgangsstab (3.8) folgt Gleichung (3.9).

$$F_1(t) = F_2(t) \quad (3.6)$$

$$F_1(t) = A_b \cdot E_b \cdot [\varepsilon_I(t) + \varepsilon_R(t)] \quad (3.7)$$

$$F_2(t) = A_b \cdot E_b \cdot \varepsilon_T(t) \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_I(t) + \varepsilon_R(t) = \varepsilon_T(t) \quad (3.9)$$

Unter der Voraussetzung (3.6) und damit (3.9) bestimmt allein die reflektiert Welle im Eingangsstab mit $\varepsilon_R(t)$ die Verzerrungsrate (3.10) und die Verzerrung (3.11) (jeweils in der Probe). Die wahre Spannung in der Probe bezüglich der momentanen Probenquerschnittsfläche $A_s(t)$ ist lediglich von der transmittierten Welle $\varepsilon_T(t)$ im Ausgangsstab abhängig.

$$\dot{\varepsilon}_s(t) = -2 \cdot \frac{c_{el,L}}{l_s(t)} \cdot \varepsilon_R(t) \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_s(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_s(\bar{t}) d\bar{t} \quad (3.11)$$

$$\sigma_s(t) = \frac{E_b \cdot A_b}{A_s(t)} \cdot \varepsilon_T(t) \quad (3.12)$$

Für die wahren Spannungen und Verzerrungen müssen die Probendeformationen aufgezeichnet werden. Unter Verwendung der Anfangswerte l_{s0} und A_{s0} folgen aus den Gleichungen (3.5), (3.10) und (3.11) die Ingenieurverzerrungen und aus Gleichung (3.12) die Nominalspannung.

Damit die erste fundamentale Voraussetzung – elastische 1D-Wellentheorie – erfüllt ist, müssen die Stabspannungen unterhalb der Streckgrenze des Stabmaterials σ_y liegen. Nach Gleichung (2.17) darf die Impaktgeschwindigkeit einen kritischen Wert (3.13) nicht übersteigen. Nur dann ist elastisches Verhalten und damit eine konstante Longitudinalwellengeschwindigkeit $c_{el,L}$ (2.19)₂ gewährleistet. Des Weiteren müssen Dispersionseffekte gemäß Abschnitt 2.4.3 vernachlässigbar sein. Dies wird maßgeblich durch die geometrischen Verhältnisse L/D , D/d_{s0} und l_{s0}/d_{s0} bestimmt. Eine größtmögliche axiale Ausrichtung von Schlagbolzen, Stäben und Probe in Kombination mit einer spannungsfreien Lagerung reduziert unerwünschte Oszillationen in den Verzerrungs-Zeit-Verläufen.

$$v_{imp}^{crit} = \frac{2 \cdot \sigma_y}{\rho_b \cdot c_{el,L}} \quad (3.13)$$

Der zweiten fundamentalen Annahme – gleichmäßige Probenverzerrungen bzw. konstante Verzerrungsrate und ausgeglichener Spannungszustand – wirken radiale und longitudinale Trägheitseffekte sowie Reibung an den Grenzflächen „Probe/Stab“ entgegen, die ebenfalls durch die geometrischen Verhältnisse L/D , D/d_{s0} und l_{s0}/d_{s0} beeinflusst werden²⁰. Ob die Annahme (3.6) zulässig ist, muss stets überprüft werden indem die Spannungen einmal nach der sogenannten „1-Wave“-Methode auf Grundlage der Gleichungen (3.10) und (3.11) sowie einmal nach der „2-Wave“-Methode durch Einsetzen der Gleichung (3.9) in (3.10) ermittelt werden. Gültig sind nur jene Messwerte, für die beide Spannungsverläufe nahezu identisch sind [27, p. 467].

Weitere Ausführungen zu Theorie, Auswertung, möglicher Fehlerquellen, prinzipiellen Verfahrensnachteilen, Festlegung der Proben- und Stabgeometrie sowie Kalibrierung können in den Ausführungen von *Ramesh* [26], *Gray* [27] und *Field et al.* [28] nachgelesen werden.

3.1.1.2 Pulse Shaping

Bei granularen Materialien ist die Wellengeschwindigkeit deutlich kleiner als die elastische Longitudinalwellengeschwindigkeit $c_{el,L}$ der Ein- und Ausgangsstäbe. Entsprechend kann es bei einem zeitlich zu kurzen Testimpuls passieren, dass der Testimpuls die Probe durchlaufen hat, bevor sich ein ausgeglichener Spannungszustand einstellen konnte. Ein möglicher Ansatz, den ausgeglichenen Spannungszustand zu erreichen, ist, die Probenlänge l_{s0} zu verkürzen. Die negativen Einflüsse aus Reibung und Trägheit nehmen dabei jedoch zu, so dass eine Anpassung nur innerhalb der empfohlenen geometrischen Grenzen für L/D , D/d_{s0} und l_{s0}/d_{s0} möglich ist.

²⁰ Nach *Gray* [28, p. 471] sollte optimalerweise gelten: $0,5 \leq l_{s0}/d_{s0} \leq 1,0$.

Als zweite Möglichkeit kann die Lastanstiegszeit des Testimpulses vergrößert werden (siehe Abbildung 3.4). Experimentell wird dies mittels „Pulse Shaper“ erreicht [29], [27]. Dazu wird zwischen Schlagbolzen und Eingangsstab eine dünne Scheibe aus einem entsprechend zu wählenden Material platziert. Alternativ ist auch eine planmäßig unebene Fertigung der Vorderseite des Eingangsstabe denkbar. Aus dem annähernd rechteckförmigen Impuls wird ein trapezförmiger Impuls. Der ausgeglichene Spannungszustand kann sich einstellen bevor das maximale Spannungsniveau erreicht wird, und die Testdaten sind schon bei viel kleineren Verzerrungen gültig. Aufgrund der flacheren Wellenfront sind im Testimpuls weniger hochfrequente *Fourier*-Komponenten enthalten. Zudem hat das Probenmaterial genug Zeit, die Trägheitseffekte zu überwinden. Beides reduziert den Rauschpegel. Des Weiteren kann durch entsprechende Anpassung des Pulse Shapers eine (abschnittsweise) nahezu konstante Verzerrungsrate $\dot{\varepsilon}_R(t) = konst.$ erzielt werden, was insbesondere dann erforderlich wird, wenn der Einfluss der Verzerrungsrate selbst untersucht werden soll.

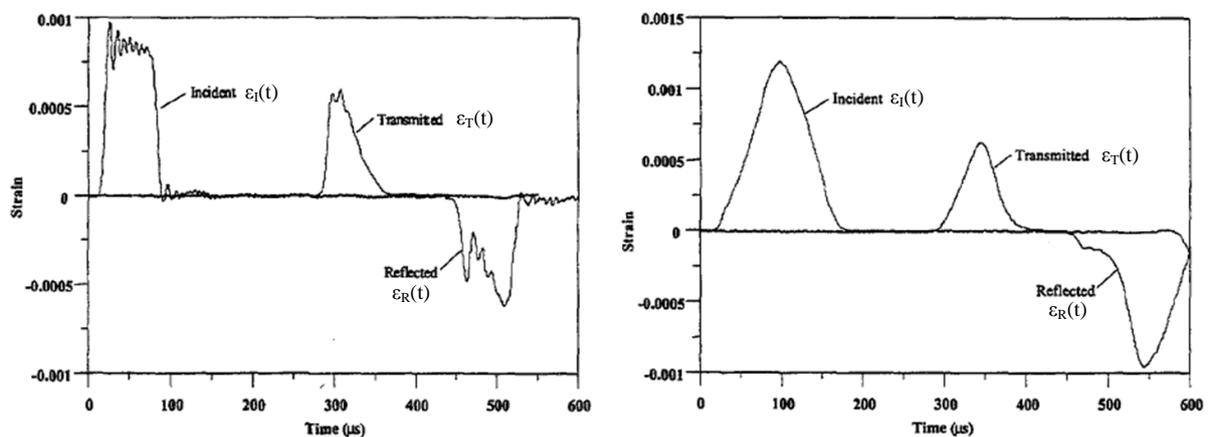


Abbildung 3.4 Verzerrungs-Zeit-Verläufe für SHPB-Versuche mit Kalkstein ohne (links) und mit Puls Shaping (rechts); aus *Frew et al.* [30]

Das richtige Material und die korrekte Dicke des Pulse Shapers werden in der Regel nach der „Trial and Error“-Methode ermittelt [27, p. 466]. Die Pulse Shaping-Techniken sind analog auch bei Planar-Platten-Versuchen anwendbar. Pulse Shaping-Techniken in Kombination mit SHPB-Versuchen an Sand wurden unter anderem von *Lu et al.* [31] und *Martin et al.* [32] angewendet. Das Verfahren kann auch bei spröden Materialien wie Felsgestein und Keramik erfolgreich eingesetzt werden [30].

3.1.1.3 Der modifizierte SHPB für Versuche mit Lockergestein

Analog zum quasistatischen Kompressionsversuch werden Lockergesteine für SHPB-Versuche in mehr oder weniger starre Hülsen eingebaut. Die Steifigkeit der Hülse in Umfangsrichtung – das heißt die Wanddicke und der Elastizitätsmodul – bestimmt, ob der Boden in der modifizierten SHPB-Konfiguration eher einem einaxialen Verzerrungszustand gemäß Gleichung (3.14) bzw. (A-136) oder eher einem einaxialen Spannungszustand nach Gleichung (3.2) bzw. (A-130) unterzogen wird. Die axiale Spannung $\sigma_x = \sigma_1$ und Verzerrung

$\varepsilon_x = \varepsilon_1$ werden anhand der Gleichungen (3.10) bis (3.12) aus den Verzerrungs-Zeit-Verläufen abgeleitet.

$$\sigma_1 = \frac{1-\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot E \cdot \varepsilon_1 = E_s \cdot \varepsilon_1 \quad (3.14)$$

Durch zusätzliche Messung der Dehnungen in Umfangsrichtung $\varepsilon_\theta(t)$ auf der Außenseite der Hülse (siehe Abbildung 3.5) können die radialen Spannungen $\sigma_r(t)$ innerhalb der Probe nach Gleichung (3.15) auf Grundlage der Theorie dickwandiger Schalen berechnet werden. Das Hülsenmaterial muss dafür über die gesamte Versuchsdauer elastisch bleiben. Dies ermöglicht die Berechnung des Seitendruckbeiwerts ξ (3.16), der mit der dynamischen Querdehnzahl $\nu(t)$ verknüpft ist, und des isotropen Drucks p (3.17). Zur Berechnung der Dichte nach Gleichung (3.18) müssen die radialen Verzerrungen infolge Nachgiebigkeit der Hülse und damit die Hülsendehnungen in Umfangsrichtung $\varepsilon_\theta(t)$ berücksichtigt werden [33]. Die Annahme eines einaxialen Verzerrungszustands ist – je nach Größe von ε_θ – nicht a priori gerechtfertigt. Der Parameter ρ_{00} in Gleichung (3.18) kennzeichnet die Dichte eines porösen Materials im unbelasteten Zustand.

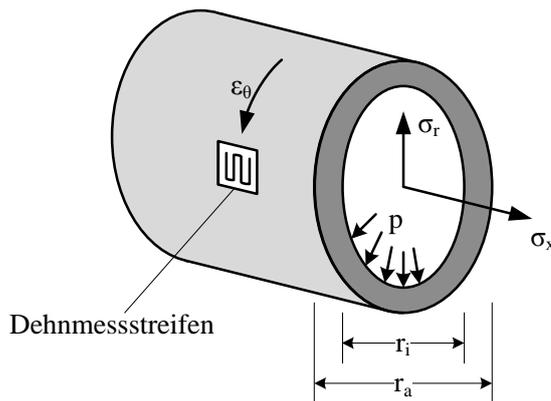


Abbildung 3.5 Modifizierte SHPB-Konfiguration –
Spannungskomponenten und
Parameter

$$\sigma_r(t) = \frac{r_a^2 - r_i^2}{2 \cdot r_i^2} \cdot \sigma_\theta(t) = \frac{r_a^2 - r_i^2}{2 \cdot r_i^2} \cdot E_{Hülse} \cdot \varepsilon_\theta(t) \quad (3.15)$$

$$\xi(t) = \frac{\Delta \sigma_r(t)}{\Delta \sigma_x(t)} = \frac{\nu(t)}{1 - \nu(t)} \quad (3.16)$$

$$p(t) = \frac{\sigma_x(t) + 2 \cdot \sigma_r(t)}{3} = \frac{1 + 2 \cdot \xi(t)}{3} \cdot \sigma_x(t) \quad (3.17)$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_{00}}{1 - \theta(t)} = \frac{\rho_{00}}{[1 - \varepsilon_x(t)] \cdot [1 + \varepsilon_\theta(t)]^2} \quad (3.18)$$

Anhand modifizierter SHPB-Versuche an bindigen Böden und trockenen Sanden mit Axialspannungen $\sigma_x < 500$ MPa und Drücken $p < 300$ MPa konnten *Bragov et al.* [34], [35],

[36] zeigen, dass der Seitendruckbeiwert von der Zeit und von der Verzerrungsrate annähernd unabhängig ist ($\xi \approx \text{konst.}$)²¹. Das Probenmaterial wird in diesem Versuch einem rotationssymmetrischen Hauptspannungszustand mit $\sigma_x > \sigma_y = \sigma_z = \sigma_r$ unterzogen, und die maximale Schubspannung $\tau_{\max} = (\sigma_x - \sigma_r)/2$ wirkt auf Ebenen, die um 45° gegenüber der Probenlängsachse geneigt sind (siehe Abschnitt A.3.2 und Gleichung (A-73)). *Bragov et al.* unterstellten den Zusammenhang gemäß Gleichung (3.19) zwischen der maximalen Schubspannung τ_{\max} und dem isotropen Druck p analog zur *Mohr-Coulombschen* Bruchbedingung. Damit kann der isotrope Druck nach Gleichung (3.20) berechnet werden. Zwischen $\varphi^\#$ und dem Seitendruckbeiwert $\xi \approx \text{konst.}$ besteht der Zusammenhang (3.21). Die Parameter $\varphi^\#$ und $c^\#$ wurden von *Bragov et al.* als Reibungswinkel und Kohäsion bezeichnet. Hinsichtlich einer Diskussion wird auf Abschnitt 3.4.3.1 verwiesen.

$$\tau_{\max} = p \cdot \tan \varphi^\# + c^\# \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_r}{2} \quad p = \frac{\sigma_x + 2 \cdot \sigma_r}{3} \quad (3.19)$$

$$p = \sigma_x - \frac{4}{3} \cdot \tau_{\max} = \frac{3 \cdot \sigma_x - 4 \cdot c^\#}{3 + 4 \cdot \tan \varphi^\#} \quad (3.20)$$

$$\tan \varphi^\# = \frac{\Delta \tau}{\Delta p} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \xi}{1 + 2 \cdot \xi} \quad \xi = \frac{3 - 2 \cdot \tan \varphi^\#}{3 + 4 \cdot \tan \varphi^\#} \quad (3.21)$$

3.1.2 Der Planar-Platten-Versuch

3.1.2.1 Versuchsaufbau und -ablauf

Beim Planar-Platten-Versuch wird eine kreisrunde Scheibe aus einem Material mit bekannten *Hugoniot*-Daten – der Impaktor – auf einen Projektilträger montiert und gemeinsam mit diesem auf das ruhende Probenmaterial geschossen (siehe Abbildung 3.6). In der Regel erfolgt dies mit einer Gaskanone. Alle Oberflächen und Grenzschichten müssen dabei parallel zueinander und normal zum Geschwindigkeitsvektor des Impaktors ausgerichtet sein. Die vorhandene Verkantung wird aus den unterschiedlichen Impaktzeiten, die mittels Kontaktstiften auf der Abdeckung registriert werden, berechnet. Die Impaktgeschwindigkeit v_{imp} kann mit im Lauf der Gaskanone angebrachten Kontaktstiften gemessen werden.

Ziel des Versuchs ist die Erzeugung plastischer Kompressionswellen in der Probe durch eine genügend große Impaktgeschwindigkeit und die Ableitung der *Hugoniot*-Daten für das Probenmaterial mittels Impedanz-Match-Methode. Bei normalem Impact werden sowohl im Impaktor als auch im Target folgende Wellen ausgelöst (siehe Abbildung 3.7):

- eine ebene, parallel zur Impaktrichtung verlaufende Kompressionswelle
- eine sich vom äußeren, freien Rand der Kontaktfläche im Schnitt kreisförmig ausbreitende Entspannungswelle

²¹ SHPB-Versuche von *Lu et al.* [32] mit trockenem Eglin Sand sowie von *Luo et al.* [34] mit Eglin Sand bei unterschiedlichen Sättigungsgraden bestätigen diese Erkenntnisse.

Bis zum Eintreffen der Entspannungswelle wirken die Randbereiche der Probe infolge der Massenträgheit für den inneren Probenbereich wie ein starrer Ring, so dass im Probeninneren für eine kurze Zeitspanne ein einaxialer Verzerrungszustand vorliegt²². Die für eine Auswertung erforderliche Schockwellengeschwindigkeit v_s kann entweder gemäß Abbildung 3.6 (a) aus den unterschiedlichen Ankunftszeiten der Schockwelle an den Kontaktstiften und dem VISAR-Signal²³ an der Probenrückseite oder gemäß Abbildung 3.6 (b) aus der Laufzeitdifferenz zwischen zwei Spannungssensoren G_1 und G_2 berechnet werden.

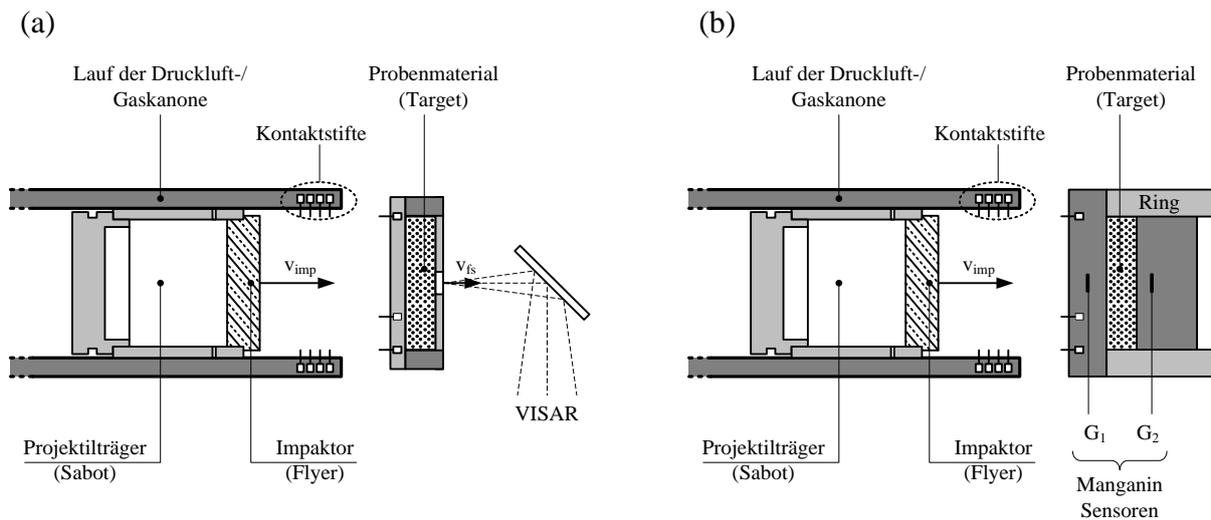


Abbildung 3.6 Schematische Darstellung des Planar-Platten-Versuchs – Messung der Schockwellengeschwindigkeit v_s mittels (a) VISAR, (b) Spannungssensoren

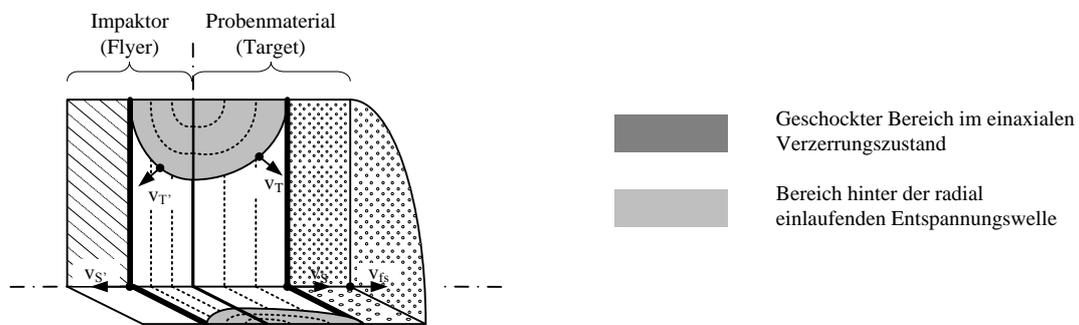


Abbildung 3.7 Ebene Schockkompressionswelle und von den Rändern einfallende Entspannungswellen; nach *Field et al.* [28]

²² Der die Probe umgebende Ring ist hierfür bedeutungslos. Er verhindert lediglich, dass das Probenmaterial (Lockergestein) seitlich herausgeschleudert wird.

²³ Die grundlegende Idee des VISARs (Velocity Interferometer for Any Reflector) beruht auf dem sogenannten *Doppler*-Effekt: die Frequenz einer Welle (im vorliegenden Fall ist dies das Laserlicht) nimmt zu oder ab, wenn sich eine Quelle und ein Betrachter aufeinander zu oder voneinander fort bewegen. Aus dem Frequenzsprung kann die Geschwindigkeit der Quelle bestimmt werden. Eine genauere Beschreibung der theoretischen Grundlagen gibt z.B. *Dolan* [72]. Die Verwendung eines VISARs erfordert ein reflektierendes Material auf der Probenrückseite.

3.1.2.2 Auswertung mittels Impedanz-Match-Methode

Aufgrund des Seitendruckbeiwerts $\xi < 1,0$ gelten bei Lockergestein die Impulserhaltung (2.41) und die die v_S - v_1 -Beziehungen nicht für den isotropen Druck p sondern gemäß Gleichung (3.22) für die Axialspannung σ_x .

$$\sigma_{x,1} = \rho_{00} \cdot v_S \cdot v_1 \quad (3.22)$$

Wird für eine vorgegebene Impaktgeschwindigkeit v_{imp} und die zugehörige Schockwellengeschwindigkeit v_S die maximale Geschwindigkeit v_{fs} der freien Probenrückseite gemessen, so kann theoretisch aus einem Versuch ein Punkt einer v_S - v_1 -Beziehung ermittelt werden²⁴. Dabei wird mit Gleichung (3.23) unterstellt, dass die Geschwindigkeit der freien Oberfläche doppelt so groß ist wie die Partikelgeschwindigkeit der einfallenden Welle (siehe „Reflexion am freien Ende“ gemäß Abschnitt 2.4.2.1). Dies ist jedoch nur eine Näherung. Korrekt ist Gleichung (3.24), wonach die Geschwindigkeit der freien Oberfläche der Summe der Partikelgeschwindigkeiten v_p infolge der Schockwelle v_S und der reflektierten Entspannungswelle c_U entspricht [18, p. 370].

$$v_{fs} \approx 2 \cdot v_1 = 2 \cdot v_p(v_S) \quad (3.23)$$

$$v_{fs} = v_p(v_S) + v_p(c_U) \quad (3.24)$$

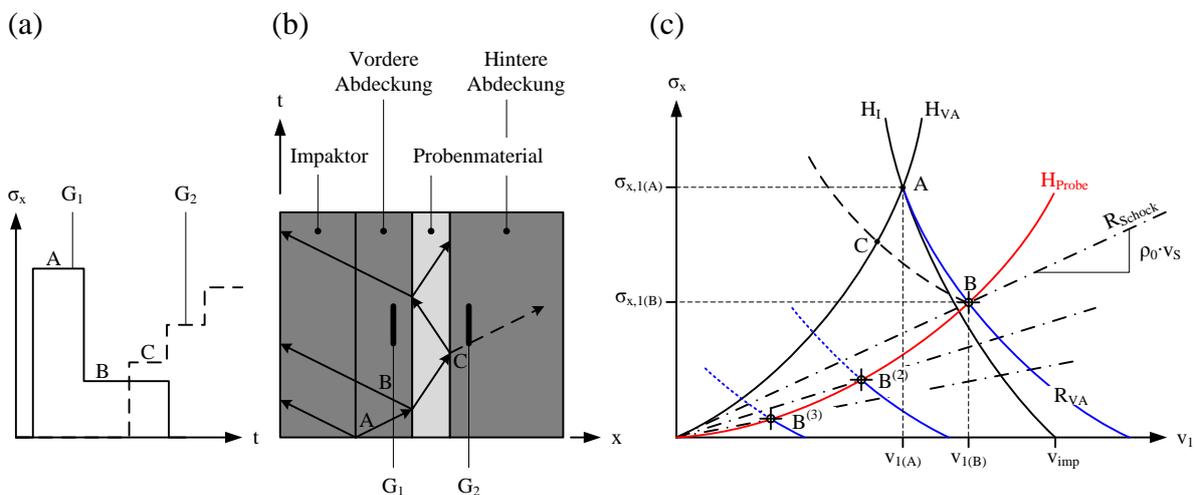


Abbildung 3.8 Impedanz-Match-Methode – (a) Idealisierte Messwertkurven, (b) Vereinfachtes *Lagrange*-Diagramm, (c) Ermittlung der gesuchten *Hugoniot*-Kurve in der σ_x - v_1 -Ebene; nach *Chapman et al.* [37]

Die gesuchte *Hugoniot*-Kurve H_{Probe} des Probenmaterials wird üblicherweise in der σ_x - v_1 -Ebene mittels Impedanz-Match-Methode bestimmt. Dazu müssen die *Hugoniot*-Kurven des

²⁴ In Realität wird ein Punkt der *Hugoniot*-Kurve aus dem Mittelwert von fünf bis acht Einzelversuchen gewonnen.

Impaktors H_I sowie der vorderen Probenabdeckung H_{VA} (siehe Abbildung 3.8) bekannt sein. Der Punkt A bezeichnet den Zeitpunkt, in dem der Impaktor mit der Geschwindigkeit v_{imp} auf die vordere Probenabdeckung trifft. Dabei stellt sich aus Gleichgewichtsgründen in den geschockten Bereichen von Impaktor und vorderer Probenabdeckung die Axialspannung $\sigma_{x,1(A)}$ ein, und die Grenzfläche bzw. die geschockten Bereiche bewegen sich mit der Partikelgeschwindigkeit $v_{1(A)}$. Trifft die Schockwelle in Punkt B auf die Grenzfläche zwischen vorderer Probenabdeckung und Probe, wird in der Probe eine weitere Schockwelle ausgelöst, die mit der Schockgeschwindigkeit v_S durch die Probe läuft. Aufgrund der geringeren Impedanz des Probenmaterials erfährt die geschockte vordere Probenabdeckung eine Entspannung entlang der Entspannungsisentrope R_{VA} ²⁵. Die *Rayleigh*-Gerade des Probenmaterials mit Steigung $\rho_0 \cdot v_S$ gemäß Gleichung (2.47) schneidet die Entspannungsisentrope R_{VA} im Punkt $(\sigma_{x,1(B)}|v_{1(B)})$. Dieser kennzeichnet den zur Partikelgeschwindigkeit $v_{1(B)}$ gehörigen Schockzustand und ist ein Punkt der gesuchten *Hugoniot*-Kurve H_{Probe} . Der Punkt C liegt auf der *Zweitschock-Hugoniot*-Kurve des Probenmaterials mit $(\sigma_{x,1(B)}|v_{1(B)})$ als Ausgangszustand (in Abbildung 3.8 gestrichelt dargestellt), worauf hier jedoch nicht weiter eingegangen wird. Durch wiederholtes Ausführen des Versuchs mit anderen Impaktgeschwindigkeiten $v_{(2)imp}$, $v_{(3)imp}$, usw. erhält man weitere Punkte der gesuchten *Hugoniot*-Kurve H_{Probe} .

Weitere Möglichkeiten zur Bestimmung von Messgrößen und die Ableitung von *Hugoniot*-Kurven werden unter anderem von *Field et al.* [28], *Gray* [38], *Espinosa & Nemat-Nasser* [39], *Ramesh* [26] und *Braithwaite* [40, pp. 110-132] erläutert.

3.1.2.3 Ermittlung der Kompressionskurve $p(\rho)$ bei Böden

Die Scherfestigkeit ist bei Lockergestein eine Funktion des Drucks. Aus theoretischen Überlegungen wird unterstellt, dass ihr Einfluss erst mit zunehmendem Druck oberhalb des Punkts vollständiger Verdichtung zurückgeht. Bei Schockversuchen mit Böden kann somit nicht ohne weiteres von einem hydrodynamischen Spannungszustand ausgegangen werden. Die v_S - v_1 -Beziehungen gelten in der Regel für die Axialspannung σ_x und nicht für den isotropen Druck p . Letzterer wird jedoch bei Hydrocodes oft als Eingabeparameter von Zustandsgleichungen benötigt.

Bei Felsgestein kann eine zweite Spannungskomponente durch zusätzliche Spannungssensoren in lateraler Richtung gemessen werden (siehe Abbildung 3.9), wie dies z.B. von *Tsembelis et al.* [41] sowie *Braithwaite* [40, pp. 123-125] durchgeführt wurde. In Lockergestein stellt dies ein großes Problem dar, da die Sensoren aufgrund der enormen lokalen Verzerrungsunterschiede innerhalb der Probe entweder nicht ihre ursprüngliche Lage beibehalten oder zerstört werden.

²⁵ Bei manchen Materialien wie z.B. Kupfer kann die Entspannungsisentrope durch eine gespiegelte *Hugoniot*-Kurve angenähert werden.

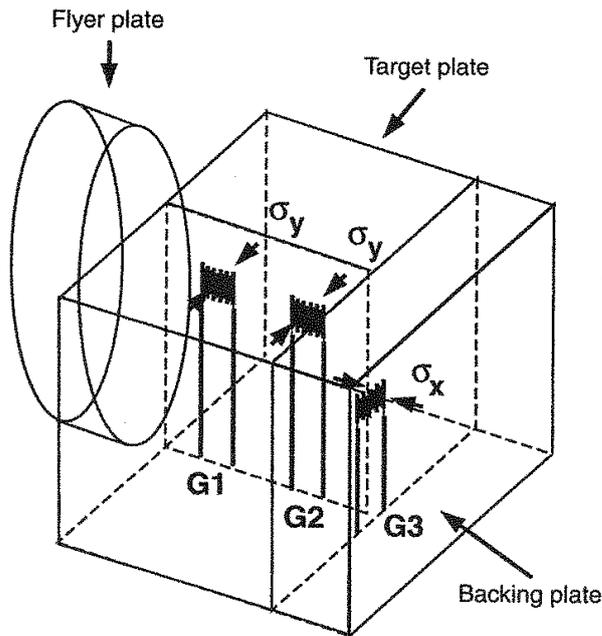


Abbildung 3.9 Mögliche Anordnung von Spannungssensoren bei Felsgestein – G1 und G2 zur Messung der Horizontalspannung, G3 zur Aufzeichnung der Axialspannung; aus *Espinosa & Nemat-Nasser* [39]

Bragov et al. [34], [35], [36] zeigten, dass die einaxialen Spannungs-Verzerrungs-Kurven $\sigma_x(\varepsilon_x)$ aus modifizierten SHPB-Versuchen und Planar-Platten-Versuchen nahtlos in einander übergehen. Sie folgerten, dass $\xi = \text{konst.}$ mit dem Seitendruckbeiwert $\xi < 1$ nach Gleichung (3.16) auch für die deutlich höheren Axialspannungen in Planar-Platten-Versuchen unterstellt werden kann. Die dynamische Kompressionskurve $p(\rho)$ kann somit anhand der Gleichungen (3.17) und (3.18) berechnet werden.

3.1.3 Versuchsergebnisse zur Kompression aus der Literatur

Im Folgenden werden die Ergebnisse von Kompressionsversuchen mit Sanden und Tonen aus der Literatur zusammengefasst. Die Bodenparameter, die Schockparameter der meist linearen v_s - v_1 -Beziehungen und deren Gültigkeitsgrenzen sind für Sande in Tabelle 3-1 und für Tone in Tabelle 3-2 aufgelistet.

3.1.3.1 Sande

Grundlegende Untersuchungen zur dynamischen Kompressionsfähigkeit von Sanden unter Schockbeanspruchung wurden erstmals von *Lagunov & Stepanov* [19] durchgeführt. Die Schockausbreitung in einem gleichförmigen, trockenen Sand infolge Impakts mit einem zylindrischen Stab zeichneten sie mittels Röntgenbeugung und Hochgeschwindigkeitskameras auf. Die v_s - v_1 -Beziehung wurde – wie bei den meisten anderen Autoren – linear angegeben. Des Weiteren ermittelten sie ein konstantes Verhältnis (3.25) der Partikelgeschwindigkeiten bei Entlastung und Erstbelastung.

$$\frac{v_p(v_U)}{v_p(v_S)} = 0,36 \quad (3.25)$$

Dianov et al. [42] führten Planar-Platten-Versuche für vier unterschiedliche Korngrößenverteilungen durch und leiteten dafür lineare v_s - v_1 -Beziehungen ab. Zwei

Kornfraktionen wurden zusätzlich nahezu vollständig wassergesättigt getestet. Die Ergebnisse erlaubten erste qualitative Aussagen zum Einfluss der Korngrößenverteilung und des Sättigungsgrades auf das dynamische Kompressionsverhalten.

In den Schockversuchen von *van Thiel et al.* [43], [44] mit Quarzsand wurden Axialspannungen von bis 48,7 GPa realisiert. Aufgrund dieser extremen Spannungen kann bei Verwendung der linearen und bilinearen v_S - v_1 -Beziehungen von einem hydrostatischen Spannungszustand ausgegangen werden. Versuche mit unterschiedlichen Anfangssättigungsgraden S_{r0} wurden durch Einfrieren der Sand-Wasser-Gemische realisiert. In ihrer Zusammenstellung von *Hugoniot*-Daten für Locker- und Felsgesteine referenzieren *Ahrens & Johnson* [45] auch auf obige Angaben nach *van Thiel et al.*, geben jedoch andere c_0 - und S_i -Werte an als im Original. Während die v_S - v_1 -Beziehungen mit den originalen Testdaten noch annähernd übereinstimmen, treten die Unterschiede bei den einaxialen Kompressionskurven $\sigma_x(\rho)$ deutlich hervor (siehe Abbildung 3.10), weshalb die ursprünglichen Parameter nach *van Thiel et al.* verwendet werden sollten²⁶.

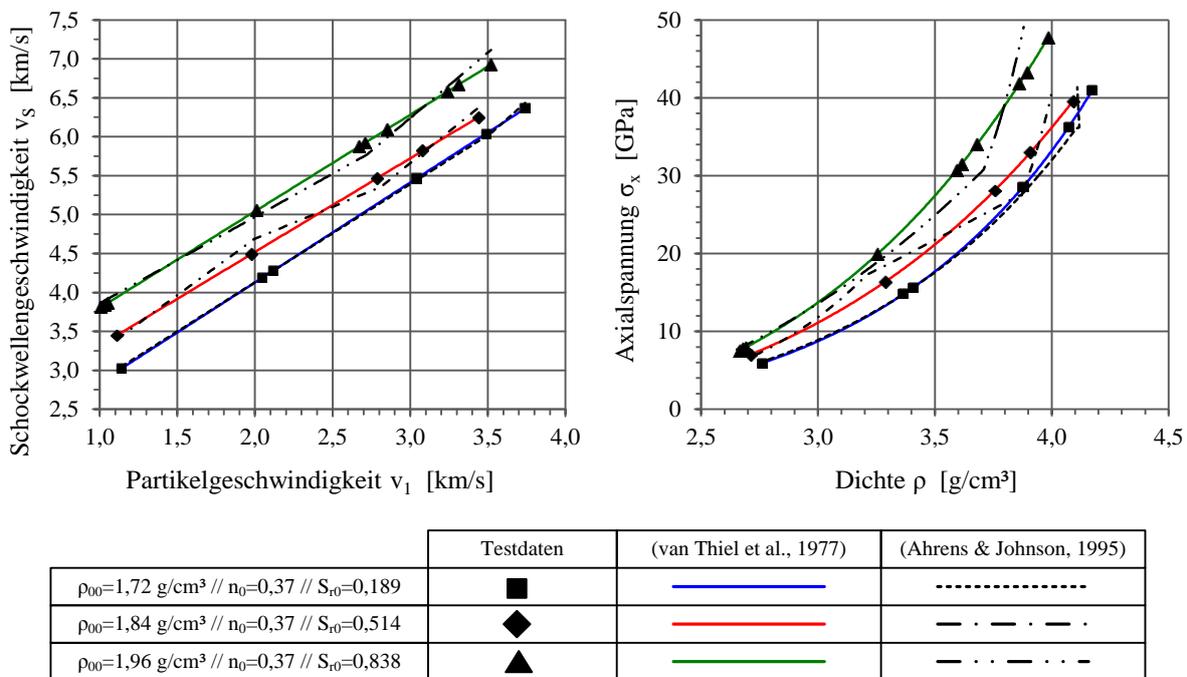


Abbildung 3.10 Vergleich der *Hugoniot*-Kurven eines Sandes – v_S - v_1 -Beziehungen (links), einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ (rechts)

Gerdyukov et al. [23] untersuchten das Schockverhalten eines Sandes mit Ausgangsdichte $\rho_{00} = 1,66 \text{ g/cm}^3$ und einem Sättigungsgrad von $S_{r0} \approx 19 \%$ für Axialspannungen $6 \text{ MPa} \leq \sigma_x \leq 230 \text{ MPa}$. Eine v_S - v_1 -Beziehung wurde für diese Versuche nicht angegeben. Das Verhältnis der Partikelgeschwindigkeiten bei Entlastung und Erstbelastung variiert für obige Axialspannungen im Bereich $0,57 \geq v_1(c_U)/v_1(v_S) \geq 0,37$. Aus weiteren Schockversuchen mit

²⁶ Die in Tabelle 3-1 angegebenen Parameter entsprechen nicht exakt jenen nach *van Thiel et al.* [45], [46] sondern wurden in einer eigenen Ausgleichsrechnung aus den Versuchsdaten ermittelt.

einem enggestuften, trockenen, gebrochenen Sand ($\rho_{d,0} = \rho_{00} = 1,68 \text{ g/cm}^3$) wurde für einen Gültigkeitsbereich von $70 \text{ MPa} \leq \sigma_x \leq 7,84 \text{ GPa}$ eine v_s - v_1 -Beziehung hergeleitet [46].

Am Cavendish Laboratory der University of Cambridge (UK) wurde eine ganze Reihe von Planar-Platten-Versuchen durchgeführt. *Tsembeles et al.* [47] sowie *Chapman et al.* [48] ermittelten jeweils lineare v_s - v_1 -Beziehungen für trockene Sande. In weiteren Versuchsreihen an Quarzsand (Trockendichte $\rho_{d,0} = \rho_{00} = 1,43 \text{ g/cm}^3$) wurde der Einfluss unterschiedlicher Sättigungsgrade ($S_{r0} = 0\%$, 22% , 83% und 89%) betrachtet [37]. Des Weiteren wurden die Auswirkungen der Anfangsporenzahl e_0 auf die Schockparameter eines Schluff-Sand-Gemisches [49] untersucht.

Brown et al. [50] generierten eine lineare v_s - v_1 -Beziehung für einen trockenen Sand, allerdings auf der experimentellen Grundlage von lediglich vier Datenpunkten.

Arlery et al. [51] führten Planar-Platten-Versuche mit einem trockenem und einem teilgesättigtem Bodengemisch aus 90% Sand und 10% Kaolinit im Spannungsintervall $1 \text{ GPa} \leq \sigma_x \leq 10 \text{ GPa}$ durch. Zur Herleitung der linearen v_s - v_1 -Beziehung für den trockenen Boden sowie der bilinearen v_s - v_1 -Beziehung für einen Sättigungsgrad $S_{r0} = 53\%$ wurden jeweils nur zwei Einzelerperimente ohne Überprüfung der Reproduzierbarkeit durchgeführt. Zudem wurden sowohl die Messwerte des Erst- als auch des Zweitschocks verwendet.

Eine der wenigen Forschergruppen, die für denselben Boden sowohl SHPB- als auch Planar-Platten-Versuche durchgeführt haben, sind *Bragov et al.* [34], [35], [36]. Für mittlere Verzerrungsraten im Bereich 10^3 s^{-1} und maximale Axialspannungen $\sigma_x \leq 500 \text{ MPa}$ wurden die dynamische Kompressionskurve $\sigma_x(\epsilon_x)$ sowie der Seitendruckbeiwert ξ anhand modifizierter SHPB-Versuche ermittelt. Für Axialspannungen $0,5 \text{ GPa} \leq \sigma_x \leq 3,5 \text{ GPa}$ wurden Planar-Platten-Versuche durchgeführt. Die einaxiale Spannungs-Verzerrungs-Kurve $\sigma_x(\epsilon_x)$ wurde mittels Gleichung (3.17) in die dynamische Kompressionskurve $p(\rho)$ umgerechnet. Eine weitere v_s - v_1 -Beziehung für einen trockenen Sand generierten *Bragov et al.* [52] mittels eines Versuchsaufbaus, bei dem die Bodenprobe auf einen *Kolsky* bar geschossen wurde. Ein Seitendruckbeiwert wurde dabei nicht gemessen.

Tabelle 3-1 Parameter und Schockdaten für Sande aus der Literatur

ρ_{00} [g/cm ³]	$\rho_{d,0}$	n_0 [-]	d_{\min} [mm]	d_{\max}	c_0 [m/s]	S_1 [-]	$v_{1,\min}$ [m/s]	$v_{1,\max}$	w_0 [-]	S_{r0} [-]	ξ [-]	Quelle
1,66		0,374			500	2,404	80	1.000				<i>Lagunov & Stepanov (1971)</i>
1,29		0,513		0,07	187	1,86	500	1.500				<i>(Dianov et al. (1976))</i>
1,80	1,29	0,513		0,07	58	4,69	500	1.500	0,395	0,994		
1,49		0,438	0,07	0,14	504	1,60	500	1.500				
1,93	1,49	0,438	0,07	0,14	483	4,92	500	1.500	0,295	1,005		
1,54		0,419	0,65	0,85	560	1,70	500	1.500				
1,52		0,426	0,85	1,40	571	1,61	500	1.500				
1,68		0,366		$d_{50} \approx 0,50$	406	2,43						<i>Gerdyukov et al. (1993)</i>

Tabelle 3-1 (Fortsetzung) Parameter und Schockdaten für Sande aus der Literatur

ρ_{00} [g/cm ³]	$\rho_{a,0}$	n_0 [-]	d_{\min} [mm]	d_{\max}	c_0 [m/s]	S_1 [-]	$v_{I,\min}$ [m/s]	$v_{I,\max}$ [m/s]	w_0 [-]	S_{r0} [-]	ξ [-]	Quelle
1,61		0,392			1.700	0,46	500	860				<i>Ahrens & Johnson (1995)</i>
					1.000	1,70	820	1.720				
					2.100	1,10	1.710	3.880				
1,72	1,65	0,37			1.610	1,26	1.140	3.490	0,042	0,186		
					-150	1,76	3.490	3.740				
1,84	1,65	0,37			1.790	1,45	1.110	1.980	0,111	0,497		
					3.050	0,82	1.980	2.790				
					800	1,62	2.790	3.440				
1,96	1,65	0,37			2.750	1,11	1.010	2.710	0,235	1,00		
					1.200	1,68	2.670	3.520				
1,985 ?		?			3.390	1,14	980	1.940	?	?		
1,45		0,431			511	1,72					<i>Tsembelis et al. (2002)</i>	
1,60		0,396	0,15	0,21	402	1,60					<i>Chapman et al. (2005)</i>	
1,43	1,43	0,460	$d_{50} \approx 0,23$		530	1,64	340	790				<i>Chapman et al. (2006)</i>
1,53	1,43	0,460	$d_{50} \approx 0,23$		230	2,26	340	750	0,070	0,217		
1,81	1,43	0,460	$d_{50} \approx 0,23$		710	2,90	290	710	0,266	0,825		
1,84	1,43	0,460	$d_{50} \approx 0,23$		320	4,92	270	760	0,287	0,891		
1,57		0,408			243	2,348	240	620				<i>Brown et al. (2007)</i>
1,50		0,412			511	1,71	0	630			0,330 ^{*)}	<i>Bragov et al. (2005 & 2008)</i>
1,72		0,351			455	2,30	40	355				<i>Bragov et al. (2006)</i>
1,73		0,338			270	2,60	430	1.400				<i>Arlery et al. (2010)</i>
1,91	1,73	0,338			908	2,66	310	750	0,105	0,536		
					2.411	1,26	750	1.300				
1,72	1,65	0,370	0,074	0,149	1.560	1,284	1.140	3.740	0,042	0,189	<i>van Thiel et al. (1977)</i>	
1,84	1,65	0,370	0,074	0,149	2.114	1,203	1.110	3.440	0,115	0,514		
1,96	1,65	0,370	0,074	0,149	2.562	1,240	1.030	3.520	0,188	0,838		
1,585		0,410		0,075	1.910	1,019	1.170	2.230				
1,600		0,40		1,00	548	2,153	580	1.618				
					2.405	1,005	1.618	3.880				

*)

Scherparameter gemäß SHPB-Versuch: $\tan\phi\# = 0,643$; $c\# = 0 \leftrightarrow \phi = 31,97^\circ$

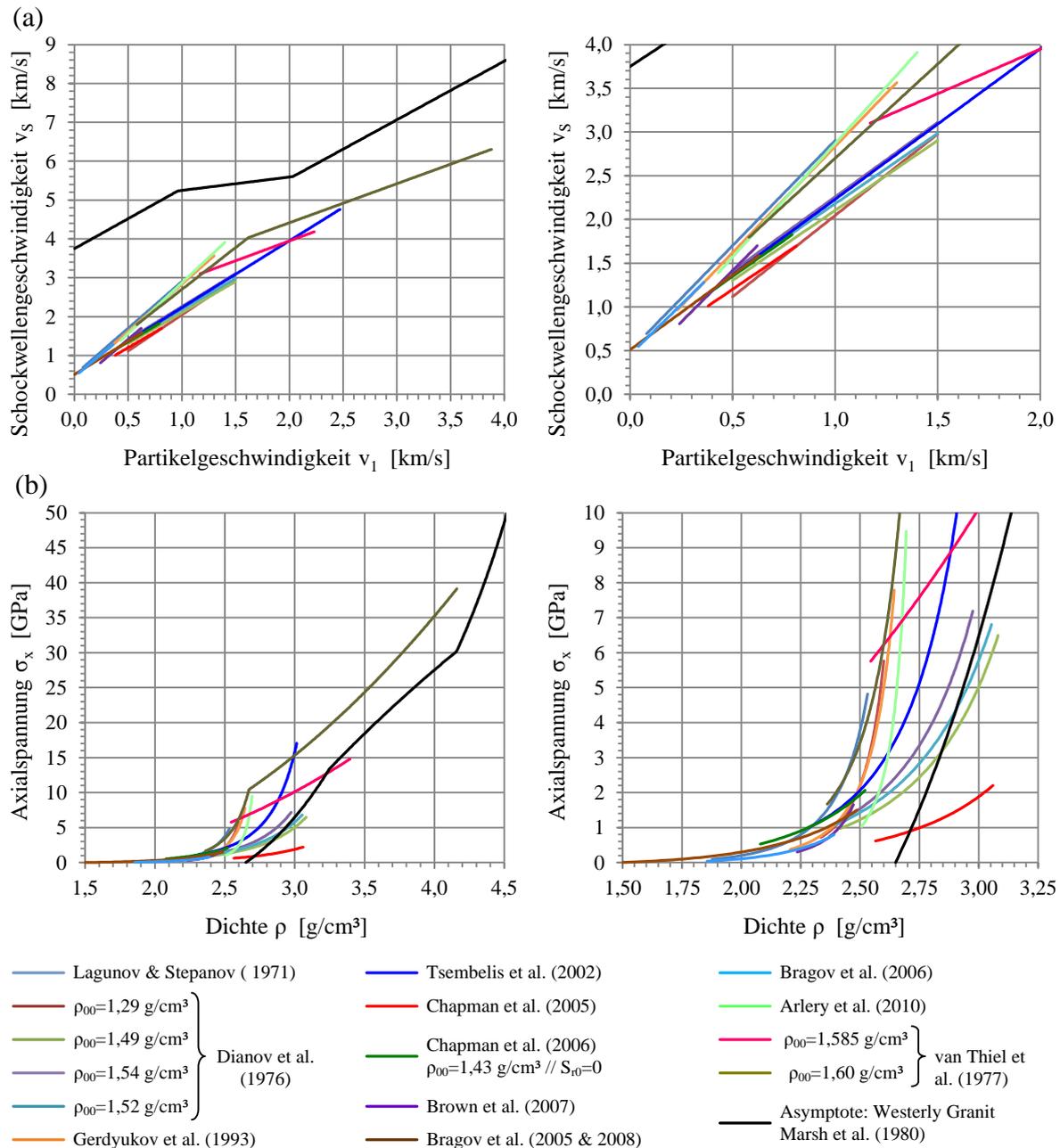


Abbildung 3.11 Schockdaten aus der Literatur für trockene Sande – (a) v_S - v_1 -Beziehungen, (b) einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$

3.1.3.2 Bindige Böden

Für bindige Böden existieren weitaus weniger Datensätze als bei Sanden. Zudem wurden in den meisten Fällen die geotechnischen Standardversuche zur Benennung und Klassifizierung der untersuchten Böden nicht durchgeführt, was einen Vergleich zusätzlich erschwert.

Erste Ergebnisse zu Schockversuchen an insgesamt vier Tonen stammen von *Al'tshuler & Pavlovskii* [53]. Jeweils zwei Tone wurden oberflächennah und zwei aus größeren Tiefen entnommen, was ungefähr den Einfluss einer Vorbelastung – normalkonsolidiert und überkonsolidiert – beschreibt. Sowohl die normalkonsolidierten Tone als auch die

überkonsolidierten Tone wurden jeweils mit einem Wasseranteil²⁷ von $w^* = 4\%$ und von $w^* = 20\%$ getestet. Aufgrund dessen in Kombination mit den extremen Axialspannungen im Bereich $3,28 \text{ GPa} \leq \sigma_x \leq 77 \text{ GPa}$ unterstellten *Al'tshuler & Pavlovskii* hydrodynamisches Verhalten. Die linearen v_s - v_1 -Beziehungen²⁸ gelten also für den isotropen Druck p .

$$w = \frac{m_w}{m_d} = \frac{\rho_w V_w}{\rho_d V} = \frac{n_w}{(1-n)} \frac{\rho_w}{\rho_s} = \frac{n}{(1-n)} S_r \frac{\rho_w}{\rho_s} = e S_r \frac{\rho_w}{\rho_s} = n S_r \frac{\rho_w}{\rho_d} = \frac{\rho - \rho_d}{\rho_d} \quad (3.26)$$

$$w^* = \frac{m_w}{m} = \frac{m_w}{m_d + m_w} = \frac{e S_r \rho_w}{\rho_s + e S_r \rho_w} = \frac{n S_r \rho_w}{(1-n)\rho_s + n S_r \rho_w} = \frac{n_w \rho_w}{\rho} = \frac{\rho - \rho_d}{\rho} \quad (3.27)$$

$$w = \frac{w^*}{1 - w^*} \qquad w^* = \frac{w}{1 + w} \quad (3.28)$$

Ahrens & Johnson [45] gaben unter Berufung auf die Ergebnisse von *Al'tshuler & Pavlovskii* [53] bi- und trilineare v_s - v_1 -Beziehungen an. In den einaxialen Kompressionskurven $\sigma_x(\rho)$ in Abbildung 3.12 sind für die Kurven nach *Ahrens & Johnson* Unstetigkeitsstellen zu erkennen. Zudem ist nicht klar, auf welcher Datenbasis die v_s - v_1 -Beziehungen hergeleitet wurden. Insofern sollten die originalen Parameter nach *Al'tshuler & Pavlovskii* verwendet werden.

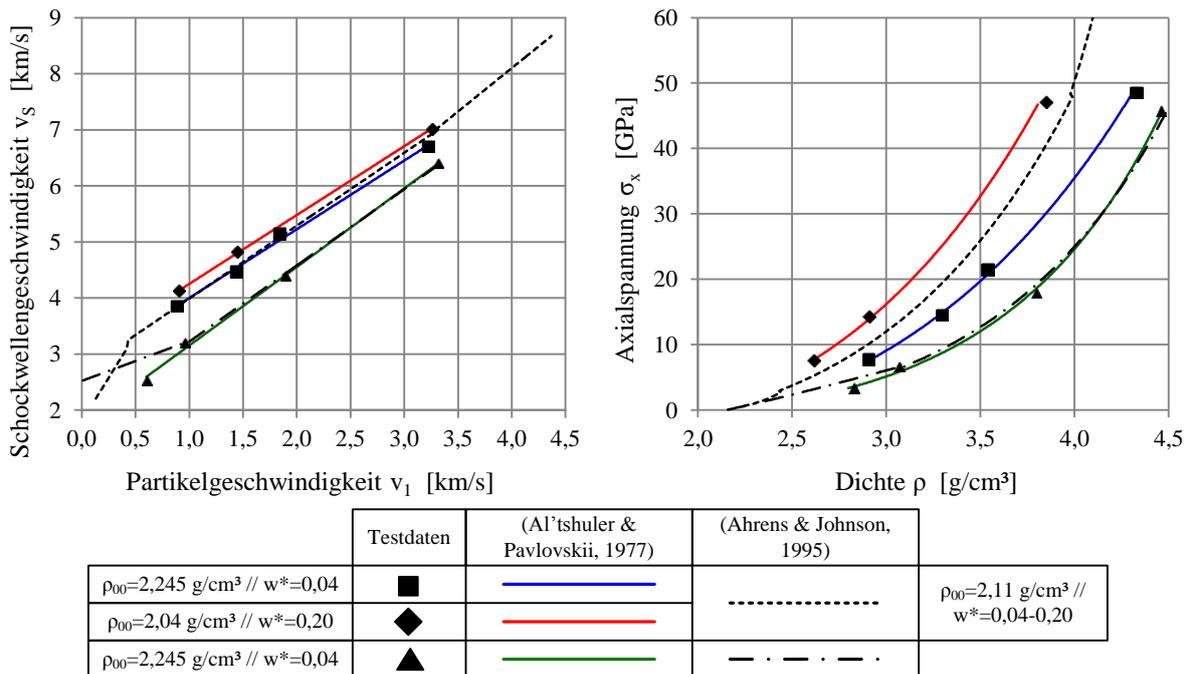


Abbildung 3.12 Vergleich der *Hugoniot*-Daten von Tonen – v_s - v_1 -Beziehungen (links), einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ (rechts)

²⁷ Der Wasseranteil w^* entspricht nicht dem Wassergehalt w gemäß DIN 18121-1. Eine Umrechnung kann anhand der Formeln (3.26) bis (3.28) erfolgen.

²⁸ Die in Tabelle 3-2 angegebenen Parameter entsprechen nicht exakt jenen nach *Al'tshuler & Pavlovskii* [54] sondern wurden in einer eigenen Ausgleichsrechnung aus den Versuchsdaten berechnet.

Über modifizierte SHPB-Versuche mit Ton und Knetgummi, dessen Hauptbestandteil ebenfalls Ton ist, berichteten *Bragov et al.* [54]. Die Stauchungsraten betragen zwischen $5 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$ und $5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$, und es wurden maximale Axialspannungen von 350 MPa realisiert. Eine Messung der radialen Dehnungen sowie des Seitendruckbeiwerts erfolgte nicht.

Mittels modifizierter SHPB-Versuche untersuchten *Bragov et al.* [35] das dynamische Kompressionsverhalten von Ton und Lehm. Die so gewonnenen einaxialen Kompressionskurven $\sigma_x(\rho)$ gehen nahtlos in die – mittels der linearen v_s - v_1 -Beziehungen aus Planar-Platten-Versuchen berechneten – Schock-Adiabaten über. Die dynamischen Kompressionskurven $p(\rho)$ wurden anhand des in Abschnitt 3.1.1.3 beschriebenen Verfahrens aus den einaxialen Kompressionskurven $\sigma_x(\rho)$ berechnet.

Kraus et al. [55] führten Planar-Platten-Versuche mit Nontronit, einem geschichteten Tonmineral ähnlich Montmorillonit, durch und leiteten für Axialspannungen $3 \text{ GPa} \leq \sigma_x \leq 20 \text{ GPa}$ eine lineare v_s - v_1 -Beziehung ab. Für ein künstliches Bodengemisch, das größtenteils aus Quarz und Kaolinit bestand, ergab eine quadratische v_s - v_1 -Beziehung ($c_0 = 0,2 \text{ km/s}$; $S_1 = 3,57$; $S_2 = -0,85 \text{ s/km}$) im betrachteten Spannungsbereich $0,5 \text{ GPa} \leq \sigma_x \leq 4,8 \text{ GPa}$ die beste Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Für beide Versuchsreihen wurden die Böden ofengetrocknet und zu feinem Pulver zermahlen, was jedoch nicht den natürlichen Wassergehalten und Zustandsformen entspricht.

Laine et al. [56] generierten eine bilineare v_s - v_1 -Beziehung für Ton ($\rho_{00} = 1,908 \text{ g/cm}^3$, $c_0 = 1,497 \text{ km/s}$ und $S_1 = 1,876$) künstlich auf Grundlage der LASL Schock-Daten [57] für Wasser und wassergesättigten Tuffstein. Die Ausgangsdichte von wassergesättigtem Tuffstein ist jedoch identisch mit dem von *Laine et al.* angegebenen Wert. Eine Herleitung der Schockparameter c_0 und S_1 mittels additivem Volumenansatz wie z.B. von *Henrych* [58, p. 193f] beschrieben scheidet somit aus, und die Angaben sind so nicht nachvollziehbar.

Tabelle 3-2 Parameter und Schockdaten für bindige Böden aus der Literatur

ρ_{00} [g/cm ³]	$\rho_{a,0}$	n_0 [-]	w_L [-]	w_P [-]	w_0 [-]	S_{r0} [-]	c_0 [m/s]	S_1 [-]	$v_{1,\min}$ [m/s]	$v_{1,\max}$ [m/s]	ξ [-]	Bezeichnung und Quelle
2,245	2,155	0,22			0,04	0,41	2,773	1,226	0,89	3,23		A4: <i>Al'tshuler & Pavlovskii</i> (1971)
2,040	1,632	0,41			0,25	1,00	3,023	1,228	0,91	3,26		A20: <i>Al'tshuler & Pavlovskii</i> (1971)
2,150	2,064	0,24			0,04	0,36	1,751	1,401	0,61	3,32		B4: <i>Al'tshuler & Pavlovskii</i> (1971)
2,020	1,616	0,40			0,25	1,00	2,310	1,454	0,95	4,37		B20: <i>Al'tshuler & Pavlovskii</i> (1971)
1,457							1,860	0,970	1,04	3,54		Ton: <i>Ahrens & Johnson</i> (1995)
2,150	2,064	0,24			0,04	0,36	2,520	0,710	0,01	0,96		B4*: <i>Ahrens & Johnson</i> (1995)
							1,860	1,360	0,96	3,32		

Tabelle 3-2 (Fortsetzung) Parameter und Schockdaten für bindige Böden aus der Literatur

ρ_{00} [g/cm ³]	$\rho_{a,0}$	n_0 [-]	w_L [-]	w_P [-]	w_0 [-]	$S_{r,0}$ [-]	c_0 [m/s]	S_1 [-]	$v_{1,min}$ [m/s]	$v_{1,max}$ [m/s]	ξ [-]	Bezeichnung und Quelle
2,110	1,688	0,38			0,25	1,12	1,800	3,100	0,13	0,42		B20*: Ahrens & Johnson (1995)
							2,690	1,300	0,42	3,28		
							1,900	1,550	3,26	4,37		
1,908	1,527	0,44			0,25	0,87	1,497	1,876		1,27		Ton: Laine et al. (2001)
							1,922	1,542	1,27			
2,150	2,150	0,08			0,00	0,00	1,580	1,420				Nontronit-Pulver: Kraus et al. (2012)
1,910	1,910	0,25			0,00	0,00	0,200	3,570				Mixture-Pulver: Kraus et al. (2012)
1,950	1,560	0,43	0,47	0,25	0,25	0,91	1,364	3,015		0,40	0,67 ^{*)}	Ton: Bragov et al. (2006)
1,970	1,550	0,43	0,28	0,18	0,27	0,98	1,805	2,908		0,36	0,64 ^{**)}	Lehm: Bragov et al. (2006)
^{*)} Effektive Scherparameter aus quasistatischen Triaxialversuchen: $\varphi^c = 19^\circ$; $c^c = 70$ kPa Scherparameter gemäß SHPB-Versuch: $\tan\varphi^{\#} = 0,2106$; $c^{\#} = 206,1$ kPa $\leftrightarrow \varphi = 11,35^\circ$; $c = 196,4$ kPa												
^{**)} Effektive Scherparameter aus quasistatischen Triaxialversuchen: $\varphi^c = 20^\circ$; $c^c = 50$ kPa Scherparameter gemäß SHPB-Versuch: $\tan\varphi^{\#} = 0,233$; $c^{\#} = 2,8$ MPa $\leftrightarrow \varphi = 12,50^\circ$; $c = 2,66$ MPa												

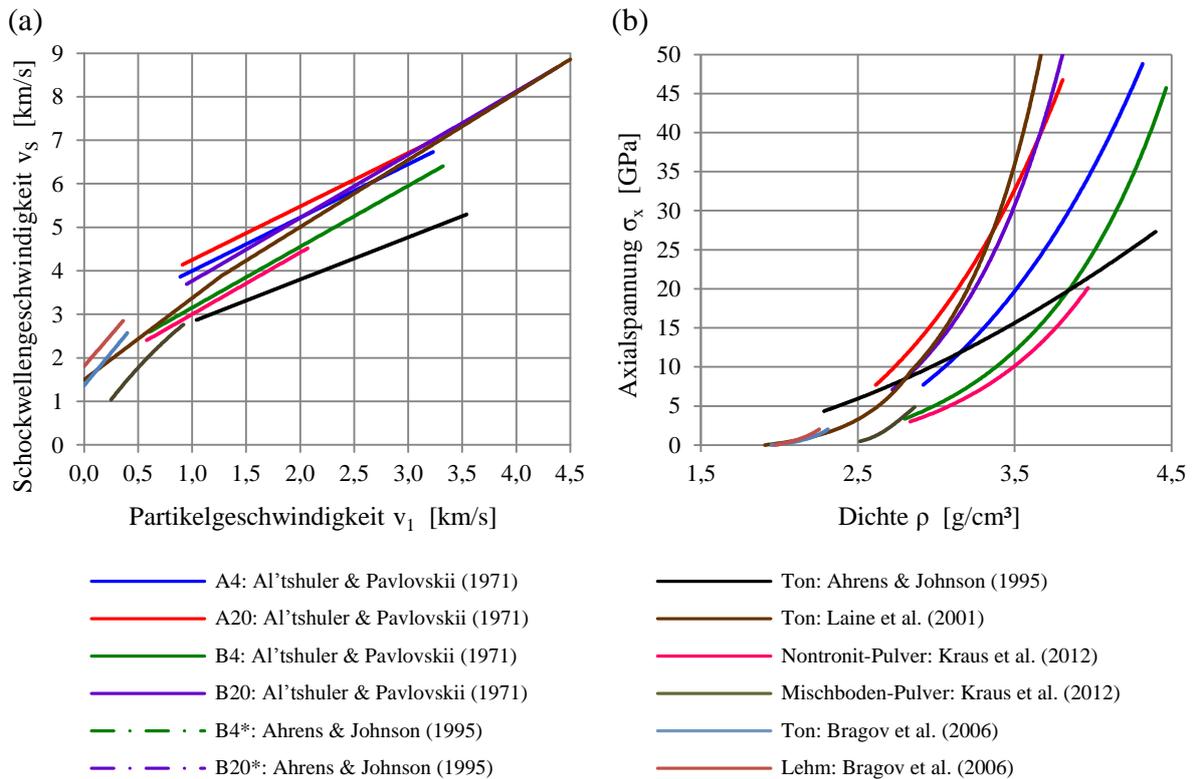


Abbildung 3.13 Schockdaten aus der Literatur für bindige Böden – (a) v_s - v_1 -Beziehungen, (b) einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$

3.2 Qualitative Beschreibung der Effekte bei Kompression

3.2.1 Kompressionsphasen

Das Kompressionsverhalten von Granulaten wird maßgeblich durch drei Mechanismen bestimmt [59], [60], [61]:

- Elastische Kompression einzelner Körner
- Relativverschiebungen zwischen benachbarten Partikeln und Kornumlagerungen bei Überwindung der maximal aktivierbaren Reibung
- Kornzertrümmerung

Welcher Effekt dominiert ist vom Spannungs- und Verzerrungszustand, vom Kornmaterial, vom Spannungsniveau und von weiteren, sich gegenseitig beeinflussenden Parametern wie Anfangsporenzahl e_0 (bzw. Dichte im Ausgangszustand ρ_{00}), Anfangs-Sättigungsgrad S_{r0} , Korngröße und –morphologie sowie der Verzerrungsrate abhängig. Für einen einaxialen Verzerrungszustand kann die Kompressionskurve $\sigma_x(\epsilon_x)$ bzw. $\sigma_x(\rho)$ in vier Kompressionsphasen eingeteilt werden (siehe Abbildung 3.14):

- Kompressionsphase 1 (elastische Kompression): Die axiale Spannung reicht nicht aus, die Reibungskräfte zwischen den einzelnen Partikeln zu überwinden. Das Kompressionsverhalten ist nichtlinear elastisch und wird durch die elastischen Verformungen der einzelnen Partikel bestimmt. Dieser Abschnitt der Kompressionskurve ist auf sehr kleine Verzerrungen $< 10^{-6}$ beschränkt [62].
- Kompressionsphase 2 (Fließen des Korngerüsts und Verfestigung): Die Reibungskräfte zwischen den einzelnen Partikeln werden überwunden, und es findet eine Kornumlagerung zu einer dichteren Packung statt. Die dabei auftretenden plastischen Deformationen setzen sich sowohl aus Schubverzerrungen als auch aus Volumenverzerrungen zusammen. Infolge der Kornumlagerung nimmt die Zahl der Kontaktpunkte zwischen benachbarten Partikeln zu, und der Kraftfluss wird vergleichmäßigt. Der Boden zeigt ein verfestigendes Verhalten (oft als „Lock-Up“ bezeichnet), bis die maximale Lagerungsdichte $\rho_{1,MPD}$ (Maximum Pack Density) erreicht ist.
- Kompressionsphase 3 (Kornzertrümmerung): In spröden Materialien wie Sand kommt es zu Kornkantenbruch, vollständiger Kornzertrümmerung und Rissen innerhalb der Körner ohne vollständige Durchtrennung [63, p. 643]. All dies bedingt erneute Kornumlagerungen, Verfestigungen und Bruchphänomene, was sich in einer entsprechenden Welligkeit der Kompressionskurve äußert. Am Punkt vollständiger Verdichtung bei $\rho_{1,TMD}$ (Theoretical Maximum Density) ist der gesamte Porenraum zusammengepresst, und die Kompressionskurve schneidet jene des im Ausgangszustand porenfreien Kornmaterials. Die für vollständige Verdichtung erforderlichen Drücke können nicht mehr quasistatisch sondern nur in

Schockexperimenten erreicht werden. Vollständige Entlastung führt auf die Dichte $\rho_{TMD} = \rho_{s0}$ des unbelasteten, porenfreien Materials.

- Kompressionsphase 4 (porenfrei): Eine weitere Kompression oberhalb des Punkts vollständiger Verdichtung erfolgt entlang der Kompressionskurve des nun porenfreien Kornmaterials. Diese wird oft mit der Kompressionskurve des reinen Feststoffs gleichgesetzt. Bei Schockbelastung ist diese Annahme genau genommen nicht korrekt, da die *Hugoniot*-Kurven des vollständig verdichteten aber im Ausgangszustand porösen Materials und des reinen Feststoffs aufgrund des in den Kompressionsphasen 2 und 3 erzeugten thermischen Drucks (vgl. Abschnitt 3.2.2.1) unterschiedlich sind [64, p. 113].

In den Kompressionsphasen 2 und 3 wird der Porenraum stetig kleiner, wobei in Abhängigkeit der Einflussparameter (siehe Abschnitt 3.2.2) der eine oder der andere Effekt überwiegt. Der für die Kompressionsphase 3 unterstellte Schnittpunkt der porösen und der porenfreien Kompressionskurven ist eine Idealisierung. In Realität erfolgt eine asymptotische Annäherung der porösen an die porenfreie Kompressions- bzw. *Hugoniot*-Kurve. Dies zeigen sowohl die quasistatischen Versuche von *Vogler et al.* [63] mit Keramik-Granulaten als auch die Schockversuche mit Sand von *Brown et al.* [50] und *Artery et al.* [51] mit gemischtkörnigem Boden. Letztere geben den Punkt vollständiger Verdichtung bei einer Axialspannung von $\sigma_x \approx 3,5$ GPa an. Für poröse Stoffe mit einem zusammenhängenden Matrixmaterial wie z.B. Felsgestein und Beton können die Kompressionsphasen 2 und 3 zu einer Phase – dem Zustand unvollständiger Verdichtung – zusammengefasst werden [18, p. 184f].

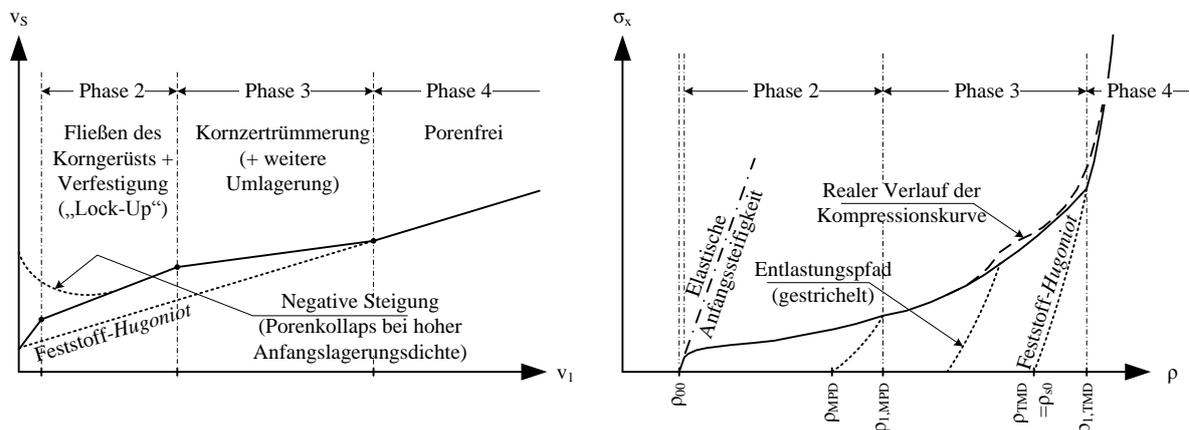


Abbildung 3.14 Kompressionsphasen bei Lockergestein – v_s - v_1 -Beziehung (links), einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ (rechts)

Eine Identifikation der Kompressionsphasen wird – analog zu Phasenänderungen wie sie z.B. bei Quarz vorkommen – durch Knicke in den v_s - v_1 -Beziehungen erleichtert (siehe Abbildung 3.14, links). Bei Granulaten, die bei Belastungsbeginn bereits dichtmöglichst gelagert sind

($\rho_{00} \approx \rho_{MPD}$) und bei Lockergestein ist die Steigung der v_S - v_1 -Beziehungen aufgrund der Bruchvorgänge anfangs negativ²⁹ [60, p. 14f], [40, p. 47].

3.2.2 Qualitative Beschreibung der maßgebenden Einflussgrößen

Das Kompressionsverhalten ist maßgeblich von den nachfolgenden Einflussgrößen abhängig. Eine klare Trennung ist nicht immer möglich, da sich die Parameter gegenseitig beeinflussen. Systematische Untersuchungen existieren hauptsächlich für Sande und wurden größtenteils erst in jüngster Vergangenheit vorangetrieben. Somit liegen nur wenige Daten vor.

3.2.2.1 Anfangsporenzahl e_0

Prinzipiell ist das Kompressionsverhalten umso steifer und die Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ umso steiler, je kleiner die Anfangsporenzahl e_0 ist bzw. je größer die Dichte ρ_{00} ist [65], [66], [63]. Je größer e_0 ist, desto:

- größer sind die Verzerrungen für Kornumlagerungen und eine Erhöhung der Dichte
- geringer ist die Zahl der Kontaktstellen mit benachbarten Partikeln und desto höher die Spannungsspitzen an den Kontaktpunkten. Entsprechend kleiner ist das Spannungsniveau, ab dem Brucheffekte auftreten.

Bei sehr hohen Spannungen und entsprechend kleinen Porenzahlen e konvergieren die Kompressionskurven $\sigma_x(e)$ bzw. $\sigma_x(\rho)$ gegen jene des porenfreien Kornmaterials (bei Sand ist dies Quarz).

Einfach kubische Kugelpackung (SC)



Kubisch flächenzentrierte Kugelpackung (FCC)

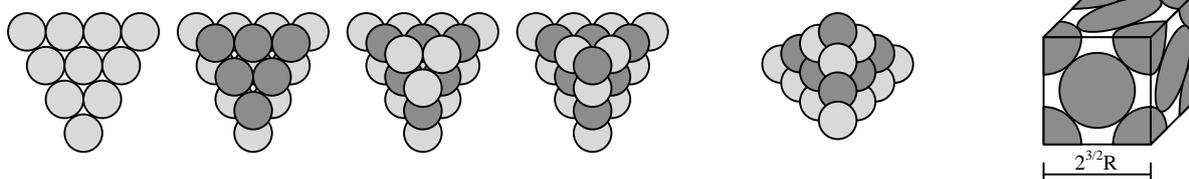


Abbildung 3.15 Kugelpackungen – Einfach kubisch und kubisch flächenzentriert; nach *Richart et al.* [14] und *Benz* [62]

Das steifere Kompressionsverhalten bei größerer Lagerungsdichte bzw. kleinerer Porenzahl e kann leicht anhand des *Hertz-Mindlin* Kontaktmodells veranschaulicht werden (siehe *Richart et al.* [14, pp. 141-150] für eine Zusammenfassung). Die einfach kubische Kugelpackung

²⁹ Unabhängig davon gilt jedoch stets $v_s > v_1$.

(SC) nach Abbildung 3.15 stellt die lockerste Lagerung identischer Kugeln dar mit einer Koordinationszahl von 6 und einer Porenzahl $e_{\max} = 0,91$. Die dichteste Lagerung mit einer Koordinationszahl von 12 und eine Porenzahl $e_{\min} = 0,35$ wird mit der flächenzentrierten Kugelpackung (FCC) erreicht. Für elastische Kugeln unter hydrostatischer Beanspruchung $\sigma_m = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ beträgt das Verhältnis der Kompressionsmoduln $K^{(SC)}$ (3.29) für die einfach kubische Kugelpackung und $K^{(FCC)}$ (3.30) für die flächenzentrierte Kugelpackung von $K^{(FCC)}/K^{(SC)} = 2$ und entspricht somit dem Verhältnis der Koordinationszahlen.

$$K^{(SC)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2 \cdot G_s}{3 \cdot (1 - \nu_s)} \right]^{2/3} \cdot \sigma_m^{1/3} \quad (3.29)$$

$$K^{(FCC)} = \left[\frac{2 \cdot G_s}{3 \cdot (1 - \nu_s)} \right]^{2/3} \cdot \sigma_m^{1/3} \quad (3.30)$$

Die oben beschriebene Eigenschaft einer mit abnehmender Porenzahl e_0 ansteigenden Kompressionsteifigkeit wird durch den gegenteiligen Effekt überlagert, wonach das Kompressionsverhalten mit steigendem e_0 bzw. steigendem spezifischen Anfangsvolumen V_{00} steifer wird. Durch Reibungseffekte kommt es zu einer Erhitzung und zu einer Zunahme des Drucks im Porenraum. Dieser thermische Druck muss bei der Schockkompression des porösen Materials verglichen mit dem im Ausgangszustand porenfreien Material zusätzlich überwunden werden. Für Materialien mit sehr großem e_0 , die durch extrem hohe Schockdrücke belastet werden, kann dies zu anomalen Formen der Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ mit senkrechter oder auch negativer Steigung führen. Theoretisch wird dieses Thema von *Zel'dovich & Raizer* [21, pp. 712-716] sowie *Linde & Schmidt* [67] abgehandelt. Experimentell wurden anomale Kompressionskurven $\sigma_x(\rho)$ mit negativer Steigung unter anderem von *Trunin et al.* [68] nachgewiesen.

3.2.2.2 Korngrößen(verteilung) und Morphologie

Quasi-statische Kompressionsversuche von *Vogler et al.* [63] mit unterschiedlichen Granulaten aus Wolframcarbid zeigten ein steiferes Verhalten für kleinere Korndurchmesser und rundere Kornformen, wobei der Einfluss der Kornform überwog. Entsprechend ist auch das Spannungsniveau, ab dem die Kompressionskurven $\sigma_x(\rho)$ konvergieren, umso größer, je kleiner und je runder die Partikel sind. Je runder die Partikel sind, desto geringer ist die für Kornumlagerungen zu überwindende Reibung. Mit zunehmender Partikelgröße nimmt statistisch die Anzahl an Defekten, die Ausgangspunkt für Kornbruch sind, zu.

Systematische Untersuchungen zum Einfluss der Korngrößenverteilung auf das Kompressionsverhalten von Sanden bei mittleren Verzerrungsraten wurden von *Huang et al.* [69] sowie *Luo et al.* [33] durchgeführt. Enggestufte Sande mit kleinen Korndurchmessern verhalten sich demnach stets steifer als enggestufte Sande mit großen Korndurchmessern (siehe Abbildung 3.16), was die Ergebnisse von *Vogler et al.* [63] bestätigt. Weitgestufte Sande sind bei kleinen Spannungen kompressibler als enggestufte Sande, da mehr Kornumlagerungen stattfinden. Bei höheren Spannungen verhalten sich weitgestufte Sande

jedoch deutlich steifer. Aufgrund der höheren Lagerungsdichte bzw. der kleineren Porenzahl und der damit verbundenen größeren Anzahl an Nachbarkontakten kommt es zu weniger Kornbrüchen als bei enggestuften Sanden.

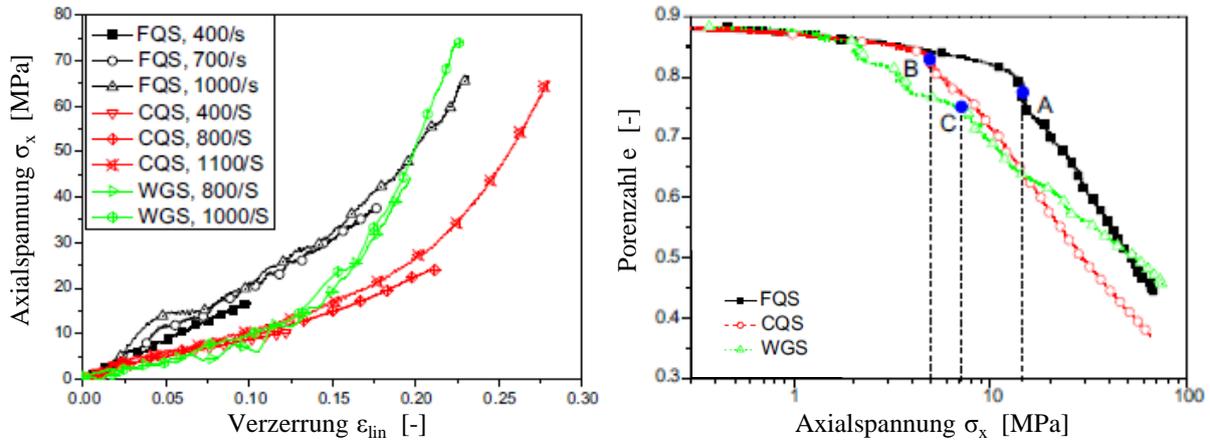


Abbildung 3.16 Einfluss der Korngrößenverteilung (FQS: enggestufter Feinsand, CQS: enggestufter Grobsand, WGS: weitgestufter Sand) – Kompressionskurve $\sigma_x(\epsilon_x)$ (links) und Druck-Porenzahl-Diagramm $e(\sigma_x)$ (rechts); aus *Huang et al.* [69]

Die Untersuchungen von *Dianov et al.* [42] zum Einfluss der Korngrößen auf das Kompressionsverhalten trockener Sande bei hohen Verzerrungsraten ergaben unterschiedliche, in Abbildung 3.17 dargestellte *Hugoniot*-Kurven. Eine Tendenz ist daraus jedoch nicht ableitbar.

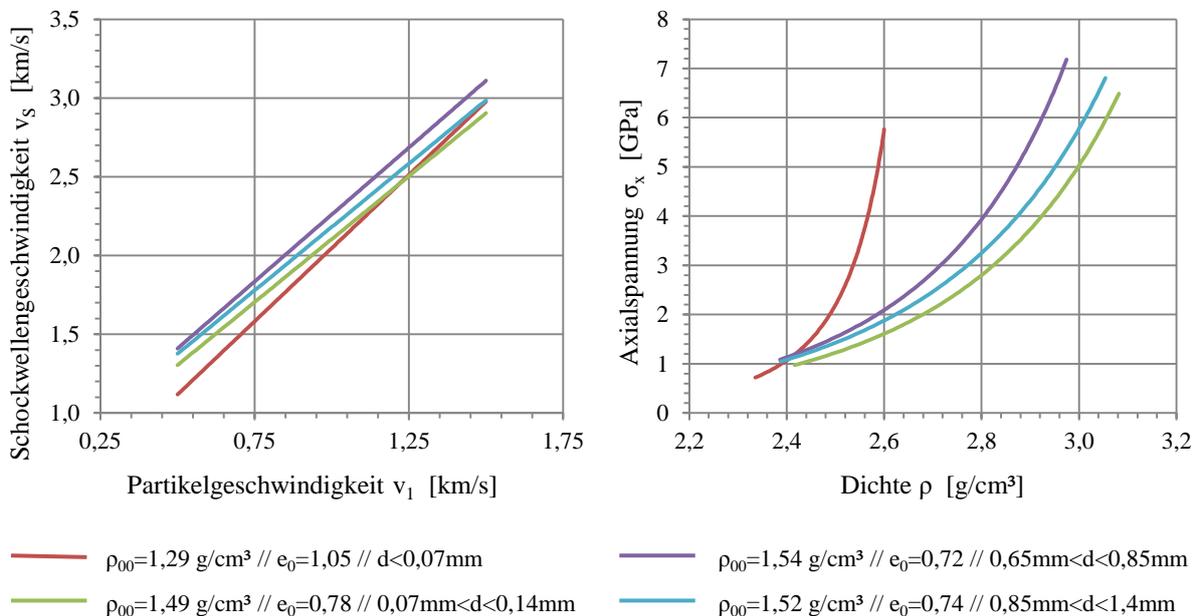


Abbildung 3.17 Einfluss der Korngrößenverteilung für trockene Sande bei hohen Verzerrungsraten – v_s - v_1 -Beziehung (links) und einaxiale Kompressionskurve $\sigma_x(\rho)$ (rechts); Daten von *Dianov et al.* [42]

3.2.2.3 Sättigungsgrad und Wassergehalt

Für Vollsättigung in Kombination mit kleinen Spannungen kann auf Grundlage der elastischen Wellentheorie und der *Wood*schen Formel (3.31) der mittlere Kompressionsmodul K_{mix} und mit Gleichung (3.32) die Kompressionswellengeschwindigkeit eines in Wasser aufgeschlämmten Bodens berechnet werden. Für Porenzahlen $e < 1,2$ ist die elastische Kompressionswellengeschwindigkeit des Boden-Wasser-Gemisches größer als jene des Wassers, das heißt die Kompressionswellengeschwindigkeit wird durch die Steifigkeit des Korngerüsts bestimmt. Bei hohen Sättigungsgraden dominiert das Porenwasser [59]. Bei Drei-Phasen-Gemischen aus Boden, Wasser und Luft muss zuerst der mittlere Kompressionsmodul des Wasser-Luft-Gemisches bestimmt werden. Bereits 0,1 % Luftvolumenanteil führen zu einer signifikanten Abnahme der mittleren Kompressionswellengeschwindigkeit des Drei-Phasen-Gemisches verglichen mit jener des vollgesättigten, aufgeschlämmten Bodens [14, pp. 129-132].

$$\frac{1}{K_{mix}} = \frac{1}{1+e} \cdot \frac{1}{K_s} + \frac{e}{1+e} \cdot \frac{1}{K_w} \quad (3.31)$$

$$c_{el,B,mix} = \sqrt{\frac{K_{mix}}{\rho_r}} = f(K_s, K_w, \rho_s, e) \quad (3.32)$$

Biot [70] befasste sich mit der dreidimensionalen Ausbreitung von Kompressions- und Scherwellen in fluidgesättigten, porösen, elastischen Feststoffen. Die Lösung der *Biotschen* Wellengleichung beinhaltet eine Scherwelle sowie zwei Kompressionswellen. Die Kompressionswellengeschwindigkeit im Fluid ist größer als jene im Feststoff. Beide sind durch die Relativbewegung des Feststoffs und des Fluides miteinander gekoppelt. Eine Scherwelle existiert nur im Korngerüst. Hinsichtlich der Herleitung und zugehöriger Formeln wird auf [70] sowie [14, pp. 132-136] verwiesen.

Für geringe Verzerrungsraten (vgl. die Zusammenfassung von *Omidvar et al.* [61]) und bei mittleren Verzerrungsraten wie in den SHPB-Versuchen von *Martin et al.* [71] (siehe auch *Kabir et al.* [72]) nimmt die Kompressibilität bei geringen Anfangssättigungsgraden im Bereich $0 < S_{r0} < 0,32$ (dies entspricht Wassergehalten $0 < w_0 < 0,07$) zu. Entsprechend liegen die „feuchten“ Kompressionskurven unterhalb jener des trockenen Sandes (siehe Abbildung 3.18). Dies ist dann zu beobachten, wenn die aufgezwungenen Verzerrungen einerseits unterhalb des Grenzwertes liegen, ab dem der Sand ein Verfestigungsverhalten zeigt, und zudem zu klein sind, um einen Kollaps aller luftgefüllten Poren zu erzwingen. Durch das vorhandene Wasser wird die Korn-zu-Korn-Reibung reduziert, und die Kompressionssteifigkeit nimmt ab. Bei einer Steigerung des Sättigungsgrads auf $S_{r0} > 0,2-0,3$ nimmt die Kompressionssteifigkeit stetig zu. Hier wird ab einer gewissen Verzerrung der vollgesättigte Zustand erreicht (Knick in der Kompressionskurve), und das Wasser beteiligt sich am Lastabtrag. Für höhere Wassergehalte wird die Vollsättigung bereits bei kleineren Verzerrungen erreicht. Die SHPB-Versuche von *Veyera* [73] sowie die Schockversuche von *Chapman et al.* [37] bestätigen dieses Verhalten (siehe Abbildung 3.19).

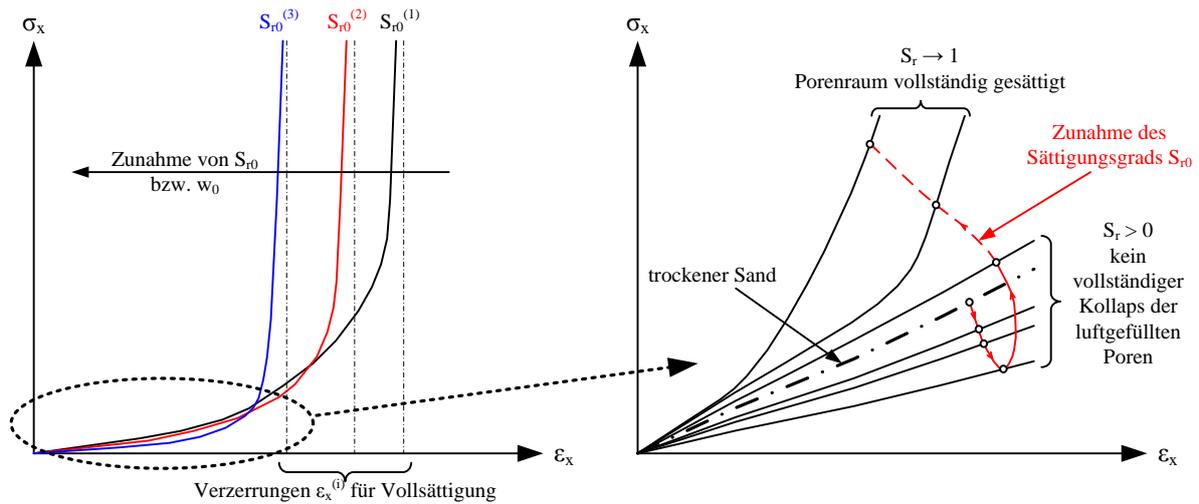


Abbildung 3.18 Einfluss des Anfangssättigungsgrads S_{r0} auf das einaxiale Kompressionsverhalten von Böden; nach *Omidvar et al.* [61]

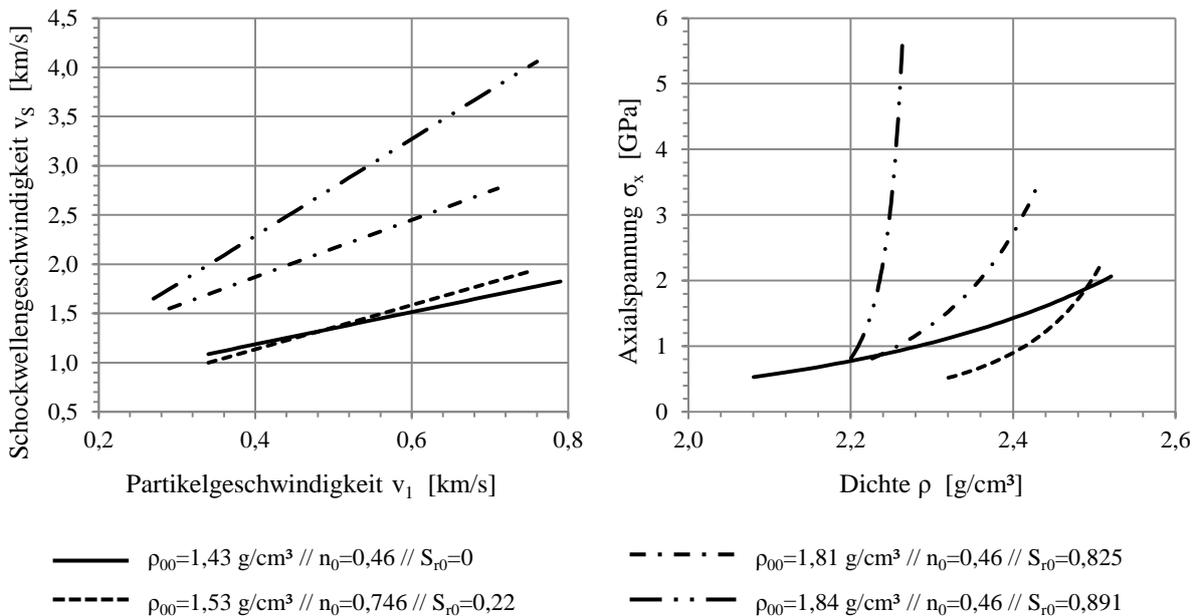


Abbildung 3.19 Einfluss des Anfangssättigungsgrads S_{r0} auf das Kompressionsverhalten von Sanden bei hohen Verzerrungsraten; Daten von *Chapman et al.* [37]

Jüngste Versuche von *Luo et al.* [33] sowie *Parab et al.* [74] belegen zudem, dass Sandkörner, die von einer Wasserhülle umgeben sind, erst bei deutlich größeren Spannungen brechen als trockene Körner.

3.2.2.4 Verzerrungsrate

Der Einfluss der Verzerrungsrate muss zusammen mit der maximalen Verzerrung betrachtet werden. Brucheffekte und vor allem Kornumlagerungseffekte sind zeitintensiv. Entsprechend steigt die Kompressionssteifigkeit mit zunehmender Verzerrungsrate an, was jedoch nur für Verzerrungen $\epsilon_x < 4\%$ gilt. Die Versuche von *Bragov et al.* [36] und Simulationen von

Huang *et al.* [69] mit der Diskrete Elemente Methode (DEM) zeigen, dass der Einfluss mittlerer Verzerrungsraten auf das Kompressionsverhalten trockener Sande relativ gering ist und dass Brucheffekte einen größeren Anteil an den registrierten Verzerrungen haben als Kornumlagerungen. Vogler *et al.* [63] begründen das deutlich steifere Kompressionsverhalten bei Schockbelastung ebenfalls mit mangelnder Zeit für Kornumlagerungen. Zudem führen sie an, dass Verzerrungen nur innerhalb der Schockfront stattfinden und diese eine sehr geringe Dicke hat. Eine mögliche Erklärung für die höhere Kompressionssteifigkeit trockener Sande bei höheren Verzerrungsraten ist auch der thermische Druck infolge Erwärmung des Porengases durch Korn-zu-Korn-Reibung, der überwunden werden muss.

3.3 Das Entlastungsverhalten von Böden

Ein Maß für das Dämpfungspotential ist das Verhältnis der Wellengeschwindigkeit in der Belastungsphase – bei genügend hohem Druck ist dies die Schockwellengeschwindigkeit v_s – zur Geschwindigkeit der Entlastungswelle im komprimierten Material c_U , wobei beide Wellengeschwindigkeiten von den jeweiligen Momentanwerten der Dichte und des Drucks sowie dem maximal erreichten Druck abhängen [75]. Eine vollständige Beschreibung des Kompressionsverhaltens granularer Materialien muss somit auch das Entspannungsverhalten beinhalten.

Für die in Hydrocodes übliche Aufspaltung der konstitutiven Gleichungen, wird die Zustandsgleichung vereinfacht in der p - ρ -Ebene dargestellt (siehe Abbildung 3.20). Ausgehend von einem Punkt $(\rho|p)$ auf der Kompressionskurve sind sowohl die anfängliche, lokale Steigung als auch die mittlere Steigung des Entlastungspfads für diesen Punkt größer als die Steigung der Tangente an die Kompressionskurve. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass in einem Druck-Porenzahl-Diagramm der Schwellbeiwert C_s kleiner als der Kompressionsbeiwert C_c ist (siehe Abbildung 3.22, links).

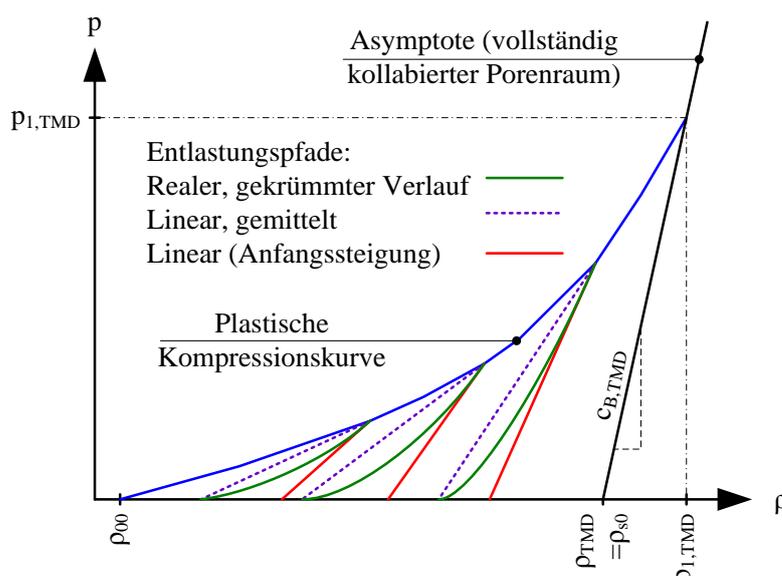


Abbildung 3.20
Idealisiertes Be- und
Entlastungsverhalten
von Böden

Über den gesamten Entlastungsvorgang gemittelte, lineare Entlastungspfade sind eine Vereinfachung, da die Schallgeschwindigkeit gemäß Gleichung (2.33) eine Funktion des Drucks ist. Wie in Abbildung 3.21 (rechts) dargestellt ist oberhalb eines bestimmten Drucks die Schallgeschwindigkeit bei Entlastung größer als bei Belastung, was gleichbedeutend ist mit der Aussage, dass Wellenformen mit hohem Druckniveau schneller gedämpft werden. Unterhalb des besagten Druckniveaus ist die Schallgeschwindigkeit bei Entlastung langsamer als bei Belastung, was zu einem Auseinanderziehen der hinteren Wellenfront führt [75].

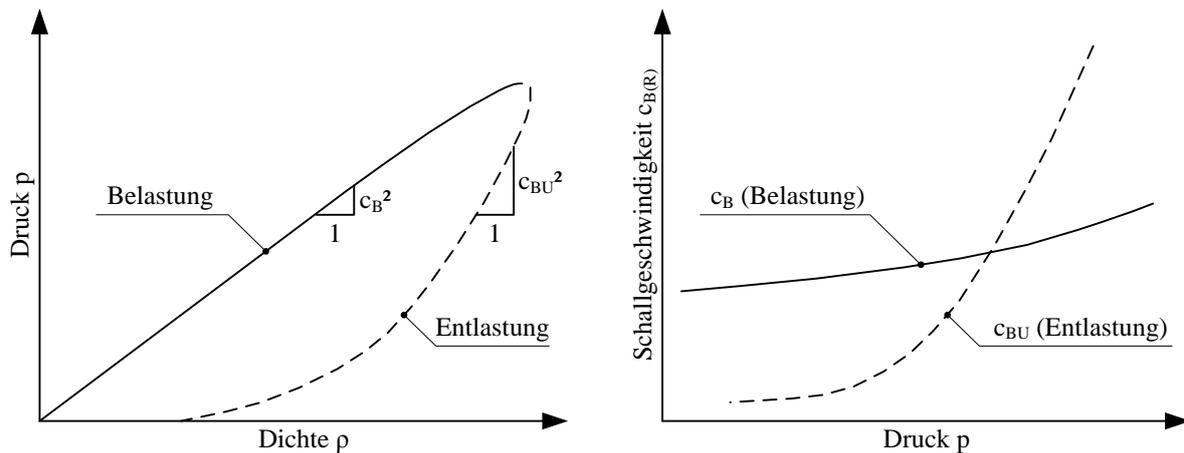


Abbildung 3.21 Be- und Entlastungspfade eines Sandes (links), Schallgeschwindigkeit und Druck bei Be- und Entlastung (rechts); nach *Laine & Larsen* [75]

In quasistatischen, eindimensionalen Kompressionsversuchen wie z.B. nach DIN 18135 wird neben dem Belastungspfad standardmäßig auch der Entlastungspfad bestimmt. Durch zusätzliche Messung der Kompressions- und Scherwellengeschwindigkeiten c_{PU} und c_{SU} bei jedem Entlastungsschritt kann mittels Gleichung (2.11) auch die Schallgeschwindigkeit c_{BU} bei Entlastung berechnet werden, was eine Darstellung des Entlastungspfads in der p - ρ -Ebene erlaubt. Dieses Vorgehen wurde für das weitverbreitete SAND-Modell von *Laine & Sandvik* [12] durchgeführt.

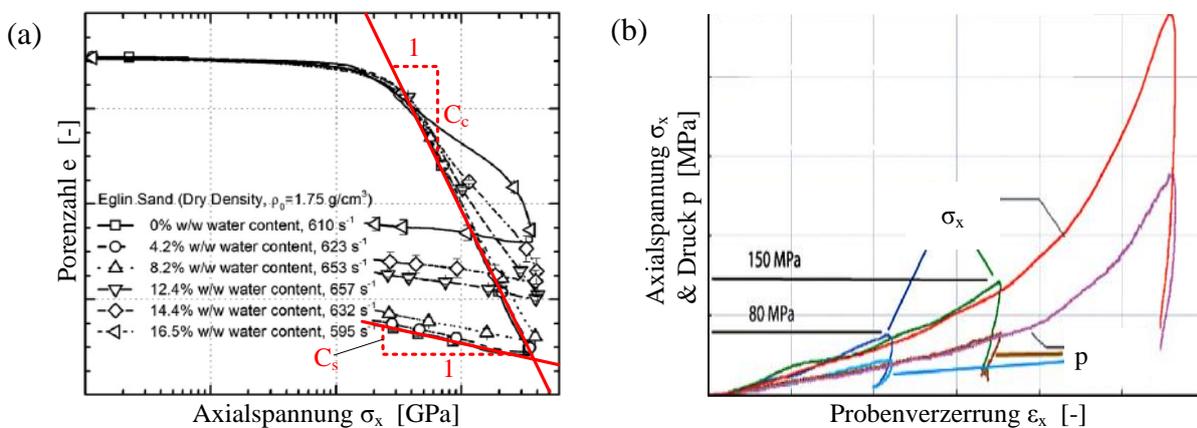


Abbildung 3.22 Kompressionskurven und Entlastungspfade aus modifizierten SHPB-Versuchen mit Sand – Druck-Porenzahl-Diagramm von *Luo et al.* [33] (links), $\sigma_x(\epsilon_x)$ -Diagramm von *Bragov et al.* [36]

Wie unter anderem die Versuchsergebnisse von *Bragov et al.* [36] sowie *Luo et al.* [33] zeigen, können mittels SHPB-Versuchen auch die Entlastungspfade bestimmt werden (siehe Abbildung 3.22). Der ausgeglichene Spannungszustand innerhalb der Probe als Grundvoraussetzung für gültige Versuchsergebnisse (siehe Abschnitt 3.1.1.1) muss dann auch während der Entlastungsphase erfüllt sein.

Prinzipiell können auch Planar-Platten-Versuche zur Messung des Entlastungsverhaltens verwendet werden. Damit ein Entlastungsvorgang stattfindet, muss die Impedanz der hinteren Probenabdeckung, an der die Geschwindigkeit der freien Oberfläche v_{fs} gemessen wird (siehe Abbildung 3.6), kleiner als jene des geschockten Probenmaterials sein. Wie die Schockversuche von *Brown et al.* [50] zeigen, besteht die Schwierigkeit darin, ein geeignetes „weiches“ Material für die hintere Probenabdeckung zu finden, da die Impedanz von Sanden in der Regel deutlich geringer als jene der hinteren Probeabdeckung ist. Entsprechend wird anstatt einer Entlastung ein Zweitschock erzeugt. Ein Durchbruch gelang erst kürzlich mit dem nachfolgend beschriebenen Versuchsaufbau gemäß *Braithwaite et al.* [76] sowie *Perry et al.* [77]. Diese brachten in der rückseitigen Probenabdeckung mittig ein Loch an, das mit einem lediglich 25 μm dicken Kupferplättchen abgedeckt war (siehe Abbildung 3.23, links), und maßen an diesem Kupferplättchen die Geschwindigkeit der freien Oberfläche v_{fs} . Aufgrund der geringen Plättchendicke erfolgen ein „Ring-Down“ der Axialspannung σ_x und ein „Ring-Up“ der Partikelgeschwindigkeit v_p mit ca. 5 bis 10 Mehrfachreflexionen innerhalb von ca. 50 ns. Somit können die freie Kupferoberfläche und die Grenzschicht Sand-Kupfer als spannungsfrei angesehen werden. Des Weiteren trafen *Braithwaite et al.* die fundamentale Annahme, dass der Entlastungspfad in der σ_x - v_1 -Ebene linear ist (siehe Abbildung 3.23, rechts), was durch einen Vergleich mit dem Entspannungsverhaltens eines sehr mürben Sandsteins gerechtfertigt wurde. Somit liefert dieser Versuchsaufbau lediglich den Endpunkt des Entlastungspfads. Quantitative Ergebnisse wurden nicht veröffentlicht.

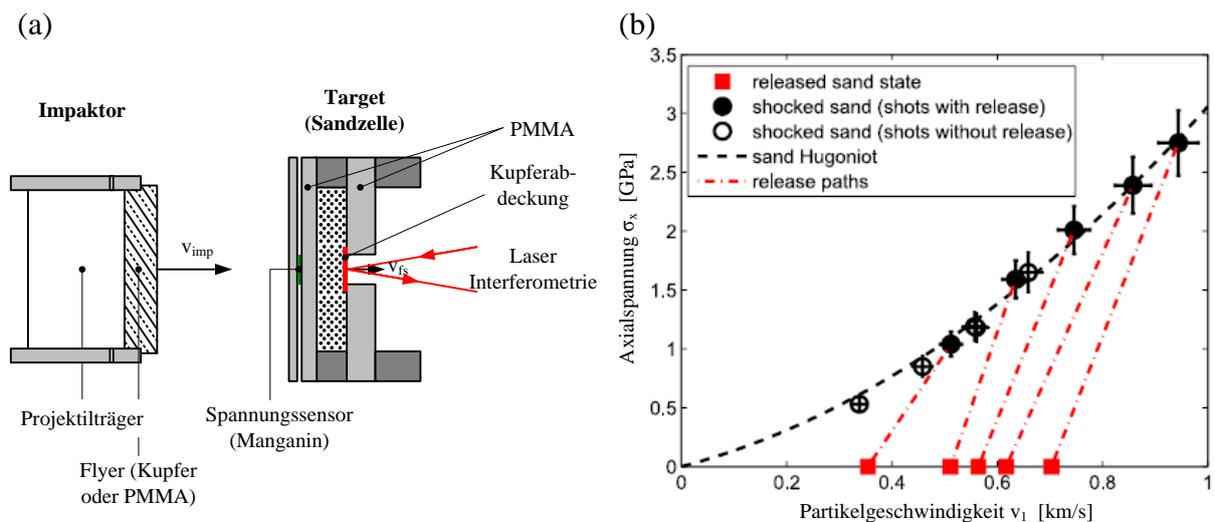


Abbildung 3.23 Bestimmung des Entlastungsverhaltens aus einem Schockzustand nach *Braithwaite et al.* [76] – (a) Versuchsaufbau, (b) Hugoniot-Kurve und Entlastungspfade in der $\sigma_x(v_1)$ -Ebene

3.4 Zum Scherververhalten von Böden

3.4.1 Einfluss des Spannungs- und Verzerrungszustands

Wie anhand des *Hertz-Mindlin* Kontaktmodells (siehe auch Abschnitt 3.2.2.1) gezeigt werden kann, wird die Form der Kompressionskurve von Granulaten durch die Versuchsbedingungen bzw. den eingepprägten Spannungs- und Verformungszustand bestimmt. Für hydrostatische Kompression ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$) und im einaxialen Verzerrungszustand ($\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$) ist die Kompressionskurve $\sigma_x(\varepsilon_x)$ konvex, wobei die hydrostatische Kompression die steilste Kompressionskurve bzw. die größte Steifigkeit ergibt. Für einen Spannungszustand, bei dem die Axialspannung σ_x bei konstanter Radialspannung $\sigma_y = \sigma_z = \sigma_r = \text{konst.}$ gesteigert wird, verläuft die Kompressionskurve konkav³⁰ (siehe Abbildung 3.24). Kombinierte Triaxial-SHPB-Versuche von *Kabir et al.* [72] mit trockenem und feuchtem Sand bestätigen dieses Verhalten auch für mittlere Verzerrungsraten (siehe Abbildung 3.25 (a)). Je kleiner der seitliche Stützdruck σ_r ist, desto mehr gewinnen Kornumlagerungseffekte gegenüber Kornbrucheffekten an Bedeutung [31].

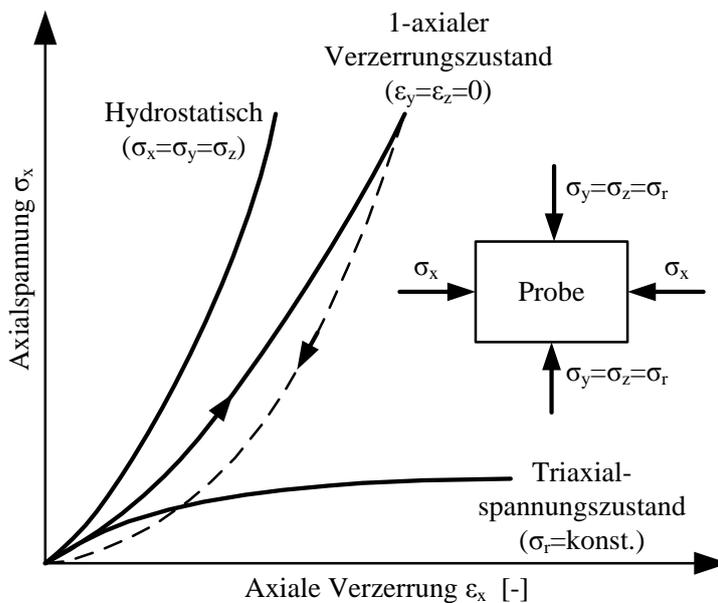


Abbildung 3.24
Kompressionskurven
granularer Materialien in
Abhängigkeit des
Spannungszustands; nach
Richart et al. [14],

Die Größe der radialen Deformationen bzw. des seitlichen Stützdrucks $\sigma_y = \sigma_z = \sigma_r$ ist somit für den Verlauf der Kompressionskurve maßgebend (siehe Abbildung 3.25 (b)). In modifizierten SHPB-Versuchen gemäß Abschnitt 3.1.1.3 bestimmt die Steifigkeit der Hülse in Ringrichtung – das heißt die Wanddicke und der E-Modul – die radialen Deformationen und den Seitendruckbeiwert $\xi = \sigma_r/\sigma_x$. Bei annähernd starrem Ring wird die Bodenprobe einem nahezu einaxialen Verzerrungszustand mit $\xi = \text{konst.}$ unterworfen. Ein Schubversagenszustand wird dabei für trockene Granulate nicht erreicht³¹, das heißt die *Mohrschen* Spannungskreise tangieren die Bruchgerade nicht [61, p. 194], [65, p. 149].

³⁰ Die Bildung einer Schockfront ist dann nicht möglich, da Gleichung (2.35) verletzt wird.

³¹ In teilgesättigten Böden ist gemäß *Luo et al.* [34] Schubversagen auch unter einem einaxialen Verzerrungszustand möglich.

Demgegenüber nimmt in nachgiebigen Hülsten die Radialspannung deutlich langsamer zu als die Axialspannung bzw. bleibt sogar konstant. Bei genügend großer Axialspannung wird dann ein Schubversagenszustand erreicht.

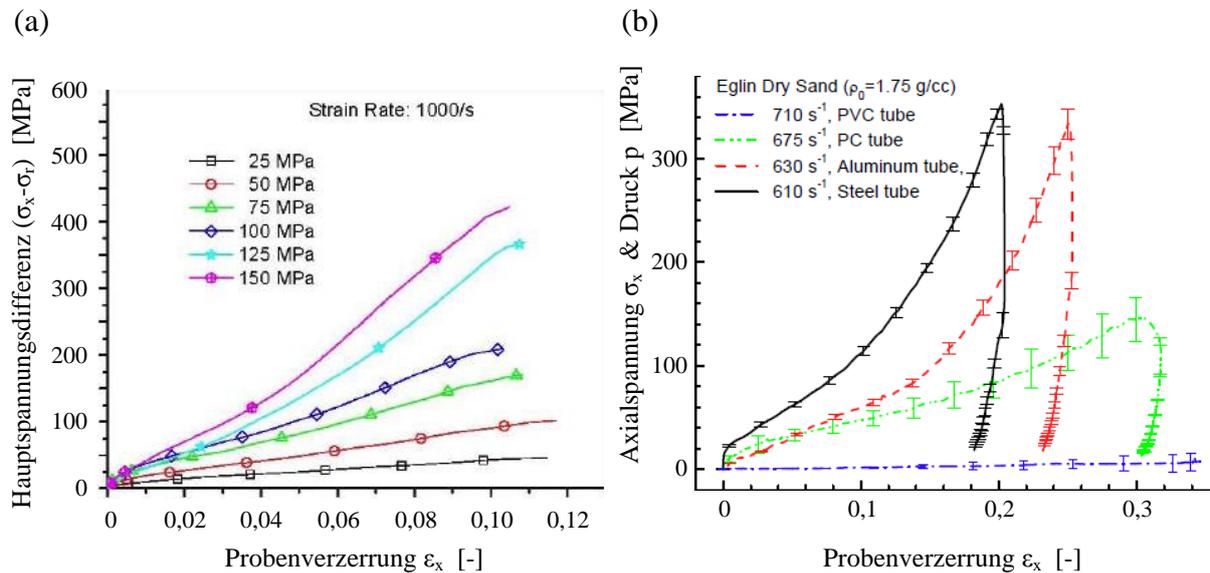


Abbildung 3.25 Kompressionskurven aus SHPB-Versuchen – (a) Einfluss des seitlichen Stützdrucks; aus *Kabir et al.* [72], (b) Einfluss des Hülstenmaterials; aus *Lu et al.* [31]

3.4.2 Zum Einfluss geringer Verzerrungsraten auf die Scherfestigkeit

Direkte Scherversuche mit unterschiedlichen Scherraten an trockenem Sand und verschiedenen Tonen ergaben nach *Schimming et al.* [78] keine Abhängigkeit des Reibungswinkels von der Schubverzerrungsrate. Demgegenüber wurde ein Verhältnis der „dynamischen“ Kohäsion zum quasistatischen Referenzwert von 1,4 bis 2,15 festgestellt.

Nach *Whitman* [59] ist bei trockenen Sanden für Schubverzerrungsraten $\leq 10^2/s$ eine leichte Abnahme des Reibungswinkels zu beobachten. Für höhere Verzerrungsraten nimmt der Reibungswinkel auf maximal 110-115 % des statischen Wertes zu. Bei wassergesättigten Sanden kann das Verhältnis der dynamischen zur statischen Scherfestigkeit 2 bis 3 betragen. *Whitman* erklärt dies mit der größeren Neigung zur Volumenzunahme infolge Dilatation bei steigender Verzerrungsrate. Aufgrund der Volumenzunahme kommt es zu Porensaugspannungen, wodurch die effektiven Spannungen und damit die Scherfestigkeit erhöht werden. Bei vollständig gesättigten, bindigen Böden empfiehlt *Whitman* ein Verhältnis der dynamischen zur statischen Scherfestigkeit von 1,75.

Neueste Ergebnisse zur dynamischen Scherfestigkeit von trockenem Sand wurden 2011 von *Yamamuro et al.* [79] präsentiert. Durch Kombination einer Triaxialzelle für den Zelldruck und einer Fallgewichtsapparatur zur Aufbringung der zusätzlichen, dynamischen Axiallast konnten sie Schubverzerrungsraten $\leq 17,5/s$ realisieren. Das Hauptspannungsverhältnis σ_1/σ_3 im Grenzzustand ist demnach bei dynamischer Belastung um bis zu 30 % größer als im statischen Fall.

Der Einfluss der Verzerrungsrate auf die Scherfestigkeit wurde von zahlreichen weiteren Forschern untersucht. Die Ergebnisse wurden von *Omidvar et al.* [61] zusammengefasst, sind jedoch teilweise sehr widersprüchlich.

3.4.3 Zur Scherfestigkeit bei mittleren Verzerrungsraten

3.4.3.1 Ableitung der Scherfestigkeit aus modifizierten SHPB-Versuchen

Das in Abschnitt 3.1.1.3 vorgestellte Verfahren nach *Bragov et al.* [34], [35], [36] wurde eigentlich entwickelt, um das Kompressionsverhalten von Böden auch bei hohen Verzerrungsraten vollständig beschreiben zu können. *Bragov et al.* unterstellen einen Schubversagenszustand. Gleichung (3.19)₁ ist dann das *Mohr-Coulombsche* Bruchkriterium in der τ - p -Ebene. Zwischen den Parametern $\varphi^\#$ und $c^\#$ und den bekannten Scherparametern c und φ der *Mohr-Coulombschen* Bruchgeraden (3.33) bzw. (A-144) in der τ - σ -Ebene bestehen die Zusammenhänge (3.37), die aus dem Vergleich der Gleichungen (3.19)₁ und (3.34) bis (3.36) – bzw. (A-149) bis (A-151) – folgen. Für Reibungswinkel $0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$ gilt $\varphi \approx \varphi^\#$ und $0,93 \leq c^\#/c \leq 1,06$ wie in Abbildung 3.26 dargestellt. Unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit bei hochdynamischen Versuchen erklärt dies die Aussage von *Bragov et al.*, bei $\varphi^\#$ und $c^\#$ handele es sich um den Reibungswinkel und die Kohäsion.

$$\tau = -\sigma_n \cdot \tan \varphi + c \quad (3.33)$$

$$q = p \cdot \tan \varphi^* + c^* \quad (3.34)$$

$$\tan \varphi^* = \frac{6 \cdot \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad c^* = \frac{6 \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \cdot c \quad (3.35)$$

$$q = \sqrt{3J_2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ji}} \quad (3.36)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{3}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}$$

$$\tan \varphi^\# = \frac{\tan \varphi^*}{2} = \frac{3 \cdot \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad c^\# = \frac{c^*}{2} = \frac{3 \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \cdot c \quad (3.37)$$

Die Annahme, dass unter einem einaxialen Verzerrungszustand – wie dieser in den Versuchen von *Bragov et al.* mit sehr starren Hülsen aus Stahl oder Aluminium vorlag – Schubversagen auftritt, ist unter Beachtung der Aussagen von *Omidvar et al.* [61, p. 194] und *Yamamuro et al.* [65, p. 149] gemäß Abschnitt 3.4.1 verwunderlich. Allerdings liegt der mit $\tan \varphi^\# = 0,643$ und Gleichung (3.37)₁ berechnete Reibungswinkel $\varphi = 31,97^\circ$ (siehe Tabelle 3-1) für den von *Bragov et al.* [34], [36] untersuchten trockenen Sand im Bereich gängiger Erfahrungswerte.

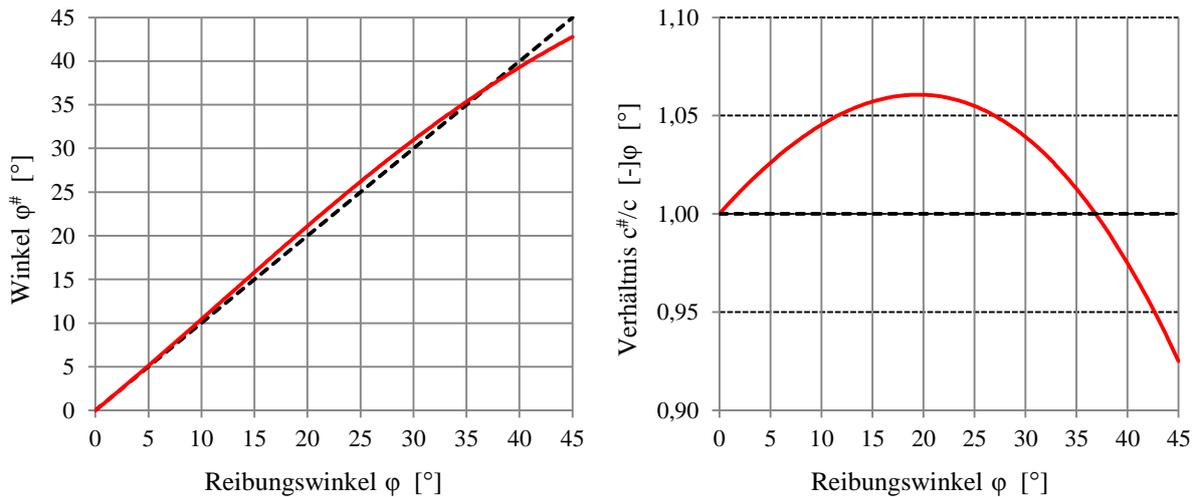


Abbildung 3.26 Scherparameter für das *Mohr-Coulombsche* Bruchkriterium in unterschiedlichen Ebenen – $\varphi^\# = f(\varphi)$ (links), $c^\#/c = f(\varphi)$ (rechts)

Abdel-Malek et al. [80] verwendeten den Ansatz von *Bragov et al.* für Untersuchungen zum Einfluss des Wassergehalts w_0 auf das Kompressionsverhalten von Sanden ($\rho_s = 2,66 \text{ g/cm}^3$; $\rho_{d,0}^{(1)} = 1,36 \text{ g/cm}^3$; $\rho_{d,0}^{(2)} = 1,56 \text{ g/cm}^3$). Als Belastungsapparatur wählten sie eine Fallgewichtseinrichtung. Im Vergleich zu modifizierten SHPB-Versuchen konnten damit deutlich höhere Axialspannungen von $\sigma_x \leq 2,2 \text{ GPa}$ realisiert werden. Die maximale Verzerrungsrate von 200/s lag im unteren Bereich der mit SHPB-Versuchen erreichbaren Verzerrungsraten. Für Wassergehalte $0 \leq w_0 \leq 0,25$ wurde ein drastischer Rückgang des „Reibungswinkels“ $\varphi^\#$ registriert (siehe Abbildung 3.27).

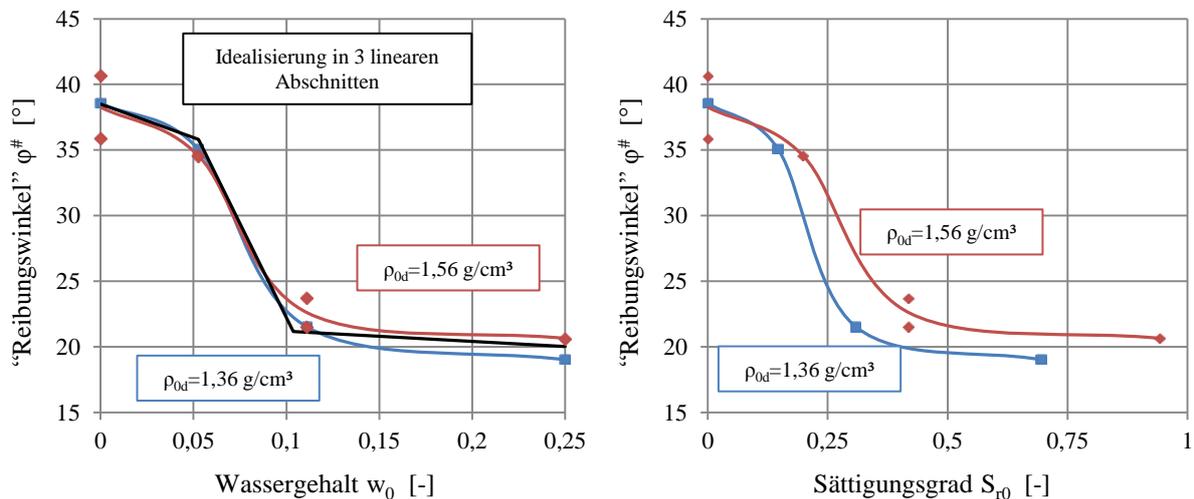


Abbildung 3.27 Einfluss des Wassergehalts w_0 (links) bzw. des Sättigungsgrads S_{r0} (rechts) auf den „Reibungswinkel“ $\varphi^\#$; Daten von *Abdel-Malek et al.* [80]

Jing et al. [81] leiteten auf der Grundlage unkonsolidierter Triaxialversuche und modifizierter SHPB-Experimente ein phänomenologisches Modell für die Fließfläche eines Tons ab. Gleichung (3.38) ist die *Mohr-Coulombsche* Fließbedingung (3.34) bzw. (A-149) in der p - q -Ebene mit $A = c^*$ und $B = \tan \varphi^*$ nach den Gleichungen (3.35) bzw. (A-150), erweitert um den

Einfluss der Verzerrungsrate $\dot{\varepsilon}$. Die Materialparameter A, B und C wurden durch Nachrechnung der SHBP-Versuche und Fehlerausgleichrechnung bestimmt, das heißt A und B entsprechen nicht den quasistatischen, undrainierten Scherparametern. *Jing et al.* weisen darauf hin, dass die Simulation mehraxialer Spannungszustände auf der Grundlage einaxialer Kompressionsversuche in der Regel zu signifikanten Abweichungen vom realen Verhalten führt.

$$q = (A + B \cdot p) \cdot \left(1 + C \cdot \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_{ref} = 10^{-4} / s} \right) \quad (3.38)$$

3.4.3.2 Dynamische Triaxialversuche bei mittleren Verzerrungsraten

Zur Bestimmung der Scherfestigkeit bedarf es eines Versuchsaufbaus, bei dem die Radialspannung σ_r konstant gehalten und die Axialspannung σ_x davon unabhängig gesteigert werden kann. Dies kann durch Kombination einer Triaxialzelle zur Erzeugung des konstanten Zelldrucks mit einem Split-Hopkinson Pressure bar für die zusätzliche axiale Belastung erfolgen. Damit der Schubversagenszustand nicht vor Erreichen eines ausgeglichenen Spannungszustands eintritt, sind hier das Auseinanderziehen des Eingangsimpulses und die Erzielung einer konstanten axialen Verzerrungsrate mittels Pulse Shaping von größter Wichtigkeit. Der Schubversagenszustand ist erreicht, wenn die Kennlinie im $(\sigma_x - \sigma_r) - \varepsilon_x$ -Diagramm in einen horizontalen Abschnitt übergeht.

Kabir et al. [72] sowie *Martin et al.* [32] berichten über entsprechende Versuche mit trockenem Sand sowie mit einem feuchten Sand mit $w = 7\%$ für axiale Verzerrungsraten von 500/s und 1000/s. Deren Schlussfolgerung, wonach die Verzerrungsrate einen untergeordneten Einfluss auf die Scherfestigkeit haben soll, kann so nicht geteilt werden. Die Versuche waren aufgrund eines nicht mehr ausgeglichenen Spannungszustands nämlich beendet, bevor ein Schubversagenszustand erreicht wurde. Infolgedessen verglichen beide Forschergruppen die maximale Schubspannung $\tau_{max} = (\sigma_x - \sigma_r)/2$ bei einer willkürlich gewählten axialen Stauchung von $\varepsilon_x = 7\%$. Die Spannungspfade bis zur betrachteten axialen Stauchung waren nahezu identisch mit jenen aus quasistatischen Triaxialversuchen. Inwieweit die dynamische Scherfestigkeit vom quasistatischen Wert abweicht konnte jedoch nicht festgestellt werden.

3.4.4 Pressure-Shear Plate Impact

Beim Pressure-Shear-Plate-Impact sind die Vorderseite des Impaktors und das Target um den Winkel θ zur Senkrechten geneigt. Das Probenmaterial ist zwischen einer Front- und einer Endplatte eingeschlossen (siehe, Abbildung 3.28 (a)). Wird der Impaktor auf das Target geschossen, werden in beiden Körpern je eine Kompressions- und eine Scherwelle erzeugt. Diese durchlaufen das Target. Auf der Rückseite der Endplatte werden mittels Laser Interferometrie die Normalkomponente $v_{fs,n}$ und Horizontalkomponente $v_{fs,t}$ der Geschwindigkeit der freien Oberfläche gemessen.

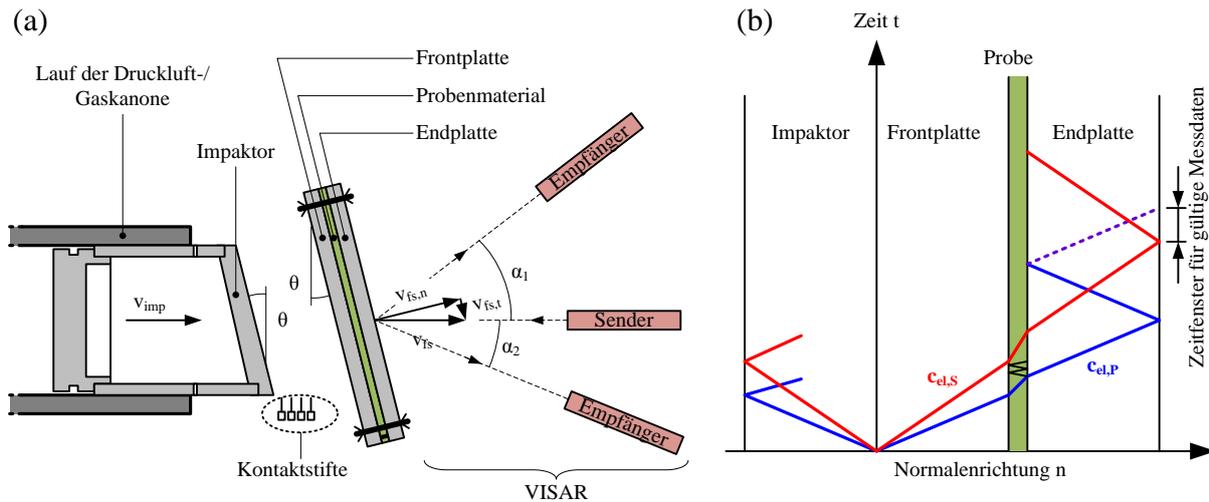


Abbildung 3.28 Pressure-Shear Plate Impact – (a) Versuchsaufbau nach *Nemat-Nasser* [25],
(b) *Lagrange*-Diagramm nach *Vogler et al.* [82]

Anhand der Gleichungen (3.39) können die Normal- und die Schubspannung innerhalb der Probe berechnet werden. Dies setzt voraus, dass die Front- und die Endplatte während des Versuchs elastisch bleiben. Das Zeitfenster, innerhalb dessen gültige Messwerte erzielt werden können, liegt zwischen den Ankunftszeiten der Scherwelle und der Entspannungswelle (siehe Abbildung 3.28 (b)). Mit diesem Versuchsaufbau können Schubverzerrungsraten $10^5/s \leq d\gamma/dt \leq 10^7/s$ realisiert werden [25].

$$\sigma = \rho \cdot c_{el,P} \cdot \frac{v_{fs,n}}{2} \qquad \tau = \rho \cdot c_{el,S} \cdot \frac{v_{fs,t}}{2} \qquad (3.39)$$

Pressure-Shear-Plate-Impact-Versuche an trockenem Sand und mit einem Granulat aus Wolframcarbid wurden von *Vogler et al.* [82] durchgeführt³². Die Berechnung der Scherfestigkeit erfolgte unter der zusätzlichen Annahme gleicher Normalspannungen in Probenlängs- und Probenquerrichtung nach Gleichung (3.40). Des Weiteren wurde die *von Mises*-Fließbedingung (3.41) bzw. (A-140) unterstellt. *Vogler et al.* weisen jedoch darauf hin, dass beide Annahmen möglicherweise von Grund auf falsch sind. Die Versuche wurden mit Front- und Endplatten aus Titanium und in einer zweiten Versuchsreihe aus Zirkonium durchgeführt. Die berechneten Scherfestigkeiten waren im Fall der Zirkoniumplatten deutlich kleiner, was auf ein Gleiten der Partikel entlang der Plattenoberfläche zurückgeführt wurde. Ein Vergleich der Korngrößenverteilungen vor und nach dem Versuch ergab, dass sowohl der Sand als auch das Wolframcarbid regelrecht zerrieben wurden. Somit wird die Scherfestigkeit der Partikel selbst überschritten. Erstaunlicherweise waren die Scherfestigkeiten des Sands geringer als die von *Kabir et al.* [72] aufgezeichneten Schubspannungen. *Vogler et al.* begründen dies damit, dass in den SHPB-Triaxialversuchen das weitgehend intakte Material

³² Das Kompressionsverhalten des Sandes wurde von *Brown et al.* [44] untersucht. Über das Kompressionsverhalten des Wolframcarbidgranulates berichten *Vogler et al.* [43].

beprobte wurde, wohingegen in den Pressure-Shear Plate Impact-Versuchen die Scherfestigkeit des zu einem feinen Staub zermahlenden Materials getestet wurde.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = p \quad (3.40)$$

$$F(J_2) = J_2 - \kappa^2 = 0 \quad (3.41)$$

3.5 Zusammenfassung des aktuellen Wissensstands und Aufzeigen ungelöster Fragestellungen

Bei dynamischen Versuchen ist die Streubreite der Ergebnisse in der Regel deutlich größer als bei quasistatischen Versuchen (siehe Abbildung 3.11). Grund hierfür sind nach *Vogler et al.* [63] vor allem Abweichungen zwischen den einzelnen Proben hinsichtlich ihrer Ausgangsdichte ρ_{00} sowie lokale Inhomogenitäten innerhalb der Proben. Beides sind herstellungsbedingte Gründe, die aus den kleinen Probenmengen und den geringen Probendicken resultieren. So betrug die Trockenmasse der Sandproben bei den modifizierten SHPB-Versuchen von *Luo et al.* [33] lediglich 2 g. Die Proben in den Planar-Platten-Versuchen von *Brown et al.* [50] waren zwischen 3 mm und 6 mm dick. In den Pressure-Shear-Plate-Impact-Versuchen von *Vogler et al.* [82] betrug die Probendicke verfahrensbedingt sogar nur 254-381 μm bei Partikelgrößen von 50-90 μm .

Generell gilt, dass alle Kompressions- und Scherfestigkeitsdaten nur für den jeweiligen Spannungsbereich Gültigkeit besitzen, in dem sie bestimmt wurden. Extrapolationen spiegeln in der Regel nicht das tatsächliche Verhalten wider. Für eine Vielzahl der untersuchten Böden wurden die geotechnischen Standardversuche zur Benennung und Klassifizierung nicht durchgeführt. Dies bedeutet eine große Unsicherheit, wenn Daten aus unterschiedlichen Quellen für verschiedene Spannungsbereiche zusammengefasst werden sollen.

Die Annahme eines hydrodynamischen Spannungszustands bei Planar-Platten-Versuchen (und Pressure-Shear-Plate-Impact-Versuchen) ist nicht a priori gerechtfertigt. v_s - v_1 -Beziehungen beinhalten nur die Informationen bezüglich der Axialspannung. Ohne Messung einer zweiten Spannungskomponente – z.B. in zusätzlichen modifizierten SHPB-Versuchen – kann eine Berechnung des isotropen Drucks nicht erfolgen. Entsprechend wird der Spannungsbereich, ab dem der Einfluss der Scherfestigkeit vernachlässigbar wird und ein hydrodynamischer Spannungszustand unterstellt werden kann, rein aus theoretischen Überlegungen als der Punkt vollständiger Verdichtung angesehen.

Neben dem Kompressionsverhalten ist bei Böden das Entlastungsverhalten ein ganz wesentlicher Bestandteil der Zustandsgleichung. Gleichwohl sind in der Literatur zum Entlastungsverhalten nur qualitative Versuchsergebnisse aber keine Daten zu finden, die eine Parametrisierung des Entlastungspfads aus Schockzuständen ermöglichen.

Zum Scherverhalten bei mittleren und hohen Verzerrungsraten wurde die prinzipielle Durchführbarkeit von Triaxial-SHPB-Versuchen und Pressure-Shear-Plate-Impact-Versuchen nachgewiesen. Gültige Versuchsergebnisse, auf deren Grundlage konstitutionelle Gleichungen aufgestellt werden könnten, wurden bislang noch nicht veröffentlicht.

Eine Kalibrierung der Stoffgesetzparameter von Kontinuumsmodellen für numerische Berechnungen an empirischen Gleichungen wie in Abschnitt 4.3 vorgestellt wird aufgrund des derzeitig (noch) sehr lückenhaften Wissensstandes als absolut erforderlich betrachtet. Allerdings muss beachtet werden, dass empirische Gleichungen nur für einen gewissen Spannungs- und Druckbereich gelten und lediglich einen Anhaltspunkt liefern³³.

In jüngster Zeit gewinnen Simulationen auf Meso-Ebene mittels der Diskrete Elemente Methode (DEM) verstärkt an Bedeutung, um den Einfluss der unterschiedlichen Faktoren wie Verzerrungsrate, Korngrößenverteilung, Porenanteil und Wassergehalt auf das Kompressions- und Scherverhalten zu untersuchen. Beispielhaft seien hier die Forschungen von *Larcher & Gebbeken* [83], *Borg & Vogler* [60], [84] sowie *Antoun et al.* [85] aufgeführt. Allerdings müssen auch diese Simulationen an Versuchen kalibriert werden. *Huang et al.* [69] rechneten dazu ihre SHPB-Versuche nach. *Parab et al.* [74] vertreten den Ansatz, dass sich mittels DEM-Simulationen ein korrektes makroskopisches Verhalten berechnen lässt, wenn auf Meso-Ebene die maßgebenden Effekte sauber abgebildet werden. In Miniatur-SHPB-Versuchen untersuchten sie deshalb den Bruchvorgang von Sand mit lediglich zwei Sandkörnern. Inwieweit derartige Versuche auf Meso-Ebene zielführend sind, wenn schon die Identifizierung des makroskopischen Verhaltens (noch) nicht möglich ist, bleibt abzuwarten.

³³ Je nach Spannungs- und Druckbereich sowie unterstellten Parametern für die empirischen Gleichungen kann das Verhältnis zwischen den real gemessenen und den empirischen Erdstoßparametern bis zu einem Faktor 100 betragen [113].

4 Erdstoß

4.1 Einflussgrößen und allgemeine Zusammenhänge

Explosionen im Boden erzeugen in der nahen Umgebung des Explosivstoffs Stoßwellen, die als Erdstoß bezeichnet werden. Oft wird auch im Deutschen der englische Ausdruck „Ground Shock“ verwendet. Die auf den Boden übertragene Belastung wird maßgeblich durch die Erdstoßparameter des Überdrucks³⁴ $p(t)$ und des spezifischen Impulses I charakterisiert. Diese hängen vom Zusammenspiel der folgenden Einflussgrößen ab [86], [4]:

- Explosivstoff und dessen Kennwerte
- Bodeneigenschaften
- Geometrie:
 - Tiefe des Explosionszentrum unter Geländeoberkante und Überdeckung
 - Entfernung des Mess- bzw. Beobachtungspunktes zum Explosionszentrum
- Form und Masse der Explosivstoffladung

Die neben der Bodenart maßgeblichen Bodeneigenschaften – Dichte ρ_{00} bzw. Porenzahl e_0 ³⁵, Sättigungsgrad S_{r0} und Korngrößenverteilung (jeweils im Ausgangszustand) – sind die gleichen, die gemäß Abschnitt 3.2.2 das Kompressionsverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung bestimmen. Der Spitzenüberdruck $p_{1,max}$ folgt aus dem Impedanzverhältnis der gasförmigen Reaktionsprodukte des Explosivstoffs und des umgebenden Bodens (siehe Abschnitt 2.4.1).

Die Ausbreitung der gasförmigen Reaktionsprodukte wird durch den sogenannten Einschluss behindert. Dieser ist von der Tiefe des Explosionszentrums und der Ladungsform abhängig und bestimmt die Aufteilung der freigesetzten Explosionsenergie auf den Boden und die Luft. Bei einem 100 %-igen Einschluss bzw. einer vollständig verdämmten Ladung wird die gesamte Explosionsenergie auf den umgebenden Boden übertragen. Die durch die Reaktionsprodukte ausgelöste Stoßwelle im Boden wird als direkter Erdstoß bezeichnet. Bei hinreichend kleiner Überdeckung des Explosivstoffs wird das die Ladung überdeckende Bodenmaterial herausgeschleudert, und ein Teil der freigesetzten Energie pflanzt sich in Form einer Luftstoßwelle fort. Durch Interaktion der Luftstoßwelle mit der Geländeoberfläche wird im Boden ein sogenannter indirekter Erdstoß erzeugt. Des Weiteren nimmt mit dem Grad des Einschlusses – im Vergleich zu einer Explosion der gleichen Ladungsmasse an Luft – die Länge der Überdruckphase zu. Der Einschluss beeinflusst somit auch den Frequenzgehalt. Diesbezüglich ist zusätzlich die Ladungsmasse von Bedeutung. In der Regel führen größere Ladungsmassen zu einer verstärkten Anregung niederer Frequenzen [87].

³⁴ Der Überdruck entspricht der Differenz aus dem Spannungszustand infolge Explosion und dem Initialspannungszustand im Baugrund.

³⁵ Alternativ ist dies auch durch die anfängliche Lagerungsdichte D_0 darstellbar.

Per Handrechnung können die Erdstoßparameter aufgrund der Vielzahl an Einflussgrößen nur mittels empirischer Formeln angenähert werden (siehe Abschnitt 4.3). Simulationen mit Hydrocodes bieten demgegenüber den Vorteil, dass alle Interaktionen zwischen Ladungsmasse, Ladungsform, Explosivstoff, Bodenparameter, usw. automatisch berücksichtigt werden.

4.2 Explosionen

Im Folgenden werden die wichtigsten Begriffe erläutert und auf das gedankliche Modell eingegangen. Für genauere Ausführungen wird auf die verwendete einschlägige Literatur (unter anderem [87], [88], [89], [90] und [58]) verwiesen.

4.2.1 Allgemeine Definitionen

4.2.1.1 Explosion ↔ Sprengung

Explosion und Sprengung werden im alltäglichen Sprachgebrauch oft gleichgesetzt. Aus technischer Sicht sind die Begriffe jedoch nicht identisch. DIN 20163 [91] definiert die Explosion als eine „*schnellablaufende Umsetzung von potentieller Energie in Ausdehnungs- und/oder Verdichtungsarbeit*“, wohingegen Sprengung nach Heinze [87] „*die plötzliche Veränderung des Gefüges und/oder der Lage eines Sprengobjektes mit Hilfe von Sprengladungen*“ bedeutet.

Generell wird zwischen chemischen, physikalischen³⁶ und atomaren Explosionen unterschieden. Eine chemische Explosion ist eine exotherme, chemische Reaktion (Oxidation) explosionsfähiger Stoffe, wobei der zur Umsetzungsreaktion benötigte Sauerstoff im Reaktionssystem vorliegt. Die Reaktion läuft plötzlich und unter Erzeugung sehr hoher Temperaturen, Drücke und Gasmengen ab [87].

4.2.1.2 Deflagration ↔ Detonation

Prinzipiell sind die explosiven Umsetzungsarten der Detonation und der Deflagration möglich³⁷. Bei einer Deflagration durchläuft die Reaktionsfront den Explosivstoff mit Unterschallgeschwindigkeit (bezogen auf die Schallgeschwindigkeit des unzersetzten Explosivstoffs), und die Reaktionsprodukte strömen entgegen der Fortpflanzungsrichtung der Reaktion ab. Die Reaktion wird durch die freiwerdende Reaktionswärme (Wärmeleitung und Wärmestrahlung) innerhalb des Explosivstoffs aufrechterhalten. Die zerstörende Wirkung auf das umgebende Medium resultiert rein aus dem Druck der hochgespannten Reaktionsgase³⁸.

³⁶ Physikalische Explosionen sind z.B. die Explosion von mit komprimierten Gasen gefüllten Gasflaschen, die Explosion eines unter Druck stehenden Dampfkessels oder auch die durch einen Blitz hervorgerufene plötzliche Ausdehnung der Luft [95].

³⁷ Auf die Verbrennung als dritte reaktive, aber nicht explosive Umsetzung wird hier nicht weiter eingegangen.

³⁸ Die hochgespannten, gasförmigen Reaktionsprodukte, die bei der Umsetzung des Explosivstoffs entstehen, werden als Schwaden bezeichnet.

Bei einer Detonation erfolgt die Fortpflanzung der Reaktion durch eine Stoßwelle, die mit Überschallgeschwindigkeit durch den Explosivstoff läuft und diesen schlagartig verdichtet (sprungartiger Anstieg des Drucks und der Temperatur an der Reaktionsfront). Die Reaktionsprodukte strömen in Fortpflanzungsrichtung der Reaktion. Neben dem Gasdruck wirkt zusätzlich der Detonationsdruck infolge des Verdichtungsstoßes auf das umgebende Medium [87].

Pulversprengstoffe deflagrieren, wohingegen brisante Sprengstoffe bei ausreichender Initiierung detonieren (ansonsten deflagrieren auch die brisanten Sprengstoffe). Durch eine hinreichende Verdämmung und die damit verbundene Steigerung von Druck und Temperatur kann eine Deflagration in eine Detonation überführt werden.

4.2.2 Explosive Stoffe

Explosive Stoffe sind feste, flüssige oder gasförmige Stoffe in einem metastabilen Zustand, die sich in Form einer Explosion umsetzen können. Die Reaktion kann durch Wärmeeinwirkung, mechanische Einwirkung (Schlag, Reibung) oder Initialimpuls (Detonationsstoß einer Sprengkapsel) ausgelöst werden. Eine mögliche Unterteilung zeigt Abbildung 4.1.

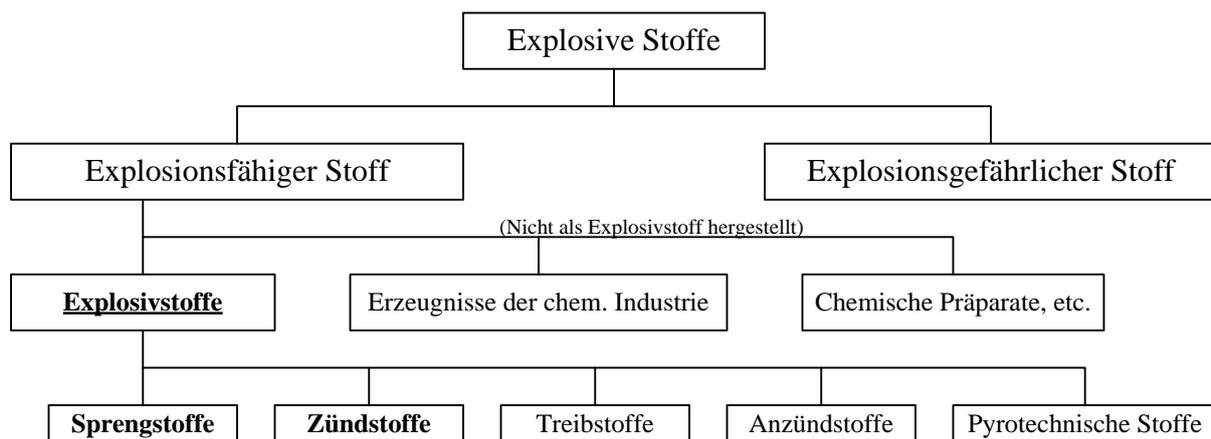


Abbildung 4.1 Einteilung der explosiven Stoffe; nach *Heinze* [87], *Köhler et al.* [90], *Roschlau* [89]

Während explosionsgefährliche Stoffe mittels festgelegter Prüfverfahren (z.B. Stahlhülsenverfahren, Fallhammerapparat oder Reibapparat, siehe *Köhler et al.* [90] für weitere Informationen) zur Explosion gebracht werden können, ist ein Auslösen der Umsetzungsreaktion in explosionsfähigen Stoffen lediglich detonativ oder durch außergewöhnliche mechanische oder thermische Beanspruchung möglich.

Explosivstoffe können sowohl chemisch homogene Stoffe (Verbindungen) wie z.B. TNT als auch heterogene Stoffe (Gemische aus einheitlichen Explosivstoffen, sauerstoffabgebenden und brennbaren Stoffen) sein. Erstere zerfallen nach feststehenden Reaktionsgleichungen und zeigen meist eine starke zertrümmernde Wirkung (hohe Brisanz), wobei letztere in der Regel keinen konstanten Umsetzungsverlauf aufweisen [87].

4.2.3 Kennwerte und Vergleichbarkeit von Explosivstoffen

Die Eigenschaften und Leistungsfähigkeit von Explosivstoffen werden durch Kennwerte dargestellt, die entweder mittels thermodynamischer Gesetzmäßigkeiten errechnet, anhand (genormter) Prüfverfahren ermittelt oder aus praktischen Sprengversuchen gewonnen werden [87]. DIN 20163 [91] unterscheidet zwischen Detonationskennwerten, Explosionskennwerten und Begriffen zur Beschreibung der Funktionssicherheit von Explosivstoffen (siehe Abbildung 4.2). Die Darstellung der Leistungsfähigkeit eines Explosivstoffs mit einem einzigen Kennwert ist nicht aussagekräftig.



Abbildung 4.2 Eigenschaften und Kennwerte von Explosivstoffen nach DIN 20163 [91]

Ein Vergleich von Explosivstoffen kann stets nur für einen Kennwert im Vergleich zu demselben Kennwert eines Standardexplosivstoffs erfolgen. Im zivilen Bereich wird dazu meist die spezifische Energie³⁹ von Sprenggelatine als Referenzwert verwendet [87], [89]. Alternativ ist der Begriff des TNT-Äquivalents TNT_e gebräuchlich. Gemäß Gleichung (4.1)₁ entspricht das TNT-Äquivalent dem Verhältnis jener Massen des Standardexplosivstoffs TNT und eines anderen Explosivstoffs (HE)⁴⁰, für das in derselben Entfernung r der betrachtete Stoßwellenparameter⁴¹ gleich groß ist. Wird alternativ Gleichung (4.1)₂ benutzt, sind die skalierten Entfernungen R (siehe Gleichung (4.5), S. 73) einzusetzen, in denen der betrachtete Stoßwellenparameter gleich groß ist [92]. Das TNT-Äquivalent ist somit kein konstanter Wert sondern hängt neben dem Stoßwellenparameter auch von der skalierten Entfernung ab [93].

$$TNT_e = \frac{W_{TNT}}{W_{HE}} \qquad TNT_e = \left(\frac{R_{HE}}{R_{TNT}} \right)^3 \qquad (4.1)$$

³⁹ Die spezifische Energie e bezeichnet jene Energiemenge bezogen auf 1 kg Explosivstoff, die bei der Entspannung der im Volumen des Explosivstoffs unter Explosionstemperatur komprimiert gedachten Explosionsgase freigesetzt wird.

⁴⁰ HE → High Explosive

⁴¹ Im Allgemeinen werden für Luftstoßwellen der maximale Überdruck und/oder der spezifische Impuls der Überdruckphase verwendet.

4.2.4 Das vereinfachte ZDN-Modell

Beim vereinfachten ZDN-Modell nach *Zeldovich, von Neumann und Döring* wird die Reaktionsfront der Detonation als Schockwelle aufgefasst, die den Explosivstoff durchläuft. Die Schockfront komprimiert und erhitzt den Explosivstoff, wodurch die chemische Reaktion eingeleitet wird. Die dabei freigesetzte Energie erhält die Schockfront. Die gleichzeitige Ausdehnung der Explosionsgase führt dazu, dass eine Entspannungswelle von hinten in die Schockfront läuft. Schockfront, chemische Reaktion und Entspannungswelle befinden sich gedanklich im Gleichgewicht und schreiten alle mit der gleichen Geschwindigkeit – der Detonationsgeschwindigkeit v_D – voran. Somit wird auch der Druck an der Detonationsfront während der Umsetzungsdauer als zeitlich konstant angenommen [20, p. 253ff].

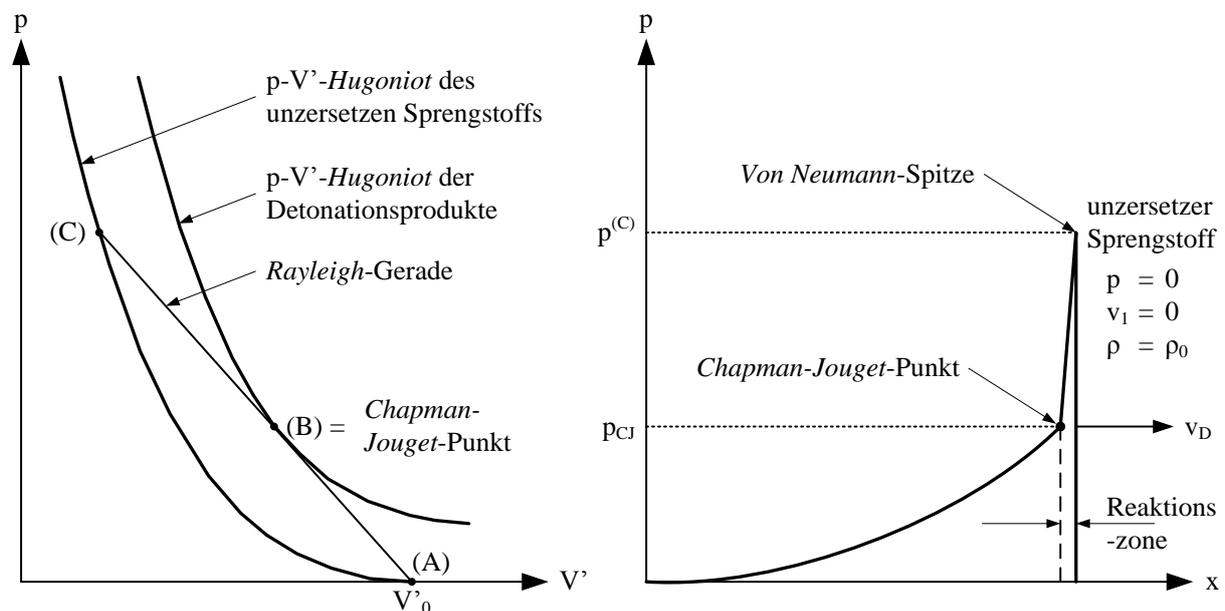


Abbildung 4.3 Vereinfachtes ZDN-Modell – p - V' -Hugoniot-Kurven (links), p - x -Diagramm einer Detonationswelle (rechts); nach Cooper [20]

Zur Darstellung der Detonation in einem p - V' -Diagramm werden zwei *Hugoniot*-Kurven – eine für den noch nicht umgesetzten Explosivstoff und eine für die gasförmigen Reaktionsprodukte direkt nach der Umsetzung – benötigt (siehe Abbildung 4.3), da neben der physikalischen Zustandsänderung des Explosivstoffs gleichzeitig eine chemische Zustandsänderung einsetzt. Die einzig mögliche *Rayleigh*-Gerade für den unzersetzten Explosivstoff ist die Tangente an die *Hugoniot*-Kurve der Reaktionsprodukte, da nur dann die Schockfront und die Entspannungswelle wie vorausgesetzt die gleiche Geschwindigkeit haben. Der Berührungspunkt wird als *Chapman-Jouget-Punkt* (CJ) bezeichnet. Er kennzeichnet den Zustand der Reaktionsprodukte direkt hinter der Reaktionszone. Im Schnittpunkt (C) der *Rayleigh*-Gerade mit der *Hugoniot*-Kurve des unzersetzten Explosivstoffs beginnt die chemische Umsetzungsreaktion mit der *von Neumann-Spitze* als zugehörigem Druck. Er fällt direkt hinter der Reaktionszone auf den *Chapman-Jouget-Druck* p_{CJ} in den Schwaden ab. Im vereinfachten ZDN-Modell wird die ohnehin sehr dünne Reaktionszone vernachlässigt und der *Chapman-Jouget-Druck* p_{CJ} gleich dem

Detonationsdruck gesetzt. Der bei Vernachlässigung der von *Neumann-Spitze* begangene energetische Fehler ist jedoch (aufgrund der geringen Dicke der Reaktionszone) gering [20, p. 253ff].

4.3 Großmaßstäbliche Erdstoßversuche und empirische Erdstoßmodelle

Hudson et al. [94] zeichnen die horizontalen und vertikalen Bodenbeschleunigungen infolge einer verdämmten Explosion mit 185,7 t Nitramon in ca. 366 m Entfernung auf. Die gemessenen Maximalwerte entsprachen jenen „eines Erdbebens mittlerer Stärke“. Mit ca. 1 s war die Dauer des Erdstoßes jedoch bedeutend geringer als bei einem Erdbeben. Zudem sind im horizontalen Beschleunigungsspektrum des Erdstoßes vor allem kurzzeitige Perioden mit $T \leq 0,5$ s enthalten⁴², wohingegen Erdbeben in der Regel ein bedeutend breiteres Spektrum aufweisen.

Cook et al. [95] untersuchten die Fernwirkungen von über 4.000 Explosionen mit TNT-Äquivalenten zwischen 2,27 kg und 11,34 t in Entfernungen zwischen 700 m bis 64,4 km hinsichtlich der Spitzenüberdrücke in der Luft sowie der vertikalen Verschiebungsamplitude des Bodens. Eine genaue Trennung zwischen direkter und luftinduzierter Erdstoßwelle war nicht immer möglich. Allgemein konnte jedoch festgestellt werden, dass die luftinduzierte, indirekte Erdstoßwelle eine größere Verschiebungs- und Beschleunigungsamplitude aufweist als die direkte Erdstoßwelle.

Auf der Grundlage einer Vielzahl wie der oben genannten Erdstoßversuche wurden von unterschiedlichen Forschern empirische Gleichungen zur Berechnung der maßgebenden Erdstoßparameter (Maximalwerte und zeitliche Verläufe der zu erwartenden Überdrücke und Bodenbewegungen) formuliert. Die bekannten empirischen Modelle von *Drake & Little* [3] sowie *Drake et al.* [96] werden im Folgenden erläutert, wobei Reflexionen an Schichtgrenzen und Bauwerken vernachlässigt werden.

4.3.1 Das Modell nach Drake & Little von 1983

Das Modell nach *Drake & Little* [3] hat in die US Army-Vorschrift „Fundamentals of Protective Design for Conventional Weapons“ TM 5-855-1 [97] und in deren deutsche Übersetzung „Handbuch für die Grundlagen zur Bemessung von Bauwerken gegen die Wirkung konventioneller Waffen“ [86] Eingang gefunden. Die empirischen Gleichungen gelten für die Achse senkrecht unterhalb der Ladungsmasse ohne Berücksichtigung von Reflexionen an Schichtgrenzen oder der Geländeoberkante. Sie beruhen auf einer Auswertung von über hundert Explosionsversuchen in unterschiedlichsten Böden, mit Detonationstiefen zwischen 0 m (Kontaktdetonation) bis zu vollständiger Verdämmung und Ladungsmassen von 1 lbm bis 500 t.

⁴² Im Vergleich zu Erdbeben weisen die Bodenbewegungen aufgrund von Sprengungen und Explosionsunfällen in unterirdischen Munitionsdepots deutlich höherfrequente Komponenten in den Verformungs-Zeitverläufen mit größeren Amplituden und einer kürzeren Einwirkungsdauer auf. So liegen bei Baustellensprengungen die Hauptfrequenzen der Bodenbeschleunigungen im Bereich von 30 Hz [113], [114].

Die Formeln wurden im anglo-amerikanischen Einheitensystem formuliert. Entsprechend mussten sie für die vorliegende Arbeit erst auf SI-Einheiten konvertiert werden⁴³. Für die Längeneinheit „foot“ gilt Gleichung (4.2). Des Weiteren ist der Unterschied zwischen der Masseneinheit „pound-mass“ lbm (4.3) und der Kräfteinheit „pound-force“ lbf (4.4) zu beachten, die über die Erdbeschleunigung g verknüpft sind. Der Unterschied ist in der originalen Veröffentlichung lediglich anhand der Einheiten zu erkennen, da *Drake & Little* [3] beide Größen mit „lb“ bezeichnet haben.

$$1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m} \quad (4.2)$$

$$1 \text{ lbm} = 0,4536 \text{ kg} \quad (4.3)$$

$$1 \text{ lbf} = 1 \text{ lbm} \cdot g = 1 \text{ lbm} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1 \text{ ft}}{0,3048 \text{ m}} = 32,1850 \frac{\text{lbm} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2} \quad (4.4)$$

Die maßgebenden Eingangsparameter für die empirischen Formeln sind:

- die Eigenschaften des Bodens zwischen dem Beobachtungspunkt und der Ladungsmasse, ausgedrückt durch die Dichte ρ , die seismische Wellengeschwindigkeit c sowie einen Dämpfungskoeffizienten n ⁴⁴ (siehe Tabelle 4-1)
- die Ladungsmasse W
- die Entfernung r zwischen Beobachtungspunkt und Ladungsschwerpunkt
- die Tiefe d des Ladungsschwerpunkts unter Geländeoberkante, die in den Erdstoßkopplungsfaktor f eingeht

Die Entfernung r und die Tiefe d sind mittels Kubikwurzelgesetz in die skalierte Entfernung R (4.5) bzw. die skalierte Ladungsschwerpunkttiefe D (4.6) umzurechnen.

$$R = \frac{r}{\sqrt[3]{W}} = r \cdot W^{-1/3} \quad (4.5)$$

$$D = \frac{d}{\sqrt[3]{W}} = d \cdot W^{-1/3} \quad (4.6)$$

In die ursprünglichen Formeln von *Drake & Little* [3] ist für die Ladungsmasse die äquivalente Masse W_{C-4} des Explosivstoffs C-4 einzusetzen [4, p. 136f]. Diese kann anhand der TNT-Äquivalente berechnet werden. In Gleichung (4.7) beispielhaft für einen beliebigen Explosivstoff (HE) und den isotropen Druck p als anzupassenden Stoßwellenparameter

⁴³ Bei der Konvertierung der in Kapitel 5 des BW-Handbuchs [88] präsentierten Formeln ist augenscheinlich ein Fehler unterlaufen. Ein Vergleich mit umgerechneten Ergebnissen gemäß den originalen Formeln ergab, dass die Maximalwerte der Partikelgeschwindigkeit und des Spitzendrucks um den Faktor $6,302^n$ überschätzt werden. Mit den Dämpfungskoeffizienten $1,5 \leq n \leq 3,1$ gemäß Tabelle 4-1 führt dies auf um den Faktor 15,82 bis 300,87 zu hohe Werte. Die Spitzenwerte des spezifischen Impulses sind je nach Bodenart sogar um den Faktor $3,3 \cdot 10^4$ bis $6,3 \cdot 10^5$ zu groß.

⁴⁴ Der Dämpfungskoeffizient n ist eine empirische Größe und nicht mit dem viskosen Dämpfungsverhältnis ξ eines idealisierten Einfreiheitsgradmassenschwingers identisch.

gezeigt. Entsprechend müssen bei einem Vergleich von Daten mit empirischen Werten folgende zwei Punkte beachtet werden:

- Es sind die äquivalenten Ladungsmassen zu verwenden.
- Für unterschiedliche Explosivstoffe treten gleich große Stoßwellenparameter in unterschiedlichen skalierten Entfernungen auf, die in einem Verhältnis gemäß Gleichung (4.1)₂ zueinander stehen.

$$W_{TNT}^{(p)} = TNT_{e,C-4}^{(p)} \cdot W_{C-4}^{(p)} = TNT_{e,HE}^{(p)} \cdot W_{HE}^{(p)}$$

$$TNT_{e,C-4}^{(p)} = 1,37 \rightarrow W_{C-4}^{(p)} = \frac{TNT_{e,HE}^{(p)}}{TNT_{e,C-4}^{(p)}} \cdot W_{HE}^{(p)} \quad (4.7)$$

Tabelle 4-1 Bodenparameter für unterschiedliche Böden [4, p. 138]

Bodentyp	ρ [kg/m ³]	c [m/s]	$\rho \cdot c$ [kPa·s/m]	n [-]
loser, trockener Sand mit geringer bezogener Lagerungsdichte	1490	183	271	3,1
trockener Sand und Auffüllungen	1630	305	498	2,75
trockener Sand mit hoher bezogener Lagerungsdichte	2030	488	995	2,5
nasser, sandiger Ton mit Luftporenanteil $n_L > 4\%$	1990	549	1086	2,5
wassergesättigte, sandige Tone und Sande mit Luftporenanteil $n_L < 1\%$	1920	1524	2941	2,4
Vollständig wassergesättigte Tone	2030	1829	3732	1,5

Mit zunehmender Tiefe d des Ladungsschwerpunkts unter Geländeoberkante wird der auf den Boden übertragene Anteil der Explosionsenergie größer. *Drake & Little* berücksichtigen dies anhand des Erdstoßkopplungsfaktors f , den sie als „das Verhältnis des betrachteten Erdstoßparameters infolge einer teilweise verdämmten Ladung zum entsprechenden Erdstoßparameter aufgrund einer vollständig verdämmten Ladung im selben Medium“ definierten. Der Erdstoßkopplungsfaktor f hängt neben der Detonationstiefe d auch vom umgebenden Medium ab. Entsprechend ist die in Abbildung 4.4 angegebene Formel für Lockergestein nach *Bulson* [98] eine grobe Vereinfachung, da sie den Einfluss der Bodenart, der Lagerungsdichte und des Sättigungsgrads vernachlässigt. Zudem zeigten *Laine & Larsen* [99] mittels numerischer Berechnungen, dass der Erdstoßkopplungsfaktor sowohl eine Funktion der skalierten Entfernung R als auch jenes Winkels ist, den die Vertikale mit einer Gerade durch den Ladungsschwerpunkt und den Betrachtungspunkt bildet. Jüngste Versuche von *Shelton et al.* [100] ergaben Erdstoßkopplungsfaktoren, die größtenteils oberhalb jener

nach *Bulson* [98] liegen. Des Weiteren nahmen die Erdstoßkopplungsfaktoren mit zunehmender Höhe des Ladungsschwerpunkts über Geländeoberkante zu, was gleichbedeutend mit der Aussage ist, dass der Erdstoßkopplungsfaktor für oberflächennahe Detonationen ein Minimum aufweist. Eine allgemeingültige Formel für den Erdstoßkopplungsfaktor kann derzeit nicht angegeben werden. Für vollständig verdämmte Ladungen mit einem Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$ ist eine Verwendung empirischer Formeln (zur Berechnung der Erdstoßparameter) aber trotzdem sinnvoll.

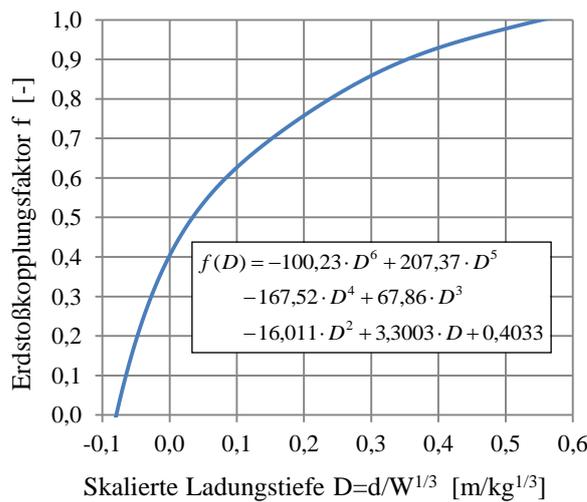


Abbildung 4.4 Kopplungsfaktor f für Lockergestein nach *Bulson* [98]

4.3.1.1 Maximalwerte der Partikelgeschwindigkeit und des Drucks

Der Spitzenwert $v_{1,\max}$ der Partikelgeschwindigkeit kann mit den Gleichungen (4.8) und/oder (4.9) berechnet werden, je nachdem, ob die Ladungsmasse für C-4 oder die äquivalente Ladungsmasse TNT verwendet wird. Abbildung 4.5 zeigt den Peak-Wert $v_{1,\max} = f(R_{\text{TNT}})$ für eine vollständig verdämmte Ladung mit einem Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$ und die Parameter der Standardböden gemäß Tabelle 4-1. Für skalierte Entfernungen $R = R_{\text{TNT}}^{\text{krit}} = 2,7997^{-1} \text{ m/kg}^{1/3} = 0,3572 \text{ m/kg}^{1/3}$ wird der Klammerterm in Gleichung (4.9) zu Eins und der zugehörige Wert $v_{1,\max}(R_{\text{krit}}) = 48,768 \text{ m/s}$ unabhängig vom Dämpfungsparameter. Für skalierte Entfernungen $R \leq R_{\text{krit}}$ ist die maximale Partikelgeschwindigkeit umso größer, je lockerer der Boden gelagert ist. Dies ist unrealistisch, und das Modell nach *Drake & Little* [3] verliert für $R \leq R_{\text{krit}}$ seine Gültigkeit.

$$v_{1,\max} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = 48,768 \cdot f \cdot \left(2,5208 \frac{r[\text{m}]}{\sqrt[3]{W_{\text{C-4}}[\text{kg}]}} \right)^{-n} = 48,768 \cdot f \cdot (2,5208 \cdot R_{\text{C-4}})^{-n} \quad (4.8)$$

$$v_{1,\max} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = 48,768 \cdot f \cdot \left(2,7997 \frac{r[\text{m}]}{\sqrt[3]{W_{\text{TNT}}[\text{kg}]}} \right)^{-n} = 48,768 \cdot f \cdot (2,7997 \cdot R_{\text{TNT}})^{-n} \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{R_{\text{C-4}}}{R_{\text{TNT}}} \right)^3 = \left(\frac{2,7997}{2,5208} \right)^3 \approx 1,37 = \text{TNT}_{e,\text{C-4}}^{(p)} \quad (4.10)$$

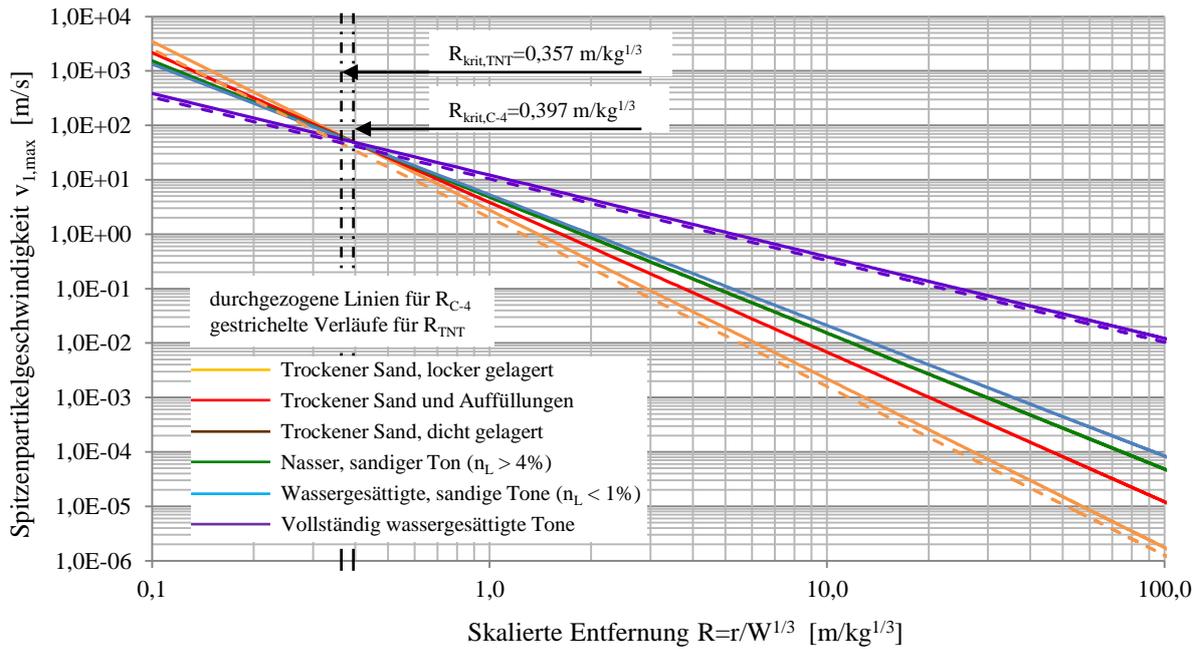


Abbildung 4.5 Peak-Partikelgeschwindigkeit $v_{1,max}(R = r/W^{1/3})$ nach Drake & Little [3].
Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$, Bodenparameter gemäß Tabelle 4-1

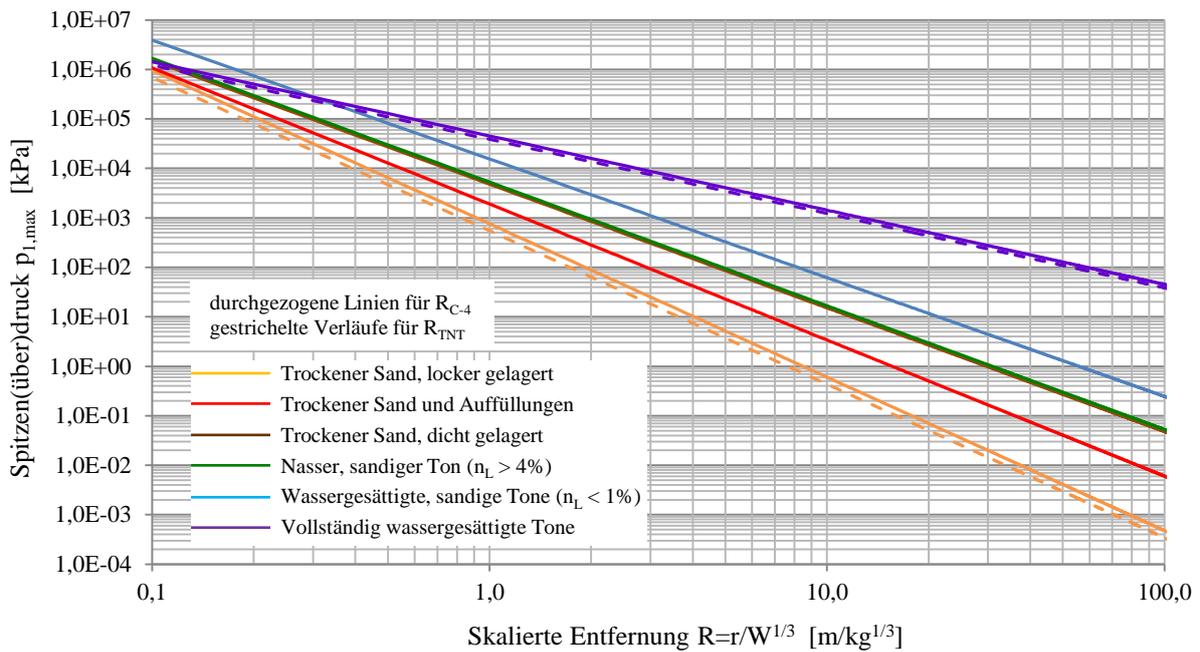


Abbildung 4.6 Spitzen(über)druck $p_{1,max}(R = r/W^{1/3})$ nach Drake & Little [3].
Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$, Bodenparameter gemäß Tabelle 4-1

Der maximale (Über-)Druck $p_{1,max}$ kann mittels der Impulserhaltung (2.41) aus der Spitzenpartikelgeschwindigkeit berechnet werden, was auf die empirischen Formeln (4.11) und (4.12) führt. Wie in Abbildung 4.6 zu erkennen ist, klingt der Erdstoß in wassergesättigten bindigen Böden am langsamsten und in trockenen nichtbindigen Böden mit geringer Lagerungsdichte am schnellsten ab.

$$p_{1,\max} \left[\frac{N}{m^2} = Pa \right] = 48,768 \cdot f \cdot \rho \left[\frac{kg}{m^3} \right] \cdot c \left[\frac{m}{s} \right] \cdot \left(2,5208 \frac{r[m]}{\sqrt[3]{W_{C-4}[kg]}} \right)^{-n} \quad (4.11)$$

$$p_{1,\max} \left[\frac{N}{m^2} = Pa \right] = 48,768 \cdot f \cdot \rho \left[\frac{kg}{m^3} \right] \cdot c \left[\frac{m}{s} \right] \cdot \left(2,7997 \frac{r[m]}{\sqrt[3]{W_{TNT}[kg]}} \right)^{-n} \quad (4.12)$$

Bezüglich der empirischen Formeln für die Maximalwerte der Partikelverschiebung $u_{1,\max}$ und der Partikelbeschleunigung $a_{1,\max}$ wird auf [3] und [4] verwiesen.

4.3.1.2 Zeitverläufe des (Über-)Drucks und der Partikelgeschwindigkeit

Die zeitlichen Verläufe der Partikelgeschwindigkeit sowie des (Über-)Drucks in einer bestimmten Entfernung r vom Detonationszentrum sind abschnittsweise definiert. Der Explosivstoff wird zum Zeitpunkt $t = 0$ gezündet. Die Ankunftszeit t_a der Erdstoßwelle im Betrachtungspunkt und die Zeit t_p , bei welcher die Maximalwerte des Drucks und der Partikelgeschwindigkeit erreicht werden, definieren die Anstiegsdauer Δt_r (siehe Abbildung 4.7 und Gleichungen (4.13) bis (4.15)). In der Anstiegsphase unterstellten *Drake & Little* [3] lineare Verläufe für den Druck und die Partikelgeschwindigkeit gemäß den Gleichungen (4.16) und (4.17). Nach Erreichen der Peak-Werte klingen beide Größen entsprechend den Gleichungen (4.18) und (4.19) exponentiell ab. Die Konstanten α und β sind von den Bodenverhältnissen abhängig. *Drake & Little* [3] empfehlen die Werte $\alpha = 1,0$ und $\beta = 0,4$.

$$t_a = \frac{r}{c} \quad (4.13)$$

$$\Delta t_r = 0,1 \cdot t_a \quad (4.14)$$

$$t_p = t_a + \Delta t_r = 1,1 \cdot t_a \quad (4.15)$$

$$t_a \leq t < t_p: \quad v_1(t) = v_{1,\max} \cdot \frac{t - t_a}{\Delta t_r} \quad (4.16)$$

$$t_a \leq t < t_p: \quad p_1(t) = \rho \cdot c \cdot v_1(t) = p_{1,\max} \cdot \frac{t - t_a}{\Delta t_r} \quad (4.17)$$

$$t \geq t_p: \quad v_1(t) = v_{1,\max} \cdot \left[1 - \beta \frac{t - t_p}{t_a} \right] \cdot e^{-\beta \frac{t - t_p}{t_a}} \quad (4.18)$$

$$t \geq t_p: \quad p_1(t) = p_{1,\max} \cdot e^{-\alpha \frac{t - t_p}{t_a}} \quad (4.19)$$

Der maximale spezifische Impuls I_{\max} kann durch Integration des Druck-Zeitverlaufs $p(t)$ in der Überdruckphase berechnet werden. Gleichung (4.20) stimmt bis auf den Vorfaktor von $1,05 \approx 1,1$ mit der von *Drake & Little* [3] angegebenen Formel überein.

$$I_{\max} = \int_{t_a}^{\infty} p_1(\bar{t}) d\bar{t} = \int_{t_a}^{t_p} \frac{p_{1,\max}}{\Delta t_r} \cdot (\bar{t} - t_a) d\bar{t} + \int_{t_p}^{\infty} p_{1,\max} \cdot e^{-\frac{\alpha}{t_a}(\bar{t}-t_p)} d\bar{t} \quad (4.20)$$

$$I_{\max} = 1,05 \cdot t_a \cdot p_{1,\max} = 1,05 \cdot \rho \cdot r \cdot v_{1,\max}$$

4.3.2 Das Modell nach Drake et al. von 1989

In obige Formeln nach *Drake & Little* [3] geht die seismische Wellengeschwindigkeit c ein, weshalb sie für den Nahbereich der Detonation und die daraus resultierenden hohen Schockwellengeschwindigkeiten und Drücke weniger geeignet sind. Verbesserte semiempirische Formeln für den Spitzendruck und die Maximalwerte der Verschiebung, der Partikelgeschwindigkeit und der Partikelbeschleunigung wurden von *Drake et al.* [96] vorgeschlagen. Die neueren Formeln gelten für SI-Einheiten sowie den Standard-Explosivstoff TNT.

4.3.2.1 Peak-Werte der Partikel- und Schockwellengeschwindigkeit, des Drucks und der Partikelverschiebung

Die Nahfeldlösung der Partikelgeschwindigkeit nach Gleichung (4.21) wurde auf Grundlage der analytischen Lösung einer sich in einem nahezu inkompressiblen Medium kugelförmig ausbreitenden Schockwelle hergeleitet. Als zusätzliche Annahme unterstellten *Drake et al.* [96], dass nur 50 % der inneren Energie des Explosivstoffs in kinetische Energie umgewandelt wird. Für Entfernungen $r > 0,155 \text{ m/kg}^{1/3}$ vom Ladungsschwerpunkt gilt die empirische Gleichung (4.22). Der Spitzenüberdruck $p_{1,\max}$ wird mit der Impulserhaltung nach Gleichung (4.23) berechnet, wofür die maximale Schockwellengeschwindigkeit $v_{S,\max}$ benötigt wird. Diese folgt aus der linearen v_S - v_1 -Beziehung (4.24), wobei *Drake et al.* [96] für alle geologischen Materialien $S_1 = 1,5$ empfohlen. Formel (4.25) zur Berechnung der maximalen Partikelverschiebung $u_{1,\max}$ gilt nur für $r > 0,155 \text{ m/kg}^{1/3}$. Die dazu erforderliche seismische Wellengeschwindigkeit c_i darf nicht mit der „typical initial loading wave speed“ c_0 nach Gleichung (4.24) verwechselt werden. Die Rechenkennwerte für Standardböden gemäß Tabelle 4-2 zeigen deutliche Abweichungen zu den Werten des ursprünglichen Modells in Tabelle 4-1.

$$r \leq 0,155 \cdot W_{TNT}^{1/3} \quad v_{1,\max} \left[\frac{m}{s} \right] = \frac{606,2}{\sqrt{\rho_0}} \cdot f \cdot \left(\frac{r}{W_{TNT}^{1/3}} \right)^{-3/2} \quad (4.21)$$

$$r > 0,155 \cdot W_{TNT}^{1/3} \quad v_{1,\max} \left[\frac{m}{s} \right] = \frac{9906}{\sqrt{\rho_0}} \cdot f \cdot \left(\frac{r}{0,155 \cdot W_{TNT}^{1/3}} \right)^{-n} \quad (4.22)$$

$$p_{1,\max} = \rho_0 \cdot v_{S,\max} \cdot v_{1,\max} \quad (4.23)$$

$$v_{S,\max} = c_0 + S_1 \cdot v_{1,\max} \quad (4.24)$$

$$r > 0,155 \cdot W_{TNT}^{1/3} \quad u_{1,\max} [m] = \frac{3,31}{c_i} \cdot f \cdot W_{TNT}^{1/3} \cdot \left(\frac{r}{W_{TNT}^{1/3}} \right)^{-2} \quad (4.25)$$

Gemäß *Drake et al.* [96] wird mit Gleichung (4.23) die maximale Spannung („peak stress“) berechnet. Zudem gelten die aus Schockexperimenten gewonnenen v_S - v_1 -Beziehungen – zumindest unterhalb des Punkts vollständiger Verdichtung – für die Axialspannung σ_x und nicht für den Druck p (siehe Abschnitt 3.1.2.3). Ein Vergleich mit dem Spitzenüberdruck (4.12) nach *Drake & Little* [3] zeigt eine bessere Übereinstimmung für die Annahme, dass Gleichung (4.23) ebenfalls für den Spitzenüberdruck gilt. Analog zu *Laine* [4] wird die Gültigkeit von Gleichung (4.23) für den isotropen Druck und nicht für die Spannung in Wellenausbreitungsrichtung σ_x unterstellt. Hinsichtlich der maximalen Spannungen liegt diese Annahme auf der sicheren Seite.

Tabelle 4-2 Bodenparameter für unterschiedliche Böden gemäß *Drake et al.* [96]

Bodentyp		ρ_0	c_i	c_0	n
		[kg/m ³]	[m/s]	[m/s]	[-]
Locker gelagert, trocken	Sand, Lehm	1500	200	180	2,5-3,0
Mitteldicht gelagert, trocken	Sand, Lehm, Alluvium	1700	350	300	2,3
Dicht gelagert, trocken	Sand	1750	550	520	2,1
	Alluvium	1900	500	220	2,5-3,0
Wassergesättigt	Alle Bodenarten	1850	1850	1850	1,5

4.3.2.2 Zeitverlauf der Partikelgeschwindigkeit

Für den Zeitverlauf der Partikelgeschwindigkeit $v_1(t)$ werden analog zu *Drake & Little* [3] die Werte für die Ankunftszeit t_a (4.26) der Erdstoßwelle im Betrachtungspunkt sowie die Zeit t_p (4.27), bei der die Partikelgeschwindigkeit ihren Maximalwert $v_{1,\max}$ erreicht, benötigt. Zusätzlich müssen die Dauer der linearen Anstiegsphase Δt_r (4.28), die Dauer der Phase mit positivem Impuls Δt_+ (4.29) sowie die Zeit t_d (4.30) bis zum Ende der positiven Druck- und Partikelgeschwindigkeitsphase berechnet werden (siehe Abbildung 4.7).

$$t_a = \frac{r}{c_i} \quad (4.26)$$

$$t_p = \frac{r}{v_{S,\max}} \quad (4.27)$$

$$\Delta t_r = t_p - t_a = \left(\frac{c_i}{v_{s,\max}} - 1 \right) \cdot \frac{r}{c_i} \quad (4.28)$$

$$\Delta t_+ = 2,72 \frac{u_{1,\max}}{v_{1,\max}} - 0,36 \cdot \Delta t_r \quad (4.29)$$

$$t_d = t_a + \Delta t_+ \quad (4.30)$$

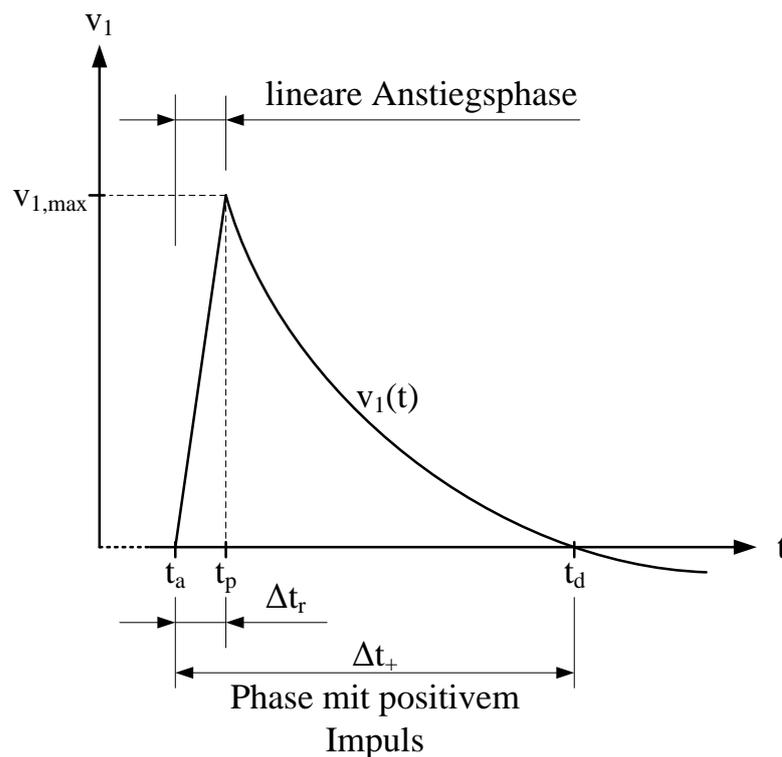


Abbildung 4.7
Idealisierter Verlauf der
Partikelgeschwindigkeit
 $v_1(t)$ für die empirischen
Modelle nach *Drake &
Little* [3] sowie *Drake et
al.* [96]

Die Gleichungen (4.31) und (4.32) definieren den zeitlichen Verlauf der Partikelgeschwindigkeit mit einem linearen Anstieg bis zum Spitzenwert $v_{1,\max}$ bei t_p und einer exponentiellen Abklingphase. Der zeitliche Verlauf des isotropen Drucks p kann durch Einsetzen der Formeln (4.31) und (4.32) in die Gleichungen (4.24) und (4.23) bestimmt werden. Aufgrund der Einschränkungen in Formel (4.25) können mit dem Modell nach *Drake et al.* [96] nur Zeitverläufe der Partikelgeschwindigkeit und des Drucks für skalierte Entfernungen $R > 0,155 \text{ m/kg}^{1/3}$ berechnet werden.

$$t_a \leq t < t_p: \quad v_1(t) = v_{1,\max} \cdot \frac{t - t_a}{\Delta t_r} \quad (4.31)$$

$$t \geq t_p: \quad v_1(t) = v_{1,\max} \cdot \frac{t_d - t}{t_d - t_p} \cdot e^{-\frac{t - t_p}{t_d - t_p}} \quad (4.32)$$

4.3.3 Vergleich der Drakeschen Modelle von 1983 und 1989

Abbildung 4.8 zeigt einen Vergleich der beiden empirischen Modelle nach *Drake & Little* [3] sowie *Drake et al.* [96] für die maximale Partikelgeschwindigkeit und ähnliche Böden gemäß Tabelle 4-1 und Tabelle 4-2. Die Spitzenüberdrücke sind in Abbildung 4.9 dargestellt.

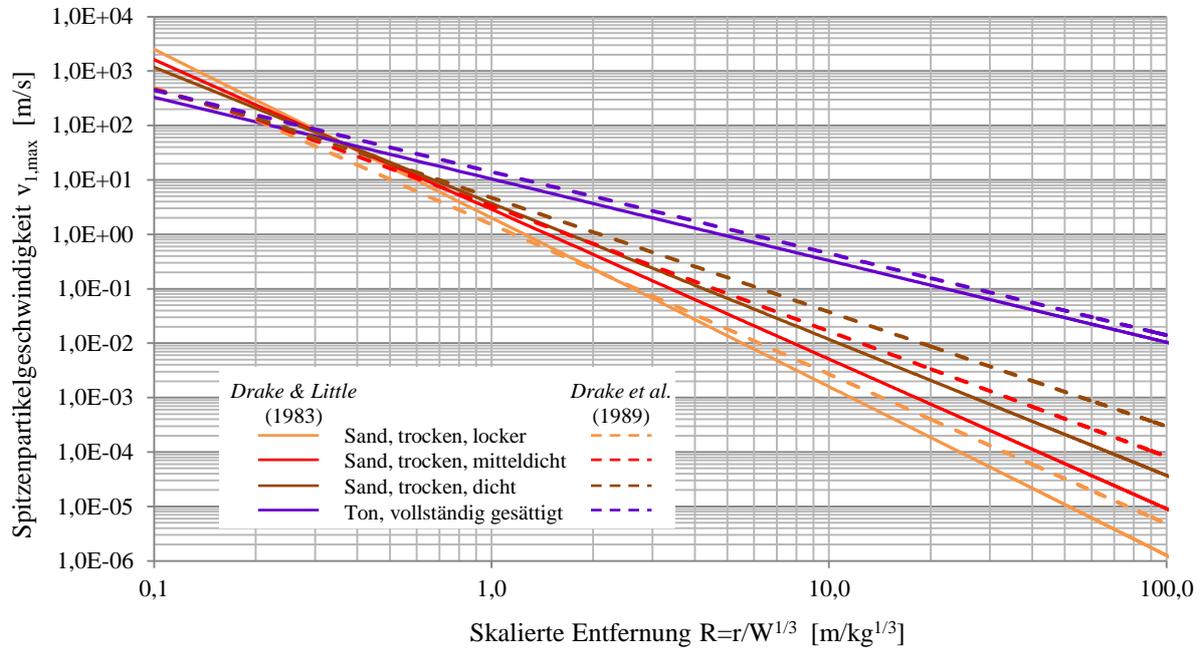


Abbildung 4.8 *Drake & Little* [3] \leftrightarrow *Drake et al.* [96] – Peak-Partikelgeschwindigkeit $v_{1,max}(R_{TNT})$. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$

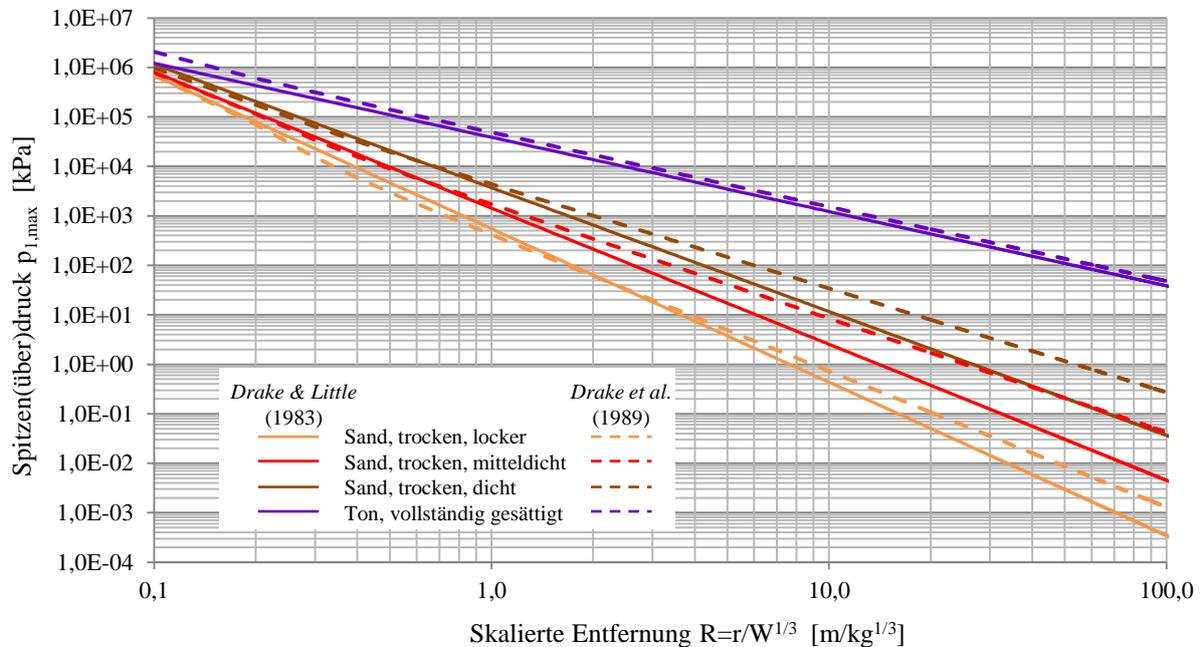


Abbildung 4.9 *Drake & Little* [3] \leftrightarrow *Drake et al.* [96] – Spitzenüberdruck $p_{1,max}(R_{TNT})$. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$

Beide Erdstoßparameter sind in Abhängigkeit der skalierten Entfernung R_{TNT} aufgetragen, da eine Vergleichbarkeit sonst nicht gegeben ist. Der ursprüngliche Fehler des Modells nach *Drake & Little* [3], wonach für skalierte Entfernungen $R \leq R_{krit}$ bei den locker gelagerten Böden größere Spitzenwerte der Partikelgeschwindigkeit als bei den dicht gelagerten Böden auftraten, wurde in dem Modell nach *Drake et al.* [96] korrigiert. Die größten Peak-Werte der Partikelgeschwindigkeit (und des Drucks) treten nun für alle skalierten Entfernungen R bei den wassergesättigten Böden auf. Die kleinsten Peak-Werte werden für die trockensten, locker gelagerten Sande berechnet. Die empirischen Gleichungen nach *Drake et al.* [96] ergeben vor allem für die rolligen Böden größere Spitzenwerte als das Modell nach *Drake & Little* [3]. Allerdings beruhen die zugehörigen Bodenkennwerte der Tabelle 4-2 auf einer breiteren Datenbasis als die „alten“ Werte gemäß Tabelle 4-1.

Beide Modelle zeigen im Partikelgeschwindigkeits-Zeitverlauf nach der positiven Phase eine Sogphase mit negativer Partikelgeschwindigkeit, in der die Partikel zum Explosionszentrum hinströmen (siehe Abbildung 4.10). Für die Druck-Zeitverläufe werden mit beiden Modellen entsprechende Unterdruckphasen berechnet (siehe Abbildung 4.11). Im neueren Modell nach *Drake et al.* [96] folgt diese aus der konsequenten Berechnung des Drucks aus der Partikelgeschwindigkeit mittels der Impulserhaltung (4.23). Die Unterdruckphasen erinnern stark an die Zeitverläufe von Luftstoßwellen. Insbesondere für rollige Böden ist dies jedoch ein unrealistisches Verhalten, da diese keine Zugspannungen übertragen können. Von einer Anpassung numerisch berechneter Zeitverläufe an die Modelle nach *Drake & Little* [3] sowie *Drake et al.* [96] wird deshalb abgeraten.

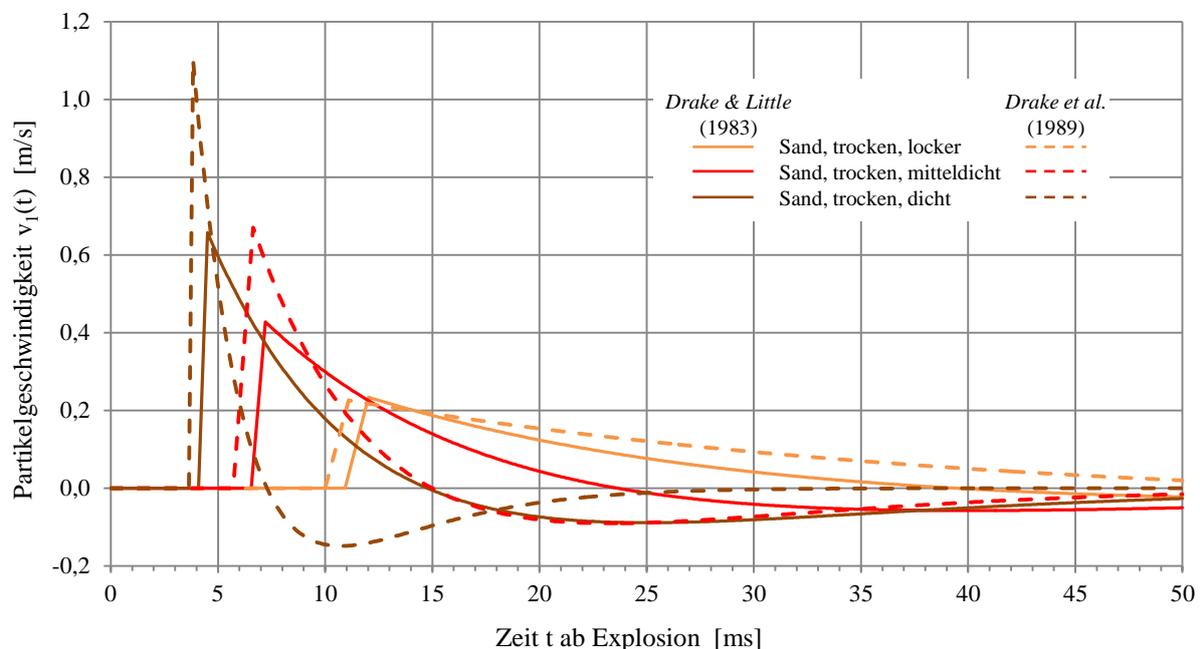


Abbildung 4.10 *Drake & Little* [3] \Leftrightarrow *Drake et al.* [96] – Partikelgeschwindigkeit $v_1(t)$ infolge $W_{TNT} = 1$ kg bei $r = 2,0$ m. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$

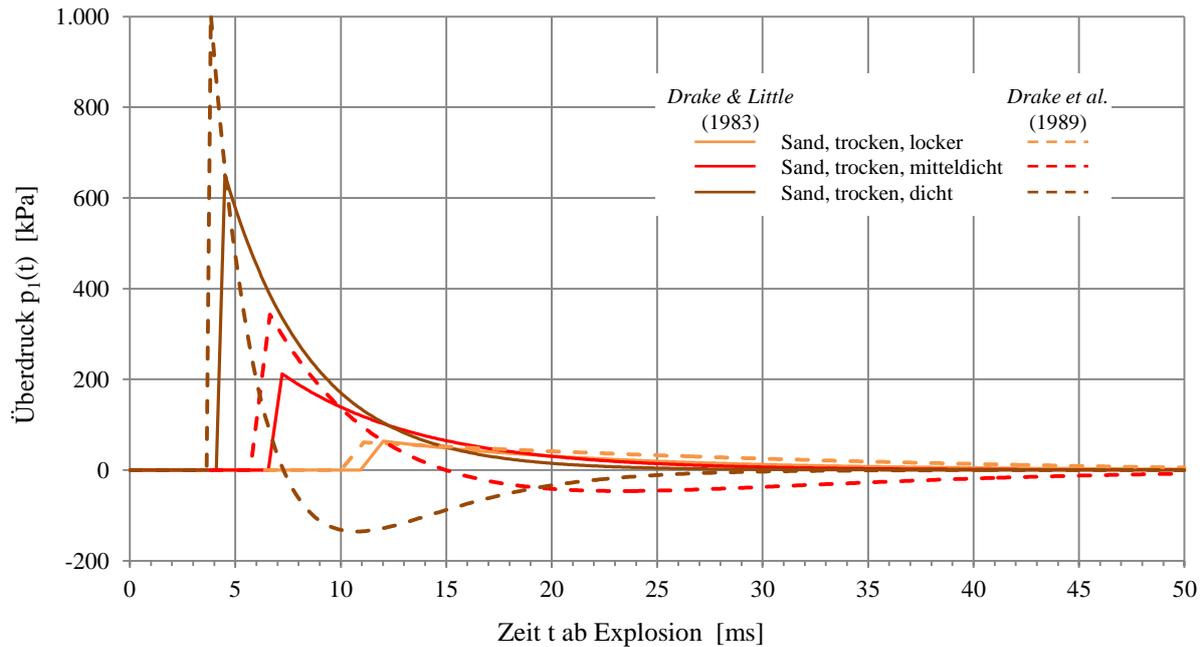


Abbildung 4.11 *Drake & Little* [3] \leftrightarrow *Drake et al.* [96] – Überdruck $p_1(t)$ infolge $W_{\text{TNT}} = 1 \text{ kg}$ bei $r = 2,0 \text{ m}$. Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$

Hinsichtlich einer Bewertung der *Drakeschen* Modelle wird auf Abschnitt 4.6 verwiesen.

4.4 Schadensbilder aufgrund von Explosionen im Boden

Generell ist bei Explosionsbeanspruchung zwischen ober- und unterirdischen sowie tief- und flachgegründeten Bauwerken zu unterscheiden. Im Folgenden wird von flachgegründeten, oberirdischen Bauwerken ausgegangen. Dafür sind die nachfolgend aufgelisteten und in Abbildung 4.12 dargestellten, durch Explosionen im Boden ausgelösten Schadensbilder denkbar:

- Im Nahfeld von oberflächennahen Explosionen: Schädigung der Struktur durch das aufgewirbelte bzw. herausgeschleuderte Bodenmaterial („Trümmerflug“)
- Bei oberflächennahen Explosionen: Luftstoß einschließlich Schwingungsanregung
- Im Nahfeld von Explosionen mit ausreichender Überdeckung: Hohlraum- und/oder Kraterbildung, Überschneidung des Kraters mit der Grundbruchfigur
- Außerhalb des Einflussbereiches von Kratern und Hohlräumen:
 - bei Böden mit ausreichendem Verdichtungspotential: Kornumlagerungen im Boden zu einer dichteren Packung aufgrund dynamischer Anregung und Überschreitung der Schubverzerrungsamplituden mit daraus resultierenden (Differenz)-Setzungen, Verkantungen und Winkelverdrehungen der Fundamente, welche die zulässigen Werte überschreiten
 - Fußpunktanregung des Systems Boden-Gründung-Bauwerk zu Schwingungen, die eine Schädigung der tragenden Struktur nach sich ziehen

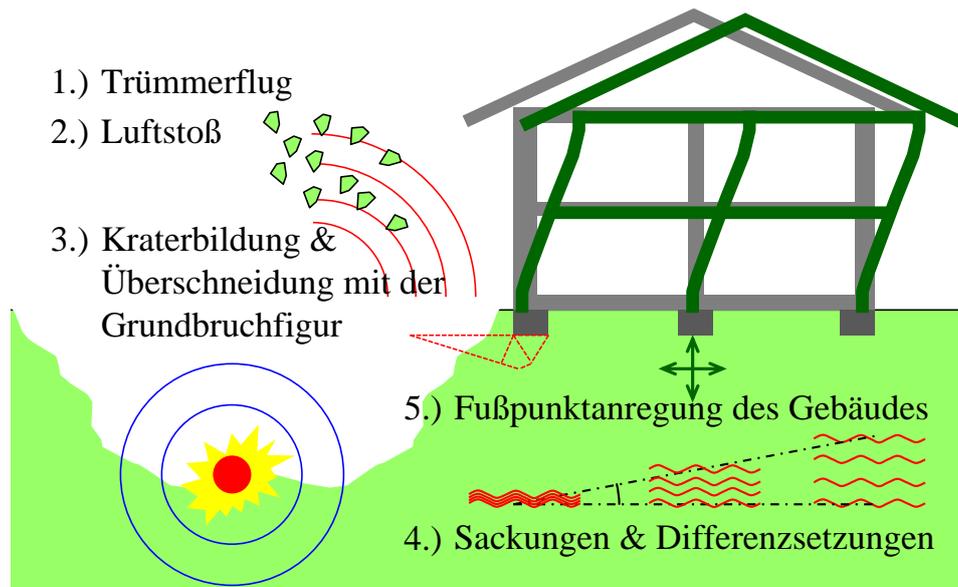


Abbildung 4.12 Mögliche Schadensbilder infolge Explosionen innerhalb des Baugrunds

4.5 Berechnung und Bemessung bei Erd- und Luftstoß

4.5.1 Entkoppelter \Leftrightarrow gekoppelter Berechnungsansatz

Die Berechnung der Verformungen, die einem Tragwerk durch explosionsinduzierten Luft- und/oder Erdstoß aufgezwungen werden, und des daraus resultierenden Spannungs- und Schädigungszustands ist kein triviales Problem. Die Nachgiebigkeit bzw. die Verformungen des Tragwerks beeinflussen den Spannungszustand sowie den Verstärkungsfaktor im benachbarten Boden bzw. in der angrenzenden Luft (siehe Abschnitt 2.4.2.2), was sich wiederum auf die effektive Belastung – das heißt Spitzendruck, zeitlichen Verlauf des Überdrucks und damit auf den Impuls – auswirkt [8].

Prinzipiell stehen für eine Berechnung der sogenannte entkoppelte und der gekoppelte Ansatz zur Verfügung. Beim entkoppelten Berechnungsansatz wird der gesamte Prozess in die folgenden drei Phasen unterteilt [6], [7], [11]:

- Explosion mit Kesselaufweitung und/oder Kraterbildung
- Wellenfortpflanzung im Freifeld (Luft und /oder Boden)
- Belastung und Deformation des zu bemessenden Tragwerks

Demgegenüber wird in Hydrocode-Berechnungen, bei denen alle interagierenden Komponenten (Explosivstoff, Umgebungsmedien Luft und Boden sowie das zu bemessende Tragwerk) in einem Gesamtmodell abgebildet sind, der vollständig gekoppelte Ansatz verfolgt. In Bezug auf die Boden-Bauwerk-Interaktion und eine korrekte Ermittlung der Belastung ist zu beachten, dass mit 3D-Berechnungen deutlich realitätsnähere Ergebnisse erzielt werden können als mit axialsymmetrischen 2D-Berechnungen. Grund hierfür ist eine genauere Abbildung des Verstärkungsfaktors in 3D-Berechnungen, da die Steifigkeit des

Tragwerks genauer erfasst werden kann. Dagegen werden in axialsymmetrischen 2D-Berechnungen künstliche Steifigkeiten in Umfangsrichtung generiert [7].

Werden beim entkoppelten Ansatz die ersten zwei Phasen aus empirischen Modellen abgeleitet, ist der numerische Aufwand deutlich geringer als beim vollständig gekoppelten Ansatz. Die Tragwerksbelastung wird durch Vorgabe der empirischen Druck- und Geschwindigkeits-Zeitverläufe für das Freifeld als Randbedingungen simuliert. Dabei werden jedoch folgende Punkte vernachlässigt:

- Abhängigkeit der Belastung von der Interaktion zwischen Stoßwelle und Tragwerk
- Reflexionen der Stoßwellen an der Geländeoberkante
- Je nach Fragestellung (ober- oder unterirdisches Bauwerk): Luft- oder Erdstoß

Ein empirisches Modell, anhand dessen die obigen Effekte näherungsweise berücksichtigt werden können, ist lediglich für auf Fels gegründete, oberirdische Bauwerke, wobei Luft- und Erdstoß durch eine oberirdische Explosion ausgelöst werden, bekannt [9]. Gemäß *Wu & Hao* [10] können für diese Randbedingungen drei Fälle unterschieden werden:

- Bei kurzen Distanzen zwischen Explosivstoff und Bauwerk dominiert die Luftstoßbelastung das Tragwerksverhalten und der Erdstoß kann vernachlässigt werden.
- Oberhalb einer kritischen Entfernung muss die Belastung durch Erdstoß berücksichtigt werden, auch wenn sie alleine nicht für eine Tragwerksschädigung ausreicht⁴⁵.
- Für große Entfernungen wirken Erd- und Luftstoß aufgrund der unterschiedlichen Wellengeschwindigkeiten nicht gleichzeitig, und das Tragwerk darf für beide Belastungen getrennt nachgewiesen werden.

Für die Beanspruchung von auf Lockergestein gegründeten, oberirdischen Bauwerken durch Erd- und Luftstoß infolge unterirdischer Explosionen existiert kein empirisches Modell, das alle Interaktionen berücksichtigt.

4.5.2 Ersatzsysteme

Zur Berechnung des Verformungszustands werden Tragwerke beim entkoppelten Ansatz oft durch Ersatzsysteme – im einfachsten Fall ein Einfreiheitsgradmassenschwinger (SDOF ... Single Degree of Freedom) – idealisiert. Für eine realitätsnahe Idealisierung sollte die maßgebende Eigenform bekannt sein, die jedoch wie die Belastung von der Interaktion der Stoßwelle mit dem Tragwerk abhängen kann. Für einen einfachen idealisierten Zeitverlauf der

⁴⁵ Betrachtet wird jener Bereich, in dem die Luftstoßwelle bereits stark gedämpft ist. Da die Dämpfung für den unterstellten felsigen Untergrund deutlich geringer ist, wirken nun Erd- und Luftstoß in ähnlichen Größenordnungen.

Belastung kann damit der dynamische Vergrößerungsfaktor DLF_{\max} (4.33)⁴⁶ direkt ermittelt werden, was eine anschließende Bemessung erlaubt [101].

$$DLF_{\max} = \max\left(\frac{u_{\text{dyn}}(t)}{u_{\text{stat}}}\right) \quad \text{mit} \quad u_{\text{stat}} = \frac{F_{\max}}{K} \quad (4.33)$$

Bei unterirdischen, durch Erdstoß belasteten Bauwerken ist die Identifikation der maßgebenden Eigenform im Allgemeinen deutlich schwieriger als bei oberirdischen Bauwerken unter Luftstoß. Gemäß *Wang et al.* [6] sowie *Lu et al.* [7] kann die Frage nach der korrekten Belastung zumindest im Nahbereich der Explosion nur mittels einer vollständig gekoppelten Analyse erfasst werden.

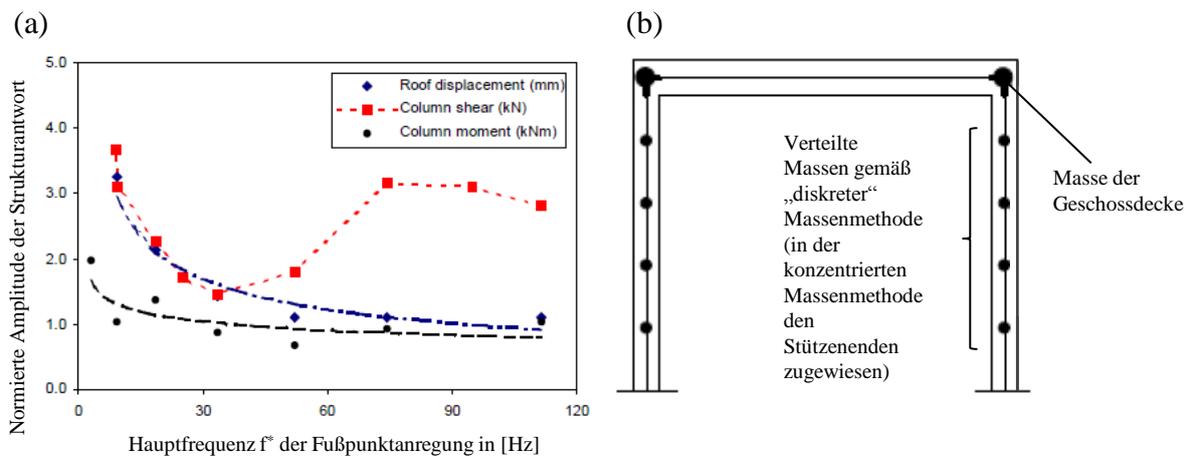


Abbildung 4.13 (a) Amplituden der Systemantworten in Abhängigkeit der Hauptfrequenz, (b) „Diskrete“ Massenverteilung zur Berücksichtigung lokaler Eigenformen; aus *Lu et al.* [102]

Lu et al. [102] untersuchten das Verhalten eines 1-geschossigen Stahlbetonrahmens im Maßstab 1:5 unter Vorgabe horizontaler Geschwindigkeitsverläufe als Fußpunktanregung. Unter simulierter Erdbebenbeanspruchung mit niedrigen Anregungshauptfrequenzen⁴⁷ $f^* < 10$ Hz wurde die gesamte Struktur entsprechend der ersten Eigenform angeregt. Die Stützenfußmomente und Stützenfußquerkräfte korrelierten dabei mit der Stützenkopfverschiebung gemäß dem Biegelinienansatz. Zur Simulation einer Erdstoßbelastung wurde die Hauptfrequenz gesteigert, bei konstant gehaltener Spitzenpartikelgeschwindigkeit. Mit zunehmender Hauptfrequenz wurde die globale Eigenform immer weniger angeregt. Für Anregungshauptfrequenzen $f^* > 25$ Hz konnte ein Anstieg der Querkraft am Stützenfuß bei gleichzeitiger Abnahme der restlichen Schnittgrößen beobachtet werden (Abbildung 4.13 (a)). Dies belegt eine Anregung des Gebäudes zu höheren

⁴⁶ Der dynamische Lastfaktor ist das Verhältnis einer betrachteten Verschiebungsgröße unter dynamischer Belastung zu jener bei statischer Belastung mit derselben Lastamplitude F_{\max} . Für SDOFs unter sinusförmiger Anregung ist dieses Verhältnis zeitabhängig $DLF = f(t)$. Bei impulsartiger Belastung gilt $DLF = f(t_d/T)$ mit der Belastungsdauer t_d (siehe Abbildung 4.7) und der Periodendauer T . Das Maximum DLF_{\max} wird als Vergrößerungsfaktor bezeichnet.

⁴⁷ Die Hauptfrequenz f^* ist die Frequenz der *Fourier*-Komponente mit der maximalen Amplitude.

Eigenformen, in denen die lokalen Eigenformen der Stützen dominierten. Damit diese höheren Eigenformen bei Erdstoßbelastung und die damit verbundenen Schnittgrößen auch erfasst werden können, müssen die Massen der einzelnen Bauteile gemäß einer „diskreten“ Massenmethode annähernd kontinuierlich verteilt werden (Abbildung 4.13 (b)). Anhand der konzentrierten Massenmethode, bei der alle Massen und Lasten geschossweise den Decken zugewiesen werden, können lokale Eigenformen in den einzelnen Bauteilen nicht abgebildet werden. Ergänzende Untersuchungen von *Lu et al.* [103] an zweigeschossigen Rahmen bestätigten diese Aussage. Demnach wären SDOFs zur Simulation hochfrequenter Fußpunktanregungen infolge Erdstoß auszuschließen.

Dhakal et al. [104] relativierten obige Aussagen von *Lu et al.* [102], [103]. Sie führten grundlegende Untersuchungen zum Einfluss impulsartiger, horizontaler Fußpunktanregungen (infolge von Explosionsunfällen in unterirdischen Munitionslagern) auf die Schwingungsantwort von gedämpften SDOFs durch. Neben der Dauer der Belastungsphase t_d variierten sie die prinzipielle Form der Belastung (Sinus-, Rechteck-, symmetrischer und asymmetrischer Dreiecksimpuls) sowie die Periodendauer T der SDOFs. Oberhalb eines kritischen Wertes $t_d/T > (t_d/T)_{\text{krit}}$ liegt der dynamische Vergrößerungsfaktor DLF_{max} (4.33) innerhalb der Belastungsphase ($0 < t_{\text{max}} < t_d$)⁴⁸. Im Fall $t_d/T < (t_d/T)_{\text{krit}}$ tritt DLF_{max} innerhalb der freien Ausschwingphase auf (für Zeiten $t = t_{\text{max}} > t_d$). Der dynamische Vergrößerungsfaktor DLF_{max} ist also maßgeblich eine Funktion der Dauer der Belastungsphase t_d bzw. des totalen Impulses. Für die meisten Bauwerke gilt bei Erdstoßanregung $t_d/T < (t_d/T)_{\text{krit}}$ mit $T > 2 \cdot t_d$. Entsprechend muss zur Bestimmung von DLF_{max} die Berechnung auf die Ausschwingphase ausgedehnt werden. Hochfrequente Eigenformen und Schubversagen werden somit hauptsächlich während der Belastungsphase angeregt und globale, niederfrequente Eigenformen mit entsprechender Schädigung infolge großer Verschiebungen dominieren die Strukturantwort in der Ausschwingphase.

4.6 Zusammenfassung

Die von einem Explosivstoff im umgebenden Medium ausgelöste Stoßwelle ist von den Eigenschaften und geometrischen Parametern der Komponenten Explosivstoff und Umgebungsmedium (Luft und/oder Boden) und vor allem von der Interaktion dieser Komponenten abhängig. Anhand der in Abschnitt 4.3 vorgestellten empirischen Modelle können die Eigenschaften unterschiedlicher Explosivstoffe und Bodenarten näherungsweise berücksichtigt werden. Die so generierte Bandbreite an Erdstoßparametern gilt ausschließlich für vollständig verdämmte Ladungsmassen mit einem Erdstoßkopplungsfaktor $f = 1$. Ein Vergleich der maximalen Erdstoßparameter aus numerischen Berechnungen mit jenen aus empirischen Modellen wird als absolut notwendig betrachtet. Eine größenmäßige Anpassung bzw. Kalibrierung der Stoffgesetzparameter kann jedoch stets nur für einen Erdstoßparameter – z.B. die Spitzenwerte des Drucks $p_1(R)$ oder der Partikelgeschwindigkeit $v_1(R)$ – erfolgen.

⁴⁸ Für diesen Fall existieren für diverse Belastungen (z.B. sinusförmige Dauerschwingung oder dreiecksförmiger Impuls) geschlossene Formeln für DLF_{max} .

Aufgrund der größeren Datenbasis wird dafür das neuere Modell nach *Drake et al.* [96] als vertrauenswürdiger angesehen als jenes nach *Drake & Little* [3]. Die empirischen Zeitverläufe erscheinen aufgrund der ausgeprägten Sogphasen in beiden Modellen unrealistisch und werden für eine Kalibrierung nicht verwendet.

Die auf der Grundlage von empirischen Modellen (und Ersatzmodellen) berechneten Tragwerksbeanspruchungen sind wie die angesetzte Belastung von der Interaktion des Tragwerks mit der Stoßwelle abhängig. Vollständig gekoppelte Analysen liefern die realistischsten Ergebnisse.

Wie in Abschnitt 4.5 dargestellt, konzentrieren sich die meisten Berechnungen auf die Belastung oberirdischer Bauwerke durch Luftstoß infolge oberirdischer Explosionen und die daraus resultierende Schädigung des Tragwerks. Teilweise wird die zusätzliche Bauwerksbeanspruchung durch Erdstoß berücksichtigt. Berechnungen und Modelle, in denen die Auswirkungen unterirdischer Explosionen – z.B. aufgrund von Blindgängern aus dem 2. Weltkrieg – auf oberirdische Gebäude untersucht werden, sind nicht bekannt. Des Weiteren wird in der Regel eine Schädigung bzw. ein Versagen des Tragwerks aufgrund eines Baugrundversagens sowie aufgrund von Sackungen und unzulässigen Winkelverdrehungen der Gründungskörper nicht betrachtet.

5 Zur Abschätzung der Auswirkungen unterirdischer Explosionen auf Gebäude

5.1 Vorbemerkungen

Im Folgenden wird eine Entscheidungshilfe entwickelt und vorgestellt, anhand derer die Auswirkungen unterirdischer Explosionen auf oberirdische Gebäude abgeschätzt werden können. Die Entscheidungshilfe besteht aus Diagrammen, aus denen die sichere Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$, in der ein Gebäude unbeschädigt bleibt, und die Grenzentfernung $r_{\text{hor, lim}}$, bei deren Einhaltung das Tragwerk zwar beschädigt wird aber nicht vollständig zusammenbricht, abgelesen werden können. Die folgenden Schadensbilder gemäß Abschnitt 4.4 und Abbildung 4.12 werden berücksichtigt:

- Luftstoß
- Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen
- Unzulässige Winkelverdrehungen der Fundamente infolge Sackungen

Auf die Nahfeldwirkungen „Schädigung der Struktur durch herausgeschleudertes Bodenmaterial“ und „Überschneidung des Kraters mit der Grundbruchfigur“ wird hier nicht weiter eingegangen.

Die in diesem Kapitel abgebildeten Diagramme gelten unter den nachfolgend aufgelisteten Randbedingungen, die sämtlich eingehalten sein müssen:

- flachgegründete, oberirdische Bauwerke
- Baugrund: locker bis mitteldicht gelagerter, trockener Sand gemäß Anhang C.6
- Explosion:
 - Explosivstoff TNT mit einer Ladungsmasse $W = 125 \text{ kg}$
 - Tiefe des Ladungsschwerpunkts: $0,5 \text{ m} \leq d \leq 2,0 \text{ m}$ (dies entspricht skalierten Ladungstiefen $0,1 \text{ m/kg}^{1/3} \leq D_{\text{TNT}} \leq 0,4 \text{ m/kg}^{1/3}$ mit näherungsweise zugehörigen Erdstoßkopplungsfaktoren gemäß Abbildung 4.4 von $\sim 0,6 \leq f \leq 0,9$)

Eingangswerte zur Generierung der Diagramme sind die Zeitverläufe aus radialsymmetrischen 2D-Berechnungen für das Freifeld. Die Interaktion der Komponenten Explosivstoff, Baugrund und Luft wird somit berücksichtigt. Da die Entscheidungshilfe für unterschiedlichste Bauwerke gelten soll, wird eine entkoppelte Analyse gemäß Abschnitt 4.5.1 durchgeführt und das Bauwerk selbst nicht modelliert. Entsprechend kann die Interaktion von Erd- und Luftstoßwelle mit dem Bauwerk nicht erfasst werden. Es wird deshalb ausdrücklich darauf hingewiesen, dass das in Abschnitt 5.5 präsentierte Ergebnis lediglich einen Anhaltspunkt auf die in Abschnitt 1.1 formulierten Fragen gibt. Im Zweifelsfall und für eine Bemessung oder Schädigungsberechnung eines realen Bauwerks sollte eine vollständig gekoppelte Analyse durchgeführt werden. Für andere Ladungsmassen W und/oder einen anderen Baugrund müssen gesonderte Diagramme erstellt werden.

5.2 Komponenten der Entscheidungshilfe für unterschiedliche Schadensbilder

5.2.1 Kriterium 1 – „Luftstoß“

Mit zunehmender Tiefe des Ladungsschwerpunkts d bzw. d_{TNT} nimmt der für Kavernen- und Kraterbildung aufgewendete Teil der freigesetzten Explosionsenergie zu. Die Spitzenüberdrücke des Luftstoßes werden entsprechend kleiner. Zur Berücksichtigung des Luftstoßes wurden die folgenden zwei Optionen verfolgt:

- Für die Ermittlung der sicheren Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$ sowie der Grenzentfernung $r_{\text{hor, lim}}$ werden in einem ersten Ansatz lediglich die Spitzenüberdrücke betrachtet. Gemäß NATO-Manual AASTP-1 [105, pp. III-1-1] muss der Spitzenüberdruck in der sicheren Entfernung auf $p \leq 5$ kPa abgefallen sein. Tabelle 5-1 gibt für zusätzliche Werte des Spitzenüberdrucks das zu erwartende Schadensausmaß infolge Luftstoßwellen an. Allerdings gelten diese Werte für Kontaktexplosionen auf der Geländeoberfläche und stellen somit lediglich einen ersten Orientierungswert dar.
- Für eine (Vor-)Bemessung auf der Grundlage einer entkoppelten Analyse wird als Belastungsfunktion der zeitliche Verlauf des Überdrucks $p_1(t)$ benötigt. Diese wird anhand des Spitzenüberdrucks $p_{1, \text{max}}$ sowie einer (verallgemeinerten) mathematischen Funktion generiert, wodurch mittels Integration der spezifische Impuls I_{max} der positiven Überdruckphase berechnet werden kann. In Abschnitt 5.4.2.1 werden deshalb für eine Funktion $p_1(t)$ der Spitzenluftdruck $p_{1, \text{max}}$ und die weiteren Funktionsparameter für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT} angegeben. Dies ermöglicht Tragwerksplanern eine Dimensionierung und/oder Abschätzung der Schädigung einzelner Bauteile auf der Grundlage geeigneter p-I-Diagramme.

Tabelle 5-1 Schadensausmaß in Abhängigkeit des Freifeld-Spitzenüberdrucks in Luft;
Auszug aus Tabelle 5.1-1 von *Steidinger & Krüning* [106]

$p_{1, \text{max}}$ [kPa]	Schadensausmaß
2,5	Zerstörung von 50 % aller Fensterscheiben
5	Zerstörung von 75-100 % aller Fensterscheiben
10	Zerstörung von 100 % aller Fensterscheiben
20	Zerstörung gemauerter Wände
50	Zerstörung mehrgeschossiger Gebäude
70	Zerstörung von Stahlbetonwänden

5.2.2 Kriterium 2 – „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“

5.2.2.1 Prinzipielles Vorgehen

Eingangsdaten für das nachfolgend beschriebene und in Abbildung 5.1 dargestellte Verfahren sind die zeitlichen Verläufe der Partikelgeschwindigkeit in horizontaler und vertikaler Richtung $v_{1,hor}(t)$ und $v_{1,vert}(t)$ aus einer numerischen Freifeld-Berechnung. Für den maßgebenden Zeitverlauf $v_{1,i}(t)$ muss das *Fourier*-Spektrum $v_{i,Ampl}(f)$ gemäß Gleichung (5.1) mittels diskreter *Fourier*-Transformation⁴⁹ berechnet werden. Das Spektrum ist bezüglich seines maximalen Spektralwerts $v_{i,Ampl}(f^*)$ bei der Hauptfrequenz f^* (siehe Gleichung (5.2)) zu normieren. Die sichere Entfernung $r_{hor, safe}$ bzw. die Grenzentfernung $r_{hor, lim}$ für das Schadensbild „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“ ist erreicht, wenn Gleichung (5.3) eingehalten ist.

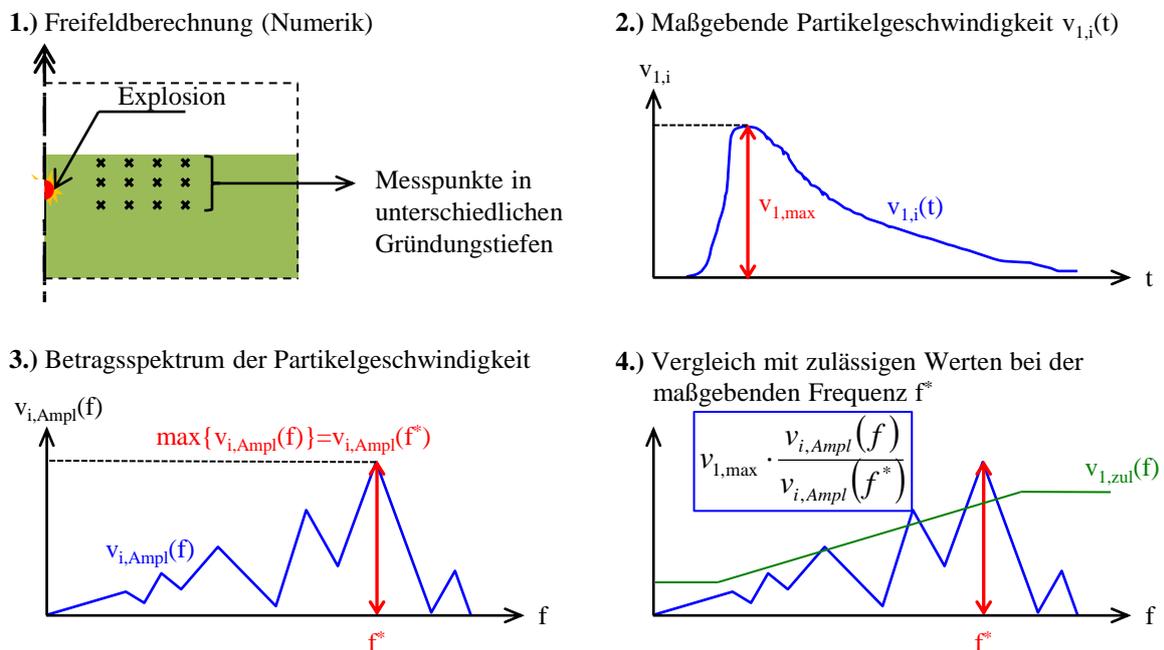


Abbildung 5.1 „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“ – Vorgehen in Anlehnung an DIN 4150-3 [107], Anhang D.2

$$v_{1,i}(t) = v_{1,i}[n] \Rightarrow DFT\{v_{1,i}[n]\} = v_{i,Ampl}[m] = v_{i,Ampl}(f) \quad (5.1)$$

$$\bar{v}_{i,Ampl}(f) = \frac{v_{i,Ampl}(f)}{\max\{v_{i,Ampl}(f)\}} = \frac{v_{i,Ampl}(f)}{v_{i,Ampl}(f^*)} \quad (5.2)$$

$$v_{1,max} \cdot \bar{v}_{i,Ampl}(f^*) \leq v_{1,zul}(f^*) \quad (5.3)$$

Gemäß DIN 4150-3 [107] ist der Zeitverlauf der Partikelgeschwindigkeitskomponente mit dem größten Spitzenwert maßgebend, das heißt es wird Gleichung (5.4) unterstellt. Der

⁴⁹ Die theoretischen Grundlagen der diskreten *Fourier*-Transformation sind in Anhang D dargestellt.

zulässige Spektralwert $v_{1,zul}(f)$ ist jedoch in der Regel keine Konstante sondern eine Funktion der Frequenz f . Entsprechend müsste das obige Verfahren für jede Partikelgeschwindigkeitskomponente – das heißt für $v_{1,hor}(t)$, $v_{1,vert}(t)$ und auch für die absolute Partikelgeschwindigkeit $v_{1,abs}(t)$ gemäß Gleichung (5.5) – separat ausgewertet werden.

$$v_{1,max} = \max \left\{ |v_{1,hor,max}|; |v_{1,vert,max}| \right\} \quad (5.4)$$

$$v_{1,abs}(t) = \sqrt{v_{1,hor}^2(t) + v_{1,vert}^2(t)} \quad (5.5)$$

Da die *Fourier*-Koeffizienten $v_{i,Ampl}(f)$ in Gleichung (5.1) in aller Regel komplex sind, muss die Auswertung gemäß den Gleichungen (5.2) und (5.3) mit den Beträgen $|v_{i,Ampl}(f)|$ durchgeführt werden.

5.2.2.2 Zulässige Partikel- und Fundamentalschwinggeschwindigkeiten aus der Literatur

Je nach Referenz existieren unterschiedliche, zulässige Werte der Partikelgeschwindigkeit $v_{1,zul}(f)$. In Modellversuchen simulierten *Lu et al.* [102], [108] das Schwingungsverhalten 1- bis 3-geschossiger Stahlbetonrahmentragwerke infolge Anregung der Gründungskonstruktionen in horizontaler und vertikaler Richtung. Auf Grundlage der experimentellen Daten leiteten sie zulässige Werte der Partikelgeschwindigkeit als Funktion der Hauptanregungsfrequenz ab. Die Frequenzabhängigkeit der vorherrschenden Versagensform – globales Versagen durch Anregung der Bauwerksgrundfrequenz sowie Versagen der einzelnen Bauteile Balken, Platten und Stützen – spiegelt sich in Gleichung (5.6) in unterschiedlichen Frequenzintervallen wieder.

$$\begin{aligned} 10 \text{ Hz} \leq f \leq 30 \text{ Hz} & \quad v_{1,zul}(f) = 0,3 \text{ m/s} \\ 30 \text{ Hz} \leq f \leq 80 \text{ Hz} & \quad v_{1,zul}(f) = 0,3 + 0,15 \cdot \frac{f - 30}{50} \text{ m/s} \\ 80 \text{ Hz} \leq f \leq 120 \text{ Hz} & \quad v_{1,zul}(f) = 0,45 + 0,75 \cdot \frac{f - 80}{40} \text{ m/s} \\ 120 \text{ Hz} \leq f & \quad v_{1,zul}(f) = 1,2 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die zulässigen Partikelgeschwindigkeiten gemäß AASTP-1 [105, pp. III-3-51] gelten für Tragwerke aus Stahlbeton. Die Frequenzintervalle in Gleichung (5.7) ähneln jenen der Gleichung (5.6). Die Werte 30 Hz und 100 Hz sind jedoch nicht exakt. Der rechnerische Schnittpunkt der Abschnitte 1 und 2 liegt bei $f_{1-2} = 30,93$ Hz, jener der Abschnitte 2 und 3 bei $f_{2-3} = 104,42$ Hz.

$$\begin{aligned} 10 \text{ Hz} \leq f \leq 30 \text{ Hz} & \quad v_{1,zul}(f) = 0,4 \text{ m/s} \\ 30 \text{ Hz} \leq f \leq 100 \text{ Hz} & \quad v_{1,zul}(f) = 0,0825 \cdot (f)^{0,46} \text{ m/s} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$100 \text{ Hz} \leq f \quad v_{1,zul}(f) = 0,7 \text{ m/s}$$

DIN 4150-3 [107] gibt für unterschiedliche Gebäudearten zulässige Werte der Fundamentalschwinggeschwindigkeit $v_{F,zul}$ an (siehe Tabelle 5-2). Die Fundamentalschwinggeschwindigkeit v_F kann mit Gleichung (5.8) annähernd aus der Partikelgeschwindigkeit v_1 im Freifeld berechnet werden. Der Übertragungsfaktor V_F ist vom Frequenzgehalt der Anregung v_1 und der Eigenfrequenz des Systems Boden-Bauwerk abhängig. Bei Gründung in Lockergestein ist nach DIN 4150-1 [109] Folgendes zu beachten:

- Für Spektralkomponenten mit einer Frequenz oberhalb der Boden-Bauwerks-Eigenfrequenz darf der Übertragungsfaktor zu $V_F = 0,5$ angesetzt werden.
- Der maximale Übertragungswert entsprechend dem Resonanzfall darf mit der Ersatzdämpfung D_0 des System „Bauwerk und Boden“ nach Gleichung (5.9) abgeschätzt werden.

$$v_F(t) = V_F \cdot v_1(t) \quad (5.8)$$

$$V_F = \frac{1}{2 \cdot D_0} \stackrel{D_0 \geq 0,25}{\leq} 2 \quad (5.9)$$

Tabelle 5-2 Zulässige Fundamentalschwinggeschwindigkeiten $v_{F,zul}$ gemäß DIN 4150-3 [107]

	$v_{F,zul}(f)$ in [mm/s]	
	Wohngebäude (Mauerwerk)	Industriebauten (Stahl, Stahlbeton)
$1 \text{ Hz} \leq f < 10 \text{ Hz}$	5,0	20,0
$10 \text{ Hz} \leq f < 50 \text{ Hz}$	$2,5 + 0,25 \cdot f$	$15 + 0,5 \cdot f$
$50 \text{ Hz} \leq f < 100 \text{ Hz}$	$10 + 0,1 \cdot f$	$30 + 0,2 \cdot f$
$100 \text{ Hz} \leq f$	20,0	50,0

In Abbildung 5.2 sind die zulässigen Partikelgeschwindigkeiten $v_{1,zul}(f)$ nach *Lu et al.* [108] und AASTP-1 [105] den zulässigen Fundamentalschwinggeschwindigkeiten $v_{F,zul}(f)$ der DIN 4150-3 [107] gegenübergestellt. Hauptgrund für die deutlich kleineren Werte gemäß DIN 4150-3 [107] ist, dass in AASTP-1 [105] eine Schädigung der tragenden Struktur zugelassen wird, die einer Steifigkeitsabnahme von 40 % entspricht. Das Kriterium nach *Lu et al.* [108] gilt für Beanspruchungen bis hin zu sichtbaren Rissen. Zudem wurde in den Rütteltischversuchen eine klare Abnahme aller Bauteileigenfrequenzen registriert, die ungefähr derselben Schädigung wie in AASTP-1 [105] entspricht. Demgegenüber werden bei Verwendung der Grenzwerte nach DIN 4150-3 [107] jegliche Schäden ausgeschlossen. Gleichwohl sind bei einer Überschreitung der Grenzwerte nicht zwangsläufig Schäden zu

erwarten. *Lu et al.* [102] weisen darauf hin, dass der Großteil der Grenzwerte in Normen und Regelwerken auf Beobachtungen an relativ alten Gebäuden basiert. Entsprechend sind die Grenzwerte nach DIN 4150-3 [107] am konservativsten, wobei jedoch keine allgemeine Aussage möglich ist, wie weit diese Grenzwerte auf der sicheren Seite liegen. Im Sinne einer Einteilung in „sichere Entfernung“ und eine „Grenzentfernung für beschädigtes Bauwerk mit Resttragfähigkeit“ sind die unterschiedlichen Grenzwerte jedoch sinnvoll.

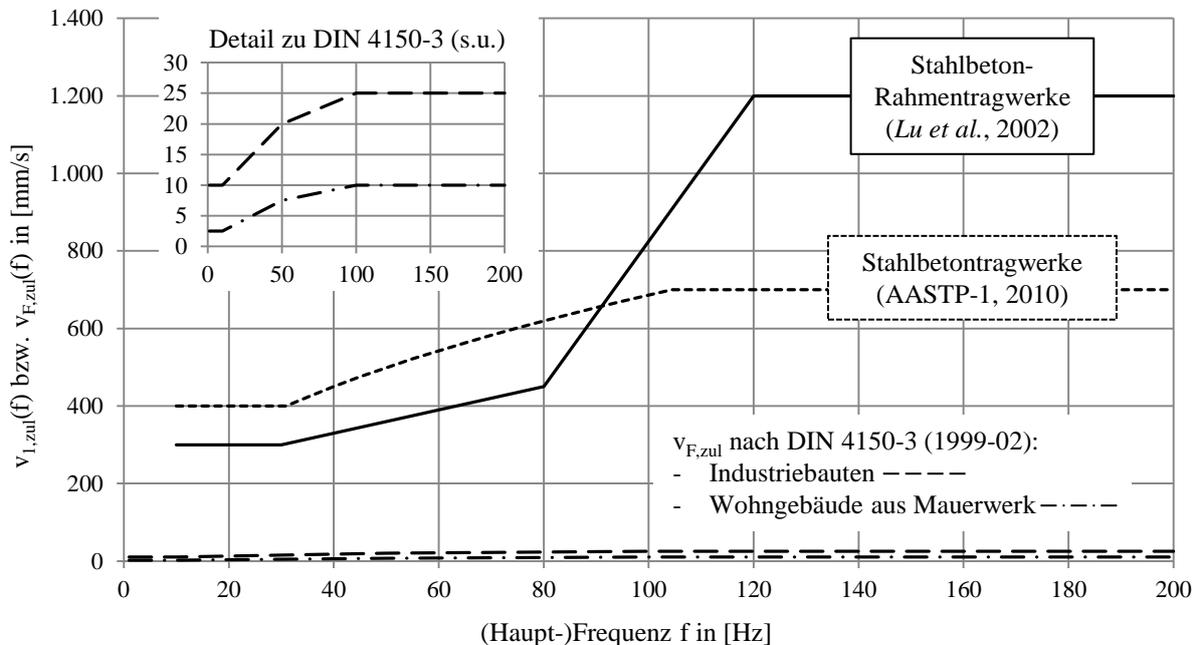


Abbildung 5.2 Zulässige Partikel- und Fundamentgeschwindigkeitsspektren $v_{1,zul}(f)$ nach *Lu et al.* [108] und AASTP-1 [105] sowie $v_{F,zul}(f)$ nach DIN 4150-3 [107]

5.2.3 Kriterium 3 – „Unzulässige Winkelverdrehung infolge Sackungen“

Für die Ermittlung der sicheren Entfernung $r_{hor, safe}$ sowie der Grenzentfernung $r_{hor, lim}$ im Hinblick auf das Schadensbild „Unzulässige Winkelverdrehung der Fundamente infolge Sackungen“ wird der Umstand ausgenutzt, dass Sackungen infolge dynamischer Beanspruchung des Bodens wie z.B. bei zyklischer, dynamischer Anregung unter Maschinenfundamenten oder Verkehrswegen, bei Erdbeben oder auch im Fernfeld von Explosionen überwiegend durch Schubverzerrungen beim Durchgang der Scherwellen ausgelöst werden [110], [111].

5.2.3.1 Zusammenhang zwischen dynamischer Scherung und Sackungen

Vuketic [110] wertete eine Fülle experimenteller Daten anderer Forscher zum Verhalten unterschiedlichster Böden unter zyklischer Scherbeanspruchung aus. Demnach existieren unter dynamischer bzw. zyklischer Belastung zwei unterschiedliche Schubverzerrungsgrenzwerte – die sogenannte lineare zyklische Grenzscherung γ_{tl} sowie die volumetrische zyklische Grenzscherung γ_{tv} mit $\gamma_{tv} > \gamma_{tl}$. Je nach Größe der dem Boden aufgezwungenen Schubverzerrung γ treten die folgenden Effekte auf:

- $\gamma < \gamma_{tl}$: Der Boden verhält sich nahezu linear elastisch und für das Verhältnis aus Sekantenschubmodul G_s und Anfangstangentenschubmodul G_{max} gilt $G_s/G_{max} \geq 0,99$.
- $\gamma_{tl} < \gamma < \gamma_{tv}$: Bleibende Änderungen innerhalb des Korngerüsts treten praktisch nicht auf. Entsprechend bilden sich bei zyklischer Scherbeanspruchung vollgesättigter Böden unter undrainierten Bedingungen keine Porenwasserüberdrücke. Unter drainierten Bedingungen sind die plastischen volumetrischen Verzerrungen in trockenen, teilgesättigten oder gesättigten Böden vernachlässigbar klein [110].
- $\gamma > \gamma_{tv}$: Die Bodenmikrostruktur wird dauerhaft gestört, und die Bodensteifigkeit nimmt ab. Bei zyklischer Scherbeanspruchung vollgesättigter, normalkonsolidierter Böden unter undrainierten Bedingungen entstehen bleibende Porenwasserüberdrücke⁵⁰. Die Steifigkeit nimmt entsprechend ab, und es kann sogar zur Verflüssigung kohäsionsloser Böden kommen [112]. Trockene, teilgesättigte oder gesättigte Böden unter drainierten Bedingungen erfahren plastische volumetrische Verzerrungen. Das nichtlineare, elasto-plastische Verhalten muss in der Berechnung berücksichtigt werden.

Das obige Phänomen ist im allseits bekannten Diagramm nach Abbildung 5.3 dargestellt, das unter anderem in den Empfehlungen des Arbeitskreises „Baugrunddynamik“ [113] nachgeschlagen werden kann.

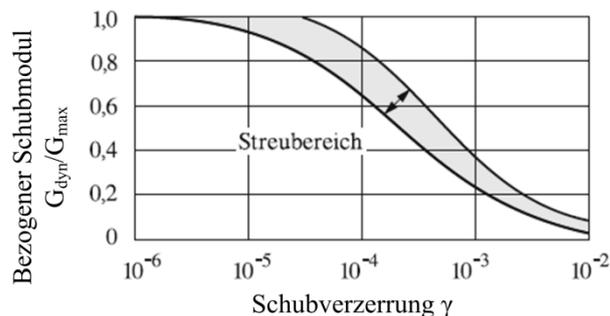


Abbildung 5.3 Normierter Schubmodul in Abhängigkeit der dynamischen Schubverzerrungsamplitude γ ; aus [114]

Im Allgemeinen nimmt die volumetrische zyklische Grenzscherung γ_{tv} mit kleiner werdender Korngröße zu. Maßgebender Parameter ist die Plastizitätszahl I_p , und die volumetrische zyklische Grenzscherung γ_{tv} nimmt mit I_p zu. Für rollige Böden ist der Einfluss der Plastizitätszahl durch $I_p = 0$ zu berücksichtigen. Mit steigendem Überkonsolidierungsgrad OCR und steigender bezogener Lagerungsdichte I_D nimmt γ_{tv} leicht zu, wobei diese Einflüsse aus ingenieurpraktischer Sicht vernachlässigbar sind [110], [112]. 2004 führten *Hsu & Vuketic* [111] eigene zyklische, direkte Scherversuche an Sanden und Tonen durch. Anhand der Sande wurde der Einfluss des Anfangssättigungsgrads S_{r0} untersucht. Bei den Tonen wurde die Plastizitätszahl I_p als Hauptparameter variiert. Die ursprüngliche Aussage, wonach γ_{tv} hauptsächlich eine Funktion von I_p ist, konnte bestätigt werden. Für Sande konnte weder ein Einfluss des Anfangssättigungsgrads S_{r0} noch der Konsolidationsspannung auf die

⁵⁰ Mit zunehmendem Überkonsolidierungsgrad treten bei kleinen Schubverzerrungen negative Porenwasserüberdrücke auf.

Grenzscherung γ_{tv} nachgewiesen werden. Die Aussagen dieses Absatzes gelten analog für die lineare zyklische Grenzscherung γ_{ti} , die annähernd parallel zu γ_{tv} verläuft.

Die zahlreichen von *Vuketic* [110] aus der Literatur zusammengetragenen Versuchsergebnisse unterliegen einer gewissen Streubreite, weshalb *Hu et al.* [112] die Begriffe der unteren Grenzscherung $\gamma_{tv,U}$ und der mittleren Grenzscherung $\gamma_{tv,M}$ eingeführt haben. Von *Hsu & Vuketic* [111] wurde die Streubreite nochmals verkleinert. Zu Abbildung 5.4 analoge Kurven $\gamma_{ti}(I_p)$ und $\gamma_{tv}(I_p)$ sind zwar weit verbreitet (siehe unter Anderem *Göbel & Lieberenz* [115] sowie *Vrettos* [116]), eine Veröffentlichung von Formeln ist jedoch nicht bekannt. Deshalb wurden die Kurven aus den ursprünglichen Veröffentlichungen von *Vuketic* [110] sowie *Hsu & Vuketic* [111] in CAD ausgemessen und mittels Ausgleichsrechnung durch Polynome bis zum sechsten Grad nach Gleichung (5.10) angenähert. Die zugehörigen Polynomkoeffizienten sind in Tabelle 5-3 aufgelistet. Die Koeffizienten $g = \gamma_{ti}(I_p=0)$ stimmen sehr gut mit den folgenden, von *Hu et al.* [112] angegebenen Werten überein:

- $\gamma_{ti}(I_p=0) \approx 3,5 \cdot 10^{-6} = 3,5 \cdot 10^{-4} \%$
- $\gamma_{tv,M}(I_p=0) \approx 1,3 \cdot 10^{-4} = 1,3 \cdot 10^{-2} \%$

$$\gamma_{ti/v} = a \cdot I_p^6 + b \cdot I_p^5 + c \cdot I_p^4 + d \cdot I_p^3 + e \cdot I_p^2 + f \cdot I_p + g \quad (5.10)$$

Tabelle 5-3 Polynomkoeffizienten für $\gamma_{ti}(I_p)$ und $\gamma_{tv}(I_p)$ gemäß Gleichung (5.10)

	a	b	c	d	e	f	g	Referenz
γ_{ti}	-2,2402 $\cdot 10^{-3}$	3,1518 $\cdot 10^{-3}$	-1,5849 $\cdot 10^{-3}$	3,9358 $\cdot 10^{-4}$	3,7559 $\cdot 10^{-8}$	2,8485 $\cdot 10^{-5}$	3,3426 $\cdot 10^{-6}$	
$\gamma_{tv,U}$	2,8798 $\cdot 10^{-3}$	-6,5782 $\cdot 10^{-3}$	4,1862 $\cdot 10^{-3}$	-2,6785 $\cdot 10^{-5}$	5,2629 $\cdot 10^{-4}$	4,0644 $\cdot 10^{-4}$	6,0238 $\cdot 10^{-5}$	[110]
$\gamma_{tv,M}$	1,1565 $\cdot 10^{-1}$	-2,0417 $\cdot 10^{-1}$	1,2838 $\cdot 10^{-1}$	-3,2967 $\cdot 10^{-2}$	4,9447 $\cdot 10^{-3}$	8,7783 $\cdot 10^{-4}$	1,1904 $\cdot 10^{-4}$	
$\gamma_{tv,O}$	-4,5175 $\cdot 10^{-1}$	7,1153 $\cdot 10^{-1}$	-3,9895 $\cdot 10^{-1}$	9,2668 $\cdot 10^{-2}$	-3,1769 $\cdot 10^{-3}$	2,0554 $\cdot 10^{-3}$	2,2091 $\cdot 10^{-4}$	
$\gamma_{tv,U}^*)$	–	–	8,7528 $\cdot 10^{-3}$	-5,2604 $\cdot 10^{-3}$	2,1412 $\cdot 10^{-3}$	3,6287 $\cdot 10^{-4}$	7,9520 $\cdot 10^{-5}$	
$\gamma_{tv,M}$	–	–	–	-1,9112 $\cdot 10^{-3}$	3,4639 $\cdot 10^{-3}$	8,4342 $\cdot 10^{-4}$	1,3090 $\cdot 10^{-4}$	[111]
$\gamma_{tv,O}$	–	–	–	-3,8138 $\cdot 10^{-3}$	5,7495 $\cdot 10^{-3}$	1,2714 $\cdot 10^{-3}$	1,8228 $\cdot 10^{-4}$	
*) Gültigkeitsbereich $0 \leq I_p \leq 0,35$								

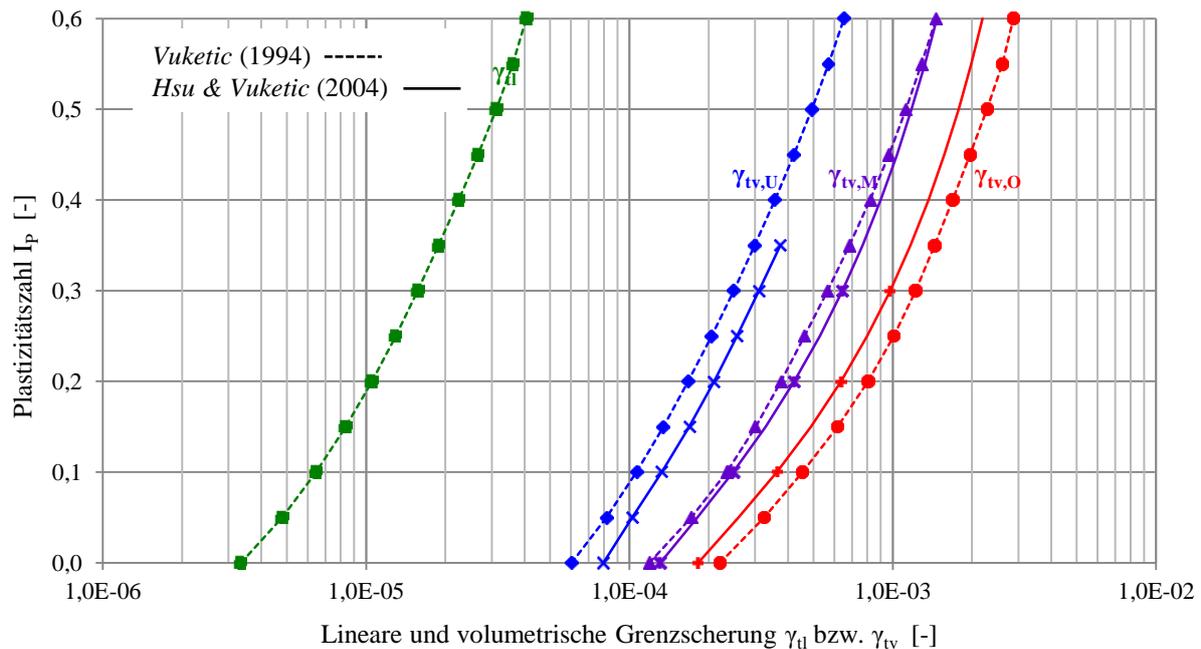


Abbildung 5.4 Polynomische Funktionen $\gamma_{tl}(I_p)$ sowie $\gamma_{tv}(I_p)$ auf Basis der Diagramme von *Vuketic* [110] sowie *Hsu & Vuketic* [111]

Eine Anwendung des Kriteriums der Grenzscherungen setzt generell eine gewisse Schwingungsempfindlichkeit und bei Sanden eine Neigung zu Kornumlagerungen voraus. Entsprechende Kriterien sind z.B. in RiL 836.3001 [117], Abschnitt 5 zu finden. Sande sind demnach als schwingungsempfindlich einzustufen, wenn ihre Ungleichförmigkeitszahl $U < 2$ ist und die bezogene Lagerungsdichte $I_D < 0,5$ beträgt. Die numerischen Berechnungen in Abschnitt 5.3 wurden für einen enggestuften Sand mit einer Ungleichförmigkeitszahl $U \approx 2$ und einem Porenanteil $n_0 = 0,40$ sowie einer Porenzahl $e_0 = 0,67$ durchgeführt. Mit den typischen Kennwerten $n_{\max} = 0,46$ bzw. $e_{\max} = 0,86$ für locker gelagerte Sande und $n_{\min} = 0,27$ bzw. $e_{\min} = 0,37$ für dicht gelagerte Sande⁵¹ gemäß *Kolybas* [118, p. 38] beträgt die bezogene Lagerungsdichte $I_D = 0,39 < 0,5$. Der betrachtete Sand ist somit nach RiL 836.3001 [117] als locker gelagert und schwingungsempfindlich einzustufen.

5.2.3.2 Prinzipielles Vorgehen

Aus der numerischen Simulation kann für jeden Messpunkt die Schubverzerrungsrate $d\varepsilon_{xy}/dt$ (5.11) ausgelesen werden. Aus Integration über den berechneten Zeitraum folgt die Schubverzerrung ε_{xy} (5.12)⁵². Der Vergleich der Scherung γ_{xy} mit einem zulässigen Wert γ_{zul} nach Gleichung (5.13) erlaubt eine Aussage, ob und in welchem Maß plastische Verzerrungen aufgrund von Kornumlagerungen zu einer dichteren Packung und Sackungen auftreten.

⁵¹ Diese Werte entsprechen annähernd jenen der einfach kubischen sowie der kubisch flächenzentrierten Kugelpackung gemäß Abbildung 3.15, S. 75.

⁵² Für Größenordnungen im Bereich der Grenzwerte nach Tabelle 5-3 entspricht die integrierte Schubverzerrung ε_{xy} (5.12) annähernd der linearisierten Schubverzerrung (A-41).

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \right) \quad (5.11)$$

$$\varepsilon_{xy} = \sum_n \dot{\varepsilon}_{xy}^{(n)} \cdot (t^{(n+1)} - t^{(n)}) \quad (5.12)$$

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot \varepsilon_{xy} \leq \gamma_{zul} \quad (5.13)$$

Zur quantitativen Ermittlung der Sackungen wurden die folgenden zusätzlichen Annahmen getroffen:

- Die Volumenabnahme entspricht der Abnahme des Porenvolumens. Das Korngerüst erfährt infolge der Kornumlagerungen keine Deformationen.
- Zwischen γ_{xy} und dem Porenanteil n_1 besteht der lineare Zusammenhang (5.14). Für Schubverzerrungen $\gamma_{xy} \geq \gamma_{tv,M}$ erfahren die Bodenpartikel eine Kornumlagerung zur größtmöglichen Lagerungsdichte. Dies entspricht einer Sackung in vertikaler Richtung mit einer Abnahme des Porenanteils auf n_{\min} . Für $\gamma_{xy} \leq \gamma_{tl}$ treten keine Sackung auf, und der Porenanteil beträgt unverändert n_0 .

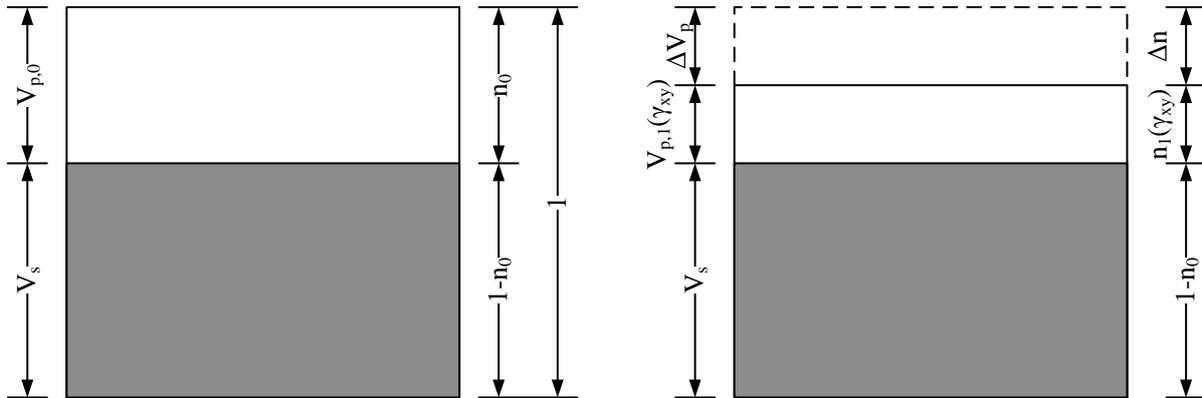
(a) Anfangszustand(b) Zustand nach Scherbeanspruchung mit $\gamma_{xy} > \gamma_{tl}$ 

Abbildung 5.5 Veränderung des Porenanteils infolge Sackung

Damit und mit Abbildung 5.5 kann die vertikale Verzerrung ε_x^{53} in einem betrachteten Punkt gemäß Gleichung (5.15) berechnet werden. Integration über die Tiefe in einer bestimmten horizontalen Entfernung r_{hor} vom Explosionszentrum führt auf die Sackung s (5.16).

$$n_1(\gamma_{xy}) = n_{\min} + \frac{\gamma_{xy} - \gamma_{tv,M}}{\gamma_{tl} - \gamma_{tv,M}} \cdot (n_0 - n_{\min}) = n_0 - \frac{\gamma_{xy} - \gamma_{tl}}{\gamma_{tv,M} - \gamma_{tl}} \cdot (n_0 - n_{\min}) \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{V_{p,0} - V_{p,1}(\gamma_{xy})}{V_s + V_{p,0}} = n_0 - n_1(\gamma_{xy}) \quad (5.15)$$

⁵³ Die Koordinate x ist in radialsymmetrischen 2D-Berechnungen mit AUTODYN standardmäßig die Symmetrieachse und folglich die vertikale Richtung.

$$s = \int_x \varepsilon_x dx \quad (5.16)$$

Aus den Setzungsgrößen gemäß Abbildung 5.6 wie der Setzung s , der Verkantung α sowie der Winkelverdrehung β können unzulässige Beanspruchungen im Tragwerk entstehen. Eine sehr ausführliche Zusammenstellung zulässiger Werte für die Setzung s und die Winkelverdrehung β kann bei *Fischer* [119] nachgeschlagen werden. Für die Auswertung im Hinblick auf das Schadensbild „Unzulässige Winkelverdrehung der Fundamente infolge Sackungen“ in Abschnitt 5.4.4 wurde lediglich die Winkelverdrehung β als in der Regel maßgebende Größe betrachtet. Dazu wurden die in DIN EN 1997-1 [120], Anhang H angegebenen Werte von $\tan \beta_{SLS} = 1/500$ für das Kriterium der Schadensfreiheit in der sicheren Entfernung $r_{hor, safe}$ sowie $\tan \beta_{ULS} = 1/150$ für das Erreichen eines Grenzzustands der Tragfähigkeit in der Grenzentfernung $r_{hor, lim}$ verwendet.

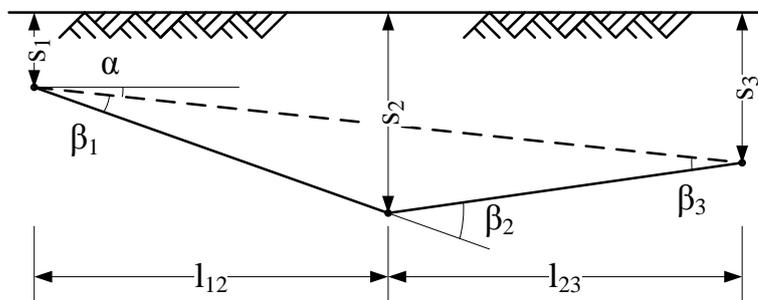


Abbildung 5.6
Definitionen der
Setzung s , der
Verkantung α sowie der
Winkelverdrehung β

5.3 Simulationen mit AUTODYN

Grundlage für die Generierung der Entscheidungshilfe sind die Zeitverläufe des Drucks p , der Partikelgeschwindigkeit $v_{x/y}$ sowie der Schubverzerrung γ_{xy} . Diese wurden mit dem kommerziellen Hydrocode AUTODYN, Version R15 ermittelt. Hinsichtlich der implementierten Routinen wird auf das AUTODYN Theory Manual [121] und den ANSYS Mechanical User's Guide [122] verwiesen. Die relevanten Abschnitte aus obigen Handbüchern sind auch in den Dissertationen von *Fišerova* [123] und *Showichen* [124] zusammengefasst. Eine Einführung in die allgemeine Theorie von Hydrocodes geben *Anderson* [125], *Zukas* [17] und *Wilkins* [126].

5.3.1 Materialmodelle

5.3.1.1 Luft

Die Luft wurde als ideales Gas beschrieben. In AUTODYN ist die zugehörige Zustandsgleichung in der Form (5.17) implementiert⁵⁴. Für die Berechnung wurden die Standardwerte von $\rho_0 = 1,225 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, $T = 288,15 \text{ K}$ ($= 15^\circ\text{C}$) und $p_0 = 101,325 \text{ kPa}$ angesetzt. Mit einem Isentropenexponent $\kappa = 1,4$ folgt daraus die spezifische innere Energie

⁵⁴ Für eine Herleitung der Zustandsgleichung idealer Gase wird auf das AUTODYN Theory Manual [15, p. 147f] sowie *Stephan et al.* [19, pp. 31-39 & 89-105] verwiesen.

$e_0 = 206.785,7 \text{ J/kg}$. Da lediglich der Luftüberdruck interessiert, wurde der Druckversatz zu $p_{\text{shift}} = p_0 = 101,325 \text{ kPa}$ gesetzt.

$$p_1 = (\kappa - 1) \cdot \rho_1 \cdot e_1 + p_{\text{shift}} \quad (5.17)$$

5.3.1.2 Explosivstoff TNT

Die Berechnungen wurden für den Standardexplosivstoff TNT durchgeführt. Dazu wurde das in der AUTODYN-Materialbibliothek enthaltene Material TNT-2 verwendet. Die Materialmodellierung sowohl des unzersetzten Explosivstoffs als auch der gasförmigen Reaktionsprodukte erfolgt dabei mit der vielfach verwendeten JWL-Zustandsgleichung (5.18)⁵⁵ nach *Jones, Wilkins* und *Lee*. Die Parameter A , B , R_1 , R_2 und ω sind vom jeweiligen Explosivstoff abhängig und werden experimentell ermittelt. Alternativ können sie auch in entsprechenden Tabellenwerken wie z.B. jenem von *Dobratz & Crawford* [127] nachgeschlagen werden.

$$p = A \cdot \left(1 - \frac{\omega \rho}{R_1}\right) \cdot \exp\left(-\frac{R_1}{\rho}\right) + B \cdot \left(1 - \frac{\omega \rho}{R_2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{R_2}{\rho}\right) + \omega \cdot \rho \cdot e \quad (5.18)$$

Für große Volumendehnungen der Explosionsgase können die ersten beiden Terme in Gleichung (5.18) vernachlässigt werden, und die JWL-Zustandsgleichung geht in die ideale Gasgleichung (5.17) über. Für Volumendehnungen mit einem Faktor von ca. 10 bezogen auf das Anfangsvolumen V_0 des unzersetzten Explosivstoffs sollte deshalb die JWL-Zustandsgleichung auf die ideale Gasgleichung umgestellt werden, wobei zwischen dem Isentropenexponenten κ und dem Parameter ω der Zusammenhang nach Gleichung (5.19) besteht [128, p. 18f]. In der verwendeten Programmversion AUTODYN, R15 erfolgt dies automatisch.

$$\kappa = \omega + 1 \quad (5.19)$$

5.3.1.3 Sand

Als Boden wurde ein locker bis mitteldicht gelagerter, trockener Sand auf der Basis des in der AUTODYN-Materialbibliothek mitgelieferten SAND-Modells nach *Laine & Sandvik* [12] mit der „Compaction EOS Linear“, dem „Mo Granular“-Festigkeitsmodell und dem „Tensile Pressure Failure“-Versagenskriterium unterstellt. Das Material wird als SAND_Mod3a bezeichnet. Hinsichtlich der Vorzüge dieses Modells, der Änderungen im Vergleich zum ursprünglichen SAND-Modell sowie der verwendeten Eingabeparameter wird auf Anhang C verwiesen.

Ein Vergleich der in 1D-Wedge-Modellen (siehe Abschnitt 5.3.3) berechneten Maximalwerte des Drucks $p_{1,\text{max}}$ und der Partikelgeschwindigkeit $v_{1,\text{max}}$ mit den empirischen Modellen nach

⁵⁵ Zur Vermeidung von Verwechslungen zwischen der *Eulerschen* Zahl und der spezifischen inneren Energie e ist die natürliche Exponentialfunktion hier mittels $\exp(\dots)$ dargestellt.

Drake & Little [3] sowie Drake et al. [96] ist in den folgenden zwei Abbildungen dargestellt. Für beide Größen wird die beste Übereinstimmung für mitteldicht gelagerten, trockenen Sand und das Modell von Drake et al. [96] erzielt.

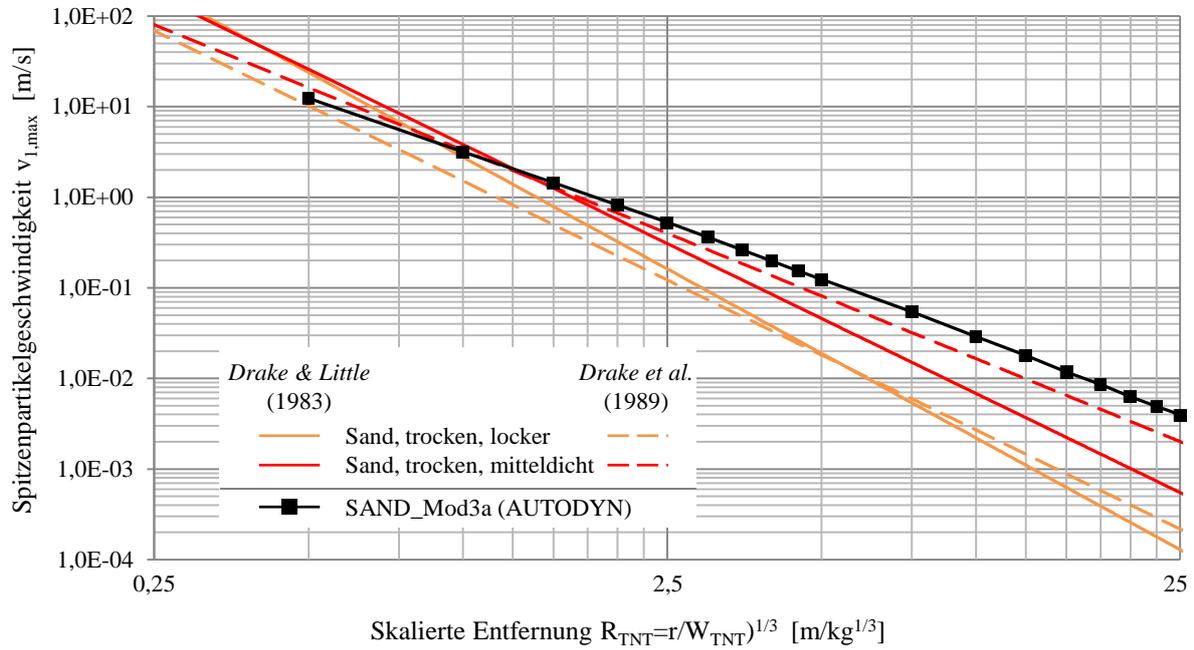


Abbildung 5.7 Vergleich SAND_Mod3a ↔ Drakesche Modelle – Maximale Partikelgeschwindigkeit $v_{1,max}(R_{TNT})$

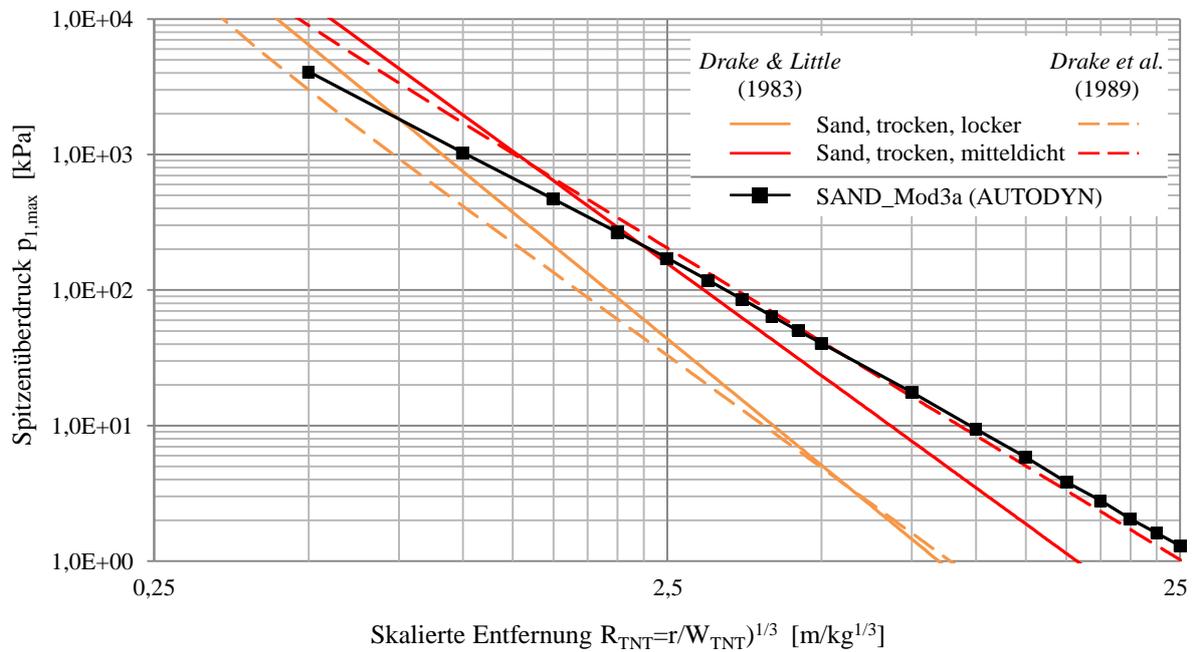


Abbildung 5.8 Vergleich SAND_Mod3a ↔ Drakesche Modelle – Spitzenüberdruck $p_{1,max}(R_{TNT})$

5.3.2 Gleichungslöser und verwendete Einstellungen

Hydrocodes sind explizite Gleichungslöser, welche zur Berechnung instationärer, dynamischer Problemstellungen die Bilanzgleichungen der Masse, des Impulses und der Energie als Erhaltungsgleichungen unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen lösen [129]. Aufgrund der großen Verzerrungen im Nahfeld der Explosion wurden alle Berechnungen mit dem „Multi-Material Euler“ Solver durchgeführt. Die Bildung der Differenzenquotienten erfolgt dabei gemäß dem Upwind-Schema [123, p. 43]. Werden die Massenbilanz (5.20), die Impulsbilanz (5.21) und die Energiebilanz (5.22)⁵⁶ wie in Gleichung (5.23) als Erhaltungsgleichungen ohne äußere Quellterme zusammengefasst, stellt Gleichung (5.24) das zugehörige Upwind-Schema dar. Der vordere Term ist die mittels Vorwärts-Differenzenquotient approximierten lokale Zeitableitung, und der hintere Term stellt die mittels Rückwärts-Differenzenquotient berechnete Ableitung bezüglich der Ortskoordinaten dar. Beide Differenzenquotienten sind in erster Ordnung genau, weshalb eine feinere Diskretisierung und damit kleinere Zeitschritte als mit dem *Lagrange*-Solver erforderlich sind. Für genauere Ausführungen wird unter anderem auf Kapitel 5.5 im Buch von *Hiermaier* [18] verwiesen.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} m &= \frac{D}{Dt} (\rho dV) = \frac{D}{Dt} \rho + \rho (\operatorname{div} \mathbf{v}) = \frac{D}{Dt} \rho + \rho (\operatorname{grad} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\operatorname{grad} \rho) + \rho (\operatorname{grad} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{grad} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad \rho \cdot \ddot{x}_i = \rho \cdot \dot{v}_i = \sigma_{j,i} + \rho \cdot b_i \quad (5.21)$$

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \dot{q} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + r - \operatorname{grad} \cdot \mathbf{h} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad} \psi = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) + \frac{\psi_i^n - \psi_i^{n-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) = 0 \quad (5.24)$$

Für die Optionen des Gleichungslösers wie z.B. die künstliche Viskosität wurden größtenteils die Standardeinstellungen beibehalten. Lediglich der Timestep-Safety-Factor wurde von 2/3 auf 0,5 reduziert. Des Weiteren wurde teilweise die Vorgabe einer maximalen Partikelgeschwindigkeit erforderlich, um die Fehlermeldung „Euler cell over-emptied“ und/oder unverhältnismäßig kleine Zeitschritte zu vermeiden.

5.3.3 1D-Wedge-Berechnungen und Konvergenz

Für die Konvergenzbetrachtung ist der Sand maßgebend, da nur dieser ein Festigkeitsmodell verwendet. Die erforderlichen Netzabmessungen wurden in 1D-Wedge-Berechnungen

⁵⁶ Hinsichtlich der Herleitung wird auf die Gleichungen (A-101), (A-105) und (A-116) in Anhang A verwiesen.

ermittelt. Dabei wird eine kugelförmige Wellenausbreitung im Vollraum simuliert, wobei lediglich ein radialsymmetrischer Ausschnitt einer Halbkreisebene modelliert wird (siehe Abbildung 5.9). Die Keilspitze wird vernachlässigt. Stattdessen ist ein Modellinnenradius r_i vorzugeben. Das 1D-Wedge-Modell stellt somit eine Hohlkugel dar. Die gewünschte Ladungsmasse sollte entsprechend durch Vorgabe eines angepassten Ladungsaußenradius $r_{a,TNT}$ berücksichtigt werden. Der Zündpunkt muss jedoch im Mittelpunkt der Hohlkugel angeordnet werden (nicht beim Innenradius r_i).

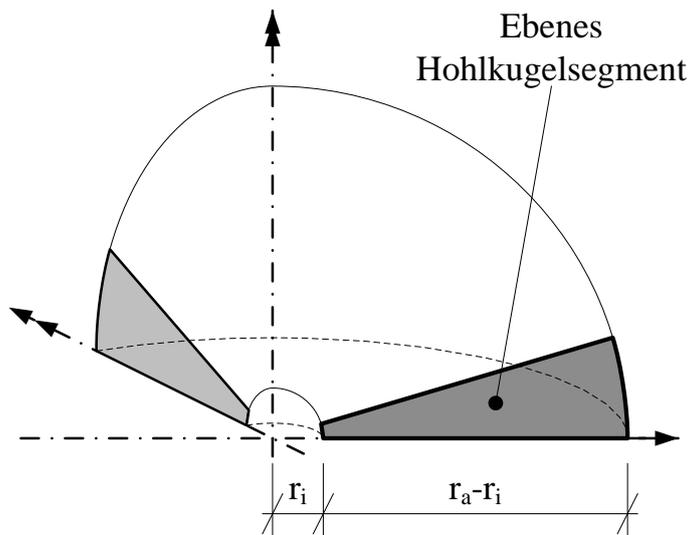


Abbildung 5.9 1D-Wedge-Modell mit ebenem Keilsegment für den Vollraum

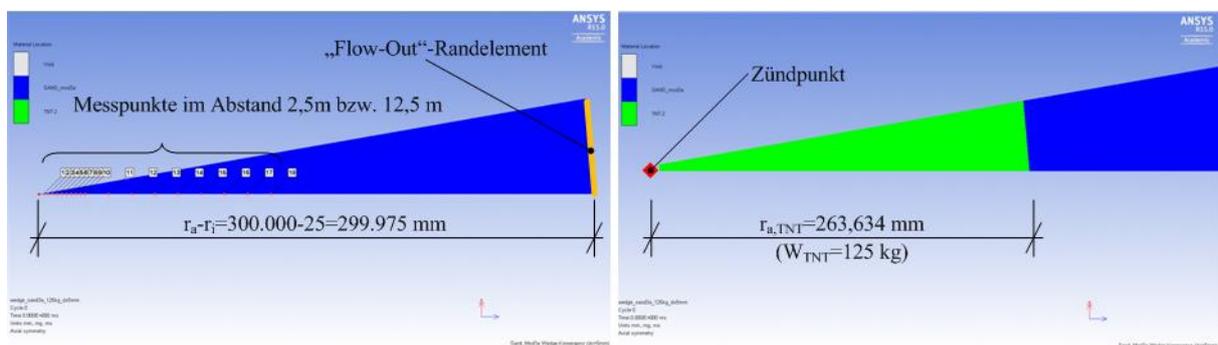


Abbildung 5.10 Konvergenzuntersuchung mit dem 1D-Wedge-Modell – Gesamtmodell (links), Modellspitze mit TNT-Ladung (rechts)

Für die Konvergenzuntersuchung wurde ein 1D-Wedge-Modell mit einem Innenradius $r_i = 25$ mm, einem Außenradius $r_a = 300$ m und einem Ladungsaußenradius $r_{a,TNT} = 263,634$ mm (entsprechend der Ladungsmasse $W_{TNT} = 125$ kg und der Dichte $\rho_0 = 1,63$ g/cm³) verwendet. Die Elementanzahl wurde schrittweise zwischen $n = 2.000$ und $n = 60.000$ variiert bei jeweils über das gesamte Modell konstanter Elementbreite dx . Dies entspricht Elementbreiten im Bereich $5 \text{ mm} \leq dx \leq 150 \text{ mm}$. Am äußeren Modellrand wurde ein „Flow-Out“-Randelement vorgegeben. Messpunkte wurden im Bereich $0 \leq x \leq 25$ m in einem Abstand von 2,5 m und im Bereich $25 \text{ m} \leq x \leq 125$ m mit jeweils 12,5 m Abstand angeordnet (siehe Abbildung 5.10). Hinsichtlich des „Flow-Out“-Randelementes ist

anzumerken, dass dieses bei dem verwendeten „Multi-Material Euler“ Solver den Massentransport infolge Partikelgeschwindigkeit $v_1 \neq 0$ aus dem Modell heraus ermöglichen soll. Aufgrund der Kopplung von Druck und Partikelgeschwindigkeit über die Impulserhaltung sollen damit Reflexionen am äußeren Modellrand unterbunden werden. Alternativ ist auch die Eingabe eines „Transmit“-Randelementes möglich, wobei AUTODYN nur die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Modellrand zu Null setzt. Die tangentielle Geschwindigkeitskomponente wird in das Modell zurück reflektiert. Beide Randelemente funktionieren nicht zuverlässig, weshalb einer Modellierungsstrategie mit genügend großem Auslaufbereich für die Welle der Vorzug gegeben wurde.

Abbildung 5.11 zeigt beispielhaft die berechneten Spitzendrücke $p_{1,max}$ für den Bereich $75 \text{ m} \leq x \leq 125 \text{ m}$. Für Elementbreiten $dx = 12,5 \text{ mm}$ ist die Lösung nahezu auskonvergiert. Neben den Maximalwerten müssen zusätzlich auch stets die Zeitverläufe betrachtet werden. Aus Abbildung 5.12 ist ersichtlich, dass für alle betrachteten Elementbreiten ein unterer Grenzwert $p_{1,lim}$ existiert, ab dem nur noch ein oszillierender Zeitverlauf berechnet wurde. Ab diesem Grenzwert scheint das gewählte Materialmodell mit „Compaction EOS Linear“, „Mo Granular“-Festigkeitsmodell und „Tensile Pressure Failure“-Versagenskriterium nicht mehr zu funktionieren. Für die Elementbreiten $dx = 12,5 \text{ mm}$ ist dies bei einem Druck von $p_{1,lim} \approx 0,3 \text{ kPa}$ der Fall. Zudem fallen die Oszillationen deutlich einheitlicher aus als bei der nächstgrößeren Elementbreite $dx = 15 \text{ mm}$. Für die 2D-Berechnungen wurde eine Elementbreite $dx = 12,5 \text{ mm}$ als vertretbarer Kompromiss zwischen Rechenaufwand und erforderlicher Genauigkeit bis hin zu sehr geringen Spannungen und Drücken betrachtet.

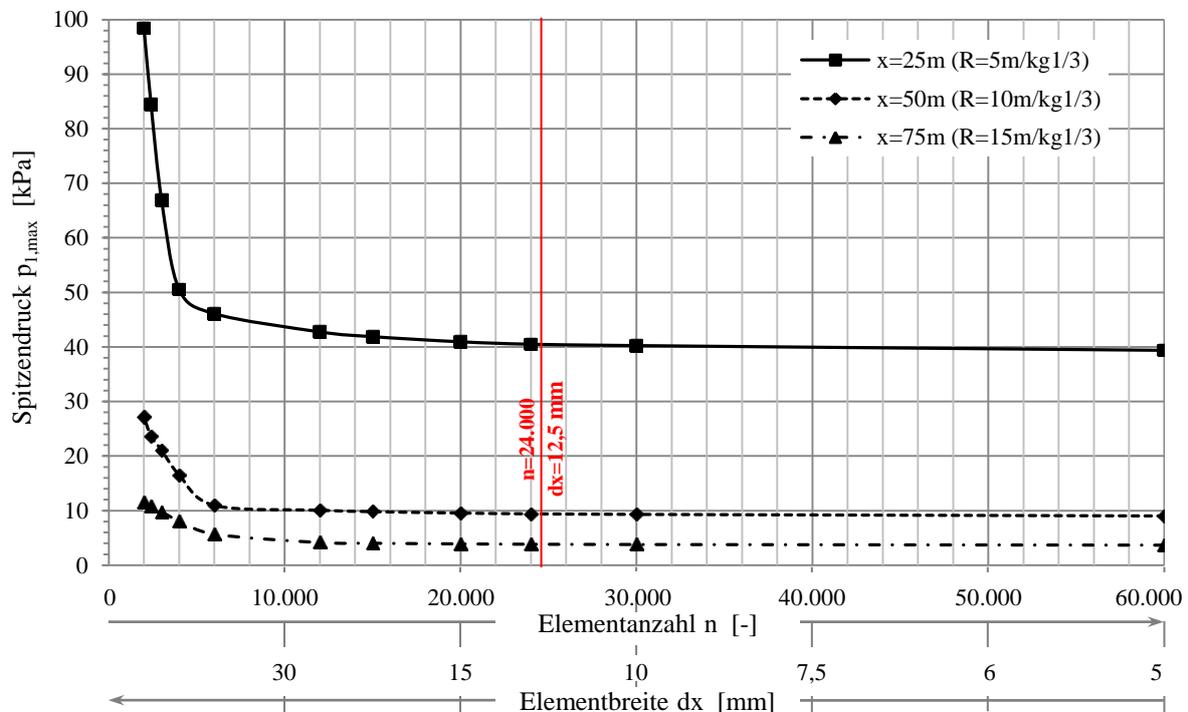


Abbildung 5.11 Spitzendrücke $p_{1,max}$ für Entfernungen $75 \text{ m} \leq x \leq 125 \text{ m}$ in Abhängigkeit der Elementanzahl n und der Elementbreite dx

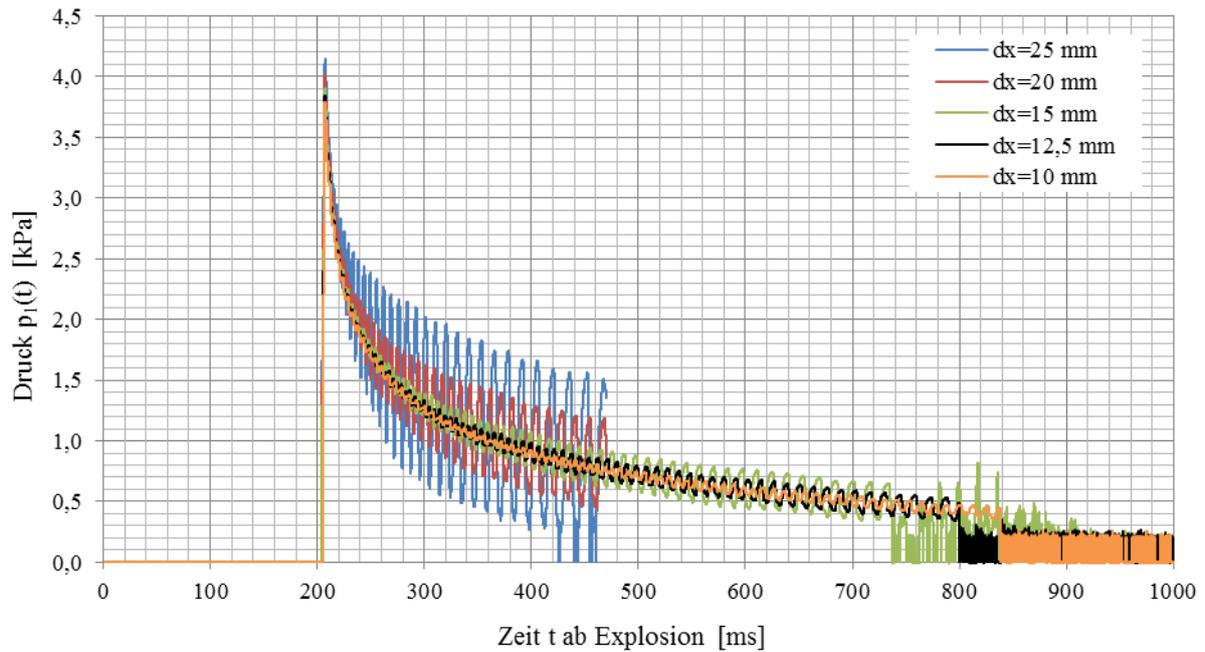


Abbildung 5.12 Druck-Zeitverläufe in der Entfernung $x = 75 \text{ m}$ ($R = 15 \text{ m/kg}^{1/3}$) in Abhängigkeit der Elementbreite dx

5.3.4 Modellierungsstrategie

5.3.4.1 Modellierungsansätze in der einschlägigen Literatur

Bei den Veröffentlichungen zu hochdynamischen Berechnungen in Zusammenhang mit explosionsinduzierten Erdstoßwellen handelt es sich größtenteils um Nachrechnungen klein- und großmaßstäblicher Explosionsversuche zur Kalibrierung des hochdynamischen Bodenverhaltens [130], [131], [132], [133], um Untersuchungen zur Kraterbildung [134], [135] oder um die Betrachtung der Auswirkungen von Minen [129], [136], [56]. Die äquivalenten TNT-Ladungsmassen liegen meist im Bereich von $W_{\text{TNT}} = 0,24\text{-}8,0 \text{ kg}$, und es wird größtenteils der „Multi-Material Euler“-Solver verwendet. Hinsichtlich der Modellierung weisen die oben genannten Veröffentlichungen die folgenden Gemeinsamkeiten auf:

- 2D-Modellierung, in der Regel unter Ausnutzung axialer Symmetrie
- Berechnung an einem Gesamtmodell mit über die Berechnungsdauer unveränderten Modell- und Elementabmessungen
- Anordnung von „Transmit“- oder „Flow-Out“-Randelementen an den äußeren Modellrändern zur Vermeidung ungewollter Reflexionen zurück in den relevanten Modellbereich
- Abstufung der Elementabmessungen (Zonierung) von den kleinsten Werten im Bereich des Explosivstoffs zu den größten Elementen am äußeren Modellrand⁵⁷

⁵⁷ In den oben angeführten Quellen wurden meistens Elemente mit $dx = dy = 8\text{-}25 \text{ mm}$ im relevanten Modellbereich eingesetzt. Die kleinste Elementabmessung betrug $dx = dy = 2 \text{ mm}$ [140].

Aufgrund der Berechnung an einem Gesamtmodell kann die Wellenausbreitung nur bis zum Übergang des fein vernetzten Modellbereichs in den Auslaufbereich betrachtet werden. Infolge der in AUTODYN maximal prozessierbare Zellenanzahl von $4 \cdot 10^6$ (siehe [137]) ist die Verfolgung der Welle in beliebige Entfernungen damit ausgeschlossen.

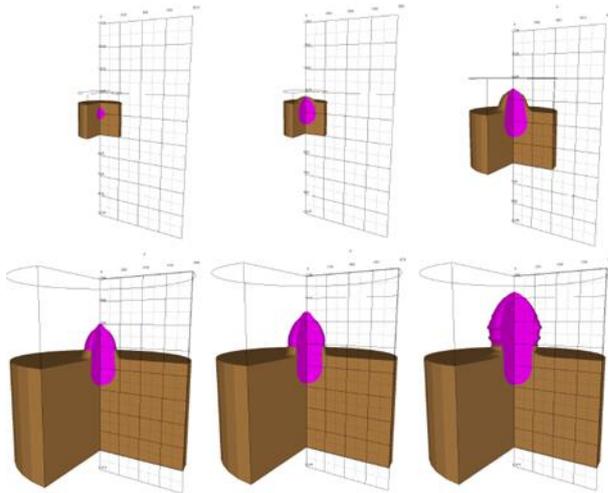


Abbildung 5.13
Radialsymmetrische
2D-Berechnung mit
sukzessivem
Remapping –
Vergrößerung des
Modellbereichs mit dem
Faktor 2 bei konstanter
Zellenanzahl; aus *Laine
& Larsen* [99]

Laine & Larsen [99] verfolgten mit der Methode des Remapping einen komplett anderen Modellierungsansatz (siehe Abbildung 5.13). Für ein erstes Modell mit sehr kleinen Abmessungen und entsprechend kleinen Elementlängen wurde die Geschwindigkeitsverteilung kurz vor Ankunft der Welle am äußeren Modellrand zwischengespeichert. Im zweiten Schritt wurde ein Modell mit größeren Abmessungen und einer etwas größeren Vernetzung erstellt, und die Geschwindigkeitsverteilung aus dem ersten Berechnungsschritt wurde als Anfangswert für die zweite Berechnungsstufe eingelesen. Im Gegensatz zu Randelementen werden mit diesem Ansatz Reflexionen vollständig unterbunden. Die Qualität der gesamten explosionsinduzierten Stoßwellenberechnung hängt von der Abbildung der Detonation, der Interaktion zwischen den Schwaden und dem umgebenden Medium (Boden oder Luft) sowie der zeitlichen Entwicklung der Detonationswelle und damit von der Netzfeinheit im Bereich des Explosivstoffs ab. Remapping erlaubt eine hohe Netzfeinheit bei gleichzeitig verhältnismäßig geringer Elementanzahl, da Modellbereiche, die erst zu einem späteren Zeitpunkt Deformationen erfahren, nicht von Anfang modelliert werden. Dies ermöglicht kürzere Berechnungsdauern als dies mit einem Gesamtmodell möglich ist. Nachteilig ist jedoch die Notwendigkeit der mit jedem Remap-Schritt wachsenden Elementabmessungen, was bei der Betrachtung der Wellenausbreitung in größeren Entfernungen ebenfalls zu Konvergenzproblemen führt.

5.3.4.2 Modellierungsansatz des „mitlaufenden Fensters“

Die für die Generierung der Entscheidungshilfe erforderlichen Freifeld-Zeitverläufe des Drucks p , der Partikelgeschwindigkeit $v_{x/y}$ sowie der Schubverzerrung γ_{xy} wurden in radialsymmetrischen 2D-Modellen berechnet. Die Symmetrieachse ist in AUTODYN standardmäßig die x-Achse. Die y-Achse entspricht der Horizontalen. Die Tiefe des Ladungsschwerpunkts d wurde variiert, wobei für jeden Wert von d ein separater Satz an

Berechnungen durchgeführt wurde. Die folgenden Anforderungen wurden an die Modellierungsstrategie gestellt:

- genaue Abbildung der Explosion, der Interaktion zwischen Explosivstoff und umgebendem Boden sowie der zeitlichen Entwicklung der Explosionswelle
- Verfolgung der Stoßwelle bis in Entfernungen, wo der Welleneinfluss infolge Dämpfung vernachlässigbar wird
- Einhaltung der für Konvergenz erforderlichen Netzfeinheit im relevanten Modellbereich unter Berücksichtigung der in AUTODYN maximal prozessierbaren Anzahl von $4 \cdot 10^6$ Zellen (siehe [137])

In einem ersten Schritt wurden die Explosion, die Interaktion zwischen Explosivstoff und umgebendem Boden und die ungestörte Wellenausbreitung im Vollraum – bis kurz vor der Ankunft der Stoßwelle an der Geländeoberkante und der daraus resultierenden Reflexion als Entspannungswelle – mittels 1D-Wedge-Modell simuliert. Da die Modelle mit einem Außenradius gleich der Ladungstiefe $r_a = d_{\text{TNT}} = \{0,5 \text{ m}; 1,0 \text{ m}; 1,5 \text{ m}; 2,0 \text{ m}\}$ sehr klein waren, konnte mit $r_i = dx = 2,5 \text{ mm}$ auch eine deutlich kleinere Elementbreite im Vergleich zur Konvergenzstudie gewählt werden. Entsprechend sind die räumliche und zeitliche Auflösung sehr hoch, und der obige, erste Anforderungspunkt ist erfüllt. Die Lösung des 1D-Wedge-Modells wurde mittels Remapping in das 2D-Modell übertragen. Die Ausnutzung der zweifachen Radialsymmetrie im 1D-Wedge-Modell entspricht der Vorgabe einer kugelförmigen Explosivstoffladung im 2D-Modell.

Zur weiteren Betrachtung der Stoßwelle in einem radialsymmetrischen 2D-Modell wurde die im Folgenden beschriebene Modellierungsstrategie eines „mitlaufenden Fensters“ entwickelt. Dabei wird das radialsymmetrische 2D-Modell segmentweise aufgebaut mit einer konstanten Elementbreite dy in horizontaler Richtung. Jedes Segment besteht aus drei Modellbereichen (siehe Abbildung 5.14). Der zentrale Modellbereich ist fein vernetzt. Ober- und unterhalb des zentralen Bereichs sind jeweils zonierte Auslaufbereiche angeordnet, deren Elementhöhe dx zum jeweiligen Modellrand kontinuierlich zunimmt. Die gemeinsamen Knoten des zentralen Modellbereichs und der Auslaufbereiche sind gekoppelt. Am oberen und unteren Rand eines Segmentes sind zusätzlich „Flow-Out“-Randelemente angeordnet. Zu Beginn der Berechnung wird lediglich das erste Segment modelliert. Kurz vor Ankunft der Welle am äußeren Segmentrand wird die Berechnung unterbrochen, ein zusätzliches Segment angehängt und die gemeinsamen Knoten mit dem bisherigen Modell gekoppelt. Wenn die maximal prozessierbare Zellenanzahl erreicht ist, muss vor dem Anfügen eines neuen Segmentes das jeweils innerste Segment gelöscht werden (siehe Abbildung 5.15).

In den durchgeführten Simulationen wurden die folgenden Festlegungen hinsichtlich der Geometrie getroffen:

- Segmentbreite $\Delta y = 7,5 \text{ m}$ und zugehörige Elementbreite $dy = 12,5 \text{ mm} = \text{konst.}$ gemäß der Konvergenzstudie

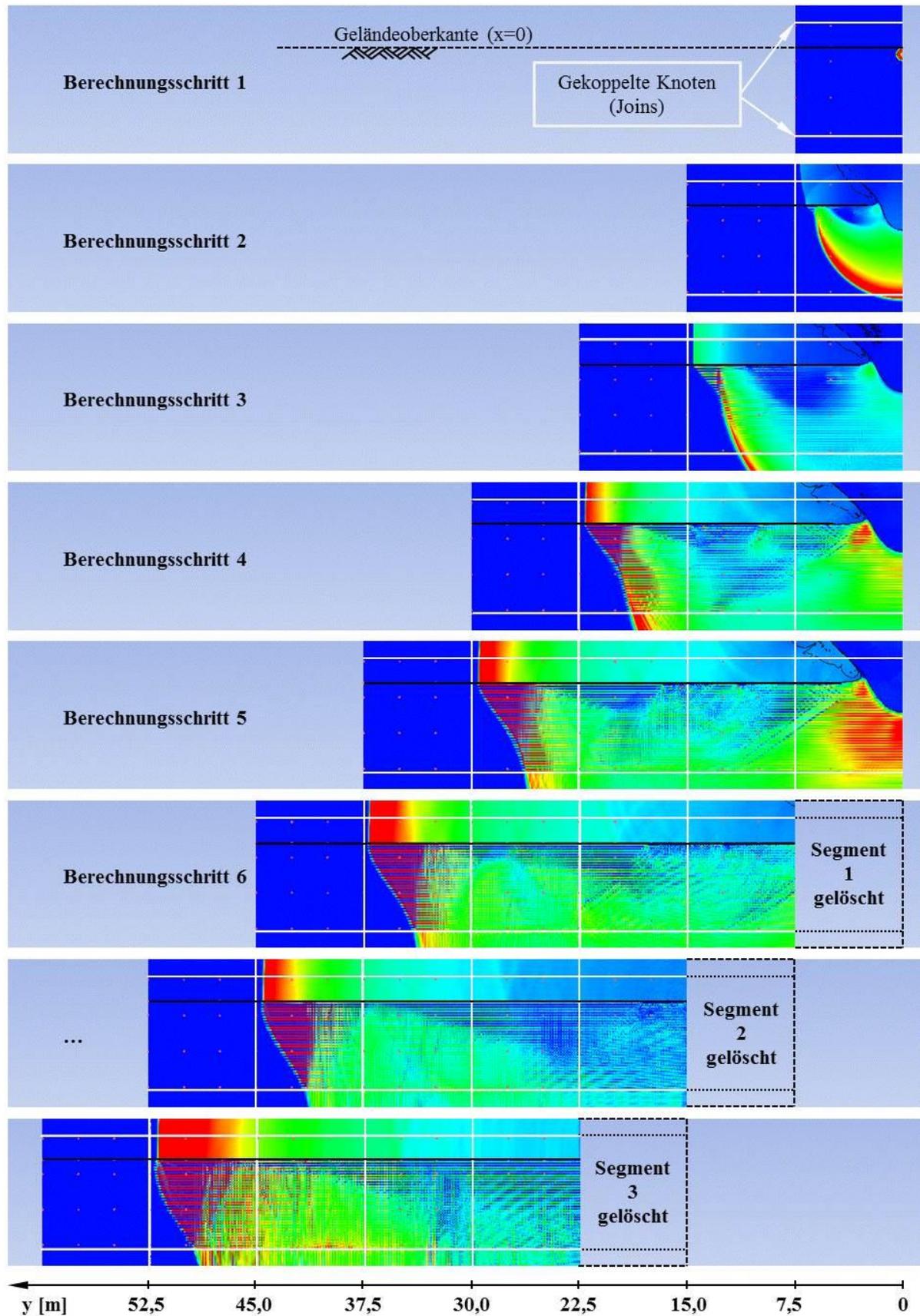


Abbildung 5.15 Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“ – Berechnungsschritte 1 bis 8 (hier: Tiefe des Ladungsschwerpunkts $d = 0,5$ m)

Mit einem n Segmente breiten, mitlaufenden Betrachtungsfenster kann ein $(n - 1)$ Segmente breiter Wellenabschnitt erfasst werden. Da die Geschwindigkeit der Entspannungswelle größer als die Wellengeschwindigkeit der Stoßfront ist, wird der betrachtete Wellenabschnitt mit fortschreitender Berechnungsdauer stetig kürzer. Damit die Zeitverläufe für die Messpunkte in den ersten $(n - 1)$ Segmenten über ein größeres Zeitfenster aufgezeichnet werden können, muss nach dem $(n - 1)$ -ten Berechnungsschritt ein Auslaufbereich mit einer Breite gleich jener des ersten Wellenabschnitts angehängt und mit dem $(n - 1)$ -ten Segment gekoppelt werden. Die Berechnung ist bis zur Ankunft des hinteren Endes des ersten Wellenabschnitts am Auslaufbereich fortzuführen. In den ersten $(n - 1)$ Segmenten befindet sich dann der zweite Wellenabschnitt. Die Vorgehensweise ist für die gewählte Geometrie in Abbildung 5.16 dargestellt (mit $n = 5$ und einer Wellenabschnittsbreite $\Delta y \approx 4 \cdot 7,5 = 30$ m).

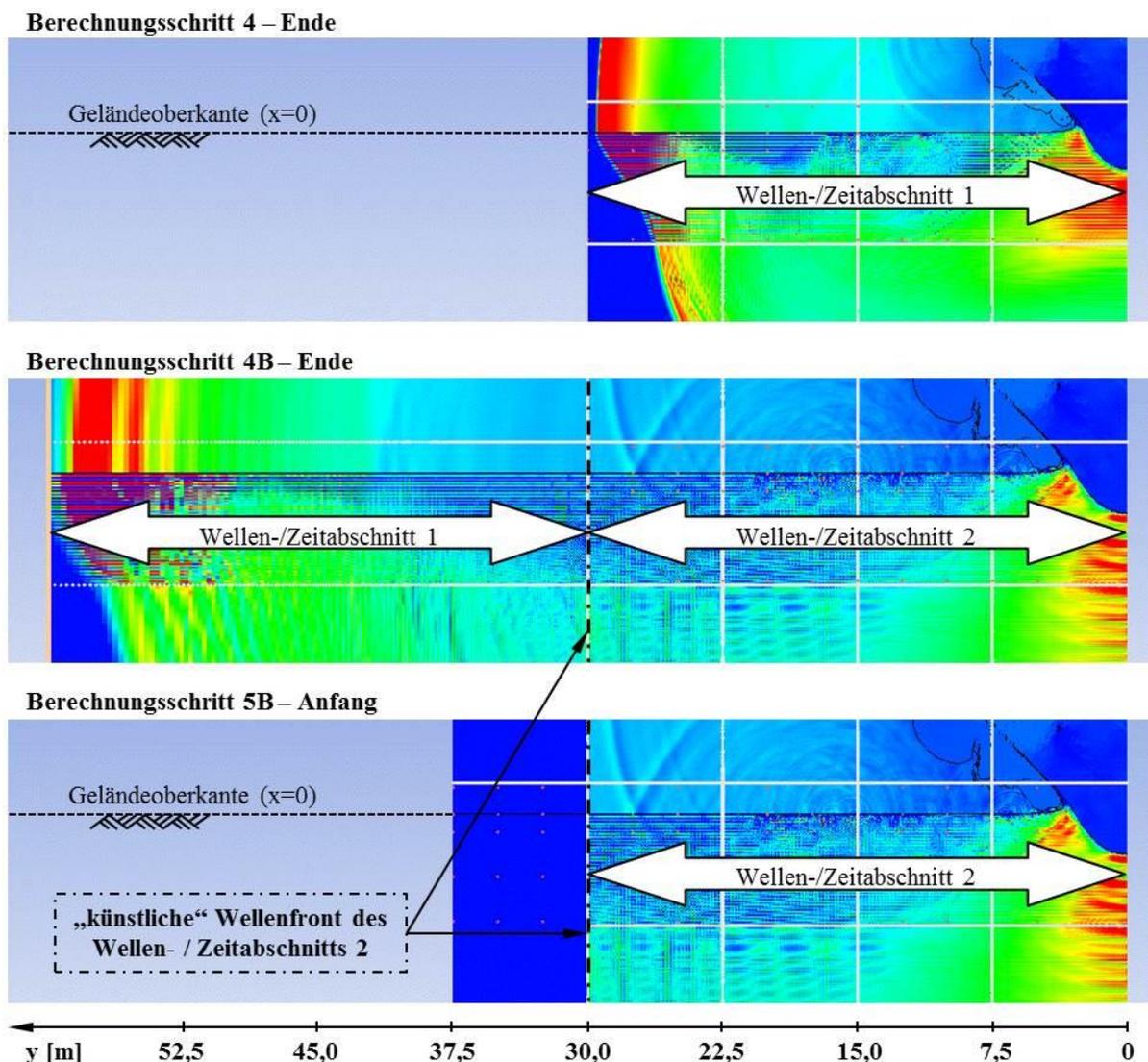


Abbildung 5.16 Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“ – Aufteilung der gesamten Welle bzw. des Zeitverlaufs in einzelne Wellen- bzw. Zeitabschnitte

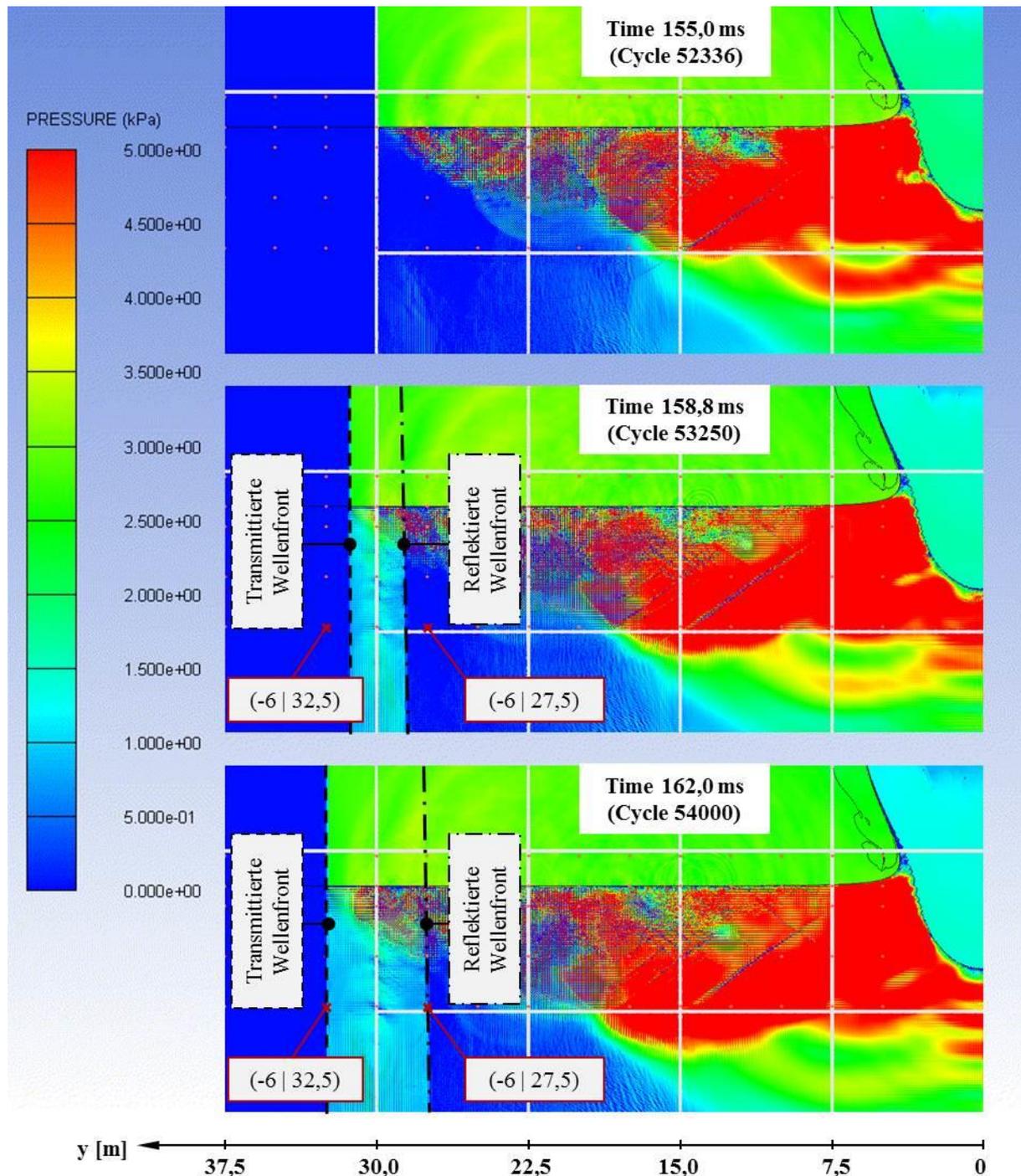


Abbildung 5.17 Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“ – Wellenfront des zweiten Zeitabschnitts (transmitierte Welle) und künstlich erzeugte reflektierte Wellenfront

Wird der zweite Wellenabschnitt mit der Methode des mitlaufenden Fensters verfolgt (durch Löschen des Auslaufbereichs und Ankoppeln eines unberührten Segments), so wird ein systematischer Fehler begangen, da die Wellenabschnittsgrenze eine künstliche Wellenfront darstellt, die in den ungestörten Bereich des angehängten Segments transmittiert wird. Gleichzeitig wird an der Segmentgrenze eine reflektierte Wellenfront erzeugt (siehe Abbildung 5.17), die in Realität nicht vorhanden ist. Im vorliegenden Fall wurde die Wellenabschnittsgrenze in einem Bereich angeordnet, der bereits eine Entspannung auf

$p = \sigma_i \approx 0$ erfahren hatte. Der entspannte Boden strömt aber immer noch mit einer Geschwindigkeit $v_y > 0$ in die ursprüngliche Wellenausbreitungsrichtung. Fließt dieses entspannte Material nun über die gekoppelten Knoten in das angehängte Segment wird die Energie gemäß den Gleichungen (2.56) und (2.57) auf die transmittierte und die reflektierte Welle aufgeteilt. Bei der Berechnung der zu den neuen Partikelgeschwindigkeiten gehörigen Spannungen $|\sigma_i| > 0$ unterstellt AUTODYN eine erneute Belastung. Entsprechend wurden die Druckspannungen in der transmittierten und der reflektierten Wellenfront betragsmäßig größer als in der einfallenden, künstlichen Wellenfront der Wellenabschnittsgrenze, während die Partikelgeschwindigkeit schlagartig abnahm. Abbildung 5.18 zeigt diese Sprünge in den Zeitverläufen für die in Abbildung 5.17 markierten Messpunkte. Für die horizontale Partikelgeschwindigkeit v_y lagen diese unrealistischen Sprünge in Größenordnungen, die den angesetzten zulässigen Grenzwerten der Fundamentalschwinggeschwindigkeit $v_{F,zul}$ nach DIN 4150-3 [107] entsprechen. Somit markiert die Ankunft der reflektierten Welle in einem Messpunkt das Ende des für die weitere Auswertung verwendbaren Datensatzes. Die Daten der transmittierten Welle sind ebenfalls ungültig.

Um die drei zu Beginn dieses Unterabschnitts formulierten Anforderungspunkte zu erfüllen, wurde die Modellierungsstrategie des „mitlaufenden Fensters“ entwickelt, deren Ansätze wie folgt zusammengefasst werden können:

- genaue Abbildung der Detonation, der Interaktion zwischen Explosivstoff und umgebendem Boden sowie der zeitlichen Entwicklung der Detonationswelle bis kurz vor Erreichen der Geländeoberkante in einem sehr fein vernetzten 1D-Wedge-Modell und Remapping der Ergebnisse in ein radialsymmetrisches 2D-Modell
- Aufspalten der Stoßwelle bzw. der betrachteten Zeitverläufe in einzelne Abschnitte (hier: mit einer Breite von vier Segmenten bzw. $\Delta y = 30$ m)
- Segmentweiser Aufbau und Erweiterung des radialsymmetrischen 2D-Modells:
 - ⇒ Verfolgung der Stoßwelle in einem Betrachtungsfenster (hier: aus fünf Segmenten) unter Einhaltung der für Konvergenz erforderlichen Netzfeinheit und Berücksichtigung der maximal prozessierbaren Zellenanzahl
 - ⇒ Begrenzung der betrachteten Zellenanzahl und damit Einsparung von Rechenzeit bis zum ersten Berechnungsschritt, in dem das jeweils erste Segment gelöscht wird

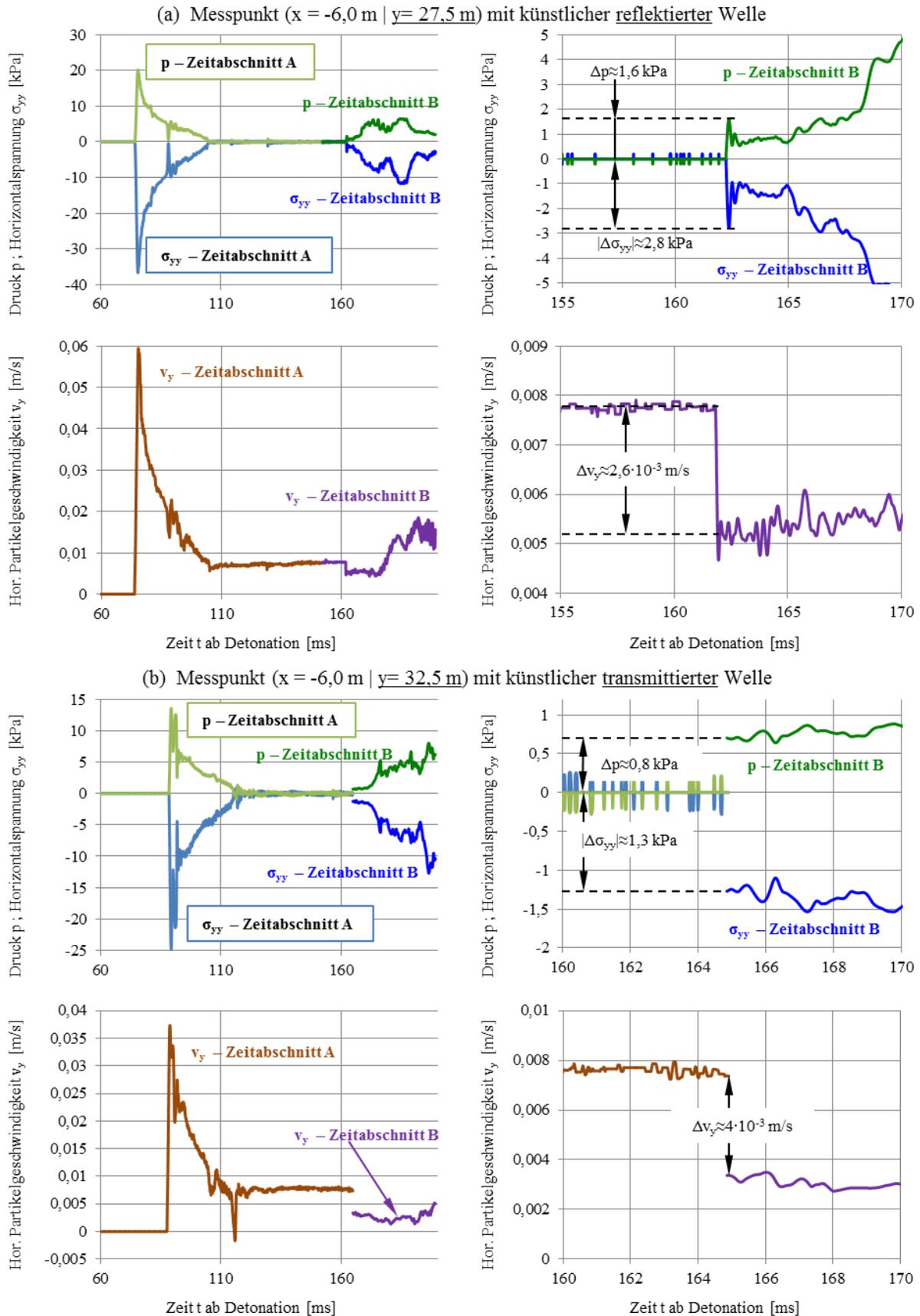


Abbildung 5.18 Künstliche Sprünge in den Zeitverläufen infolge Unterteilung der Welle in zwei Abschnitte für die in Abbildung 5.17 markierten Messpunkte

5.4 Auswertung der berechneten Zeitverläufe

5.4.1 Auffälligkeiten in den AUTODYN-Ergebnissen

AUTODYN scheint generell Probleme mit gekoppelten Knoten zu haben. So weisen die Zeitverläufe von Messpunkten an den Segmentgrenzen mit gekoppelten Knoten stets deutlich stärkere Oszillationen auf als dies an anderen Messpunkten der Fall ist (siehe Abbildung 5.19).

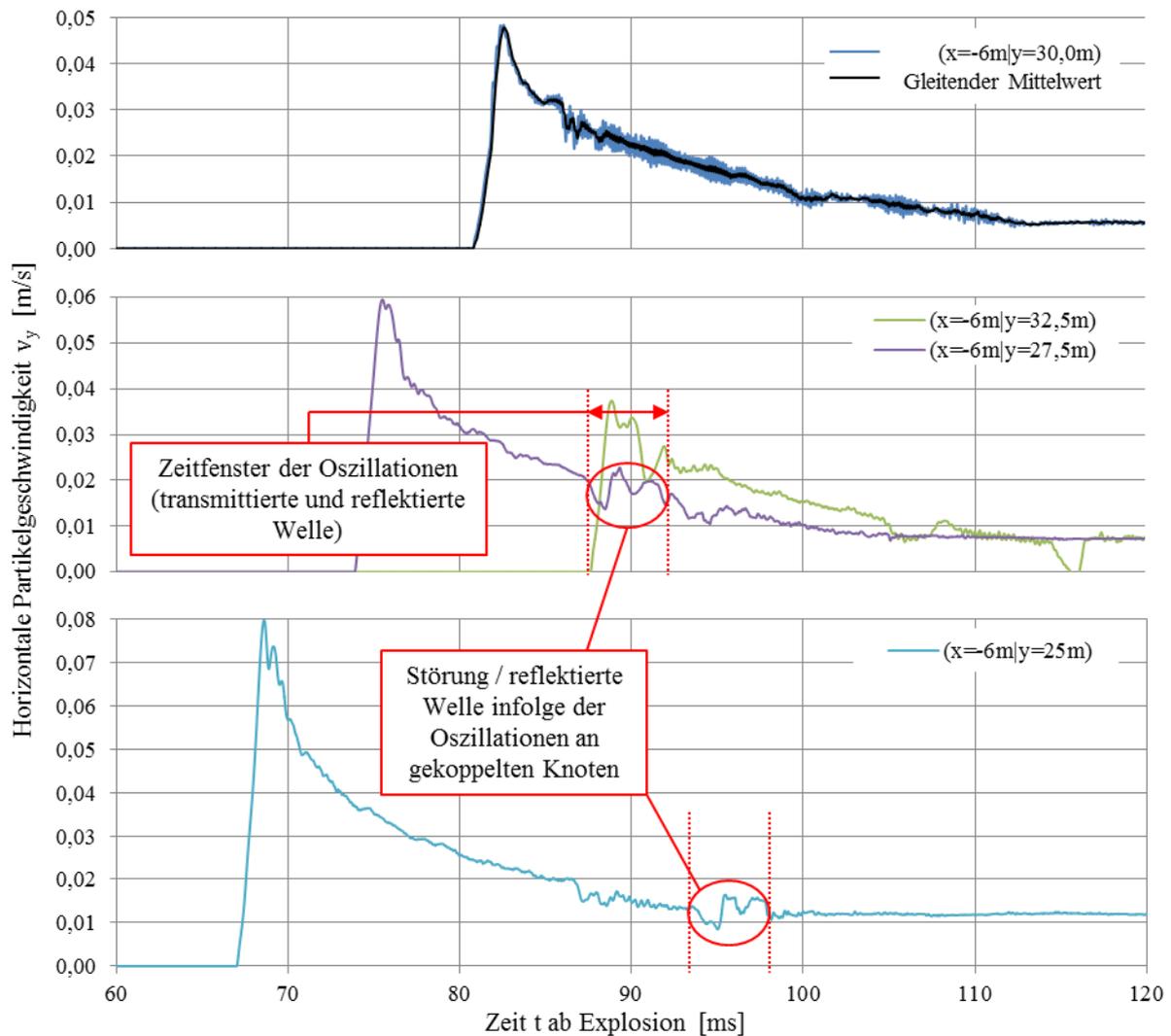


Abbildung 5.19 Vergleich der horizontalen Partikelgeschwindigkeit $v_y(t)$ für die in Abbildung 5.20 markierten Messpunkte

Läuft die Wellenfront über eine Segmentgrenze mit gekoppelten Knoten, wird eine Störung ausgelöst, die sich entgegen der Wellenfortpflanzungsrichtung ausbreitet (siehe Abbildung 5.20). Entsprechend ist der an der Wellenfront berechnete Spitzenwert größer als die tatsächliche Lösung. Die Oszillationen in beiden Wellenfronten sind in Screenshots am Schachbrettmuster zu erkennen⁵⁸. Mit zunehmender Entfernung schaukelt sich dieser

⁵⁸ Dazu muss bei der Darstellung die Glättung (Smoothing) ausgeschaltet werden.

numerische Fehler auf, so dass ab einer kritischen Entfernung $y_{\text{krit}} = (r_{\text{hor}})_{\text{krit}}$ die Spitzenwerte der Spannungen und Partikelgeschwindigkeiten tendenziell größer werden (siehe Abbildung 5.21). Ein sprunghafter Anstieg ist jeweils für die Messpunkte nahe der gekoppelten Knoten zu erkennen. Aufgrund der bei höheren Druckspannungen größeren Wellengeschwindigkeit kommt es – vor allem oberflächennah – zum Ablösen einer Vorläuferwelle, was im vorliegenden Fall jedoch unrealistisch ist, da die Entlastungsgeschwindigkeit c_{BU} durchweg größer als die Schallgeschwindigkeit bei Belastung c_{B} ist (siehe Anhang C.6).

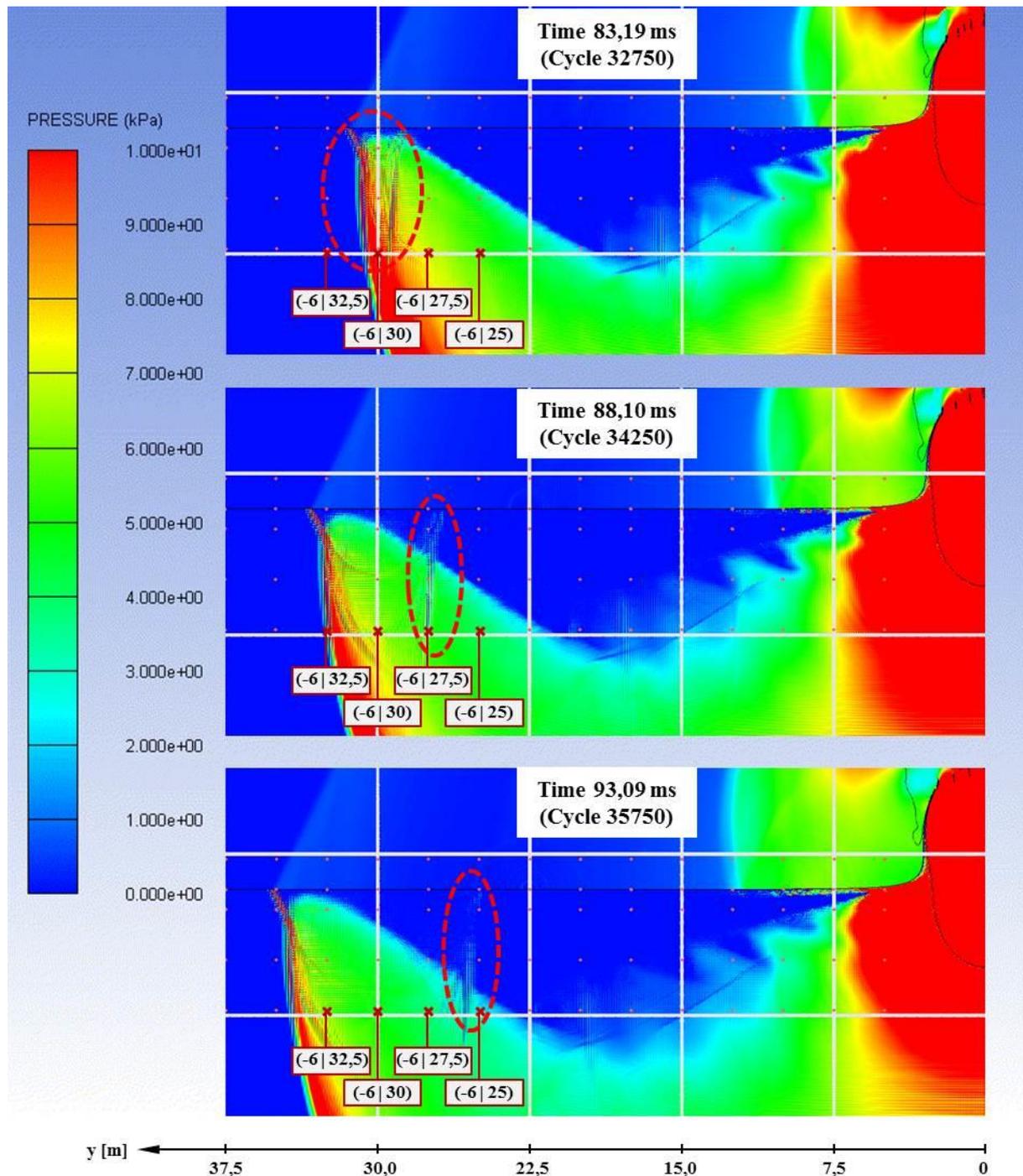


Abbildung 5.20 Übergang der Wellenfront über gekoppelte Knoten – Schachbrettmuster in der Wellenfront und der reflektierten Störung (beispielhaft für $d = 2,0$ m)

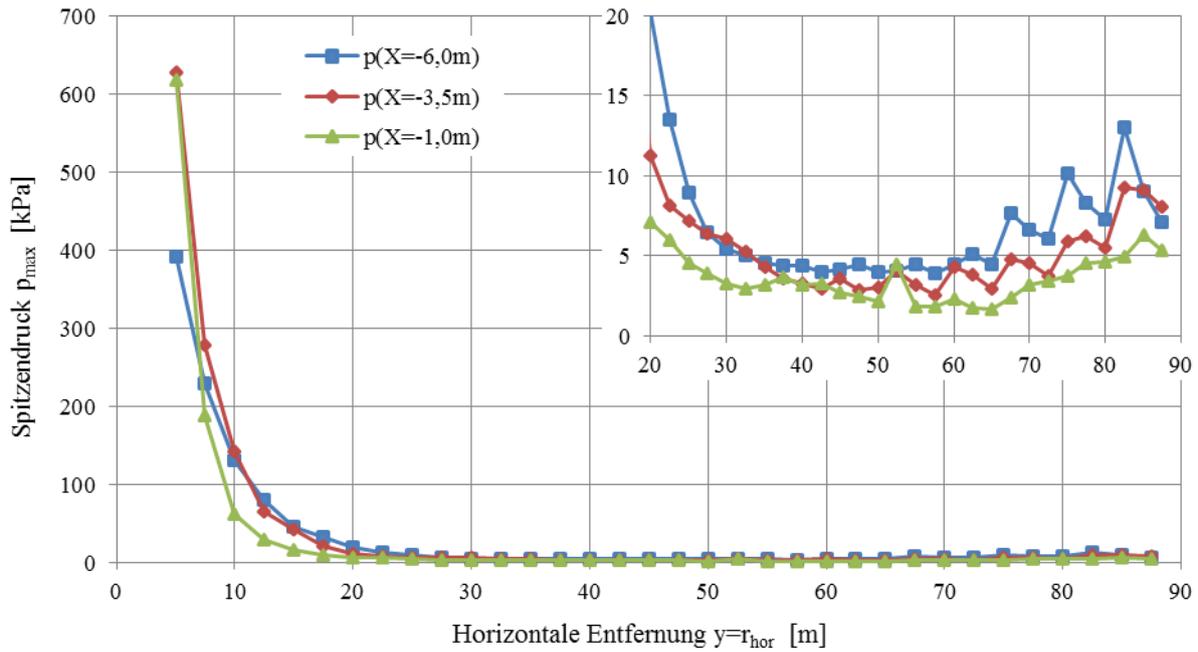


Abbildung 5.21 Spitzenwerte des Drucks in unterschiedlichen Tiefen x in Abhängigkeit der horizontalen Entfernung $y = r_{\text{hor}}$ (beispielhaft für $d = 2,0 \text{ m}$)

Der Effekt wird mit zunehmender Ladungstiefe d_{TNT} schwächer. In Screenshots wie in Abbildung 5.20 ist er erst in größeren Entfernungen $y = r_{\text{hor}}$ mit kleinen Druckspannungen und entsprechender Spannungs- bzw. Druckskala $p < 20\text{-}25 \text{ kPa}$ zu erkennen. Vergleichsrechnungen mit veränderten Werten für die künstliche Viskosität ergaben keine Verbesserung in Bezug auf diesen Fehler. Für die Auswertung hinsichtlich der Schadenskriterien wurden somit nur Daten von Messpunkten mit $y < y_{\text{krit}}$ verwendet.

5.4.2 Auswertung des Kriteriums Nr. 1 „Luftstoß“

5.4.2.1 Näherungsfunktion für den Überdruck $p_1(t)$ des Luftstoßes

Zur Berechnung des Luftdrucks $p(t)$ in $x = 1,5 \text{ m}$ Höhe über Geländeoberkante wurde in Anlehnung an das Modell nach *Drake & Little* [3] der Ansatz gemäß Gleichung (5.25) mit einer linearen Anstiegsphase und exponentieller Abklingphase unterstellt (siehe auch Abbildung 4.7 auf Seite 80). t_a ist die Ankunftszeit der Luftstoßwelle im Betrachtungspunkt. Der Spitzenluftdruck $p_{1,\text{max}}$ wird zum Zeitpunkt t_p erreicht. Der spezifische Impuls I kann dann nach Gleichung (5.26) berechnet werden. Da die AUTODYN-Berechnungen lediglich für eine Ladungsmasse $W_{\text{TNT}} = 125 \text{ kg}$ durchgeführt wurden, wird der Einfluss der Entfernung sowie der Ladungstiefe mit den unskalierten Werten r_{hor} und d_{TNT} angegeben.

$$p_1(t) = \begin{cases} p_{1,\text{max}} \cdot \frac{t - t_a}{t_p - t_a} \\ p_{1,\text{max}} \cdot \exp[-\alpha \cdot (t - t_p)] \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} t_a \leq t < t_p \\ t \geq t_p \end{cases} \quad (5.25)$$

$$I = \int p_1(t)dt = p_{1,max} \cdot \left(\frac{t_p - t_a}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) \tag{5.26}$$

Der Spitzenluftdruck $p_{1,max}$ in $x = 1,5$ m Höhe über Geländeoberkante kann für die vier untersuchten Ladungstiefen $d_{TNT} = \{0,5 \text{ m}; 1,0 \text{ m}; 1,5 \text{ m}; 2,0 \text{ m}\}$ sehr gut mittels der exponentiellen Gleichung (5.27) angenähert werden. Die zugehörigen Koeffizienten A, n und B in Tabelle 5-4 wurden durch Minimierung der Fehlerquadrate berechnet. Sie gelten unter der Voraussetzung, dass r_{hor} in Formel (5.27) in Metern eingesetzt wird. Ergebnis ist der Spitzenluftdruck in Kilopascal. Die Gegenüberstellung der AUTODYN-Werte mit den anhand der Näherungsformeln berechneten Spitzenluftdrücke in Abbildung 5.22 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung.

$$p_{1,max} [kPa] = A \cdot (r_{hor} [m])^n + B \tag{5.27}$$

Tabelle 5-4 Koeffizienten A, B und n in Gleichung (5.27) für unterschiedliche Ladungstiefen

	$d_{TNT} = 0,5 \text{ m}$	$d_{TNT} = 1,0 \text{ m}$	$d_{TNT} = 1,5 \text{ m}$	$d_{TNT} = 2,0 \text{ m}$
A	424,5831	138,9259	73,1186	123,513
B	-5,4874	-83,4362	-56,2163	-112,2835
n	-0,8349	-0,1089	-0,0525	-0,0204

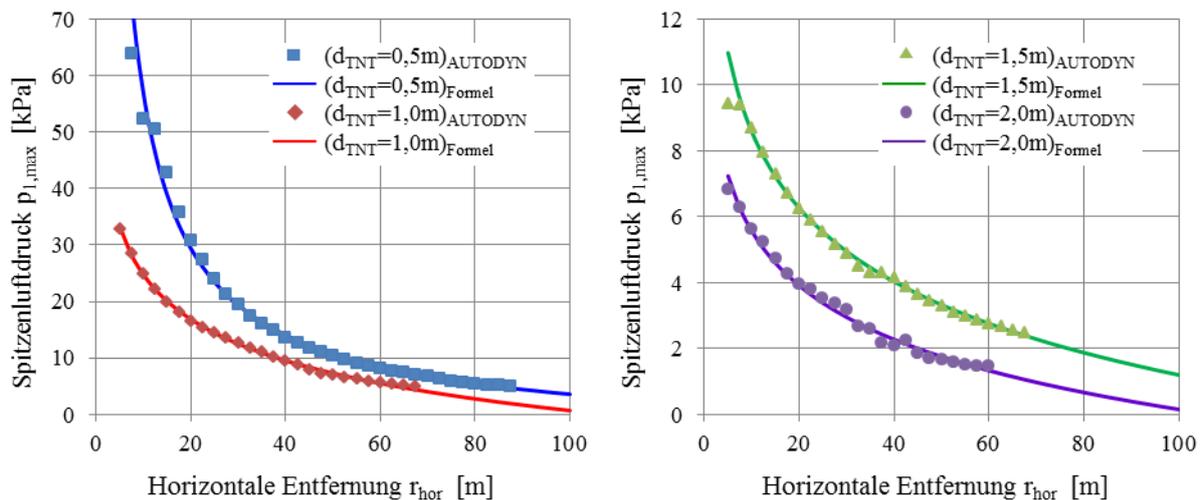


Abbildung 5.22 Spitzenluftdruck $p_{1,max}$ in $x = 1,5$ m über Geländeoberkante – Vergleich der AUTODYN-Werte mit den Näherungswerten gemäß Formel (5.27) und Tabelle 5-4

Zur Berücksichtigung der Tiefenabhängigkeit wurden zwei unterschiedliche Ansätze untersucht:

- Zuerst wurde unterstellt, dass die Koeffizienten A, B und n in Gleichung (5.27) allein von der Ladungstiefe abhängen. Als Ansatzfunktion wurde in Anbetracht der vier

Stützstellen $d_{TNT} = \{0,5 \text{ m}; 1,0 \text{ m}; 1,5 \text{ m}; 2,0 \text{ m}\}$ ein Polynom dritten Grades gewählt. In Abbildung 5.23 ist der Spitzenluftdruck $p_{1,max}$ in Abhängigkeit der Ladungstiefe aufgetragen. Abseits der Stützstellen weicht der Polynomansatz deutlich von der numerischen Lösung ab.

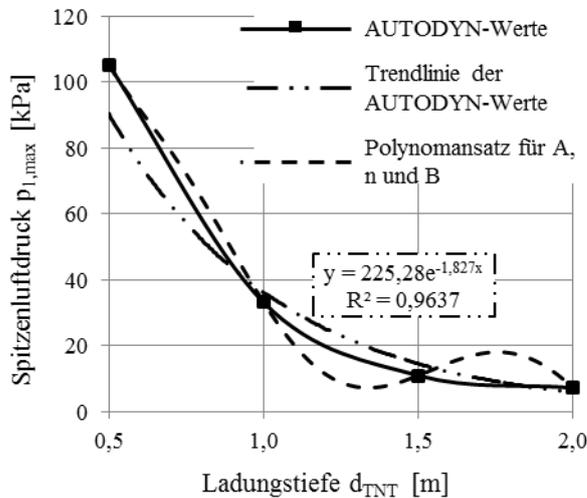


Abbildung 5.23 Einfluss der Ladungstiefe d_{TNT} auf den Spitzenluftdruck $p_{1,max}$ (hier: bei $r_{hor} = 5,0 \text{ m}$) – Vergleich der AUTODYN-Werte mit einem Polynomansatz für die Parameter A, n und B in Formel (5.27)

- Für konstante Werte der horizontalen Entfernung r_{hor} kann die Abhängigkeit des Spitzenluftdrucks von der Ladungstiefe sehr gut durch eine Exponentialfunktion angenähert werden (vgl. die Trendlinie in Abbildung 5.23). Die Verknüpfung der Exponentialfunktion mit der Potenzfunktion (5.27) über den multiplikativen Ansatz (5.28) ergab die beste Übereinstimmung mit den numerischen Werten. Wie Abbildung 5.24 zeigt, liegen die damit berechneten Spitzendrücke insbesondere für $d_{TNT} = 1,0 \text{ m}$ sehr weit auf der unsicheren Seite.

$$p_{1,max}(r_{hor}; d_{TNT}) = [A \cdot (r_{hor})^B + C] \cdot \exp(D \cdot d_{TNT}) + E \quad (5.28)$$

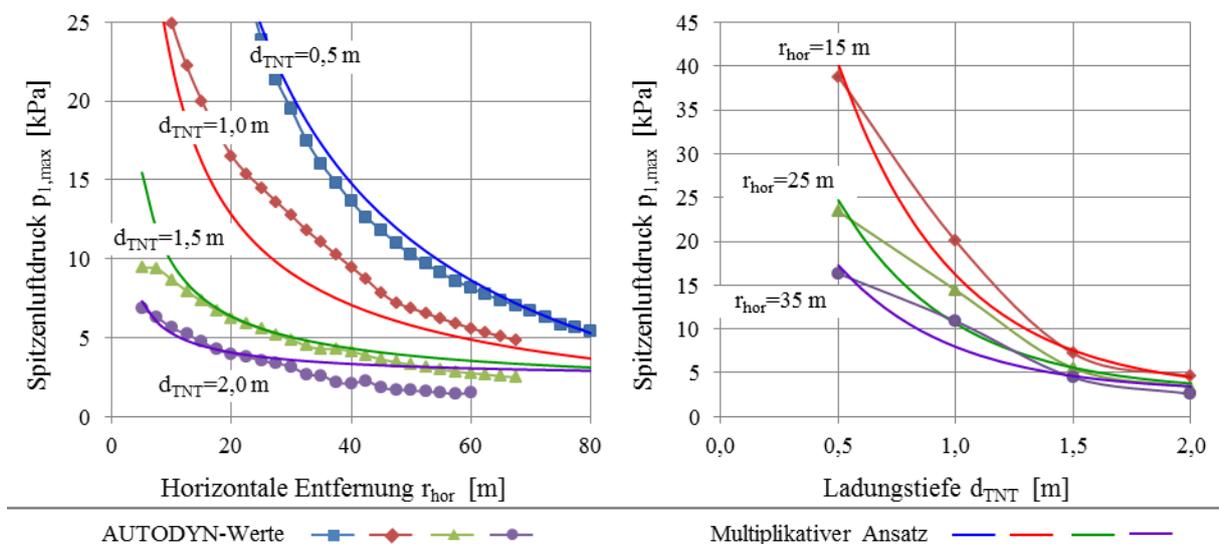


Abbildung 5.24 Einfluss der Ladungstiefe d_{TNT} auf den Spitzenluftdruck $p_{1,max}$ – Vergleich des multiplikativen Ansatzes (5.28) mit den AUTODYN-Werten

Aufgrund der Unzulänglichkeiten beider Ansätze zur Berücksichtigung des Ladungstiefeneinflusses wurden beide Ansätze verworfen. Die weitere Auswertung erfolgte mit den optimierten Koeffizienten der Tabelle 5-4. Für Zwischenwerte der Ladungstiefe d_{TNT} wird empfohlen, die Spitzendrücke an den benachbarten Stützstellen $d_{TNT} = \{0,5 \text{ m}; 1,0 \text{ m}; 1,5 \text{ m}; 2,0 \text{ m}\}$ auszurechnen und zu interpolieren. Dies gilt entsprechend auch für die weiteren Parameter t_a , t_p und α in Gleichung (5.25).

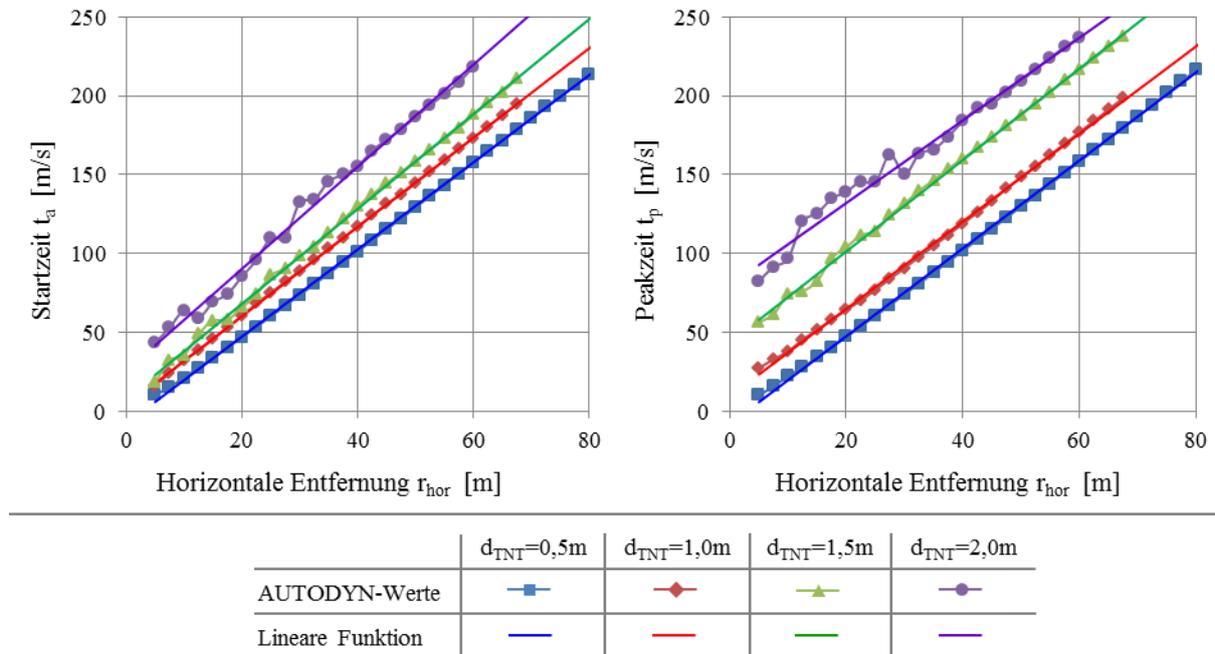


Abbildung 5.25 Startzeit t_a und Peakzeit t_p des Luftdruck – Vergleich der AUTODYN-Werte mit den Näherungswerten gemäß Gleichung (5.29) und Tabelle 5-5

Tabelle 5-5 Koeffizienten $a_{a/p}$ und $b_{a/p}$ in Gleichung (5.29) für unterschiedliche Ladungstiefen

		$d_{TNT} = 0,5 \text{ m}$	$d_{TNT} = 1,0 \text{ m}$	$d_{TNT} = 1,5 \text{ m}$	$d_{TNT} = 2,0 \text{ m}$
a_a	[ms/m]	2,7617	2,832	3,0083	3,2367
b_a	[ms]	-7,8538	3,575	7,9461	25,5599
a_p	[ms/m]	2,786	2,7732	2,8976	2,6183
b_p	[ms]	-8,1254	9,485	43,4287	79,7016

Die Peakzeit t_p für den Spitzenluftdruck wurde in Abhängigkeit der Variablen r_{hor} und d_{TNT} mittels einer MATLAB-Routine aus den mit AUTODYN berechneten Zeitverläufen ausgelesen. Die Anfangszeit t_a wurde aus der Nebenbedingung identischer spezifischer Impulse I während der Anstiegsphase für die numerischen Ergebnisse und die Näherungsformel berechnet. Beide Zeitpunkte können sehr gut anhand der linearen Funktionen (5.29) mit den Koeffizienten gemäß Tabelle 5-5 angenähert werden (siehe

Abbildung 5.25). Falls die Gleichungen für ein Wertepaar (r_{hor} ; d_{TNT}) den Fall $t_a > t_p$ ergeben, ist $t_a = t_p = \min\{t_a; t_p\}$ zu setzen.

$$t_a [ms] = a_a \cdot r_{hor} [m] + b_a \qquad t_p [ms] = a_p \cdot r_{hor} [m] + b_p \qquad (5.29)$$

Der Dämpfungskoeffizient α wurde im Hinblick auf gleiche spezifische Impulse I für die numerischen Ergebnisse und die Näherungsformel (5.25) optimiert. Die Parameter a , b und c der Gleichung (5.30) können für die untersuchten Ladungstiefen Tabelle 5-6 entnommen werden. Die zugehörigen Kurven $\alpha(r_{hor})$ sind in Abbildung 5.26 dargestellt.

$$\alpha = a \cdot (r_{hor} [m])^b + c \qquad (5.30)$$

Tabelle 5-6 Koeffizienten a , b und c zur Berechnung des Dämpfungskoeffizienten α (5.30) für unterschiedliche Ladungstiefen

	$d_{TNT} = 0,5 \text{ m}$	$d_{TNT} = 1,0 \text{ m}$	$d_{TNT} = 1,5 \text{ m}$	$d_{TNT} = 2,0 \text{ m}$
a	0,79762	0,28056	-0,20705	-3,88705
b	-1,17623	-1,30925	-0,02879	-0,00208
c	0,04675	0,04188	0,21593	3,88015

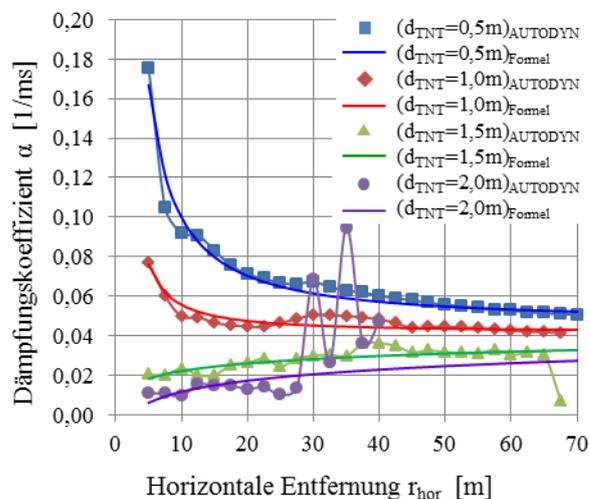


Abbildung 5.26
Dämpfungskoeffizient α –
Vergleich der AUTODYN-Werte
mit der Näherungsformel (5.30)

Ein Vergleich der mittels Gleichung (5.25) berechneten Zeitverläufe $p_1(t)$ mit den numerischen AUTODYN-Ergebnissen in Abbildung 5.27 zeigt durchweg eine sehr gute Übereinstimmung der Spitzenluftdrücke, der Zeitverläufe in den Abklingphasen sowie des spezifischen Impulses. Aufgrund dessen wird auch die Vernachlässigung der erdstoßinduzierten Luftdruck-Vorläuferwelle als tolerierbar angesehen.

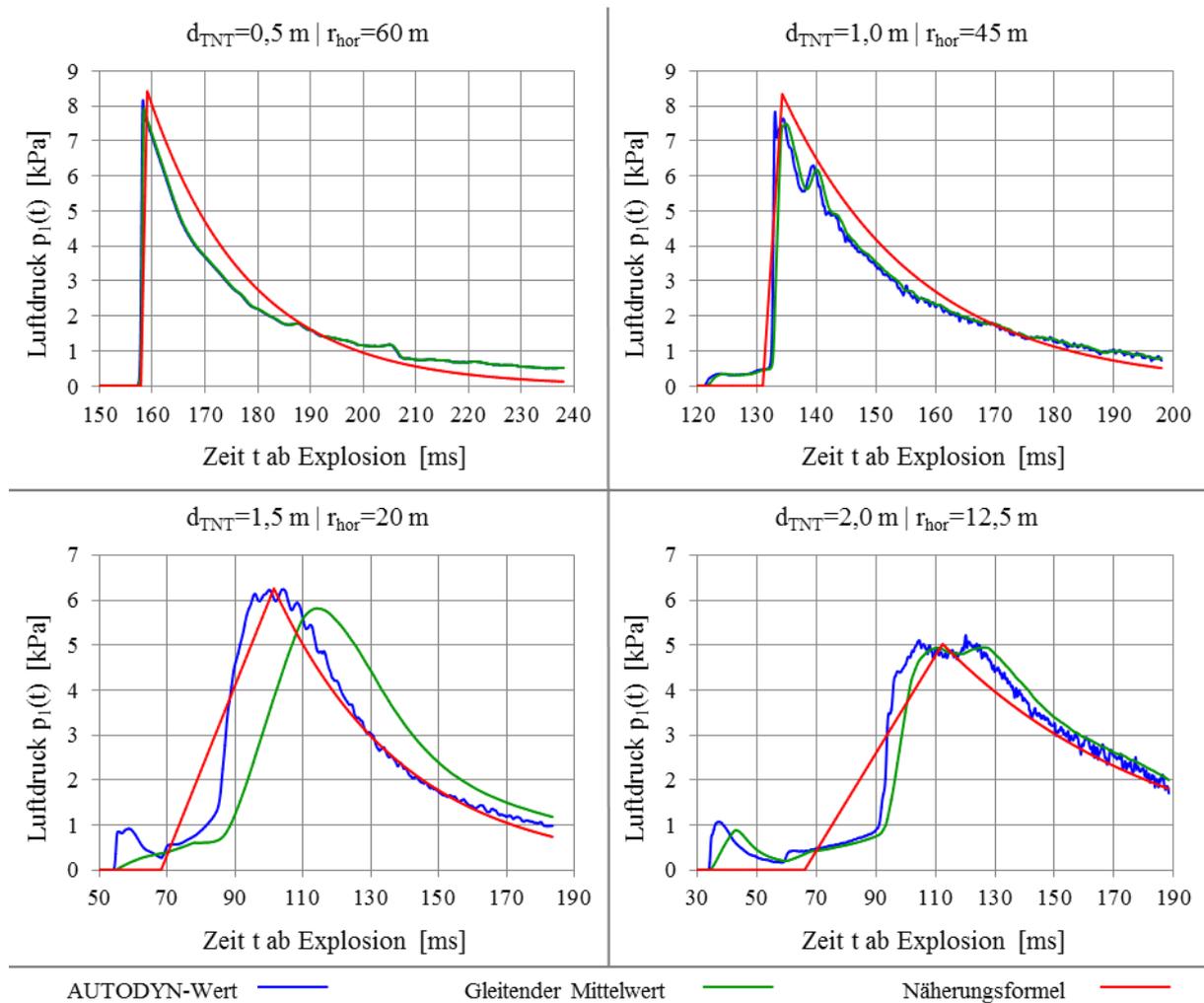


Abbildung 5.27 Luftdruck-Zeitverläufe – Vergleich der original AUTODYN-Daten und der zugehörigen gleitenden Mittelwerte⁵⁹ mit den Näherungsformeln

5.4.2.2 Sichere Entfernung $r_{hor,safe}$ und Grenzentfernung $r_{hor,lim}$ bei Luftstoß

Auflösen der Gleichung (5.27) nach der horizontalen Entfernung ergibt die zu einem vorgegebenen zulässigen Spitzenluftdruck wie zum Beispiel $p_{1,zul} = 5\text{ kPa}$ gemäß NATO-Manual AASTP-1 [105, pp. III-1-1] zugehörige horizontale Entfernung $r_{hor,safe/lim}$ (5.31), bei deren Überschreitung $p_{1,vorh} \leq p_{1,zul}$ gilt. In Abbildung 5.28 sind für unterschiedliche zulässige Spitzenluftdrücke die zugehörigen Entfernungen $r_{hor,safe/lim}$ in Abhängigkeit der Ladungstiefe aufgetragen.

$$r_{hor} \geq r_{hor,safe/lim} [m] = \left(\frac{p_{1,max} [kPa] - B}{A} \right)^{1/n} \tag{5.31}$$

⁵⁹ Hinsichtlich der Berechnung der gleitenden Mittelwerte wird auf den folgenden Abschnitt 5.4.3 verwiesen. In Abbildung 5.27, links unten tritt der Zeitversatz als ein Nachteil der gleitenden Mittelwertbildung deutlich hervor.

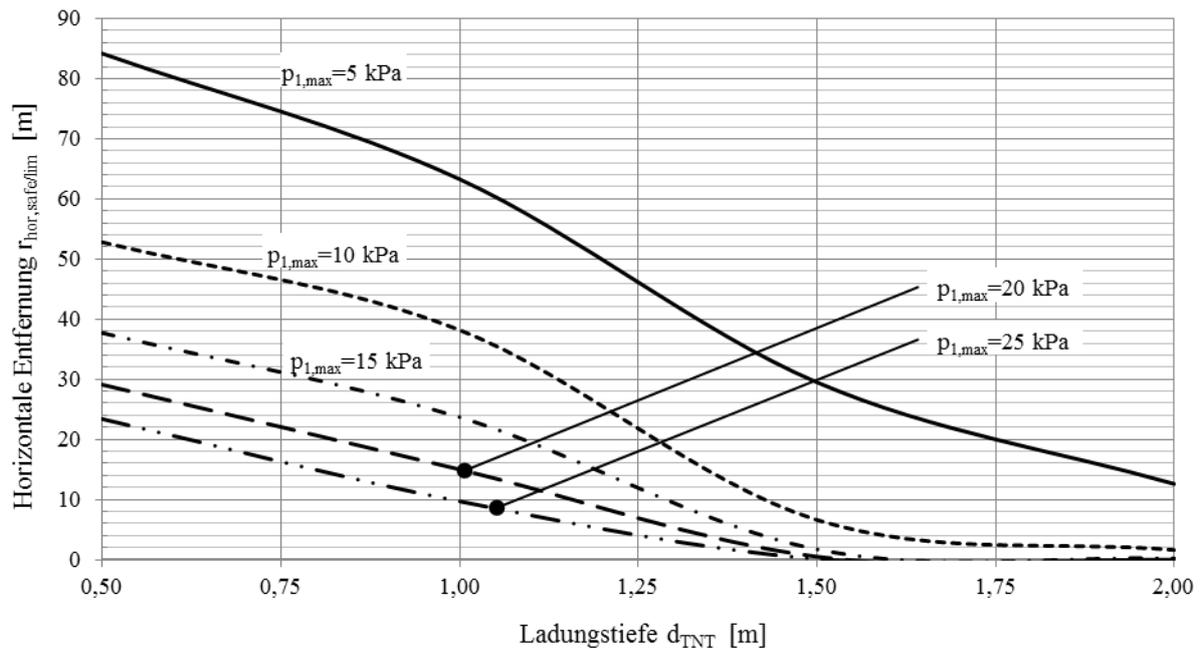


Abbildung 5.28 Horizontale Entfernung $r_{hor,safe/lim}$ in Abhängigkeit der Ladungstiefe d_{TNT} für unterschiedliche zulässige Werte des Spitzenluftdrucks $p_{1,zul}$

5.4.3 Auswertung des Kriteriums Nr. 2 „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“

Für die diskrete *Fourier*-Transformation müssen die Partikelgeschwindigkeits-Zeitverläufe eine konstante Zeitschrittweite bzw. ein konstantes Abtastintervall T_s aufweisen. Das Aussortieren doppelter Zeitschritte sowie die Umrechnung auf ein konstantes Abtastintervall T_s mittels linearer Interpolation wurden mit MATLAB durchgeführt.

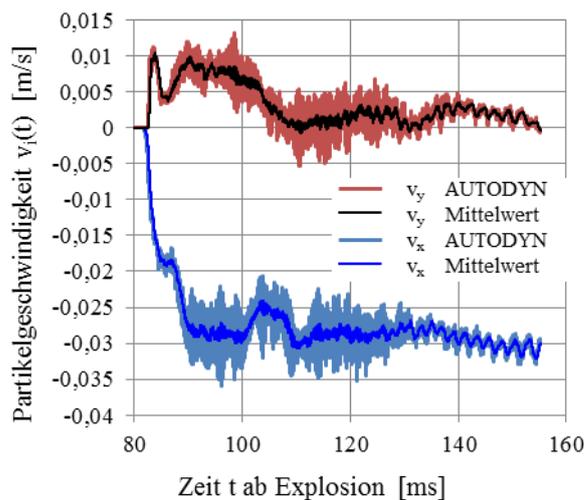


Abbildung 5.29 Gleitende Mittelwertbildung – v_x und v_y für $d_{TNT} = 0,5$ m bei $r_{hor} = 30$ m und $x = -6$ m

Aufgrund starker Oszillationen in den originalen Zeitverläufen – vor allem wie in Abschnitt 5.4.1 beschrieben bei Messpunkten an den gekoppelten Knoten der Segmentgrenzen – wurden für alle Partikelgeschwindigkeiten $v_i[n] = v_i(n \cdot T_s) = v_i(t)$ die gleitenden Mittelwerte gemäß Formel (5.32) berechnet (siehe Abbildung 5.29). Die Intervalllänge der Mittelwertbildung M wurde für jede Messpunkttiefe x einer Ladungstiefe d_{TNT} derart festgelegt, dass für die

kleinste horizontale Messpunktcoordinate $y_{\min} = 5 \text{ m}^{60}$ der gemittelte Spitzendruck minimal 90 % des ungemittelten Wertes $p_{1,\max}$ beträgt.

$$v_i[n] = \frac{1}{M} \sum_{m=n-(M-1)}^n v_i[m] \quad (5.32)$$

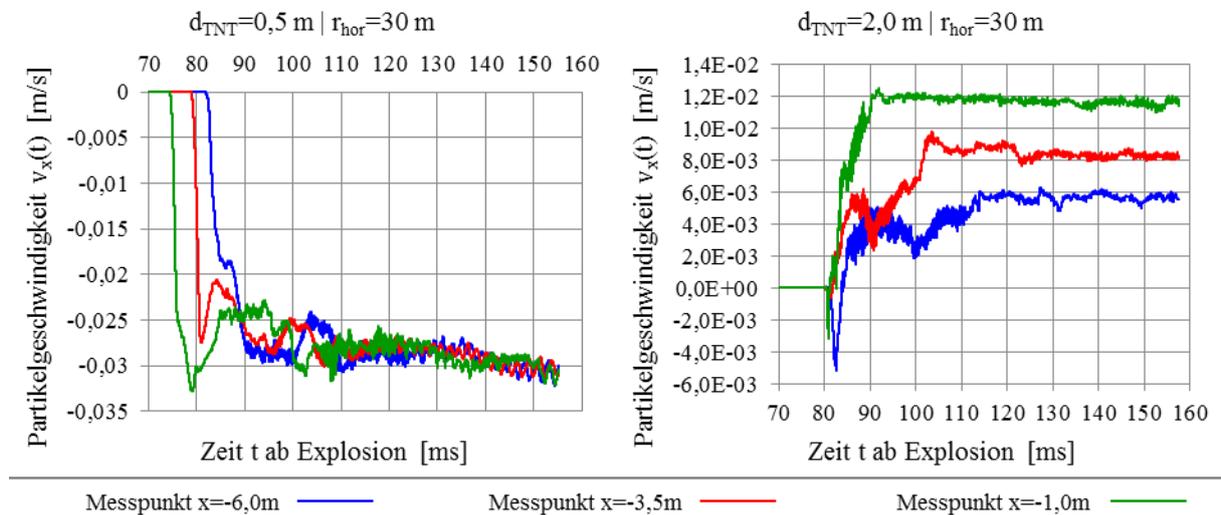


Abbildung 5.30 Vertikale Partikelgeschwindigkeit $v_x(t)$ für unterschiedliche Messpunkttiefen x , hier beispielhaft für $r_{\text{hor}} = 30 \text{ m}$ und Ladungstiefen $d_{\text{TNT}} = 0,5 \text{ m}$ bzw. $d_{\text{TNT}} = 2,0 \text{ m}$

Die berechneten Zeitverläufe der vertikalen Partikelgeschwindigkeit v_x weisen mit zunehmender horizontaler Entfernung $y = r_{\text{hor}}$ alle eine ähnliche Form auf. Über das Berechnungszeitfenster ist nahezu keine Dämpfung zu erkennen. Für die minimale untersuchte Ladungstiefe $d_{\text{TNT}} = 0,5 \text{ m}$ zeigen die AUTODYN-Ergebnisse über die Tiefe x annähernd gleiche, negative Werte der vertikalen Partikelgeschwindigkeit v_x (siehe Abbildung 5.30, links). Dies entspricht einer gleichförmigen Bewegung des gesamten Bodenpakets nach unten. Generell wäre bei abwärts gerichteter Bodenbewegung eine Kompression und eine damit verbundene Dämpfung erwartet worden. Einen zusätzlichen Dämpfungseffekt müsste eine aufwärts gerichtete Entspannungswelle (ausgelöst durch die sich parallel zur Geländeoberfläche ausbreitende Kompressionswelle, siehe Abschnitt 2.4.3) beitragen. Für die maximale betrachtete Ladungstiefe $d_{\text{TNT}} = 2,0 \text{ m}$ ist die vertikale Partikelgeschwindigkeit prinzipiell nach oben gerichtet, was den Entspannungseffekt korrekt abbildet. Allerdings konnte die Erdbeschleunigung g in den Simulationen aufgrund des segmentweisen Modellaufbaus mit „mitlaufendem Fenster“ nicht berücksichtigt werden. Entsprechend weisen die Zeitverläufe der vertikalen Partikelgeschwindigkeit wie in Abbildung 5.30, rechts dargestellt auch keine Dämpfung auf. Aufgrund der beschriebenen Unstimmigkeiten und Unzulänglichkeiten wurden die Zeitverläufe der vertikalen

⁶⁰ Am Messpunkt mit der kleinsten horizontalen Entfernung y_{\min} sind sowohl die Gradienten in der Anstiegs- als auch in der Abklingphase betragsmäßig am größten, und der erste Peakwert entspricht dem Spitzenwert des gesamten Zeitverlaufs. Entsprechend wurde für y_{\min} auch die Intervalllänge der Mittelwertbildung M_{\min} berechnet.

Partikelgeschwindigkeit v_x und damit auch der absoluten Partikelgeschwindigkeit v_{abs} als nicht vertrauenswürdig betrachtet und von der weiteren Auswertung ausgeschlossen. Die weitere Auswertung bezieht sich deshalb nur auf die horizontale Partikelgeschwindigkeit v_y .

Die zulässigen Fundamentalschwinggeschwindigkeiten $v_{F,zul}$ nach DIN 4150-3 [107] in Tabelle 5-2 sind für Frequenzen $f \geq 1$ Hz definiert. Um mittels diskreter *Fourier*-Transformation DFT⁶¹ auch für diese minimale Frequenz einen *Fourier*-Koeffizienten berechnen zu können, mussten die Periodendauer T bzw. die Signallänge N (und damit auch die Frequenzschrittweite Δf des *Fourier*-Spektrums) gemäß Gleichung (5.33) durch Anhängen von Nullen angepasst werden. Maßgebend für dieses Zero-Padding war jedoch stets die Nebenbedingung infolge des Radix-2-FFT-Algorithmus, wonach die endgültige Signallänge eine Zweierpotenz sein muss ($N_{erf} = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$).

$$f_{\min} = \frac{1}{T_{erf}} = m \cdot \Delta f \leq 1 \text{ Hz} \quad (5.33)$$

$$T_{erf} = N_{erf} \cdot T_s \geq 1 \text{ s}$$

Zur Reduzierung des Leckeffektes wurde das *von Hann*-Fenster verwendet, obwohl dieses verglichen mit dem *Hamming*-Fenster bei gleicher Hauptzipfelbreite $\Delta\Omega_{\text{mid}}$ eine geringere Nebenzipfeldämpfung $a_{s,\text{dB}}$ aufweist. Als entscheidendes Kriterium im Hinblick auf die bei der DFT unterstellte periodische Fortsetzung wurde jedoch angesehen, dass das *von Hann*-Fenster an den Intervallenden auf null ausläuft, was bei der *Hamming*-Fensterfunktion nicht der Fall ist. Da der Spitzenwert $v_{1,\text{max}}$ nicht in der Mitte des Berechnungszeitfensters lag, wurden zwei halbe Fensterfunktionen – je eine für die Anstiegsphase und eine für die Abklingphase – verwendet. So wurde sichergestellt, dass die Spitzenwerte des originalen und des gefensterten Zeitverlaufs betraglich und zeitlich identisch sind. Zero-Padding, Fensterung und diskrete *Fourier*-Transformation wurden in MATLAB programmiert und berechnet.

Unabhängig von der Ladungstiefe d_{TNT} , der horizontalen Entfernung r_{hor} des Messpunkts von der Vertikalen durch den Ladungsschwerpunkt sowie unabhängig von der Messpunkttiefe x unter Geländeoberkante und der Berücksichtigung einer Fensterfunktion zeigen die Betragsspektren $|v_{y,\text{Ampl}}[m]| = |v_{y,\text{Ampl}}(m \cdot \Delta f)| = |v_{y,\text{Ampl}}(f)|$ aller ausgewerteten Zeitverläufe $v_y[n] = v_y(n \cdot T_s) = v_y(t)$ einen Verlauf wie in Abbildung 5.31 mit folgenden Merkmalen:

- das konstante Glied – das heißt der *Fourier*-Koeffizient bei $m = 0$ – hat den größten Betrag, und
- die Spitzenwerte der Nebenzipfel liegen stets weit unterhalb des globalen Spitzenwertes.

Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die untersuchten Eingangsfolgen $v_y[n]$ in grober Näherung einen trapezförmigen Verlauf aufweisen, und die „Summanden“ der Trapezfolge –

⁶¹ Hinsichtlich der theoretischen Grundlagen der diskreten *Fourier*-Transformation sowie zugehöriger Aspekte wie Fensterung und Zero-Padding wird auf Anhang D verwiesen.

Rechteckfolge und Dreieckfolge – ähnliche Eigenschaften wie oben aufgezählt haben [138, pp. 99-103].

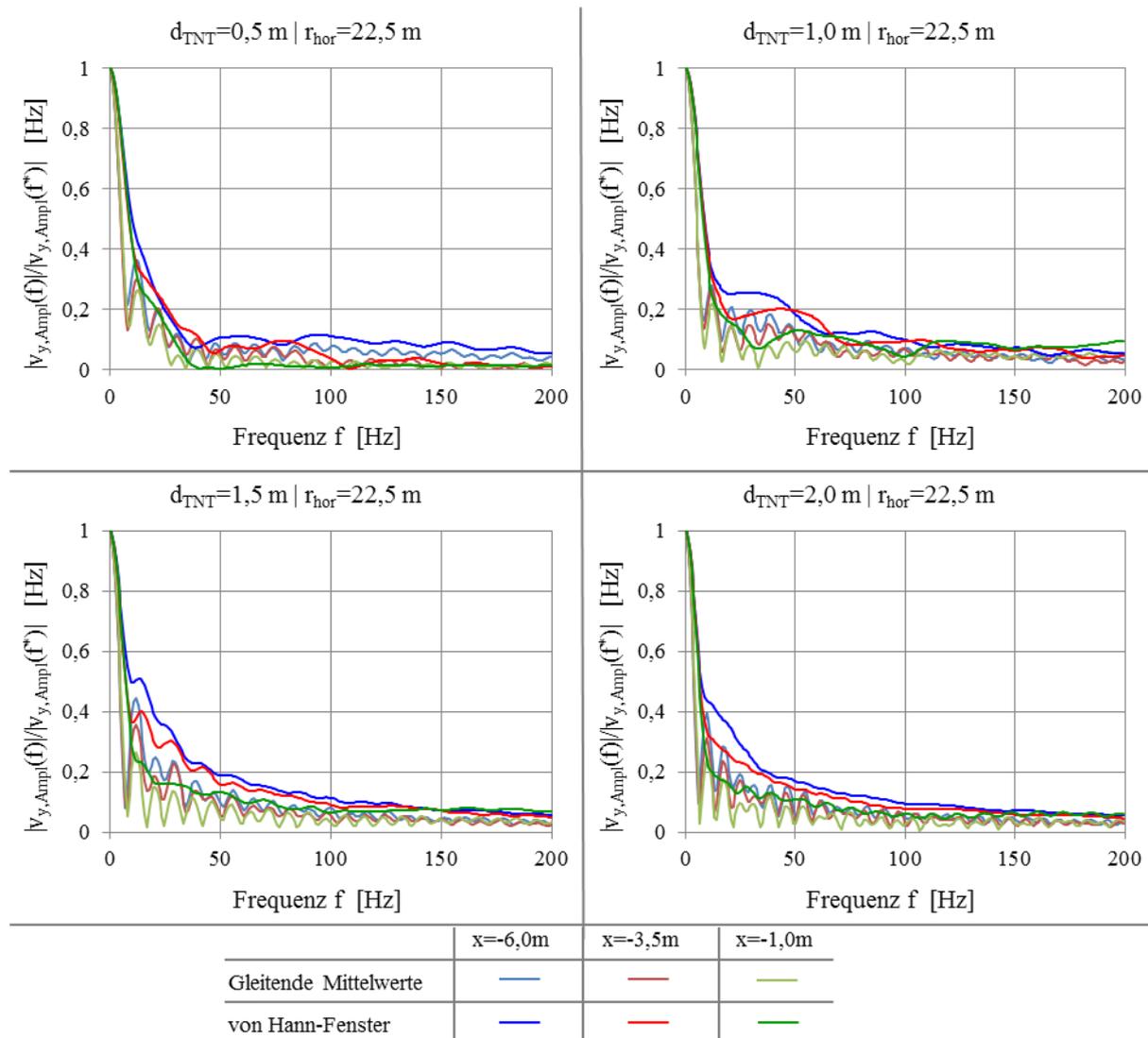


Abbildung 5.31 Normierte Betragsspektren der horizontalen Partikelgeschwindigkeit v_y für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT} und Messwerttiefe x , hier beispielhaft für $r_{hor} = 22,5\text{ m}$

Die Hauptfrequenz f^* liegt für die untersuchten Werte von d_{TNT} , r_{hor} und x größtenteils im unteren Frequenzbereich $0 \leq f^* \leq 10\text{ Hz}$ und damit bei Frequenzen, für die – unabhängig vom unterstellten Kriterium – die zulässigen Schwinggeschwindigkeiten $v_{1,zul}(f)$ am kleinsten sind. Für die Auswertung bedeutet dies, dass lediglich der Spitzenwert $v_{1,max}$ der betrachteten Partikelgeschwindigkeit relevant ist.

Die Spitzenpartikelgeschwindigkeit $v_{y,max}$ kann – ähnlich wie der Spitzenluftdruck $p_{1,max}$ – für gegebene Werte von d_{TNT} und x durch eine Potenzfunktion nach Gleichung (5.34) angenähert werden. Die zugehörigen Parameter A und n gemäß Tabelle 5-7 wurden wieder mittels der Methode der minimalen Fehlerquadrate optimiert. Wie Abbildung 5.32 zeigt, stimmen für Spitzenpartikelgeschwindigkeiten $v_{y,max} \leq 0,05\text{ m/s}$ die mit der Näherungsformel und die in AUTODYN berechneten Werte (sehr) gut überein. Für horizontale Entfernungen $r_{hor} \leq 20\text{ m}$

sollten diese Werte jedoch nicht verwendet werden. Für Entfernungen $r_{hor} > 20$ m können die sichere Entfernung $r_{hor,safe}$ sowie die Grenzentfernung $r_{hor,lim}$ hinsichtlich des Schadenskriteriums „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“ für gegebene Werte von d_{TNT} und x gemäß Gleichung (5.35) ermittelt werden.

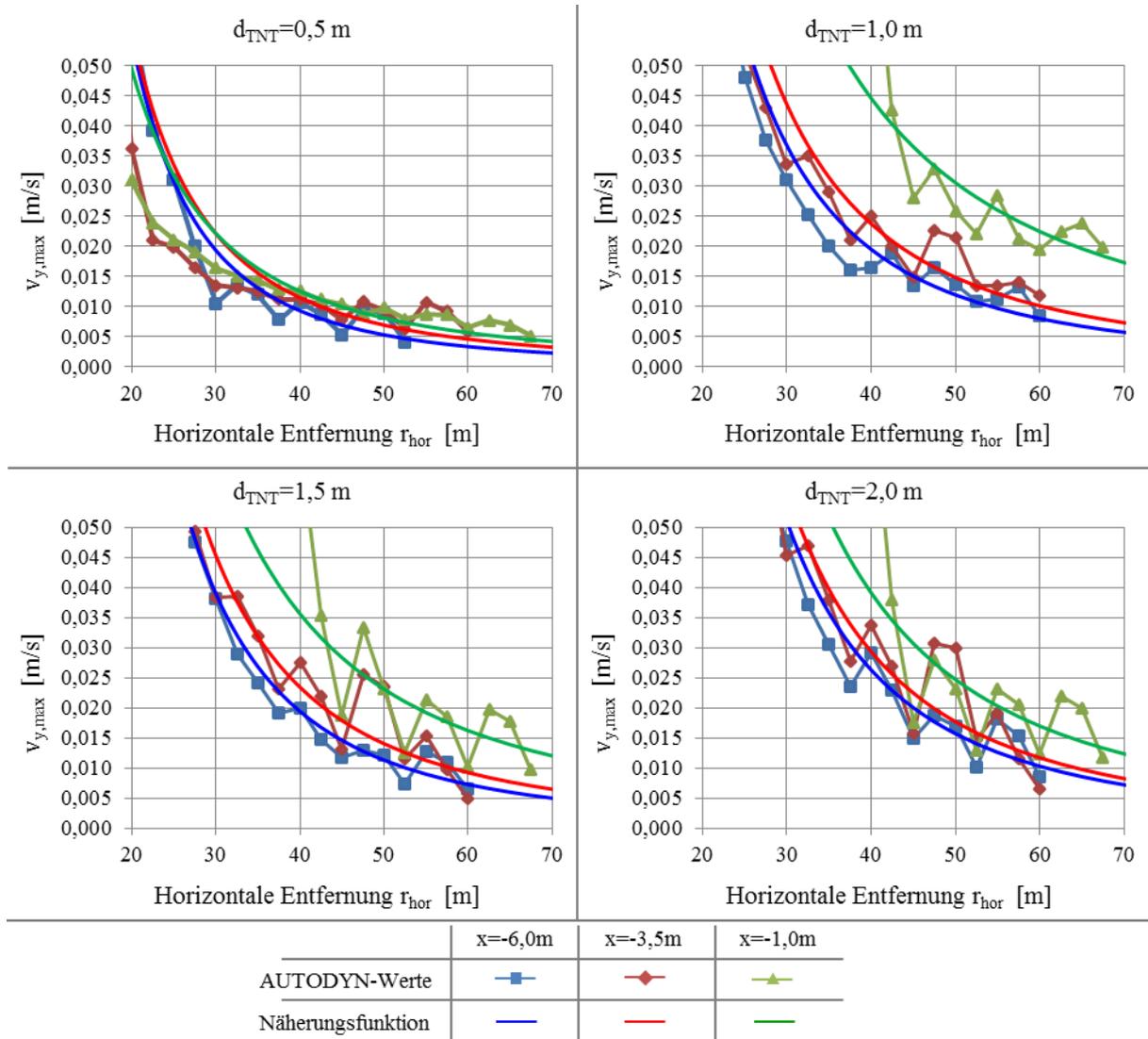


Abbildung 5.32 Spitzenwert $v_{y,max}$ der horizontalen Partikelgeschwindigkeit für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT} und Messpunkttiefen x

$$v_{y,max}(r_{hor}) [m/s] = A \cdot (r_{hor} [m])^n \quad (5.34)$$

$$v_{y,max}(r_{hor}) \leq v_{1,zul}(r_{hor,safe/lim}) \Leftrightarrow r_{hor} \geq r_{hor,safe/lim} = \left(\frac{v_{1,zul}}{A} \right)^{1/n} \quad (5.35)$$

Tabelle 5-7 Spitzenwert $v_{y,max}$ der horizontalen Partikelgeschwindigkeit – Koeffizienten A und n für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT} und Messpunkttiefen x

d_{TNT} [m]	x=-6,0 m		x=-3,5 m		x=-1,0 m	
	A	n	A	n	A	n
0,5	117,6582	-2,5631	53,8072	-2,2936	18,9404	-1,9861
1,0	67,9419	-2,2122	58,6421	-2,1187	23,3876	-1,698
1,5	145,8511	-2,4189	110,13	-2,2919	45,4996	-1,9387
2,0	130,4392	-2,3065	124,066	-2,2633	77,4151	-2,0575

Die drei untersuchten Messpunkttiefen $x = \{-6,0 \text{ m}; -3,5 \text{ m}; -1,0 \text{ m}\}$ entsprechen ungefähr dem Gründungshorizont flachgegründeter Bauwerke mit zwei, einem oder ohne Kellergeschoss. In Abhängigkeit der Messpunkt- bzw. Gründungstiefe x sowie der Ladungstiefe d_{TNT} wurden die folgenden zwei Entfernungen ermittelt:

- Ab der sicheren Entfernung $r_{hor,safe}$ (siehe Abbildung 5.33) kann von einem unbeschädigten Bauwerk ausgegangen werden. Die Berechnung erfolgte mit Gleichung (5.34) und Tabelle 5-7 für das Kriterium für Wohngebäude gemäß DIN 4150-3 [107]. Der Übertragungsfaktor wurde zu $V_F = 1,0$ gesetzt, was im relevanten unteren Frequenzbereich einen zulässigen Wert von $v_{1,zul} = 5 \text{ mm/s}$ ergibt.
- In der Grenzentfernung $r_{hor,lim}$ gemäß Abbildung 5.34 darf das Bauwerk trotz Schädigung noch als ausreichend tragfähig angesehen werden. Hierfür wurde das Kriterium nach *Lu et al.* [108] mit einer zulässigen Partikelgeschwindigkeit bei niederen Frequenzen von $v_{1,zul} = 0,3 \text{ m/s} = 300 \text{ mm/s}$ verwendet. Dieser Ansatz liegt im Vergleich zu den zulässigen Werten gemäß AASTP-1 [105] bei Frequenzen $f < 90 \text{ Hz}$ auf der sicheren Seite. Die Grenzentfernungen $r_{hor,lim}$ wurden mit den AUTODYN-Werten berechnet, da die mit Gleichung (5.34) und Tabelle 5-7 berechneten Spitzenpartikelgeschwindigkeiten für Entfernungen $r_{hor} \leq 20 \text{ m}$ deutlich von den AUTODYN-Werten abweichen.

Wie Abbildung 5.33 zeigt, ist die sichere Entfernung $r_{hor,safe}$ umso größer, je oberflächennaher die Gründung liegt. Diese Aussage steht im Einklang mit den Ausführungen in Abschnitt 2.1.3, wonach Oberflächenwellen im Vergleich zu Kompressions- und Scherwellen eine deutlich geringere Dämpfung erfahren, dementsprechend eine größere Reichweite aufweisen und somit für oberflächennahe Gründungen das größte Zerstörungspotential beinhalten. Da auch Bauwerke mit Kellergeschoss(en) durch Oberflächenwellen zu Schwingungen angeregt werden, sollte die zur Gründungstiefe $x = -1,0 \text{ m}$ gehörige sichere Entfernung auch bei Gebäuden mit Kellergeschoss(en) verwendet werden.

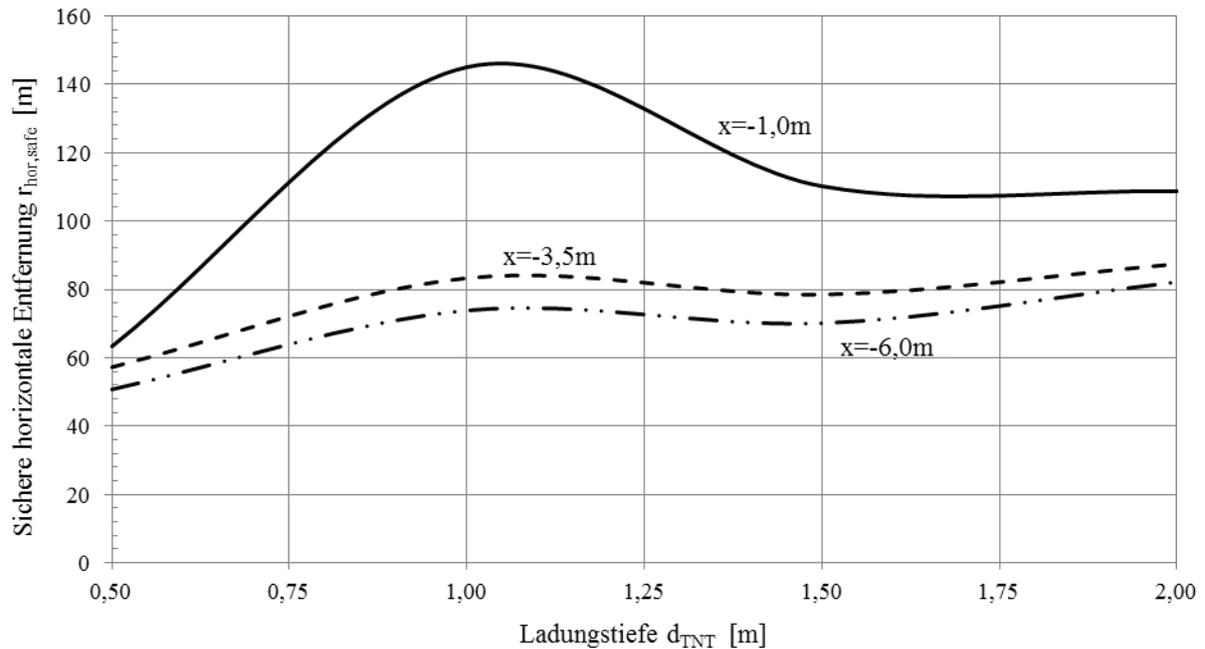


Abbildung 5.33 Sichere horizontale Entfernung $r_{\text{hor,safe}}$ für unbeschädigte Bauwerke in Abhängigkeit der Ladungstiefe d_{TNT} und der Gründungstiefe x

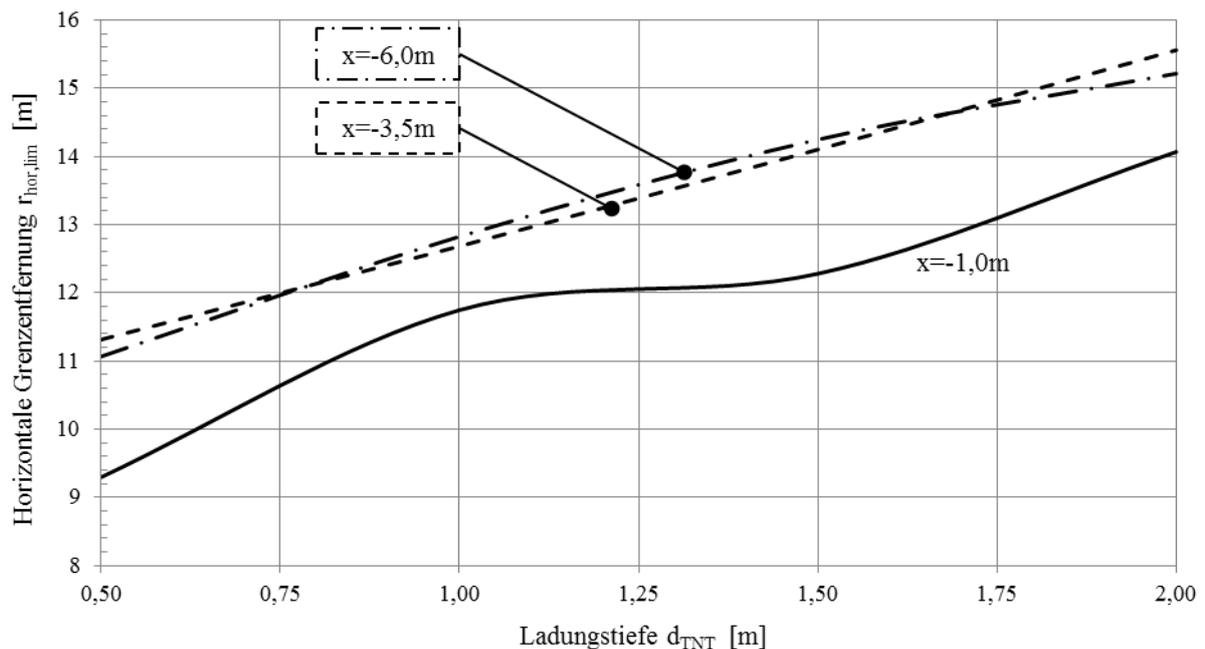


Abbildung 5.34 Horizontale Grenzentsfernung $r_{\text{hor,lim}}$ für beschädigte aber noch tragfähige Bauwerke in Abhängigkeit der Ladungstiefe d_{TNT} und der Gründungstiefe x

5.4.4 Auswertung des Kriteriums Nr. 3 „Unzulässige Winkelverdrehung infolge Sackungen“

Die maximalen Beträge der Schubverzerrungen zeigten deutlich stärkere Schwankungen als die Spitzenpartikelgeschwindigkeit $v_{y,\text{max}}$ oder der Spitzenluftdruck $p_{1,\text{max}}$, was auf die bereits beschriebenen Probleme – an gekoppelten Knoten ausgelöste, künstliche Wellenpakete und

Unzulänglichkeiten bei der vertikalen Partikelgeschwindigkeit v_x – zurückgeführt wurde. Messpunkte mit horizontalen Koordinaten $y = r_{\text{hor}} \leq 10$ m sowie Messpunkte an den gekoppelten Knoten der Segmentgrenzen mit horizontaler Koordinate $y = n \cdot 7,5$ m, $n \in \mathbb{N}$ wurden in der Auswertung deshalb nicht berücksichtigt. Bei Letzteren waren die Schubverzerrungen meist um einen Faktor ~ 10 größer als an den benachbarten Messpunkten. Des Weiteren wurde die Auswertung für Entfernungen, ab denen ein deutlicher Wiederanstieg der $|\varepsilon_{xy}|_{\text{max}}$ -Werte auszumachen war, abgebrochen. Verbliebene Schwankungen wurden durch Mittelwertbildung und die damit verbundene Reduzierung an Datenpunkten abgemindert. Das Vorgehen ist in Abbildung 5.35 beispielhaft für die Ladungstiefe d_{TNT} , bei der die größte Streuung in den AUTODYN-Ergebnissen auftrat, dargestellt. Die verbliebenen, bewerteten Datenpunkte wurden analog zur Vorgehensweise in den Abschnitten 5.4.2 und 5.4.3 für gegebene Werte von d_{TNT} und x mittels optimierter Funktionen dargestellt. Die beste Näherung wurde dabei mit einer Exponentialfunktion gemäß Gleichung (5.36) erreicht.

$$|\gamma_{xy}|_{\text{max}} = 2 \cdot |\varepsilon_{xy}|_{\text{max}} = 2 \cdot A \cdot \exp(B \cdot r_{\text{hor}}) \quad (5.36)$$

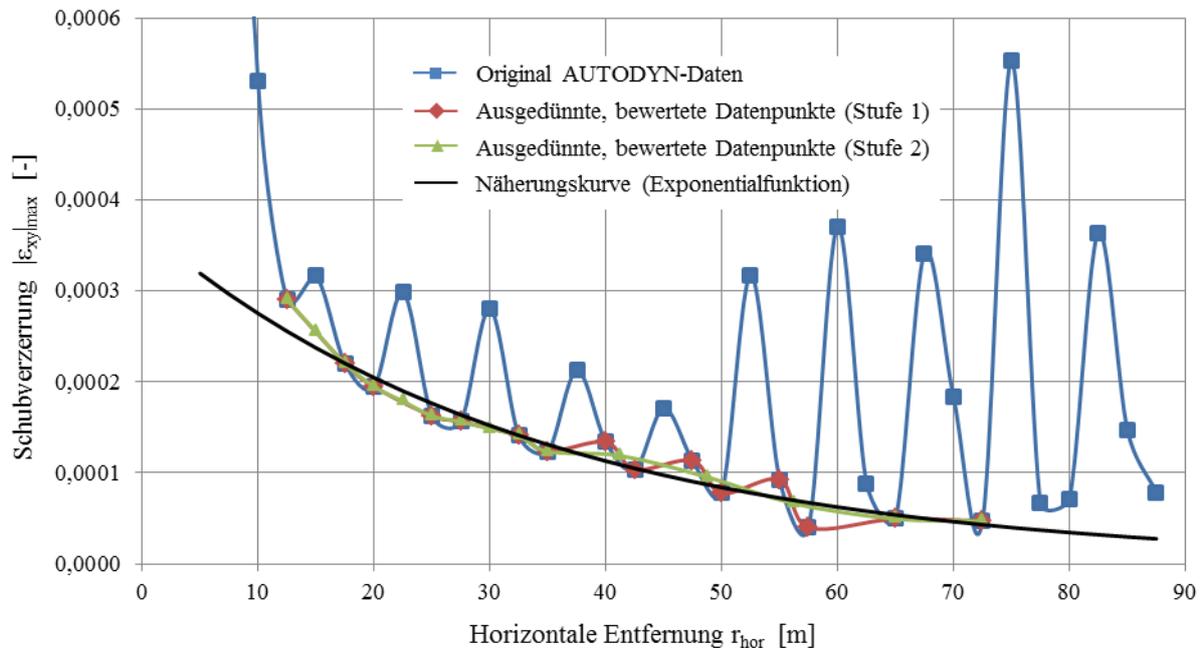


Abbildung 5.35 Ermittlung der Näherungsfunktion $|\varepsilon_{xy}|_{\text{max}} = f(r_{\text{hor}})$ für den maximalen Betrag der Schubverzerrungen, hier beispielhaft für $d_{\text{TNT}} = 0,5$ m und $x = -1,0$ m

Mit den Schubverzerrungen $|\gamma_{xy}|_{\text{max}}$ und den Grenzscherungen $\gamma_{\text{tl/iv,M}}(I_p = 0)$ ⁶² (siehe Gleichung (5.10) und Tabelle 5-3) wurden die Porenanteile n_1 (5.14) und die vertikale Stauchung ε_x (5.15) berechnet. Die Sackung s (5.16) folgte aus der Integration von ε_x über den Tiefenbereich $-6 \text{ m} \leq x \leq -1 \text{ m}$ ⁶³. Damit und mit der Definition gemäß Abbildung 5.6 wurde

⁶² Für $\gamma_{\text{iv,M}}$ wurden die neueren Werte nach *Hsu & Vuketic* [122] verwendet.

⁶³ Prinzipiell treten auch in Tiefen > 6 m unter Geländeoberkante Stauchungen auf. Bei dem gewählten Modellierungsansatz gemäß Abschnitt 5.3.4.2 wurden jedoch nur innerhalb des zentralen, fein vernetzten Modellbereichs Messpunkte gesetzt.

für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT} die vorhandene Winkelverdrehung $\tan \beta = f(r_{\text{hor}})$ ermittelt. Diese ist – entsprechend der unterstellten Funktion für die Schubverzerrung $|\gamma_{xy}|_{\text{max}}$ – eine Exponentialfunktion (siehe Abbildung 5.36). Einsetzen der Grenzwerte der Winkelverdrehung $\tan \beta_{\text{SLS}} = 1/500$ für Schadensfreiheit und $\tan \beta_{\text{zul}}(\text{ULS}) = 1/150$ für einen Grenzzustand der Tragfähigkeit in Gleichung (5.37) führte auf die in Abbildung 5.37 dargestellte sichere Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$ sowie die Grenzentsfernung $r_{\text{hor, lim}}$ für das Schadensbild „Unzulässige Winkelverdrehung der Fundamente infolge Sackungen“.

$$\tan \beta(r_{\text{hor}}) \leq \tan \beta_{\text{SLS/ULS}}(r_{\text{hor, safe/lim}}) \Leftrightarrow r_{\text{hor}} \geq r_{\text{hor, safe/lim}} = \frac{\ln \frac{\tan \beta_{\text{SLS/ULS}}}{A}}{B} \quad (5.37)$$

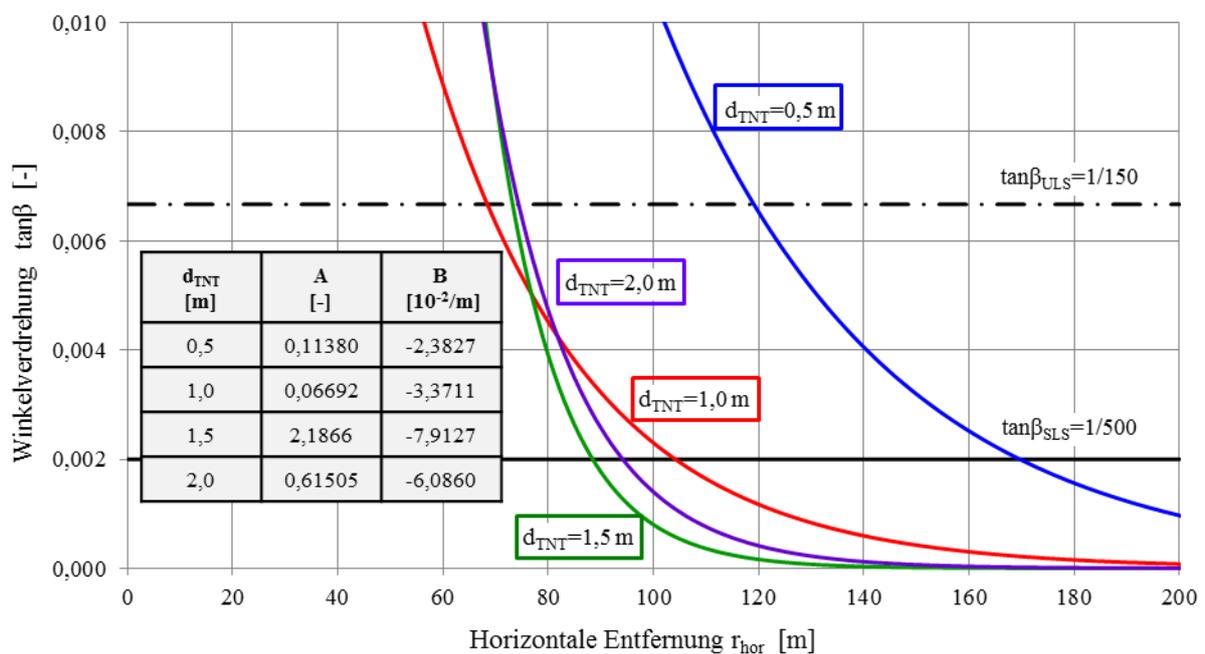


Abbildung 5.36 Sackungsbedingte Winkelverdrehung $\tan \beta = f(r_{\text{hor}})$ für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT}

Die zur Ladungstiefe $d_{\text{TNT}} = 0,5$ m gehörige Kurve in Abbildung 5.36 ist im Vergleich zu den anderen Ladungstiefen deutlich nach rechts verschoben. Entsprechend sind die zugehörigen Entfernungen $r_{\text{hor, safe/lim}}$ in Abbildung 5.37 deutlich größer als bei allen anderen Ladungstiefen. Dies ist insofern verwunderlich, als bei der kleinsten betrachteten Ladungstiefe $d_{\text{TNT}} = 0,5$ m am wenigsten Energie auf den Baugrund übertragen wird. Die direkte Erdstoßwelle müsste deshalb eine deutlich kürzere Reichweite haben, und die Entfernungen sollten für $d_{\text{TNT}} = 0,5$ m am kleinsten sein. Allerdings passt dieser Effekt prinzipiell zu den in Abschnitt 4.3 erwähnten Versuchsauswertungen von *Cook et al.* [95], wonach:

- eine genaue Trennung zwischen direkter und luftinduzierter Erdstoßwelle nicht immer möglich ist und

- die luftinduzierte, indirekte Erdstoßwelle eine größere Verschiebungs- und Beschleunigungsamplitude aufweist als die direkte Erdstoßwelle.

Im vorliegenden Fall wurde dieses Ergebnis trotzdem als falsch angesehen. Als ursächlich für diesen Effekt wurde – neben den an gekoppelten Knoten ausgelösten künstlichen Wellen und der nicht vorhandenen Dämpfung der vertikalen Partikelgeschwindigkeit v_x – das in Abschnitt 5.3.3 erwähnte Problem des gewählten Materialmodells bei sehr kleinen Spannungen ausgemacht. Aufgrund der an der freien Oberfläche ausgelösten Entspannungswelle kommt es zu einem Abfall der Spannungen hinter der Wellenfront und starken Oszillationen in den Zeitverläufen der Partikelgeschwindigkeiten. Demzufolge zeigen die AUTODYN-Zeitverläufe der Schubverzerrungen in diesem entspannten Bereich durchgängig einen deutlichen Anstieg. Für die kleinste Ladungstiefe ist dieser Effekt am stärksten ausgeprägt. Entsprechend ist das Kriterium Nr. 3 generell als das Schadenskriterium mit der größten Unsicherheit anzusehen.

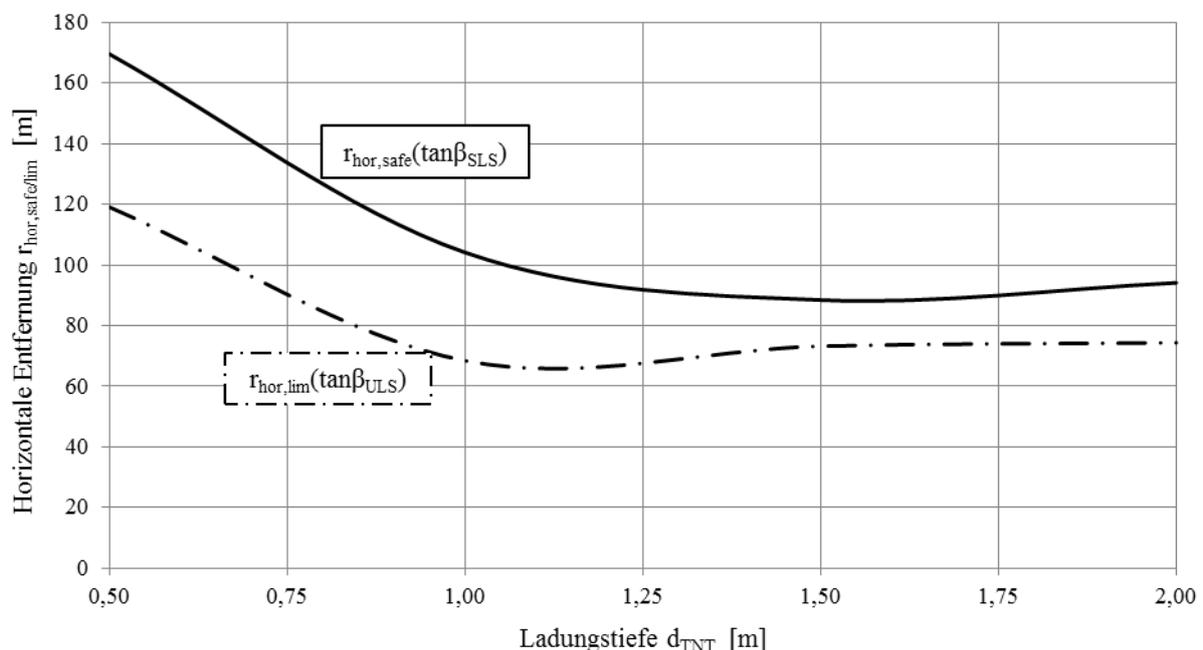


Abbildung 5.37 Horizontale Grenzabstände $r_{hor,lim}$ für das Schadensbild „Unzulässige Winkelverdrehung der Fundamente infolge Sackungen“

5.5 Ergebnis

In den Abschnitten 5.4.2 bis 5.4.4 wurden für unterirdische Explosionen und die drei Schadenskriterien „Luftstoß“, „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“ und „Unzulässige Winkelverdrehungen der Fundamente infolge Sackungen“ die sichere horizontale Entfernung $r_{hor,safe}$, in der ein Gebäude unbeschädigt bleibt, und die Grenzabstand $r_{hor,lim}$, bei deren Einhaltung das Tragwerk zwar beschädigt wird aber nicht vollständig zusammenbricht, ermittelt und in Abhängigkeit der Ladungstiefe d_{TNT} in separaten Diagrammen dargestellt. Die Diagramme gelten unter den folgenden Randbedingungen:

- flachgegründete, oberirdische Bauwerke ohne Kellergeschoss

- Baugrund: locker bis mitteldicht gelagerter, trockener Sand
- Explosion:
 - Explosivstoff TNT mit einer Ladungsmasse $W = 125 \text{ kg}$
 - Tiefe des Ladungsschwerpunkts: $0,5 \text{ m} \leq d \leq 2,0 \text{ m}$

In den folgenden zwei Abbildungen wurden die Ergebnisse aller drei Schadenskriterien zusammengeführt. Für die Ermittlung der sicheren Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$ in Abbildung 5.38 wurden die folgenden Grenzwerte verwendet:

- Zulässiger Spitzenluftdruck $p_{1, \text{zul}} = 5 \text{ kPa}$ gemäß NATO-Manual AASTP-1 [105, pp. III-1-1]
- Zulässige Partikelgeschwindigkeit $v_{1, \text{zul}} = 5 \text{ mm/s}$ gemäß dem Kriterium für Wohngebäude nach DIN 4150-3 [107] unter Berücksichtigung eines Übertragungsfaktors $V_F = 1,0$
- Zulässige Winkelverdrehung im Bereich der Fundamente von $\tan \beta_{\text{SLS}} = 1/500$ gemäß DIN EN 1997-1 [120], Anhang H

Die Grenzentfernung $r_{\text{hor, lim}}$ gemäß Abbildung 5.39 wurde auf Grundlage der folgenden Grenzwerte ermittelt:

- Zulässiger Spitzenluftdruck $p_{1, \text{zul}} = 10 \text{ kPa}$ entsprechend einer Zerstörung von 100 % aller Fensterscheiben gemäß Tabelle 5-1
- Zulässige Partikelgeschwindigkeit $v_{1, \text{zul}} = 300 \text{ mm/s}$ gemäß dem Kriterium für Stahlbeton-Rahmentragwerke nach *Lu et al.* [108]
- Zulässige Winkelverdrehung der Fundamente von $\tan \beta_{\text{ULS}} = 1/150$ gemäß DIN EN 1997-1 [120], Anhang H

In beiden Abbildungen wurden die Kurven für Luftstoß und Fußpunktanregung jeweils zusammengefasst. Für geringe Ladungstiefen ist das Luftstoß-Kriterium maßgebend, während für größere Ladungstiefen die Schwingungsanregung des Bauwerks die sichere Entfernung bzw. die Grenzentfernung bestimmt.

Die entsprechenden Entfernungen für das Schadensbild „unzulässige Winkelverdrehungen der Fundamente infolge Sackungen“ liegen in beiden Diagrammen deutlich oberhalb der Entfernungen für die beiden anderen Schadensbilder. Allerdings sind diese Kurven mit der größten Unsicherheit behaftet und zudem nur für schwingungsempfindliche Böden relevant. Für Ladungstiefen $0,5 \text{ m} \leq d_{\text{TNT}} \leq 1,0 \text{ m}$ scheinen die ermittelten Grenzentfernungen sehr stark auf der sicheren Seite zu liegen, weshalb die entsprechenden Linien gestrichelt dargestellt wurden.

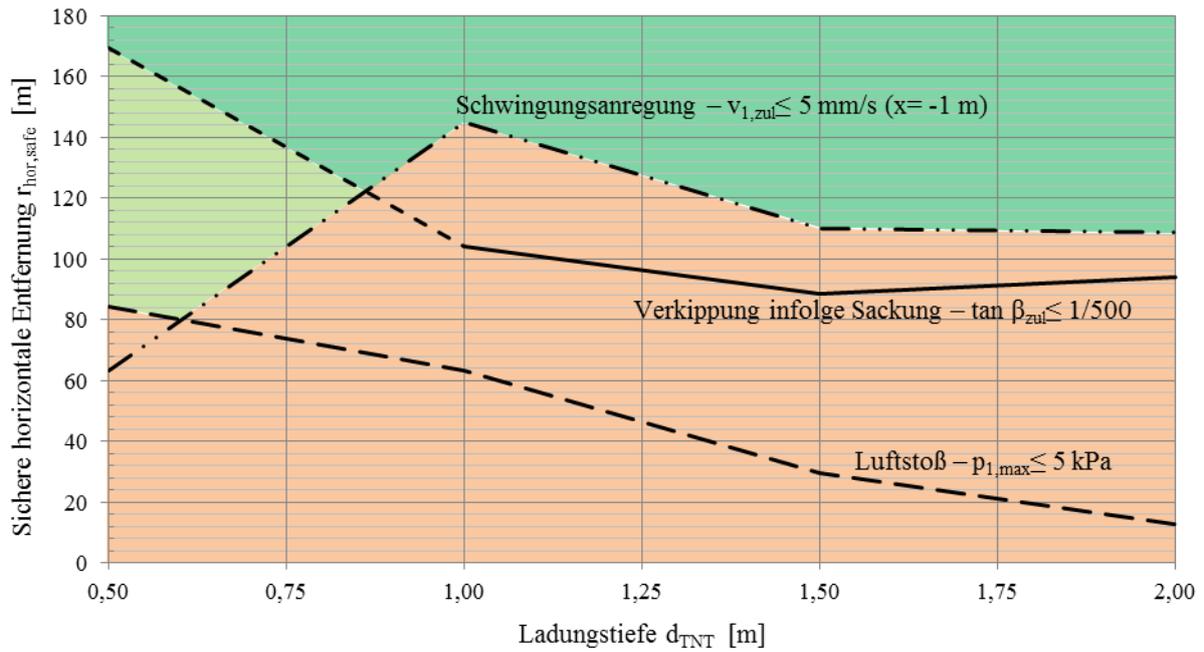


Abbildung 5.38 Sichere horizontale Entfernung $r_{hor,safe}$ für unbeschädigte Bauwerke

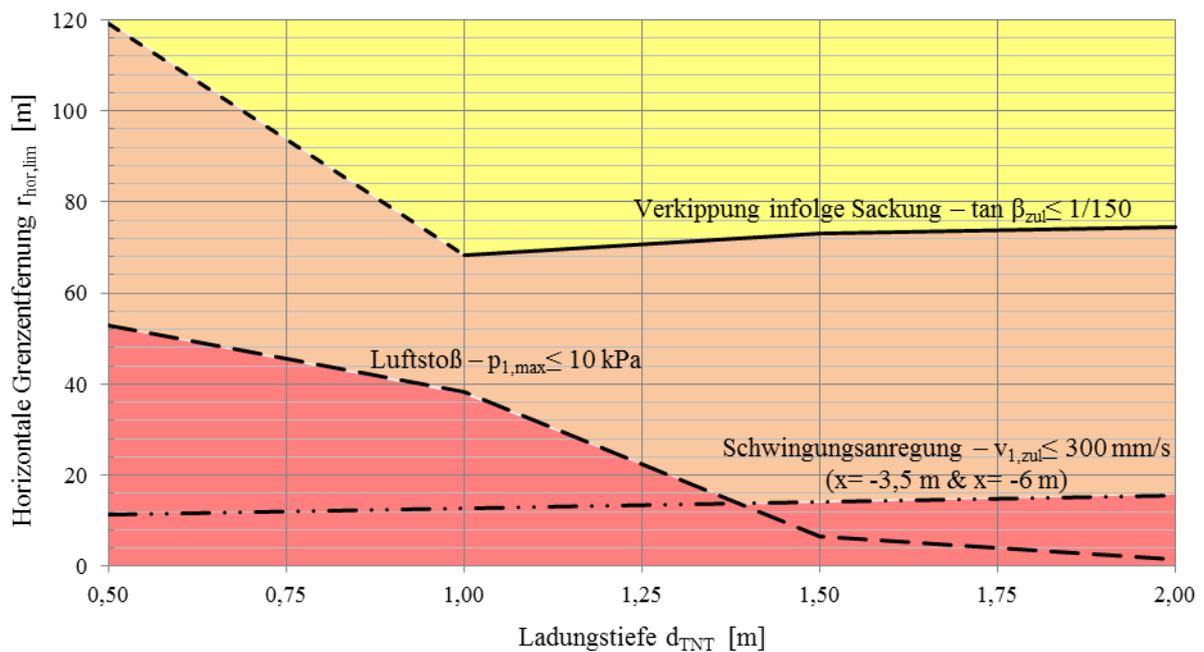


Abbildung 5.39 Horizontale Grenzentfernung $r_{hor,lim}$ für beschädigte Bauwerke mit Resttragfähigkeit

Des Weiteren wurde in Abschnitt 5.4.2.1 eine Funktion für den Luftüberdruck $p_1(t)$ entwickelt, die als Belastungsansatz bei einer (Vor-)Bemessung oberirdischer Bauwerke verwendet werden kann. Die Funktion ist in den Gleichungen (5.38) bis (5.42) und der nachfolgenden Tabelle 5-8 für die zugehörigen Koeffizienten nochmal zusammengestellt. Die Angaben gelten für Ladungstiefen $d_{TNT} = \{0,5 \text{ m}; 1,0 \text{ m}; 1,5 \text{ m}; 2,0 \text{ m}\}$. Für Zwischenwerte der Ladungstiefe d_{TNT} wird empfohlen, die Parameter $p_{1,max}$, t_a , t_p und α an den benachbarten Stützstellen $d_{TNT} = \{0,5 \text{ m}; 1,0 \text{ m}; 1,5 \text{ m}; 2,0 \text{ m}\}$ auszurechnen und zu interpolieren. Die

Funktion wurde auf Grundlage der AUTODYN-Daten in einer Höhe $x = 1,5$ m über Gelände abgeleitet, kann aber aufgrund der nahezu senkrechten Luftstoßwellenfronten für Höhen ≤ 6 m über Gelände verwendet werden.

$$p_1(t) = \begin{cases} p_{1,\max} \cdot \frac{t-t_a}{t_p-t_a} \\ p_{1,\max} \cdot \exp[-\alpha \cdot (t-t_p)] \end{cases} \text{ für } \begin{cases} t_a \leq t < t_p \\ t \geq t_p \end{cases} \quad (5.38)$$

$$I = \int p_1(t) dt = p_{1,\max} \cdot \left(\frac{t_p - t_a}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (5.39)$$

$$p_{1,\max} [kPa] = A \cdot (r_{hor} [m])^n + B \quad (5.40)$$

$$t_a [ms] = a_a \cdot r_{hor} [m] + b_a \quad t_p [ms] = a_p \cdot r_{hor} [m] + b_p \quad (5.41)$$

$$\alpha = a \cdot (r_{hor} [m])^b + c \quad (5.42)$$

Tabelle 5-8 Koeffizienten A, B und n für Gleichung (5.40), $a_{a/p}$ und $b_{a/p}$ für Gleichung (5.41) sowie a bis c für Gleichung (5.42), jeweils für unterschiedliche Ladungstiefen d_{TNT}

	$d_{TNT} = 0,5$ m	$d_{TNT} = 1,0$ m	$d_{TNT} = 1,5$ m	$d_{TNT} = 2,0$ m
A	424,5831	138,9259	73,1186	123,513
B	-5,4874	-83,4362	-56,2163	-112,2835
n	-0,8349	-0,1089	-0,0525	-0,0204
a_a [ms/m]	2,7617	2,832	3,0083	3,2367
b_a [ms]	-7,8538	3,575	7,9461	25,5599
a_p [ms/m]	2,786	2,7732	2,8976	2,6183
b_p [ms]	-8,1254	9,485	43,4287	79,7016
a	0,79762	0,28056	-0,20705	-3,88705
b	-1,17623	-1,30925	-0,02879	-0,00208
c	0,04675	0,04188	0,21593	3,88015

6 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung einer Entscheidungshilfe zur Abschätzung der Auswirkungen von durch unterirdische, oberflächennahe Explosionen ausgelösten Wellen auf Gebäude. Dazu wurden die nachfolgenden Schritte durchgeführt und abgearbeitet.

In Kapitel 2 wurden die theoretischen Grundlagen der Wellenausbreitung erläutert. Es wurde der Unterschied zwischen elastischen und plastischen Wellen sowie Stoß- bzw. Schockwellen aufgezeigt und der Einfluss der maßgebenden Parameter – Spannungsniveau, Verzerrungszustand, Form der Kompressionskurve und Verzerrungsrate – erläutert.

In Kapitel 3 wurden die wichtigsten hochdynamischen Versuche vorgestellt. Die daraus abgeleiteten Daten bilden die Grundlage zur numerischen Beschreibung des Bodenverhaltens bei mittleren und hohen Verzerrungsraten bzw. bei Explosionen. Der aktuelle Stand des Wissens hinsichtlich qualitativer und quantitativer, experimenteller Ergebnisse wurde zusammengetragen. Die folgenden Probleme und zugehörigen Ursachen bei hochdynamischen Experimenten mit Böden wurden herausgearbeitet:

- große Streubreiten in den Versuchsergebnissen aufgrund herstellungsbedingter, aus den geringen Probenmassen und -volumina resultierender Abweichungen zwischen den einzelnen Proben hinsichtlich ihrer Ausgangsdichte ρ_{00} und Inhomogenitäten innerhalb der Proben
- fehlende Zuordnungsmöglichkeit und Vergleichbarkeit unterschiedlicher Datensätze, da die geotechnischen Standardversuche zur Benennung und Klassifizierung der untersuchten Böden oft nicht durchgeführt wurden
- Postulierung eines hydrodynamischen Spannungszustands bei Planar-Platten-Versuchen, obwohl von *Bragov et al.* [34], [35], [36] klar gezeigt wurde, dass diese Annahme für Axialspannungen $500 \text{ MPa} \leq \sigma_x \leq 2\text{-}4 \text{ GPa}$ in vielen Fällen nicht gerechtfertigt ist
- derzeit noch unzureichende Versuchstechnik im Hinblick auf die Bestimmung der Entlastungspfade als ein wesentlicher Teil zur Beschreibung der Zustandsgleichung von Böden
- fehlende Daten zur Beschreibung des Scherverhaltens von Böden bei mittleren und hohen Verzerrungsraten in Ermangelung gültiger Versuchsergebnisse und funktionierender Versuchsaufbauten

Aufgrund der genannten Defizite wird eine Kalibrierung der in Hydrocode-Berechnungen verwendeten Materialmodelle an empirischen Gleichungen als zwingend notwendig erachtet. In Kapitel 4 wurden deshalb die empirischen Modelle von *Drake & Little* [3] sowie nach *Drake et al.* [96] vorgestellt und miteinander verglichen. Als Einschränkungen der empirischen Modelle im Hinblick auf eine Kalibrierung wurden herausgearbeitet:

- Gültigkeit der empirischen Modelle nur für den Vollraum ohne Reflexionen an Schichtgrenzen oder der Geländeoberfläche

- Anpassung stets nur für den Spitzenwert eines Erdstoßparameters
- Vernachlässigung der empirischen Zeitverläufe aufgrund der für Böden unrealistischen Sogphasen

Des Weiteren wurde dargestellt, dass aufgrund des Ansatzes mit einer entkoppelten, numerischen Simulation lediglich die Interaktionen zwischen den Komponenten Explosivstoff, Boden und Luft bestmöglich erfasst werden können.

Aufgrund der gewünschten Allgemeingültigkeit der Entscheidungshilfe für eine Vielzahl von Bauwerken konnte die Interaktion zwischen der Erdstoß- und Luftstoßwelle mit dem Bauwerk nur näherungsweise berücksichtigt werden. Die entsprechenden empirischen Kriterien für die drei Schadensbilder „Luftstoß“, „Fußpunktanregung des Bauwerks zu Schwingungen“ und „unzulässige Winkelverdrehungen der Fundamente infolge Sackungen“ wurden in Kapitel 5 vorgestellt. Als Eingangswerte für diese Kriterien wurden die Freifeld-Zeitverläufe des Luftdrucks, der Partikelgeschwindigkeit und der Schubverzerrungen benötigt, die anhand numerischer Simulationen mit dem kommerziellen Hydrocode AUTODYN bestimmt wurden. Für die Simulationen wurde die Modellierungsstrategie eines „mitlaufenden Fensters“ entwickelt, die folgende Punkte beinhaltet:

- genaue Abbildung der Detonation, der Interaktion zwischen Explosivstoff und umgebendem Boden sowie der zeitlichen Entwicklung der Detonationswelle bis kurz vor Erreichen der Geländeoberkante in einem sehr fein vernetzten 1D-Wedge-Modell und Remapping der Ergebnisse in ein radialsymmetrisches 2D-Modell
- Aufspalten der Stoßwelle bzw. der betrachteten Zeitverläufe in einzelne Abschnitte
- Segmentweiser Aufbau und Erweiterung des radialsymmetrischen 2D-Modells:
 - ⇒ Verfolgung der Stoßwelle in einem Betrachtungsfenster unter Einhaltung der für Konvergenz erforderlichen Netzfeinheit und Berücksichtigung der maximal prozessierbaren Zellenanzahl
 - ⇒ Begrenzung der betrachteten Zellenanzahl und damit Einsparung von Rechenzeit bis zu jenem Berechnungsschritt, ab dem das erste Segment gelöscht wird

Die Simulationen wurden beispielhaft für die Explosion einer Ladungsmasse von 125 kg TNT in einem trockenen Sand durchgeführt, wobei die Ladungstiefe variiert wurde. Die Vor- und Nachteile sowie die Eingabeparameter des gewählten Materialmodells für den Boden sind in Anhang C ausführlich erläutert.

Ergebnis der Auswertung waren die in Abschnitt 5.5 präsentierten Diagramme, anhand derer für oberflächennahe, unterirdische Explosionen die sichere Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$ für unbeschädigte Bauwerke sowie die Grenzentfernung $r_{\text{hor, lim}}$ abgelesen werden können. Diese ermöglichen eine schnelle und einfache Antwort auf die in der Motivation gemäß Abschnitt 1.1 formulierten Fragen:

- „Wie groß muss der horizontale Abstand (sichere Entfernung $r_{\text{hor, safe}}$) zwischen einem Gebäude und dem „Epizentrum“ einer Explosion – gekennzeichnet durch den

Explosivstoff, die Ladungsmasse und die Ladungstiefe – mindestens sein, damit das Gebäude nicht beschädigt wird?“

- „Wie groß ist die minimale horizontale Grenzentfernung $r_{\text{hor,lim}}$ zwischen einem Gebäude und dem „Epizentrum“ einer unterirdischen Explosion, bei deren Einhaltung das Tragwerk zwar beschädigt wird aber nicht vollständig zusammenbricht?“

AUTODYN wurde in der vorliegenden Arbeit lediglich als „Hilfsmittel“ benutzt. Die Ergebnisse wurden gewissenhaft kontrolliert. Die gefundenen Unzulänglichkeiten – Probleme mit gekoppelten Knoten sowie des gewählten Materialmodells bei kleinen Drücken und Spannungen – wurden diskutiert. Ein untersuchenswerter Ansatz um hinsichtlich des ersten Problems Abhilfe zu schaffen ist, eine *Euler*-Formulierung lediglich für das erste Segment zu verwenden, da nur dort sehr große Deformationen auftreten. Die weiteren Segmente könnten alle mittels *Lagrange*-Formulierung abgebildet werden. Für die Wellenfortpflanzung vom ersten zum zweiten Segment müsste im verwendeten Berechnungsprogramm die *Euler-Lagrange*-Kopplung implementiert sein, was bei AUTODYN jedoch gegeben ist.

Interessant wären zudem Berechnungen mit demselben Sand aber anderen Ladungsmassen wie z.B. 64 kg oder 1.000 kg, die analog zu den verwendeten 125 kg gut skalierbar sind. Im Anschluss könnte untersucht werden, ob eine skalierte Darstellung der sicheren Entfernung bzw. der Grenzentfernung möglich ist.

Des Weiteren könnte die hier entwickelte Vorgehensweise auf andere Böden und/oder geschichteten Baugrund angewendet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] C. Meier, „Untersuchungen zur Mikrostruktur und zum Setzungsverhalten von Lössböden (Dissertation),“ 2011.
- [2] C. Meier und C. Boley, „Methode zur empirischen Prognose der Verformungen von sackungsanfälligen Lössböden,“ *Bautechnik* 89, pp. 579-584, 2012.
- [3] J. L. Drake und C. D. J. Little, „Ground Shock from Penetrating Conventional Weapons,“ U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, 1983.
- [4] L. Laine, Markstövtag. Myndigheten för smhällsskydd och beredskap, Publ.-Nr. MSB344, Karlstad, 2012.
- [5] L. Laine, „Numerical simulations of ground shock attenuation layers for Swedish rescue centres and shelters,“ in *Proceedings of the 4th Asia-Pacific Conference on Shock and Impact Loads on Structures*, 2001.
- [6] Z. Wang, Y. Lu, H. Hao und K. Chong, „A full coupled numerical analysis approach for buried structures subjected to subsurface blast,“ *Computers and Structures*, Bd. 83, pp. 339-356, 2005.
- [7] Y. Lu, Z. Wang und K. Chong, „A comparative study of buried structure in soil subjected to blast loading using 2D and 3D numerical simulations,“ *Soi Dynamics and Earthquake Engineering* 25, pp. 275-288, 2005.
- [8] G. C. Bessette, „Modeling Blast Loading on Buried Reinforced Concrete Structures with Zapotec,“ *Shock and Vibrations (15)*, pp. 137-146, 2008.
- [9] C. Wu und H. Hao, „Modeling of simultaneous ground shock and airblast pressure on nearby structures from surface explosions,“ *International Journal of Impact Engineering (31)*, pp. 699-717, 2005.
- [10] C. Wu und H. Hao, „Numerical simulation of structural response and damage to simultaneous ground shock and airblast loads,“ *International Journal of Impact Engineering (34)*, pp. 556-572, 2007.
- [11] Y. Lu und Z. Wang, „Characterization of structural effects from above-ground explosion using coupled numerical simulation,“ *Computers and Structures (84)*, pp. 1729-1742, 2006.
- [12] L. Laine und A. Sandvik, „Derivation of mechanical properties for sand,“ in *Proceedings of the 4th Asia-Pacific Conference on Shock and Impact Loads on Structures*, 2001.

- [13] M. A. Meyers, *Dynamic Behavior of Materials*, New York: John Wiley & Sons, 1994.
- [14] F. E. Richart, R. D. Woods und R. D. Hall, *Vibrations of Soils and Foundations*, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1970.
- [15] J. S. Rinehart, *Stress Transients in Solids*, Santa Fe: Hyperdynamics, 1975.
- [16] A. Studer, J. Laue und M. G. Koller, *Bodendynamik*, 3. Auflage Hrsg., Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- [17] J. A. Zukas, *Introduction to Hydrocodes*, Amsterdam: Elsevier, 2004.
- [18] S. Hiermaier, *Structures under Crash and Impact*, New York: Springer, 2008.
- [19] V. A. Lagunov und V. A. Stepanov, „Measurement of the dynamic compressibility of sand at high pressures,“ *Prikladnaya Mekhanika I Tekhnicheskaya Fizika*, Nr. 1, pp. 88-96, 1963.
- [20] P. W. Cooper, *Explosives Engineering*, New York: Wiley-VCH, 1996.
- [21] I. B. Zel'dovich und Y. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, New York: Academic Press, 1967.
- [22] N. Gebbeken und T. Döge, „Der Reflexionsfaktor bei der senkrechten Reflexion von Luftstoßwellen an starren und an nachgiebigen Materialien,“ *Bauingenieur (81)*, pp. 496-503, 2006.
- [23] N. N. Gerdyukov, A. G. Ioilev und S. A. Novikov, „Study of the Effect of Shock Loads on Soft Soils,“ *Prikladnaya Mekhanika I Tekhnicheskaya Fizika*, Nr. 2, pp. 149-152, 1992.
- [24] S. Nemat-Nasser, „Introduction to High Strain Rate Testing,“ in *ASM Handbook Volume 8 – Mechanical Testing and Evaluation*, H. Kuhn und D. Medlin, Hrsg., Materials Park, 2000, pp. 427-428.
- [25] S. Nemat-Nasser, „High Strain Rate Tension and Compression Test,“ in *ASM Handbook Volume 8 – Mechanical Testing and Evaluation*, H. Kuhn und D. Medlin, Hrsg., Materials Park, 2000, pp. 429-446.
- [26] K. Ramesh, „High Strain Rate and Impact Experiments,“ in *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*, W. N. Sharpe, Hrsg., New York, 2008.
- [27] G. T. Gray, „Classic Split-Hopkinson Pressure Bar Testing,“ in *ASM Handbook Volume 8 – Mechanical Testing and Evaluation*, H. Kuhn und D. Medlin, Hrsg., Materials Park, 2000, pp. 462-476.
- [28] J. E. Field, S. M. Walley, W. G. Proud, H. T. Goldrein und C. R. Siviour, „Review of experimental techniques for high rate deformation and shock studies,“ *International*

- Journal of Impact Engineering* (30), pp. 725-775, 2004.
- [29] C. E. Frantz, P. S. Follansbee und W. J. Wright, „New Experimental techniques with the Split Hopkinson Pressure Bar,“ in *8th International Conference on High Energy Rate Fabrication*, San Antonio, 1984.
- [30] D. J. Frew, M. J. Forrestal und W. Chen, „A Split Hopkinson Pressure Bar Technique to Determine Compressive Stress-Strain Data for Rock Materials,“ *Experimental Mechanics* (41), Nr. 1, pp. 40-46, 2001.
- [31] H. Lu, H. Luo und R. Komaduri, „Dynamic Response of Sand under Confinements,“ in *Proceedings of the 2009 SEM annual conference*, 2009.
- [32] B. E. Martin, M. E. Kabir und W. Chen, „Undrained high-pressure and high strain-rate response of dry sand under triaxial loading,“ *International Journal of Impact Engineering* (54), pp. 51-63, 2013.
- [33] H. Luo, W. L. Cooper und H. Lu, „Effects of particle size and moisture on the compressive behavior of dense Eglin sand under confinement at high strain rates,“ *International Journal of Impact Engineering* (65), pp. 40-55, 2014.
- [34] A. M. Bragov, A. K. Lomunov, I. V. Sergeichev, W. G. Proud, K. Tsembelis und P. Church, „A Method for Determining the Main Mechanical Properties of Soft Soils at High Strain Rates (10^3 - 10^5 s⁻¹) and Load Amplitudes up to Several Gigapascals,“ *Technical Physics Letters* (31), Nr. 6, p. 530f, 2005.
- [35] A. M. Bragov, A. K. Lomunov, I. V. Sergeichev und A. R. Filippov, „Dynamic Compressibility of Clay and Loam,“ *Journal de Physique IV France* (134), pp. 275-280, 2006.
- [36] A. M. Bragov, A. K. Lomunov, I. V. Sergeichev, K. Tsembelis und W. G. Proud, „Determination of physicochemical properties of soft soils from medium to high strain rates,“ *International Journal of Impact Engineering* (35), pp. 967-976, 2008.
- [37] D. J. Chapman, K. Tsembelis und W. G. Proud, „The Behaviour of Water Saturated Sand under Shock-Loading,“ in *Proceedings of the 2006 SEM annual conference and exposition on experimental and applied mechanics*, 2006.
- [38] G. T. Gray, „Shock Wave Testing of Ductile Materials,“ in *ASM Handbook Volume 8 – Mechanical Testing and Evaluation*, H. Kuhn und D. Medlin, Hrsg., Materials Park, 2000, pp. 530-538.
- [39] H. D. Espinosa und S. Nemat-Nasser, „Low-Velocity Impact Testing,“ in *ASM Handbook Volume 8 – Mechanical Testing and Evaluation*, H. Kuhn und D. Medlin, Hrsg., Materials Park, 2000, pp. 539-559.
- [40] C. Braithwaite, „High Strain Rate Properties of Geological Materials (Ph.D. thesis),“

- Cambridge (UK), 2009.
- [41] K. Tsembelis, W. G. Proud und J. E. Field, „The Principal Hugoniot and Dynamic Strength of Dolerite under Shock Compression,“ in *Shock Compression of Condensed Matter*, 2001.
- [42] M. D. Dianov, N. A. Zlatin, S. M. Mochalov, G. S. Pugachev und L. K. Rosomakho, „Shock compressibility of dry and water-saturated sand,“ *Soviet Technical Physics Letters* (2), Nr. 6, pp. 207-208, 1976.
- [43] M. van Thiel, J. Shaner und E. Salinas, „Compendium of Shock Wave Data, Sections C-E, Report UCRL-50108, Vol. 2,“ Livermore, 1977.
- [44] M. van Thiel, J. Shaner und E. Salinas, „Compendium of Shock Wave Data, Sections C-E, Report UCRL-50108, Vol. 3,“ Livermore, 1977.
- [45] T. J. Ahrens und M. L. Johnson, „Shock Wave Data for Rocks,“ in *Rock Physics and Phase Relations – A Handbook of Physical Constants*, Washington D.C., American Geophysical Union, 1995.
- [46] N. N. Gerdyukov, A. G. Ioilev, A. D. Kovtun, Y. M. Makarov und S. A. Novikov, „An Investigation of the Compressibility of Sandy Soil under Impact-Wave Loading,“ *Prikladnaya Mekhanika I Tekhnicheskaya Fizika*, Nr. 4, pp. 55-58, 1993.
- [47] K. Tsembelis, W. Proud, B. Vaughan und J. Field, „The Behavior of Sand under Shock Wave Loading: Experiments and Simulations,“ in *Proceedings of the 14th Technical Meeting organized by Association DYMAT*, Sevilla, 2002.
- [48] D. J. Chapman, K. Tsembelis und W. G. Proud, „The Behaviour of Dry Sand under Shock-Loading,“ in *Shock Compression of Condensed Matter*, 2005.
- [49] D. J. Chapman, C. H. Braithwaite und W. G. Proud, „Shock-Loading of Statically Compacted Soil,“ in *Shock Compression of Condensed Matter*, 2007.
- [50] J. L. Brown, T. J. Vogler, L. C. Chhabildas, W. D. Reinhart und T. F. Thornhill, „Shock Response of Dry Sand, Sandia Report SAND2007-3524,“ Albuquerque, 2007.
- [51] M. Arlery, M. Gardou, J. M. Fleureau und C. Mariotti, „Dynamic behavior of dry and water-saturated sand under planar shock conditions,“ *International Journal of Impact Engineering* (37), pp. 1-10, 2010.
- [52] A. M. Bragov, V. V. Balandin, A. K. Lomunov und A. R. Filippov, „Determining the Impact Compressibility of Soft Soils from Inversed Test Results,“ *Technical Physics Letters* (32), Nr. 6, p. 487f, 2006.
- [53] L. V. Al'tshuler und M. N. Pavlovskii, „Response of Clay and Clay Shale to Heavy Dynamic Loading,“ *Zhurnal Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki* (1), pp. 171-176, 1971.

- [54] A. M. Bragov, G. M. Grushevsky und A. K. Lomunov, „Use of the Kolsky Method for Confined Tests of Soft Soils,“ *Experimental Mechanics* (36), Nr. 3, pp. 237-242, 1996.
- [55] R. G. Kraus, M. G. Newman und S. T. Stewart, „Hugoniot Measurements on Heterogeneous Geologic Materials,“ in *43rd Lunar and Planetary Conference*, 2012.
- [56] L. Laine, O. Ranestad, A. Sandvik und A. Snekkevik, „Numerical simulation of anti-tank mine detonation,“ in *Shock Compression of Condensed Matter*, 2001.
- [57] S. P. Marsh, *LASL Shock Hugoniot Data*, University of California Press, 1980.
- [58] J. Henrych, *The Dynamics of Explosion and Its Use*, New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1979.
- [59] R. V. Whitman, „The Response of Soils to Dynamic Loadings, Report 26, Final Report,“ Vicksburg, 1970.
- [60] J. P. Borg und T. J. Vogler, „Aspects of simulating the dynamic compaction of a granular ceramic,“ *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* (17), 2009.
- [61] M. Omidvar, M. Iskander und S. Bless, „Stress-Strain Behaviour of Sand at High Strain Rates,“ *International Journal of Impact Engineering* (49), pp. 192-213, 2012.
- [62] T. Benz, „Small-Strain Stiffness of Soils and its Numerical Consequences,“ Vemeer, P.A., Stuttgart, 2007.
- [63] T. J. Vogler, M. Y. Lee und D. E. Grady, „Static and dynamic compaction of ceramic powders,“ *International Journal of Solids and Structures* (44), pp. 636-658, 2007.
- [64] J. P. Borg, J. R. Cogar, A. Lloyd, A. Ward, D. J. Chapman, K. Tsembelis und W. G. Proud, „Computational simulation of the dynamic compaction of porous media,“ *International Journal of Impact Engineering* (33), pp. 109-118, 2006.
- [65] J. A. Yamamuro, P. A. Bopp und P. V. Lade, „One-dimensional compression of sands at high pressures,“ *Journal of Geotechnical Engineering* (122), pp. 147-154, 1996.
- [66] W. G. Proud, D. J. Chapman, D. M. Williamson, K. Tsembelis, J. Addiss, A. Bragov, A. Lomunov, I. G. Cullis, P. D. Church, P. Gould, D. Porter, J. R. Cogar und J. P. Borg, „The Dynamic Compaction of Sand and Related Porous Systems,“ in *Shock Compression of Condensed Matter*, 2007.
- [67] R. K. Linde und D. N. Schmidt, „Shock Propagation in Nonreactive Porous Solids,“ *Journal of Applied Physics* (37), Nr. 8, pp. 3259-3271, 1966.
- [68] R. F. Trunin, M. V. Zhernokletov, G. V. Simakov, L. F. Gudarenko und O. N. Gushchina, „Shock Compression of Highly Porous Samples of Copper, Iron, Nickel and their Equation of State,“ in *Shock Compression of Condensed Matter*, 1997.

- [69] J. Huang, S. Xu und S. Hu, „Effects of grain size and gradation on the dynamic responses of quartz sand,“ *International Journal of Impact Engineering* (59), pp. 1-10, 2013.
- [70] M. A. Biot, „Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid,“ *Journal of the Acoustical Society of America* (28), Nr. 2, pp. 168-191, 1956.
- [71] B. E. Martin, W. Chen, B. Song und S. A. Akers, „Moisture effects on the high strain-rate behavior of sand,“ *Mechanics of Materials* (41), pp. 786-798, 2009.
- [72] M. E. Kabir, B. Song, B. E. Martin und W. Chen, „Compressive Behavior of Fine Sand, Sandia Report SAND2010-2289,“ Albuquerque, 2010.
- [73] G. E. Veyera, „Uniaxial Stress-Strain Behavior of Unsaturated Soils at High Strain Rates. WL-TR-93-3523,“ Tyndall AFB FL, 1994.
- [74] N. D. Parab, B. Claus, M. C. Hudspeth, J. T. Black, A. Mondal, J. Sun, K. Fezzaa, X. Xiao, S. N. Luo und W. Chen, „Experimental assessment of fracture of individual sand particles at different loading rates,“ *International Journal of Impact Engineering* (68), pp. 8-14, 2014.
- [75] L. Laine und O. P. Larsen, „Proposal on how to model the unloading in a compaction Equation of State based upon tri-axial tests on dry sand,“ in *Proceedings of the 80th Shock and Vibration Symposium*, 2009.
- [76] C. H. Braithwaite, J. I. Perry, N. E. Taylor und A. P. Jardine, „Behaviour of sand during release from a shocked state,“ *Applied Physics Letters* (103), 2013.
- [77] J. I. Perry, C. H. Braithwaite, N. E. Taylor und A. P. Jardine, „Shock and release behaviour of sand,“ *Journal of Physics: Conference Series* (500), 2014.
- [78] B. B. Schimming, H. J. Haas und H. C. Saxe, „A Comparison of the Dynamic and Static Shear Strengths of Cohesionless, Cohesive and Combined Soils, Technical Report No. AFWL TR-65-48,“ Air Force Weapons Laboratory, Kirtland Airforce base, 1965.
- [79] J. A. Yamamuro, A. E. Abrantes und P. V. Lade, „Effect of Strain Rate on the Stress-Strain Behaviour of Sand,“ *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* (137), Nr. 12, pp. 1169-1178, 2011.
- [80] S. Abdel-Malek, L. W. Meyer und N. Herzig, „Mechanical behavior of sand under high pressure and high strain rate,“ *EPJ Web of Conferences*, Bd. 26, 2012.
- [81] S. Jing, F. Lu, Y. Lin und R. Chen, „An experimental study on dynamic constitutive model of clay under multiaxial compression,“ in *DYMAT 2009-9th International Conferences on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading*, 2009.

- [82] T. J. Vogler, C. S. Alexander, T. F. Thornhill und W. D. Reinhart, „Pressure-shear experiments on granular materials, Sandia Report SAND2011-6700,“ Albuquerque, 2011.
- [83] M. Larcher und N. Gebbeken, „Development of EOS data for granular material like sand by using micromodels,“ *EPJ Web of Conferences* (26), 2012.
- [84] J. P. Borg und T. J. Vogler, „The Effect of Water Content on the Shock Compression of Sand,“ in *DYMAT 2009-9th International Conferences on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading*, 2009.
- [85] T. Antoun, E. Herbold und S. Johnson, „Dynamic Behavior of Sand: Annual Report FY 11, LLNL-TR-539077,“ Livermore, 2012.
- [86] Streitkräfteamt Abt V Infrastruktur, „Handbuch für die Grundlagen zur Bemessung von Bauwerken gegen die Wirkung konventioneller Waffen,“ Bonn, 2007.
- [87] H. Heinze, Sprengtechnik – Anwendungsgebiete und Verfahren, 2. Hrsg., Leipzig Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1987.
- [88] G. I. Pokrowski, Explosion und Sprengung, Moskau: MIR und Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1985.
- [89] H. Roschlau, Sprengen – Theorie und Praxis, Leipzig Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1993.
- [90] J. Köhler, R. Meyer und A. Homburg, Explosivstoffe, 10. Auflage Hrsg., Weinheim: Wiley-VCH, 2008.
- [91] DIN 20163: 1994-11, *Sprengtechnik – Begriffe, Einheiten, Formelzeichen*, Beuth Verlag, 1994.
- [92] S. A. Formby und R. K. Wharton, „Blast characteristics and TNT equivalence values for some commercial explosives detonated at ground level,“ *Journal of Hazardous Materials* (50), pp. 183-198, 1996.
- [93] R. K. Wharton, S. A. Formby und R. Merrifield, „Airblast TNT equivalence for a range of commercial blasting explosives,“ *Journal of Hazardous Materials A79*, pp. 31-39, 2000.
- [94] D. E. Hudson, J. L. Alford und G. W. Housner, „Response of a Structure to an Explosive-Generated Ground Shock,“ California Institute of Technology, Earthquake Research Laboratory, 1952.
- [95] M. A. Cook, R. T. Keyes und W. O. Ursenbach, „Air Blast and Ground Shock Waves Generated at Long Distances from Demolitions of High Explosives,“ *Journal of Applied Meteorology* (1), pp. 91-101, 1961.

- [96] J. L. Drake, E. B. Smith und S. E. Blouin, „Enhancements of the Prediction of Ground Shock From Penetrating Weapons,“ in *Proceedings of the 4th International Symposium on the Interaction of Non-nuclear Munitions with Structures*, 1989.
- [97] Department of the Army, *TM-5-855-1: Fundamentals of Protective Design for Conventional Weapons*, 1986.
- [98] P. Bulson, *Explosive Loading of Engineering Structures*, London: ENFN SPON, 1997.
- [99] L. Laine und O. P. Larsen, „Numerical study of how the ground shock coupling factor is influenced by soil properties,“ in *Proceedings of the 78th Shock and Vibration Symposium (SAVIAC)*, Philadelphia, 2007.
- [100] T. W. Shelton, J. Q. Ehergott jr., R. J. Moral und M. Barbato, „Experimental and Numerical Investigation of the Ground Shock Coupling Factor for Near-Surface Detonations,“ in *Proceedings of the 82nd Shock and Vibration Symposium (SAVIAC)*, Baltimore, 2011.
- [101] T. Ngo, P. Mendis, A. Gupta und J. Ramsay, „Blast Loading and Blast Effects on Structures – An Overview,“ 2007. [Online]. Available: <http://www.ejse.org/Archives/Fulltext/2007/Special/200707.pdf>. [Zugriff am 27 November 2014].
- [102] Y. Lu, H. Hao, G. Ma und Y. Zhou, „Response of model structure under blast-induced ground excitations,“ in *Proceedings of the 12th World Conference on Earthquake Engineering*, 2000.
- [103] Y. Lu, H. Hao, G. Ma und Y. Zhou, „Simulation of structural response under high-frequency ground excitations,“ *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Bd. 30, pp. 307-325, 2001.
- [104] R. P. Dhakal, T.-C. Pan und S. Lan, „Structural Response to High Frequency and Short Duration Impulsive Ground Motions,“ in *The Eighth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering & Construction EASEC8*, Singapore, 2001.
- [105] AASTP-1, *Manual of NATO Safety Principles for the Storage of Military Ammunition and Explosives*, NATO International Staff - Defence Investment Division, Allied Ammunition Storage and Transport Publication, 2010.
- [106] M. Steidinger und B. Krüning, „Mustersicherheitsanalyse nach §7 Störfall V für eine Sprengstofffabrik,“ Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM), 1991.
- [107] DIN 4150-3:1999-02, *Erschütterungen im Bauwesen, Teil 3: Einwirkungen auf bauliche Anlagen*, Beuth Verlag.
- [108] Y. Lu, H. Hao und G. Ma, „Experimental Investigation of Structural Response to generalized Ground Shock Excitations,“ *Experimental Mechanics*, Bd. 42, Nr. No. 3,

- pp. 261-271, 2002.
- [109] DIN 4150-1:2001-06, *Erschütterungen im Bauwesen, Teil 1: Vorermittlung von Schwingungsgrößen*, Beuth Verlag.
- [110] M. Vuketic, „Cyclic Treshold Shear Strains in Soils,“ *Journal of Geotechnical Engineering*, Bd. 120, Nr. No. 12, pp. 2208-2228, 1994.
- [111] C.-C. Hsu und M. Vuketic, „Volumetric Treshold Shear Strain for Cyclic Settlement,“ *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering (130)*, Nr. 1, pp. 58-70, 2004.
- [112] Y. Hu, E. Gartung, H. Prühs und B. Müllner, „Bewertung der dynamischen Stabilität von Erdbauwerken unter Eisenbahnverkehr,“ *Geotechnik (26)*, Nr. 1, pp. 42-56, 2003.
- [113] Deutsche Gesellschaft für Geotechnik e.V. (DGGT), Empfehlungen des Arbeitskreises „Baugrunddynamik“, Eigenverlag Grundbauinstitut der Technischen Universität Berlin, 2002.
- [114] H.-H. Schmidt, R. F. Buchmaier und C. Vogt-Breyer, *Grundlagen der Geotechnik*, 4. Hrsg., Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014.
- [115] C. Göbel und K. Lieberenz, *Handbuch Erdbauwerke der Bahnen*, 2. Hrsg., Hamburg: Eurailpress Tetzlaff-Hestra GmbH & Co. KG, 2013.
- [116] C. Vrettos, „Bodendynamik,“ in *Grundbau-Taschenbuch, Teil 1: Geotechnische Grundlagen*, 7. Hrsg., Bd. 1, Berlin, Ernst & Sohn, 2008.
- [117] DB Netz AG, *Richtlinie 836 – Erdbauwerke und sonstige geotechnische Bauwerke planen, bauen und instand halten (einschl. Aktualisierungen 1 bis 4)*, 2008-2014.
- [118] D. Kolymbas, *Geotechnik – Bodenmechanik, Grundbau und Tunnelbau*, 3. Hrsg., Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- [119] D. Fischer, „Interaktion zwischen Baugrund und Bauwerk – Zulässige Setzungsdifferenzen sowie Beanspruchungen von Bauwerk und Gründung,“ Schriftenreihe Geotechnik Universität Kassel, Heft 21, 2009.
- [120] DIN EN 1997-1:2009-09, *Eurocode 7: Entwurf, Berechnung und Bemessung in der Geotechnik – Teil 1: Allgemeine Regeln*, Beuth Verlag.
- [121] ANSYS Inc., *AUTODYN Theory Manual-Revision 4.3*, 2005.
- [122] ANSYS Inc., *ANSYS Mechanical User’s Guide – Release 15.0*, 2013.
- [123] D. Fišerová, „Numerical Analyses of Buried Mine Explosions with Emphasis on Effect of Soil Properties on Loading (PhD Thesis),“ 2006.
- [124] A. Showichen, „Numerical analysis of vehicle bottom structures subjected to anti-tank

- mine explosions (Ph.D. thesis),“ 2008.
- [125] C. E. Anderson, „An overview on the theory of hydrocodes,“ *International Journal of Impact Engineering* (5), pp. 33-59, 1987.
- [126] M. L. Wilkins, *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [127] B. M. Dobratz und P. C. Crawford, „LLNL Explosive Handbook: Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants, Report UCRL-52997, Rev. 2,“ 1981.
- [128] ANSYS Inc., *AUTODYN Remapping Tutorial-Revision 4.3*, 2005.
- [129] M. Grujicic, B. Pandurangan und B. A. Cheeseman, „The effect of degree of saturation of sand on detonation phenomena associated with shallow-buried and ground-laid mines,“ *Shock and Vibration*, Bd. 13, pp. 41-62, 2006.
- [130] B. M. Luccioni und R. D. Ambrosini, „Evaluating the Effect of Underground Explosions on Structures,“ *Mechánica Computacional*, Bd. XXVII, pp. 1999-2019, 2008.
- [131] M. Grujicic, B. Pandurangan, J. D. Summers, B. A. Cheeseman, W. N. Roy und R. R. Skaggs, „Application of the modified compaction material model to the analysis of landmine detonation in soil with various degrees of water saturation,“ *Shock and Vibration* (15), pp. 79-99, 2008.
- [132] Z. Wang und Y. Lu, „Numerical analysis on dynamic deformation mechanism of soils under blast loading,“ *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* (23), pp. 705-714, 2003.
- [133] Z. Wang, H. Hao und Y. Lu, „A three-phase soil model for simulating stress wave propagation due to blast loading,“ *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* (28), pp. 33-56, 2004.
- [134] R. D. Ambrosini, B. M. Luccioni und R. F. Danesi, „Influence of the Soil Properties on Craters Produced by Explosions on the Soil Surface,“ *Mechánica Computacional*, Bd. XXIII, pp. 571-590, 2004.
- [135] B. M. Luccioni und R. D. Ambrosini, „Craters Produced by Underground Explosions,“ *Mechánica Computacional*, Bd. XXV, pp. 1603-1614, 2006.
- [136] M. Grujicic, B. Pandurangan, Y. Huang, B. A. Cheeseman, W. N. Roy und R. R. Skaggs, „Impulse loading resulting from shallow buried explosives in water-saturated sand,“ *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Materials Design and Applications*, Bd. 221, pp. 21-35, 2007.
- [137] S. Børve, M. Omang und E. Svinsås, „A comparison of AUTODYN and RSPH on two-dimensional shock waves problems: FFI-rapport 2009/00155,“ Norwegian Defence

- Research Establishment (FFI), 2009.
- [138] A. Neubauer, DFT – Diskrete Fourier-Transformation, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012.
- [139] A. S. Khan und S. Huang, Continuum Theory of Plasticity, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [140] J. Altenbach und H. Altenbach, Einführung in die Kontinuumsmechanik, Stuttgart: B. G. Teubner, 1994.
- [141] R. Greve, Kontinuumsmechanik – Ein Grundkurs, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.
- [142] W.-F. Chen und A. F. Saleeb, Constitutive Equations for Engineering Materials, Bd. 1, Amsterdam: Elsevier Science publishers B.V., 1994.
- [143] F. A. Emmerling und A. H. Heinen, Kontinuumsmechanik in tensorieller Darstellung, Universität der Bundeswehr München, 1993.
- [144] C. A. Truesdell, A First Course in Rational Continuum Mechanics, 2. Hrsg., Bd. 1, London: Academic Press Limited, 1991.
- [145] P. Haupt, Continuum mechanics and Theory of Materials, 2. Hrsg., Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
- [146] S. Greulich, „Zur numerischen Simulation von Stahlbeton- und Faserbetonstrukturen unter Detonationsbeanspruchung (Dissertation),“ Universität der Bundeswehr München, 2004.
- [147] H. D. Baehr und S. Kabelac, Thermodynamik, 15. Hrsg., Berlin Heidelberg: Springer-Vieweg, 2012.
- [148] P. Stephan, K. Schaber, K. Stephan und F. Mayinger, Thermodynamik, Bd. 1: Einstoffsysteme, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- [149] ANSYS Inc., ANSYS Mechanical APDL Theory Reference – Release 15.0, 2013.
- [150] DIN 18137-2:2011-04, *Baugrund, Untersuchung von Bodenproben – Bestimmung der Scherfestigkeit – Teil 2: Triaxialversuch*, Beuth Verlag.
- [151] R. D. Ambrosini, B. M. Luccioni und R. F. Danesi, „Craters Produced by Explosions on the Soil Surface,“ *Mechánica Computacional*, Bd. XXII, pp. 678-692, 2003.
- [152] B. M. Luccioni und D. Ambrosini, „Numerical Assessment of Blast Effects Scaling Procedures,“ *Mecánica Computacional*, Bd. XXIX, pp. 1161-1179, 2010.
- [153] W. Herrmann, „Constitutive Equation for the Dynamic Compaction of Ductile Porous Materials,“ *Journal of Applied Physics (40)*, Nr. 6, pp. 2490-2499, 1969.

- [154] J. P. Borg, D. J. Chapman, K. Tsembelis, W. G. Proud und J. R. Cogar, „Dynamic compaction of porous silica powder,“ *Journal of Applied Physics* (98), 2005.
- [155] M. Grujicic, B. Pandurangan, R. Qiao, B. A. Cheeseman, W. N. Roy, R. R. Skaggs und R. Gupta, „Parametrization of the porous-material model for sand with different levels of water saturation,“ *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* (28), pp. 20-35, 2008.
- [156] J. An, C. Y. Tuan, B. A. Cheeseman und G. A. Gazonas, „Simulation of Soil Behavior under Blast Loading,“ *International Journal of Geomechanics*, Bd. 11, Nr. 4, pp. 323-334, 2011.
- [157] L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, 13. Hrsg., Bd. 2, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012.
- [158] M. Werner, *Digitale Signalverarbeitung mit MATLAB*, 5. Hrsg., Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012.
- [159] TU Wien, Institute of Computer Engineering, [Online]. Available: <https://ti.tuwien.ac.at/cps/teaching/courses/dspv>. [Zugriff am 24 Februar 2014].
- [160] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall, *Technische Mechanik, Band 3 – Kinetik*, 10. Hrsg., Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [161] D. H. Dolan, „Foundation of VISAR analysis, Sandia Report SAND2006-1950,“ Albuquerque, 2006.
- [162] E. H. Davies und S. C. Hunter, „The Dynamic Compression Testing of Solids by the Method of the Split Hopkinson Pressure Bar,“ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (11), pp. 155-179, 1963.

Anhang

A Grundlagen der Kontinuumsmechanik

A.1 Allgemeines

Die Kontinuumsmechanik ist eine phänomenologische Feldtheorie. Die Mikroebene, auf der sich das reale Materialverhalten widerspiegelt, wird vernachlässigt. Stattdessen wird auf der Grundlage von Beobachtungen und Experimenten ein gemittelt Materialverhalten auf Makroebene – d.h. für das Kontinuum – formuliert. Ziel der Kontinuumsmechanik ist die Berechnung des Verhaltens von Körpern infolge äußerer Lasten [139]. Die dazu erforderlichen Gleichungen können nach *Altenbach & Altenbach* [140] prinzipiell in zwei Bereiche eingeteilt werden:

- die materialunabhängigen Gleichungen der Kinematik, der Kinetik und die Bilanzgleichungen
- die konstitutiven Gleichungen zur Beschreibung des materialabhängigen Verhaltens des Kontinuums.

Die nachfolgenden Abschnitte dieses Kapitels basieren hauptsächlich auf den Ausführungen von *Altenbach & Altenbach* [140] und *Greve* [141], dem Buch von *Khan & Huang* [139] sowie Band 1 des Werkes von *Chen & Saleeb* [142]. Weitere Informationen können dem Skript von *Emmerling & Heinen* [143] sowie den in der Literatur häufig referenzierten Standardwerken von *Truesdell* [144] und *Haupt* [145] entnommen werden.

A.2 Kinematik

A.2.1 Konfiguration und materieller Körper

Die Kinematik ist als die „rein geometrische Beschreibung von Bewegungen ohne Berücksichtigung von Kräften als deren Ursache“ definiert [141, p. 1]⁶⁴. Dazu wird das Kontinuum durch den Körper \mathcal{B} beschrieben, der aus einer zusammenhängenden, kompakten Menge materieller Punkte bzw. Partikel \mathcal{P} besteht und durch den Rand $\partial\mathcal{B}$ begrenzt wird.

Die stetige, eindeutige und eindeutig umkehrbare Zuordnung eines materiellen Punktes \mathcal{P} zu einem Raumpunkt im \mathbb{R}^3 wird Konfiguration \mathcal{K} genannt. So gilt für die Abbildung γ_r in der Referenzkonfiguration (z.B. zum Zeitpunkt t_0)

$$\begin{aligned} \gamma_r : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P} &\rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathcal{P}) \end{aligned} \tag{A-1}$$

und für die Abbildung γ_t in der Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t

⁶⁴ Die Begriffsabgrenzung der Kinematik und der Kinetik erfolgt nach *Gross et al.* [66]. Demnach kann die Mechanik als „Beschreibung der Bewegungen von Körpern sowie der Kräfte, die mit diesen Bewegungen im Zusammenhang stehen“ in die zwei Teilgebiete der Kinematik und der Dynamik aufgeteilt werden. Die Dynamik beschreibt das „Zusammenspiel von Kräften und Bewegungen“ und besteht aus den zwei Bereichen der Statik („Kräfte an ruhenden Körpern“) und der Kinetik („tatsächliche Bewegungen unter der Wirkung von Kräften“).

$$\begin{aligned} \gamma_t: B &\rightarrow R^3 \\ P &\rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(P, t) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

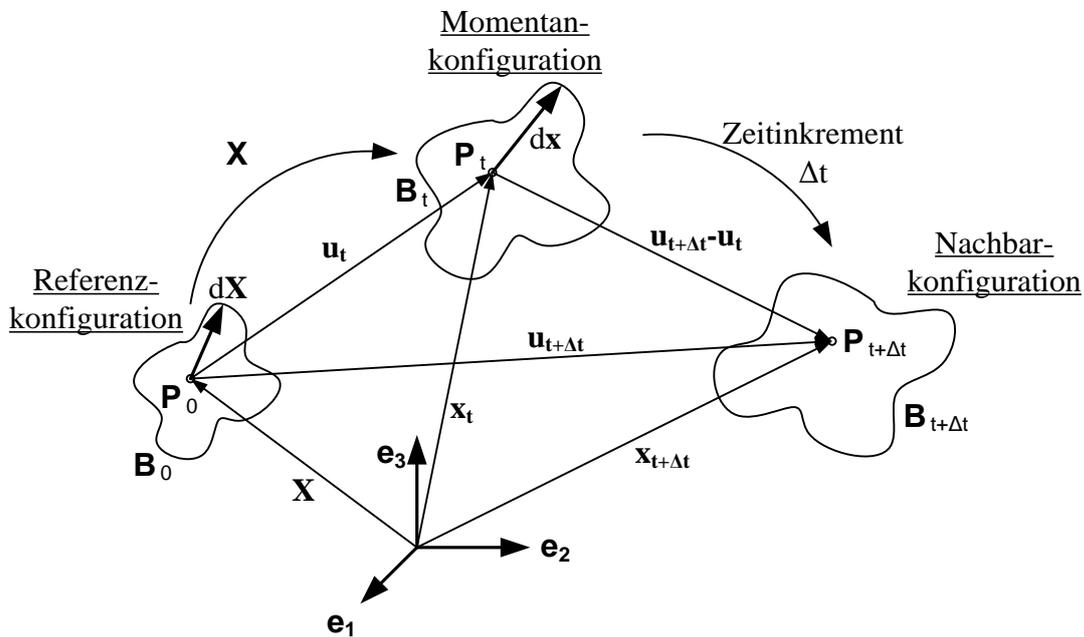


Abbildung A.1 Bewegung \mathcal{X} des materiellen Körpers \mathcal{B} mit Referenz-, Momentan- und Nachbarkonfiguration

Mittels Einführung eines kartesischen Koordinatensystems mit dem Ursprung 0 gilt Gleichung (A-3). Die Bewegung eines materiellen Punktes wird dann durch die mit der Zeit t parametrisierte Abbildung \mathcal{X} des materiellen Punktes aus der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration beschrieben. Die Verschiebung \mathbf{u} ist gemäß Gleichung (A-4) definiert. In Abbildung A.1 wird vereinfachend unterstellt, dass der Ursprung und die Basisvektoren $\mathbf{e}_K = \mathbf{e}_i$ ($K, i = 1, 2, 3$) für die Referenz- und die Momentankonfiguration identisch sind. Des Weiteren wird für die Referenzkonfiguration der Zeitpunkt t_0 gewählt. Die Momentankonfiguration zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ wird bezüglich der Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t als Nachbarkonfiguration bezeichnet.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}: R^3 &\rightarrow R^3 \\ \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad {}^{65} \quad (\text{A-4})$$

⁶⁵ Gemäß *Hiermaier* [9, p. 15] ist die Verschiebung \mathbf{u} nach Gleichung (A-4) in materieller und in räumlicher Darstellung identisch, d.h. $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ entspricht $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$. Die physikalische Bedeutung ist jedoch verschieden. So ergibt $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ die Verschiebung des Partikels \mathbf{X} für den Zeitpunkt t , wohingegen $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ der Verschiebung jenes Partikels entspricht, der sich zum Zeitpunkt t gerade am Ort \mathbf{x} befindet [8, p. 19].

A.2.2 Lagrangesche und Eulersche Betrachtungsweise

Die Bewegung eines materiellen Punktes \mathcal{P} (bzw. des Kontinuums aus materiellen Punkten), und die damit einhergehende Änderung seiner Eigenschaften \mathbf{A} kann auf zwei Arten beschrieben werden.

Die *Lagrangesche* Betrachtungsweise wird oft auch als *materielle Betrachtungsweise* bezeichnet. Dabei wird der Ausgangszustand als Referenzkonfiguration herangezogen, d.h. es wird der materielle Punkt \mathcal{P} , der sich in der Referenzkonfiguration am Ort \mathbf{X} befand, verfolgt. Zum Zeitpunkt t befindet sich der betrachtete Punkt am Ort mit den räumlichen Koordinaten $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Somit hängen auch die Eigenschaften \mathbf{A} des betrachteten Punktes ausschließlich von der Lage des betrachteten Punktes in der Referenzkonfiguration \mathbf{X} sowie der Zeit t ab, und es gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A-5})$$

Die Darstellung entspricht einem Betrachter, der mit dem betrachteten Partikel verbunden ist, d.h. die körperfeste Diskretisierung bewegt und verformt sich mit dem Körper. Entsprechend ist die Masseerhaltung automatisch erfüllt [121, p. 26].

Die *Eulersche* Betrachtungsweise (auch als *räumliche* oder *lokale Betrachtungsweise* bezeichnet) ist für Problemstellungen der Fluidmechanik und bei großen Deformationen geeignet. Dabei wird die Eigenschaft \mathbf{A} an einem fixen Punkt mit Ortsvektor \mathbf{x} beobachtet. Die Feldfunktion \mathbf{A} beschreibt somit die Eigenschaft jener Partikel, die sich zu unterschiedlichen Zeitpunkten t am Ort \mathbf{x} befinden. Mit den unabhängigen Variablen \mathbf{x} und t gilt dann

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A-6})$$

In *Eulerscher* Darstellung strömen also materielle Punkte durch ein Kontrollvolumen. Da die Materialränder und bei verschiedenen Materialien auch deren Grenzen nicht mit den Rändern des Kontrollvolumens übereinstimmen, müssen die Materialeigenschaften über die Knoten des Kontrollvolumens interpoliert werden [121, p. 20]. Um Ungenauigkeiten entgegenzuwirken ist demzufolge bei *Eulerscher* Betrachtungsweise in der Regel eine deutlich feinere Elementdiskretisierung erforderlich als bei der *Lagrangeschen* Darstellung.

Zur Unterscheidung der Gradientenbildung bezüglich materieller und räumlicher Koordinaten wird in Anlehnung an *Khan & Huang* [139, p. 32] folgende Notation eingeführt:

$$\nabla = \mathbf{e}_K \frac{\partial}{\partial X_K} (\dots) = (\dots)_{,K} \mathbf{e}_K \quad (\text{A-7})$$

$$\text{grad} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\dots) = (\dots)_{,i} \mathbf{e}_i \quad (\text{A-8})$$

A.2.3 Deformationsgradient, Jacobi-Determinante und Verschiebungsgradient

Der materielle Deformationsgradiententensors⁶⁶ \mathbf{F} (A-9) ist die materielle Ableitung der Bewegungsgleichung (A-3). Gemäß Gleichung (A-10) überführt \mathbf{F} das Linienelement $d\mathbf{X}$ aus der Referenzkonfiguration in das Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration. Die Rücktransformation erfolgt mit dem räumlichen Deformationsgradienten \mathbf{F}^{-1} (A-11).

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = [\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)]^T = \left[\mathbf{e}_K \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \mathbf{e}_i \right]^T = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_K = x_{i,K} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_K = F_{iK} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_K \quad (\text{A-9})$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad dx_i \mathbf{e}_i = F_{iK} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_K \cdot dX_L \mathbf{e}_L = F_{iK} dX_L \delta_{KL} \mathbf{e}_i = F_{iK} dX_K \mathbf{e}_i \quad (\text{A-10})$$

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = [\text{grad } \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)]^T = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \mathbf{e}_K \mathbf{e}_i = X_{K,i} \mathbf{e}_K \mathbf{e}_i = F_{iK}^{-1} \mathbf{e}_K \mathbf{e}_i \quad (\text{A-11})$$

Die Determinante von \mathbf{F} wird als *Jacobi-Determinante* J bezeichnet. Aufgrund der geforderten Invertierbarkeit von \mathbf{F} gilt $J = \det \mathbf{F} \neq 0$. Da reale Bewegungen keine Orientierungsumkehr (Spiegelung) erzeugen können, gilt stets $J = \det \mathbf{F} > 0$.

$$J = \det \mathbf{F} \quad (\text{A-12})$$

Aus Gleichung (A-4) können der materielle Verschiebungsgradient \mathbf{H} (A-13) sowie der räumliche Verschiebungsgradient \mathbf{h} (A-14) abgeleitet werden, was auf die Darstellung von \mathbf{F} nach Gleichung (A-15) sowie \mathbf{F}^{-1} nach Gleichung (A-16) führt.

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) = [\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)]^T = \frac{\partial u_i}{\partial X_K} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_K = u_{i,K} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_K = H_{iK} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_K \quad (\text{A-13})$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = [\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]^T = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = u_{i,j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = h_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (\text{A-14})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \mathbf{H} = (\delta_{iK} + H_{iK}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_K \quad (\text{A-15})$$

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I} - \mathbf{h} = (\delta_{iK} - h_{iK}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_K \quad (\text{A-16})$$

A.2.4 Polare Zerlegung und Deformationstensoren

Der materielle Deformationsgradient \mathbf{F} enthält sowohl Starrkörperrotationen als auch Verzerrungen. Um die Verzerrungen berechnen zu können, müssen die Starrkörperanteile abgetrennt werden. Dies geschieht mit Hilfe des polaren Zerlegungsansatzes nach Gleichung (A-17). Die Deformation eines Linienelements $d\mathbf{X}$ kann nach Gleichung (A-18) als Hintereinanderausführung einer Drehung (mit dem Rotationstensor \mathbf{R}) und Streckung bzw. Stauchung (mit dem Rechtsstrecktensor \mathbf{U} (A-19) oder dem Linksstrecktensor \mathbf{V} (A-20)) dargestellt werden.

⁶⁶ Nachfolgend wird nur noch der kürzere Begriff des Deformationsgradienten verwendet.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{A-17})$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{U} \cdot d\mathbf{X}) = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}) \quad (\text{A-18})$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{1/2} \quad U_{KL} = \sqrt{F_{iK} F_{iL}} = \sqrt{x_{i,K} x_{i,L}} \quad (\text{A-19})$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{1/2} \quad V_{ij} = \sqrt{F_{iK} F_{jK}} = \sqrt{x_{i,K} x_{j,K}} \quad (\text{A-20})$$

A.2.5 Verzerrungstensoren

Als Formänderungsmaße werden der Rechts-*Cauchy-Green*-Tensor \mathbf{C} (A-21) und der Links-*Cauchy-Green*-Tensor \mathbf{B} (A-22) genutzt, welche das Skalarprodukt der Linienelemente $d\mathbf{X}^{(1)}$ und $d\mathbf{X}^{(2)}$ aus der Referenzkonfiguration mit dem Skalarprodukt $d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)}$ in der Momentankonfiguration verknüpfen (siehe Gleichungen (A-23) und (A-24)).

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (\text{A-21})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A-22})$$

$$d\mathbf{x}^{(k)} \cdot d\mathbf{x}^{(l)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(K)} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(L)} = d\mathbf{X}^{(K)} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(L)} = d\mathbf{X}^{(K)} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}^{(L)} \quad (\text{A-23})$$

$$d\mathbf{X}^{(K)} \cdot d\mathbf{X}^{(L)} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}^{(k)} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}^{(l)} = d\mathbf{x}^{(k)} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\mathbf{x}^{(l)} \quad (\text{A-24})$$

Aus $d\mathbf{x}^{(1)} = d\mathbf{x}^{(2)}$ und $d\mathbf{X}^{(1)} = d\mathbf{X}^{(2)}$ sowie Differenzbildung folgen die Definitionen des *Green-Lagrangeschen* Verzerrungstensors \mathbf{G} (A-25) und des *Euler-Almansischen* Verzerrungstensors \mathbf{A} (A-26).

$$d\mathbf{x}^2 - d\mathbf{X}^2 = d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{G} \cdot d\mathbf{X} \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (\text{A-25})$$

$$d\mathbf{x}^2 - d\mathbf{X}^2 = d\mathbf{x} \cdot 2\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{A-26})$$

Für klassische Kontinua sind die Verzerrungstensoren stets von 2. Stufe, symmetrisch. Unabhängig von der gewählten Definition des Verzerrungsmaßes sind für alle Verzerrungstensoren die Hauptdiagonalelemente mit Längenänderungen und die Nichtdiagonalglieder mit Schubverzerrungen verknüpft [140, p. 65].

A.2.6 Partikelgeschwindigkeit und materielle Zeitableitungen

Die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines materiellen Punktes ist als die partielle Zeitableitung bei konstantem \mathbf{X} definiert.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(\mathbf{X}, t + \Delta t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\Delta t} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} \quad v_i = \left(\frac{\partial x_i(X_K, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} \quad (\text{A-27})$$

Die materielle Zeitableitung gibt die zeitliche Änderung der Eigenschaft \mathbf{A} für jenen materiellen Punkt \mathcal{P} an, der sich in der Referenzkonfiguration am Ort \mathbf{X} befindet. Da die Lage des Partikels in der Referenzkonfiguration \mathbf{X} zeitunabhängig ist, entspricht bei der

Lagrangeschen Betrachtungsweise die materielle Zeitableitung D/Dt der lokalen Zeitableitung $\partial/\partial t$.

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \right)_{\mathbf{X}} \quad (\text{A-28})$$

Für die materielle Zeitableitung einer skalar- oder tensorwertigen Feldfunktion $a(\mathbf{x}, t)$ oder $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ – in *Eulerscher* Betrachtungsweise – muss neben der lokalen Zeitableitung $(\partial/\partial t)_{\mathbf{x}}$ auch noch die konvektive Ableitung berücksichtigt werden. Erstere beschreibt die zeitliche Änderung der Feldfunktion $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ am Ort \mathbf{x} .

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\dots)_i &= \left[\frac{\partial (\dots)_i}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}} + \frac{\partial (\dots)_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial (\dots)_i}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}} + (\dots)_{i,j} v_j \\ \frac{D}{Dt} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \end{aligned} \quad (\text{A-29})$$

A.2.7 Geschwindigkeitsgradient, Verzerrungsgeschwindigkeits- und Spintensor

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ ist gemäß Gleichung (A-30) definiert. Wie jeder Tensor 2. Stufe kann \mathbf{L} in einen symmetrischen Anteil – den räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} – und den schiefsymmetrischen Spintensor \mathbf{W} aufgespalten werden (siehe Gleichungen (A-31)).

$$d\mathbf{v} = \frac{D}{Dt} d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{A-30})$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (\text{A-31})$$

Aufgrund der Schiefsymmetrie von \mathbf{W} (mit $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T \Leftrightarrow \text{tr}(\mathbf{W}) = 0$ und $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{W} \cdot d\mathbf{x} = 0$) hängen die Längen- und Winkeländerungsgeschwindigkeiten materieller Linienelemente in der Momentankonfiguration allein vom Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} ab. Die Hauptdiagonalelemente von \mathbf{D} repräsentieren die Verzerrungsraten $(ds)'/ds$ von Linienelementen, die in Richtung der Basisvektoren \mathbf{e}_k der Momentankonfiguration orientiert sind. Die Nebendiagonalelemente von \mathbf{D} stellen die Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}_{kl}$ dar. Diese entspricht der Änderungsgeschwindigkeit von in der Momentankonfiguration rechten Winkeln, die durch längs der Basisvektoren \mathbf{e}_k und \mathbf{e}_l orientierte Linienelemente aufgespannt werden.

Der Spintensor \mathbf{W} stellt die momentane lokale Starrkörperrotation der Umgebung des Partikels \mathbf{x} dar, wobei das Geschwindigkeitsfeld für Starrkörperrotationen um den Ursprung durch Gleichung (A-32) und den Winkelgeschwindigkeitsvektor \mathbf{w} (A-33) definiert ist [141, p. 26].

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w} \times d\mathbf{x} \quad (\text{A-32})$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{w} = \mathit{dual} \mathbf{W} = \begin{pmatrix} -W_{23} \\ W_{13} \\ -W_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A-33})$$

A.2.8 Verzerrungsratentensoren

Anhand der materiellen Zeitableitungen der Deformationstensoren \mathbf{C} und \mathbf{B}^{-1} gemäß den Gleichungen (A-34) und (A-35) können die Verzerrungsratentensoren (A-36) und (A-37) – dies sind die materiellen Zeitableitungen der Verzerrungstensoren \mathbf{G} und \mathbf{A} – berechnet werden.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}} &= \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F})^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{C}} &= \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{L}^T + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (\text{A-34})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}^{-1} &= (\dot{\mathbf{F}}^{-1})^T \cdot \mathbf{F}^{-1} + (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \dot{\mathbf{F}}^{-1} = (-\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{L})^T \cdot \mathbf{F}^{-1} + (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (-\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{L}) \\ \dot{\mathbf{B}}^{-1} &= -\mathbf{L}^T \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{F}^{-1} - (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{L} = -(\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{L}) = -2\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{L} \end{aligned} \quad (\text{A-35})$$

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \right] = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A-36})$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \right] = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}}^{-1} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{L}) \quad (\text{A-37})$$

A.2.9 Geometrische Linearisierung

Die Verzerrungstensoren \mathbf{G} und \mathbf{A} können anstatt mit \mathbf{F} auch durch den materiellen Verschiebungsgradienten \mathbf{H} (A-15) bzw. den räumlichen Verschiebungsgradienten \mathbf{h} (A-16) dargestellt werden. Gemäß Gleichung (A-38) ist der *Green-Lagrangesche* Verzerrungstensor \mathbf{G} nichtlinear bezüglich des materiellen Verschiebungsgradienten \mathbf{H} . Dasselbe gilt für den *Euler-Almansischen* Verzerrungstensor \mathbf{A} und den räumlichen Verschiebungsgradienten \mathbf{h} in Gleichung (A-39). Bei finiten Deformationen muss diese geometrische Nichtlinearität stets berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \mathbf{H})^T \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}) - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}) \\ G_{KL} &= \frac{1}{2} \cdot (u_{K,L} + u_{L,K} + u_{M,K} u_{M,L}) \end{aligned} \quad (\text{A-38})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2} [\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}] = \frac{1}{2} [\mathbf{I} - (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{F}^{-1}] = \frac{1}{2} [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{h})^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{h})] = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{h}) \\ A_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}) \end{aligned} \quad (\text{A-39})$$

Für sehr kleine Deformationen können die quadratischen Glieder in den Gleichungen (A-38) und (A-39) vernachlässigt werden, was auf die geometrische Linearisierung $\boldsymbol{\varepsilon}$ (A-40) der

Verzerrungstensoren \mathbf{G} und \mathbf{A} führt [140, p. 77ff], [141, p. 22ff] mit den Dehnungen bzw. Stauchungen (für $i = j$) gemäß Gleichung (A-41) sowie den Gleitungen γ_{ij} (für $i \neq j$) nach Gleichung (A-42). Wie in Gleichung (A-43) dargestellt, kann der Verschiebungsgradient \mathbf{H} dann in den symmetrischen Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}$ und einen schiefsymmetrischen Anteil $\boldsymbol{\omega}$ (A-44) aufgespalten werden. Letzterer stellt die infinitesimalen Starrkörperrotationen um die Koordinatenachsen x_i dar.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}_{Lin} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \mathbf{A}_{Lin} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) \quad (\text{A-40})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A-41})$$

$$i \neq j: \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \quad (\text{A-42})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) = \mathbf{H} \quad (\text{A-43})$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A-44})$$

A.2.10 Volumendehnung und Kompression

Die Volumendehnung ε_V (A-45) ist mit der in der Mechanik üblichen Vorzeichenkonvention gemäß Abbildung A.3 mit positiven Zugspannungen und Dehnungen definiert. Entsprechend sind volumenerhaltende bzw. isochore Deformationen durch $\det \mathbf{F} = 1$ definiert. Im Falle infinitesimaler Verzerrungen führt dies auf die (geometrisch) linearisierte Volumendehnung nach Gleichung (A-46).

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho} - 1 = \det \mathbf{F} - 1 \quad (\text{A-45})$$

$$\varepsilon_{V,lin} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I} = \varepsilon_{ii} = \text{div} \mathbf{u} = \text{grad} \cdot \mathbf{u} = u_{i,i} \quad (\text{A-46})$$

Die in der Bodenmechanik übliche Vorzeichenkonvention positiver Druckspannungen und Stauchungen führt auf die Kompression θ (A-47).

$$\theta = -\varepsilon_V = \frac{dV_0 - dV}{dV_0} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \det \mathbf{F} \quad (\text{A-47})$$

Teilweise wird auch eine sogenannte relative Kompression η gemäß Gleichung (A-48) verwendet, die sich auf die Momentankonfiguration bezieht.

$$\eta = \frac{dV_0 - dV}{dV} = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 = (\det \mathbf{F})^{-1} - 1 = \theta \cdot \frac{dV_0}{dV} = -\varepsilon_V \cdot \frac{dV_0}{dV} \quad (\text{A-48})$$

A.3 Spannungen (Kinetik)

A.3.1 Spannungstensor σ

Durch Freischnitt gemäß Abbildung A.2 werden die inneren Kräfte, die beide Teile des Körpers \mathcal{B} zusammenhalten, in Oberflächenkräfte überführt. Die Grenzwertbetrachtung der Schnittfläche $\Delta A \rightarrow 0$ ordnet dieser einen Punkt mit Koordinate \mathbf{x} und Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} (A-49) zu. Gemäß dem *Euler-Cauchyschen* Spannungsprinzip wird der auf der Fläche ΔA (A-50) angreifende resultierende Kraftvektor $\Delta \mathbf{f}$ dabei in den Spannungsvektor $\mathbf{t}^{(n)}$ (A-51) überführt [139, p. 42], [140, p. 94].

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 = n_i \mathbf{e}_i \quad (\text{A-49})$$

$$\Delta \mathbf{A} = \Delta A \mathbf{n} \quad (\text{A-50})$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{f}}{dA} \quad (\text{A-51})$$

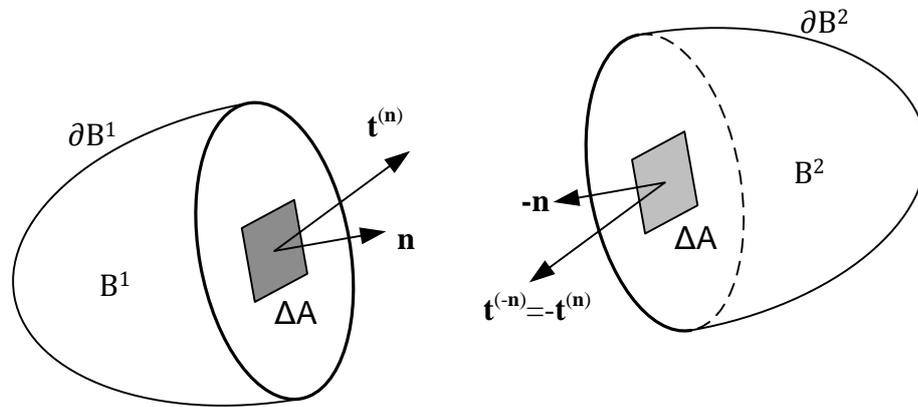


Abbildung A.2 Geschnittene Teilkörper \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 mit Flächenelement ΔA und Spannungsvektoren $\mathbf{t}^{(n)}$ und $\mathbf{t}^{(-n)}$

Aus der Gleichgewichtsbetrachtung an einem infinitesimalen Tetraederelement in Abbildung A.3, links und Grenzübergang des Tetraedervolumens $dV \rightarrow 0$ folgt, dass der Spannungsvektor $\mathbf{t}^{(n)}$ (A-52) eindeutig durch die drei zueinander orthogonalen Spannungsvektoren $\mathbf{t}^{(i)}$ auf den Ebenen $x_i = \text{konst.}$ beschrieben wird [142, p. 52]. Die Spannungsvektoren $\mathbf{t}^{(i)}$ (A-53) enthalten die Komponenten σ_{ij} des *Cauchyschen* Spannungstensors σ (A-54)⁶⁷. Dieser ist vollständig in der Momentankonfiguration definiert – die aktuelle Kraft $\Delta \mathbf{f}$ wird auf die aktuelle Fläche ΔA bezogen – und beschreibt den wahren Spannungszustand in einem Punkt. Durch Momentengleichgewicht am infinitesimalen Würfелеlement (Abbildung A.3, rechts) kann die Symmetrie (A-55) des *Cauchyschen* Spannungstensors σ gezeigt werden. Die Darstellungen (A-56) und (A-57) der Gleichung (A-52) sind demnach gleichwertig.

⁶⁷ Der erste Index (i) kennzeichnet die Schnittfläche $x_i = \text{konst.}$ mit dem Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i$ und der zweite Index (j) die Richtung der Spannungskomponente bezüglich der Basisvektoren \mathbf{e}_j . Je nach Literaturquelle existiert auch die umgekehrte Definition (siehe z.B. Greve [3, p. 71]).

$$\mathbf{t}^{(n)} = n_1 \mathbf{t}^{(1)} + n_2 \mathbf{t}^{(2)} + n_3 \mathbf{t}^{(3)} \quad (\text{A-52})$$

$$\mathbf{t}^{(i)} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad (\text{A-53})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(1)} \\ \mathbf{t}^{(2)} \\ \mathbf{t}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (\text{A-54})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{A-55})$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \quad t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j \quad (\text{A-56})$$

$$\mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{A-57})$$

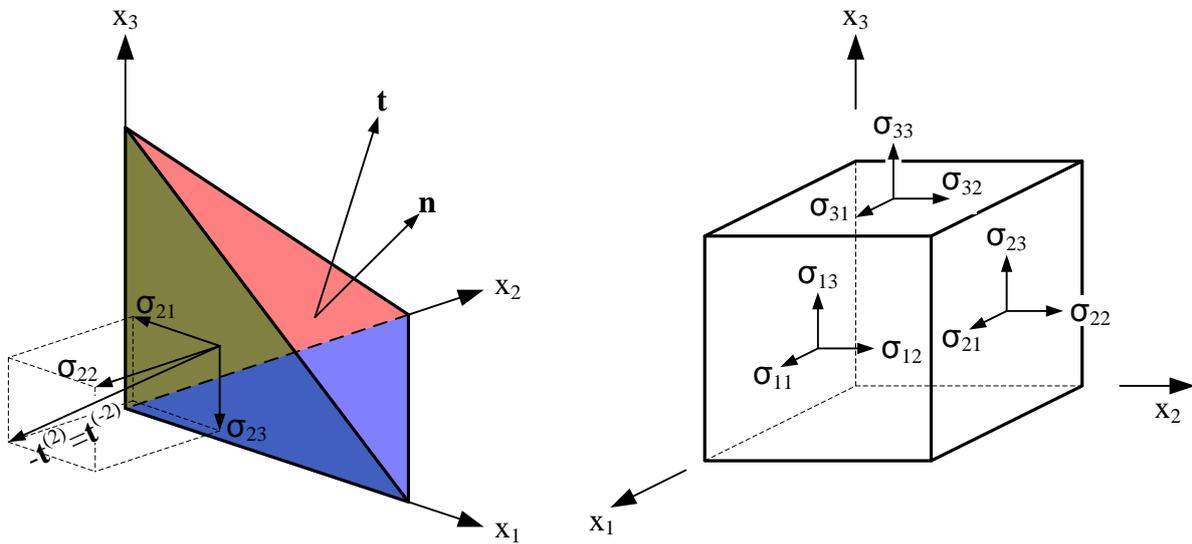


Abbildung A.3 (a) Infinitesimales Tetraederelement dV am Ort \mathbf{x} und zugehörige Spannungsvektoren; (b) Spannungsdefinition am infinitesimalen Würfel (Zug positiv)

Alternative Formulierungen von Spannungstensoren sind unter anderem der erste *Piola-Kirchhoffsche* Spannungstensor ${}^I\mathbf{T}$, der den aktuellen differentiellen Kraftvektor $d\mathbf{f}$ auf ein differentielles Flächenelement $d\mathbf{A}_0 = dA_0 \mathbf{N}$ der Referenzkonfiguration bezieht, sowie der zweite *Piola-Kirchhoffsche* Spannungstensor ${}^{II}\mathbf{T}$, bei dem sowohl der fiktive Kraftvektor $d\mathbf{f}_0$ als auch das Flächenelement $d\mathbf{A}_0$ in der Referenzkonfiguration definiert sind. Für Hydrocodes ist lediglich *der Cauchy'sche* Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ erforderlich, da die Nachbarkonfiguration zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ aus der Momentankonfiguration zum vorherigen Zeitpunkt t berechnet wird [146, p. 30]. Bezüglich der *Piola-Kirchhoffschen* Spannungstensoren wird deshalb auf *Altenbach & Altenbach* [140, pp. 104-112], *Khan & Huang* [139, pp. 44-46] sowie *Hiermaier* [18, p. 36] verwiesen.

A.3.2 Hauptspannungen, Spannungsdeviator und Invarianten

In jedem Punkt eines Körpers existieren mindestens drei sogenannte Hauptspannungsebenen mit den Normaleneinheitsvektoren bzw. Hauptspannungsrichtungen \mathbf{n} , deren zugehörige Spannungsvektoren $\mathbf{t}^{(n)}$ (A-58) jeweils nur eine Normalspannungskomponente σ enthalten. Das Eigenwertproblem (A-59) hat nur Lösungen $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ wenn Gleichung (A-60) erfüllt ist. Das zugehörige charakteristische Polynom (A-61) kann mittels der Invarianten I_1 (A-62), I_2 (A-63) und I_3 (A-64) des *Cauchyschen* Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ dargestellt werden. Die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 sind die Eigenwerte bzw. die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und gleichzeitig die Extremwerte aller Normalspannungen σ_n im betrachteten Punkt [142, p. 71].

$$\mathbf{t}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n} \qquad t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j = \sigma n_i \qquad (\text{A-58})$$

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \qquad (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_i = 0 \qquad (\text{A-59})$$

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) = 0 \qquad |\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \qquad (\text{A-60})$$

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \qquad (\text{A-61})$$

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \qquad (\text{A-62})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 \qquad (\text{A-63})$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} - (\sigma_{11} \sigma_{23}^2 + \sigma_{22} \sigma_{13}^2 + \sigma_{33} \sigma_{12}^2) + 2 \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{13} \qquad (\text{A-64})$$

Wie jeder andere Tensor zweiter Stufe kann der *Cauchysche* Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ mittels Gleichung (A-65) als Summe aus Kugeltensor (Hydrostat) und Deviator tensor dargestellt werden. Der Kugeltensor beinhaltet den hydrostatischen Spannungszustand mit der mittleren Spannung σ_m bzw. dem isotropen Druck p ⁶⁸ nach Gleichung (A-66). Der Spannungsdeviator \mathbf{S} (A-67) definiert einen reinen Schubspannungszustand.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{I} + \mathbf{S} = -p \mathbf{I} + \mathbf{S} \qquad \sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij} = -p \delta_{ij} + S_{ij} \qquad (\text{A-65})$$

$$-p = \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} I_1 \qquad (\text{A-66})$$

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} + p \mathbf{I} \qquad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij} \qquad (\text{A-67})$$

In isotropen⁶⁹ Materialien bewirkt der Hydrostat reine Volumenänderungen, und der Spannungsdeviator ruft nur Gestaltsänderungen hervor [140, p. 100]. Die konstitutiven Gleichungen können somit getrennt für Hydrostat und Spannungsdeviator aufgestellt werden, was nach *Hiermaier* [18, p. 40] für folgende Problemstellungen Vorteile bringt:

⁶⁸ Das negative Vorzeichen resultiert wiederum aus der Definition „Zug ist positiv“.

⁶⁹ Hinsichtlich der Begründung, warum obige Trennung des Materialverhaltens nur für isotrope Materialien gilt, wird auf den folgenden Abschnitt A.3.3 verwiesen.

- Beschreibung der Druckabhängigkeit oder Druckunabhängigkeit von Fließflächen
- Darstellung von Schockwellen, wobei das Kompressionsverhalten mittels nichtlinearer Zustandsgleichungen beschrieben werden muss

Die Hauptspannungsrichtungen \mathbf{n} von \mathbf{S} sind identisch mit jenen von $\boldsymbol{\sigma}$. Das charakteristische Polynom der Eigenwertaufgabe (A-68) kann analog zu $\boldsymbol{\sigma}$ anhand der Invarianten dargestellt werden. Die Deviatorinvariante J_1 (A-69) definiert den reinen Schubspannungszustand. J_2 (A-70) und J_3 (A-71) werden für die Definition von Fließflächen benötigt.

$$S^3 - J_1 S^2 + J_2 S - J_3 = 0 \quad (\text{A-68})$$

$$J_1 = S_{ii} = 0 \quad (\text{A-69})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ji} = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (\text{A-70})$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$J_3 = \det(S_{ij}) = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \quad (\text{A-71})$$

$$S_i = \sigma_i - \sigma_m = \sigma_i + p \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A-72})$$

Die Eigenwerte S_i (A-72) des Spannungsdeviators entsprechen nicht den Hauptschubspannungen (A-73). Diese wirken auf Ebenen, die zu je zwei Hauptnormalspannungsebenen unter 45° geneigt sind. Für $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ wirkt die größte Hauptschubspannung $\tau_{\max} = 1/2 |\sigma_1 - \sigma_3|$ auf die Ebenen mit $\mathbf{n} = (\pm 2^{-1/2}, 0, \pm 2^{-1/2})$ [142, p. 73ff].

$$|\tau_{12}| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \quad |\tau_{23}| = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \quad |\tau_{31}| = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \quad (\text{A-73})$$

A.3.3 Oktaederspannungen und Haigh-Westergaard-Koordinaten

Im Hauptspannungsraum existieren acht Oktaederspannungsebenen, deren Normalen mit allen drei Hauptachsen gleiche Winkel einschließen (siehe Abbildung A.4). Die hydrostatische Achse (A-74) ist die erste Raumdiagonale im Hauptspannungsraum. Auf den dazu orthogonalen Deviatorebenen (A-75) wirken die zugehörige Oktaedernormalspannung (A-76) und die Oktaederschubspannung (A-77).

$$\mathbf{n} = 3^{-1/2} (1, 1, 1) \quad (\text{A-74})$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3} \xi \quad (\text{A-75})$$

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} = \sigma_m = -p \quad (\text{A-76})$$

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 \quad (\text{A-77})$$

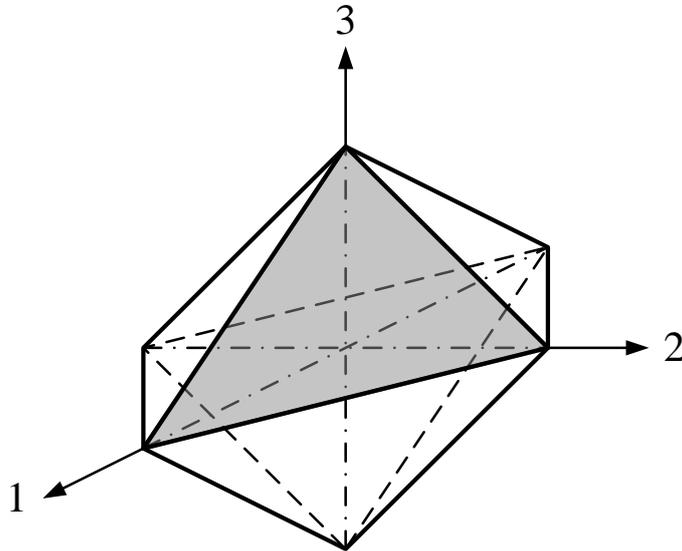


Abbildung A.4
Oktaederspannungsebenen
im Hauptspannungsraum;
nach *Chen & Saleeb* [142]

Ein Spannungszustand ist unter Berücksichtigung der Symmetrie des *Cauchy*schen Spannungstensors eindeutig durch sechs unabhängige Spannungskomponenten oder alternativ durch die drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in Kombination mit den drei Hauptspannungsrichtungen $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$ definiert. Da die Materialeigenschaften bei isotropen Materialien richtungsunabhängig sind, kann ein Spannungszustand durch einen Vektor $\mathbf{T} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ im Hauptspannungsraum abgebildet werden. Die Information bezüglich der Orientierung der betrachteten Ebene geht dabei verloren, da zwei Spannungszustände mit identischen Hauptspannungen aber unterschiedlichen Hauptspannungsrichtungen durch denselben Punkt im Hauptspannungsraum dargestellt werden [139, p. 87].

Alternativ kann jeder Spannungszustand \mathbf{T} auch nach Gleichung (A-78) und Abbildung A.5 in *Haigh-Westergaard*-Koordinaten ξ, ρ und θ formuliert werden. Der Vektor $\mathbf{0N}$ (A-79) mit der ersten *Haigh-Westergaard*-Koordinate ξ (A-80) entspricht dem hydrostatischen Spannungsanteil. Der Vektor \mathbf{NT} (A-81) innerhalb der Deviatorebene enthält die Eigenwerte des Spannungsdeviators. Der Betrag von \mathbf{NT} ist die zweite *Haigh-Westergaard*-Koordinate ρ (A-82). Die dritte *Haigh-Westergaard*-Koordinate ist der Winkel θ gemäß den Gleichungen (A-83). Nach Abbildung A.5, rechts entspricht die positive Richtung von θ der Drehung der in die Deviatorebene projizierten σ_1 -Achse mit Einheitsvektor \mathbf{e}'_1 (A-84) auf den Vektor \mathbf{NT} . Unter der Voraussetzung $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ist bei isotropen Materialien lediglich der Bereich $0 \leq \theta \leq \pi/3$ zu betrachten. Den einzelnen Meridianebenen mit Winkeln $\theta = \text{konst.}$ können die Spannungszustände gemäß Tabelle A-1 zugeordnet werden.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos(120^\circ - \theta) \\ \cos(120^\circ + \theta) \end{bmatrix} \quad (\text{A-78})$$

$$\mathbf{0N} = \xi \mathbf{n} = -\sqrt{3}p \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) = (-p, -p, -p) = (\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m) \quad (\text{A-79})$$

$$\xi = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = \sqrt{3} \sigma_m = -\sqrt{3}p \quad (\text{A-80})$$

$$\mathbf{NT} = \mathbf{T} - \xi \mathbf{n} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - (\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m) = (S_1, S_2, S_3) \quad (\text{A-81})$$

$$\rho = |\mathbf{NT}| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3} \tau_{oct} \quad (\text{A-82})$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S_1}{\sqrt{J_2}} \quad \cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \quad (\text{A-83})$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, -1) \quad (\text{A-84})$$

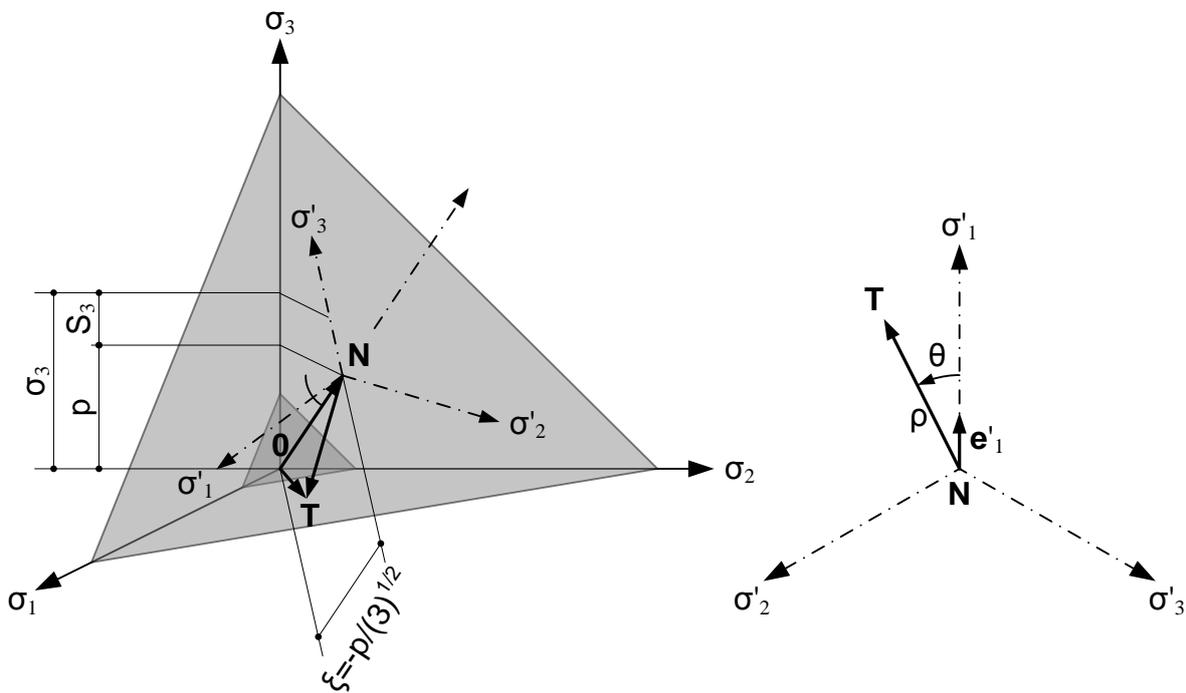


Abbildung A.5 Spannungszustand \mathbf{T} (a) im Hauptspannungsraum; (b) in die Deviatorebene projiziert

Mit Abbildung A.5, rechts und Gleichung (A-83)₁ können die Zusammenhänge (A-85) bis (A-87) zwischen den Eigenwerten S_i des Spannungsdeviators, der Deviatorinvariante J_2 und dem Winkel θ hergeleitet werden. Dies führt auf die alternative Darstellung (A-88) der

Hauptspannungen, so dass unter Berücksichtigung der Gleichungen (A-83)₂ und (A-84) die Hauptspannungen σ_i allein aus den Invarianten I_1 , J_2 und J_3 berechnet werden können, ohne dass das Eigenwertproblem (A-59) gelöst werden muss [142, p. 269], [139, p. 89].

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos \theta \quad (\text{A-85})$$

$$S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos(120^\circ - \theta) \quad (\text{A-86})$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos(120^\circ + \theta) \quad (\text{A-87})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} I_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos(120^\circ - \theta) \\ \cos(120^\circ + \theta) \end{bmatrix} \quad (\text{A-88})$$

Tabelle A-1 Spannungszustände in Abhängigkeit der betrachteten Meridianebene $\theta = \text{konst.}$
(siehe *Hiermaier* [18, p. 103], *Khan & Huang* [139, p. 91])

$\Theta = 0^\circ$	Triaxialer Zug mit $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, d.h. einaxialer Zug und hydrostatischer Spannungszustand überlagert
$\Theta = 30^\circ$	Reiner Schubspannungszustand mit $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_3$ (maximale Schubspannung $\tau_{\max} = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$ auf die Ebene mit Normalenvektor $\mathbf{n} = (2^{-1/2}, 0, 2^{-1/2})$)
$\Theta = 60^\circ$	Triaxiale Kompression mit $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$, d.h. einaxialer Druck und hydrostatischer Spannungszustand überlagert

A.3.4 Materielle Objektivität

Die konstitutiven Gleichungen und damit die Variablen, die das Verhalten des Kontinuums beschreiben, müssen das Prinzip der materiellen Objektivität erfüllen, das heißt sie müssen die räumlich und zeitlich vom Bezugssystem unabhängig sein [140, p. 161], [139, p. 76].

Ausgangspunkt zur Beschreibung der materiellen Objektivität ist die abstands- und winkelerhaltende *Euklidische* Transformation (A-89), welche die Lage des materiellen Punktes \mathbf{X} mit den räumlichen Koordinaten \mathbf{x} in einem Bezugssystem \mathbf{e}_i zum Zeitpunkt t mit den räumlichen Koordinaten $\mathbf{x}^\#$ desselben materiellen Punktes \mathbf{X} im Bezugssystem $\mathbf{e}_i^\#$ zur Zeit $t^\#$ verknüpft. Der Vektor $\mathbf{c}(t)$ beschreibt die Starrkörperverschiebung des durch den eigentlich orthogonalen Rotationstensor $\mathbf{Q}(t)$ um den Ursprung gedrehten Vektors \mathbf{x} . Der Zeitversatz zwischen beiden Bezugssystemen ist konstant mit t_{shift} nach Gleichung (A-90), so dass ein betrachtetes Zeitintervall in beiden Bezugssystemen gleich groß ist. Skalare α , Vektoren \mathbf{a} und

Tensoren zweiter Stufe \mathbf{A} sind dann materiell objektiv, wenn sie die Gleichungen (A-91) erfüllen.

$$\mathbf{x}^\#(\mathbf{X}, t^\#) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{c}(t) \quad (\text{A-89})$$

$$t^\# = t + t_{\text{shift}} \quad \Delta t = t_2 - t_1 = t_2^\# - t_1^\# \quad (\text{A-90})$$

$$\alpha^\# = \alpha \quad \mathbf{a}^\# = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} \quad \mathbf{A}^\# = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (\text{A-91})$$

In Hydrocodes sind die konstitutiven Gleichungen bezüglich der Änderungsraten formuliert. Entsprechend müssen die Änderungsraten das Prinzip der materiellen Objektivität erfüllen [18, p. 37]. Die materiellen Änderungsraten objektiver Tensoren sind jedoch nicht zwangsläufig ebenfalls objektiv. So ist zwar der Spannungsvektor $\mathbf{t}^{(n)}$ (A-57) gemäß Gleichung (A-92) objektiv – und damit nach Gleichung (A-93) auch der *Cauchy*sche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$. Die materielle Änderungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ des *Cauchy*schen Spannungstensors erfüllt das Kriterium der materiellen Objektivität nicht wie Gleichung (A-94) zeigt, die aus der Anwendung der Produktregel auf Gleichung (A-93) folgt.

$$(\mathbf{t}^{(n)})^\# = \boldsymbol{\sigma}^\# \cdot \mathbf{n}^\# = (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{t}^{(n)} \quad (\text{A-92})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\# = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (\text{A-93})$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^\# = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \quad (\text{A-94})$$

Die Änderungsrate $d\mathbf{Q}/dt$ des Rotationstensors \mathbf{Q} ist nach Gleichung (A-95) mit den Spintensoren \mathbf{W} und $\mathbf{W}^\#$ verknüpft. Diese beschreiben die Starrkörperrotationen des betrachteten materiellen Punkts im jeweiligen Bezugssystem \mathbf{e}_i bzw. $\mathbf{e}_i^\#$. Einsetzen von Gleichung (A-95) in Gleichung (A-94) führt auf Gleichung (A-96). Der Klammerterm ist die *Jaumann*sche Spannungsrate $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^J$ (A-97), die definitionsgemäß materiell objektiv ist. Diese beschreibt die Änderungsrate von $\boldsymbol{\sigma}$ in einem bewegten Bezugssystem. Für reine Starrkörperrotationen (mit $\dot{\sigma}_{ij} = 0$) gilt $\hat{\sigma}_{ij}^J = 0$, was korrekt ist, da Starrkörperrotationen keine Spannungen erzeugen. Die \mathbf{W} -Terme in Gleichung (A-97) beschreiben das Mitrotieren des Beobachters mit dem materiellen Punkt.

$$\mathbf{W}^\# = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (\text{A-95})$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^\# - \mathbf{W}^\# \cdot \boldsymbol{\sigma}^\# + \boldsymbol{\sigma}^\# \cdot \mathbf{W}^\# = \mathbf{Q} \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (\text{A-96})$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^J = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \quad \hat{\sigma}_{ij}^J = \dot{\sigma}_{ij} - W_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} W_{kj} \quad (\text{A-97})$$

A.4 Bilanzgleichungen

Der Zusammenhang zwischen (äußeren) Kräften und der Bewegung von Körpern wird durch (a) allgemeingültige, materialunabhängige Prinzipien und (b) konstitutive Gleichungen beschrieben. Erstere werden auch als Prinzipien erster Ordnung bezeichnet und umfassen⁷⁰:

1. Massenbilanz
2. Impulsbilanz
3. Drehimpulsbilanz
4. Energiebilanz (1. Hauptsatz der Thermodynamik)
5. Entropiebilanz (2. Hauptsatz der Thermodynamik)

Die Drehimpulsbilanz bestätigt lediglich die Symmetrie des *Cauchy*schen Spannungstensors $\mathfrak{\sigma}$, weshalb hier nicht weiter darauf eingegangen wird.

A.4.1 Massenbilanz

Unter der Voraussetzung, dass weder ein Masseaustausch über die Oberfläche noch ein Zuwachs oder Verlust an Masse im Inneren des Körpers stattfindet, ist die Masse m (A-98) eines materiellen Körpers gemäß dem globalen Masseerhaltungssatz (A-99) zu allen Zeiten konstant.

$$m = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}, t) dV_0 \quad (\text{A-98})$$

$$\frac{D}{Dt} m = \frac{D}{Dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \frac{D}{Dt} \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}, t) dV_0 = 0 \quad (\text{A-99})$$

Die globale Massenbilanz (A-100) in *Eulerscher* Darstellung erhält man durch Anwendung der Produktregel auf den Integranden von Gleichung (A-99), Berücksichtigung der zeitlichen Ableitung des differentiellen Volumens dV und Anwendung der materiellen Zeitableitung nach Gleichung (A-29). Der Integrand in Gleichung (A-100) muss stets Null sein, was auf die lokale Massenbilanz in *Eulerscher* Darstellung – die Kontinuitätsgleichung (A-101) – führt.

⁷⁰ Die in den nachfolgenden Abschnitten A.4.1 bis A.4.4 vorgestellten Bilanzgleichungen gelten nur unter der Voraussetzung stetiger Feldfunktionen. Im Fall singulärer Flächen innerhalb des Kontinuums müssen die Integration über die beiden Teilvolumina ausgeführt und die Bilanzgleichungen durch zusätzliche Sprungbedingungen ergänzt werden [10, p. 61]. Bei den in der Numerik verwendeten Formulierungen ist diese zusätzliche Sprungbedingung nicht erforderlich. Die schlagartige Änderung der Zustandsgrößen führt jedoch zu künstlichen Oszillationen um den tatsächlichen Zustand, die mit Hilfe der künstlichen Viskosität (siehe unter Anderem *Zukas* [26, pp. 138-141]) gedämpft werden.

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} m &= \frac{D}{Dt} \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{D}{Dt} (\rho dV) = \int_V (\rho dV)^\bullet = \int_V (\dot{\rho} dV + \rho d\dot{V}) \\
&= \int_V [\dot{\rho} + \rho (\mathit{grad} \cdot \mathbf{v})] dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\mathit{grad} \rho) + \rho (\mathit{grad} \cdot \mathbf{v}) \right] dV \\
&= \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathit{grad} \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0
\end{aligned} \tag{A-100}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} m &= \frac{D}{Dt} (\rho dV) = \frac{D}{Dt} \rho + \rho (\mathit{div} \mathbf{v}) = \frac{D}{Dt} \rho + \rho (\mathit{grad} \cdot \mathbf{v}) \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\mathit{grad} \rho) + \rho (\mathit{grad} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathit{grad} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0
\end{aligned} \tag{A-101}$$

Damit folgt für die zeitliche Ableitung von über die Masse integrierten Funktionen:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\dots) \rho dV = \int_V \frac{D}{Dt} [(\dots) \rho dV] = \int_V \frac{D(\dots)}{Dt} \rho dV + \int_V (\dots) \frac{D}{Dt} (\rho dV) = \int_V \frac{D(\dots)}{Dt} \rho dV \tag{A-102}$$

A.4.2 Impulsbilanz

Der Impuls \mathbf{I} eines materiellen Körpers \mathcal{B} ist gemäß Gleichung (A-103) definiert. Die globale Impulsbilanz – in *Eulerscher* Darstellung ist dies Gleichung (A-104) – besagt, dass die zeitliche Änderungsrate des Impulses gleich der vektoriellen Summe aller (äußeren) Oberflächenkräfte $\mathbf{t}^{(n)}$ und Volumenkräfte \mathbf{b} ist. Unter Berücksichtigung der Masseerhaltung (A-102) für die linke Gleichungsseite sowie Gleichung (A-56) und des Divergenztheorems für den Oberflächenterm folgt daraus die lokale Form der Impulsbilanz (A-105) in räumlicher Darstellung.

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = \int_m \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dm = \int_V \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) dV \tag{A-103}$$

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = \frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{v} \rho dV = \int_A \mathbf{t}^{(n)} dA + \int_V \mathbf{b} \rho dV \tag{A-104}$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{v} \rho dV = \int_V \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \rho dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dA + \int_V \mathbf{b} \rho dV = \int_V (\mathit{grad} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) dV$$

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathit{grad} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \qquad \rho \ddot{x}_i = \rho \dot{v}_i = \sigma_{ji,j} + \rho b_i \tag{A-105}$$

A.4.3 Energiebilanz

Unter der Wirkung äußerer Kräfte wird ein Körper deformiert. Dabei wird am Körper Arbeit verrichtet, wobei der Körper Energie aufnimmt. Die Aufteilung der aufgenommenen Energie erfolgt gemäß der mechanischen Energiebilanz (A-106), die direkt aus der lokalen Impulsbilanz (A-105) abgeleitet werden kann. Demnach ist die Summe aus der Änderungsrate

der kinetischen Energie E_{kin} (A-107) und der Spannungsleistung P_i ⁷¹ (A-108) gleich der Leistung P_a der äußeren Kräfte (A-109). Der Oberflächenterm in Gleichung (A-109) kann mittels Divergenztheorem und Produktregel sowie unter Ausnutzung der Symmetrie von $\boldsymbol{\sigma}$ und $\mathbf{D} = \text{sym } \mathbf{L}$ zu Gleichung (A-110) umgeformt werden.

$$\dot{E}_{kin} + P_i = P_a \quad (\text{A-106})$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho dV \quad \dot{E}_{kin} = \int_V \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \rho dV \quad (\text{A-107})$$

$$P_i = \frac{D}{Dt} W_i = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} dV \quad (\text{A-108})$$

$$P_a = \frac{D}{Dt} W_a = \int_A \mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{v} dA + \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \rho dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dA + \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \rho dV \quad (\text{A-109})$$

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dA &= \int_V \text{grad} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dV = \int_V (\text{grad} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\text{grad } \mathbf{v})^T dV \\ &= \int_V (\text{grad} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{L} dV = \int_V (\text{grad} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} dV \end{aligned} \quad (\text{A-110})$$

Die Gesamtenergie E_{tot} (A-111) eines Körpers setzt sich aus seiner kinetischen Energie E_{kin} und der inneren Energie E (A-112) zusammen. Gemäß dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik in Gleichung (A-113) entspricht in einem geschlossenen System⁷² die Änderungsrate der Gesamtenergie E_{tot} infolge äußerer Einwirkungen der Summe aus der Leistung P_a der äußeren Kräfte und der resultierenden Wärme(zufuhr)leistung dQ/dt (A-114)⁷³. Letztere setzt sich aus dem Wärmestrom durch die umhüllende Fläche A mit dem spezifischen Wärmestromvektor \mathbf{h} sowie der Wärmezufuhr infolge innerer Wärmequellen – ausgedrückt durch die spezifische Strahlungsleistung r – zusammen.

$$E_{tot} = E_{kin} + E \quad \dot{E}_{tot} = \dot{E}_{kin} + \dot{E} \quad (\text{A-111})$$

$$E = \int_V e \rho dV \quad \dot{E} = \int_V \dot{e} \rho dV \quad (\text{A-112})$$

$$\dot{E}_{tot} = P_a + \dot{Q} \quad (\text{A-113})$$

$$\dot{Q} = - \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \rho dA + \int_V r \rho dV = - \int_V \text{grad} \cdot \mathbf{h} \rho dV + \int_V r \rho dV = \int_V \dot{q} \rho dV \quad (\text{A-114})$$

⁷¹ Die Spannungsleistung P_i ist die Änderungsrate der Formänderungsarbeit W_i .

⁷² Gemäß *Stephan et al.* [12, p. 3] sind die Grenzen eines geschlossenen Systems für Materie undurchlässig. Ein Temperatúrausgleich mit der Umgebung ist jedoch möglich.

⁷³ Das Minuszeichen in der Gleichung des spezifischen Wärmestroms $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}$ rührt daher, dass \mathbf{n} stets nach Außen gerichtet ist und die Zufuhr von Wärme (mit nach Innen gerichtetem \mathbf{h}) als positiv definiert wird.

Gleichsetzen der Gleichungen (A-111)₂ und (A-113) sowie Einsetzen der Gleichungen (A-107)₂ und (A-109) bis (A-112) führt unter Berücksichtigung der Impulsbilanz auf die Energiebilanz in globaler und lokaler Form gemäß den Gleichungen (A-115) und (A-116).

$$\dot{E} = P_i + \dot{Q}$$

$$\int_V \dot{e} \rho dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} dV + \int_V \dot{q} \rho dV \quad (\text{A-115})$$

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \dot{q} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + r - \text{grad} \cdot \mathbf{h} \quad (\text{A-116})$$

Unter der Voraussetzung, dass keine äußeren Wärmequellen vorhanden sind, beschreibt der 1. Hauptsatz der Thermodynamik, wieviel der über die Spannungsleistung zugeführten Energie als innere Energie gespeichert wird und wieviel in Form von Wärme an die Umgebung abgegeben wird.

In der Thermodynamik werden hauptsächlich Fluide behandelt [147, p. 14]. Die Energiebilanz ist dann von der Form (A-117). Die Formänderungsarbeit W_i wird dabei in die Volumenarbeit W_v sowie die Dissipationsarbeit W_{diss} aufgespalten, was die jeweiligen Anteile infolge reversibler und irreversibler Verzerrungen bezeichnet.

$$dE = dW_i + dQ = dW_v + dW_{diss} + dQ = -p dV + dW_{diss} + dQ \quad (\text{A-117})$$

A.4.4 Prinzip der Irreversibilität und Entropiebilanz

Aufgrund experimenteller Erfahrung sind irreversible Prozesse⁷⁴ – das heißt die „Transformation von Energie in eine nicht mehr in mechanische Arbeit umsetzbare Energieform“ wie z.B. die Umwandlung kinetischer Energie über Reibung in Wärme [140, p. 147] – bekannt. Diese Eindeutigkeit der Prozessrichtung kann mit Hilfe des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik nicht beschrieben werden. Dazu wird als zusätzliche extensive Zustandsgröße die Entropie S mit der spezifischen Entropie s nach Gleichung (A-118) postuliert. Die Bedeutung der Entropie beschreiben *Stephan et al.* [148, p. 142] wie folgt: „Die dem System zufließende Wärme Q wird als innere Energie E in der Koordinate S gespeichert. Die in einem System dissipierte Arbeit erhöht die Entropie.“

$$S = \int_m s dm = \int_V s \rho dV \quad (\text{A-118})$$

Daraus folgt der 2. Hauptsatz der Thermodynamik (A-119) in globaler Form, der eine mögliche Form der *Clausius-Duhem*-Ungleichung darstellt. Das Gleichheitszeichen gilt für den (idealisierten) Grenzfall eines reversiblen Prozesses.

⁷⁴ Ein Prozess ist durch die Wechselwirkung (a) des Systems mit seiner Umgebung, das heißt einen Energietransfer über die Systemgrenze, oder (b) von Teilen eines abgeschlossenen Systems untereinander definiert. Aufgrund des Prozesses kommt es zu einer Zustandsänderung [11], [12].

$$\dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T} = \int_V \left(\frac{r}{T} - \text{grad} \cdot \frac{\mathbf{h}}{T} \right) \rho dV \quad (\text{A-119})$$

Für Fluide kann gezeigt werden, dass die innere Energie E eine Funktion der Entropie S und des Volumens V ist [148]. Ein Vergleich des vollständigen Differentials (A-120) mit Gleichung (A-117) führt auf die *Gibbssche* Fundamentalgleichung (A-121). Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik für Fluide kann dann wie in Gleichung (A-122) formuliert werden, wobei dS_{irr} den irreversiblen Anteil und dS_Q den reversiblen Entropieanteil infolge Wärmezu- oder -abfuhr darstellt [148, p. 172ff].

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S dV \quad (\text{A-120})$$

$$dE = T dS - p dV \quad (\text{A-121})$$

$$T dS = T (dS_{\text{irr}} + dS_Q) \geq dQ \quad (\text{A-122})$$

$$dW_{\text{diss}} = T dS_{\text{irr}} \quad dQ = T dS_Q \quad (\text{A-123})$$

A.5 Konstitutive Gleichungen

Die materialspezifischen Eigenschaften von Kontinuen werden mittels der konstitutiven Gleichungen beschrieben. Diese verknüpfen „*alle das makroskopische Kontinuumsverhalten beschreibenden phänomenologischen Variablen*“ [140, p. 153]. Unter Vernachlässigung thermomechanischer und zeitabhängiger Einflüsse sowie weiterer Zustandsgrößen stehen zur Berechnung von insgesamt 11 Unbekannten – die sechs unabhängigen Komponenten σ_{ij} des *Cauchy*schen Spannungstensors, die drei Verschiebungskomponenten u_i , die spezifische innere Energie e und die Dichte ρ bzw. für eine Hydrocode-Formulierung die jeweilige Änderungsrate besagter Größen – lediglich drei Gleichungen der Impulsbilanz sowie je eine Gleichung für die Massen- und Energiebilanz zur Verfügung. Die fehlenden sechs Gleichungen müssen durch konstitutive Gleichungen bereitgestellt werden, welche die Verzerrungen, die Spannungen und die innere Energie miteinander verknüpfen⁷⁵.

A.5.1 Lineare, isotrope Elastizität

Unter der Voraussetzung physikalischer und geometrischer Linearität sowie Spannungsfreiheit im verzerrungsfreien Zustand mit $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gilt das verallgemeinerte *Hookesche* Gesetz für anisotropes, linear-elastisches Materialverhalten (A-124). Der Elastizitätstensor C_{ijkl} ist ein Tensor vierter Stufe mit $3^4 = 81$ Komponenten.

$$\boldsymbol{\sigma} = \overset{(4)}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{A-124})$$

⁷⁵ Im Falle weiterer unbekannter Zustandsgrößen müssen diese über entsprechend mehr konstitutive Gleichungen miteinander verknüpft werden.

Für isotropes Materialverhalten sind die Komponenten C_{ijkl} des Elastizitätstensors für alle Richtungen identisch. Der Elastizitätstensor muss dann von der allgemeinen Form (A-125) eines isotropen Tensors vierter Stufe mit den skalaren Konstanten λ , μ und α sein [142, p. 151]. Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors und des Verzerrungstensors muss der Elastizitätstensor zusätzlich die Symmetriebedingungen (A-126) erfüllen, was nur für $\alpha = 0$ gegeben ist.

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{A-125})$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (\text{A-126})$$

Das *Hookesche* Gesetz für linear elastisches, isotropes Materialverhalten (A-127) enthält somit nur noch zwei unabhängige Materialparameter – die *Lamé*-Konstanten λ und μ . Die Gleichungen (A-128) sind die entsprechenden Darstellungen in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E , der Querdehnzahl ν und des Schubmoduls G . Die Beziehung (A-129) zwischen E und ν zu den *Lamé*-Konstanten wird für einen einaxialen Spannungszustand mit den Randbedingungen gemäß Gleichung (A-130) bestimmt. Der Schubmodul G (A-131)₁ folgt aus den Randbedingungen (A-131)₂ für den einfachen Scherversuch.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu \cdot (\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (\text{A-127})$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{-\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2G} \sigma_{ij} \quad (\text{A-128})$$

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \quad (\text{A-129})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E \varepsilon_{11} \\ \sigma_{ij} &= 0 \quad \text{für } i, j \neq 1 \end{aligned} \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} \quad (\text{A-130})$$

$$G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = G \gamma_{12} = 2G \varepsilon_{12} \quad (\text{A-131})$$

Allgemein gilt für isotrope Materialien, dass der Hydrostat des Spannungstensors reine Volumenänderungen bewirkt und Gestaltsänderungen allein aus dem Spannungsdeviator resultieren. Im vorliegenden Fall der linearen, isotropen Elastizität sind die Hauptrichtungen des Spannungstensors σ und des Verzerrungstensors ε identisch. Die elastische Volumendehnung ε_V und der hydrostatische Druck p (A-66) sind über den Kompressionsmodul K (A-133) verknüpft. Gleichung (A-132) folgt aus (A-128)₂ für den hydrostatischen Kompressionsversuch mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{kk} = \frac{-3\nu}{E} \sigma_{kk} + \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{kk} = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_{kk} = 3 \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_m = -3 \frac{1 - 2\nu}{E} p \quad (\text{A-132})$$

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\nu)} = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_V} = \frac{-p}{\varepsilon_V} = \frac{-p}{\theta} \quad (\text{A-133})$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (A-132) folgt aus Gleichung (A-128)₂ die Verknüpfung (A-135) des deviatorischen Anteils ε'_{ij} des Verzerrungstensors (A-134) mit dem Spannungsdeviator S_{ij} über den Schubmodul G .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) = \varepsilon_m \delta_{ij} + \varepsilon'_{ij} \quad (\text{A-134})$$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} + p \delta_{ij}) = \frac{1}{2G} S_{ij} \quad (\text{A-135})$$

Die obige Aufspaltung der konstitutiven Gleichungen in eine Zustandsgleichung zur Beschreibung des Kompressionsverhaltens und ein sogenanntes Festigkeitsmodell für das Schubverhalten wird im nachfolgenden Abschnitt A.5.2 zur Plastizität genutzt und ist auch in AUTODYN hinterlegt. Gleichung (A-132) stellt den einfachsten Fall einer linearen Zustandsgleichung dar.

Der einaxiale Verzerrungszustand wird für die Beschreibung von Schockwellen benötigt wie z.B. in Abschnitt 0 dargestellt. Einsetzen der Randbedingungen – Hauptverzerrung ε_1 , $\varepsilon_i = 0$ für $i \neq 1$, Hauptspannungen $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ – in Gleichung (A-127) führt auf den Zusammenhang (A-136) zwischen ε_1 und σ_1 mit dem Steifemodul E_s (A-137).

$$\sigma_1 = \frac{(1-\nu) \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \varepsilon_1 = E_s \cdot \varepsilon_1 \quad (\text{A-136})$$

$$E_s = \frac{1-\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} E = K + \frac{4}{3} G \quad (\text{A-137})$$

A.5.2 Plastizität

Plastizität ist durch irreversible Deformationen gekennzeichnet, wobei Energie dissipiert wird. Eine konstitutive Theorie muss die folgenden vier Hauptkomponenten enthalten [139, p. 120ff], [149, p. 65]:

- Fließfläche bzw. Fließbedingung im Ausgangszustand
- Kriterium zur Abgrenzung von Be- und Entlastung
- Fließregel
- Verfestigungsregel zur Beschreibung der Veränderung der Fließfläche (durch Expansion bzw. Kontraktion, Translation und Rotation) infolge plastischer Deformationen

Im Folgenden wird lediglich auf jene Punkte genauer eingegangen, die im Zuge dieser Arbeit Verwendung finden.

A.5.2.1 Fließflächen

Die Fließfläche F (A-138) beschreibt im 6-dimensionalen Spannungsraum alle Spannungszustände, unter denen im betrachteten Material plastische Deformationen auftreten. Bei Spannungszuständen innerhalb der Fließfläche $F(\sigma_{ij}) < 0$ verhält sich das Material elastisch. Spannungszustände außerhalb der Fließfläche sind nicht möglich. Analog zur Fließgrenze σ_y im einaxialen Zugversuch ist auch die Fließfläche F lediglich eine Konvention.

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (\text{A-138})$$

Bei isotropen Materialien kann die Fließfläche F im dreidimensionalen Hauptspannungsraum formuliert werden (siehe Abschnitt A.3.3), was gleichwertig mit einer Darstellung der Fließfläche F als Funktion dreier Invarianten oder in *Haigh-Westergaard*-Koordinaten ist.

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad F(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad F(\xi, \rho, \theta) = 0 \quad (\text{A-139})$$

Das Maxwell-Huber-von Mises-Kriterium

Das Fließkriterium nach *Maxwell*, *Huber* und *von Mises* wurde eigentlich für Metalle entwickelt. Plastische Deformationen treten nach Gleichung (A-140) auf, wenn die zweite Invariante J_2 des Spannungsdeviators \mathbf{S} einen kritischen Wert κ erreicht. Die Fließfläche stellt im Hauptspannungsraum einen zur hydrostatischen Achse parallelen Zylinder mit Radius $\rho = 2^{1/2} \cdot \kappa$ nach Gleichung (A-82) dar.

$$F(J_2) = J_2 - \kappa^2 = 0 \quad (\text{A-140})$$

Der Parameter κ kann entweder aus einem einaxialen Zugversuch ($\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) oder einem direkten Scherversuch ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_y$, $\sigma_2 = 0$) bestimmt werden, was auf die Gleichungen (A-141) und (A-142) führt. Für einen einaxialen Verzerrungszustand mit $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ folgt daraus Gleichung (A-143).

$$\kappa = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} = \tau_y \quad (\text{A-141})$$

$$S_{ij} S_{ji} = 2\kappa^2 = \frac{2}{3} = \sigma_y^2 \quad (\text{A-142})$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \quad (\text{A-143})$$

Das Bruchkriterium nach Mohr und Coulomb

Das *Mohr-Coulombsche* Bruchkriterium (A-144) mit der Normalspannungskomponente σ_n bezüglich der Scherfläche ist eine der gängigsten Fließbedingungen in der Geotechnik. Die Darstellung des Grenzzustands durch die Hauptspannungen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ führt mit Abbildung A.6 auf Gleichung (A-145).

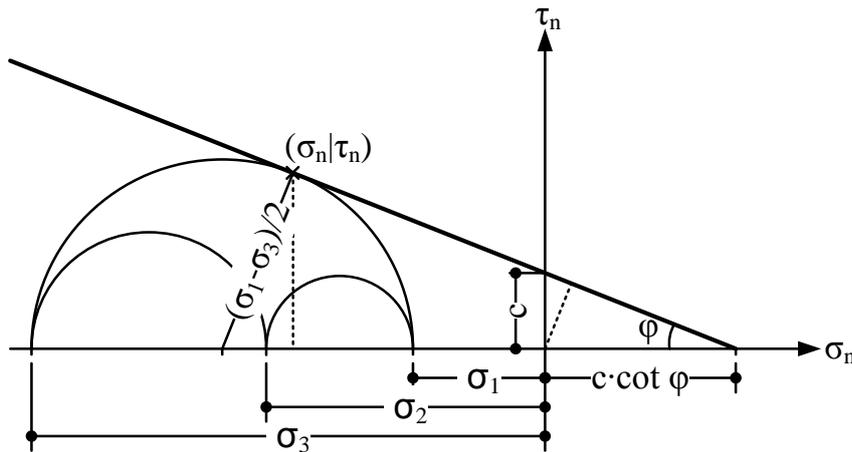


Abbildung A.6
Mohr'scher Kreis und
Mohr-Coulombsches
Bruchkriterium in der
 σ_n - τ_n -Ebene

Einsetzen der Gleichungen (A-88) in Gleichung (A-145) führt auf die bekannte Darstellung (A-146) einer konischen Fließfläche im Hauptspannungsraum mit unregelmäßigem Sechseckquerschnitt in der Deviatorebene wie in Abbildung A.7 dargestellt. Die Unregelmäßigkeit folgt aus unterschiedlichen Spannungsgrenzzuständen für Kompression und Extension. Die Druckabhängigkeit der maximalen Schubspannung wird durch die erste Spannungsinvariante I_1 berücksichtigt.

$$\tau = -\sigma_n \cdot \tan \varphi + c \tag{A-144}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi + c \cdot \cos \varphi \tag{A-145}$$

$$F(I_1, J_2) = \frac{I_1}{3} + \sqrt{J_2} \cdot \left[\sin(\theta + 60^\circ) + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\theta + 60^\circ) \right] - c \cdot \cos \varphi = 0 \tag{A-146}$$

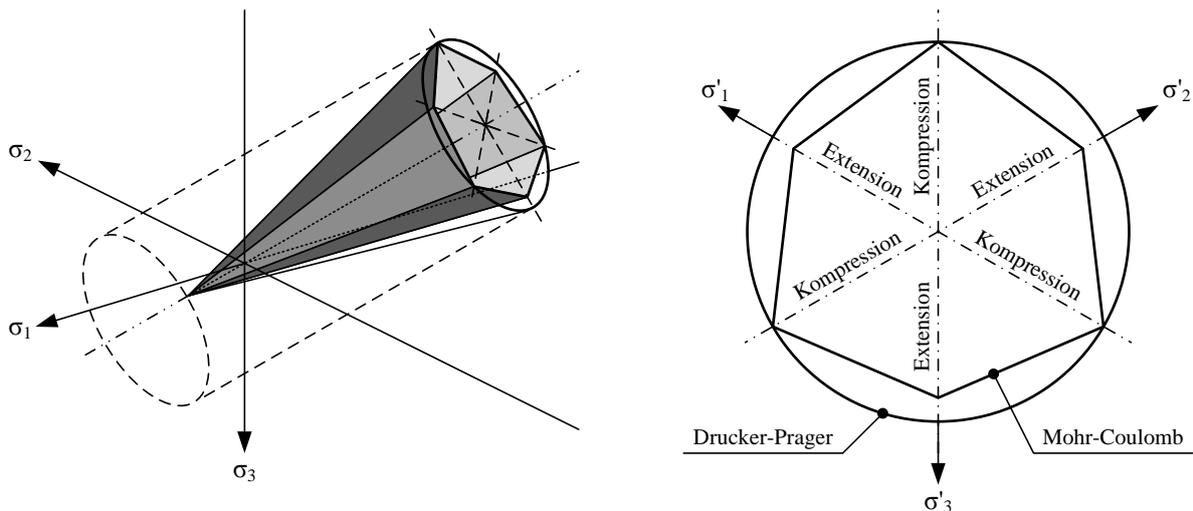


Abbildung A.7 Fließflächen nach Drucker-Prager, Mohr-Coulomb und von Mises im Hauptspannungsraum (links) sowie im Deviatorschnitt (rechts)

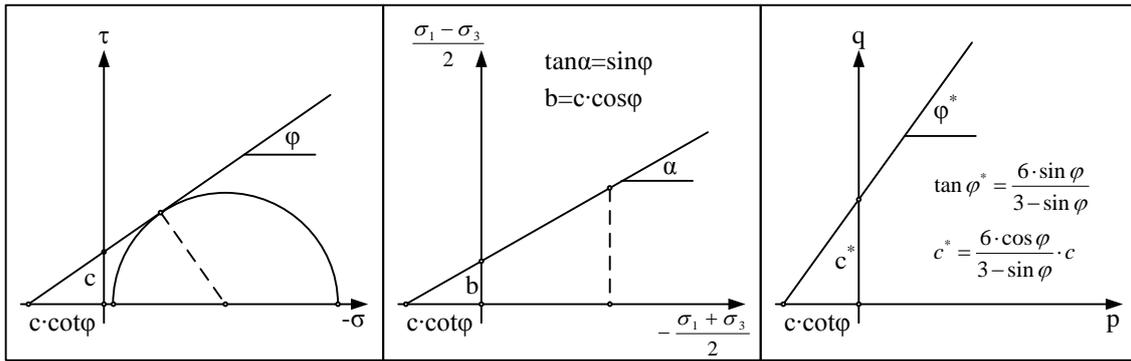


Abbildung A.8 Darstellung der *Mohr-Coulombschen* Bruchgeraden in unterschiedlichen Ebenen

Das *Mohr-Coulombsche* Bruchkriterium (A-144) kann in unterschiedlichen Ebenen dargestellt werden (siehe Abbildung A.8). In DIN 18137-2 [150] wird Gleichung (A-147) empfohlen, mit der Umrechnung der Scherparameter φ und c gemäß den Gleichungen (A-148).

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \tan \alpha + b \quad (\text{A-147})$$

$$\tan \alpha = \sin \varphi \quad b = c \cdot \cos \varphi \quad (\text{A-148})$$

Alternativ ist auch die Darstellung (A-149) in der p - q -Ebene üblich mit dem isotropen Druck p (A-66) und der *Roscoe*-Invariante q (A-151).

$$q = p \cdot \tan \varphi^* + c^* \quad (\text{A-149})$$

$$\tan \varphi^* = \frac{6 \cdot \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad c^* = \frac{6 \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \cdot c \quad (\text{A-150})$$

$$q = \sqrt{3J_2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ji}} \quad (\text{A-151})$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{3}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}$$

Das Drucker-Prager-Kriterium

Das Fließkriterium nach *Drucker & Prager* (A-152) entspricht dem *Maxwell-Huber-von Mises*-Kriterium, ergänzt um einen druckabhängigen Term $\alpha \cdot I_1$. Es beschreibt im Hauptspannungsraum einen konischen Zylinder um die hydrostatische Achse (siehe Abbildung A.7) sowie im Deviatorschnitt einen Kreis mit dem druckabhängigen Radius (A-153).

$$F(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} - (\alpha I_1 + \kappa) = 0 \quad (\text{A-152})$$

$$\rho = \sqrt{2J_2} = \sqrt{2}(\alpha I_1 + \kappa) \quad (\text{A-153})$$

Übereinstimmung des Fließkriteriums nach *Drucker & Prager* mit dem *Mohr-Coulombschen* Bruchkriterium kann sowohl auf den Kompressions- als auch auf den Extensionsmeridianen erzielt werden. Bei Anpassung auf den Kompressionsmeridian, was den äußeren Eckpunkten der *Mohr-Coulombschen* Fließfläche in der Deviatorebene entspricht, erhält man die nachfolgenden Zusammenhänge zwischen den Parametern α und κ mit den Scherparametern c und φ .

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad \kappa = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\cos \varphi}{3 - \sin \varphi} \cdot c \quad (\text{A-154})$$

Das in den Berechnungen mit AUTODYN verwendete Festigkeitsmodell MoGranular (siehe Anhang C.2.2) ist ein modifiziertes *Drucker-Prager-Modell* mit in Zeit und Hauptspannungsraum konstanter Fließfläche (ideale Plastizität ohne Verfestigungsregel). Infolgedessen wird auf eine Beschreibung möglicher Verfestigungsregeln hier verzichtet.

A.5.2.2 Be- und Entlastungskriterium

Der Gradient der Fließfläche im Hauptspannungsraum bzw. Vektor $\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}$ ist parallel zum nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} auf die Fließfläche im betrachteten Spannungspunkt (siehe Abbildung A.9). Da bei idealer Plastizität die Fließfläche konstant ist, gilt für Belastungszustände, die plastische Deformationen hervorrufen, $dF = 0$. Das Spannungsinkrement $d\boldsymbol{\sigma}$ steht somit tangential zur Fließfläche im betrachteten Spannungspunkt. Elastische Entlastung erfolgt, wenn das Spannungsinkrement $d\boldsymbol{\sigma}$ ins Innere der Fließfläche zeigt.

$$\begin{array}{ll} \text{Elastische} & \\ \text{Deformationen:} & F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \end{array} \quad (\text{A-155})$$

$$\begin{array}{ll} \text{Plastische} & \\ \text{Belastung:} & F(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad dF = F(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) - F(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \end{array} \quad (\text{A-156})$$

$$\begin{array}{ll} \text{Elastische} & \\ \text{Entlastung:} & F(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad dF = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} < 0 \end{array} \quad (\text{A-157})$$

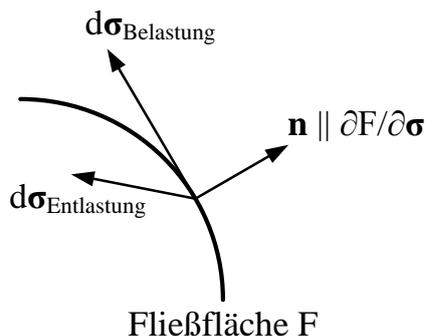


Abbildung A.9 Be- und Entlastungskriterium bei idealer Plastizität; nach *Khan & Huang* [139, p. 116]

A.5.2.3 Fließregel

Im Folgenden wird unterstellt, dass die plastischen Verformungen zeitunabhängig sind, was einen linearen Zusammenhang der Spannungen und elastischen Verzerrungen zur Folge hat. Da die plastischen Verformungen vom Belastungspfad abhängig sind, ist eine eindeutige Zuordnung zwischen plastischen Spannungen und Verzerrungen nicht möglich. Die konstitutiven Gleichungen für plastische Deformationen müssen in inkrementeller Form formuliert werden. Die plastischen Deformationen erhält man durch Integration der plastischen Verzerrungsinkremente über den gesamten Belastungsvorgang [139, p. 120ff].

Die in AUTODYN verwendeten *Drucker-Prager*-Festigkeitsmodelle verwenden eine Fließregel vom *Prandtl-Reuss*-Typ [121, p. 174]. Die *Prandtl-Reuss*-Gleichungen basieren auf den folgenden Annahmen:

- Unter der Voraussetzung infinitesimaler Verzerrungen bzw. Verzerrungsinkremente können die totalen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ additiv in die elastischen Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ und die plastischen Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ aufgespalten werden.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p \quad (\text{A-158})$$

- Plastische Deformationen sind isochor, so dass der plastische Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ und der deviatorische plastische Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}^{p'}$ identisch sind.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^p = 0 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{p'} \quad (\text{A-159})$$

- Die plastische Verzerrungsrate $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ und der Spannungsdeviator \mathbf{S} sind linear über den plastischen Multiplikator $\dot{\lambda}$ verknüpft.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{S} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p = \dot{\lambda} S_{ij} \quad (\text{A-160})$$

- Für die Berechnung des plastischen Multiplikators $\dot{\lambda}$ wird das Fließkriterium (A-142) nach *von Mises* verwendet, was auf Gleichung (A-161) führt. Unter Verwendung der äquivalenten plastischen Verzerrungsrate (A-163) kann $\dot{\lambda}$ auch nach Gleichung (A-162) berechnet werden.

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)}{2\kappa^2} = \frac{\text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{2\kappa^2} = \frac{S_{ij} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ji}}{2\kappa^2} = \frac{3S_{ij} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ji}}{2\sigma_y^2} \quad (\text{A-161})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)}{2\kappa^2} = \frac{\text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{2\kappa^2} = \frac{S_{ij} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ji}}{2\kappa^2} = \frac{3S_{ij} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ji}}{2\sigma_y^2} \quad (\text{A-162})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^p}{2\kappa} = \frac{3\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^p}{2\sigma_y}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ji}^p \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^p \right)^2 + \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^p \right)^2 + \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^p \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A-163})$$

Obige Annahmen führen auf die (deviatorische) plastische Verzerrungsrate (A-164). Multiplikation mit dem Zeitinkrement dt ergibt das plastische Verzerrungsinkrement bzw. dessen einzelne Komponenten gemäß den linear elastischen, ideal plastischen *Prandtl-Reuss*-Gleichungen (A-165).

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij} = \frac{\sqrt{3} d\varepsilon_e^p}{2\kappa} S_{ij} \quad (\text{A-164})$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx}^p &= \frac{d\varepsilon_e^p}{\sqrt{3}\kappa} \left(\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{2} \right) & d\gamma_{xy}^p &= 2d\varepsilon_{xy}^p = \frac{\sqrt{3} d\varepsilon_e^p}{\kappa} \sigma_{xy} \\ d\varepsilon_{yy}^p &= \frac{d\varepsilon_e^p}{\sqrt{3}\kappa} \left(\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \right) & d\gamma_{yz}^p &= 2d\varepsilon_{yz}^p = \frac{\sqrt{3} d\varepsilon_e^p}{\kappa} \sigma_{yz} \\ d\varepsilon_{zz}^p &= \frac{d\varepsilon_e^p}{\sqrt{3}\kappa} \left(\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right) & d\gamma_{zx}^p &= 2d\varepsilon_{zx}^p = \frac{\sqrt{3} d\varepsilon_e^p}{\kappa} \sigma_{zx} \end{aligned} \quad (\text{A-165})$$

Für die totalen Verzerrungsraten müssen die elastischen Verzerrungsraten gemäß Abschnitt A.5.1 dazu addiert werden.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_m \delta_{ij} + d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p = \frac{d\sigma_{kk}}{9K} \delta_{ij} + \frac{1}{2G} dS_{ij} + d\lambda S_{ij} \quad (\text{A-166})$$

A.5.2.4 Ergänzende Anmerkungen

Im Allgemeinen wird die Fließregel auf der Grundlage der plastischen Potentialtheorie hergeleitet. Dazu wird die Existenz einer Fläche im Spannungsraum – das plastische Potential $Q(\boldsymbol{\sigma}) = \text{konst.}$ – postuliert. Der plastische Verzerrungsratenvektor im Hauptspannungsraum nach Gleichung (A-167) steht senkrecht auf der Fläche $Q(\boldsymbol{\sigma}) = \text{konst.}$ Wird unterstellt, dass die plastische Potentialfläche und die Fließfläche identisch sind mit $F(\boldsymbol{\sigma}) = Q(\boldsymbol{\sigma})$, steht die plastische Verzerrungsrate senkrecht auf der Fließfläche, und es handelt sich um eine sogenannte assoziierte Fließregel.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A-167})$$

Liegt in einem Berechnungsschritt der Spannungszustand in einem Element außerhalb der Fließfläche, so werden in AUTODYN bei Festigkeitsmodellen mit *Prandtl-Reuss*-Fließregel alle Deviatorspannungskomponenten S_{ij} mit dem Faktor (A-168) – mit σ_y und κ nach Gleichung (A-141) – multipliziert. Da nur die Deviatorspannungskomponenten skaliert werden, sind nur jene Spannungsanteile betroffen, die zu plastischen Verzerrungen führen. Dies entspricht einer Rückskalierung des Spannungsdeviators in der Deviatorebene und damit orthogonal zur Fließfläche nach *von Mises*. Für Festigkeitsmodelle mit *Drucker-Prager*-Fließfläche bedeutet diese nicht-assozierte Fließregel, dass plastische Schubverzerrungen nicht zu Volumenverzerrungen führen [121, p. 174].

$$\frac{\sqrt{2/3}\sigma_y}{\sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}} = \frac{\sqrt{2/3}\kappa}{\sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}} \quad (\text{A-168})$$

B Ergänzungen zu v_S - v_1 -Beziehungen

In modifizierten SHPB-Versuchen und Planar-Platten-Versuchen wird der untersuchte Boden einem einaxialen Verzerrungszustand unterzogen. Für die Ingenieursverzerrung in axialer Richtung ε_x und die Dichte des komprimierten Bodens ρ_1 gilt:

$$\varepsilon_x = \frac{h_0 - h_1}{h_0} = \frac{V_0 - V_1}{V_0} = 1 - \frac{V_1}{V_0} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \quad (\text{B-1})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \rho_1} = \frac{\rho_0}{\rho_1^2} \quad (\text{B-2})$$

Für die Definition des Steifemoduls E_s nach DIN 18135 folgt damit:

$$E_s = \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \cdot (1 - \varepsilon_x) = \frac{\partial \sigma_x}{\frac{\rho_0}{\rho_1^2} \cdot \partial \rho_1} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) \right] = \rho_1 \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial \rho_1} \quad (\text{B-3})$$

Einsetzen einer linearen v_S - v_1 -Beziehung gemäß Abschnitt 2.3.2 in die Gleichungen (2.40) und (3.22) führt auf

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{v_S}{v_S - v_1} = \rho_0 \cdot \frac{c_0 + S_1 \cdot v_1}{c_0 + (S_1 - 1) \cdot v_1} \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial v_1} = \frac{\rho_0 \cdot c_0}{[c_0 + (S_1 - 1) \cdot v_1]^2} \quad (\text{B-4})$$

$$\sigma_{x,1} = \rho_0 \cdot v_S \cdot v_1 = \rho_0 \cdot (c_0 + S_1 \cdot v_1) \cdot v_1 \quad \frac{\partial \sigma_{x,1}}{\partial v_1} = \rho_0 \cdot (c_0 + 2 \cdot S_1 \cdot v_1) \quad (\text{B-5})$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (B-4) und (B-5)₂ in (B-3) folgt:

$$E_s = \rho_1 \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \rho_1} = \rho_0 \cdot \frac{c_0 + S_1 \cdot v_1}{c_0 + (S_1 - 1) \cdot v_1} \cdot \rho_0 \cdot (c_0 + 2 \cdot S_1 \cdot v_1) \cdot \frac{[c_0 + (S_1 - 1) \cdot v_1]^2}{\rho_0 \cdot c_0} \quad (\text{B-6})$$

$$E_s = \frac{\rho_0}{c_0} \cdot [c_0 + (S_1 - 1) \cdot v_1] \cdot (c_0 + S_1 \cdot v_1) \cdot (c_0 + 2 \cdot S_1 \cdot v_1)$$

Für sehr kleine Partikelgeschwindigkeiten v_1 verhält sich der Boden annähernd elastisch. Der Parameter c_0 der v_S - v_1 -Beziehung entspricht dann gerade der elastischen Kompressionswellengeschwindigkeit nach Gleichung (2.10).

$$c_{el,P}^2 = \lim_{v_1 \rightarrow 0} \frac{E_s}{\rho_1} = \lim_{v_1 \rightarrow 0} \frac{[c_0 + (S_1 - 1) \cdot v_1]^2 \cdot (c_0 + 2 \cdot S_1 \cdot v_1)}{c_0} = c_0^2 \quad (\text{B-7})$$

Analog zu Gleichung (B-6) erhält man für den Kompressionsmodul unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.32) und (3.17):

$$K = \rho_1 \cdot \frac{\partial p}{\partial \rho_1} = \frac{1+2\xi}{3} \cdot \rho_1 \cdot \frac{\partial \sigma_{x,1}}{\partial \rho_1} \quad (\text{B-8})$$

$$K = \frac{1+2\xi}{3} \cdot \frac{\rho_0}{c_0} \cdot [c_0 + (S_1 - 1) \cdot v_1] \cdot (c_0 + S_1 \cdot v_1) \cdot (c_0 + 2 \cdot S_1 \cdot v_1)$$

Für sehr hohe Partikelgeschwindigkeiten v_1 und entsprechend hohe Spannungen und Drücke verliert die Scherfestigkeit an Einfluss. Der Seitendruckbeiwert ξ strebt gegen Eins, und für die Kompressionswellengeschwindigkeiten gilt $c_p \approx c_B$. Bei Böden haben jedoch beide Kompressionswellengeschwindigkeiten nichts mit der elastischen Schallgeschwindigkeit $c_{el,B}$ nach Gleichung (2.11) zu tun.

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} c_B^2 = \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{\partial p}{\partial \rho_1} = \lim_{\xi \rightarrow 1} \left\{ \frac{1+2\xi}{3} \cdot \frac{[c_0 + (S_1 - 1) \cdot v_1]^2 \cdot (c_0 + 2 \cdot S_1 \cdot v_1)}{c_0} \right\} = c_p^2 \quad (\text{B-9})$$

C Modellierung von Böden mit AUTODYN

Zur Berechnung der sechs unabhängigen Spannungskomponenten σ_{ij} , der drei Verschiebungskomponenten u_i , der spezifischen inneren Energie e und der Dichte ρ stehen lediglich die fünf Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie zur Verfügung. Diese sind in Hydrocodes wie AUTODYN in Ratenform implementiert, wobei die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten angenähert werden. Die fehlenden Gleichungen müssen durch konstitutive Gleichungen bereitgestellt werden. Diese verknüpfen Verzerrungen, Spannungen und innere Energie.

Entsprechend der Aufspaltung des Spannungstensors in Hydrostat und Spannungsdeviator (vgl. die Abschnitte A.3.2, A.3.3 und A.5.1 in Anhang A) werden die konstitutiven Gleichungen in eine Zustandsgleichung und ein Festigkeitsmodell aufgespalten. Innerhalb des Hydrocodes AUTODYN kann die Materialbeschreibung neben der Zustandsgleichung und dem Festigkeitsmodell noch ein Versagenskriterium enthalten. Im Folgenden werden jene in AUTODYN implementierten Zustandsgleichungen und Festigkeitsmodelle, die in der einschlägigen Literatur zur Berechnung von Böden unter Explosionsbelastung verwendet wurden, kurz erläutert.

C.1 Identifikation eines geeigneten Stoffgesetzes für Böden unter hochdynamischer Beanspruchung

Die Zustandsgleichung ist die mathematische Formulierung der Zustandsfläche (siehe Abschnitt 2.3.2) und beschreibt das hydrodynamische Kompressions- und Entlastungsverhalten. Dabei wird eine thermodynamische Variable als Funktion zweier unabhängiger thermodynamischer Variablen dargestellt, wobei die Form $p = f(V, e)$ am gängigsten ist. Gleichung (C-1) stellt die allgemeine Form dar, gemäß der alle Zustandsgleichungen in AUTODYN formuliert sind. Die Zustandsgleichung und die lokale Form der Energieerhaltung gemäß Gleichung (C-2)⁷⁶ werden in jedem Zeitschritt „n+1“ simultan gelöst [121, p. 145f].

$$p = A(V) + B(V) \cdot \rho_0 \cdot e \quad (\text{C-1})$$

$$e^{n+1} = e^n - \frac{V^n - V^{n+1}}{2} (p^n + p^{n+1}) \quad (\text{C-2})$$

C.1.1 Shock EOS

Gemäß der Zustandsgleichung (C-3) nach *Mie* und *Grüneisen* kann der Zustand ($p|V|e$) eines Feststoffs anhand des Referenzzustands ($p_{0K}|V|e_{0K}$) beim absoluten Nullpunkt $T = 0 \text{ K}$ und des *Grüneisen*-Parameters Γ berechnet werden. Hinsichtlich der theoretischen Herleitung

⁷⁶ Gleichung (C-2) ist die Ratenformulierung der *Hugoniot*-Gleichung (2.43).

wird auf *Hiermaier* [18, pp. 171-176], *Meyers* [13, pp. 128-132] und das AUTODYN Theory Manual [121, pp. 149-152] verwiesen.

$$p(V, e) = p_{0K} + \frac{\Gamma(V)}{V} [e - e_{0K}(V)] \quad (\text{C-3})$$

Unter der zusätzlichen Annahme (C-4) hinsichtlich des *Grüneisen*-Parameters kann anstelle des absoluten Nullpunkts auch die *Hugoniot*-Kurve als Referenzzustand genutzt werden (siehe Gleichung (C-5)). Diese Variante entspricht der in AUTODYN implementierten „Shock EOS“, wobei lineare, bilineare und quadratische v_S - v_1 -Beziehungen unterstützt werden. Für lineare v_S - v_1 -Beziehungen mit den Parametern c_0 und S_1 sowie unter Berücksichtigung der Kompression θ (A-47) können die *Hugoniot*-Werte des Drucks p_H und der spezifischen inneren Energie e_H anhand der Gleichungen (C-6) berechnet werden.

$$\frac{\Gamma_0(V_0)}{V_0} = \frac{\Gamma(V)}{V} = \text{konst.} \quad (\text{C-4})$$

$$p(V, e) = p_H + \frac{\Gamma(V)}{V} [e - e_H(V)] \quad (\text{C-5})$$

$$p_H = p_0 + \rho_0 c_0^2 \frac{\theta}{(1 - S_1 \theta)^2} \quad e_H = e_0 + \frac{\theta}{\rho_0} p_H - \frac{\theta^2 c_0^2}{2(1 - S_1 \theta)^2} \quad (\text{C-6})$$

Die „Shock EOS“ in AUTODYN erfordert die Eingabe einer für den isotropen Druck p geltenden v_S - v_1 -Beziehung. Gemäß Abschnitt 3.1.2.3 wird jedoch mit den aus Schock-Versuchen an Böden gewonnenen v_S - v_1 -Beziehungen in der Regel die Axialspannung σ_x berechnet. Des Weiteren sind der Be- und Entlastungspfad bei dieser Zustandsgleichung identisch, das heißt die für das Dämpfungsverhalten maßgebende Bodeneigenschaft wird hier nicht abgebildet. Hinzu kommt eine gewisse Unsicherheit beim Ansatz des *Grüneisen*-Parameters. Die exakte Formel (C-7)₁ ist bei Böden in den seltensten Fällen anwendbar, da weder der Temperaturexpansionskoeffizient α noch die isochore Wärmekapazität c_V vorliegen, und die oft verwendete Näherungsformel (C-7)₂ gilt lediglich für Feststoffe.

$$\frac{\Gamma(V)}{V} = \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_V = \frac{3\alpha}{c_V K} \quad \Gamma \approx 2S_1 - 1 \quad (\text{C-7})$$

Laine verwendete die „Shock EOS“ mit linearer bzw. bilinearer v_S - v_1 -Beziehung (siehe [5] und [56]) sowie einem Festigkeitsmodell mit *von Mises*-Fließbedingung zur Beschreibung eines vollständig gesättigten Tons. Der *Grüneisen*-Parameter wurde zu $\Gamma = 0,1$ gesetzt. *Ambrosini et al.* [151], [134] sowie *Luccioni & Ambrosini* [135], [130], [152] modellierten einen kiesigen Sand mittels „Shock EOS“ und linearer v_S - v_1 -Beziehung ($\Gamma = 0,11$) in Kombination mit dem *Drucker-Prager* Strength Piecewise-Festigkeitsmodell. Obiger Ansatz von *Laine* ist vertretbar, was wie folgt begründet werden kann: bei hohen Verzerrungsraten kann annähernd undrainiertes Bodenverhalten unterstellt werden. Für vollgesättigte Böden unter Kompressionsbelastung sind die plastischen Deformationen bei gleicher Axialspannung

in der Regel geringer als unter drainierten Bedingungen und als bei teilgesättigten oder trockenen Böden. Entsprechend liegen die Entlastungspfade für vollgesättigte Böden im undrainierten Fall näher an der Kompressionskurve und der Unterschied zwischen Be- und Entlastungspfad ist kleiner. Die undrainierte Scherfestigkeit hängt hauptsächlich von der undrainierten Kohäsion c_u ab, und der Reibungswinkel kann annähernd zu $\varphi_u \approx 0$ gesetzt werden.

C.1.2 P- α EOS

Die „P- α EOS“ ist ein von *Herrmann* [153] entwickeltes, phänomenologisches Modell zur Beschreibung des Kompressionsvorgangs poröser Materialien. Die fundamentale Annahme ist, dass die spezifische innere Energie eines porösen Materials und desselben porenfreien Materials – dargestellt durch den Index „s“ für Solid – bei gleichem Druck und gleicher Temperatur ebenfalls gleich ist. Einsetzen der Porosität α gemäß Gleichung (C-9)₁ in die Zustandsgleichung des Feststoffs (C-8) führt auf die Zustandsgleichung des porösen Materials (C-10). Die in AUTODYN implementierte Gleichung (C-11) enthält einen zusätzlichen Faktor $1/\alpha$ um dem Umstand Rechnung zu tragen, dass der Druck innerhalb des porösen Materials ungefähr dem $1/\alpha$ -fachen Durchschnittsdruck innerhalb des Matrixmaterials entspricht.

$$p = f(V_s, e) \quad (\text{C-8})$$

$$\alpha = \frac{V}{V_s} \quad \alpha = 1 + e = \frac{1}{1-n} \quad (\text{C-9})$$

$$p = f(V_s, e) = f\left(\frac{V}{\alpha}, e\right) \quad (\text{C-10})$$

$$p = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{V}{\alpha}, e\right) \quad (\text{C-11})$$

Für eine vollständige Beschreibung des Verdichtungsprozesses bedarf es zusätzlich einer Beschreibung der Porosität $\alpha = g(p, e)$. *Herrmann* empfahl die kubische Gleichung (C-12) unter Verwendung des Drucks auf der *Hugoniot*-Kurve⁷⁷. In AUTODYN wird die Porosität α gemäß Gleichung (C-13) berechnet, mit den Definitionen der erforderlichen Parameter α_p , p_e , p_s gemäß Abbildung C.1. Der Exponent n erlaubt eine zusätzliche Anpassung an experimentelle Daten.

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^3 \quad (\text{C-12})$$

$$\alpha = 1 + \left(\alpha_p - 1\right) \left(\frac{p_s - p}{p_s - p_e}\right)^n \quad (\text{C-13})$$

⁷⁷ Der Zusammenhang zwischen dem Druck p und der spezifischen inneren Energie e ist dann durch die *Hugoniot*-Gleichung (2.43) gegeben.

$$c_B^2 = \alpha c_{B0}^2 \left(1 - \frac{d\alpha}{dp} \frac{c_{B0}^2}{V_{s0} \alpha} \right) \quad \text{mit } V_{s0} = V(\alpha = 1, p = 0) \quad (\text{C-14})$$

Das Modell berücksichtigt unterschiedliche Entlastungs-/Wiederbelastungs- und Erstbelastungspfade. Ent- und Wiederbelastung werden als elastisch angenommen, wobei die lokale Schallgeschwindigkeit c_B nach Gleichung (C-14) eine Funktion der Schallgeschwindigkeit des Feststoffs im unbelasteten Zustand c_{B0} sowie der Porosität α und dessen Gradient $\alpha' = d\alpha/dp$ ist.

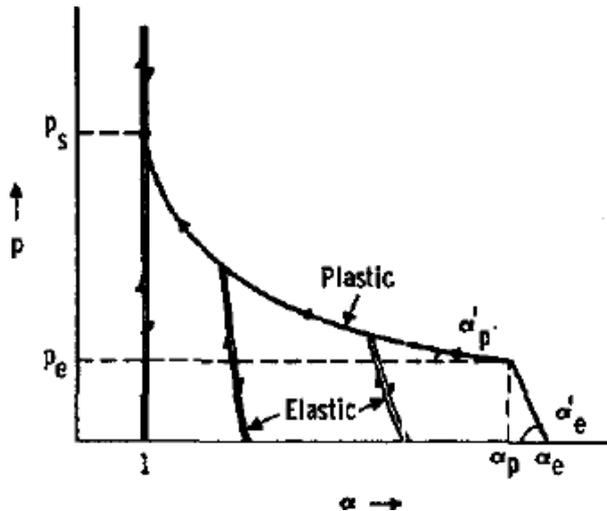


Abbildung C.1 Schematische Darstellung der Kompressions- und Entlastungspfade; aus *Herrmann* [153]

Das Verhalten des vollständig verdichteten Materials ($\alpha = 1,0$ und $p \geq p_s$) kann in AUTODYN z.B. mittels „Shock EOS“ beschrieben werden. Somit erlaubt die „P- α EOS“ eine vollständige Beschreibung des Verdichtungsprozesses poröser Medien [122]. Aufgrund des impliziten Zusammenhangs der thermodynamischen Größen Druck, spezifisches Volumen, spezifische innere Energie und Porosität muss die „P- α EOS“ in jedem Zeitschritt iterativ gelöst werden [153, p. 2494], [18, p. 189].

Hinsichtlich einer Eignung des P- α -Modells für Granulate existieren unterschiedliche Aussagen. *Borg et al.* [154], [64] rechneten Planar-Platten-Versuche mit Silizium-Dioxid-Pulvern nach. Es wurden drei Anfangsdichten ($\rho_{00} = 0,1 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{00} = 0,25 \text{ g/cm}^3$ und $\rho_{00} = 0,77 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{s0} = 2,20 \text{ g/cm}^3$) untersucht. In dem verwendeten Hydrocode war die Porosität α mittels Polynomen dritter und vierter Ordnung analog zu Gleichung (C-12) definiert. Für die größte betrachtete Anfangsdichte $\rho_{00} = 0,77 \text{ g/cm}^3$ zeigten die experimentellen und die berechneten v_S - v_1 -Beziehungen sowie die p - v_1 -Kurven eine sehr gute Übereinstimmung. Dem gegenüber stehen die Ergebnisse von *Brown et al.* [50]. Eine Nachrechnung der Schockversuche mit trockenem Sand und der Definition der Porosität gemäß Gleichung (C-13) ergab für die untersuchten Exponenten im Bereich $2 \leq n \leq 8$ keine Übereinstimmung zwischen numerischen und experimentellen Daten. Es ist allerdings anzumerken, dass *Brown et al.* kein Festigkeitsmodell verwendeten sondern einen hydrodynamischen Spannungszustand postulierten.

Neben diesen Unstimmigkeiten gilt für den Bereich vollständiger Verdichtung mit der „P- α EOS“ wie bei der „Shock EOS“, dass die v_S - v_1 -Beziehungen für die Axialspannung σ_x und

nicht wie erforderlich für den Druck p gelten. Zudem kann bei teilgesättigten Böden der Punkt vollständiger Verdichtung bzw. der zugehörige Druck p_s (siehe Abbildung C.1) nur unter zusätzlichen Annahmen – z.B. mittels seiner Mischungsregel für die Zustandsgleichung – berechnet werden, wenn die *Hugoniot*-Kurve des gesättigten Materials unbekannt ist⁷⁸.

C.1.3 Compaction EOS Linear

Für poröse bzw. granulare Materialien wie Sand wurde die „Compaction EOS Linear“ entwickelt. Diese besteht aus drei Elementen:

- abschnittsweise lineare, plastische Kompressionskurve $p(\rho)$
- „Asymptote“
- Schallgeschwindigkeit $c_B(\rho)$

Die abschnittsweise lineare, plastische Kompressionskurve $p(\rho)$ mit insgesamt 10 Punkten (siehe Abbildung 3.20 und Abbildung C.9) beschreibt den Belastungspfad im Bereich der unvollständigen Verdichtung. Sie kann z.B. aus statischen Kompressionsversuchen gewonnen werden oder – unter Berücksichtigung eines Seitendruckbeiwerts ξ – aus einer für die Axialspannung σ_x gültigen v_s - v_1 -Beziehungen abgeleitet werden. Das vollständig verdichtete Material wird durch eine Gerade mit Gleichungen (C-15) – die sogenannte „Asymptote“ – beschrieben.

$$p(\rho = \rho_{TMD}) = 0 \qquad p = c_{B,TMD}^2 (\rho - \rho_{TMD}) \text{ für } \rho > \rho_{TMD} \qquad (C-15)$$

Der Entlastungsvorgang und die Wiederbelastung bis zum Vorbelastungsniveau werden als linear elastisch angenommen und durch die Schallgeschwindigkeit $c_{BU}(\lambda)$ beschrieben (siehe Abbildung C.10). Der Parameter λ entspricht der Dichte des vollständig entspannten Materials (bei Druck $p = 0$). Bei der Eingabe der Schallgeschwindigkeit $c_{BU}(\lambda)$ in AUTODYN ist zu beachten, dass der erste Wert als Startwert für den Erstbelastungsvorgang genutzt wird. Ist $c_{BU}^{(1)}$ kleiner als die Wurzel der Steigung im ersten Abschnitt der plastischen Kompressionskurve, so greift AUTODYN nicht auf die plastische Kompressionskurve $p(\rho)$ zurück sondern rechnet mit $c_{BU}^{(1)}$ als einer bei Be- und Entlastung konstanten Wellengeschwindigkeit, was einer linearen Zustandsgleichung entspricht.

C.2 In AUTODYN implementierte Festigkeitsmodelle

Das Schubverhalten wird durch das Festigkeitsmodell ausgedrückt, welches die Fließfläche und die Fließregel beinhaltet (siehe Anhang A.5.2). Wie von *Bragov et al.* [34], [35], [36] gezeigt wurde, ist die Annahme eines hydrodynamischen Spannungszustands für Böden unter schwacher Schockbelastung nicht zutreffend (vgl. Abschnitt 3.1.2.3). Selbst bei extremen Schockbeanspruchungen wie z.B. planetarem Impakt muss die Materialmodellierung für eine

⁷⁸ Für trockene Böden kann der Punkt vollständiger Verdichtung aus dem Schnittpunkt der porösen *Hugoniot*-Kurve mit jener des Feststoffs bestimmt werden.

realitätsnahe Beschreibung des Bodenverhaltens im Fernfeld und für Zeitpunkte, zu denen der Druck stark abgeklungen ist, ein Festigkeitsmodell beinhalten [121, p. 162].

C.2.1 Festigkeitsmodelle nach von Mises sowie Drucker & Prager

Die Fließflächen des von Mises-Festigkeitsmodells als auch des Drucker-Prager-Festigkeitsmodells wurden in Anhang A.5.2.1 beschrieben. Beide Modelle verwenden die in Anhang A.5.2.3 vorgestellte Fließregel vom Prandtl-Reuss-Typ [121, p. 174], [122, p. 1727] mit konstantem Schubmodul [122, p. 1729]. Abbildung C.2 zeigt zwei der in AUTODYN verfügbaren Drucker-Prager-Varianten, wobei die Fließgrenze als lineare Funktion des Drucks oder als Polygonzug mit maximal 10 Punkten eingegeben werden kann. Die Definition entspricht der Darstellung in der p-q-Ebene nach Gleichung (A-149), so dass nicht der Reibungswinkel φ sondern der entsprechende Winkel φ^* verwendet werden muss (siehe Anhang A.5.2.1).

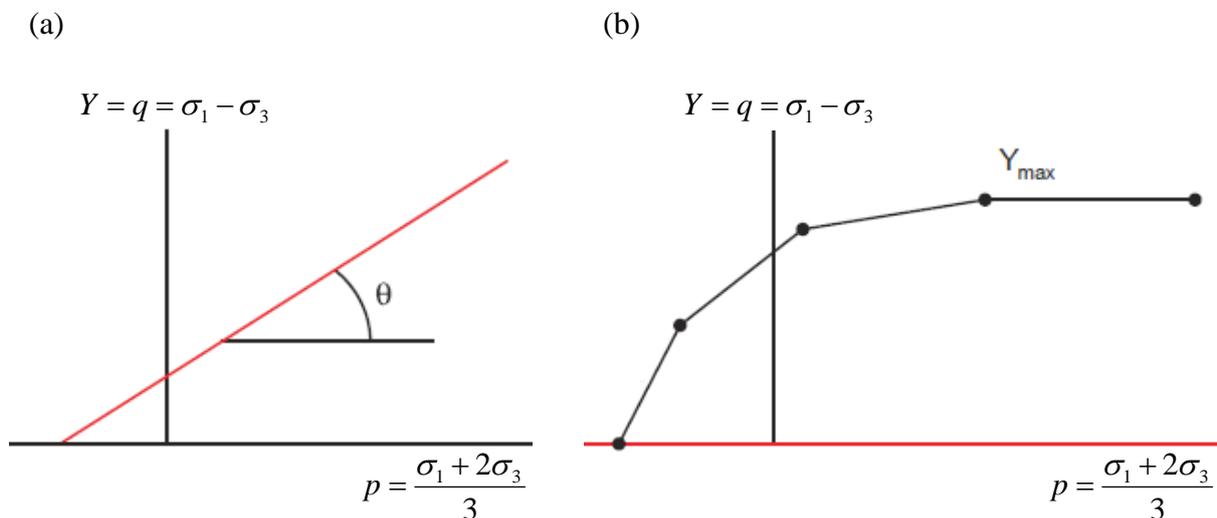


Abbildung C.2 Varianten des Festigkeitsmodells nach Drucker & Prager in AUTODYN – (a) „Drucker-Prager Strength Linear“, (b) „Drucker-Prager Strength Piecewise“; aus [122]

C.2.2 Festigkeitsmodell „Mo Granular“

Das „Mo Granular“-Festigkeitsmodell ist das Pendant zur „Compaction EOS Linear“. Die Fließgrenze dieses erweiterten Drucker-Prager-Festigkeitsmodells setzt sich gemäß Gleichung (C-16) aus einem druck- und einem dichteabhängigen Term zusammen [122, p. 1740]. Der Schubmodul $G(\lambda)$ bestimmt die Scherwellengeschwindigkeit bei Entlastung. Auch hier ist eine Fließregel vom Prandtl-Reuss-Typ implementiert.

$$Y = Y(p) + Y(\rho) \quad (\text{C-16})$$

C.3 Das SAND-Modell in AUTODYN

C.3.1 Das ursprüngliche Modell nach Laine & Sandvik

Das in AUTODYN implementierte SAND-Modell nach *Laine & Sandvik* [12] ist der einzige, derzeit bekannte vollständige Datensatz für einen Boden, der – zumindest abschnittsweise – auf Versuchen basiert.

Die unteren fünf Punkte der plastischen Kompressionskurve $p(\rho)$ in Abbildung C.9 wurden aus statischen Triaxialversuchen mit isotroper Konsolidation und gleichzeitiger Messung der Longitudinal- und Scherwellengeschwindigkeit c_P und c_S ermittelt. Anhand des daraus abgeleiteten Polynoms fünften Grades wurden die restlichen Punkte 6 bis 10 der plastischen Kompressionskurve extrapoliert. Die Asymptotensteigung für den Bereich vollständiger Verdichtung wurde anhand der Schock-Daten von Westerly Granit gemäß LASL-Schockkompendium [57] zu $c_{B,TMD} = 4634$ m/s festgelegt. Ein Vergleich der bilinear angenäherten *Hugoniot*-Kurve für Westerly Granit gemäß Abbildung C.3 ergab für Drücke $p \leq 40$ GPa eine sehr gute Übereinstimmung der Versuchsdaten mit dem von *Laine & Sandvik* unterstellten Wert.

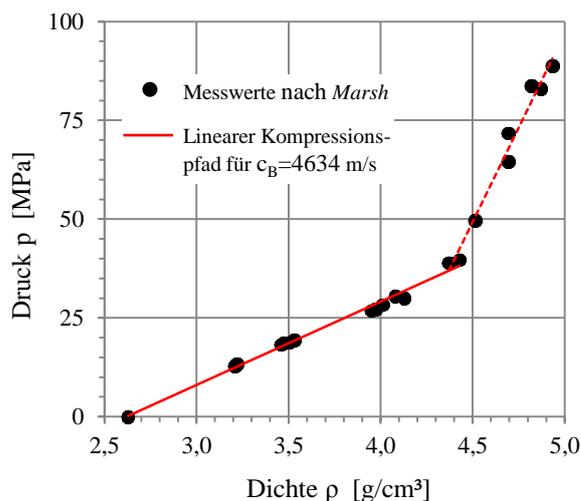


Abbildung C.3 Vergleich der Schallgeschwindigkeit $c_{B,TMD}$ nach *Laine & Sandvik* [12] mit den *Hugoniot*-Daten für Westerly Granit gemäß LASL-Kompendium [57]

Die Schallgeschwindigkeit c_{BU} für den Entlastungsvorgang kann mittels Gleichung (2.11) aus den Messwerten c_{PU} und c_{SU} der Kompressions- und der Scherwellengeschwindigkeit bei Entlastung berechnet werden. Im ursprünglichen SAND-Modell wurden die Anfangswerte der Schallgeschwindigkeit zu Beginn der Entlastungsphase verwendet, die auch in Abbildung C.10 dargestellt sind.

Abbildung C.4 zeigt die im SAND-Modell implementierte Fließfläche. Der dichteabhängige Term der Scherfestigkeit ist zu Null gesetzt, und für den druckabhängigen Anteil wird ein bilinearer Verlauf unterstellt. Der Maximalwert der Fließgrenze wurde von *Laine & Sandvik* gleich der 1-axialen Druckfestigkeit eines Granits aus der Literatur angenommen und zu $Y_{\max} = 226$ MPa gesetzt. Der Reibungswinkel ergibt sich mit Gleichung (A-150) zu $\varphi = 30,55^\circ$, was einem effektiven Reibungswinkel für einen locker bis mitteldicht gelagerten Sand unter quasi-statischer Belastung entspricht.

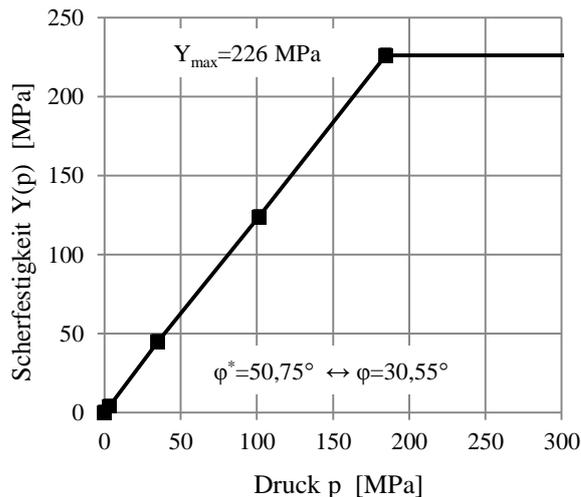


Abbildung C.4 Bilineare Definition der Fließfläche im SAND-Modell nach *Laine & Sandvik* [12]

Gemäß *Laine & Sandvik* wurden die Schubmoduln für den Entlastungsvorgang mittels Gleichung (C-17)₁ aus den Messwerten der Scherwellengeschwindigkeit bestimmt. Im extrapolierten Bereich wurde G_U offensichtlich mittels Gleichung (C-17)₂ und einem konstanten Wert für die Querdehnzahl von $\nu = 0,230$ in den Entlastungsschubmodul umgerechnet.

$$G_U(\lambda) = \lambda c_{SU}^2 \qquad G_U(\lambda) = \frac{3}{2} K_U \frac{1-2\nu}{1+\nu} = \frac{3}{2} \lambda c_{BU}^2 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \quad (\text{C-17})$$

Als Versagenskriterium verwendeten *Laine & Sandvik* das „Tensile Pressure Failure“-Kriterium mit $p_{\min} = -1$ kPa, was bedeutet, dass der Sand naturgemäß keine Zugspannungen übernehmen kann.

C.3.2 Modifikationen des ursprünglichen SAND-Modells

C.3.2.1 Das CU-ARL-Modell

Das ursprüngliche SAND-Modell nach *Laine & Sandvik* [12] gilt für trockenen Sand. Größtenteils auf der Grundlage ingenieurmäßiger Überlegungen und Annahmen entwickelten *Grujicic et al.* das CU-ARL-Modell. Dieses erlaubt die Berücksichtigung unterschiedlicher Anfangssättigungsgrade sowie des Einflusses der Verzerrungsrate bei teilgesättigten Sanden. Je nach Veröffentlichung existieren verschiedene Varianten des CU-ARL-Modells (siehe unter Anderem [129], [136], [155]), weshalb hier nicht weiter darauf eingegangen wird.

C.3.2.2 Modifikation des Entlastungsvorgangs

Laine & Larsen [75] sahen den größten Nachteil des ursprünglichen SAND-Modells in der Modellierung des Entlastungsvorgangs. Die Funktion $c_{BU} = f(\lambda)$ entspricht der Schallgeschwindigkeit zu Beginn der Entlastungsphase. Zudem können mit dieser Definition, die nur von der Dichte des entlasteten Materials abhängt, lediglich lineare Entlastungspfade dargestellt werden. Auf der Grundlage der experimentell bestimmten Entlastungspfade definierten und optimierten *Laine & Larsen* [75] die Schallgeschwindigkeit entlang des gesamten Entlastungspfades als Fläche $c_{BU} = f(\rho, p)$, über den „Zustandsgrößen“ ρ und p (siehe

Abbildung C.7). Grundlage der „Zustandsfläche“ $c_{BU} = f(\rho, p)$ ist die lineare, über den Entlastungsvorgang gemittelte Schallgeschwindigkeit $c_{BU,mod}(\lambda)$. ABB zeigt die Definitionen $c_{BU} = f(\lambda)$ und $c_{BU,mod}(\lambda)$ sowie exemplarische Verläufe von $c_{BU} = f(\rho, p)$ in der ρ - c_B -Ebene. Die entsprechenden Entlastungspfade in der ρ - p -Ebene sind in ABB dargestellt.

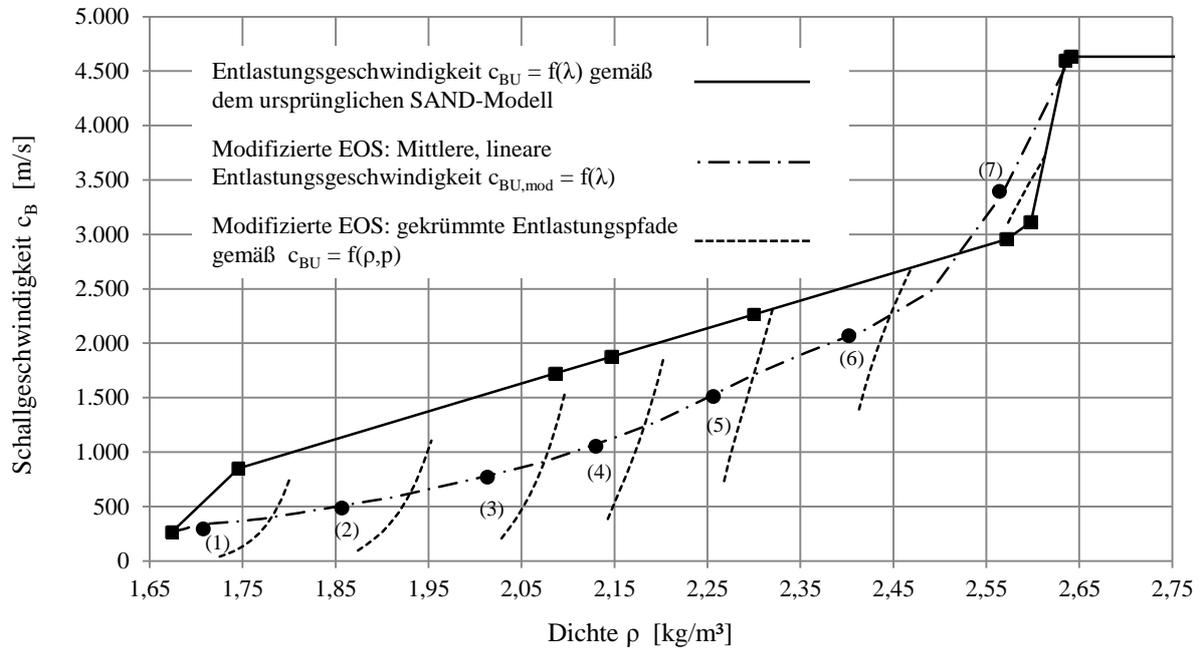


Abbildung C.5 Vergleich der Entlastungsgeschwindigkeit gemäß der modifizierten Zustandsgleichung nach *Laine & Larsen* [75] mit der ursprünglichen Definition nach *Laine & Sandvik* [12]

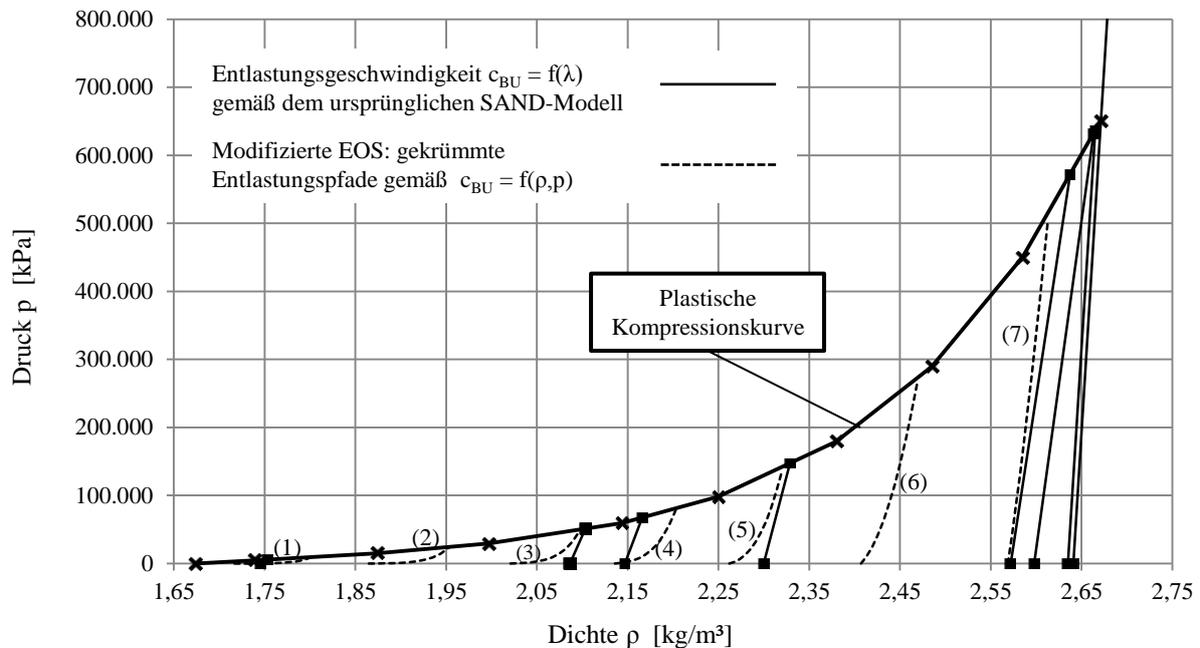


Abbildung C.6 Vergleich der Entlastungsgeschwindigkeit gemäß der modifizierten Zustandsgleichung nach *Laine & Larsen* [75] mit der ursprünglichen Definition nach *Laine & Sandvik* [12]

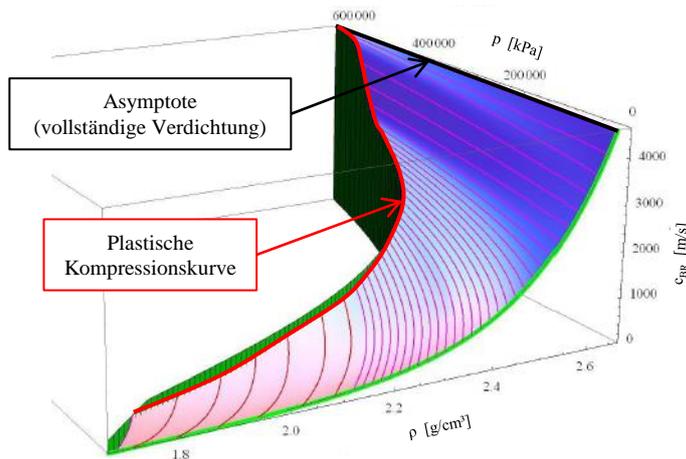


Abbildung C.7 „Zustandsfläche“
der Schallgeschwindigkeit bei
Entlastung $c_{BU} = f(\rho, p)$; aus *Laine*
& *Larsen* [75]

C.4 3-Phasen-Bodenmodelle für Explosionsbeanspruchung

Der Vollständigkeit halber wird auf die 3-Phasenmodelle von *Wang & Lu* [132] bzw. *Wang et al.* [133] sowie *An et al.* [156] eingegangen. Beiden Modellen ist der konzeptionelle Ansatz nach *Kandaur* für kohäsive Böden gemein. Im Gegensatz zu granularen Materialien gemäß Abschnitt 3.2.1 wird das Deformationsverhalten kohäsiver Böden durch zwei Mechanismen bestimmt:

- Die Deformationen des Bodenskeletts sind bei geringen Drücken von den elastischen Deformationen der Kornbindungen und bei hohen Drücken vom spröden Versagen der Kornbindungen (sowie Kornumlagerungen) abhängig.
- Die Deformation aller drei Bodenphasen Feststoff, Wasser und Luft wird durch deren Kompressionsverhalten und Interaktion bestimmt.

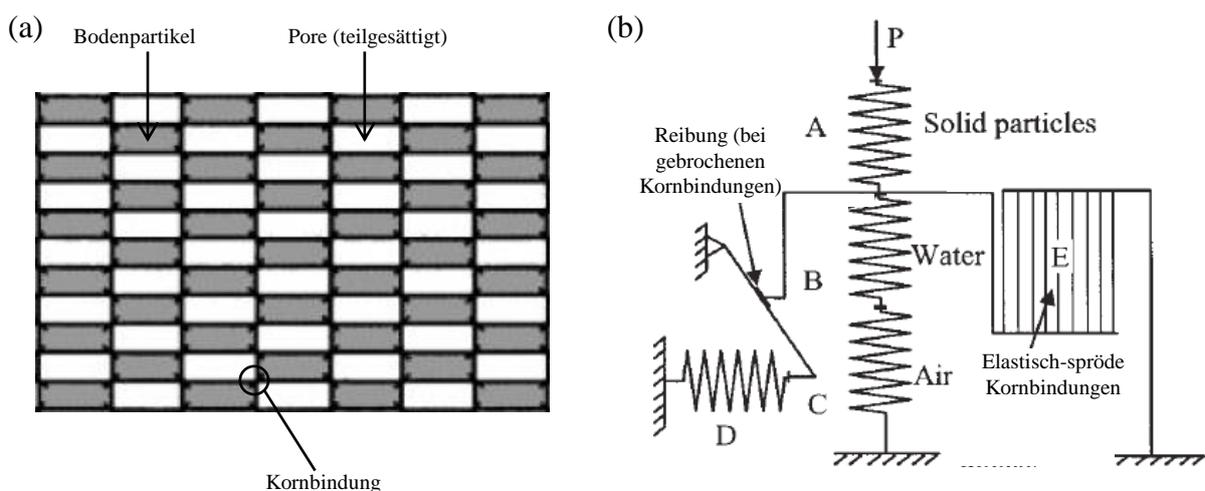


Abbildung C.8 Ansatz für ein 3-Phasenmodell nach *Kandaur* – (a) Schematische Darstellung der Bodenkörner, des teilgesättigten Porenraums und der elastisch-spröden Kornbindungen, (b) zugehöriges rheologisches Modell; aus [133]

Abbildung C.8 zeigt das gedankliche Modell sowie das zugehörige rheologische Modell. Die Parameter D und E stehen für die Reibung zwischen einzelnen Körnern sowie die elastisch-spröde Kornbindung und beschreiben somit den ersten Deformationsmechanismus. Das Kompressionsverhalten der drei Phasen wird durch die Parameter A, B und C dargestellt. Mathematisch wird das Kompressionsverhalten über die bezogenen Volumina der drei Bodenphasen gemäß Gleichung (C-18) und die Gesamt-Zustandsgleichung (C-19)⁷⁹ gekoppelt. Hinsichtlich einer genauen Beschreibung einschließlich der zugehörigen Formeln wird auf Kapitel 5 des Werks von *Henrych* [58] verwiesen. Es ist jedoch anzumerken, dass dieser Volumenansatz die Kompression aller drei Phasen unterstellt und eigentlich nur für fluide Phasen korrekt ist. Bei Böden dominieren die Verformungen des Korngerüsts das Kompressionsverhalten [58, p. 193]. Somit weichen die auf Grundlage einer Mischungs-EOS mit Volumenansatz berechneten Ergebnisse bei niedrigen Spannungen und im Fernfeld von gemessenen Werten stark ab.

$$\alpha_s + \alpha_w + \alpha_g = \frac{V_s + V_w + V_g}{V_0} = \frac{V_s + V_p}{V_0} = 1 \quad (\text{C-18})$$

$$dp - \left(dV - \frac{\partial V_s}{\partial p} dp \right) \left[\left(\frac{\partial V_w}{\partial p_p} + \frac{\partial V_g}{\partial p_p} \right)^{-1} + \frac{\partial p_a}{\partial V_p} + \frac{\partial p_c}{\partial V_p} \right] = 0 \quad (\text{C-19})$$

Das Kompressionsverhalten der drei Phasen in der Gesamt-Zustandsgleichung (C-19) muss durch separate Zustandsgleichungen beschrieben werden. *Wang & Lu* [132] und *Wang et al.* [133] verwendeten dazu die Formeln (C-20) bis (C-22) nach *Lyakhov*. Demgegenüber unterstellten *An et al.* [156] für alle drei Phasen Zustandsgleichungen nach *Mie* und *Grüneisen*.

$$\text{Luft:} \quad p_g = p_{g0} \left(\frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^{k_g} \quad (\text{C-20})$$

$$\text{Wasser:} \quad p_w = p_{w0} + \frac{\rho_{w0} c_{w0}^2}{k_w} \left[\left(\frac{\rho_w}{\rho_{w0}} \right)^{k_w} - 1 \right] \quad (\text{C-21})$$

$$\text{Boden (Feststoff):} \quad p_s = p_{s0} + \frac{\rho_{s0} c_{s0}^2}{k_s} \left[\left(\frac{\rho_s}{\rho_{s0}} \right)^{k_s} - 1 \right] \quad (\text{C-22})$$

Für das Festigkeitsmodell erweiterten *Wang et al.* das Fließkriterium (A-152) nach *Drucker & Prager* um einen Verzerrungsraterm (siehe Gleichung (C-23)). Die verwendete Fließregel ist vom *Prandtl-Reuss*-Typ. *An et al.* verwendeten ein visko-plastisches Kappenmodell mit assoziierter Fließregel.

⁷⁹ p_a bezeichnet den mittels Reibung übertragenen Druckanteil, p_b ist der Porendruck in Wasser und Gas, und p_c ist der Druckanteil, der von den Kornbindungen aufgenommen wird.

$$F(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} - (\alpha I_1 + \kappa) \left(1 + \beta \ln \frac{\dot{\epsilon}_{eff}}{\dot{\epsilon}_{ref} = 10^{-2} / \text{min}} \right) = 0 \quad (\text{C-23})$$

In beiden 3-Phasenmodellen sollten die Modellparameter unbedingt an experimentellen Daten kalibriert werden. *Wang et al.* rechneten dazu ein Experiment von *Lyakhov* mit 8 kg TNT nach. *An et al.* kalibrierten ihr Stoffgesetz anhand kleinmaßstäblicher Explosionsversuche.

C.5 Identifikation eines geeigneten Stoffgesetzes für Böden unter hochdynamischer Beanspruchung

Im Folgenden wird lediglich auf die in AUTODYN implementierten Stoffgesetze eingegangen und das am besten geeignete Modell ausgewählt.

Die „Shock EOS“ sollte für eine Modellierung trockener und teilgesättigter Böden nicht verwendet werden, da sie deren maßgebende Eigenschaft unterschiedlicher Be- und Entlastungspfade – und damit verbunden eine höhere mittlere Entlastungsgeschwindigkeit, die für das Dämpfungsverhalten entscheidend ist – nicht abbilden kann. Zudem gelten die v_S - v_1 -Beziehungen in der Regel die Axialspannung σ_x , aber ein Reibungswinkel⁸⁰ kann in Ermangelung der üblichen Versuche zur Benennung und Klassifizierung von Böden nur geschätzt werden.

Eine Verwendung der Die „P- α EOS“ wird ebenfalls ausgeschlossen. Grund hierfür sind die bereits erwähnten Aussagen von *Brown et al.* [50], wonach die „P- α EOS“ zur Beschreibung trockener Sande ungeeignet ist. Hinzu kommt die Unsicherheit in der Berechnung des Punktes vollständiger Verdichtung bzw. des zugehörigen Drucks p_s . Oberhalb dieses Punktes gelten für die erforderliche v_S - v_1 -Beziehung dieselben Anmerkungen wie bei der „Shock EOS“.

Die Festigkeitsmodelle nach *von Mises* und nach *Drucker & Prager* werden als ungeeignet angesehen, da beide einen konstanten Schubmodul verwenden, was für das Spannungsverhalten trockener und teilgesättigter Böden als zu grobe Vereinfachung angesehen wird.

Für die Berechnungen in Kapitel 0 wird als Stoffgesetz die Kombination aus „Compaction EOS Linear“ und „Mo Granular“-Festigkeitsmodell gewählt, da damit unterschiedliche Be- und Entlastungspfade als die maßgebende Eigenschaft granularer Materialien konsequent berücksichtigt werden können.

C.6 Stoffgesetz-Parameter des gewählten Materials SAND_Mod3a

Die Berechnungen zur Generierung eines Abschätzungskriteriums werden für einen trockenen Sand durchgeführt. Das Material wird als SAND_Mod3a bezeichnet und basiert auf dem

⁸⁰ Anhand des in Abschnitt 3.1.1.3 vorgestellten Verfahrens nach *Bragov et al.* [42], [43], [44] kann der Seitendruckbeiwert ξ unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.21) und (3.37) aus dem Reibungswinkel berechnet werden, was die Berechnung des für die Eingabe in AUTODYN erforderlichen, isotropen Drucks erlaubt.

ursprünglichen SAND-Modell von *Laine & Sandvik* [12], aus dem die plastische Kompressionskurve und die Asymptote für den Bereich vollständiger Verdichtung (siehe Tabelle C-1 und Abbildung C.9) sowie die Fließfläche unverändert übernommen werden. Da die Kompressionskurve aus statischen Versuchen ermittelt wurde, werden thermische Effekte sowie Verzerrungsrateneffekte vernachlässigt. Dies wird als vertretbar angesehen, da diese Effekte im absoluten Nahfeld wie z.B. bei Minenexplosionen relevant werden wohingegen bei den Berechnungen in Kapitel 0 vor allem das Fernfeld interessiert.

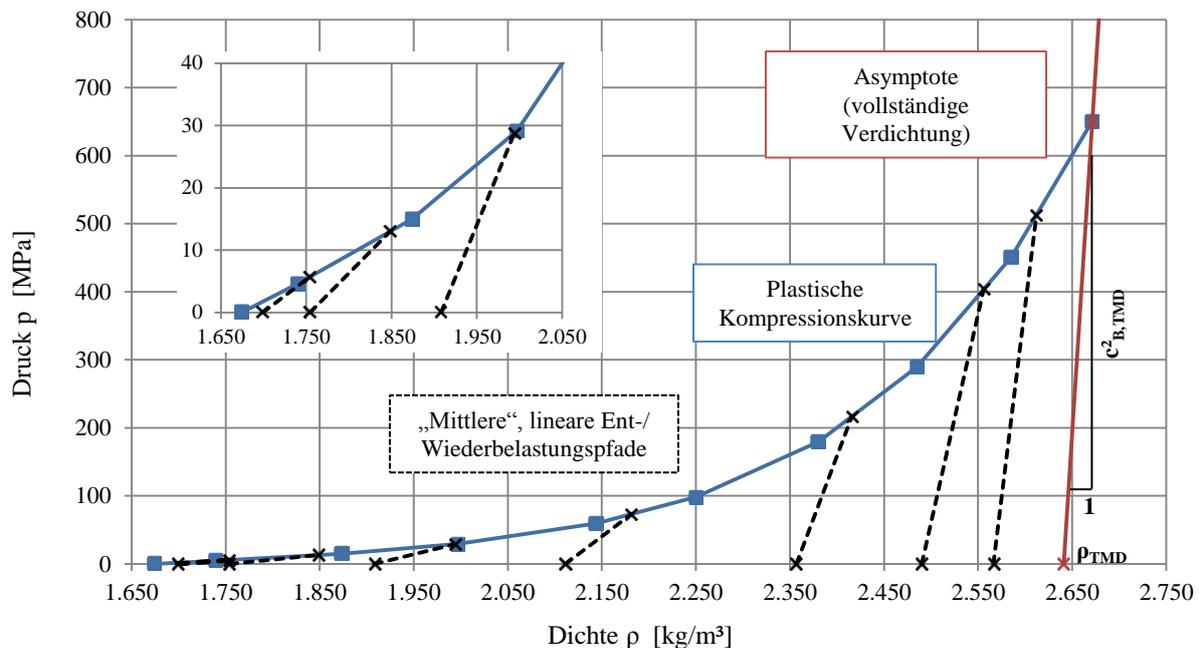


Abbildung C.9 SAND_Mod3a – Plastische Kompressionskurve und Asymptote gemäß SAND-Modell nach *Laine & Sandvik* [12], Entlastungspfade nach *Laine* [4]

Im ursprünglichen SAND-Modell wurden die Anfangswerte der Schallgeschwindigkeit zu Beginn der Entlastungsphase verwendet. Die Zustandsgleichung für SAND_Mod3a wird dahingehend modifiziert, dass die lineare, über den Entlastungsvorgang gemittelte Schallgeschwindigkeit $c_{BU,mod}(\lambda)$ verwendet wird. Der Datensatz in Markstötövåg [4], Anhang ZA besteht aus 101 Wertepaaren $(\lambda_i | c_{BU,i})$. Die 10 Wertepaare gemäß Tabelle C-2 wurden auf der Grundlage von 1D-Wedge-Berechnungen, bei denen die Qualität der Druck-Zeitverläufe verglichen wurde, ermittelt. Abbildung C.10 zeigt die Schallgeschwindigkeiten $c_{BU}(\lambda)$ gemäß der ursprünglichen Definition sowie die $c_{BU,mod}(\lambda)$ -Kurve. Zum Vergleich sind die aus der Kompressionskurve berechneten Schallgeschwindigkeiten $c_{B,Bel}(\lambda)$ und $c_{B,Bel}(\rho)$ dargestellt. In Abbildung C.9 sind die zu $c_{BU,mod}(\lambda)$ gehörigen Entlastungspfade dargestellt. Die Versuche von *Lu et al.* [31] mit trockenem Sand bei mittleren Verzerrungsraten ergaben nahezu senkrechte Belastungspfade (siehe Abbildung 3.25). Insofern wird die Verwendung linearer Entlastungspfade als vertretbar angesehen. Der zu $c_{BU,mod}(\lambda)$ gehörige Entlastungsschubmodul $G_{U,mod}(\lambda)$ gemäß Tabelle C-4 und Abbildung C.11 wird – analog zum ursprünglichen Modell – mittels Gleichung (C-17)₂ und einer konstanten Querdehnzahl von $\nu = 0,230$ berechnet. Das

„Tensile Pressure Failure“-Versagenskriterium wird mit $p_{\min} = -1 \text{ kPa}$ ebenfalls unverändert aus dem ursprünglichen SAND-Modell übernommen.

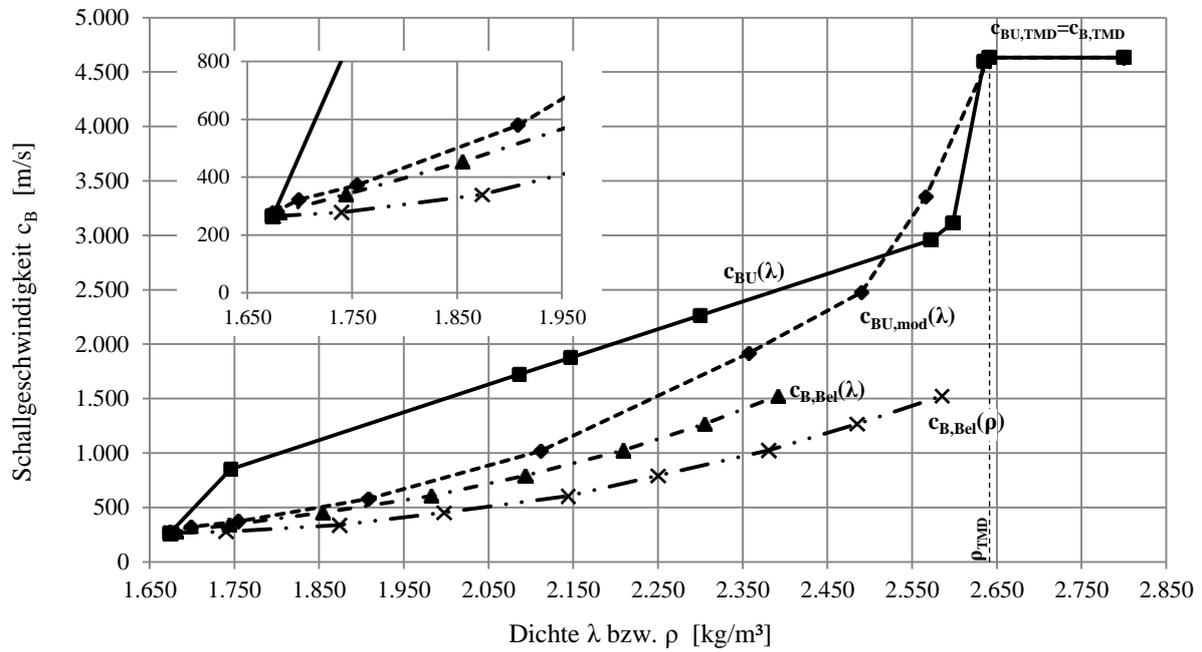


Abbildung C.10 SAND_Mod3a – Vergleich unterschiedlicher Schallgeschwindigkeiten c_B

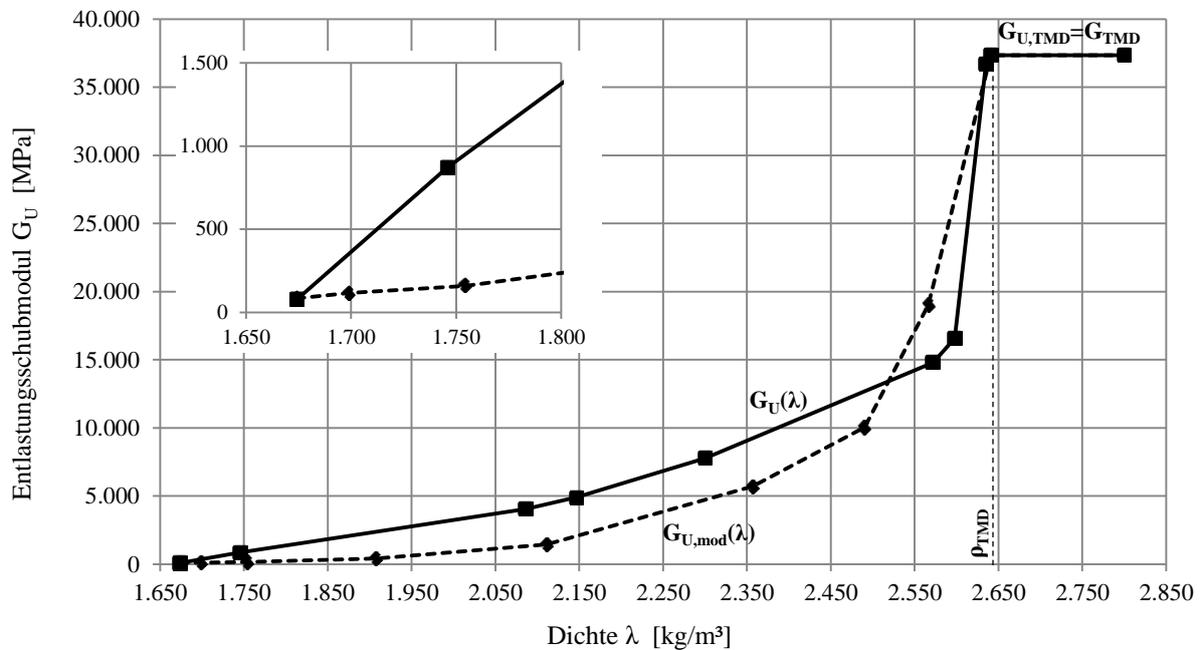


Abbildung C.11 Entlastungsschubmodul $G_U(\lambda)$ im ursprünglichen SAND-Modell und $G_{U,mod}(\lambda)$ für SAND_Mod3a

Tabelle C-1 SAND_Mod3a – Eingabeparameter der plastischen Kompressionskurve und der Asymptote für vollständige Verdichtung (unverändert gemäß *Laine & Sandvik* [12])

Punkt-Nr.	ρ_i	P_i
[-]	[kg/m ³]	[MPa]
1	1.674,0	0,000
2	1.739,5	4,577
3	1.873,8	14,980
4	1.997,0	29,151
5	2.143,8	59,175
6	2.250,0	98,098
7	2.380,0	179,443
8	2.485,0	289,443
9	2.585,0	450,198
10	$\rho_{1,TMD} = 2.671,3$	$P_{1,TMD} = 650,660$
Reference Density	$\rho_{TMD} = 2.641$	$P_{TMD} = 0$

Tabelle C-2 SAND_Mod3a – Eingabeparameter der Zustandsgleichung – Mittlere, lineare Entlastungsgeschwindigkeit $c_{BU,mod}(\lambda)$ auf Basis von *Laine* [4]

Punkt-Nr.	λ_i	$c_{BU,mod}(\lambda_i)$
[-]	[kg/m ³]	[m/s]
1	1.674,0	275,4
2	1.699,0	322,2
3	1.754,2	371,6
4	1.908,0	578,7
5	2.111,1	1.018,7
6	2.356,8	1.916,1
7	2.490,2	2.474,3
8	2.566,4	3.355,9
9	2.641,0	4.634,0
10	2.800,0	4.634,0

Tabelle C-3 SAND_Mod3a – Eingabeparameter des Festigkeitsmodells – Fließfläche
(unverändert gemäß dem ursprünglichen SAND-Modell nach *Laine & Sandvik* [12])

Punkt-Nr.	p_i	$Y_i(p)$
[-]	[MPa]	[MPa]
1	0,0	0,000
2	3,401	4,235
3	34,898	44,695
4	101,324	124,035
5	184,650	226,000
6	500,000	226,000

Tabelle C-4 SAND_Mod3a – Eingabeparameter des Festigkeitsmodells – Schubmodul bei
Entlastung $G_{U,mod}(\lambda)$ auf Basis von *Laine* [4]

Punkt-Nr.	λ_i	$G_{U,mod}(\lambda_i)$
[-]	[kg/m ³]	[MPa]
1	1.674,0	83,611
2	1.699,0	116,151
3	1.754,2	159,518
4	1.908,0	420,790
5	2.111,1	1.442,718
6	2.356,8	5.698,217
7	2.490,2	10.039,656
8	2.566,4	19.033,659
9	2.641,0	37.347,350
10	2.800,0	37.347,350

D Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

Die nachfolgenden Ausführungen beruhen größtenteils auf den Büchern von *Papula* [157, pp. 163-193], *Werner* [158] und *Neubauer* [138] sowie auf dem Skript zur Vorlesung „Digital Signal Processing“ des Institute of Computer Engineering der TU Wien [159]. Da dieselben Aussagen in diesen Quellen lediglich unterschiedlich formuliert auftreten, wird auf eine explizite Zitierung im Folgenden größtenteils verzichtet.

D.1 *Fourier-Reihe* und *Fourier-Transformation* für zeitkontinuierliche Funktionen

Zeitkontinuierliche periodische Funktionen $x(t) = x(t+T)$ der Periodendauer T welche die *Dirichletschen* Bedingungen erfüllen, können als *Fourier-Reihe* (D-1) – das heißt als Superposition unendlich vieler harmonischer Schwingungen – dargestellt werden. Das Amplitudenspektrum ist diskret, das heißt es ist ein Linienspektrum, und Werte der komplexen Schwingungsamplituden (D-2) mit $c_k \neq 0$ können nur für Frequenzen f_k bzw. Kreisfrequenzen ω_k (D-3) auftreten.

$$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \exp(i \cdot k \omega_0 t) \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{D-1})$$

$$c_k = \int_0^T x(t) \cdot \exp(-i \cdot k \omega_0 t) dt, \quad k \in]-\infty; \infty[\quad (\text{D-2})$$

$$f_k = k \cdot f = k \cdot \frac{1}{T} \quad \omega_k = 2\pi \cdot f_k = k \cdot 2\pi f = k \cdot \frac{2\pi}{T} \quad (\text{D-3})$$

Zeitkontinuierliche nicht-periodische Funktionen $x(t)$ können als periodische Funktionen mit unendlich großer Periodendauer T aufgefasst werden. Aus dem Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ folgt für den Abstand benachbarter Kreisfrequenzen im Linienspektrum $\Delta\omega = \omega = 2\pi/T \rightarrow 0$. Aufgrund des unendlich kleinen Abstands zwischen benachbarten Kreisfrequenzen ω geht die Summendarstellung in Gleichung (D-1) in das uneigentliche Integral der Gleichung (D-4) über. Somit ist die Originalfunktion $x(t)$ die Überlagerung von Schwingungen aller Kreisfrequenzen ω . Die Amplitudendichte $X(\omega)$ ist eine kontinuierliche Funktion von ω und wird mittels *Fourier-Transformation* von $x(t)$ führt auf (D-5) aus der Originalfunktion $x(t)$ berechnet.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \exp(i \cdot \omega t) d\omega \quad (\text{D-4})$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega t) dt \quad (\text{D-5})$$

D.2 Abtastung, diskrete Signalfolgen und DFT

Diskrete Signalfolgen $x[n]$ (D-6) werden durch Abtastung im Zeitbereich – das heißt durch die Entnahme der Funktionswerte $x(t)$ aus einem kontinuierlichen Zeitverlauf $x(t)$ in äquidistanten Zeitpunkten t_n – erzeugt⁸¹. Dabei geht die Zeitinformation verloren [159, pp. IV-1 - IV-3]. Für die normierte Zeitvariable n gilt bei kontinuierlichen Signalen $-\infty < n < \infty$. Bei periodischen Signalfolgen genügen N Abtastintervalle der Länge T_s zur Darstellung der Periodendauer T (D-7).

$$x[n] = x(t_n) = x(n \cdot T_s) \quad \text{mit} \quad t_n = n \cdot T_s \quad (\text{D-6})$$

$$T = N \cdot T_s ; n \in [0; N-1] \quad (\text{D-7})$$

Die diskrete Fourier-Transformation DFT (D-8) ordnet den N Elementen einer periodischen Signalfolge $x[n]$ die Folge der *Fourier-Koeffizienten* $X[m]$ derselben Länge N zu. Zur vereinfachten Darstellung wird vielfach der komplexe (Dreh-)Faktor w_N (D-9) verwendet, in den die normierte Kreisfrequenz Ω (D-10) eingeht.

$$X[m] = DFT\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot w_N^{m \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left(-i 2\pi \frac{m \cdot n}{N}\right); m \in [0; N-1] \quad (\text{D-8})$$

$$w_N = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \quad (\text{D-9})$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \cdot T_s = \frac{2\pi}{N} \quad (\text{D-10})$$

Ergebnis der DFT ist das Amplitudenspektrum $X[m]$ in Abhängigkeit der normierten Kreisfrequenzen Ω_m (D-11). Entsprechend kann das DFT-Spektrum $X[m]$ als „Abtastung eines kontinuierlichen Spektrums an den Stützstellen Ω_m “ aufgefasst werden [158, p. 65]. Zur üblichen Darstellung des Amplitudenspektrums in Abhängigkeit der (nicht-normierten) Kreisfrequenzen ω_m (D-12) bzw. der Frequenzen f_m (D-13) muss das Abtastintervall T_s bekannt sein.

$$\Omega_m = \frac{2\pi}{N} \cdot m = \Omega \cdot m \quad (\text{D-11})$$

$$\Omega_m \cdot n = \frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot \frac{t}{T_s} = \omega_m \cdot t = 2\pi f_m \cdot t$$

$$\omega_m = \frac{2\pi}{N \cdot T_s} \cdot m = \frac{\Omega}{T_s} \cdot m = \omega \cdot m \quad (\text{D-12})$$

⁸¹ Die Abtastung kann als Multiplikation des kontinuierlichen Signals $x(t)$ mit einer Folge von Einheitsimpulsen im konstanten Abtastintervall T_s aufgefasst werden, so dass gilt:

$$x[n] = x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s)$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{m}{N \cdot T_s} = \frac{\Omega}{2\pi \cdot T_s} \cdot m = f \cdot m \quad (\text{D-13})$$

Die Überlagerung der mit $X[m]$ gewichteten Sinus- und Kosinusfolgen mit den normierten Kreisfrequenzen Ω_m (D-11), die zu den normierten Zeitpunkten n ausgewertet werden, ergibt die ursprüngliche Signalfolge $x[n]$. Dies ist die inverse DFT oder IDFT (D-14)⁸².

$$x[n] = \text{IDFT}\{X[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] \cdot w_N^{-m \cdot n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] \cdot \exp\left(i 2\pi \frac{m \cdot n}{N}\right) \quad (\text{D-14})$$

Die Signalfolge ist voraussetzungsgemäß N -periodisch mit $x[n+N] = x[n]$. Aufgrund der 2π -Periodizität der Exponentialfunktion (D-15) ist das Spektrum N -periodisch mit $X[m+N] = X[m]$, was einer periodischen Fortsetzung der abgetasteten Werte des kontinuierlichen Spektrums mit f_s im Frequenzbereich entspricht [138, p. 40], [159, pp. IV-4]. Je größer das Abtastintervall T_s ist bzw. je kleiner die Abtastfrequenz f_s ist, desto enger werden die Spektren zusammengeschoben. Gemäß dem Abtasttheorem (D-16) darf die größte im Signal enthaltene Frequenz f_{\max} nicht größer als die halbe Abtastfrequenz f_s sein. Andernfalls kommt es im Bereich der Frequenzen $m \cdot f_s$, $m \in \mathbb{N}$ zu einer Überlappung der periodisch fortgesetzten Spektren [158, p. 57].

$$\exp\left(i \frac{2\pi}{N} \cdot m^*\right)^{m^* = m+k \cdot N} = \exp\left(i \frac{2\pi}{N} \cdot m\right) \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot N\right) = \exp\left(i \frac{2\pi}{N} \cdot m\right) \quad (\text{D-15})$$

$$f_{\max} \leq \frac{f_s}{2} \quad (\text{D-16})$$

D.3 DFT bei nicht-periodischen Signalfolgen, Leckphänomen und Fensterung

In der Realität sind die meisten Signalfolgen nicht-periodisch, und auch periodische Signalfolgen können – aufgrund des begrenzten Arbeitsspeichers in digitalen Rechnern – nur blockweise verarbeitet werden. Bei Anwendung der DFT auf eine nicht-periodische Signalfolge $x[n]$ wird deren periodische Fortsetzung mit der Signaldauer T unterstellt.

Durch Anhängen von Nullen hinter der eigentlichen Signalfolge, sogenanntes Zero-Padding, kann die Nicht-Periodizität angenähert werden. Die Signallänge N bzw. die Signaldauer T werden vergrößert. Dies verkleinert die Abtast-Schrittweite $\Delta\omega = 2\pi/(N \cdot T_s)$ bzw. $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ des Spektrums und kann sich günstig auf dessen Auflösung auswirken.

Die Energie E der Signalfolge $x[n]$ und der Spektralfolge $X[m]$ sind gemäß dem Parsevalschen Theorem (D-17) verknüpft. In aller Regel fallen die tatsächlich im Signal enthaltenen Frequenzen nicht mit den abgetasteten Frequenzen $f_m = m \cdot \Delta f$, $m \in \mathbb{N}$ zusammen sondern liegen zwischen dem Frequenzraster der Abtastung. Die Energie muss gemäß dem

⁸² Die Berechnung der IDFT nach Gleichung (D-14) kann wie folgt umgangen werden [157, p. 21]: 1.) Berechnung der DFT der konjugiert komplexen Spektralfolge $X^*[m]$, 2.) komplexe Konjugation der resultierenden Folge und 3.) Division durch N , so dass gilt: $x[n] = \text{IDFT}\{X[m]\} = 1/N \cdot (\text{DFT}\{X^*[m]\})^*$

Parsevalschen Theorem erhalten bleiben. Die Energie jener Spektralkomponenten, deren Frequenz nicht den Abtastfrequenzen entspricht, wird auf andere DFT-Koeffizienten aufgeteilt [158, p. 66]. Dieses Leckphänomen ist umso stärker ausgeprägt, je größer die Unstetigkeitsstelle bei der periodischen Fortsetzung der Signalfolge ist, das heißt je größer die Differenz $|x[0] - x[N-1]|$ ist.

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2 \quad (\text{D-17})$$

Als Fensterung wird die Multiplikation der Signalfolge $x[n]$ mit einer Fensterfolge $w[n]$ bezeichnet. Die zugehörige Spektralfolge wird mittels periodischer Faltung (D-18) der separaten Spektralfolgen $X[m]$ und $W[m]$ berechnet.

$$\text{DFT}\{x[n] \cdot w[n]\} = \frac{1}{N} \cdot X[m] * W[m] = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=0}^{N-1} X[\lambda] \cdot W[m-\lambda] \quad (\text{D-18})$$

Ziel der Fensterung ist die Verringerung des Leckphänomens, was unter anderem durch Verringerung⁸³ der Unstetigkeitsstellen an den Rändern der Signalfolge bewerkstelligt wird. Allgemein wird die Qualität einer Fensterfolge $w[n]$ durch die Hauptzipfelbreite $\Delta\Omega_{\text{mid}}$ und die Nebenzipfeldämpfung $a_{s,\text{dB}}$ (D-19) ihrer Spektralfolge $W[m]$ bestimmt [158, p. 66f], [159, pp. IX-19 - IX-26]. Dabei gilt:

- Die spektrale Auflösung der Signalkomponenten auf dem abgetasteten Frequenzraster ist umso besser, je schmaler die Hauptzipfelbreite $\Delta\Omega_{\text{mid}}$ ist.
- Je größer die Dämpfung des größten Nebenzipfels $a_{s,\text{dB}}$ bezogen auf den Maximalwert ist, desto besser werden:
 - Signalkomponenten, die nicht auf dem Frequenzraster der Abtastung liegen, aufgelöst.
 - Störkomponenten infolge des Leckphänomens unterdrückt.

Unglücklicherweise bedingt eine (günstige) geringe Hauptzipfelbreite stets eine (ungünstige) geringe Nebenzipfeldämpfung und umgekehrt (siehe auch

Tabelle D-1). Bei Zero-Padding ist zudem zu beachten, dass nur die Signalwerte ungleich Null mit der Fensterfunktion multipliziert werden dürfen [159, pp. IX-23].

$$a_{s,\text{dB}} = 10 \cdot \lg \frac{X_{\text{max}(1)}^2}{X_{\text{max}(2)}^2} = 20 \cdot \lg \frac{|X_{\text{max}(1)}|}{|X_{\text{max}(2)}|} \stackrel{|X_{\text{max}(1)}|=1}{=} -20 \cdot \lg |X_{\text{max}(2)}| \quad [\text{dB}] \quad (\text{D-19})$$

⁸³ Nicht für alle Fensterfolgen gilt für die Randwerte $w[0] = w[N] = 0$. Beispielhaft wird hier auf das *Hamming*-Fenster in

Tabelle D-1 verwiesen.

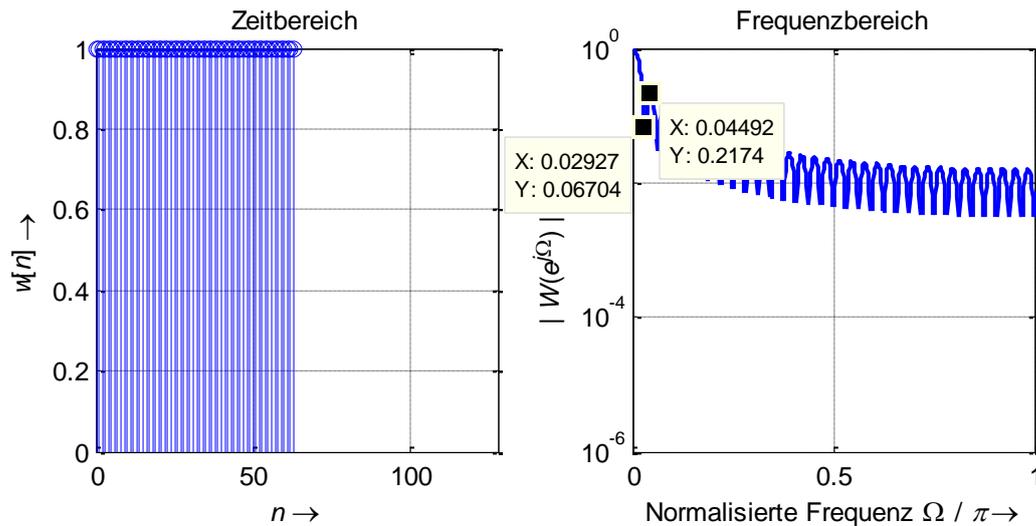


Abbildung D.1 Rechteckfenster – links: Zeitbereich mit Zero-Padding ($N = 64 \rightarrow 128$); rechts: Frequenzbereich mit Hauptzipfelbreite $\Delta\Omega_{mid}$ und Nebenzipfeldämpfung $a_{s,dB}$

Anhand der in Abbildung D.1 dargestellten Werte für das Rechteckfenster wird die Berechnung der Hauptzipfelbreite $\Delta\Omega_{mid}$ und der Nebenzipfeldämpfung $a_{s,dB}$ vorgeführt. Es gilt:

$$\Delta\Omega_{mid} = 0,02927 \cdot 2\pi \stackrel{N=64}{\approx} 4\pi / N [\text{rad}]$$

$$a_{s,dB} = -20 \cdot \lg(0,2174) \approx 13,255 [\text{dB}]$$

Tabelle D-1 Gängige Fensterfunktionen [138], [159], [158]

Bezeichnung	Formel	$\Delta\Omega_{mid}$	$a_{s,dB}$ [dB]
Rechteck	$w_{rect}[n] = 1$	$4\pi / N$	13,3
Bartlett (Dreieck)	$w_{triang}[n] = \begin{cases} \frac{n}{N/2} & ; n \in \left\{ \begin{matrix} [0; N/2] \\ [N/2; N-1] \end{matrix} \right\} \\ 2 - \frac{n}{N/2} & \end{cases}$	$8\pi / N$	26,5
Blackman	$w_{Bm}[n] = 0,42 - 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$	$12\pi / N$	58,1
Von Hann	$w_{Hn}[n] = 0,5 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right]$	$8\pi / N$	31,5
Hamming	$w_{Hm}[n] = 0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$	$8\pi / N$	42,5

Eine Multiplikation mit dem Rechteckfenster führt auf die ursprüngliche (ungefensterte) Signalfolge $x[n]$. Das Rechteckfenster ist somit der Referenzwert für die in Abbildung D.2 dargestellten Fensterfunktionen.

Tabelle D-1 zeigt neben den Formeln die zugehörigen Hauptzipfelbreiten $\Delta\Omega_{\text{mid}}$ und Nebenzipfeldämpfungen $a_{s,\text{dB}}$, die in MATLAB® mit dem „Window Design & Analysis Tool“ ermittelt werden können.

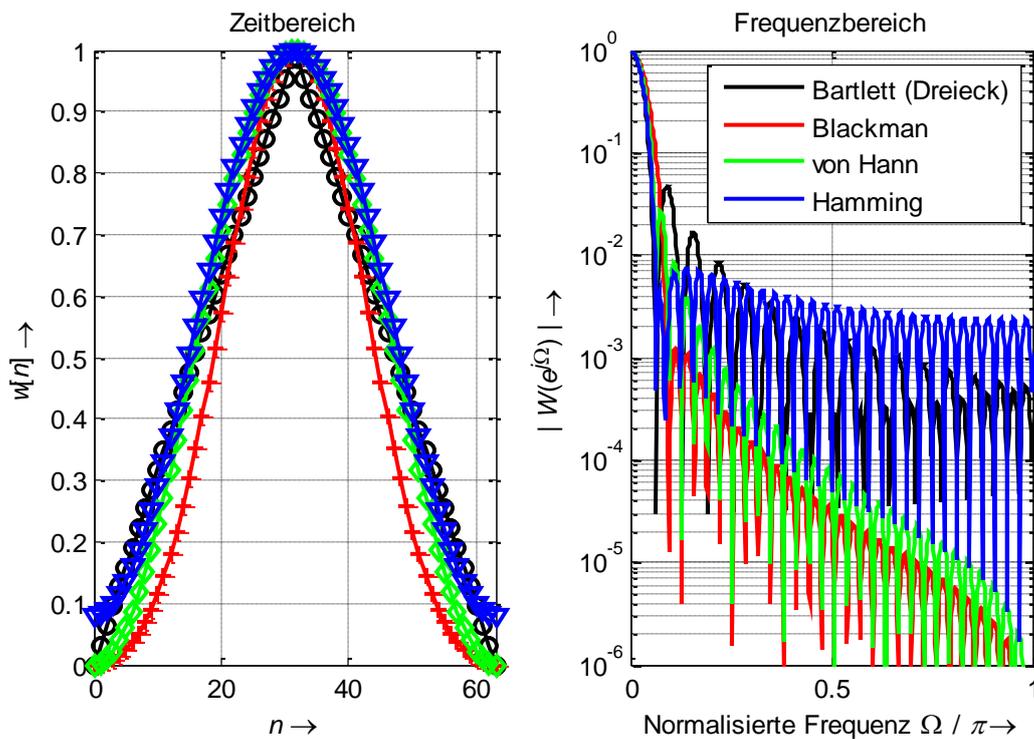


Abbildung D.2 Dreiecks-, Blackman-, von Hann- und Hammingfenster

D.4 Komplexität und schnelle *Fourier*-Transformation (FFT)

Unter der Annahme, dass die Drehfaktoren $w_N^{m \cdot n}$ bekannt und im Speicher vorhanden sind, sind zur Berechnung der Spektralfolge $X[m]$ mit dem DFT-Algorithmus gemäß Gleichung (D-8) je DFT-Koeffizient N komplexe Multiplikationen der $x[n]$ mit den zugehörigen $w_N^{m \cdot n}$ und $N-1$ komplexe Additionen der Produkte $x[n] \cdot w_N^{m \cdot n}$ erforderlich. Die Komplexität – das heißt der Berechnungsaufwand und der Speicherbedarf – steigen quadratisch mit der Transformationslänge N [158, p. 40ff], [138, p. 123ff]. Anhand der schnellen *Fourier*-Transformation FFT⁸⁴ kann der Berechnungsaufwand deutlich reduziert werden.

Der Radix-2-FFT-Algorithmus nach *Cooley* und *Tukey* basiert auf der Reduzierung des Rechenaufwands durch wiederholte Halbierung der Transformationslänge (Dezimation im Zeitbereich) bis zur minimalen Transformationslänge $N_{\text{min}} = 2$. Dazu muss die anfängliche Transformationslänge eine Zweierpotenz sein ($N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$), was durch Zero-Padding leicht hergestellt werden kann.

⁸⁴ Fast *Fourier* Transform

Bei der Dezimation im Zeitbereich wird die DFT (D-8) in eine Teilfolge $x'[k]$ mit geraden Indizes und eine Teilfolge $x''[k]$ mit ungeraden Indizes und der jeweiligen Länge $K = N/2$ zerlegt.

$$\begin{aligned}
 X[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot w_N^{m \cdot n} = \sum_{n=0,2,\dots}^{N-2} x[n] \cdot w_N^{m \cdot n} + \sum_{n=1,3,\dots}^{N-1} x[n] \cdot w_N^{m \cdot n} \\
 X[m] &= \sum_{k=0}^{N/2-1} x[2k] \cdot w_N^{2k \cdot m} + \sum_{k=0}^{N/2-1} x[2k+1] \cdot w_N^{(2k+1) \cdot m} \\
 X[m] &= \sum_{k=0}^{K-1} x'[k] \cdot w_K^{k \cdot m} + w_N^m \cdot \sum_{k=0}^{K-1} x''[k] \cdot w_K^{k \cdot m}
 \end{aligned} \tag{D-20}$$

Dabei wird die folgende Symmetrieeigenschaft des Drehfaktors ausgenutzt:

$$\begin{aligned}
 w_N^{(2k+1)m} &= \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \cdot (2k+1) \cdot m\right) = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N/2} \cdot k \cdot m\right) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} \cdot m\right) \\
 w_N^{(2k+1)m} &= w_K^{k \cdot m} \cdot w_N^m
 \end{aligned} \tag{D-21}$$

Da zudem für den Index $m \in [0; N-1]$ gilt, der Index k der Teilfolgen aber nur Werte im Bereich $[0; N/2-1]$ annehmen kann, wird zusätzlich die Periodizität (D-22) des Drehfaktors berücksichtigt. Im Signalflussgraphen führt dies auf eine Verknüpfung über Kreuz, was die Basisoperation des Radix-2-Algorithmus ist.

$$w_K^{m \cdot k} = w_K^{(m' + N/2)k} = w_K^{m' \cdot k} \cdot w_K^{N/2 \cdot k} \stackrel{K=N/2}{=} w_K^{m' \cdot k} \quad \text{mit } m \in [0; N-1] \text{ und } m' \in [0; N/2-1] \tag{D-22}$$

Für eine Transformationslänge $N = 2^p$ existieren $p = \log_2(N)$ Zerlegungen. Dem Berechnungsaufwand der DFT von $M_p = N^2$ komplexen Multiplikationen und $A_p = N^2 - N$ komplexen Additionen stehen $M_p = p \cdot N/2$ und $A_p = p \cdot N$ Berechnungsschritte bei der Radix-2-FFT gegenüber [138, p. 136].

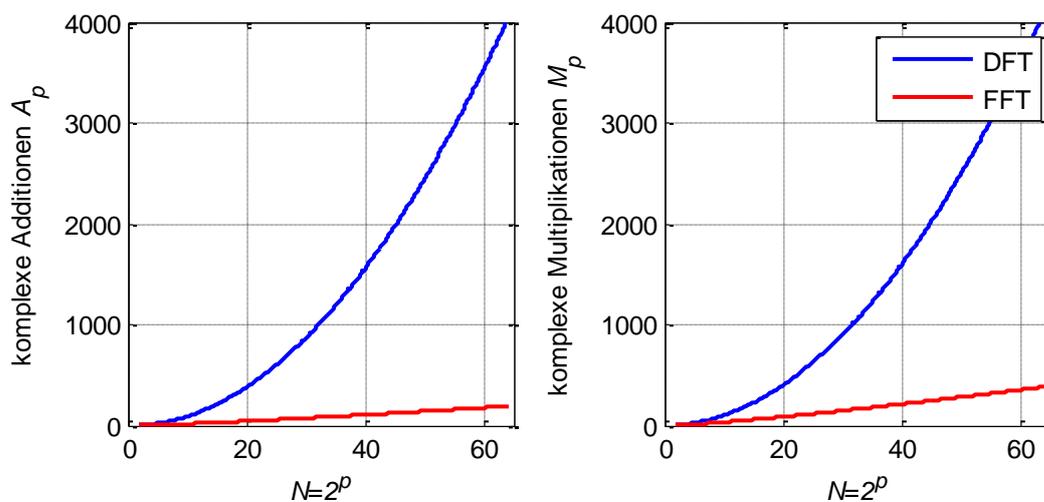


Abbildung D.3 Vergleich des Berechnungsaufwands der diskreten Fourier-Transformation und des Radix-2-FFT-Algorithmus in Abhängigkeit der Transformationslänge $N = 2^p$; nach Neubauer [138, p. 135]

Die sukzessive Aufteilung in Teilfolgen macht eine Umsortierung der Indizes erforderlich. Hier bietet sich die Bit-reversal-Adressierung an. Eine nachvollziehbare Erklärung sowie eine komplette MATLAB®-Programmierung des Radix-2-FFT-Algorithmus können dem Buch von *Werner* [158] entnommen werden.