

# **Aktive Schwingungskompensation am KFZ: Linear parameter-variierende Ansätze mit Parameterreduktion**

M.Sc. Tobias Füger

Vollständiger Abdruck der bei der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Helmut Rapp

Gutachter:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Christian Bohn

Die Dissertation wurde am 04.02.2016 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 17.02.2016 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 31.08.2016 statt.



*Für meine Familie*



# Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die motorseitig erregten Schwingungen an der Getriebeaufhängung direkt am Querträger, in einem vordefinierten Drehzahlband, durch einen Active Vibration Control (AVC) Ansatz zu unterdrücken. Die Motorschwingungen (Störungen) bestehen maßgeblich aus der Motorzündfrequenz sowie deren Oberwellen. Über das Motorsteuergerät kann die Motordrehzahl direkt abgegriffen werden, die dann als variierender Parameter für die Echtzeitaktualisierung des LPV- $H_\infty$ -Reglers zur Verfügung steht. Als zeitdiskretes Störmodell kann folglich ein Multisinus mit einer Grundfrequenz (erste Motorordnung) sowie deren harmonischen Vielfachen angesetzt werden. Allerdings wird für jede Frequenz des Störmodells jeweils ein variierender Parameter benötigt. Bei einer hohen Anzahl an Frequenzen im Störmodell und infolgedessen der gleichen Anzahl an variierenden Parametern nimmt die Dimension des zu lösenden Optimierungsproblems stark zu und die Reglersynthese wird immer komplexer. Dieses Problem gilt es zu lösen.

Dafür werden zwei neue Parameterreduktionsmethoden entwickelt. Es besteht eine Abhängigkeit zwischen der Anzahl an Frequenzen und der Anzahl an variierenden Parametern, hervorgerufen durch die nichtlineare Kosinusfunktion im zeitdiskreten Zustandsraummodell der Störung. Diese Abhängigkeit wird durch entsprechende Approximationen aufgehoben. Hinsichtlich der Umsetzung dieser Methoden wird das Störmodell in eine polytope/linear-fractionale LPV-Form gebracht und dann der entsprechende Ansatz angewandt.

**Methode 1:** Beim Erstellen des polytopen LPV-Störmodells wird die Kosinusfunktion durch eine ganzrationale Polynomfunktion approximiert. Es wird darauf geachtet, dass nur quadratische beziehungsweise biquadratische Variablen bei der Approximation benötigt werden und sich die Anzahl an Variablen auf ein Minimum reduziert. Dadurch lässt sich ein LPV-Störmodell mit beliebig vielen Frequenzen (abhängig von einer Grundfrequenz  $f_0$ ) aus zwei variierenden Parametern aufstellen.

**Methode 2:** Aufgrund der linear-fractionalen Form des entstehenden Störmodells kommt man bei diesem Ansatz mit nur einem variierenden Parameter aus. Es wird nicht die Kosinusfunktion, sondern das komplette Modell für jede Frequenz einzeln approximiert und anschließend zusammengefasst. Dadurch umgeht man die Abhängigkeit von einem variierenden Parameter pro Frequenz und man kann ein Störmodell mit beliebig vielen Frequenzen und nur einem variierenden Parameter aufstellen.

Beide Ansätze werden vorab in der Simulation getestet. Dabei wird auf die Komplexität des Optimierungsproblems für die Reglersynthese eingegangen und einander gegenübergestellt. Anschließend werden die AVC-Ansätze am KFZ umgesetzt und erprobt. Für die Bewertung sowie die Tauglichkeit der Ansätze in der praktischen Anwendung sollten die vorgegebenen Frequenzen im spezifizierten Motordrehzahlbereich unterdrückt respektive abgeschwächt werden. Der linear-fractionale Ansatz reduziert am KFZ, bei aktiviertem Regler, die Schwingungen am Querträger um 50 Prozent.

# Abstract

The goal of this work is to reduce the vibrations excited by the combustion engine at the gear hanger on the cross member with an Active Vibration Control (AVC) approach in a predefined range of engine speed. The engine vibrations (disturbances) consist of the ignition frequency plus their harmonics. The engine speed can directly be picked by the engine control unit and then used as the varying parameter for the real time update of the LPV  $H_\infty$  controller. Accordingly, a multisine with a fundamental frequency (first engine frequency) plus their harmonics can be used as the discrete-time disturbance model. However, each frequency of the disturbance model requires a varying parameter. In a disturbance model with a large number of frequencies with accordingly the same large number of varying parameters the dimension of the optimization problem rises intensely and hence the synthesis of the controller becomes more and more complex. This problem is about to be solved.

Therefor two new methods for reducing the parameters are developed. A dependency between the number of frequencies and the number of varying parameters exists, which is caused by the nonlinear cosine function in the discrete-time state space model of the disturbance. This dependency is cancelled by approximating the cosine function and generating a disturbance model in a polytopic or linear fractional form.

**Method 1:** By generating the polytopic LPV disturbance model the cosine function is approximated by a polynomial function. Under the condition that the number of variables should be reduced to a minimum within the approximation, therefore only quadratic or quartic variables are used. Finally, a LPV disturbance model with numerous possible frequencies (dependent of the fundamental frequency  $f_0$ ) can be generated with two varying parameters.

**Method 2:** Due to the linear fractional form of the resulting disturbance model only one varying parameter is required for this approach. The whole model is approximated for each frequency separately and merged together to one model without approximating the cosine function. Thus, the dependency of one varying parameter for each frequency is avoided and a disturbance model with a random number of frequencies can be generated with one varying parameter.

Both approaches are tested in the simulation in advance. Thereby the complexity of the optimization problem for synthesizing the controller is considered and compared. Afterwards these approaches are tested at the motor vehicle. The predefined frequencies should be reduced or attenuated in the specified range of engine speed in order to evaluate the approaches with regard to the practical realization. The linear fractional approach reduces the vibrations at the cross member of the motor vehicle up to 50 per cent if the controller is activated.

# Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik der Universität der Bundeswehr München in Neubiberg.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek für die Unterstützung, die Anregungen sowie die Anleitung zur Durchführung dieser Arbeit.

Mein Dank gilt zudem Prof. Dr.-Ing. Christian Bohn für die Übernahme des Korreferats, sein Interesse an meiner Arbeit und die langjährige fruchtbare Zusammenarbeit.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Kollegen Nabil Lachhab und Christoph Hartung für die gemeinsame Zeit und die außergewöhnliche Zusammenarbeit bedanken.

Ein weiterer Dank gilt allen Kollegen des Lehrstuhls, dem Stammpersonal Elisabeth Lößl, Eduard Oestereicher und Hermann Lex sowie den Kollegen von anderen Lehrstühlen für die Hilfsbereitschaft und die tolle Zeit.

Nicht zuletzt möchte ich mich herzlichst bei meiner Familie bedanken, die mich immer unterstützt und den ganzen Weg hinweg begleitet hat!

Poing, im November 2016

Tobias Föger



# Inhaltsverzeichnis

## Inhaltsverzeichnis

### Nomenklatur

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung und Beitrag der Arbeit . . . . .	2
1.2	Stand der Technik . . . . .	4
1.3	Gliederung der Arbeit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Störmodell</b>	<b>8</b>
2.1	Zeitkontinuierliches Modell einer harmonischen Schwingung . . . . .	10
2.2	Zeitdiskretes Modell einer harmonischen Schwingung . . . . .	12
2.2.1	Zeitdiskretes Modell einer Sinusschwingung (systembasierter Ansatz)	12
2.2.2	Zeitdiskretes Modell einer Sinusschwingung (signalbasierter Ansatz)	13
2.2.3	Zeitdiskretes Störmodell einer überlagerten Schwingung mit $L$ Fre- quenzen (Multisinus) . . . . .	14
2.2.4	Zeitdiskretes Störmodell für die numerische Reglerberechnung . . .	16
<b>3</b>	<b>Polytoper LPV-Ansatz mit zwei Parametern</b>	<b>18</b>
3.1	Theoretische Grundlagen des polytopen Ansatzes . . . . .	18
3.1.1	Ljapunow-Stabilität in Kombination mit dem $H_\infty$ -Kriterium für zeitdiskrete Systeme . . . . .	19
3.1.2	Erweitertes $H_\infty$ -Kriterium mit polytoper Systemunsicherheit . . . .	21
3.1.3	Berechnung eines $H_\infty$ -Reglers für polytope LPV-Systeme . . . . .	24
3.2	Störmodell mit Kosinusapproximation . . . . .	29
3.2.1	Polytopes Störmodell mit einer einzigen Frequenz . . . . .	30
3.2.2	Polytopes Störmodell mit beliebig vielen Frequenzen . . . . .	31
3.2.3	Reduktion der variierenden Parameter im Störmodell . . . . .	32
3.3	Verallgemeinerte Strecke mit polytopem LPV-Störmodell . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Linear-fractionaler LPV-Ansatz mit einem Parameter</b>	<b>41</b>
4.1	Theoretische Grundlagen des linear-fractionalen Ansatzes . . . . .	41
4.1.1	Stabilität in Kombination mit dem $H_\infty$ -Kriterium für den geschlos- senen Regelkreis . . . . .	41
4.1.2	Linear-fractionaler Ansatz für den geschlossenen Regelkreis . . . . .	45
4.1.3	Berechnung eines $H_\infty$ -LPV-Reglers . . . . .	47
4.2	Störmodell in LF-Form . . . . .	51
4.2.1	LF-Transformation des monofrequenten Störmodells . . . . .	52
4.2.2	Kosinusfunktion in LF-Form . . . . .	53
4.2.3	Parameterbestimmung der LF-Kosinusfunktion . . . . .	55

4.2.4	LF-Störmodell mit $L$ beliebigen Frequenzen und einem variierenden Parameter . . . . .	60
4.3	Verallgemeinerte LPV-Strecke in LF-Form . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Verifikation der LPV-Ansätze in der Simulation</b>	<b>66</b>
5.1	Modell der Drosselklappe als Regelstrecke . . . . .	66
5.2	Polytooper LPV-Ansatz in der Simulation . . . . .	67
5.2.1	Implementierung des polytopen LPV-Reglers . . . . .	67
5.2.2	Simulationskonfiguration der verallgemeinerten Strecke . . . . .	70
5.2.3	Simulationsergebnisse . . . . .	72
5.3	Linear-fractionaler LPV-Ansatz in der Simulation . . . . .	77
5.3.1	Implementierung des linear-fractionalen LPV-Reglers . . . . .	77
5.3.2	Simulationskonfiguration der verallgemeinerten Strecke . . . . .	77
5.3.3	Simulationsergebnisse . . . . .	78
5.4	Vergleich der LPV-Ansätze . . . . .	84
<b>6</b>	<b>AVC-Erprobung am KFZ mit Messergebnissen</b>	<b>86</b>
6.1	AVC-Systemkomponenten . . . . .	87
6.2	Identifikation der Regelstrecke . . . . .	88
6.3	Reglersynthese . . . . .	94
6.4	Messergebnisse AVC-Szenario am KFZ . . . . .	98
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>106</b>
 <b>Literatur</b>		 <b>110</b>
 <b>Anhang</b>		 <b>117</b>

## Nomenklatur

### Akronyme:

KFZ	Kraftfahrzeug
ECU	Electronic Control Unit
VKM	Verbrennungskraftmaschine
TDI	Turbocharged Direct Injection
EV	Einlassventil
AV	Auslassventil
OT	Oberer Totpunkt
UT	Unterer Totpunkt
ANC	Active Noise Control
AVC	Active Vibration Control
LMS	Least-Mean-Square
FIR	Finite Impulse Response
IMP	Internal Model Principle
AFC	Adaptive Feedforward Cancellation
LPV	Linear Parameter Varying
SISO	Single-Input Single-Output
LF	Linear Fractional
LFT	Linear Fractional Transformation
LMI	Linear Matrix Inequality
BMI	Bilinear Matrix Inequality
ARI	Algebraic Riccati Inequality
SVD	Singular Value Decomposition
MABX	MicroAutoBox
RCP	Rapid Control Prototyping
NRMSE	Normalized Root Mean Square Error
CAN	Controller Area Network
TS	Testszenario

### Notationen / Konstanten:

$f$	Frequenz
$f_0$	Grundfrequenz
$\nu$	Faktor zur Frequenzeinstellung
$\omega_0$	Eigenkreisfrequenz
$\phi$	Phasenwinkel
$K_{PT2}$	Verstärkung $PT2$ -Glied
$D_{PT2}$	Dämpfungskonstante $PT2$ -Glied
$n_{MOT}$	Motordrehzahl
$f_{MOT}$	Motordrehfrequenz
$f_{Z_{Zyt}}$	Zylinderzündfrequenz

**Notationen / Konstanten:**

$f_{Z_{MOT}}$	Motorzündfrequenz
$N_{Zyl}$	Zylinderzahl
$G(s)$	Laplace-Übertragungsfunktion
$\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$	Inverse Laplacetransformation
$G(z)$	z-Übertragungsfunktion
$\ G(s)\ _2$	$H_2$ -Norm eines Systems
$\ G(s)\ _\infty$	$H_\infty$ -Norm eines Systems
$a, b, c, \dots$	Skalare
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$	Vektoren
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$	Matrizen
$\mathbf{0}_n$	Nullmatrix der Dimension $(n \times n)$
$\mathbf{I}_n$	Einheitsmatrix der Dimension $(n \times n)$
$\mathbf{A}^T$	Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse der Matrix $\mathbf{A}$
$\Phi(t)$	Transitionsmatrix $(e^{\mathbf{A}t})$
$\text{tr}(\mathbf{M})$	Spur der Matrix $\mathbf{M}$
$\bar{\sigma}(\mathbf{M})$	Maximaler Singulärwert der Matrix $\mathbf{M}$
$\det(\mathbf{M})$	Determinante der Matrix $\mathbf{M}$
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor (im Zustandsraummodell)
$u$	Einganggröße (im Zustandsraummodell)
$y$	Ausgangsgröße (im Zustandsraummodell)
$V(\cdot)$	Ljapunow-Funktion
$\text{conv}(\cdot)$	Konvexe Hülle
$ \cdot $	Betrag
$\sup$	Supremum
$\inf$	Infimum

**Symbole:**

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\Delta$	Menge der Unsicherheiten
$\mathcal{L}_\Delta$	Menge der positiv definiten Normierungen

# 1 Einleitung

In den letzten 20 Jahren stieg in der Automobilindustrie die Nachfrage nach mehr Sicherheit, mehr Komfort sowie mehr Effizienz progressiv an. Aufgrund des technologischen Fortschritts verfügen die elektronischen Steuergeräte (engl.: *Electronic Control Unit*, kurz ECU) über immer mehr Speicherkapazität und Rechenleistung. Diese Tatsache ermöglicht den Entwicklern immer komplexere Systeme zu entwickeln, die einen hohen Rechen-/Speicheraufwand bezüglich der Steuerung oder Regelung erfordern.

Hauptbestandteil eines herkömmlichen Kraftfahrzeugs (KFZ) ist die Verbrennungskraftmaschine (VKM). Die VKM erzeugt Verbrennungsgeräusche sowie Schwingungen, die direkt über die Motorlager oder indirekt über das Getriebe ins Chassis und somit in die Karosserie/Innenraum emittiert werden. Standard-Motorlager sind passive Systeme, tragen zum einen die statische Last der VKM, zum anderen müssen sie die auftretenden Schwingungen von der Karosserie isolieren. Beim Auslegen dieser Lager wird immer ein Kompromiss zwischen ausreichender Dämpfung sowie guter Isolation der Motor-/Getriebeeinheit vom Chassis eingegangen. Anforderungen an den Komfort bleiben hierbei, infolge von Sicherheitsaspekten oder Leistungskriterien, oft auf der Strecke.

Hier kommen die aktiven Systeme zur Geräusch- und Schwingungskompensation (engl.: *Active Noise and Vibration Control Systems*, kurz ANC/AVC-Systeme) ins Spiel, die die Schallentwicklung und somit den Fahrkomfort deutlich verbessern können. Ziel dieser Systeme ist es, die Störsignale (Geräusche oder Schwingungen) zu detektieren und entsprechend mit überlagerten Signalen durch Lautsprecher oder Massenschwinger zu beseitigen. Dabei wird das aus der Physik bekannte Prinzip der *destruktiven Interferenz* angewendet, siehe hierzu Tipler und Mosca (2015, S.455ff, Kap.12) sowie Lueg (1936). Zwei Schallwellen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude eliminieren sich durch Überlagerung, wobei die Wellen eine Phasendifferenz von  $\Delta\phi = \pi = 180^\circ$  zueinander aufweisen.

Einen zusammenfassenden Überblick zu ANC/AVC, in Bezug auf praktische Anwendungen mit adaptiven Steuerungs- und Regelungsansätzen, findet man in Kuo und Morgan (1999), Crocker (2007), Elliott (2008) sowie Svaricek u. a. (2010, S.303f) und den darin enthaltenen Referenzen. Bei den Steuerungsstrategien werden mittels dem *Least-Mean-Square* (LMS)-Algorithmus, siehe hierzu Paulo (2013, S.79, Kap.3), die Koeffizienten eines *Finite Impulse Response* (FIR)-Filter, gemäß Schüßler (2008, S.420, Ab.5.6.6), adaptiv angepasst und damit das Gegenschallsignal generiert, siehe Morgan (1980). Das Adaptionsverhalten bei Störgrößenaufschaltungen ist bereits zu Recht in praktischen AVC-Anwendungen erprobt worden, jedoch muss hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit, der Schrittweitenanpassung und der Stabilität anwendungsspezifisch Applikationsaufwand betrieben werden.

## 1.1 Problemstellung und Beitrag der Arbeit

Die oben erwähnte Problematik, dass bei adaptiven Algorithmen die Steuerungs-/Regelstrategien von externen Signalen oder Messungen abhängen, macht eine Vorabbetrachtung der Stabilität für den geschlossenen Regelkreis bei schnellen Änderungen der Führungsgröße oder des Adaptionssignals schwierig beziehungsweise sogar unmöglich, aufgezeigt in Svaricek u. a. (2010, S.304f). Regelungstechnische Ansätze, die bei der Reglersynthese Stabilität garantieren, Gütekriterien erfüllen und durch ein Messsignal in Echtzeit aktualisiert werden können, sind Stand der gegenwärtigen Forschung. Diese theoretischen Ansätze benötigen bei der praktischen Umsetzung leistungsstarke Prozessoren und hohe Rechenkapazität, was bei den heutigen ECUs gegeben ist. Somit können auch komplexere Ansätze praktisch realisiert werden.

Dazu zählen die *linear parameter-varyierenden* (LPV) Ansätze, die in Kombination mit der  $H_\infty$ -Theorie die Regelungsaufgabe in ein Optimierungsproblem, in Form von Matrixungleichungen (engl.: *Linear Matrix Inequalities*, kurz LMIs), umwandeln und somit effizient gelöst werden können, siehe hierzu Gahinet und Apkarian (1993, 1994), Gahinet (1996), Apkarian und Gahinet (1995), Boyd u. a. (1994), Wu (1995), Scherer u. a. (1997), De Oliveira u. a. (1999) sowie Scherer und Weiland (2000). Diese Ansätze sind modellbasierte Reglersynthese-Verfahren, die bei erfolgreicher Synthese Stabilität im Sinne von Ljapunow für den geschlossenen Regelkreis sowie eine obere Schranke für die induzierte Systemverstärkung garantieren. Eine Zusammenfassung von den möglichen Varianten und Einsatzgebieten findet man in Hoffmann und Werner (2015).

Ziel dieser Arbeit, aufgrund der genannten Eigenschaften von LPV- $H_\infty$ -Ansätzen, ist die praktische Umsetzung eines theoretischen LPV- $H_\infty$ -Verfahrens für die Anwendung *Active Vibration Control an einem realen KFZ*. Im Zuge dessen sollen die motorseitig erregten Schwingungen an der Getriebeaufhängung direkt am Querträger in einem vordefinierten Drehzahlband unterdrückt werden. Als Versuchsfahrzeug dient dabei ein Audi A4 TDI mit vier Zylindern. Die Motorschwingungen (Störungen) bestehen maßgeblich aus der Motorzündfrequenz, das entspricht bei einer VKM mit dieser Zylinderanzahl der zweiten Motorordnung, sowie deren Oberwellen. Über das Motorsteuergerät kann die Motordrehzahl (das heißt die Motordrehfrequenz oder auch erste Motorordnung) direkt abgegriffen werden, die dann als variierender Parameter für die Echtzeitaktualisierung des LPV-Reglers zur Verfügung steht. Als zeitdiskretes Störmodell kann demnach ein Multisinus mit einer Grundfrequenz (erste Motorordnung) sowie deren harmonischen Vielfachen angesetzt werden. Allerdings wird für jede Frequenz des Störmodells jeweils ein variierender Parameter benötigt. Bei einer hohen Anzahl an Frequenzen im Störmodell und infolgedessen der gleichen Anzahl an variierenden Parametern nimmt die Dimension des zu lösenden Optimierungsproblems stark zu und die Reglersynthese wird immer komplexer. Die Lösbarkeit des Optimierungsproblems und somit das Finden eines LPV-Reglers für ein Störmodell mit einer Anzahl an Frequenzen größer als drei ist dadurch maßgeblich beeinträchtigt.

Dieses Problem gilt es zu lösen. Dafür werden zwei neue Parameterreduktionsmethoden entwickelt. Es besteht eine Abhängigkeit zwischen der Anzahl an Frequenzen und der Anzahl an variierenden Parametern. Diese Abhängigkeit wird durch entsprechende Approximationen aufgehoben.

Hinsichtlich der Umsetzung dieser Methoden wird das Störmodell in eine polytope/linear-fractionale LPV-Form gebracht und darauf der entsprechende Ansatz angewandt. Das zeitdiskrete Zustandsraummodell der Störung enthält eine nichtlineare Kosinusfunktion. Aufgrund dieser nichtlinearen Funktion besteht eine Abhängigkeit zwischen dem variierenden Parameter und der Frequenz, sodass pro Frequenz ein variierender Parameter benötigt wird. Die originären Beiträge dieser Arbeit gliedern sich folgendermaßen:

- **Polytope LPV-Ansatz (siehe Abschnitt 3)**  
Bei der Modellierung des polytopen LPV-Störmodells wird die Kosinusfunktion durch eine ganzrationale Polynomfunktion approximiert. Es wird darauf geachtet, dass nur quadratische beziehungsweise biquadratische Variablen bei der Approximation benötigt werden und sich die Anzahl an Variablen auf ein Minimum reduziert. Dadurch lässt sich ein LPV-Störmodell mit beliebig vielen Frequenzen (abhängig von einer Grundfrequenz  $f_0$ ) aus zwei variierenden Parametern aufstellen. Diese Neuerung der Approximation der Kosinusfunktion und folglich eine Reduktion auf zwei variierende Parameter wurde bereits in Füger u. a. (2012, 2013) veröffentlicht und ist mehrfach zitiert worden.
- **Linear-fractionaler LPV-Ansatz (siehe Abschnitt 4)**  
Aufgrund der linear-fractionalen Form des entstehenden Störmodells kommt man bei diesem Ansatz mit nur einem variierenden Parameter aus. Es wird nicht die Kosinusfunktion, sondern das komplette Modell für jede Frequenz einzeln approximiert und anschließend zusammengefasst. Dadurch umgeht man die Abhängigkeit von einem variierenden Parameter pro Frequenz. Diese Reduktion auf einen variierenden Parameter für beliebig viele Frequenzen wurde noch nicht veröffentlicht und ist eine Neuerung.
- **Simulation und Erprobung der LPV-Ansätze am KFZ (siehe Abschnitt 5 und 6)**  
Beide Ansätze werden vorab in der Simulation getestet. Dabei wird auf die Komplexität des Optimierungsproblems für die Reglersynthese eingegangen und einander gegenübergestellt. Des Weiteren werden die Ansätze als AVC-Anwendung am KFZ erprobt. Hierfür wird das KFZ mit Sensoren, einem aktiven Tilger sowie dem *Rapid Control Prototyping System* der Fa. *dSPACE* ausgerüstet. Aufgrund der Parameterreduktion können für den polytopen sowie den linear-fractionalen Ansatz mehrere Frequenzen im Störmodell vorgegeben und dafür die passenden LPV-Regler berechnet werden. Bei der Erprobung variiert die Motordrehzahl in einem definierten Drehzahlband, der LPV-Regler wird aktiviert und die Beschleunigungssignale werden per *ControlDesk* aufgenommen. Für die Bewertung sowie die Tauglichkeit

der Ansätze in der praktischen Anwendung sollten die vorgegebenen Frequenzen im spezifizierten Motordrehzahlbereich unterdrückt respektive abgeschwächt werden.

Beide LPV-Ansätze sind modellbasierte Reglersyntheseverfahren. Das Regelstreckenmodell wird durch Identifikation ermittelt, deshalb werden ausschließlich zeitdiskrete  $H_\infty$ -Methoden angewandt.

## 1.2 Stand der Technik

Mitte der neunziger Jahre wurde der Forschungsschwerpunkt ANC/AVC auf praktische Anwendungen in der Automobilbranche ausgeweitet. Die Fa. *ContiTech Vibration Control GmbH* hat Prototypen eines AVC-Systems an Versuchsfahrzeugen getestet und deutliche Komfortverbesserungen in Bezug auf Geräusch- und Vibrationsentwicklung erzielt, siehe hierzu Svaricek u. a. (2010, S.304) mit Verweis auf die darin aufgeführten Referenzen. Des Weiteren hat *Honda* ein ANC-System, siehe Inoue u. a. (2004), sowie ein AVC-System, siehe Matsuoka u. a. (2004), mit dem Ziel entwickelt, bei Zylinderabschaltung die zusätzlich im Fahrgastinnenraum entstehenden Geräusche zu reduzieren. Dabei wurde die Motordrehzahl als Referenzsignal für die adaptive Steuerung verwendet.

Ein Regelungskonzept in Form eines Störgrößenbeobachters wurde als AVC-System am KFZ von Kowalczyk u. a. (2004) sowie Bohn u. a. (2004) erprobt. Für jede vorgegebene Frequenz des Störmodells wird ein Beobachter berechnet und die entsprechende Rückführverstärkung drehzahlabhängig aufgeschaltet. Eine Stabilitätsgarantie zwischen den Umschaltungen ist jedoch nicht gegeben. Anhand eines Mehrkörpersystems (VKM, Getriebe, Hilfsrahmen sowie passive und aktive Lager) sind in Olsson (2005) adaptive Steuerungen, Beobachteransätze mit  $H_2$ -Auslegungskriterien und LPV-Modellierung von nichtlinearen Systemdynamiken in der virtuellen Umgebung getestet worden. Des Weiteren sind in Paschedag (2008) adaptive Störgrößenaufrichtungen sowie Regelungen an einem Prüfstand einer Motoraufhängung entwickelt, implementiert und erprobt worden. Für ein Kanalsystem wurden in Zhang (1999) adaptive Steuerungen sowie nicht-adaptive Regelungen ( $H_\infty$ -Entwurfsmethoden) hinsichtlich Schalldämpfung entwickelt und die Dämpfungseigenschaften experimentell erprobt. Eine Zusammenfassung von ANC-Anwendungen sind darin detailliert aufgeführt.

Die praktische Umsetzung von LPV- $H_\infty$ -Ansätzen als ANC/AVC-Anwendung in Kopfhörern oder an einem flexiblen Balken wurde in Ballesteros und Bohn (2011a, 2011b) durchgeführt. Dabei wird der *linear-fraktionale* (LF) LPV-Ansatz angewandt und bis zu zwei vorgegebene Frequenzen unterdrückt. Eine Erweiterung dieses LF-Ansatzes auf sechs Frequenzen ist in Shu u. a. (2011) gegeben. Ein zusammenfassender Überblick zum LF-LPV-Ansatz, mit der praktischen Anwendung ANC im Kopfhörer und AVC am Balken, ist in Ballesteros u. a. (2012) gegeben. Hingegen findet in Heins u. a. (2011) der polytope LPV-Ansatz mit Zustandsrückführung für LPV-Systeme Verwendung. Entsprechende Erweite-

rungen mit einem zeitvarianten Störmodell und zeitvariierenden Frequenzen sind in Heins u. a. (2012) aufgeführt. In Shu u. a. (2013) wird die Regelgröße über ein Ausgangsfilter zurückgeführt, wodurch im Vergleich zu einem Zustandsbeobachter ein LPV-Regler mit reduzierter Ordnung entsteht. Eine Vereinfachung der polytopen Menge zu einem Dreieck in Kombination mit dem Ausgangsfilter erfolgt in Ballesteros u. a. (2013). Als weitere praktische Anwendung dieser LPV-Ansätze wurde in Ballesteros u. a. (2014a, 2014b) ein AVC-System am KFZ erprobt. Dafür ist das Versuchsfahrzeug mit aktiven Tilgern direkt an den zwei Motorlagern ausgerüstet worden. Mit dem polytopen LPV-Ansatz und der Vereinfachung, Darstellung des Polytops durch ein Dreieck, konnten durch eine Umschaltstrategie mehrere Frequenzen in einem Motordrehzahlband unterdrückt werden.

$H_\infty$ -Synthesemethoden können instabile Regler optimieren, vor allem wenn das Störmodell Pole auf der  $j\omega$ -Achse aufweist. In der Simulation ist der geschlossene Regelkreis mit dem instabilen Regler stabil und erfüllt die Auslegungskriterien. Bei der experimentellen Durchführung tritt jedoch an der physikalischen Regelstrecke oftmals instabiles Verhalten auf. Grund dafür sind Diskretisierungs- sowie Quantisierungsfehler, die zu numerischen Problemen führen. In den Beiträgen Witte u. a. (2010), Balini u. a. (2011), Péni u. a. (2014) sowie Zhou und Doyle (1998) wird diese Tatsache diskutiert.

Das Auslösen von harmonischen Störungen durch eine Regelung, basierend auf dem internen Modellprinzip (engl.: *Internal Model Principle*, kurz IMP), oder durch einen adaptiven Steuerungsansatz (engl.: *Adaptive Feedforward Cancellation*, kurz AFC) wurde im Beitrag von Bodson u. a. (1994) einander gegenübergestellt. Eine Erweiterung dazu wurde mit einer indirekten/direkten Methode zur Unterdrückung von sinusförmigen Störungen mit unbekannter Frequenz von Bodson und Douglas (1997) vorgestellt. Bei der indirekten Methode wird mit einem adaptiven Kerbfilter (engl.: *Notch Filter*) die Frequenz geschätzt und unterdrückt, wohingegen bei der direkten Methode die Schätzwerte für die Frequenz sowie für die Amplitude durch ein Fehlersignal aktualisiert werden. Diese Methoden wurden an einer ANC-Anwendung (Mikrofon als Aufnehmer und Lautsprecher als Aktor) erprobt, siehe hierzu Bodson u. a. (2001). In Bodson (2001) sind die genannten Methoden mit zeitkontinuierlichen Algorithmen für den zeitdiskreten Fall erweitert worden.

Bei einem weiteren Ansatz, siehe Marino u. a. (2003), wird eine additive sinusförmige Störung mit unbekanntem Parametern durch einen (Ausgangs-)Rückkopplungskompensator (engl.: *Output Feedback Compensator*) unterdrückt. In diesem Beitrag ist die Störung durch ein Exosystem dritter Ordnung modelliert worden. Der Bias, die Phase, die konstante Amplitude sowie die Frequenz (mit unterer und oberer Schranke) sind nicht bekannt. Durch einen Beobachter werden die Unbekannten geschätzt und durch ein entsprechendes Regelgesetz rückgekoppelt. Anhand des Beispiels aus Bodson und Douglas (1997) wird durch Simulationsergebnisse die Kompensationsmethode verifiziert. Eine Erweiterung des IMP-Ansatzes für unbekannt periodische Störungen wurde in Brown und Zhang (2004)

entwickelt. Die zeitvarianten Reglerzustände des internen Modells werden im stationären Zustand in den zeitinvarianten Variablen *Amplitude* sowie *Störfrequenz* abgebildet.

### 1.3 Gliederung der Arbeit

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

- In **Abschnitt 2** wird das Störmodell detailliert entwickelt. Ausgehend von einem schwingungsfähigen System zweiter Ordnung ohne Dämpfung wird für den zeitkontinuierlichen sowie für den zeitdiskreten Fall ein zeitinvariantes Zustandsraummodell einer harmonischen Schwingung entworfen. Jedes dieser Modelle ist *Single-Input Single-Output* (SISO). Aus diesen Modellen entsteht ein zeitdiskretes Störmodell einer Sinusschwingung, das in den weiteren Ausführungen verwendet wird.
- Im darauffolgenden **Abschnitt 3** wird die erste Methode zur Parameterreduktion vorgestellt. Dabei garantiert der polytope LPV-Ansatz bei der Reglerberechnung Stabilität im Sinne von Ljapunow sowie ein Gütemaß an den geschlossenen Regelkreis in Form des  $H_\infty$ -Kriteriums. Nachdem zuerst auf die einschlägige Theorie zur Reglersynthese für polytope Systeme eingegangen wird, schließt sich im Folgenden die Vorstellung der Kosinusapproximation im Störmodell an. Durch diese Approximation kann die Darstellung beliebig vieler Frequenzen mit zwei variierenden Parametern erreicht werden. Im Anschluss wird daraufhin die verallgemeinerte polytope Strecke aufgestellt.
- **Abschnitt 4** befasst sich mit der zweiten Parameterreduktionsmethode für linear-fractionale Systeme. Zuvor finden alle dazu notwendigen theoretischen Grundlagen Erwähnung. Anschließend wird das Störmodell in eine LF-Form gebracht und das Modell vollständig approximiert. Daraus ergibt sich eine Aufhebung der Abhängigkeit ein variierender Parameter pro Frequenz und es wird nur noch ein variierender Parameter für beliebig viele Frequenzen im Störmodell benötigt. Zuletzt folgt die Aufstellung der für die Reglersynthese relevanten verallgemeinerten Strecke in LF-Form.
- In **Abschnitt 5** werden beide Ansätze in der Simulation getestet und validiert. Anhand des Modells einer Drosselklappe wird der polytope dem linear-fractionalen Ansatz gegenübergestellt. Hauptaugenmerke liegen dabei auf der Berechnung der LPV-Regler, der Komplexität des resultierenden Optimierungsproblems sowie der Erfüllung der Auslegungskriterien.
- Die Ergebnisse der Erprobung des AVC-Systems am KFZ unter Verwendung der Ansätze mit Parameterreduktion werden in **Abschnitt 6** gezeigt. Dafür wird das KFZ mit Messtechnik ausgestattet, das Regelstreckenmodell identifiziert und gemäß der beiden Ansätze ein entsprechender LPV-Regler berechnet und erprobt. Anhand der Spektrogramme von Messungen der Beschleunigungen am Querträger können

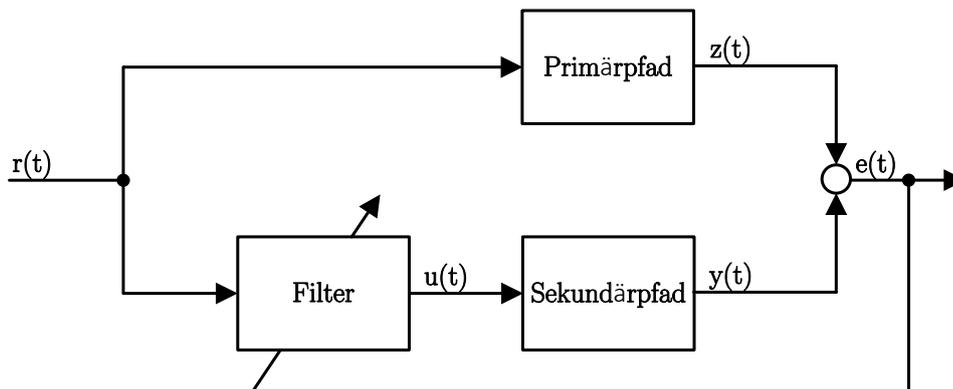
---

eindeutige Aussagen bezüglich der Verbesserung des Fahrkomforts in vordefinierten Motordrehzahlbereichen getroffen werden.

- Den Abschluss dieser Arbeit bildet **Abschnitt 7** mit einer Zusammenfassung der erhaltenen Ergebnisse sowie einem Ausblick.

## 2 Störmodell

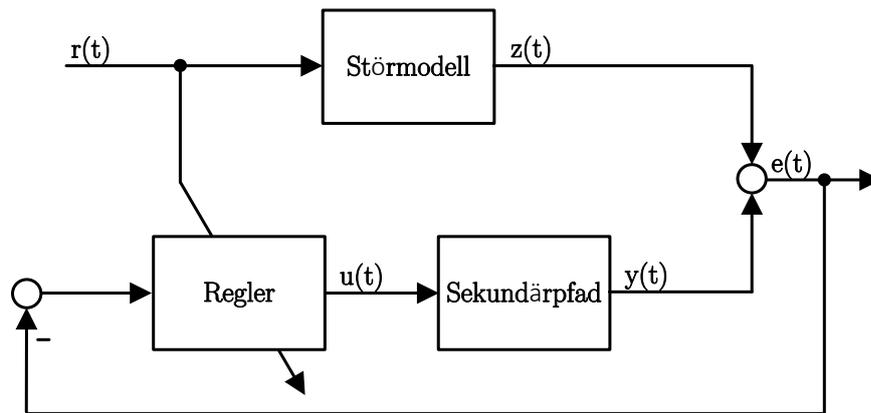
Diese Arbeit befasst sich mit der Entwicklung und Erprobung eines regelungstechnischen AVC-Ansatzes am KFZ. Hierfür stehen generell zwei Möglichkeiten zur Wahl, eine Steuerung oder eine Regelung. Allgemein lässt sich die Struktur einer adaptiven Steuerung folgendermaßen darstellen, siehe **Abbildung 2.1**. Die motorseitig erzeugten Schwingungen,



**Abbildung 2.1:** Struktur einer adaptiven Steuerung: Referenzsignal  $r(t)$ , durch den Primärpfad erzeugte Störung  $z(t)$ , vom adaptiven Filter generierte Stellgröße  $u(t)$ , durch den Sekundärpfad erzeugtes Kompensationssignal  $y(t)$  sowie das Fehlersignal  $e(t)$

hier  $r(t)$ , werden über das Getriebe, den Querträger sowie das Chassis (Primärpfad) in den Fahrgastinnenraum emittiert. Dies entspricht der Störung  $z(t)$ . Abhängig vom Fehlersignal  $e(t)$  werden die Parameter des Filters adaptiert und eine entsprechende Stellgröße  $u(t)$  für den Massenschwinger/Lautsprecher (Sekundärpfad) generiert. Das erzeugte Kompensationssignal  $y(t)$  eliminiert bestenfalls die Störung. Adaptive Steuerungen sind hinsichtlich Stabilität und Konvergenzverhalten kritisch zu betrachten, deshalb werden im Weiteren Regelungen verfolgt. In **Abbildung 2.2** ist die Struktur einer Regelung mit adaptivem Regler sowie einem integrierten Störmodell dargestellt. Die Störung  $z(t)$  wird durch das Störmodell generiert, wobei das Referenzsignal  $r(t)$  der Motordrehzahl entspricht. Dieses Signal wird zusätzlich zur Adaption des Reglers verwendet. Im Sekundärpfad wird durch die Stellgröße  $u(t)$  das Kompensationssignal erzeugt. Aufgrund der Sollwertregelung zu Null wird das Fehlersignal  $e(t)$  negativ zurückgeführt und dem Regler übergeben. Ziel der Regelung ist, durch Überlagerung von Störsignal  $z(t)$  und generiertem Kompensationssignal  $y(t)$ , eine Fehlerdifferenz  $e(t)$  gleich Null zu erreichen und somit die Störung vollständig zu eliminieren.

In den folgenden **Abschnitten 3** und **4** werden zur Reglersynthese modellbasierte Verfahren angewendet. Dafür ist es notwendig, für jede Komponente des geschlossenen Regelkreises ein einfaches Modell zu erstellen. In diesem Abschnitt wird das Störmodell

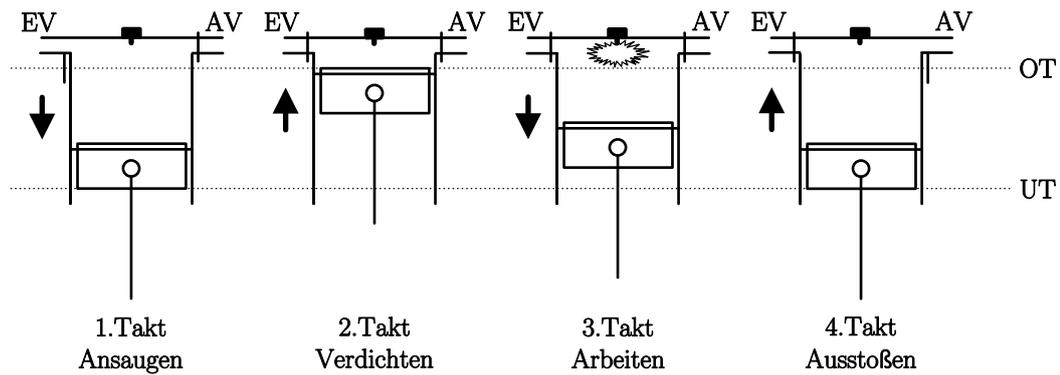


**Abbildung 2.2:** Struktur einer adaptiven Regelung mit Sollwertregelung zu Null: Referenzsignal  $r(t)$ , durch das Störmodell erzeugte Störung  $z(t)$ , adaptiver Regler mit Stellgröße  $u(t)$ , durch den Sekundärpfad erzeugtes Kompensationssignal  $y(t)$  sowie das Fehlersignal  $e(t)$

entwickelt. Die Störung ist bei dieser AVC-Anwendung von harmonischer Natur und es besteht eine Korrelation mit der Motordrehzahl des Kraftfahrzeugs. Ausgehend von der Motordrehzahl mit der Einheit  $[1/min]$  erhält man durch die Umrechnung in  $[1/s]$  die Motordrehfrequenz

$$f_{MOT} \left[ \frac{1}{s} \right] = n_{MOT} \cdot \frac{1}{60} \left[ \frac{1}{min} \frac{min}{s} \right], \quad (2.1)$$

die der 1. Motorordnung entspricht. Da es sich beim Verbrennungsmotor um einen Viertaktmotor handelt, durchläuft jeder Zylinder vier Arbeitstakte. Diese vier Takte sind für einen Zylinder in **Abbildung 2.3** schematisch dargestellt, siehe hierzu Borgeest (2010, S.42, Abb.4-2). Jeder Arbeitstakt wird in  $180^\circ$  Kurbelwellenwinkel durchlaufen, sodass der komplette Viertaktprozess  $720^\circ$  Kurbelwellenwinkel (zwei Umdrehungen) benötigt. Beim **ersten Takt** (Ansaugen) steht der Kolben am oberen Totpunkt (OT), das Einlassventil (EV) ist offen und das Auslassventil (AV) geschlossen. Der Kolben bewegt sich Richtung unteren Totpunkt (UT). Im Zylinder entsteht eine Raumvergrößerung und somit eine Druckdifferenz, sodass über das offene EV der Zylinder befüllt werden kann. Beim **zweiten Takt** (Verdichten) sind das EV sowie das AV geschlossen. Durch die Aufwärtsbewegung des Kolbens zum OT wird das Gemisch verdichtet. Im **dritten Takt** (Arbeiten) wird das Gemisch gezündet und der Kolben Richtung UT gedrückt, wobei mechanische Arbeit verrichtet wird. Im **vierten Takt** (Ausstoßen) öffnet das AV und die verbrannten Abgase werden durch die Aufwärtsbewegung des Kolbens aus dem Zylinder gedrückt.



**Abbildung 2.3:** Schematische Darstellung der Arbeitstakte eines Viertaktmotors bezogen auf einen Zylinder: Einlassventil (EV), Auslassventil (AV), oberer Totpunkt (OT) sowie unterer Totpunkt (UT)

Während des Viertaktprozesses (zwei Kurbelwellenumdrehungen) zündet der Zylinder nur einmal, somit ergibt sich die Zylinderzündfrequenz/Zündordnung zu

$$f_{Z_{Zyl}} \left[ \frac{1}{s} \right] = f_{MOT} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s} \right], \quad (2.2)$$

die der 0,5ten Motorordnung entspricht. Daraus folgt die Motorzündfrequenz

$$f_{Z_{MOT}} \left[ \frac{1}{s} \right] = f_{Z_{Zyl}} \cdot N_{Zyl} \left[ \frac{1}{s} \right] \quad (2.3)$$

für einen Motor mit  $N_{Zyl}$  Zylindern, wie in Zeller (2012, S.264) beschrieben. Demzufolge ist bei einem Vierzylindermotor die zweite Motorordnung dominierend.

Die motorseitig erzeugten Schwingungen, übertragen durch das Getriebe, den Querträger sowie das Chassis, lassen sich vereinfacht als überlagerte Schwingung, bestehend aus einer harmonischen Grundschwingung plus deren Oberwellen, modellieren. Im Detail ist diese Annahme nicht korrekt, da aufgrund von Materialeigenschaften einzelner Bauteile die Schwingungen frequenzverändert im Kraftfahrzeug emittiert werden. Abhängig von der Position der Schwingungsdetektion fehlen Oberwellen beziehungsweise sind diese nicht mehr ganzzahlig. Nichtsdestotrotz wird zur Vereinfachung für die Störung eine *überlagerte Schwingung aus harmonischen Einzelschwingungen* angenommen und dementsprechend modelliert.

## 2.1 Zeitkontinuierliches Modell einer harmonischen Schwingung

Ein harmonisches Signal mit einer Frequenz lässt sich am einfachsten durch einen Oszillator, ein System zweiter Ordnung ohne Dämpfung, modellieren. Die dazugehörige all-

gemeine Übertragungsfunktion eines schwingungsfähigen Systems zweiter Ordnung ist in Lutz und Wendt (2003, S.112) aufgeführt und lautet

$$G_{PT2}(s) = \frac{K_{PT2}\omega_0^2}{s^2 + 2D_{PT2}\omega_0s + \omega_0^2} \quad (2.4)$$

mit der Verstärkung  $K_{PT2}$ , der Dämpfungskonstanten  $D_{PT2}$ , der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems  $\omega_0 = 2\pi f$  und der Frequenz  $f$ . Mit den Annahmen  $K_{PT2} = 1$  und  $D_{PT2} = 0$  ergibt sich folgendes ungedämpftes System

$$G_{PT2_{un}}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} \quad (2.5)$$

mit einem konjugiert komplexen Polpaar bei  $s = \pm j\omega_0$ , was dem gesuchten Modell des Oszillators entspricht.

Dieses Modell Gl. (2.5) kann durch eine Zustandstransformation, gemäß Lutz und Wendt (2003, S.606), in Regelungsnormalform und somit in ein zeitinvariantes Zustandsraummodell überführt werden. Mit einer weiteren Zustandstransformation, siehe hierzu Skogestad und Postlethwaite (2001, S.513, Gl.A.21 und S.515, Gl.A.25), wird die Systemmatrix in Diagonalform gebracht und ist somit aus numerischer Sicht besser konditioniert. Das resultierende zeitinvariante Zustandsraummodell ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{PT2_{un}}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \omega_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{PT2_{un}}} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_{PT2_{un}}^T} \mathbf{x}(t), \quad (2.6)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , dem Eingang  $u \in \mathbb{R}$ , dem Ausgang  $y \in \mathbb{R}$  sowie den Systemmatrizen  $\mathbf{A}_{PT2_{un}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{b}_{PT2_{un}} \in \mathbb{R}^2$  und  $\mathbf{c}_{PT2_{un}} \in \mathbb{R}^2$ . Dabei bleibt das konjugiert komplexe Polpaar bei  $s = \pm j\omega_0$  unverändert, wie in Kinney und de Callafon (2006, S.4788f, Abschnitt II.B, Gl.2 und Gl.3) beschrieben.

Für den zeitvarianten Fall (mit veränderlicher Grundfrequenz) wird in Kinney und de Callafon (2006, S.4790, Abschnitt III.C) das zeitvariante Zustandsraummodell für den Oszillator Gl. (2.6) mit dem zeitabhängigen Frequenzanteil hergeleitet. Die entsprechenden Zustandsraummodelle für den zeitvarianten Fall sind in Kinney und de Callafon (2006, S.4790, Gl.11 und Gl.12) angegeben.

In diesem Unterabschnitt wurde das zeitkontinuierliche Modell einer harmonischen Schwin-

gung, ein Oszillator Gl. (2.6), für den zeitinvarianten Fall hergeleitet und auf den zeitvarianten Fall verwiesen. Da das Modell der Regelstrecke für die praktische Anwendung lediglich in zeitdiskreter Form vorliegt und die theoretischen Ansätze dementsprechend den zeitdiskreten Fall betrachten, wird im Folgenden das zeitdiskrete Modell einer harmonischen Schwingung entwickelt.

## 2.2 Zeitdiskretes Modell einer harmonischen Schwingung

In Anbetracht der praktischen Realisierung und Umsetzung auf einem Digitalrechner/-prozessor wird von einer idealen Abtastung und einem Halteglied nullter Ordnung ausgegangen.

### 2.2.1 Zeitdiskretes Modell einer Sinusschwingung (systembasierter Ansatz)

Die Herleitung des zeitdiskreten Modells für den invarianten Fall lässt sich kurzerhand mit Hilfe der Gleichungen aus Lunze (2008, S.438, Gl.11.22) und Unbehauen (2007, S.171), angewandt auf das zeitinvariante Zustandsraummodell Gl. (2.6), durchführen. Die dafür benötigte Transitionsmatrix  $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$  berechnet sich durch die inverse Laplacetransformation, siehe Unbehauen (2007, S.12, Gl.1.3.5), zu

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \} . \quad (2.7)$$

Das invariante, zeitdiskrete Zustandsraummodell einer ungedämpften Schwingung hat somit folgende Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\omega_0 T) & \sin(\omega_0 T) \\ -\sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 T) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{PT2dis}}} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1 - \cos(\omega_0 T)}{\omega_0^2} \\ \frac{\sin(\omega_0 T)}{\omega_0^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{\text{PT2dis}}} u(k) \\ y(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_{\text{PT2dis}}^T} \mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (2.8)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , dem Eingang  $u \in \mathbb{R}$ , dem Ausgang  $y \in \mathbb{R}$  sowie den Systemmatrizen  $\mathbf{A}_{\text{PT2dis}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{b}_{\text{PT2dis}} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{c}_{\text{PT2dis}} \in \mathbb{R}^2$  und der Abtastzeit  $T$ .

Dieses zeitdiskrete Modell Gl. (2.8) ist, aufgrund der nichtlinearen Sinus- und Kosinusfunktionen in den Systemmatrixeinträgen, für die kommenden Ausführungen und deren Zweck nicht von Nutzen. Die nichtlinearen Funktionen erschweren das Erstellen eines einfachen LPV-Modells mit geringer Anzahl an variierenden Parametern.

Es wurde ein zeitdiskretes Modell erstellt, das als Ausgangsgröße eine Sinusschwingung

generiert. Im Folgenden wird auf Basis des zu erzielenden Sinussignals das zeitdiskrete Modell entwickelt und somit eine signalbasierte Modellierung durchgeführt.

### 2.2.2 Zeitdiskretes Modell einer Sinusschwingung (signalbasierter Ansatz)

Ausgangspunkt ist das Zeitsignal einer sinusförmigen Schwingung

$$y(t) = A \sin(2\pi ft + \phi) \quad (2.9)$$

mit der Amplitude  $A$ , der konstanten Frequenz  $f$  und dem Winkel  $\phi$ . Mit Hilfe des Additionstheorem, siehe hierzu Hackbusch u. a. (1996, S.56), kann die Sinusfunktion des Zeitsignals in eine Summe zerlegt werden, somit erhält man

$$\begin{aligned} y(t) &= A \sin(2\pi ft + \phi) = A \sin(2\pi ft) \underbrace{\cos(\phi)}_{c_1} + A \underbrace{\sin(\phi)}_{c_2} \cos(2\pi ft) \\ &= Ac_1 \sin(2\pi ft) + Ac_2 \cos(2\pi ft) . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Diskretisiert man dieses Zeitsignal zu äquidistanten Abtastschritten  $t \equiv (kT = k)$ , ergibt sich die Zahlenfolge

$$y(kT) = Ac_1 \sin(2\pi f kT) + Ac_2 \cos(2\pi f kT) . \quad (2.11)$$

Mit der Annahme die Zahlenfolge Gl. (2.11) ist die Gewichtsfolge  $y(kT) = g(kT) * u(kT)$  auf den Einheitsimpuls  $u(kT) = \delta(kT)$  und der z-Transformierten für die Zahlenfolgen, siehe hierzu Unbehauen (2007, S.112 und S.114), erhält man die z-Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} \\ &= \frac{Ac_1 \frac{z \sin(2\pi fT)}{z^2 - 2z \cos(2\pi fT) + 1} + Ac_2 \frac{z^2 - z \cos(2\pi fT)}{z^2 - 2z \cos(2\pi fT) + 1}}{1} \\ &= A \left[ \frac{c_1 z \sin(2\pi fT) + c_2 (z^2 - z \cos(2\pi fT))}{z^2 - 2z \cos(2\pi fT) + 1} \right] \\ &= A \left[ \frac{z^{-1} c_1 \sin(2\pi fT) + c_2 (1 - z^{-1} \cos(2\pi fT))}{1 - z^{-1} 2 \cos(2\pi fT) + z^{-2}} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

für die Gewichtsfolge Gl. (2.11). Beidseitiges Ausmultiplizieren von Gl. (2.12) ergibt

$$Y(z) [1 - z^{-1} 2 \cos(2\pi fT) + z^{-2}] = U(z) A [c_2 + z^{-1} (c_1 \sin(2\pi fT) - c_2 \cos(2\pi fT))] . \quad (2.13)$$

Wendet man auf Gl. (2.13) den Rechtsverschiebungssatz nach Unbehauen (2007, Gl.2.3.10 und S.117f) an, erhält man folgende Differenzgleichung

$$y(k) - 2 \cos(2\pi fT)y(k-1) + y(k-2) = Ac_2 u(k) + A(c_1 \sin(2\pi fT) - c_2 \cos(2\pi fT))u(k-1). \quad (2.14)$$

Wählt man die Zustandsgrößen nach Unbehauen (2007, S.165, Gl.2.6.3), so kann Gl. (2.14) in das invariante, zeitdiskrete Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(2\pi fT) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_d} \mathbf{x}_d(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_d} u_d(k) \\ y_d(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -Ac_2 & A(c_1 \sin(2\pi fT) + c_2 \cos(2\pi fT)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_d^T} \mathbf{x}_d(k) + \underbrace{Ac_2}_{d_d} u_d(k) \end{aligned} \quad (2.15)$$

in Regelungsnormalform überführt werden, siehe hierzu Unbehauen (2007, S.165ff, Gl.2.6.5 und Gl.2.6.6). Mit den Annahmen  $A = 1$  und  $\phi = 0$  vereinfacht sich Gl. (2.15) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(2\pi fT) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_d} \mathbf{x}_d(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_d} u_d(k) \\ y_d(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \sin(2\pi fT) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}_d^T} \mathbf{x}_d(k). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Das Modell besitzt ein konjugiert komplexes Polpaar bei

$$z_{1,2} = \cos(2\pi fT) \pm j \sin(2\pi fT), \quad (2.17)$$

das durch eine beliebige Wahl des Eingangs- bzw. Ausgangsvektors unverändert bleibt. Die Frequenz  $f$  geht über die nichtlineare Kosinusfunktion in die Systemmatrix Gl. (2.16) im Matrixelement (2, 2) ein. Im Vergleich zum Modell mit Gl. (2.8) ist lediglich ein nicht-lineares Matrixelement vorhanden, sodass keine Frequenzabhängigkeiten zwischen den Zustandsgrößen bestehen.

### 2.2.3 Zeitdiskretes Störmodell einer überlagerten Schwingung mit $L$ Frequenzen (Multisinus)

Bisher wurden in diesem Abschnitt nur Modelle für eine harmonische Schwingung mit einer einzigen Frequenz aufgestellt. Im Folgenden wird wieder der Fall einer überlagerten Schwingung (Multisinus) mit mehreren Frequenzen als Störung betrachtet. Die Störung

besteht aus einer Welle mit Grundfrequenz plus deren Oberwellen. Grundlage ist das Modell Gl. (2.16), jedoch wird der Ausgangsvektor auf  $\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{d}}^T = [1 \ 0]$  skaliert. Die Pole des Modells bleiben dabei unverändert, einzig die Verstärkung wird angehoben und der Phasenwinkel vergrößert. Für das Störmodell ist ausschließlich das konjugiert komplexe Polpaar (die Systemmatrix bleibt dabei unverändert) entscheidend. Durch Parallelschaltung (beziehungsweise Überlagerung) von  $l = 1, 2, \dots, L$  dieser monofrequenten Sinusmodelle erhält man das zeitdiskrete Störmodell eines Multisinus

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k+1) &= \mathbf{A}_{\mathbf{D}}(f_l) \mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) + \mathbf{b}_{\mathbf{D}} u_{\mathbf{D}}(k) \\ y_{\mathbf{D}}(k) &= \mathbf{c}_{\mathbf{D}}^T \mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k), \end{aligned} \quad l = 1, \dots, L \quad (2.18)$$

mit den Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{D}}(f_l) &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(2\pi f_{l=1} T) \end{pmatrix} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \ddots & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(2\pi f_{l=L} T) \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b}_{\mathbf{D}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\mathbf{d}} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{\mathbf{d}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\mathbf{D}}^T = [\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{d}}^T \ \dots \ \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{d}}^T] \end{aligned} \quad (2.19)$$

und maximal  $L$  Frequenzen. Die Dimension der Systemmatrix  $\mathbf{A}_{\mathbf{D}}(f_l) \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$  ergibt sich aus der Anzahl an Frequenzen  $l = 1, \dots, L$ . Dieses Störmodell Gl. (2.18) und Gl. (2.19) wird für den Fall einer überlagerten Schwingung aus harmonischen Einzelschwingungen in den nächsten Abschnitten verwendet und entsprechend erweitert.

Diese hergeleiteten zeitdiskreten Störmodelle, Gl. (2.16) für eine Frequenz und Gl. (2.18) für  $L$  Frequenzen, sind jeweils zeitinvariant und berücksichtigen somit keine zeitvariierenden Frequenzen. Bei der Modellierung dieser Modelle wurde eine konstante Frequenz angenommen, jedoch wird beim polytopen LPV-Ansatz **Abschnitt 3** und dem linearfraktionalen LPV-Ansatz **Abschnitt 4** eine zeitvariierende Frequenz betrachtet. Somit müssten die Systemmatrizen entsprechend angepasst, beziehungsweise ein zeitvariantes Modell auf Basis von Gl. (2.8) erstellt werden. Der zeitvariierende Frequenzanteil für den zeitkontinuierlichen Fall

$$\alpha(t) := \omega_0(t)t + \phi, \quad (2.20)$$

siehe hierzu Kinney und de Callafon (2006, S.4790, Abschnitt III.C), sowie dessen zeitliche Ableitung

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \omega_0(t) + \dot{\omega}_0(t)t, \quad (2.21)$$

entspricht im Zeitdiskreten folgendem

$$\begin{aligned} \Delta\alpha(k+1) &= \alpha(k+1) - \alpha(k) = \\ &= \omega_0(k+1)(k+1) - \omega_0(k)(k) = \omega_0(k+1) + \Delta\omega_0(k+1)(k) \end{aligned} \quad (2.22)$$

und ist nicht konstant. In jedem Abtastschritt  $T$  ändert sich die Eigenfrequenz  $\omega_0(k+1)$  um  $\Delta\omega_0(k+1)(k)$ .

Ungeachtet dessen wird, in Bezug auf den praktischen Hintergrund der Störung, davon ausgegangen, dass die variierende Frequenz  $f_0(k)$  der Motordrehfrequenz  $f_{MOT}(k)$  aus Gl. (2.1) entspricht und somit

$$\omega_0(k) = 2\pi f_0(k) = 2\pi f_{MOT}(k) \quad (2.23)$$

gilt. Mit der Annahme, dass im Abtastschritt  $T$  die Motordrehzahl annähernd konstant ist und somit

$$\Delta\alpha(k+1) \approx \omega_0(k+1) + \underbrace{\Delta\omega_0(k+1)(k)}_{\approx 0} \quad (2.24)$$

gilt, behalten die Störmodelle Gl. (2.16) und Gl. (2.18) mit langsam variierender Frequenz ihre Gültigkeit. Aus Gl. (2.1) ist sofort ersichtlich, dass  $60 [U/min] = 1 [Hz]$  entsprechen. Ein Sprung in der Motordrehzahl  $n_{MOT}$  von  $60 [U/min]$  in einem einzigen Abtastschritt ist bei der praktischen Anwendung nicht relevant. Daraus lässt sich folgern, dass man die invarianten, zeitdiskreten Modelle (mit einer Sinusschwingung Gl. (2.16) und aus überlagerten Sinusschwingungen Gl. (2.18)) ohne Weiteres für die LPV-Ansätze verwenden kann. Bei schnellen Frequenzänderungen in der Störung, muss in der Anwendung beziehungsweise in Vorabsimulationen getestet werden, ob alle Performance- sowie Stabilitätskriterien erfüllt sind. Diese Modelle werden ebenso in den Beiträgen Bohn u. a. (2004), Ballesteros und Bohn (2011a, 2011b), Shu u. a. (2011, 2013) sowie Duarte u. a. (2013) verwendet und haben sich in praktischen Anwendungen bewährt.

#### 2.2.4 Zeitdiskretes Störmodell für die numerische Reglerberechnung

Für die praktische Anwendung wird mittels Optimierungsalgorithmen der Regler numerisch berechnet. Die im Störmodell spezifizierten Frequenzen, konkret die Pole des Störmodells, tauchen wieder als Pole im Regler auf und entsprechen somit den Nullstellen in der Störübertragungsfunktion. Wie aus Gl. (2.17) ersichtlich wird, liegen die Pole des

Störmodells für eine Sinusschwingung auf dem Einheitskreis. Das bedeutet, dass diese vorgegebenen Frequenzen im Frequenzgang eine unendliche Verstärkung aufweisen. Nullstellen mit unendlicher Verstärkung, also Unstetigkeitsstellen, sind für die numerische Berechnung des Reglers nicht zulässig. Der Algorithmus ist nicht durchführbar und die numerische Berechnung bricht ab.

Aufgrund dessen müssen für die Reglerberechnung die Pole des Störmodells in den Einheitskreis, wie in Heins u. a. (2011, S.132, Ab.5.1) angegeben, verschoben werden. Dadurch wird verhindert, dass eine unendliche Verstärkung an den Frequenzen der Reglerpole auftritt. Aus dem monofrequenten Störmodell Gl. (2.16) folgt die Zustandsraumdarstellung für das angepasste Störmodell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\epsilon) & 2\cos(2\pi fT) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{d\epsilon}} \mathbf{x}_d(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{d\epsilon}} u_d(k) \\ y_d(k) &= \underbrace{[1 \quad 0]}_{\mathbf{c}_{d\epsilon}^T} \mathbf{x}_d(k), \end{aligned} \quad (2.25)$$

mit  $\epsilon \ll 1$ , aber größer Null. Entsprechend ergibt sich für das multifrequente Störmodell Gl. (2.18) die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_D(k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{d\epsilon}(f_{l=1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{d\epsilon}(f_{l=L}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_D(f_l)} \mathbf{x}_D(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{d\epsilon} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{d\epsilon} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{D\epsilon}} u_D(k) \\ y_D(k) &= \underbrace{[\mathbf{c}_{d\epsilon}^T \quad \cdots \quad \mathbf{c}_{d\epsilon}^T]}_{\mathbf{c}_{D\epsilon}^T} \mathbf{x}_D(k), \quad l = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (2.26)$$

In diesem Abschnitt wurde ein zeitkontinuierliches sowie ein zeitdiskretes Störmodell für eine harmonische Schwingung (ein Oszillator) hergeleitet. Aus diesen Ergebnissen wurde ein invariantes, zeitdiskretes Störmodell einer Sinusschwingung entwickelt und aus numerischen Gründen entsprechend angepasst. Dieses Modell wurde erweitert und durch Parallelschaltung ein Störmodell aus beliebig vielen überlagerten harmonischen Einzelschwingungen erstellt, das in den weiteren Abschnitten für die Reglersynthese verwendet wird.

### 3 Polytope LPV-Ansatz mit zwei Parametern

In diesem Abschnitt wird der polytope, lineare parameter-variierende (LPV) Ansatz zur Reglerberechnung vorgestellt. Regelstrecken mit Parametern, die in einem Intervall mit unterer und oberer Schranke variieren, können so formuliert werden, dass die Werte der variierenden Parameter in einem Polytop mit  $p$  Ecken liegen. Für diese Strecken kann ein entsprechender LPV-Regler nach dem  $H_\infty$ -Kriterium ausgelegt werden. Mit jedem variierenden Parameter wächst das Polytop um zwei Ecken an. Abhängig von der Art der Anwendung hat die Strecke eine große Anzahl an variierenden Parametern und somit auch an Ecken. Da die Komplexität bei der Reglerberechnung mit der Anzahl der Ecken steigt und dadurch die Wahrscheinlichkeit für das Finden einer numerischen Lösung sinkt, ist man bestrebt, die Parameteranzahl so gering wie möglich zu halten. Im Folgenden wird eine Methode für die praktische Anwendung *Aktive Schwingungskompensation harmonischer Schwingungen* vorgestellt, bei der nur zwei variierende Parameter, unabhängig von der eigentlichen Parameteranzahl, benötigt werden. Anfangs werden die theoretischen Grundlagen zur LPV-Reglerberechnung erläutert. Anschließend wird die Methode zur Parameterreduktion detailliert hergeleitet und die parameterreduzierte LPV-Regelstrecke mit zwei variierenden Parametern aufgestellt.

#### 3.1 Theoretische Grundlagen des polytopen Ansatzes

Zuerst werden die zwei grundlegenden Definitionen der  $H_2$ - und der  $H_\infty$ -Norm aufgeführt, geltend für Systeme mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$ , die keine Pole auf der Imaginärachse (Realteile der Pole  $< 0$ ) aufweisen und für die der Zählergrad  $m$  kleiner oder gleich dem Nennergrad  $n$  ( $m \leq n$ ) gilt.

Die  **$H_2$ -Norm** für zeitkontinuierliche Systeme, siehe Maciejowski (1989, S.99, Gl.3.68), ist definiert als

$$\|G(s)\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(G(j\omega)G^T(-j\omega))d\omega}, \quad (3.1)$$

mit  $\text{tr}(\mathbf{M})$  für die Spur der Matrix  $\mathbf{M}$ , siehe hierzu Hackbusch u. a. (1996, S.638).

Des Weiteren lautet die Definition für die  **$H_\infty$ -Norm**, siehe Maciejowski (1989, S.99, Gl.3.69),

$$\|G(s)\|_\infty := \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (3.2)$$

mit  $\bar{\sigma}(\mathbf{M})$ , dem maximalen Singulärwert der Matrix  $\mathbf{M}$ , siehe hierzu Hackbusch u. a. (1996, S.1118).

Hingegen wird für zeitdiskrete Systeme die  $H_\infty$ -Norm, gemäß Packard (1994, S.80), durch

$$\|G(z)\|_\infty := \sup_{\phi \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma}(G(e^{j\phi})) = \sup_{|z| \geq 1} \bar{\sigma}(G(z)) \quad (3.3)$$

definiert. Im Frequenzgang, im Falle eines Eingrößensystems (SISO), entspricht die  $H_\infty$ -Norm der maximalen Amplitude über allen Frequenzen.

Die  $H_\infty$ -Norm ist im eigentlichen Sinne keine Systemnorm, wie in Gl. (3.1) bis Gl. (3.3) definiert, sondern eine induzierte Signal-2-Norm. Demzufolge kann die  $H_\infty$ -Norm für den zeitdiskreten Fall auch als induzierte  **$\mathcal{L}_2$ -Norm**

$$\|G\|_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{u \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} y^T(k)y(k)}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} u^T(k)u(k)}} \quad (3.4)$$

definiert werden, siehe hierzu Stoorvogel u. a. (1994, S.1936), mit der Signal-2-Norm des Energieeingangssignals  $\|u\|_2$  und des Energieausgangssignals  $\|y\|_2$ . Für eine induzierte  $\mathcal{L}_2$ -Systemverstärkung von  $\|G\|_\infty < \gamma$  ergibt sich durch Gl. (3.4) folgende Ungleichung

$$\|G\|_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} y^T(k)y(k)}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} u^T(k)u(k)}} < \gamma. \quad (3.5)$$

Im folgenden Unterabschnitt wird die Beschränkung der  $\mathcal{L}_2$ -Systemverstärkung, ausgedrückt in Form des  $H_\infty$ -Kriteriums Gl. (3.5), in eine algebraische Riccati-Ungleichung (*engl.: Algebraic Riccati Inequality*, kurz ARI) umgewandelt und dann in eine lineare Matrixungleichung (*engl.: Linear Matrix Inequality*, kurz LMI) überführt. Die allgemeine Form einer LMI ist gegeben durch

$$\mathbf{M}_{\text{Lmi}}(\mathbf{v}) \triangleq \mathbf{M}_{\text{Lmi}0} + \sum_{i=1}^m v_i \mathbf{M}_{\text{Lmi}i} > 0, \quad (3.6)$$

siehe Boyd u. a. (1994, S.7, Gl.2.1), mit den Entscheidungsvariablen  $v_i \in \mathbb{R}$  und den symmetrischen Matrizen  $\mathbf{M}_{\text{Lmi}i} = \mathbf{M}_{\text{Lmi}i}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  für  $i = 0 \dots m$ .

### 3.1.1 Ljapunow-Stabilität in Kombination mit dem $H_\infty$ -Kriterium für zeitdiskrete Systeme

Das autonome, zeitdiskrete System in Zustandsraumdarstellung

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(k=0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{u}(k) = \mathbf{0}, \quad (3.7)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , ist stabil im Sinne von Ljapunow, wenn die Ungleichung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} < 0 \quad (3.8)$$

erfüllt ist. Darin ist  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ , mit  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , die symmetrische und positiv definite Ljapunow-Matrix der quadratischen Funktion  $V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k)$ , siehe **Anhang (Stabilität)**, angewandt auf zeitdiskrete Systeme.

Gegeben ist das lineare zeitdiskrete System (SISO), siehe De Oliveira u. a. (2002, S.666, Gl.1 und Gl.2),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + d u(k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , den entsprechenden Systemmatrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  und  $d \in \mathbb{R}$ , dem Eingang  $u$  sowie dem Ausgang  $y$ . Mit Hilfe des *Bounded Real Lemma* (BRL) lässt sich das  $H_\infty$ -Kriterium Gl. (3.5) kombiniert mit Stabilität im Sinne von Ljapunow in Form einer Matrizenungleichung darstellen.

**Lemma 1: BRL** (Gahinet und Apkarian, 1994, S.432, Lemma 5.1)

*Betrachtet wird eine zeitdiskrete Übertragungsfunktion  $T(z)$  mit (nicht zwingend) Minimalrealisierung  $T(z) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i)  $\|\mathbf{D} + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\|_\infty < 1$  und  $\mathbf{A}$  ist stabil im zeitdiskreten Sinn ( $|\lambda_i(\mathbf{A})| < 1$ ),

(ii)

$$\inf_{\mathbf{T} \text{ invertierbar}} \sigma_{\max} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} & \mathbf{T} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} & \mathbf{D} \end{bmatrix} < 1,$$

(iii)

$$\text{es existiert ein } \mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0, \text{ sodass } \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{A} - \mathbf{X} & \mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{B} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{X} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{X} \mathbf{B} - \mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0,$$

(iv)

$$\text{es existiert ein } \mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0, \text{ sodass } \begin{bmatrix} -\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T & -\mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0.$$

Wendet man **Lemma 1** (Aussage iv) auf das zeitdiskrete SISO-System Gl. (3.9) mit dem  $H_\infty$ -Kriterium Gl. (3.5) an, erhält man folgende Matrixungleichung

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A} & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T & -\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{0} & -\gamma & d \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}^T & d & -\gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (3.10)$$

siehe hierzu Apkarian u. a. (1994, S.857, Gl.3.2), mit der Ljapunow-Matrix  $\mathbf{X} = \mathbf{P}$ . Die Matrixungleichung Gl. (3.10) hat, aufgrund der inversen Ljapunow-Matrix  $\mathbf{P}^{-1}$  im Eintrag (1, 1), keine lineare Matrixform, siehe Gl. (3.6). Multipliziert man Gl. (3.10) mit der negativen Einheitsmatrix entsprechender Dimension und ersetzt die inverse Ljapunow-Matrix durch die Variable  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$ , ergibt sich die Matrixungleichung

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{A} & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T & \tilde{\mathbf{P}}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{0} & \gamma & d \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}^T & d & \gamma \end{bmatrix} > 0 \quad (3.11)$$

mit positiven Diagonaleinträgen, an die positive Definitheit gefordert wird. Durch Finden einer Lösung für die Matrixungleichung Gl. (3.11) in der Variablen  $\tilde{\mathbf{P}}$ , mit der Bedingung  $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$ , erhält man den Nachweis für das SISO-System Gl. (3.9), dass es stabil im Sinne von Ljapunow ist und die  $\mathcal{L}_2$ -Systemverstärkung kleiner  $\gamma$  beträgt, siehe **Lemma 1 (BRL)**. Da es sich hier um keine LMI handelt, ist das Finden einer Lösung zum einem schwierig und zum anderen nicht mit Standardmethoden durchführbar.

### 3.1.2 Erweitertes $H_\infty$ -Kriterium mit polytoper Systemunsicherheit

Im nächsten Schritt wird die Matrixungleichung Gl. (3.11) in eine LMI umgewandelt, sodass *LMI-Solver* zum Lösen des Optimierungsproblems verwendet werden können und durch das erweiterte  $H_\infty$ -Kriterium eine weniger konservative Lösung gefunden wird. Hierzu führt man die Hilfsmatrix  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ein, beschrieben in De Oliveira u. a. (1999, 2002), und erweitert somit durch den gewonnenen Freiheitsgrad den möglichen Lösungsbereich. In Bezug auf das **BRL** aus dem vorherigen Unterabschnitt wird die Matrixungleichung Gl. (3.11) links- und rechtsseitig mit  $\tilde{\mathbf{G}}$  multipliziert

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{G}}^T} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{A} & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T & \tilde{\mathbf{P}}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{0} & \gamma & d \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}^T & d & \gamma \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{G}}} > 0 \quad (3.12)$$

und man erhält

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{A}\mathbf{G} & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T\mathbf{A}^T & \mathbf{G}^T\tilde{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^T\mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{0} & \gamma & d \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}^T\mathbf{G} & d & \gamma \end{bmatrix} > 0. \quad (3.13)$$

Die Multiplikation zwischen Hilfsmatrix  $\mathbf{G}$  und Ljapunow-Matrix  $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$  im Matrixelement (2, 2) wird durch die Beziehung  $\mathbf{G}^T\tilde{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{G} \geq \mathbf{G} + \mathbf{G}^T - \tilde{\mathbf{P}}$  ersetzt, siehe hierzu De Oliveira u. a. (2002, Theorem 2 mit Beweis). Man erhält einen linearen Zusammenhang (keine inverse Matrix mehr vorhanden) und es entsteht somit die erweiterte LMI

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{A}\mathbf{G} & \mathbf{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T\mathbf{A}^T & \mathbf{G} + \mathbf{G}^T - \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^T\mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{0} & \gamma & d \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}^T\mathbf{G} & d & \gamma \end{bmatrix} > 0. \quad (3.14)$$

Die erhaltene Lösung für die Hilfsvariablen  $\tilde{\mathbf{P}}$  und  $\mathbf{G}$ , aus der LMI Gl. (3.14), ist weniger konservativ und erfüllt das vorab definierte Stabilitäts- und  $H_\infty$ -Kriterium.

Alle bisher erhaltenen Ergebnisse lassen sich ohne Weiteres auf Systeme mit variierenden Parametern erweitern, abgeleitet von Scherer und Weiland (2000, S.130ff, Ab.5.1.1 und Ab. 5.1.2).

Gegeben ist das zeitvariante, parameter-variierende System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(\theta(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}(\theta(k))u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T(\theta(k))\mathbf{x}(k) + d(\theta(k))u(k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

in einer polytopen Darstellung mit den Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\theta(k)) &= \mathbf{A}_0 + \theta_1(k)\mathbf{A}_1 + \dots + \theta_p(k)\mathbf{A}_p, \\ \mathbf{b}(\theta(k)) &= \mathbf{b}_0 + \theta_1(k)\mathbf{b}_1 + \dots + \theta_p(k)\mathbf{b}_p, \\ \mathbf{c}^T(\theta(k)) &= \mathbf{c}_0^T + \theta_1(k)\mathbf{c}_1^T + \dots + \theta_p(k)\mathbf{c}_p^T \quad \text{und} \\ d(\theta(k)) &= d_0 + \theta_1(k)d_1 + \dots + \theta_p(k)d_p, \end{aligned} \quad (3.16)$$

die affin vom Parameter  $\theta$  abhängig sind. Die Parameter variieren in dem Polytop mit  $p$  Ecken. Fasst man die einzelnen Matrizen durch

$$\mathbf{S}(\theta(k)) := \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta(k)) & \mathbf{b}(\theta(k)) \\ \mathbf{c}^T(\theta(k)) & d(\theta(k)) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

zusammen, so ergibt sich für das polytope System folgende parameterabhängige Form

$$\mathbf{S}(\theta(k)) = \mathbf{S}_0 + \theta_1(k)\mathbf{S}_1 + \dots + \theta_p(k)\mathbf{S}_p. \quad (3.18)$$

Daraus entsteht das polytope, parameter-variiierende Objekt

$$\mathbf{S}(\theta(k)) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\theta(k))\mathbf{S}_i, \quad (3.19)$$

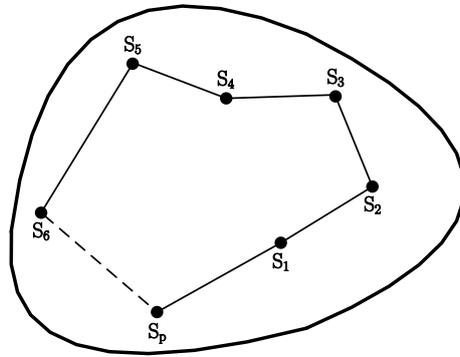
sodass mit der Funktion  $\alpha_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  und  $\sum_{i=1}^p \alpha_i(\theta(k)) = 1$  für jedes  $\theta(k) \in \mathbb{R}$  eine konvexe Kombination von  $\mathbf{S}_i$  Einzelobjekten besteht. Des Weiteren gehören die  $\mathbf{S}_i$  zu der konvexen Hülle

$$\mathbf{S}(\theta(k)) \in \text{conv}(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_p), \quad \theta(k) \in \mathbb{R} \quad (3.20)$$

mit

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{b}_i \\ \mathbf{c}_i^T & d_i \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, p. \quad (3.21)$$

Für jede Ecke  $p$  gibt es in der konvexen Hülle ein LTI-System mit konstanten Systemmatrizen  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{b}_i$ ,  $\mathbf{c}_i^T$  und  $d_i$  entsprechender Dimension, siehe **Abbildung 3.1**.



**Abbildung 3.1:** Polytop mit  $p$  Ecken in der konvexen Hülle

In Anlehnung an Gl. (3.14) gilt für ein parameter-variiierendes, polytopes System Gl. (3.15) die  $H_\infty$ -Norm  $\|G\|_\infty < \gamma$ , wenn folgende LMI

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_i & \mathbf{A}_i \mathbf{G} & \mathbf{b}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{A}_i^T & \mathbf{G} + \mathbf{G}^T - \tilde{\mathbf{P}}_i & \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{c}_i \\ \mathbf{b}_i^T & \mathbf{0} & \gamma & d_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_i^T \mathbf{G} & d_i & \gamma \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (3.22)$$

erfüllt wird, siehe hierzu De Oliveira u. a. (2002, Theorem 4 mit Beweis), sowie mit einer quadratischen Ljapunow-Funktion mit parameter-variiender Ljapunow-Matrix

$$\tilde{\mathbf{P}}(\theta(k)) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\theta(k)) \tilde{\mathbf{P}}_i \quad (3.23)$$

aus der konvexen Hülle

$$\tilde{\mathbf{P}}(\theta(k)) \in \text{conv}(\tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_p), \quad \theta(k) \in \mathbb{R} \quad (3.24)$$

alle symmetrischen Matrizen  $\tilde{\mathbf{P}}_i = \tilde{\mathbf{P}}_i^T = \mathbf{P}_i^{-1} > 0$  für  $i = 1, \dots, p$  und die Hilfsmatrix  $\mathbf{G}$  existieren. Das bedeutet, dass nicht eine Ljapunow-Matrix für alle Ecken existieren muss, sondern für jede Ecke eine separate Ljapunow-Matrix gesucht wird. Das erleichtert das Finden einer Lösung, indem der Lösungsbereich erweitert wird und folglich das Verfahren an Konservativität verliert.

### 3.1.3 Berechnung eines $H_\infty$ -Reglers für polytope LPV-Systeme

In diesem Unterabschnitt wird ein LPV-Regler für das System Gl. (3.25) entwickelt, der zum einen Stabilität im Sinne von Ljapunow garantiert und zum anderen die entsprechenden  $H_\infty$ -Kriterien, siehe **Unterabschnitt 3.1.2**, erfüllt.

Gegeben ist die lineare parameter-variiende, zeitdiskrete Strecke in Zustandsraumdarstellung

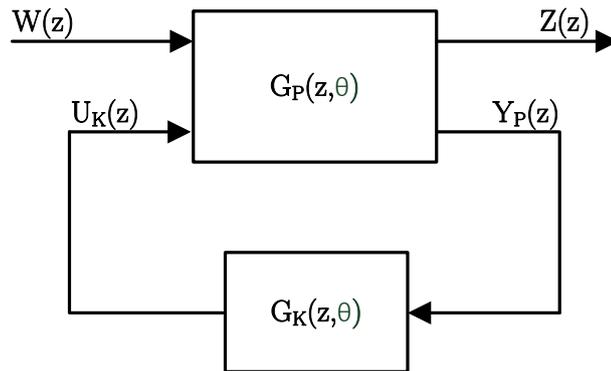
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_P(k+1) &= \mathbf{A}_P(\theta(k))\mathbf{x}_P(k) + \mathbf{b}_1(\theta(k))w(k) + \mathbf{b}_2u_K(k) \\ z(k) &= \mathbf{c}_1^T(\theta(k))\mathbf{x}_P(k) + d_{11}(\theta(k))w(k) + d_{12}u_K(k) \\ y_P(k) &= \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}_P(k) + d_{21}w(k) \end{aligned} \quad (3.25)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_P \in \mathbb{R}^n$ , den Systemmatrizen  $\mathbf{A}_P(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b}_1(\theta(k)) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c}_1(\theta(k)) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_{11}(\theta(k)) \in \mathbb{R}$ ,  $d_{12} \in \mathbb{R}$ ,  $d_{21} \in \mathbb{R}$ , dem Eingang  $u_K \in \mathbb{R}$  (Reglerausgang), dem exogenen Eingang  $w \in \mathbb{R}$ , dem Ausgang  $y_P \in \mathbb{R}$  (Messgröße, Reglereingang) sowie dem exogenen Ausgang  $z \in \mathbb{R}$ .

Der dazugehörige dynamische LPV-Regler hat folgende Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_K(k+1) &= \mathbf{A}_K(\theta(k))\mathbf{x}_K(k) + \mathbf{b}_K(\theta(k))y_P(k) \\ u_K(k) &= \mathbf{c}_K^T(\theta(k))\mathbf{x}_K(k) + d_K(\theta(k))y_P(k) \end{aligned} \quad (3.26)$$

mit  $\mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{A}_K(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $\mathbf{b}_K(\theta(k)) \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{c}_K(\theta(k)) \in \mathbb{R}^k$  und  $d_K(\theta(k)) \in \mathbb{R}$ . Der geschlossene LPV-Regelkreis ist im Blockschaltbild **Abbildung 3.2** dargestellt. Der Zusammenschluß zwischen Regler und Strecke zum geschlossenen Regelkreis ergibt folgendes zusammengefasstes System, in Anlehnung an De Oliveira u. a. (2002, S.671, LTI-Fall



**Abbildung 3.2:** Blockschaltbild des geschlossenen LPV-Regelkreises: Strecke  $G_P(z, \theta)$  mit polytoper Unsicherheit  $\theta$  mit den Eingängen  $U_K(z)$  (Reglerausgang) und  $W(z)$  (exogener Eingang), den Ausgängen  $Y_P(z)$  (Reglereingang) und  $Z(z)$  (exogener Ausgang) sowie LPV-Regler  $G_K(z, \theta)$

Gl.31 und Gl.32),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{cl}}(k+1) &= \mathbf{A}_{\text{cl}}(\theta(k))\mathbf{x}_{\text{cl}}(k) + \mathbf{b}_{\text{cl}}(\theta(k))w(k) \\ z(k) &= \mathbf{c}_{\text{cl}}^T(\theta(k))\mathbf{x}_{\text{cl}}(k) + d_{\text{cl}}(\theta(k))w(k) \end{aligned} \quad (3.27)$$

mit dem zusammengefassten Zustandsvektor, siehe hierzu De Oliveira u. a. (2002, S.671, Gl.30),

$$\mathbf{x}_{\text{cl}}(k) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{P}}(k) \\ \mathbf{x}_{\text{K}}(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k} \quad (3.28)$$

sowie den zusammengefassten Systemmatrizen, in Anlehnung an De Oliveira u. a. (2002, S.671, LTI-Fall Gl.31 und Gl.32),

$$\mathbf{A}_{\text{cl}}(\theta(k)) := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{P}}(\theta(k)) + \mathbf{b}_2 d_K(\theta(k)) \mathbf{c}_2^T & \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_{\text{K}}^T(\theta(k)) \\ \mathbf{b}_{\text{K}}(\theta(k)) \mathbf{c}_2^T & \mathbf{A}_{\text{K}}(\theta(k)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{\text{cl}}(\theta(k)) := \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(\theta(k)) + \mathbf{b}_2 d_K(\theta(k)) d_{21} \\ \mathbf{b}_{\text{K}}(\theta(k)) d_{21} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_{\text{cl}}^T(\theta(k)) := [\mathbf{c}_1^T(\theta(k)) + d_{12} d_K(\theta(k)) \mathbf{c}_2^T \quad d_{12} \mathbf{c}_{\text{K}}^T(\theta(k))] \quad \text{und}$$

$$d_{\text{cl}}(\theta(k)) := [d_{11}(\theta(k)) + d_{12} d_K(\theta(k)) d_{21}]. \quad (3.29)$$

Im Weiteren wird die Übertragungsfunktion vom exogenen Eingang  $W(z)$  zum exogenen Ausgang  $Z(z)$  als  $G_{wz}(z, \theta)$  bezeichnet. Bildet man aus dem zusammengefassten System Gl. (3.27)-(3.29) das parameter-variiierende, polytope Objekt

$$\mathbf{M}_{\text{cl}}(\theta(k)) := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{cl}}(\theta(k)) & \mathbf{b}_{\text{cl}}(\theta(k)) \\ \mathbf{c}_{\text{cl}}^T(\theta(k)) & d_{\text{cl}}(\theta(k)) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \alpha_i(\theta(k)) \mathbf{M}_{\text{cl}_i} \quad (3.30)$$

mit der konvexen Hülle

$$\mathbf{M}_{\text{cl}}(\theta(k)) \in \text{conv}(\mathbf{M}_{\text{cl}_1}, \dots, \mathbf{M}_{\text{cl}_p}) \quad \text{und} \quad \theta(k) \in \mathbb{R}, \quad (3.31)$$

siehe dazu Gl. (3.17)-(3.21), so lassen sich die Herleitungen aus **Unterabschnitt 3.1.2** folgendermaßen erweitern. Zunächst definiert man die erweiterte Hilfsmatrix und deren Inverse

$$\bar{\mathbf{G}} := \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \star \\ \mathbf{U} & \star \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}, \quad \bar{\mathbf{G}}^{-1} := \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^T & \star \\ \mathbf{V}^T & \star \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}, \quad (3.32)$$

mit den potentiellen Optimierungsmatrizen  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  sowie den beliebigen Matrixeinträgen  $\star$  entsprechender Dimension, siehe hierzu De Oliveira u. a. (2002, S.671, Gl.33). Im nächsten Schritt ersetzt man die Matrizen des Systems Gl. (3.15) durch die zusammengefassten Matrizen des Systems Gl. (3.27) und setzt diese in die LMI mit dem erweiterten  $H_\infty$ -Kriterium Gl. (3.22) ein. Dies hat zur Folge, dass nichtlineare Zusammenhänge, in Form von Multiplikationen zwischen den Reglermatrizen und der Ljapunow-Matrix (das heißt, Multiplikationen zwischen Optimierungsvariablen), entstehen. Diese Multiplikationen zwischen den Reglermatrizen und der Ljapunow-Matrix führen zu bilinearen Matrixungleichungen (*engl.: Bilinear Matrix Inequality*, kurz BMI), wodurch die Lösbarkeit mit herkömmlichen LMI-Optimierungsverfahren nicht möglich ist und somit weitere Maßnahmen durchgeführt werden müssen. Hingegen sind Multiplikationen zwischen den Systemmatrizen, zwischen Systemmatrizen mit den Reglermatrizen oder zwischen den Systemmatrizen und der Ljapunow-Matrix unproblematisch. Mit Hilfe der Transformation, siehe Scherer u. a. (1997) sowie De Oliveira u. a. (2002), verändert man die Matrixvariablen, was zu linearisierenden Eigenschaften in der Reglersynthese führt (BMIs werden zu LMIs: Multiplikationen zwischen den Reglermatrizen und der Ljapunow-Matrix werden aufgelöst).

Mit der Transformationsmatrix, gegeben in De Oliveira u. a. (2002, S.671, Gl.34),

$$\mathbf{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)} \quad (3.33)$$

und den Identitäts-Transformationen, siehe hierzu De Oliveira u. a. (2002, S.671, Gl.36, Gl.38 bis Gl.40),

erhält man die erweiterte Ljapunow-Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}(\theta(k)) & \mathbf{J}(\theta(k)) \\ \mathbf{J}^T(\theta(k)) & \mathbf{H}(\theta(k)) \end{bmatrix} := \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{P}}(\theta(k)) \mathbf{T} \quad (3.34)$$

sowie die erweiterten Systemmatrizen

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}^T \mathbf{A}_{cl}(\theta(k)) \bar{\mathbf{G}} \mathbf{T}, \\ & \mathbf{T}^T \mathbf{b}_{cl}(\theta(k)), \\ & \mathbf{c}_{cl}^T(\theta(k)) \bar{\mathbf{G}} \mathbf{T} \quad \text{und} \\ & d_{cl}(\theta(k)) \end{aligned} \quad (3.35)$$

für den geschlossenen Regelkreis. Entsprechend wird das erweiterte  $H_\infty$ -Kriterium, siehe De Oliveira u. a. (2002), durch

$$\mathbf{T}^T (\bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{G}}^T - \tilde{\mathbf{P}}(\theta(k))) \mathbf{T} \quad (3.36)$$

berücksichtigt und durch links- und rechtsseitige Multiplikation mit der Transformationsmatrix Gl. (3.33) angepasst. Multipliziert man infolgedessen die LMI Gl. (3.22) links- und rechtsseitig mit  $\bar{\mathbf{T}}^T$  und  $\bar{\mathbf{T}} := \text{diag}[\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{I}_{n+k}, \mathbf{I}_{n+k}]$ , siehe hierzu De Oliveira u. a. (2002, S.672), so spaltet man die bilinearen Multiplikationen zwischen den Reglermatrizen und der Ljapunow-Matrix auf und man erhält lineare Zusammenhänge. Aus den BMIs entstehen LMIs. Dabei bilden die zu optimierenden Matrizen  $\mathbf{J}(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{H}(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{Z}(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die erweiterte Ljapunow-Matrix Gl. (3.34).

Aus De Oliveira u. a. (2002, S.672, Theorem 8, LTI-Fall Gl.45), Mukhtar und Herbert (2011, S.7710, Ab.3.2), Abbas (2010, S.27f, Def.2.9) sowie Föger u. a. (2013, S.794, Ab.4) resultiert folgendes Theorem zur Berechnung eines polytopen, zeitdiskreten LPV-Reglers.

**Theorem 1:** *Es gibt einen dynamischen LPV-Regler Gl. (3.26), sodass die Ungleichung  $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$  erfüllt ist, genau dann, wenn die LMI*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_i & \mathbf{J}_i & \mathbf{A}_{P_i}\mathbf{X} + \mathbf{b}_2\mathbf{l}_i^T & \mathbf{A}_{P_i} + \mathbf{b}_2r_i\mathbf{c}_2^T & \mathbf{b}_{1_i} + \mathbf{b}_2r_id_{21} & \mathbf{0} \\ (\bullet)^T & \mathbf{H}_i & \mathbf{Q}_i & \mathbf{Y}\mathbf{A}_{P_i} + \mathbf{f}_i\mathbf{c}_2^T & \mathbf{Y}\mathbf{b}_{1_i} + \mathbf{f}_id_{21} & \mathbf{0} \\ (\bullet)^T & (\bullet)^T & \mathbf{X} + \mathbf{X}^T - \mathbf{Z}_i & \mathbf{I}_n + \mathbf{S}^T - \mathbf{J}_i & \mathbf{0} & \mathbf{X}^T\mathbf{c}_{1_i} + \mathbf{l}_id_{12} \\ (\bullet)^T & (\bullet)^T & (\bullet)^T & \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T - \mathbf{H}_i & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{1_i} + \mathbf{c}_2r_id_{12} \\ (\bullet)^T & (\bullet)^T & (\bullet)^T & (\bullet)^T & \gamma & d_{11_i} + d_{21}r_id_{12} \\ (\bullet)^T & (\bullet)^T & (\bullet)^T & (\bullet)^T & (\bullet)^T & \gamma \end{bmatrix} > 0$$

$\forall i = 1, \dots, p$   
(3.37)

gleichzeitig gilt und die Matrixvariablen  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $r_i$ ,  $\mathbf{l}_i$ ,  $\mathbf{f}_i$ ,  $\mathbf{Q}_i$ ,  $\mathbf{J}_i$ ,  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^T$  und  $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^T$  für alle  $i = 1, \dots, p$  existieren und in der konvexen Hülle Gl. (3.24) sowie Gl. (3.31) liegen.

Durch Lösen der LMI Gl. (3.37) in den Matrixvariablen für  $i = 1, \dots, p$ , erhält man mit

$$\mathbf{S} = \mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{V}\mathbf{U}, \quad (3.38)$$

gemäß De Oliveira u. a. (2002, S.671, Gl.37), durch eine *Singular Value Decomposition*

$$svd(\mathbf{V}\mathbf{U}) = \mathbf{S} - \mathbf{Y}\mathbf{X}, \quad (3.39)$$

siehe hierzu Zhou und Doyle (1998, S.19, Ab.2.6), die Matrixvariablen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{U}$ . Damit lassen sich die Regler-Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i &:= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{K_i} & \mathbf{b}_{K_i} \\ \mathbf{c}_{K_i}^T & d_{K_i} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} & -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i - \mathbf{Y}\mathbf{A}_{P_i}\mathbf{X} & \mathbf{f}_i \\ \mathbf{l}_i^T & r_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_2^T\mathbf{X}\mathbf{U}^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.40)$$

nach De Oliveira u. a. (2002, S.672, Gl.47), für jede Ecke  $i$  des Polytops berechnen. Der dynamische LPV-Regler wird dann in Echtzeit zwischen den Ecken interpoliert und besitzt dieselbe Dimension wie die Regelstrecke.

In diesem Unterabschnitt wurde die Berechnung eines LPV-Reglers für LPV-Systeme hergeleitet. Sind alle Bedingungen durch die Lösung des Optimierungsproblems erfüllt, wird mit diesem Ansatz automatisch Stabilität im Sinne von Ljapunow für den geschlossenen Regelkreis garantiert, siehe **Lemma 1** und **Theorem 1**. Des Weiteren ist durch das erweiterte  $H_\infty$ -Kriterium, vom exogenen Eingang  $w$  zum exogenen Ausgang  $z$ , eine

$\mathcal{L}_2$ -Systemverstärkung kleiner  $\gamma$ , siehe Gl. (3.5), gegeben.

### 3.2 Störmodell mit Kosinusapproximation

Im Folgenden wird die hergeleitete Theorie auf das praktische Problem dieser Arbeit angewandt. Dabei beschränkt sich der Ansatz auf LPV-Systeme der Form wie Gl. (3.25). Ob die variierenden Parameter direkt in der Regelstrecke oder im Störmodell auftreten ist nicht entscheidend, letztendlich muss einzig die Kombination aus Strecke, Störmodell und Gewichtungsfiler die Form aus Gl. (3.25) aufweisen. Im Weiteren ist das Störmodell in der LPV-Form. Aus Gl. (3.40) erhält man dann die entsprechenden LTI-Reglermatrizen für jede Ecke des Polytops und somit den LPV-Regler.

Das Störmodell besteht, wie schon in den **Unterabschnitten 2.2.2** und **2.2.3** hergeleitet, aus überlagerten harmonischen Schwingungen mit einer Grundwelle (mit Frequenz  $f_0$ ) und deren Oberwellen. Für eine monofrequente Schwingung gilt das Modell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(2\pi fT) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_d} \mathbf{x}_d(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_d} u_d(k) \\ y_d(k) &= \underbrace{[1 \ 0]}_{\bar{\mathbf{c}}_d^T} \mathbf{x}_d(k). \end{aligned} \quad (3.41)$$

In diesem Modell entspricht die Frequenz  $f$  der Kosinusfunktion dem zeitabhängigen, variierenden Parameter. Das bedeutet, dass für eine Frequenz ein variierender Parameter benötigt wird. Da in der Praxis ein Multisinus mit mehreren Frequenzen als Störung vorkommt, wird das Modell Gl. (2.18)-(2.19) als Störmodell verwendet. Betrachtet man davon die Systemmatrix

$$\mathbf{A}_D(f_l) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(2\pi f_{l=1}T) \end{pmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{0} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(2\pi f_{l=L}T) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

mit maximal  $L$  Frequenzen, ist sofort ersichtlich, dass  $L$  zeitabhängige, variierende Parameter  $\theta_l(k)$  mit  $l = 1, \dots, L$  benötigt werden. Die nichtlineare Kosinusfunktion erlaubt keinen linearen Zusammenhang zwischen den  $\theta_l(k)$ , sodass keine vereinfachende Abhängigkeit untereinander besteht und für jede Frequenz ein Parameter verwendet werden muss.

### 3.2.1 Polytopes Störmodell mit einer einzigen Frequenz

Ausgangspunkt ist das Modell mit einer Frequenz Gl. (3.41) mit der Systemmatrix  $\mathbf{A}_d$ . Die Frequenz  $f(k)$  ändert sich in jedem Abtastschritt  $kT$  mit der Abtastzeit  $T$  und die Kosinusfunktion wird durch den variierenden Parameter

$$\theta(k) = \cos(2\pi f(k)T) \quad (3.43)$$

ersetzt. Dabei variiert die Frequenz im Intervall  $f \in [f_{min}, f_{max}] \subseteq [0, 1/(2T)]$  und entsprechend der variierende Parameter im Intervall  $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ . Aufgrund von *Shannon's Sampling Theorem*, siehe hierfür Shannon (1949), entspricht  $f_{max}$  der halben Abtastfrequenz. Aus Gl. (3.41) und Gl. (3.43) ergibt sich die Systemmatrix des parameter-variierenden Modells folgendermaßen

$$\tilde{\mathbf{A}}_d(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\theta(k) \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Die Transformation der Systemmatrix aus Gl. (3.44) in eine polytope LPV-Form, siehe Gl. (3.16), ist durch

$$\tilde{\mathbf{A}}_d(\theta(k)) = \tilde{\mathbf{A}}_{d_0} + \theta_1(k)\tilde{\mathbf{A}}_{d_1} \quad (3.45)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_{d_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

und

$$\tilde{\mathbf{A}}_{d_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

gegeben, siehe Heins u. a. (2011, S.133, Ab.5.2). In diesem Fall, ein variierender Parameter, besteht das Polytop aus den zwei Eckpunkten

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_1 &= \cos(2\pi f_{1_{min}}T), \\ \bar{\theta}_1 &= \cos(2\pi f_{1_{max}}T), \end{aligned} \quad (3.48)$$

die durch eine Gerade miteinander verbunden sind. Aufgrund des Abtasttheorems und der monoton abfallenden Kosinusfunktion im Intervall  $[0, \pi]$ , gilt  $0 \leq 2\pi f_1(k)T < \pi$  für den variierenden Parameter  $\theta_1(k) \in [\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1]$ , siehe hierzu Heins u. a. (2011, S.133, Ab.5.2).

### 3.2.2 Polytopes Störmodell mit beliebig vielen Frequenzen

Im nächsten Schritt werden die erhaltenen Resultate auf das Multisinus-Störmodell Gl. (2.18) mit bis zu  $L$  Frequenzen angewandt. Das Modell ergibt sich durch eine Parallelschaltung von  $L$  monofrequenten Modellen, eines für jede Frequenz. In jedem monofrequenten Einzelmodell ist eine Kosinusfunktion enthalten, die jeweils durch einen variierenden Parameter

$$\theta_l(k) = \cos(2\pi f_l(k)T), \quad l = 1, \dots, L \quad (3.49)$$

ersetzt wird. Daraus resultiert folgende Systemmatrix

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}}(\theta_l(k)) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\theta_1(k) \end{pmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\theta_L(k) \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad l = 1, \dots, L \quad (3.50)$$

in Diagonalform. Die Transformation der Systemmatrix aus Gl. (3.50) in eine polytope LPV-Form, siehe Gl. (3.45), ist durch

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}}(\theta(k)) = \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}_0} + \theta_1(k)\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}_1} + \dots + \theta_L(k)\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}_L} \quad (3.51)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}_0} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_L \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}_1} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_2 & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_L \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

und

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}_L} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{L-1} & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_L \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

gegeben. In diesem Fall,  $L$  variierende Parameter, besteht die  $L$ -dimensionale Parameterbox

$$\Theta = [\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1] \times \dots \times [\underline{\theta}_L, \bar{\theta}_L] \quad (3.55)$$

aus  $2^L$  Eckpunkten, die miteinander zu einem Polytop verbunden sind, siehe hierfür Heins u. a. (2011, S.133, Ab.5.2). Daraus ist sofort ersichtlich, dass sich mit jeder zusätzlichen Frequenz, also mit jedem zusätzlichen variierenden Parameter, die Anzahl der Ecken des Polytops um zwei erhöht. Dies wiederum verdoppelt die Anzahl der gleichzeitig zu berechnenden LMIs, siehe Optimierungsproblem Gl. (3.37) aus **Theorem 1**. Das Finden einer Lösung in Form einer positiv definiten Ljapunow-Matrix, sodass alle Bedingungen an die Matrizen erfüllt werden, ist für das gegebene Problem bei einer so großen Anzahl an Optimierungsvariablen immer schwierig beziehungsweise sogar unmöglich.

Aus diesem Grund ist es wichtig einen Ansatz zu entwickeln, der das Problem der hohen Anzahl an variierenden Parametern  $\theta_1, \dots, \theta_L$  löst und die Abhängigkeit ein variierender Parameter pro Frequenz aufhebt.

### 3.2.3 Reduktion der variierenden Parameter im Störmodell

Im Folgenden wird eine neuartige Methode vorgestellt, die dieses Problem der bis zu  $\theta_L$  variierenden Parameter löst, veröffentlicht in Füger u. a. (2012, 2013). Die Problematik liegt in der nichtlinearen Kosinusfunktion, die keinen linearen Zusammenhang beziehungsweise keine Kombination zwischen den variierenden Parametern zulässt. Ist es jedoch möglich, die Kosinusfunktion durch eine Funktion so zu approximieren, dass die Frequenzen und somit der variierende Parameter linear eingeht, wird die Abhängigkeit ein variierender Parameter pro Frequenz umgangen. Wie schon anfangs erwähnt, besteht die auftretende Störung aus einer Grundfrequenz  $f_0$  und deren Harmonischen. Basierend auf dieser Tatsache ist es möglich, jede beliebige Frequenz aus der Multiplikation der Grundfrequenz  $f_0$  mit einem Faktor  $\nu \in \mathbb{R}_+$  darzustellen. Bei dieser Art von Störung handelt es sich dann

um halb-/ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz. Ersetzt man

$$f_l(k) \hat{=} \nu_l f_0(k), \quad (3.56)$$

erhält man den veränderten variierenden Parameter

$$\theta_l(k) = \cos(2\pi\nu_l f_0(k)T), \quad (3.57)$$

siehe hierzu Füger u. a. (2012) sowie Füger u. a. (2013, S.792, Gl.5). Approximiert man im nächsten Schritt mit der *Methode der Kleinsten Quadrate*, gemäß Papageorgiou u. a. (2012), für überbestimmte lineare Gleichungssysteme die Kosinusfunktion durch ein Polynom, ergibt sich folgende Funktion

$$\cos(\cdot) \approx F(\kappa_1, \dots, \kappa_v) = c_0 + c_1\kappa_1 + c_2\kappa_2 + \dots + c_v\kappa_v, \quad (3.58)$$

siehe hierzu Füger u. a. (2013, S.792), mit den zu bestimmenden Parameterkonstanten  $c_0, \dots, c_v$  und den Variablen  $\kappa_1, \dots, \kappa_v$ . Die Variablen  $\kappa_v$  können dabei beliebig (z.B.  $\kappa_1 = x$ ,  $\kappa_2 = x^2$ ,  $\kappa_3 = x^3$  oder  $\kappa_1 = x^2$ ,  $\kappa_2 = x^4$ ,  $\kappa_3 = x^6$ ) gewählt werden.

Das überbestimmte Gleichungssystem in Matrixschreibweise ist gegeben durch

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \kappa_1 & \cdots & \kappa_v \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \kappa_1 & \cdots & \kappa_v \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_v \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\cdot) \\ \vdots \\ \cos(\cdot) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}, \quad (3.59)$$

mit  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ . Durch Lösen der Matrixgleichung in der Variablen  $\mathbf{c}$ , lassen sich die Parameterkonstanten mit MATLAB, der Fa. MathWorks<sup>®</sup>, durch die linksseitige Matrixdivision  $\mathbf{c} = \mathbf{X} \setminus \mathbf{y}$  bestimmen. Dabei wird bei der Durchführung intern eine *QR-Zerlegung*, gegeben in Hackbusch u. a. (1996, S.1112), durchgeführt.

Für die Berechnung der approximierten Funktion  $F$  ist die Wahl der Variablen  $\kappa_v$  entscheidend. Die Kosinusfunktion ist eine gerade Funktion, sodass ausschließlich Terme mit geraden Potenzen notwendig sind. Dabei ist entscheidend, dass der Funktionswert der Kosinusfunktion  $\cos(2\pi fT)$  für das spezifizierte Frequenzintervall  $f \in [0, 500]$  Hz zwischen  $[-1, 1]$  liegt. Dies entspricht bei  $T = 1$  ms dem Intervall  $[0, \pi]$ .

Hierfür wurden die folgenden Approximationsfunktionen

$$F_1(f) = c_{01} + c_{11} \underbrace{(2\pi fT)^2}_{\kappa_1} \quad (3.60)$$

$$F_2(f) = c_{02} + c_{12} \underbrace{(2\pi fT)^2}_{\kappa_1} + c_{22} \underbrace{(2\pi fT)^4}_{\kappa_2} \quad (3.61)$$

$$F_3(f) = c_{03} + c_{13} \underbrace{(2\pi fT)^2}_{\kappa_1} + c_{23} \underbrace{(2\pi fT)^4}_{\kappa_2} + c_{33} \underbrace{(2\pi fT)^6}_{\kappa_3} \quad (3.62)$$

$$F_4(f) = c_{04} + c_{14} \underbrace{(2\pi fT)^2}_{\kappa_1} + c_{24} \underbrace{(2\pi fT)^4}_{\kappa_2} + c_{34} \underbrace{(2\pi fT)^6}_{\kappa_3} + c_{44} \underbrace{(2\pi fT)^8}_{\kappa_4} \quad (3.63)$$

zum Vergleich aufgestellt. Für jede Funktion wurde mit MATLAB der Parametervektor  $\mathbf{c}$  im Frequenzintervall  $f \in [0, 500]$  Hz mit  $T = 1$  ms berechnet. In **Tabelle 3.1** sind drei Referenzwerte für die Approximationsgüte der Kosinusfunktion aufgeführt. Im Detail ist in Spalte eins der minimale Fehler, in Spalte zwei der maximale Fehler und in Spalte drei der durchschnittliche Fehler der quadratischen Differenz zwischen der approximierten Funktion  $F$  und der Kosinusfunktion aufgelistet. In **Tabelle 3.2** sind die dafür berechneten

	MIN $[(F - \cos(\cdot))^2]$	MAX $[(F - \cos(\cdot))^2]$	$\emptyset [(F - \cos(\cdot))^2]$
$F_1$	$1.39 \times 10^{-12}$	$2.70 \times 10^{-1}$	$3.80 \times 10^{-2}$
$F_2$	$9.24 \times 10^{-15}$	$3.90 \times 10^{-3}$	$3.37 \times 10^{-4}$
$F_3$	$6.49 \times 10^{-19}$	$1.22 \times 10^{-5}$	$7.62 \times 10^{-7}$
$F_4$	$3.92 \times 10^{-21}$	$1.27 \times 10^{-8}$	$6.32 \times 10^{-10}$

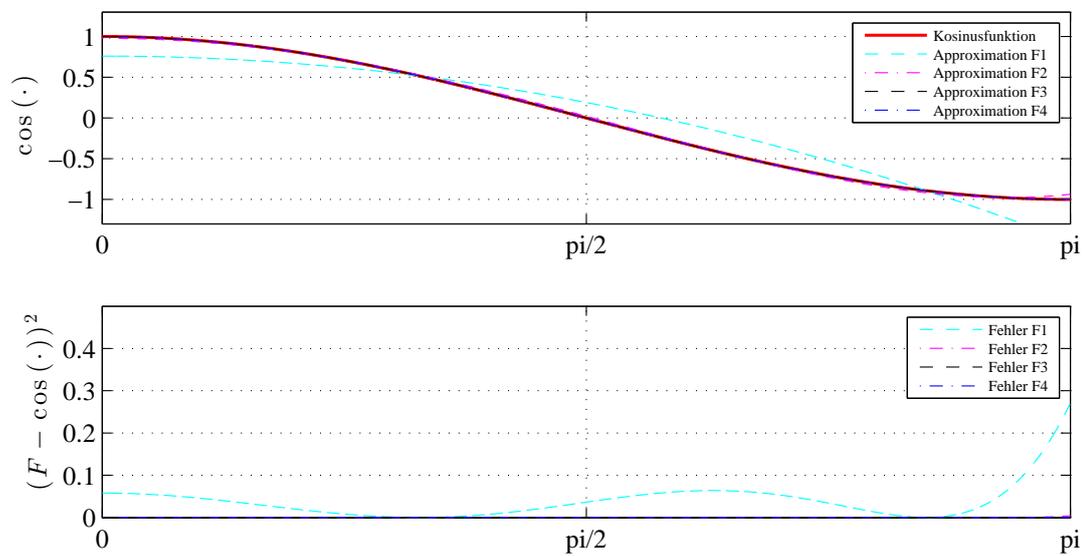
**Tabelle 3.1:** Spalte 1 der minimale Fehler, Spalte 2 der maximale Fehler und Spalte 3 der durchschnittliche Fehler der quadratischen Differenz zwischen der approximierten Funktion  $F$  und der Kosinusfunktion für das Frequenzintervall  $f \in [0, 500]$  Hz und  $T = 1$  ms

Koeffizienten  $\mathbf{c}$  der einzelnen Funktionen  $F$  für das Frequenzintervall  $f \in [0, 500]$  Hz und  $T = 1$  ms aufgeführt. Des Weiteren ist der Vergleich zwischen der Kosinusfunktion und den verschiedenen Approximationsfunktionen sowie deren Approximationsfehler in **Abbildung 3.3** dargestellt. Der obere Graph zeigt die Funktionsverläufe über dem Intervall  $[0, \pi]$ , wohingegen der quadratische Approximationsfehler im unteren Graphen dargestellt wird.

Aus den Ergebnissen ist ersichtlich, dass mit den Funktionen  $F_2$ ,  $F_3$  und  $F_4$  im vorgegebenen Frequenzintervall sehr genaue Approximationen erreicht werden. Mit dem Hintergrund, dass die Anzahl der variierenden Parameter reduziert werden soll, ist es nahelegend die Funktion  $F_2$  im weiteren Verlauf der Arbeit zu verwenden.

	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$F_1$	0.7599	-0.2309	/	/	/
$F_2$	0.9783	-0.4522	0.0261	/	/
$F_3$	0.9989	-0.4962	0.0395	-0.00099	/
$F_4$	0.9999	-0.4998	0.0415	-0.0013	0.000019

**Tabelle 3.2:** Koeffizienten  $\mathbf{c}$  der Polynomfunktionen  $F$  für das Frequenzintervall  $f \in [0, 500]$  Hz und  $T = 1$  ms



**Abbildung 3.3:** Oberer Graph: Kosinusfunktion (rot dick), Approximationsfunktion  $F_1$  (cyan gestrichelt),  $F_2$  (magenta punkt-gestrichelt),  $F_3$  (schwarz gestrichelt) und  $F_4$  (blau punkt-gestrichelt) über dem Intervall  $[0, \pi]$  mit  $T = 1$  ms; Unterer Graph: Verlauf des quadratischen Fehlers, Differenz zwischen der approximierten Funktion  $F$  und der Kosinusfunktion, von den Approximationsfunktionen  $F$  (Farben wie oben) über dem Intervall  $[0, \pi]$  mit  $T = 1$  ms

Die Funktion  $F_2$  ergibt sich lediglich aus der Summe der zwei Variablen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ . Verkleinert man das Frequenzintervall  $f \in [60, 300]$  Hz, bei gleichbleibender Abtastzeit  $T = 1$  ms, erhält man eine genauere Approximationsgüte für die Funktion  $F_2$ , im Vergleich zum Frequenzintervall  $f \in [0, 500]$  Hz, siehe **Tabelle 3.3**. Der Vergleich der Koeffizienten  $\mathbf{c}$  für diese Frequenzintervalle ist in **Tabelle 3.4** dargestellt.

	MIN $[(F - \cos(\cdot))^2]$	MAX $[(F - \cos(\cdot))^2]$	$\emptyset [(F - \cos(\cdot))^2]$
$F_{2_{[0,500]Hz}}$	$9.24 \times 10^{-15}$	$3.90 \times 10^{-3}$	$3.37 \times 10^{-4}$
$F_{2_{[60,300]Hz}}$	$4.29 \times 10^{-17}$	$8.99 \times 10^{-6}$	$8.47 \times 10^{-7}$

**Tabelle 3.3:** Spalte 1 der minimale Fehler, Spalte 2 der maximale Fehler und Spalte 3 der durchschnittliche Fehler der quadratischen Differenz, zwischen der Funktion  $F_2$  und der Kosinusfunktion, für das Frequenzintervall  $f \in [0, 500]$  Hz und  $f \in [60, 300]$  Hz mit  $T = 1$  ms

	$c_{02}$	$c_{12}$	$c_{22}$
$F_{2_{[0,500]Hz}}$	0.9783	-0.4522	0.0261
$F_{2_{[60,300]Hz}}$	0.9971	-0.4907	0.0348

**Tabelle 3.4:** Vergleich der Koeffizienten  $\mathbf{c}$  von  $F_2$  für das Frequenzintervall  $f \in [0, 500]$  Hz und  $f \in [60, 300]$  Hz mit  $T = 1$  ms

Die Störfrequenzen der praktischen Anwendung liegen in diesem verkleinerten Frequenzbereich, sodass die Approximationsgüte der Funktion  $F_2$  ausreichend ist.

Mit dieser Methode, Kosinusapproximation durch die Funktion  $F_2$ , erhält man mit Gl. (3.57) folgenden Zusammenhang

$$\cos(2\pi\nu_l f_0(k)T) \approx c_{02} + c_{12}\nu_l^2(2\pi f_0(k)T)^2 + c_{22}\nu_l^4(2\pi f_0(k)T)^4 \quad (3.64)$$

und daraus die zwei variierenden Parameter

$$\theta(k) = \begin{bmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\pi f_0(k)T)^2 \\ (2\pi f_0(k)T)^4 \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

gegeben in Füger u. a. (2013, S.792, Gl.7). Die Abhängigkeit ein variierender Parameter pro Frequenz wurde aufgehoben und es besteht jetzt die Möglichkeit, beliebig viele Frequenzen mit zwei variierenden Parametern Gl. (3.65) darzustellen. Dementsprechend lautet die Systemmatrix für das Störmodell mit einer Frequenz folgendermaßen

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}(\theta(k))_{l=1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2(c_{02} + \nu_1^2 c_{12} \theta_1(k) + \nu_1^4 c_{22} \theta_2(k)) \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

siehe hierzu Füger u. a. (2013, S.792, Gl.6). Das erklärte Ziel, eine Störung (Multisinus mit  $L$  Frequenzen) mit einer geringen Anzahl an variierenden Parametern zu modellieren, ist durch Parallelschaltung der Einzelmodelle mit der Systemmatrix Gl. (3.66) realisierbar.

Es können durch den Parameter  $\nu_l$  bis zu  $L$  beliebige Frequenzen eingestellt werden, die nur von der Grundfrequenz  $f_0$  abhängen. Das komplette Störmodell des Multisinus mit  $L$  Frequenzen lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_D(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}_D(\theta(k))_l \mathbf{x}_D(k) + \mathbf{b}_D u_D(k) \\ y_D(k) &= \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D(k), \end{aligned} \quad (3.67)$$

mit den Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_D(\theta(k))_l &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_d(\theta(k))_{l=1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \bar{\mathbf{A}}_d(\theta(k))_{l=L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_D = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_D^T &= \begin{bmatrix} (1 \ 0) & \cdots & (1 \ 0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.68)$$

und  $\bar{\mathbf{A}}_D(\theta(k))_l \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ ,  $\mathbf{b}_D \in \mathbb{R}^{2l}$  sowie  $\mathbf{c}_D \in \mathbb{R}^{2l}$ , gegeben in Füger u. a. (2013, S.792, Gl.8 und Gl.9). Mit diesem Ansatz reduziert sich die polytope Parameterbox

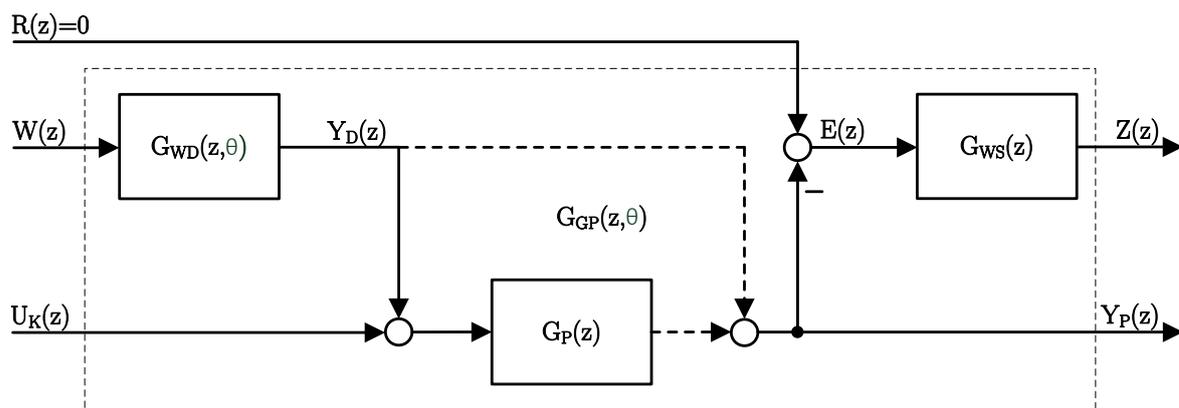
$$\bar{\Theta} = [\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1] \times [\underline{\theta}_2, \bar{\theta}_2] \quad (3.69)$$

von  $2^L$  Eckpunkten auf ein Quadrat mit lediglich vier Eckpunktkombinationen. Somit müssen nur vier LMIs gleichzeitig gelöst werden, unabhängig von der Anzahl an Frequenzen, was das Finden einer numerischen Lösung durch Anwendung von **Theorem 1** zunehmend erleichtert. Diese Reduktionsmethode auf zwei variierende Parameter wurde von Ballesteros u. a. (2013) sowie Shu u. a. (2013) aufgegriffen und auf das zeitdiskrete Störmodell Gl. (2.8) angewandt.

### 3.3 Verallgemeinerte Strecke mit polytopem LPV-Störmodell

Die verallgemeinerte LPV-Regelstrecke lässt sich gemäß den Anforderungen an die praktische Anwendung entsprechend aufstellen. Sie besteht aus dem in **Unterabschnitt 3.2.3** entwickelten LPV-Störmodell  $G_{WD}(z, \theta)$ , der eigentlichen Regelstrecke  $G_P(z)$  und dem Gewichtungsfiler  $G_{WS}(z)$  mit dem Regelfehler als Eingang. Das dazugehörige Blockschaltbild ist in **Abbildung 3.4** dargestellt. Hierbei ist der Gewichtungsfiler  $G_{WS}(z)$  entweder als ein  $PT_1$ -Glied mit der z-Übertragungsfunktion

$$G_{WS_1}(z) = \frac{\left(\frac{1}{M}\right)(z - e^{-\omega_B T}) - \left(\frac{1}{M}\right)(z - 1)}{z - e^{-\omega_B T}} \quad (3.70)$$



**Abbildung 3.4:** Verallgemeinerte LPV-Strecke  $G_{GP}(z, \theta)$  bestehend aus dem LPV-Störmodell  $G_{WD}(z, \theta)$  mit  $Y_D(z)$  als Eingangsstörung (durchgezogene Linie) oder als Ausgangsstörung (gestrichelte Linie), der Regelstrecke  $G_P(z)$  und dem Sensitivitätsgewichtungsfilter  $G_{WS}(z)$

oder als ein  $PDT_1$ -Glied mit der  $z$ -Übertragungsfunktion

$$G_{WS_2}(z) = \frac{\left(\frac{1}{A}\right) (z - e^{-A\omega_B T}) - \left(\frac{M\omega_B - A\omega_B}{MA\omega_B}\right) (z - 1)}{z - e^{-A\omega_B T}} \quad (3.71)$$

ausgeführt. Beim Filter  $G_{WS_1}(z)$  wird durch die Konstante  $(1/M) \leq 1$  die waagrechte Asymptote für Frequenzen gegen Null bestimmt.  $\omega_B$  entspricht der Frequenz an der Stelle, wo sich der Betrag um 3 [dB] zur waagrechten Asymptote verringert. Hingegen werden beim Filter  $G_{WS_2}(z)$ , mit Tiefpasscharakteristik, die waagrechten Asymptoten durch die Konstante  $(1/A) \geq 1$  für Frequenzen gegen Null sowie durch die Konstante  $(1/M) \leq 1$  für Frequenzen gegen Unendlich spezifiziert.  $\omega_B$  entspricht der minimalen Bandbreite an der die Asymptote durch den Wendepunkt die Null-dB-Linie schneidet. Diese  $z$ -Übertragungsfunktionen berechnen sich aus den herkömmlichen, kontinuierlichen Laplace-Übertragungsfunktionen für ein  $PT_1$ - oder  $PDT_1$ -Glied, siehe hierzu Skogestad und Postlethwaite (2001, S.58), durch Anwendung eines Halteglieds nullter Ordnung und anschließender idealer Abtastung, siehe Unbehauen (2007, S.121, Gl.2.4.18). Der Betrag des inversen Gewichtungsfilter

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|G_{WS}(j\omega)|}, \quad \forall \omega \quad (3.72)$$

entspricht, je nach Auslegung des Filters, einer oberen beziehungsweise einer unteren Schranke bezogen auf die *Sensitivitätsfunktion*  $S(z) = 1/(1 + G_K(z)G_P(z))$ , von  $R(z) \rightarrow E(z)$ , siehe Skogestad und Postlethwaite (2001, S.22 und S.57, Gl.2.70). In dieser Arbeit wird bei der praktischen Umsetzung das Filter (Tiefpass) durch die Inversion als obere

Schranke für die Sensitivitätsfunktion mit der  $H_\infty$ -Bedingung

$$\|G_{WS}(z)S(z)\|_\infty < 1, \quad (3.73)$$

siehe Skogestad und Postlethwaite (2001, S.56ff, Gl.2.71), verwendet. Das Modell der Regelstrecke  $G_P(z)$  erhält man durch Identifikation der praktischen Anwendung. Die verallgemeinerte LPV-Regelstrecke in Zustandsraumdarstellung hat schließlich folgende Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathbf{GP}}(k+1) &= \mathbf{A}_{\mathbf{GP}}(\theta(k))\mathbf{x}_{\mathbf{GP}}(k) + \mathbf{B}_{\mathbf{GP}}\mathbf{u}_{\mathbf{GP}}(k) \\ \mathbf{y}_{\mathbf{GP}}(k) &= \mathbf{C}_{\mathbf{GP}}\mathbf{x}_{\mathbf{GP}}(k) + \mathbf{D}_{\mathbf{GP}}\mathbf{u}_{\mathbf{GP}}(k) \end{aligned} \quad (3.74)$$

mit dem zusammengefassten Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{\mathbf{GP}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{WS}}(k) \\ \mathbf{x}_{\mathbf{P}}(k) \\ \mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

dem Eingangsvektor

$$\mathbf{u}_{\mathbf{GP}}(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ u_K(k) \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

und dem Ausgangsvektor

$$\mathbf{y}_{\mathbf{GP}}(k) = \begin{bmatrix} z(k) \\ y_P(k) \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Für den Fall  $y_D$  als Eingangsstörung ergeben sich die Systemmatrizen folgendermaßen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{GP}}(\theta(k)) &= \begin{bmatrix} a_{WS} & -b_{WS}\mathbf{c}_{\mathbf{P}}^T & -b_{WS}d_P\mathbf{c}_{\mathbf{D}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\mathbf{P}} & \mathbf{b}_{\mathbf{P}}\mathbf{c}_{\mathbf{D}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}}(\theta(k))_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\mathbf{GP}} = \begin{bmatrix} -b_{WS}d_Pd_D & -b_{WS}d_P \\ \mathbf{b}_{\mathbf{P}}d_D & \mathbf{b}_{\mathbf{P}} \\ \mathbf{b}_{\mathbf{D}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{\mathbf{GP}} &= \begin{bmatrix} c_{WS} & -d_{WS}\mathbf{c}_{\mathbf{P}}^T & -d_{WS}d_P\mathbf{c}_{\mathbf{D}}^T \\ 0 & \mathbf{c}_{\mathbf{P}}^T & d_P\mathbf{c}_{\mathbf{D}}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{GP}} = \begin{bmatrix} -d_{WS}d_Pd_D & -d_{WS}d_P \\ d_Pd_D & d_P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.78)$$

und mit dem zusammengefassten Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{\mathbf{GP}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{WS}}(k) \\ \mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) \\ \mathbf{x}_{\mathbf{P}}(k) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

für den Fall  $y_D$  als Ausgangsstörung erhält man die Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{GP}}(\theta(k)) &= \begin{bmatrix} a_{WS} & -b_{WS}\mathbf{c}_D^T & -b_{WS}\mathbf{c}_P^T \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_D(\theta(k))_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\text{GP}} = \begin{bmatrix} -b_{WS}d_D & -b_{WS}d_P \\ \mathbf{b}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_P \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{\text{GP}} &= \begin{bmatrix} c_{WS} & -d_{WS}\mathbf{c}_D^T & -d_{WS}\mathbf{c}_P^T \\ 0 & \mathbf{c}_D^T & \mathbf{c}_P^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\text{GP}} = \begin{bmatrix} -d_{WS}d_D & -d_{WS}d_P \\ d_D & d_P \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Die Dimension der Systemmatrix  $\mathbf{A}_{\text{GP}}(\theta(k)) \in \mathbb{R}^{(1+n+2l) \times (1+n+2l)}$  mit polytooper Unsicherheit ergibt sich aus der Addition der Dimensionen des Gewichtungsfilters, der Strecke und des Störmodells. Da das identifizierte Modell der Regelstrecke sowie das Störmodell keine Systeme mit Durchgriff sind, also  $d_P = d_D = 0$ , erhält man für  $y_D$  als Eingangsstörung folgende vereinfachten Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{GP}}(\theta(k)) &= \begin{bmatrix} a_{WS} & -b_{WS}\mathbf{c}_P^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_P & \mathbf{b}_P\mathbf{c}_D^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_D(\theta(k))_l \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{\text{GP}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_P \\ \mathbf{b}_D & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\text{GP}} &= \begin{bmatrix} c_{WS} & -d_{WS}\mathbf{c}_P^T & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_P^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_{\text{GP}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

und für den Fall mit  $y_D$  als Ausgangsstörung

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{GP}}(\theta(k)) &= \begin{bmatrix} a_{WS} & -b_{WS}\mathbf{c}_D^T & -b_{WS}\mathbf{c}_P^T \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_D(\theta(k))_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_P \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{\text{GP}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{b}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_P \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\text{GP}} &= \begin{bmatrix} c_{WS} & -d_{WS}\mathbf{c}_D^T & -d_{WS}\mathbf{c}_P^T \\ 0 & \mathbf{c}_D^T & \mathbf{c}_P^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_{\text{GP}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

In diesem Abschnitt wurde die verallgemeinerte LPV-Regelstrecke aufgestellt. Aus den vereinfachten Systemmatrizen Gl. (3.81)-(3.82) wird sofort ersichtlich, dass die polytope Unsicherheit nur in der Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{GP}}(\theta(k))$  auftritt und die Eingangs-/Ausgangsmatrix konstant bleibt. Die variierenden Parameter im Störmodell wurden für beliebig viele Frequenzen auf zwei begrenzt und bezüglich der Reglerberechnung sind beide Fälle,  $y_D$  als Eingangsstörung sowie als Ausgangsstörung, im Aufstellen der LPV-Strecke betrachtet worden. Diese verallgemeinerte LPV-Strecke mit polytopem Störmodell und  $y_D$  als Eingangsstörung wird in **Abschnitt 5** und **6** zur Reglerberechnung verwendet.

## 4 Linear-fractionaler LPV-Ansatz mit einem Parameter

Wie bereits im vorangehenden Abschnitt beschrieben ist das Störmodell Gl. (2.18) mit  $L$  Frequenzen für die praktische Anwendung nur mit Einschränkungen zu gebrauchen. Für eine größere Anzahl an Frequenzen  $L \geq 3$  ist das Modell ungeeignet. Deshalb wurde mit der Kosinusapproximation eine Methode entwickelt, mit der die Anzahl an variierenden Parametern (einer pro Frequenz) auf zwei reduziert werden konnte. Bringt man das Störmodell durch die *Lineare Fraktionale Transformation* (LFT), siehe hierzu Doyle u. a. (1991, S.1227, Gl.2.2 und Gl.2.3), in eine LF-Form, kann das Störmodell mit beliebig vielen Frequenzen mit nur einem variierenden Parameter aufgestellt werden. Bei diesem zweiten Ansatz werden die Modellunsicherheiten in einem separaten Parameterblock gebündelt, der mit der Strecke durch eine Rückführschleife verbunden ist.

Anfangs werden alle notwendigen Grundlagen zum LF-Ansatz aufgeführt sowie die allgemeine Reglerberechnung hergeleitet. Im Anschluss wird die neue Methode vorgestellt, bei der nur ein variierender Parameter für das Störmodell mit  $L$  Frequenzen notwendig ist.

### 4.1 Theoretische Grundlagen des linear-fractionalen Ansatzes

Die theoretischen Grundlagen für den linear-fractionalen Ansatz basieren auf den Grundlagen des polytopen Ansatzes, wobei Stabilität im Sinne von Ljapunow in Kombination mit dem  $H_\infty$ -Kriterium zusätzlich über das *Projection Lemma*, gemäß Scherer und Weiland (2000, S.108, Ab.4.5.2), bestimmt wird. Des Weiteren wird der linear-fractionale Ansatz für den geschlossenen Regelkreis detailliert beschrieben und der entsprechende LPV-Regler hergeleitet.

#### 4.1.1 Stabilität in Kombination mit dem $H_\infty$ -Kriterium für den geschlossenen Regelkreis

Gegeben ist die lineare, zeitdiskrete Strecke ohne variierende Parameter in Zustandsraumdarstellung, siehe hierzu Gl. (3.25) ohne variierende Parameter sowie Gahinet und Apkarian (1994, S.4, Gl.2.3),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_P(k+1) &= \mathbf{A}_P \mathbf{x}_P(k) + \mathbf{b}_1 w(k) + \mathbf{b}_2 u_K(k) \\ z(k) &= \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_P(k) + d_{11} w(k) + d_{12} u_K(k) \\ y_P(k) &= \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_P(k) + d_{21} w(k) \end{aligned} \tag{4.1}$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_P \in \mathbb{R}^n$ , den Systemmatrizen  $\mathbf{A}_P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_{11} \in \mathbb{R}$ ,  $d_{12} \in \mathbb{R}$ ,  $d_{21} \in \mathbb{R}$ , dem Eingang  $u_K \in \mathbb{R}$  (Reglerausgang), dem exogenen Eingang  $w \in \mathbb{R}$ , dem Ausgang  $y_P \in \mathbb{R}$  (Messgröße, Reglereingang) sowie dem exogenen Ausgang  $z \in \mathbb{R}$ . Es gilt die notwendige und hinreichende Annahme,

siehe Gahinet und Apkarian (1994, S.5, A1), dass das System  $(\mathbf{A}_P, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$  stabilisierbar und ermittelbar ist. Das heißt, dass alle instabilen Eigenwerte steuerbar und zum anderen beobachtbar sind, siehe hierzu Lunze (2008, S.114). Des Weiteren wird der dynamische Regler, siehe Gl. (3.26) ohne variierende Parameter,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_K(k+1) &= \mathbf{A}_K \mathbf{x}_K(k) + \mathbf{b}_K y_P(k) \\ u_K(k) &= \mathbf{c}_K^T \mathbf{x}_K(k) + d_K y_P(k) \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit  $\mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{A}_K \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $\mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{c}_K \in \mathbb{R}^k$  und  $d_K \in \mathbb{R}$  eingeführt. Der Zusammenschluss zwischen Strecke und Regler zum geschlossenen Regelkreis ergibt folgendes zusammengefasstes System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{cl}(k+1) &= \mathbf{A}_{cl} \mathbf{x}_{cl}(k) + \mathbf{b}_{cl} w(k) \\ z(k) &= \mathbf{c}_{cl}^T \mathbf{x}_{cl}(k) + d_{cl} w(k) \end{aligned} \quad (4.3)$$

mit Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{cl}(k) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_P(k) \\ \mathbf{x}_K(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k} \quad (4.4)$$

und den zusammengesetzten Systemmatrizen, gemäß Gahinet und Apkarian (1994, S.5, Gl.2.8 und Gl.2.9),

$$\mathbf{A}_{cl} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{b}_K \\ \mathbf{c}_K^T & d_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_k \\ \mathbf{c}_2^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{C}}}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{b}_{cl} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{b}_K \\ \mathbf{c}_K^T & d_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ d_{21} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}_{21}}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{c}_{cl}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_0^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & d_{12} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}_{12}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{b}_K \\ \mathbf{c}_K^T & d_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_k \\ \mathbf{c}_2^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{C}}} \quad \text{und} \quad (4.7)$$

$$d_{cl} = d_{11} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & d_{12} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}_{12}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{b}_K \\ \mathbf{c}_K^T & d_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ d_{21} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{d}}_{21}}. \quad (4.8)$$

Verwendet man wie im **Unterabschnitt 3.1.1** eine quadratische Ljapunow-Funktion mit Ljapunow-Matrix  $\mathbf{P}_{cl} = \mathbf{P}_{cl}^T = \mathbf{X}_{cl}^{-1} > 0$  und wendet das  $H_\infty$ -Kriterium  $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$  auf den geschlossenen Regelkreis Gl. (4.3) an, ergibt sich durch das *Bounded-Real-Lemma*, siehe **Lemma 1**, folgende Matrixungleichung

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X}_{cl}^{-1} & \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{b}_{cl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{cl}^T & -\mathbf{X}_{cl} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{cl} \\ \mathbf{b}_{cl}^T & \mathbf{0} & -\gamma & d_{cl} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_{cl}^T & d_{cl} & -\gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (4.9)$$

mit der erweiterten Ljapunow-Matrix  $\mathbf{X}_{cl} > 0$  in  $\mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ , siehe hierzu Gahinet und Apkarian (1994, S.12). Diese Matrixungleichung enthält im Eintrag (1, 1) die inverse Matrix  $\mathbf{X}_{cl}^{-1}$  und ist somit keine LMI. Mit Hilfe des *Projection Lemma* (PL) wird aus der Matrixungleichung Gl. (4.9) eine LMI.

**Lemma 2: PL** (Gahinet und Apkarian, 1994, S.426, Lemma 3.1)

Bei einer symmetrischen Matrix  $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und zwei Matrizen  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  mit Spaltendimension  $m$  wird das Problem betrachtet eine Matrix  $\Theta$  entsprechender Dimension zu finden, sodass

$$\Psi + \mathbf{P}^T \Theta^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \Theta \mathbf{P} < 0 \quad (4.10)$$

gilt. Mit  $\mathbf{W}_P$ ,  $\mathbf{W}_Q$  werden jegliche Matrizen bezeichnet, deren Spalten Basen der Nullräume  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{Q}$  bilden. Gl. (4.10) ist in  $\Theta$  dann und nur dann lösbar, wenn

$$\begin{cases} \mathbf{W}_P^T \Psi \mathbf{W}_P < 0 \\ \mathbf{W}_Q^T \Psi \mathbf{W}_Q < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

gilt.

Setzt man die Gl. (4.5)-(4.8) in Gl. (4.9) ein, ergibt sich die äquivalente Schreibweise

$$\Psi + \Phi_1^T \mathbf{K}^T \Phi_2 + \Phi_2^T \mathbf{K} \Phi_1 < 0, \quad (4.12)$$

siehe hierfür Gahinet und Apkarian (1994, S.12, Gl.5.1),

und in Matrixschreibweise

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{X}_{\text{cl}}^{-1} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{b}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_0^T & -\mathbf{X}_{\text{cl}} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{b}_0^T & \mathbf{0} & -\gamma & d_{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_0^T & d_{11} & -\gamma \end{bmatrix}}_{\Psi} + \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n+k) \times (k+1)} \\ \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{d}}_{21}^T \\ \mathbf{0}_{1 \times (k+1)} \end{bmatrix}}_{\Phi_1^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K^T & \mathbf{c}_K \\ \mathbf{b}_K^T & d_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0}_{(k+1) \times (n+k)} & \mathbf{0}_{(k+1) \times 1} & \tilde{\mathbf{d}}_{12} \end{bmatrix}}_{\Phi_2} + \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0}_{(n+k) \times (k+1)} \\ \mathbf{0}_{1 \times (k+1)} \\ \tilde{\mathbf{d}}_{12}^T \end{bmatrix}}_{\Phi_2^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{b}_K \\ \mathbf{c}_K^T & d_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(k+1) \times (n+k)} & \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{d}}_{21} & \mathbf{0}_{(k+1) \times 1} \end{bmatrix}}_{\Phi_1} < 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Die LMI Gl. (4.10) beziehungsweise Gl. (4.13) ist in der Matrixvariablen  $\mathbf{K}$  lösbar, wenn gemäß dem *Projection Lemma*, siehe **Lemma 2**, folgende Bedingungen

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{\Phi_1}^T \Psi \mathbf{W}_{\Phi_1} < 0 \\ \mathbf{W}_{\Phi_2}^T \Psi \mathbf{W}_{\Phi_2} < 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

erfüllt sind. Hierbei sind die Spalten der Matrizen  $\mathbf{W}_{\Phi_1}$  und  $\mathbf{W}_{\Phi_2}$  die Basen der Nullräume  $\mathcal{N}(\Phi_1)$  und  $\mathcal{N}(\Phi_2)$ , siehe Hackbusch u. a. (1996, S.672, Gl.2.50). Aus der Matrixungleichung Gl. (4.9), mit nichtlinearem Eintrag (1, 1) (inverse Matrixvariable), wurde die LMI Gl. (4.10) respektive Gl. (4.13) in der zu lösenden Matrixvariablen  $\mathbf{K}$ .

### 4.1.2 Linear-fractionaler Ansatz für den geschlossenen Regelkreis

Die *Linear Fractional Transformation* (LFT) ist folgendermaßen definiert.

**Definition: LFTs** (Doyle u. a., 1991, S.1227, Ab.2.1)

Nimmt man an  $\mathbf{M}$  ist eine komplexe Matrix unterteilt in

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)} \quad (4.15)$$

und lässt  $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$  und  $\mathbb{D}_2 \subset \mathbb{C}^{q_2 \times p_2}$  sein, dann werden die linear-fractionalen Transformationen (LFTs) als die Abbildungen:

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{M}, \bullet) : \mathbb{D}_2 \mapsto \mathbb{C}^{p_1 \times q_1} \quad \mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \bullet) : \mathbb{D}_1 \mapsto \mathbb{C}^{p_2 \times q_2}$$

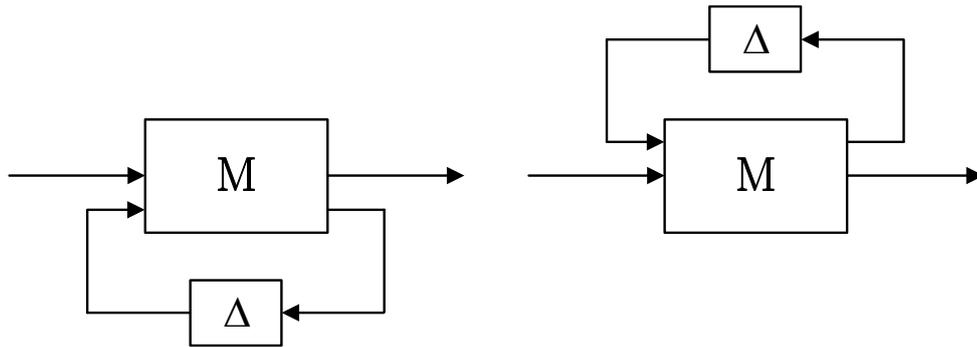
mit

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{M}, \Delta_l) := \mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{12} \Delta_l (\mathbf{I} - \mathbf{M}_{22} \Delta_l)^{-1} \mathbf{M}_{21} \quad (4.16)$$

$$\mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta_u) := \mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_{21} \Delta_u (\mathbf{I} - \mathbf{M}_{11} \Delta_u)^{-1} \mathbf{M}_{12} . \quad (4.17)$$

definiert. Dabei ist die Existenz der Inversen notwendig, sodass die LFTs eindeutig definiert sind.

Die Bezeichnung *linear-fractional* ergibt sich aus dem linearen, inversen Term in Gl. (4.16) und Gl. (4.17). In Rahmen dieser Arbeit sind die Unsicherheiten (in Form von variierenden Parametern) im Block  $\Delta$  zusammengefasst. Zur Veranschaulichung ist die



**Abbildung 4.1:** Untere LF-Transformation links und obere LF-Transformation rechts

untere (links) sowie die obere (rechts) LF-Transformation in **Abbildung 4.1** dargestellt, siehe hierzu Doyle u. a. (1991, S.1227, Abb. unten links).

Aus dem zeitabhängigen Parametervektor  $\theta(k) = [\theta_1(k) \ \dots \ \theta_p(k)] \in \mathbb{R}^p$  mit den

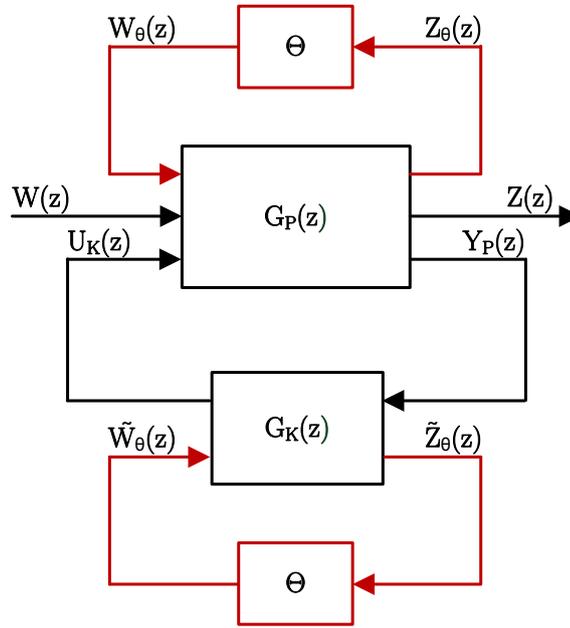
$i = 1, \dots, p$  variierenden Parametern ergibt sich die zeitabhängige Parameterdiagonalmatrix

$$\Theta(k) = \begin{bmatrix} \theta_1(k)\mathbf{I}_{r_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \theta_p(k)\mathbf{I}_{r_p} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

aus der Menge der Unsicherheiten

$$\Delta := \{\Theta(k) : \theta_i(k) \in \mathbb{R}\}, \quad (4.19)$$

gemäß Apkarian und Gahinet (1995, S.854, Gl.2.2 und Gl.2.3), mit der Dimension  $r_i > 1$ , wenn  $\theta_i(k)$  wiederholt wird. Die daraus resultierende LFT-Struktur für den geschlossenen



**Abbildung 4.2:** Blockschaltbild des geschlossenen LPV-Regelkreises: LPV-Strecke in der oberen LF-Form  $F_u(\mathbf{G}_P(z), \Theta)$  und LPV-Regler in der unteren LF-Form  $F_l(\mathbf{G}_K(z), \Theta)$  mit dem exogenen Eingang  $W(z)$  und dem exogenen Ausgang  $Z(z)$

Regelkreis mit parameter-variierender Unsicherheit, siehe **Abbildung 4.2** sowie Apkarian und Gahinet (1995, S.855, Abb.1a), erhält man aus der unteren LFT von Strecke und Regler

$$F_d(\mathbf{G}_P(z), \mathbf{G}_K(z), \Theta) = F_l(F_u(\mathbf{G}_P(z), \Theta), F_l(\mathbf{G}_K(z), \Theta)). \quad (4.20)$$

Dabei ist die Strecke durch die obere LFT  $F_u(\mathbf{G}_P(z), \Theta)$  und der Regler durch die untere LFT  $F_l(\mathbf{G}_K(z), \Theta)$  jeweils in LPV-Form gebracht worden.

Im Folgenden ist die LPV-Strecke

$$\begin{bmatrix} Z_\theta(z) \\ Z(z) \\ Y_P(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{P}\theta\theta}(z) & \mathbf{G}_{\mathbf{P}\theta 1}(z) & \mathbf{G}_{\mathbf{P}\theta 2}(z) \\ \mathbf{G}_{\mathbf{P}1\theta}(z) & \mathbf{G}_{\mathbf{P}11}(z) & \mathbf{G}_{\mathbf{P}12}(z) \\ \mathbf{G}_{\mathbf{P}2\theta}(z) & \mathbf{G}_{\mathbf{P}21}(z) & \mathbf{G}_{\mathbf{P}22}(z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{\mathbf{P}}(z)} \begin{bmatrix} W_\theta(z) \\ W(z) \\ U_K(z) \end{bmatrix}$$

$$W_\theta(z) = \Theta Z_\theta(z) \quad (4.21)$$

mit der Streckenübertragungsmatrix  $\mathbf{G}_{\mathbf{P}}(z)$  sowie der LPV-Regler

$$\begin{bmatrix} U_K(z) \\ \tilde{Z}_\theta(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{K}11}(z) & \mathbf{G}_{\mathbf{K}1\theta}(z) \\ \mathbf{G}_{\mathbf{K}\theta 1}(z) & \mathbf{G}_{\mathbf{K}\theta\theta}(z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{\mathbf{K}}(z)} \begin{bmatrix} Y_P(z) \\ \tilde{W}_\theta(z) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_\theta(z) = \Theta \tilde{Z}_\theta(z) \quad (4.22)$$

mit Reglerübertragungsmatrix  $\mathbf{G}_{\mathbf{K}}(z)$  gegeben, siehe hierzu Apkarian und Gahinet (1995, S.854, Gl.2.4 und Gl.2.5 sowie S.855, Abb.1a, Gl.2.8 und Gl.2.9).

### 4.1.3 Berechnung eines $H_\infty$ -LPV-Reglers

In diesem Unterabschnitt wird ein LPV-Regler  $F_l(\mathbf{G}_{\mathbf{K}}(z), \Theta)$  entwickelt, der zum einen den geschlossenen Regelkreis stabilisiert und zum anderen die Bedingung  $\gamma^2 \Theta^T \Theta \leq 1$  für alle Parametertrajektorien  $\theta(k)$  erfüllt. Hinzukommend soll für die  $\mathcal{L}_2$ -Systemverstärkung des geschlossenen LPV-Regelkreises

$$\max_{\|\Theta\|_\infty \leq 1/\gamma} \|F_{cl}(\mathbf{G}_{\mathbf{P}}, \mathbf{G}_{\mathbf{K}}, \Theta)\|_\infty < \gamma \quad (4.23)$$

gelten, gegeben in Apkarian und Gahinet (1995, S.855, Gl.2.10). Um dieses Problem mit Hilfe des *Small Gain Theorem*, siehe Zhou und Doyle (1998, S.137ff, Ab.8.2), für ein System mit Unsicherheit aus der Menge  $\Delta$  zu lösen, wird die Menge der positiv definiten Normierungen

$$\mathfrak{L}_\Delta = \{\mathbf{L} > 0 : \mathbf{L}\Theta = \Theta\mathbf{L}, \forall \Theta \in \Delta\} \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad (4.24)$$

mit  $r = \sum_{i=1}^p r_i$  eingeführt, siehe hierzu Apkarian und Gahinet (1995, S.855, Gl.2.13). Diese Menge  $\mathfrak{L}_\Delta$  besitzt die folgenden Eigenschaften, gegeben in Apkarian und Gahinet (1995, S.856):

P1)  $\mathbf{I}_r \in \mathfrak{L}_\Delta$ .

P2)  $\mathbf{L} \in \mathfrak{L}_\Delta \Rightarrow \mathbf{L}^T \in \mathfrak{L}_\Delta$ .

P3)  $\mathbf{L} \in \mathfrak{L}_\Delta \Rightarrow \mathbf{L}^{-1} \in \mathfrak{L}_\Delta$ .

$$P4) \mathbf{L}_1 \in \mathfrak{L}_\Delta, \mathbf{L}_2 \in \mathfrak{L}_\Delta \Rightarrow \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \Theta = \Theta \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2, \forall \Theta \in \Delta.$$

P5)  $\mathfrak{L}_\Delta$  ist eine konvexe Untermenge von  $\mathbb{R}^{r \times r}$ .

Dies hat zur Folge, dass das BRL, siehe **Lemma 1**, entsprechend angepasst werden muss. Im nachfolgenden *Scaled Bounded Real Lemma* wird die Parameterstruktur  $\Delta$  sowie die Menge  $\mathfrak{L}_\Delta$  mit den Skalierungen berücksichtigt.

**Lemma 3: Scaled BRL** (Apkarian und Gahinet, 1995, S.856, Lemma 3.2)

Betrachtet wird eine Parameterstruktur  $\Delta$ , die zugehörige Menge der Normierungen  $\mathfrak{L}_\Delta$ , definiert in Gl. (4.24), und eine quadratische, zeitdiskrete Übertragungsfunktion  $T(z)$  mit der Realisierung  $T(z) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i)  $\mathbf{A}$  ist stabil und es existiert ein  $\mathbf{L} \in \mathfrak{L}_\Delta$ , sodass

$$\|\mathbf{L}^{1/2} (\mathbf{D} + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}) \mathbf{L}^{-1/2}\|_\infty < \gamma.$$

(ii) Es existieren positiv definite Lösungen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{L} \in \mathfrak{L}_\Delta$  für die Matrixungleichung

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T & -\mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{L} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{L}^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Für den geschlossenen LPV-Regelkreis Gl. (4.20) ergibt sich die Strecke in Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_P(k+1) &= \mathbf{A}_P \mathbf{x}_P(k) + \mathbf{B}_\theta \mathbf{w}_\theta(k) + \mathbf{b}_1 w(k) + \mathbf{b}_2 u_K(k) \\ \mathbf{z}_\theta(k) &= \mathbf{C}_\theta \mathbf{x}_P(k) + \mathbf{D}_{\theta\theta} \mathbf{w}_\theta(k) + \mathbf{d}_{\theta 1} w(k) + \mathbf{d}_{\theta 2} u_K(k) \\ z(k) &= \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_P(k) + \mathbf{d}_{1\theta}^T \mathbf{w}_\theta(k) + d_{11} w(k) + d_{12} u_K(k) \\ y_P(k) &= \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_P(k) + \mathbf{d}_{2\theta}^T \mathbf{w}_\theta(k) + d_{21} w(k) \\ \mathbf{w}_\theta(k) &= \Theta \mathbf{z}_\theta(k) \end{aligned} \tag{4.25}$$

mit  $\mathbf{B}_\theta \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{C}_\theta \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $\mathbf{D}_{\theta\theta} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  und der Regler

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_K(k+1) &= \mathbf{A}_K \mathbf{x}_K(k) + \mathbf{b}_{K1} y_P(k) + \mathbf{B}_{K\theta} \tilde{\mathbf{w}}_\theta(k) \\ u_K(k) &= \mathbf{c}_{K1}^T \mathbf{x}_K(k) + d_{K11} y_P(k) + \mathbf{d}_{K1\theta}^T \tilde{\mathbf{w}}_\theta(k) \\ \tilde{\mathbf{z}}_\theta(k) &= \mathbf{C}_{K\theta} \mathbf{x}_K(k) + \mathbf{d}_{K\theta 1} y_P(k) + \mathbf{D}_{K\theta\theta} \tilde{\mathbf{w}}_\theta(k) \\ \tilde{\mathbf{w}}_\theta(k) &= \Theta \tilde{\mathbf{z}}_\theta(k), \end{aligned} \tag{4.26}$$

mit  $\mathbf{B}_{K\theta} \in \mathbb{R}^{k \times r}$  und  $\mathbf{D}_{K\theta\theta} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ .

Formt man den geschlossenen LPV-Regelkreis Gl. (4.20) entsprechend um

$$F_d(\mathbf{G}_P(z), \mathbf{G}_K(z), \Theta) = F_u \left( F_l(\tilde{\mathbf{G}}_P(z), \mathbf{G}_K(z)), \begin{bmatrix} \Theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Theta \end{bmatrix} \right), \quad (4.27)$$

siehe hierzu Apkarian und Gahinet (1995, S.855, Abb.1b, Gl.2.12), und erweitert die Matrizen Gl. (4.5)-(4.8), gilt das *Projection Lemma*, siehe **Lemma 2**, sowie das *Scaled Bounded Real Lemma*, siehe **Lemma 3**, für die LPV-Struktur Gl. (4.27).

Setzt man die erweiterten Matrizen, siehe Apkarian und Gahinet (1995, S.859, Gl.6.2 und Gl.6.3), in die Gl. (4.5)-(4.8) ein, ergeben sich die folgenden Matrizen

$$\hat{\mathbf{A}}_{\text{cl}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{k \times r} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{b}_{K_1} & \mathbf{B}_{K_\theta} \\ \mathbf{c}_{K_1}^T & d_{K_{11}} & \mathbf{d}_{K_{1\theta}}^T \\ \mathbf{C}_{K_\theta} & \mathbf{d}_{K_{\theta 1}} & \mathbf{D}_{K_{\theta\theta}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_k \\ \mathbf{c}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{r \times k} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}}, \quad (4.28)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{\text{cl}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_\theta & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0}_{k \times r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{k \times r} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{b}_{K_1} & \mathbf{B}_{K_\theta} \\ \mathbf{c}_{K_1}^T & d_{K_{11}} & \mathbf{d}_{K_{1\theta}}^T \\ \mathbf{C}_{K_\theta} & \mathbf{d}_{K_{\theta 1}} & \mathbf{D}_{K_{\theta\theta}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k \times r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_{2\theta}^T & d_{21} \\ \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}_{21}}, \quad (4.29)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\text{cl}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0}_{r \times k} \\ \mathbf{C}_\theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_1^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times k} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_{\theta 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & d_{12} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{b}_{K_1} & \mathbf{B}_{K_\theta} \\ \mathbf{c}_{K_1}^T & d_{K_{11}} & \mathbf{d}_{K_{1\theta}}^T \\ \mathbf{C}_{K_\theta} & \mathbf{d}_{K_{\theta 1}} & \mathbf{D}_{K_{\theta\theta}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_k \\ \mathbf{c}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{r \times k} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}} \quad \text{und} \quad (4.30)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{\text{cl}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\theta\theta} & \mathbf{d}_{\theta 1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_{1\theta}^T & d_{11} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}_{11}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times k} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_{\theta 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & d_{12} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & \mathbf{b}_{K_1} & \mathbf{B}_{K_\theta} \\ \mathbf{c}_{K_1}^T & d_{K_{11}} & \mathbf{d}_{K_{1\theta}}^T \\ \mathbf{C}_{K_\theta} & \mathbf{d}_{K_{\theta 1}} & \mathbf{D}_{K_{\theta\theta}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k \times r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}_{2\theta}^T & d_{21} \\ \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}_{21}} \quad (4.31)$$

für den geschlossenen Regelkreis.

Daraus berechnet sich der LPV-Regler Gl. (4.26) folgendermaßen

**Schritt 1:** Lösen der Matrixungleichungen Gl. (4.32) in den Variablen  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{L}_3$ ,  $\mathbf{J}_3$  und  $\gamma$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{R}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_P \mathbf{R} \mathbf{A}_P^T - \mathbf{R} & \mathbf{A}_P \mathbf{R} \mathbf{C}_\theta^T & \mathbf{A}_P \mathbf{R} \mathbf{c}_1 & \mathbf{B}_\theta & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{C}_\theta \mathbf{R} \mathbf{A}_P^T & -\gamma \mathbf{J}_3 + \mathbf{C}_\theta \mathbf{R} \mathbf{C}_\theta^T & \mathbf{C}_\theta \mathbf{R} \mathbf{c}_1 & \mathbf{D}_{\theta\theta} & \mathbf{d}_{\theta 1} \\ \mathbf{c}_1^T \mathbf{R} \mathbf{A}_P^T & \mathbf{c}_1^T \mathbf{R} \mathbf{C}_\theta^T & -\gamma + \mathbf{c}_1^T \mathbf{R} \mathbf{c}_1 & \mathbf{d}_{1\theta}^T & d_{11} \\ \mathbf{B}_\theta^T & \mathbf{D}_{\theta\theta}^T & \mathbf{d}_{1\theta} & -\gamma \mathbf{L}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_1^T & \mathbf{d}_{\theta 1}^T & d_{11} & \mathbf{0} & -\gamma \end{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathcal{R}} < 0,$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{S}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_P^T \mathbf{S} \mathbf{A}_P - \mathbf{S} & \mathbf{A}_P^T \mathbf{S} \mathbf{B}_\theta & \mathbf{A}_P^T \mathbf{S} \mathbf{b}_1 & \mathbf{C}_\theta^T & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{S} \mathbf{A}_P & -\gamma \mathbf{L}_3 + \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{S} \mathbf{B}_\theta & \mathbf{B}_\theta^T \mathbf{S} \mathbf{b}_1 & \mathbf{D}_{\theta\theta}^T & \mathbf{d}_{1\theta} \\ \mathbf{b}_1^T \mathbf{S} \mathbf{A}_P & \mathbf{b}_1^T \mathbf{S} \mathbf{B}_\theta & -\gamma + \mathbf{b}_1^T \mathbf{S} \mathbf{b}_1 & \mathbf{d}_{\theta 1}^T & d_{11} \\ \mathbf{C}_\theta & \mathbf{D}_{\theta\theta} & \mathbf{d}_{\theta 1} & -\gamma \mathbf{J}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_1^T & \mathbf{d}_{1\theta}^T & d_{11} & \mathbf{0} & -\gamma \end{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathcal{S}} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{S} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \mathbf{L}_3 \in \mathcal{L}_\Delta, \quad \mathbf{J}_3 \in \mathcal{L}_\Delta, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{L}_3 & \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_r & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.32)$$

mit den Nullräumen

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{R}} &= \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2^T & \mathbf{d}_{\theta 2}^T & d_{12} & \mathbf{0}_{1 \times r} & 0 \end{bmatrix} \right), \\ \mathcal{N}_{\mathcal{S}} &= \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{c}_2^T & \mathbf{d}_{2\theta}^T & d_{21} & \mathbf{0}_{1 \times r} & 0 \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

siehe hierfür Apkarian und Gahinet (1995, S.857, Theorem 4.2 und S.858, Theorem 5.1). Die erste sowie die zweite Matrixungleichung ist aufgrund der Multiplikationen zwischen den Optimierungsvariablen  $\gamma \mathbf{J}_3$  sowie  $\gamma \mathbf{L}_3$  im Eintrag (2, 2) und (4, 4) jeweils eine BMI. Deshalb wird die  $\mathcal{L}_2$ -Systemverstärkung auf  $\gamma = 1$  gesetzt und aus den BMIs werden LMIs.

**Schritt 2:** Berechnen der Matrizen  $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  durch

$$\mathbf{M} \mathbf{N}^T = \mathbf{I}_n - \mathbf{R} \mathbf{S} \quad (4.34)$$

mit Hilfe der *Singular Value Decomposition* (SVD), siehe hierzu Zhou und Doyle (1998, S.19, Ab.2.6).

**Schritt 3:** Berechnen der erweiterten Ljapunow-Matrix

$$\mathbf{X}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^T \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.35)$$

mit den erhaltenen Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$ , gemäß Apkarian und Gahinet (1995, S.859, Gl.6.4 und Gl.6.5).

**Schritt 4:** Festlegen der Matrizen  $\mathbf{L}_1 \in \mathfrak{L}_\Delta$  und  $\mathbf{L}_2$ , kommutativ mit der Menge  $\Delta$ , sodass  $\mathbf{L} := \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_2^T & \mathbf{L}_3 \end{bmatrix} > 0$  und  $\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix}$ .

Die Matrizen  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{J}$  können ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich der Einheitsmatrix gesetzt werden, siehe Apkarian und Gahinet (1995, S.857f).

**Schritt 5:** Berechnen der Reglermatrix  $\hat{\mathbf{K}}$  durch Lösen der LMI

$$\hat{\Psi} + \hat{\Phi}_1^T \hat{\mathbf{K}}^T \hat{\Phi}_2 + \hat{\Phi}_2^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\Phi}_1 < 0, \quad (4.36)$$

siehe Gl. (4.12)-(4.14), mit den erweiterten Matrizen Gl. (4.28)-(4.31) für den geschlossenen Regelkreis.

Der resultierende dynamische LPV-Regler mit der Regler-Matrix  $\hat{\mathbf{K}}$  aus Gl. (4.36) stabilisiert den geschlossenen Regelkreis und erfüllt die  $H_\infty$ -Spezifikation Gl. (4.23) mit  $\gamma = 1$ .

## 4.2 Störmodell in LF-Form

Die Anwendung der Theorie aus dem vorhergehenden Unterabschnitt auf das praktische Problem ist nicht eins zu eins umsetzbar. Wie schon in **Unterabschnitt 3.2.3** beschrieben, besteht beim Modellieren der Störung immer die Abhängigkeit, ein variierender Parameter pro Frequenz, die durch die Kosinusapproximation Gl. (3.64) aufgehoben wurde. Beim LF-Ansatz variieren die veränderlichen Streckenparameter nicht in einem Polytop, sondern sind in der Menge mit Unsicherheiten, siehe Gl. (4.19), zusammengefasst und durch einen separaten Block Gl. (4.18) über die LFT-Struktur mit der Strecke verschalten. In diesem Block  $\Theta$  besteht weiterhin die Abhängigkeit ein variierender Parameter pro Frequenz. Im Folgenden wird ein neuer Ansatz hergeleitet, der die Abhängigkeit ein variierender Parameter pro Frequenz aufhebt und zu einer Parameterreduktion mit nur einem variierenden Parameter führt.

### 4.2.1 LF-Transformation des monofrequenten Störmodells

Im ersten Schritt transformiert man das monofrequente Störmodell Gl. (3.41) mit einem variierenden Parameter und der Systemmatrix

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mathbf{d}}(\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(\theta(k)) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

in die obere LF-Form, siehe **Abbildung 4.1** (rechts). Man startet mit dem allgemeinen zeitdiskreten System in Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k+1) &= \mathbf{A}_{\mathbf{D}}\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) + \mathbf{B}_{1\mathbf{D}}\mathbf{w}(k) + \mathbf{b}_{2\mathbf{D}}u_D(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{C}_{1\mathbf{D}}\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) + \mathbf{D}_{11\mathbf{D}}\mathbf{w}(k) + \mathbf{d}_{12\mathbf{D}}u_D(k) \\ y_D(k) &= \mathbf{c}_{2\mathbf{D}}^T\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) + \mathbf{d}_{21\mathbf{D}}^T\mathbf{w}(k) + d_{22\mathbf{D}}u_D(k) \\ \mathbf{w}(k) &= \Theta(k)\mathbf{z}(k) \end{aligned} \quad (4.38)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^2$ , dem Eingang  $u_D \in \mathbb{R}$ , dem Ausgang  $y_D \in \mathbb{R}$ , dem exogenen Eingang  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ , dem exogenen Ausgang  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  sowie den Systemmatrizen entsprechender Dimension. Mit der Annahme  $\mathbf{d}_{12\mathbf{D}} = \mathbf{d}_{21\mathbf{D}}^T = \mathbf{0}$  und  $d_{22\mathbf{D}} = 0$  vereinfacht sich das System folgendermaßen

$$\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k+1) = \mathbf{A}_{\mathbf{D}}\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) + \mathbf{B}_{1\mathbf{D}}\mathbf{w}(k) + \mathbf{b}_{2\mathbf{D}}u_D(k) \quad (4.39)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{C}_{1\mathbf{D}}\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) + \mathbf{D}_{11\mathbf{D}}\mathbf{w}(k) \quad (4.40)$$

$$y_D(k) = \mathbf{c}_{2\mathbf{D}}^T\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) \quad (4.41)$$

$$\mathbf{w}(k) = \Theta(k)\mathbf{z}(k). \quad (4.42)$$

Setzt man Gl. (4.42) in die Ausgangsgleichung Gl. (4.40) ein und löst nach  $\mathbf{z}(k)$  auf ergibt sich

$$\mathbf{z}(k) = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{D}_{11\mathbf{D}}\Theta(k))^{-1}\mathbf{C}_{1\mathbf{D}}\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k). \quad (4.43)$$

Ersetzt man in der Zustandsgleichung Gl. (4.39) den Eingang  $\mathbf{w}(k)$  durch Gl. (4.42) und darin den Ausgang  $\mathbf{z}(k)$  durch Gl. (4.43), erhält man die umgeformte Zustandsgleichung

$$\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k+1) = \underbrace{[\mathbf{A}_{\mathbf{D}} + \mathbf{B}_{1\mathbf{D}}\Theta(k)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{D}_{11\mathbf{D}}\Theta(k))^{-1}\mathbf{C}_{1\mathbf{D}}]}_{\mathbf{M}_{\mathbf{D}}(\xi(k))}\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) + \mathbf{b}_{2\mathbf{D}}u_D(k). \quad (4.44)$$

Die Ausgangsgleichung Gl. (4.41) bleibt unverändert, welche in Kombination mit der umgeformten Zustandsgleichung Gl. (4.44) das LF-Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k+1) &= \mathbf{M}_{\mathbf{D}}(\xi(k))\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) + \mathbf{b}_{2\mathbf{D}}u_D(k) \\ y_D(k) &= \mathbf{c}_{2\mathbf{D}}^T\mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) \end{aligned} \quad (4.45)$$

des Systems Gl. (4.38) bildet.

### 4.2.2 Kosinusfunktion in LF-Form

Im nächsten Schritt fordert man, dass das Modell aus Gl. (4.45) mit dem monofrequenten Störmodell Gl. (3.41) mit der Systemmatrix aus Gl. (4.37)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_d(k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(\theta(k)) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_d(\theta(k))} \mathbf{x}_d(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_d} u_d(k) \\ y_d(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{c}}_d^T} \mathbf{x}_d(k) \end{aligned} \quad (4.46)$$

übereinstimmen soll. Daraus resultiert die Forderung

$$\mathbf{x}_D(k+1) \stackrel{!}{=} \mathbf{x}_d(k+1) \quad \text{und} \quad y_D(k) \stackrel{!}{=} y_d(k) \quad (4.47)$$

und man erhält direkt den Eingangsvektor

$$\mathbf{b}_{2D} = \mathbf{b}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

sowie den Ausgangsvektor

$$\mathbf{c}_{2D}^T = \bar{\mathbf{c}}_d^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Hingegen ergibt sich für die Systemmatrix  $\mathbf{M}_D(\xi(k))$  folgende linear-fraktionale Matrixgleichung

$$\underbrace{\left[ \mathbf{A}_D + \mathbf{B}_{1D} \boldsymbol{\Theta}(k) (\mathbf{I}_2 - \mathbf{D}_{11D} \boldsymbol{\Theta}(k))^{-1} \mathbf{C}_{1D} \right]}_{\mathbf{M}_D(\xi(k))} \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(\theta(k)) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}_d(\theta(k))}. \quad (4.50)$$

Definiert man für  $\mathbf{M}_D(\xi(k))$  folgende Struktur

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_D(\xi(k)) &:= \begin{bmatrix} m_{D11} & m_{D12} \\ m_{D21} & m_{D22}(\xi(k)) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_D + \underbrace{\mathbf{B}_{1D} \boldsymbol{\Theta}(k) (\mathbf{I}_2 - \mathbf{D}_{11D} \boldsymbol{\Theta}(k))^{-1} \mathbf{C}_{1D}}_{\mathbf{M}_{1D}(\xi(k))} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{D11} & a_{D12} \\ a_{D21} & a_{D22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{1D11} & m_{1D12} \\ m_{1D21} & m_{1D22}(\xi(k)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

ergeben sich aus der Forderung Gl. (4.50) die skalaren Einträge der Matrix  $\mathbf{M}_{\mathbf{D}}(\xi(k))$

$$m_{D_{11}} = a_{D_{11}} + m_{1_{D_{11}}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.52)$$

$$m_{D_{12}} = a_{D_{12}} + m_{1_{D_{12}}} \stackrel{!}{=} 1 \quad (4.53)$$

$$m_{D_{21}} = a_{D_{21}} + m_{1_{D_{21}}} \stackrel{!}{=} -1 \quad (4.54)$$

$$m_{D_{22}}(\xi(k)) = a_{D_{22}} + m_{1_{D_{22}}}(\xi(k)) \stackrel{!}{=} 2 \cos(\theta(k)) \quad (4.55)$$

entsprechend. Nimmt man für  $m_{1_{D_{11}}} = m_{1_{D_{12}}} = m_{1_{D_{21}}} = 0$  an, erhält man die Matrizen

$$\mathbf{A}_{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a_{D_{22}} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

und

$$\mathbf{M}_{\mathbf{1D}}(\xi(k)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{1_{D_{22}}}(\xi(k)) \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Zerlegt man die Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{1D}}(\xi(k)) &= \mathbf{B}_{\mathbf{1D}} \boldsymbol{\Theta}(k) (\mathbf{I}_2 - \mathbf{D}_{\mathbf{11D}} \boldsymbol{\Theta}(k))^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{1D}} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1_{D_{11}}} & b_{1_{D_{12}}} \\ b_{1_{D_{21}}} & b_{1_{D_{22}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\mathbf{1D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(k) & 0 \\ 0 & \xi(k) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Theta}(k)} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_2} - \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11_{D_{11}}} & d_{11_{D_{12}}} \\ d_{11_{D_{21}}} & d_{11_{D_{22}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{\mathbf{11D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(k) & 0 \\ 0 & \xi(k) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Theta}(k)} \right)^{-1} \dots \\ &\dots \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1_{D_{11}}} & c_{1_{D_{12}}} \\ c_{1_{D_{21}}} & c_{1_{D_{22}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\mathbf{1D}}} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1_{D_{11}}} & b_{1_{D_{12}}} \\ b_{1_{D_{21}}} & b_{1_{D_{22}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\mathbf{1D}}} \xi(k) \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_2} - \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11_{D_{11}}} & d_{11_{D_{12}}} \\ d_{11_{D_{21}}} & d_{11_{D_{22}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{\mathbf{11D}}} \xi(k) \right)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1_{D_{11}}} & c_{1_{D_{12}}} \\ c_{1_{D_{21}}} & c_{1_{D_{22}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\mathbf{1D}}} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1_{D_{11}}} & b_{1_{D_{12}}} \\ b_{1_{D_{21}}} & b_{1_{D_{22}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\mathbf{1D}}} \xi(k) \begin{bmatrix} 1 - d_{11_{D_{11}}} \xi(k) & -d_{11_{D_{12}}} \xi(k) \\ -d_{11_{D_{21}}} \xi(k) & 1 - d_{11_{D_{22}}} \xi(k) \end{bmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1_{D_{11}}} & c_{1_{D_{12}}} \\ c_{1_{D_{21}}} & c_{1_{D_{22}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{\mathbf{1D}}} \quad (4.58) \end{aligned}$$

in ihre Untermatrizen und fordert, dass nur der Matrixeintrag  $(2, 2) \neq 0$  ist, siehe Gl. (4.57), resultiert daraus die linear-fractionale Matrixgleichung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{1_{D21}} & b_{1_{D22}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{1D}} \xi(k) \begin{bmatrix} 1 - d_{11_{D11}} \xi(k) & -d_{11_{D12}} \xi(k) \\ -d_{11_{D21}} \xi(k) & 1 - d_{11_{D22}} \xi(k) \end{bmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c_{1_{D12}} \\ 0 & c_{1_{D22}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{1D}} \cdots \\ \cdots \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{1_{D22}}(\xi(k)) \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Aus Gl. (4.59) ergeben sich die skalaren Matrixeinträge  $b_{1_{D11}} = b_{1_{D12}} = 0$  der Matrix  $\mathbf{B}_{1D}$  sowie  $c_{1_{D11}} = c_{1_{D21}} = 0$  der Matrix  $\mathbf{C}_{1D}$ . Schlussendlich ergibt sich für die Kosinusfunktion die LF-Form

$$\begin{aligned} m_{D22}(\xi(k)) &= a_{D22} + m_{1_{D22}}(\xi(k)) = \\ &= a_{D22} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1_{D21}} & b_{1_{D22}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{1D}} \xi(k) \begin{bmatrix} 1 - d_{11_{D11}} \xi(k) & -d_{11_{D12}} \xi(k) \\ -d_{11_{D21}} \xi(k) & 1 - d_{11_{D22}} \xi(k) \end{bmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1_{D12}} \\ c_{1_{D22}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_{1D}} = \\ &\stackrel{!}{=} 2 \cos(\theta(k)). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Die nichtlineare Kosinusfunktion lässt keine Trennung zwischen der Anzahl an Frequenzen und den dafür notwendigen variierenden Parametern zu. Mit dieser Methode, die Kosinusfunktion in LF-Form Gl. (4.60) darzustellen, wurde diese Abhängigkeit ein variierender Parameter pro Frequenz aufgehoben und man kann durch

$$\Theta(k) = \begin{bmatrix} \xi(k) & 0 \\ 0 & \xi(k) \end{bmatrix} = \xi(k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

beliebig viele Frequenzen mit nur einem variierenden Parameter  $\xi(k)$  darstellen.

### 4.2.3 Parameterbestimmung der LF-Kosinusfunktion

Im letzten Schritt geht es um die Bestimmung der Parameter der Matrixeinträge von  $m_{D22}(\xi(k))$ , sodass Gl. (4.60) erfüllt wird. Wie schon in **Unterabschnitt 3.2** beschrieben, ist der zeitveränderliche Term des variierenden Parameters  $\theta(k) = (2\pi f_0(k)T)$ , bezogen auf eine Frequenz, die Grundfrequenz  $f_0(k)$ . Die Optimierungsparameter für  $m_{D22}(\xi(k))$  erhält man durch Lösen des quadratischen Minimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{v}} \|2 \cos(\theta(k)) - (a_{D22} + m_{1_{D22}}(\xi(k)))\|_2^2, \quad (4.62)$$

mit dem Parametervektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{D22} & b_{1D21} & b_{1D22} & d_{11D11} & d_{11D12} & d_{11D21} & d_{11D22} & c_{1D12} & c_{1D22} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

und  $\theta(k) \in [\theta_{min}, \theta_{max}] = [(2\pi f_{0_{min}} T), (2\pi f_{0_{max}} T)]$ . Durch Gl. (4.62) bestimmt man im Frequenzintervall  $f_0 \in [f_{0_{min}}, f_{0_{max}}]$  die LF-Kosinusapproximation, abhängig von der Wahl des Parameters  $\xi$ .

Vorab ist es notwendig, eine Normierung des variierenden Parameters auf das Intervall  $[-1, 1]$  vorzunehmen, siehe **Unterabschnitt 4.1.3**. Dafür wählt man folgenden linearen Ansatz, gegeben in Ballesteros und Bohn (2011a, S.1341, Gl.5),

$$F_{nom}(\xi(k)) = \alpha + \beta\xi(k) \quad (4.64)$$

und mit der Bedingung  $\xi(k) \in [\xi_{min}, \xi_{max}] \stackrel{!}{=} [-1, 1]$ , ergibt sich für

$$\begin{aligned} F_{nom}(\xi_{min}) &= -1, \\ F_{nom}(\xi_{max}) &= +1 \end{aligned} \quad (4.65)$$

das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \xi_{min} \\ 1 & \xi_{max} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}. \quad (4.66)$$

Durch invertieren der Matrix  $\mathbf{A}$  und auflösen nach dem Parametervektor  $\mathbf{x}$ , erhält man

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(\xi_{max} + \xi_{min})}{\xi_{max} - \xi_{min}} \\ \frac{2}{\xi_{max} - \xi_{min}} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

und aus Gl. (4.64) wird

$$F_{nom}(\xi(k)) = \left( \frac{-(\xi_{max} + \xi_{min})}{\xi_{max} - \xi_{min}} \right) + \left( \frac{2}{\xi_{max} - \xi_{min}} \right) \xi(k). \quad (4.68)$$

Entscheidend ist, die LF-Kosinusfunktion Gl. (4.60) in den vorgegebenen Frequenzintervallen mit der Abtastzeit  $T$  bestmöglich zu approximieren. Durch die Wahl des variierenden Parameters  $\xi$  können unterschiedlich genaue Approximationen erzielt werden.

Für diesen Fall wurden die folgenden vier Varianten

$$\xi = \theta = (2\pi f_0 T) \quad \text{mit} \quad \theta_{min} = (2\pi f_{0_{min}} T), \quad \theta_{max} = (2\pi f_{0_{max}} T), \quad (4.69)$$

$$\xi = \tilde{\theta} = (2\pi f_0 T)^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{\theta}_{min} = (2\pi f_{0_{min}} T)^2, \quad \tilde{\theta}_{max} = (2\pi f_{0_{max}} T)^2, \quad (4.70)$$

$$\xi = \hat{\theta} = (2\pi f_0 T)^3 \quad \text{mit} \quad \hat{\theta}_{min} = (2\pi f_{0_{min}} T)^3, \quad \hat{\theta}_{max} = (2\pi f_{0_{max}} T)^3, \quad (4.71)$$

$$\xi = \check{\theta} = (2\pi f_0 T)^4 \quad \text{mit} \quad \check{\theta}_{min} = (2\pi f_{0_{min}} T)^4, \quad \check{\theta}_{max} = (2\pi f_{0_{max}} T)^4, \quad (4.72)$$

ausgewählt. Somit ergeben sich für das Minimierungsproblem Gl. (4.62) mit Gl. (4.68) folgende Gütefunktionen

$$F_1(f_0) = 2 \cos(2\pi f_0 T) - (a_{D_{22}} + m_{1_{D_{22}}}(F_{nom}(\theta))), \quad (4.73)$$

$$F_2(f_0) = 2 \cos(2\pi f_0 T) - (a_{D_{22}} + m_{1_{D_{22}}}(F_{nom}(\tilde{\theta}))), \quad (4.74)$$

$$F_3(f_0) = 2 \cos(2\pi f_0 T) - (a_{D_{22}} + m_{1_{D_{22}}}(F_{nom}(\hat{\theta}))), \quad (4.75)$$

$$F_4(f_0) = 2 \cos(2\pi f_0 T) - (a_{D_{22}} + m_{1_{D_{22}}}(F_{nom}(\check{\theta}))), \quad (4.76)$$

für  $f_0 \in [f_{0_{min}}, f_{0_{max}}]$ . Das Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{v}} \|F_i\|_2^2 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.77)$$

kann mit der MATLAB-Funktion „*fminsearch(fun,x0,options)*“, der Fa. MathWorks<sup>®</sup>, jeweils in den Parametervariablen  $\mathbf{v}$  aus Gl. (4.63) gelöst werden. Hierfür gibt man die Gütefunktion  $F_i$ , die Parameterstartwerte sowie die Optimierungstoleranzen vor und der Algorithmus sucht mit Hilfe des nichtlinearen *Nelder-Mead-Verfahren*, siehe Nelder und Mead (1965), das lokale Minimum. Dies wurde für die Funktionen  $F_1$  bis  $F_4$  jeweils in dem Frequenzintervall  $f_0 \in [0, 250]$  Hz mit  $T = 1$  ms durchgeführt. In **Tabelle 4.1** sind im vorgegebenen Frequenzintervall für die vier Funktionen der minimale, der maximale sowie der durchschnittliche quadratische Fehler zwischen der Kosinusfunktion und der approximierten LF-Kosinusfunktion aufgelistet.

	MIN $[(F - 2 \cos(\cdot))^2]$	MAX $[(F - 2 \cos(\cdot))^2]$	$\emptyset [(F - 2 \cos(\cdot))^2]$
$F_1$	$1.22 \times 10^{-17}$	$1.65 \times 10^{-7}$	$8.15 \times 10^{-8}$
$F_2$	$8.51 \times 10^{-16}$	$1.14 \times 10^{-7}$	$5.67 \times 10^{-8}$
$F_3$	$1.02 \times 10^{-13}$	$5.59 \times 10^{-5}$	$2.76 \times 10^{-5}$
$F_4$	$3.09 \times 10^{-13}$	$3.89 \times 10^{-4}$	$1.94 \times 10^{-4}$

**Tabelle 4.1:** Spalte 1 der minimale Fehler, Spalte 2 der maximale Fehler und Spalte 3 der durchschnittliche Fehler der quadratischen Differenz, zwischen der approximierten Funktion  $F$  und der Kosinusfunktion, für das Frequenzintervall  $f_0 \in [0, 250]$  Hz und  $T = 1$  ms

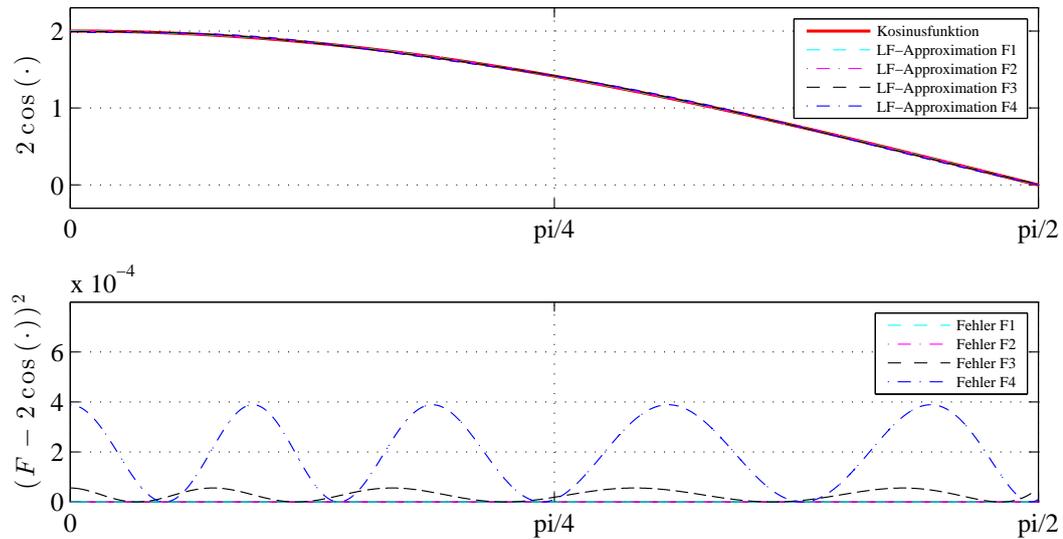
Die berechneten Werte des Parametervektors  $\mathbf{v}$  aus Gl. (4.63) im besagten Frequenzintervall sind für die vier Funktionen in **Tabelle 4.2** aufgeführt. Hinzukommend ist in

$\mathbf{v}$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
$a_{D_{22}}$	1.4142	0.8884	0.6316	0.4783
$b_{1D_{21}}$	-1.1537	-0.7429	-0.4198	-0.4996
$b_{1D_{22}}$	1.0141	0.7914	1.2730	0.7248
$d_{11D_{11}}$	-0.0460	0.3154	0.6913	0.7128
$d_{11D_{12}}$	-1.1496	-0.9611	-0.4039	-0.4296
$d_{11D_{21}}$	0.0591	-0.0225	-0.5158	-0.1158
$d_{11D_{22}}$	-0.4521	0.0233	-1.2304	0.4775
$c_{1D_{12}}$	0.1890	1.2628	-0.0824	-0.5131
$c_{1D_{22}}$	-0.1448	0.2994	-0.7132	-1.2626

**Tabelle 4.2:** Berechneter Parametervektor  $\mathbf{v}$  für die Funktionen  $F_1$  bis  $F_4$  im Frequenzintervall  $f_0 \in [0, 250]$  Hz und  $T = 1$  ms

**Abbildung 4.3** der Vergleich zwischen der Kosinusfunktion und den verschiedenen Approximationsfunktionen sowie deren Approximationsfehler dargestellt. Der obere Graph zeigt die Funktionsverläufe über dem Intervall  $[0, \pi/2]$ , wohingegen der quadratische Approximationsfehler im unteren Graphen dargestellt ist.

Aus **Tabelle 4.1** ist ersichtlich, dass mit den Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  im vorgegebenen Frequenzintervall sehr genaue Approximationen erzielt werden. Die Gütefunktion  $F_2$  mit  $\tilde{\theta} = (2\pi f_0 T)^2$  liefert die genaueste Approximation. Vergrößert man das Frequenzintervall  $f_0 \in [0, 100]$  Hz jeweils um 100 Hz, bei gleichbleibender Abtastzeit  $T = 1$  ms, erhält man näherungsweise die Grenze für das maximal mögliche Approximationsintervall, siehe **Tabelle 4.3**. Das komplette Intervall  $[0, 500]$  Hz kann mit dieser Kosinusapproximation in LF-Form nicht approximiert werden. Die Grundfrequenz  $f_0 = 500$  Hz entspricht bei einer Abtastzeit von  $T = 1$  ms der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi f_0 T = \pi$ , sodass der Kosinus den Wert Null annimmt und dann das Vorzeichen wechselt. Das maximal mögliche Approximationsintervall beträgt  $[0, 499]$  Hz, siehe letzte Zeile der **Tabelle 4.3**. In der praktischen Anwendung liegen die Störfrequenzen in einem kompletten Frequenzintervall von 350 Hz, sodass die Approximationsgüte der Funktion  $F_2$  problemlos ausreicht.



**Abbildung 4.3:** Oberer Graph: Kosinusfunktion (rot dick), Approximationsfunktion  $F_1$  (cyan gestrichelt),  $F_2$  (magenta punkt-gestrichelt),  $F_3$  (schwarz gestrichelt) und  $F_4$  (blau punkt-gestrichelt) über dem Intervall  $[0, \pi/2]$  mit  $T = 1$  ms; Unterer Graph: Verlauf des quadratischen Fehlers, Differenz zwischen der approximierten Funktion  $F$  und der Kosinusfunktion, von den Approximationsfunktionen  $F$  (Farben wie oben) über dem Intervall  $[0, \pi/2]$  mit  $T = 1$  ms

	$\text{MIN}[(F - 2 \cos(\cdot))^2]$	$\text{MAX}[(F - 2 \cos(\cdot))^2]$	$\emptyset [(F - 2 \cos(\cdot))^2]$
$F_{2_{[0,100]Hz}}$	$2.21 \times 10^{-19}$	$5.49 \times 10^{-12}$	$2.74 \times 10^{-12}$
$F_{2_{[0,200]Hz}}$	$8.92 \times 10^{-17}$	$3.84 \times 10^{-9}$	$1.91 \times 10^{-9}$
$F_{2_{[0,300]Hz}}$	$1.12 \times 10^{-17}$	$1.17 \times 10^{-6}$	$5.80 \times 10^{-7}$
$F_{2_{[0,400]Hz}}$	$8.97 \times 10^{-19}$	$2.30 \times 10^{-10}$	$1.15 \times 10^{-10}$
$F_{2_{[0,500]Hz}}$	$1.50 \times 10^{-32}$	4.0	2.0
$F_{2_{[0,499]Hz}}$	$6.04 \times 10^{-17}$	$1.92 \times 10^{-8}$	$9.57 \times 10^{-9}$

**Tabelle 4.3:** Spalte 1 der minimale Fehler, Spalte 2 der maximale Fehler und Spalte 3 der durchschnittliche Fehler der quadratischen Differenz, zwischen der approximierten Funktion  $F_2$  und der Kosinusfunktion, für das Frequenzintervall  $f_0 \in [0, 100]$  Hz,  $f_0 \in [0, 200]$  Hz,  $f_0 \in [0, 300]$  Hz,  $f_0 \in [0, 400]$  Hz,  $f_0 \in [0, 500]$  Hz und  $f_0 \in [0, 499]$  Hz mit  $T = 1$  ms

Im Folgenden ist das monofrequente Störmodell in LF-Form mit den approximierten Modellparametern  $\mathbf{v}$  gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_D(k+1) &= \mathbf{A}_D \mathbf{x}_D(k) + \mathbf{B}_{1D} \mathbf{w}(k) + \mathbf{b}_{2D} u_D(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{C}_{1D} \mathbf{x}_D(k) + \mathbf{D}_{11D} \mathbf{w}(k) \\ y_D(k) &= \mathbf{c}_{2D}^T \mathbf{x}_D(k) \\ \mathbf{w}(k) &= \Theta(k) \mathbf{z}(k)\end{aligned}\tag{4.78}$$

mit den Systemmatrizen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_D &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \tilde{a}_{D22} \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{1D} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_{1D21} & \tilde{b}_{1D22} \end{bmatrix}, & \mathbf{b}_{2D} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{1D} &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{c}_{1D12} \\ 0 & \tilde{c}_{1D22} \end{bmatrix}, & \mathbf{D}_{11D} &= \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11D11} & \tilde{d}_{11D12} \\ \tilde{d}_{11D21} & \tilde{d}_{11D22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_{2D}^T &= [1 \quad 0]\end{aligned}\tag{4.79}$$

und dem variierenden Parameter  $\xi(k) = \tilde{\theta}(k) = (2\pi f_0(k)T)^2$ . Daraus resultiert die Unsicherheitsmatrix

$$\Theta(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{nom}(k) & 0 \\ 0 & \tilde{\theta}_{nom}(k) \end{bmatrix}\tag{4.80}$$

mit dem normierten variierenden Parameter

$$\tilde{\theta}_{nom}(k) = \left( \frac{-(\tilde{\theta}_{max} + \tilde{\theta}_{min})}{\tilde{\theta}_{max} - \tilde{\theta}_{min}} \right) + \left( \frac{2}{\tilde{\theta}_{max} - \tilde{\theta}_{min}} \right) \tilde{\theta}(k).\tag{4.81}$$

Alle skalaren Einträge der Systemmatrizen Gl. (4.79) mit hochgestellter ( $\tilde{\cdot}$ ) stehen hier für einen, durch die MATLAB-Funktion „*fminsearch*“, numerisch bestimmten Parameter.

#### 4.2.4 LF-Störmodell mit $L$ beliebigen Frequenzen und einem variierenden Parameter

Ausgehend vom monofrequenten Modell Gl. (4.78)-(4.81) und dem variierenden Parameter  $\tilde{\theta}(k)$  lässt sich ohne weiteres das Störmodell für beliebig viele Frequenzen  $L$  aufstellen. Zunächst fasst man die Systemmatrizen Gl. (4.79) zu der Matrix

$$\mathcal{M}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_D & \mathbf{B}_{1D} & \mathbf{b}_{2D} \\ \mathbf{C}_{1D} & \mathbf{D}_{11D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_{2D}^T & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix},\tag{4.82}$$

mit der Dimension  $\mathcal{M}_{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  zusammen. Diese Matrix enthält den kompletten Parametersatz für das monofrequente LPV-Störmodell in LF-Form mit der Grundfrequenz  $f_0 \in [f_{0_{min}}, f_{0_{max}}]$ . Führt man wie in Gl. (3.56) den Parameter  $\nu_l \in \mathbb{R}_+$  ein, sodass jede zeitveränderliche Frequenz  $f_l(k) = \nu_l f_0(k)$  in Abhängigkeit von der Grundfrequenz  $f_0(k)$  eingestellt werden kann, ergibt sich für jede Frequenz  $f_l(k)$  im Frequenzintervall  $f_0 \in [f_{0_{min}}, f_{0_{max}}]$  eine Gütefunktion

$$F_{2_l}(f_0) = 2 \cos(2\pi\nu_l f_0 T) - (a_{D_{22_l}} + m_{1D_{22_l}}(F_{nom}(\tilde{\theta}))). \quad (4.83)$$

Durch Lösen des Minimierungsproblems Gl. (4.77) mit der Gütefunktion Gl. (4.83) erhält man für jede Frequenz  $f_l$ , mit  $l = 1, \dots, L$ , jeweils einen Parametersatz  $\mathcal{M}_{\mathbf{d}}$ . Fasst man diese  $L$  Parametersätze zu der Matrix

$$\mathcal{M}_{\mathbf{D}_l} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{D}_{l=1}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_{\mathbf{D}_{l=L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{1\mathbf{D}_{l=1}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{B}_{1\mathbf{D}_{l=L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{2\mathbf{D}} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{2\mathbf{D}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1\mathbf{D}_{l=1}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{C}_{1\mathbf{D}_{l=L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11\mathbf{D}_{l=1}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{D}_{11\mathbf{D}_{l=L}} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{c}_{2\mathbf{D}}^T \ \cdots \ \mathbf{c}_{2\mathbf{D}}^T) & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad l = 1, \dots, L \quad (4.84)$$

zusammen und erweitert entsprechend die Unsicherheitsmatrix

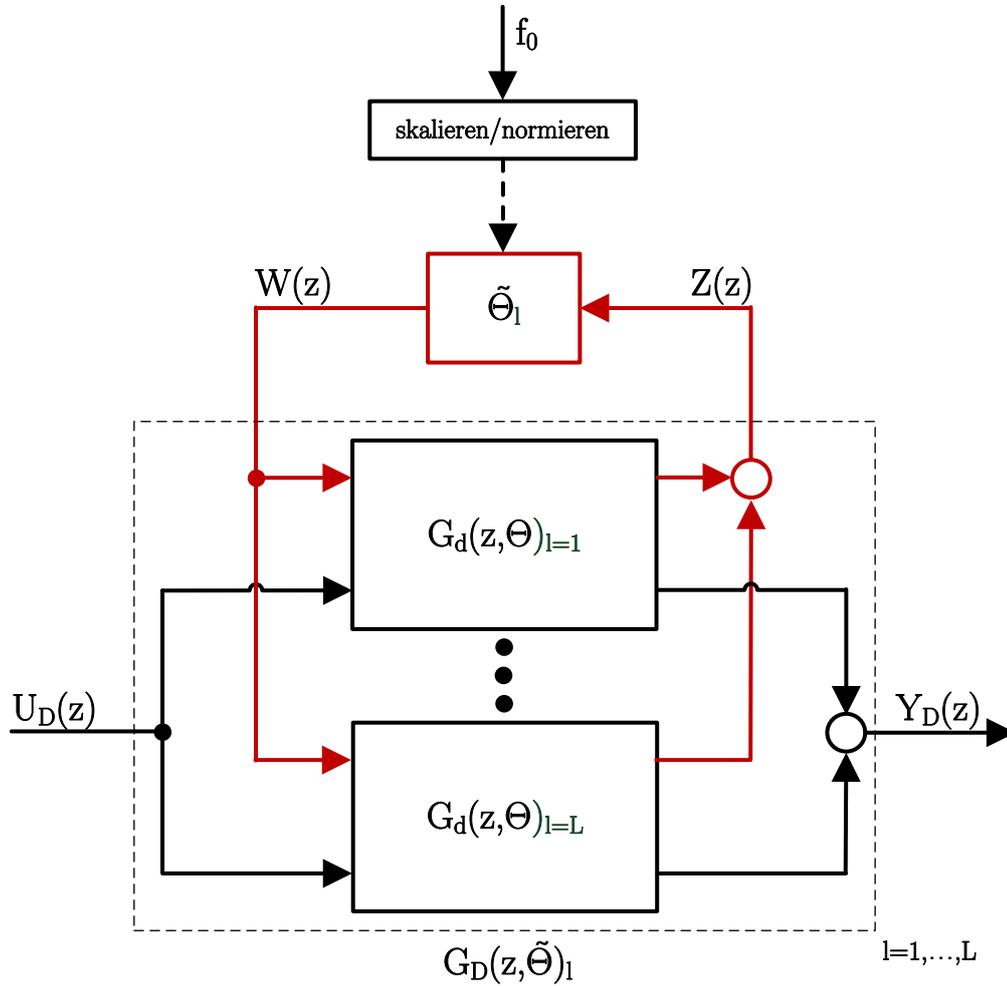
$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_l(k) &= \begin{bmatrix} \Theta_{l=1}(k) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_{l=L}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\theta}_{nom}(k)\mathbf{I}_2)_{l=1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & (\tilde{\theta}_{nom}(k)\mathbf{I}_2)_{l=L} \end{bmatrix} = \\ &= \tilde{\theta}_{nom}(k) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2l} \end{bmatrix} \quad l = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (4.85)$$

erhält man das LPV-Störmodell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k+1) \\ \mathbf{z}(k) \\ y_{\mathbf{D}}(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{D}_l} & \tilde{\mathbf{B}}_{1\mathbf{D}_l} & \tilde{\mathbf{b}}_{2\mathbf{D}} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{1\mathbf{D}_l} & \tilde{\mathbf{D}}_{11\mathbf{D}_l} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{2\mathbf{D}}^T & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_{\mathbf{D}_l}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{D}}(k) \\ \mathbf{w}(k) \\ u_{\mathbf{D}}(k) \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{w}(k) = \tilde{\Theta}_l(k)\mathbf{z}(k) \quad l = 1, \dots, L$$

für eine Störung aus überlagerten Sinusschwingungen (Multisinus). Das LPV-Modell besteht aus  $L$  Sinusschwingungen (Überlagerung harmonischer Einzelschwingungen) und nur einem variierenden Parameter  $\tilde{\theta}_{nom}(k) = \alpha + \beta\tilde{\theta}(k)$ , siehe Gl. (4.64) und Gl. (4.70).

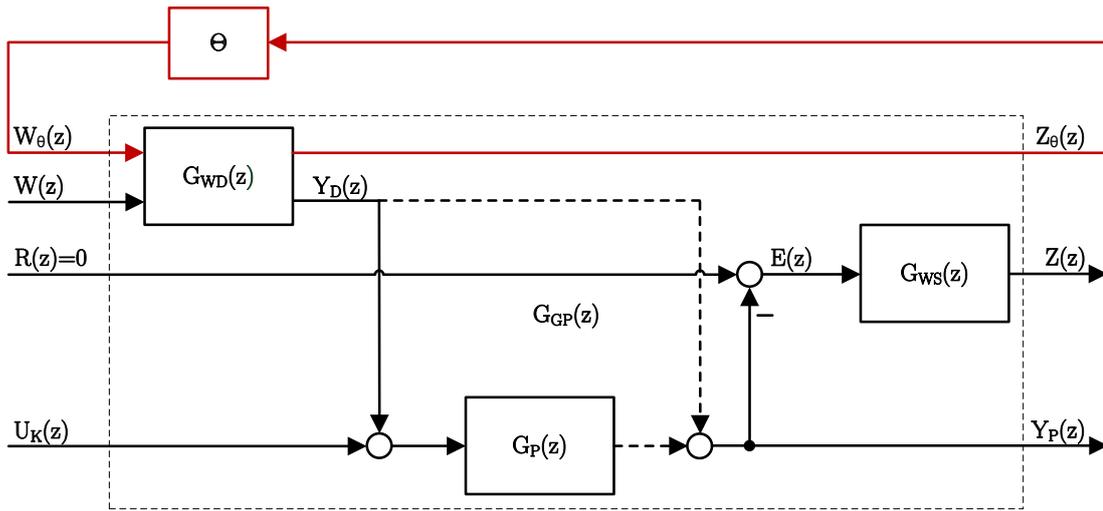


**Abbildung 4.4:** LFT Störmodell  $G_D(z, \tilde{\Theta})_l$  in der oberen LF-Form mit maximal  $L$  Frequenzen, bestehend aus den monofrequenten Einzelmodellen  $G_d(z, \Theta)_l$  sowie dem Block  $\tilde{\Theta}_l = \tilde{\theta}_{nom} \mathbf{I}_{2l}$ , siehe Gl. (4.85), mit einem variierenden Parameter  $\tilde{\theta}_{nom}$

Zusammenfassend: Man entscheidet sich für  $L$  Frequenzen, die durch Multiplikation des Parameters  $\nu_l$  mit der Grundfrequenz  $f_0$  eingestellt werden. Anschließend löst man das Minimierungsproblem Gl. (4.77) mit der Gütefunktion Gl. (4.83) für das Frequenzintervall  $f_0 \in [f_{0_{min}}, f_{0_{max}}]$  und erhält pro Frequenz jeweils einen Parametersatz  $\mathcal{M}_d$ . Diese  $L$  Parametersätze fasst man zur Matrix  $\mathcal{M}_{D_l}$  zusammen und passt die Unsicherheitsmatrix  $\tilde{\Theta}_l(k) \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$  entsprechend an. Daraus resultiert das LPV-Störmodell eines Multisinus in LF-Form, siehe **Abbildung 4.4**, mit einem variierenden Parameter  $\tilde{\theta}_{nom}$ .

### 4.3 Verallgemeinerte LPV-Strecke in LF-Form

In diesem Unterabschnitt wird die verallgemeinerte Regelstrecke detailliert beschrieben. Sie besteht aus dem hergeleiteten LPV-Störmodell Gl. (4.86), der oberen LF-Transformation  $F_u(G_{WD}(z), \Theta)$  mit der Unsicherheit  $\Theta = \tilde{\Theta}_l$  Gl. (4.85), aus der eigentlichen Regelstrecke  $G_P(z)$  und dem Gewichtungsfilter  $G_{WS}(z)$  mit dem Regelfehler als Eingang. Das dazugehörige Blockschaltbild ist in **Abbildung 4.5** dargestellt.



**Abbildung 4.5:** Verallgemeinerte LPV-Strecke aus der oberen LF-Transformation  $F_u(G_{GP}(z), \Theta)$  bestehend aus dem Störmodell  $G_{WD}(z)$  in LF-Form und dem durch Rückführschleife verbundenen Parameterblock  $\Theta$ , mit  $Y_D(z)$  als Eingangsstörung (durchgezogene Linie) oder als Ausgangsstörung (gestrichelte Linie), der Regelstrecke  $G_P(z)$  sowie dem Sensitivitätsgewichtungsfilter  $G_{WS}(z)$

Zur Wahl beziehungsweise Auslegung des Gewichtungsfilters wird hier auf die Ausführungen aus **Unterabschnitt 3.3** sowie Gl. (3.70) und Gl. (3.71) verwiesen. Das Modell der Regelstrecke  $G_P(z)$  erhält man durch Identifikation der Strecke der praktischen Anwendung. Darauf wird in **Abschnitt 5** und **Abschnitt 6** näher eingegangen.

Die verallgemeinerte LPV-Regelstrecke in LF-Form hat folgende Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{\text{GP}}(k+1) &= \mathbf{A}_{\text{GP}_l} \mathbf{x}_{\text{GP}}(k) + \mathbf{B}_{\text{GP}_l} \mathbf{u}_{\text{GP}}(k) \\
 \mathbf{y}_{\text{GP}}(k) &= \mathbf{C}_{\text{GP}_l} \mathbf{x}_{\text{GP}}(k) + \mathbf{D}_{\text{GP}_l} \mathbf{u}_{\text{GP}}(k) \\
 \mathbf{w}_\theta(k) &= \tilde{\Theta}_l(k) \mathbf{z}_\theta(k)
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

mit dem zusammengefassten Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{\text{GP}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{D}}(k) \\ \mathbf{x}_{\text{WS}}(k) \\ \mathbf{x}_{\text{P}}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.88)$$

dem Eingangsvektor

$$\mathbf{u}_{\text{GP}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\theta}(k) \\ w(k) \\ u_K(k) \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

sowie dem Ausgangsvektor

$$\mathbf{y}_{\text{GP}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\theta}(k) \\ z(k) \\ y_P(k) \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

für  $l = 1, \dots, L$  Frequenzen. Für den Fall  $y_D$  als Eingangsstörung haben die Systemmatrizen folgende Form

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{GP}_l} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -b_{\text{WS}}d_P\tilde{\mathbf{c}}_{\text{2D}}^T & a_{\text{WS}} & -b_{\text{WS}}\mathbf{c}_{\text{P}}^T \\ \mathbf{b}_{\text{P}}\tilde{\mathbf{c}}_{\text{2D}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\text{P}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\text{GP}_l} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{1D}_l} & \tilde{\mathbf{b}}_{\text{2D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -b_{\text{WS}}d_P \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_{\text{P}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{\text{GP}_l} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{\text{1D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -d_{\text{WS}}d_P\tilde{\mathbf{c}}_{\text{2D}}^T & c_{\text{WS}} & -d_{\text{WS}}\mathbf{c}_{\text{P}}^T \\ d_P\tilde{\mathbf{c}}_{\text{2D}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{\text{P}}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\text{GP}_l} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{\text{11D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -d_{\text{WS}}d_P \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & d_P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.91)$$

und für den Fall  $y_D$  als Ausgangsstörung erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{GP}_l} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -b_{\text{WS}}\tilde{\mathbf{c}}_{\text{2D}}^T & a_{\text{WS}} & -b_{\text{WS}}\mathbf{c}_{\text{P}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\text{P}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\text{GP}_l} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{1D}_l} & \tilde{\mathbf{b}}_{\text{2D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -b_{\text{WS}}d_P \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_{\text{P}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{\text{GP}_l} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{\text{1D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -d_{\text{WS}}\tilde{\mathbf{c}}_{\text{2D}}^T & c_{\text{WS}} & -d_{\text{WS}}\mathbf{c}_{\text{P}}^T \\ \tilde{\mathbf{c}}_{\text{2D}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{\text{P}}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\text{GP}_l} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{\text{11D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -b_{\text{WS}}d_P \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & d_P \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Die Dimension der Systemmatrix  $\mathbf{A}_{\text{GP}_l} \in \mathbb{R}^{(2l+1+n) \times (2l+1+n)}$  ergibt sich aus der Addition der Dimension des Störmodells, der Strecke und des Gewichtungsfilters. Da das identifizierte Modell der Regelstrecke ein System ohne Durchgriff ist, also  $d_P = 0$ , erhält man

für  $y_D$  als Eingangsstörung folgende vereinfachten Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{GP}_l} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{WS} & -b_{WS}\mathbf{c}_P^T \\ \mathbf{b}_P\tilde{\mathbf{c}}_{2D}^T & \mathbf{0} & \mathbf{A}_P \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{\text{GP}_l} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{1\text{D}_l} & \tilde{\mathbf{b}}_{2D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_P \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\text{GP}_l} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{1\text{D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c_{WS} & -d_{WS}\mathbf{c}_P^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_P^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_{\text{GP}_l} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{11\text{D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

und für den Fall  $y_D$  als Ausgangsstörung die Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{GP}_l} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -b_{WS}\tilde{\mathbf{c}}_{2D}^T & a_{WS} & -b_{WS}\mathbf{c}_P^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_P \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{\text{GP}_l} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{1\text{D}_l} & \tilde{\mathbf{b}}_{2D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_P \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\text{GP}_l} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{1\text{D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -d_{WS}\tilde{\mathbf{c}}_{2D}^T & c_{WS} & -d_{WS}\mathbf{c}_P^T \\ \tilde{\mathbf{c}}_{2D}^T & \mathbf{0} & \mathbf{c}_P^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}}_{\text{GP}_l} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{11\text{D}_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

In diesem Unterabschnitt wurde die verallgemeinerte LPV-Regelstrecke in LF-Form hergeleitet. Das darin erhaltene Störmodell in LF-Form benötigt nur einen variierenden Parameter, siehe Gl. (4.85), für beliebige Frequenzen. Es wurden beide Fälle  $y_D$  als Eingangsstörung sowie als Ausgangsstörung aufgeführt. Diese verallgemeinerte LPV-Strecke in LF-Form mit  $y_D$  als Eingangsstörung wird in **Abschnitt 5** und **6** zur Reglerberechnung verwendet.

## 5 Verifikation der LPV-Ansätze in der Simulation

Für die praktische Umsetzung des AVC-Ansatzes am KFZ ist es notwendig, die zwei neu entwickelten Methoden der Parameterreduktion, siehe **Abschnitt 3** und **4**, vorab in der Simulation zu testen und einander gegenüberzustellen. Es handelt sich um modellbasierte Reglerentwurfsverfahren mit dem grundlegenden Ziel, eine Störung aus überlagerten harmonischen Schwingungen bestmöglich zu unterdrücken.

Zu Demonstrationszwecken wird das Modell einer elektronischen Drosselklappe als Regelstrecke in der Simulation verwendet. Die Drosselklappe ist im Saugrohr des Verbrennungsmotors verbaut und regelt durch das Öffnen oder Schließen einer Klappe, wie viel Luftmasse in die Zylinder geführt wird.

### 5.1 Modell der Drosselklappe als Regelstrecke

Vereinfacht kann die elektronische Drosselklappe durch ein lineares  $IT_1$ -Modell

$$G_{DK}(s) = \frac{\alpha_{dk}(s)}{U(s)} = \frac{K_{DK}}{(T_{DK}s + 1)s} \quad (5.1)$$

beschrieben werden, siehe hierzu Alt (2011, S.45, Gl.4.15). Das Modell gilt nur oberhalb der Notluftposition. Es treten keine Reibungseffekte auf und der Einfluss der Zugfeder ist im Vergleich mit der Induktionswirkung gering. Eingangsgröße ist die Spannung  $U$  [V] des Elektromotors und Ausgangsgröße ist der Öffnungswinkel  $\alpha_{dk}$  [%] der Klappe. Die Parameterwerte für die Verstärkung  $K_{DK} = 64,1$  [%/Vs] und für die Zeitkonstante  $T_{DK} = 16$  [ms] erhält man durch Identifikation der realen Drosselklappe, wie in Alt (2011, S.46f, Abb.4.5, Gl.4.16 und Gl.4.17) durchgeführt. Es wird angenommen, dass die Drosselklappe unbestromt ist und in der Notluftposition  $\alpha_{lh}$  verharret. Aufgrund einer auftretenden Störung (Überlagerung harmonischer Schwingungen) schwingt die Klappe um diesen Öffnungswinkel  $\alpha_{lh}$ . Diese Schwingung soll unterdrückt und somit der Relativwinkel  $\Delta\alpha_{dk} = \alpha_{dk} - \alpha_{lh}$  zu Null geregelt werden.

Die zeitdiskrete Übertragungsfunktion der Drosselklappe

$$G_{DK}(z) = \frac{\alpha_{dk}(z)}{U(z)} = \frac{K_{DK} \left( (-T_{DK}(z-1) + T) \left( z - e^{-\frac{T}{T_{DK}}} \right) + T_{DK}(z-1)^2 \right)}{(z-1) \left( z - e^{-\frac{T}{T_{DK}}} \right)} \quad (5.2)$$

erhält man durch Anwendung eines Halteglieds nullter Ordnung auf Gl. (5.1) und anschließender idealer Abtastung, beschrieben in Unbehauen (2007, S.121, Gl.2.4.18).

## 5.2 Polytope LPV-Ansatz in der Simulation

In **Abschnitt 3** wurde der polytope LPV-Ansatz mit einer Parameterreduktion auf zwei variierende Parameter vorgestellt. Dieser Ansatz wird im Folgenden in der Simulation anhand des Drosselklappenmodells Gl. (5.2) getestet. Bei der polytope LPV-Reglerberechnung erhält man für jede Ecke des Polytops einen LTI-Regler. Aus diesen LTI-Reglern wird in Echtzeit ein LPV-Regler interpoliert. Im Weiteren wird detailliert auf die Implementierung der Interpolation des LPV-Reglers eingegangen.

### 5.2.1 Implementierung des polytope LPV-Reglers

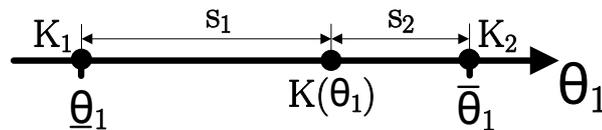
Der polytope LPV-Regler wird in Echtzeit, abhängig von  $\theta(k)$ , durch eine Linearkombination aus den LTI-Reglern  $\mathbf{K}_i$ , siehe Gl. (3.40), für jede Ecke des Polytops

$$\mathbf{K}(\theta(k)) = \sum_{i=1}^{\tilde{p}} \alpha_i(\theta(k)) \mathbf{K}_i \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^{\tilde{p}} \alpha_i(\theta(k)) = 1, \quad \alpha_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad (5.4)$$

siehe Gl. (3.19) mit  $\theta(k) \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ , in jedem Abtastschritt neu berechnet. Dabei entspricht  $\tilde{p} = 2^p$  der Anzahl an Ecken und  $p$  der Anzahl an variierenden Parametern. Vorab wird Offline für jede Ecke ein LTI-Regler gemäß Gl. (3.40) berechnet. Die Online-Interpolation des Reglers zwischen den Ecken wird im Folgenden erläutert:

**Fall 1:** Ein variierender Parameter  $p = 1$



**Abbildung 5.1:** Ein variierender Parameter  $\theta_1$ : Polytop (Strecke) mit den zwei Ecken  $\underline{\theta}_1$  und  $\bar{\theta}_1$

In **Abbildung 5.1** ist qualitativ das Polytop (eine Strecke) für einen einzigen variierenden Parameter dargestellt. Es besteht aus den zwei Ecken  $\underline{\theta}_1$  und  $\bar{\theta}_1$  für die jeweils ein dynamischer LTI-Regler, mit den zusammengefassten Reglermatrizen  $\mathbf{K}_1$  und  $\mathbf{K}_2$ , berechnet wird. Die entsprechende Reglerkonfiguration, abhängig vom variierenden Parameter  $\theta_1$ ,

ergibt sich durch Interpolation von

$$\mathbf{K}(\theta_1) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{K}_i \quad (5.5)$$

zwischen den zwei LTI-Reglern an den Eckpunkten  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\underline{\theta}_1)$  und  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}(\bar{\theta}_1)$ . Gemäß Gl. (5.4) erhält man

$$\theta_1 = \alpha_1 \underline{\theta}_1 + \alpha_2 \bar{\theta}_1 \quad (5.6)$$

und somit  $\alpha_1, \alpha_2$  durch die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1. \quad (5.7)$$

Aus **Abbildung 5.1** lassen sich die Teilstrecken  $s_1$  und  $s_2$  folgendermaßen

$$s_1 = \frac{\theta_1 - \underline{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1}, \quad s_2 = 1 - s_1 = \frac{\bar{\theta}_1 - \theta_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \quad (5.8)$$

bestimmen. Diese sind jeweils auf die gesamte Streckenlänge  $\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1$  normiert. Schlussendlich ergibt sich der variierende Parameter aus der Summe

$$\theta_1 = \underbrace{s_2}_{\alpha_1} \underline{\theta}_1 + \underbrace{s_1}_{\alpha_2} \bar{\theta}_1, \quad (5.9)$$

mit  $\alpha_1 = s_2$  und  $\alpha_2 = s_1$ .

Betrachtet wird im Folgenden der vorhandene Fall mit der Parameterreduktion auf zwei variierende Parameter  $\theta_1$  und  $\theta_2$  aus **Abschnitt 3**.

**Fall 2:** Zwei variierende Parameter  $p = 2$

Das Polytop besteht aus vier Eckpunkten (einem Quadrat) und die Reglerinterpolation wird gemäß Gl. (5.3) folgendermaßen

$$\mathbf{K}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbf{K}_i \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{K}(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2), & \mathbf{K}_2 &= \mathbf{K}(\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_2), \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{K}(\bar{\theta}_1, \underline{\theta}_2), & \mathbf{K}_4 &= \mathbf{K}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

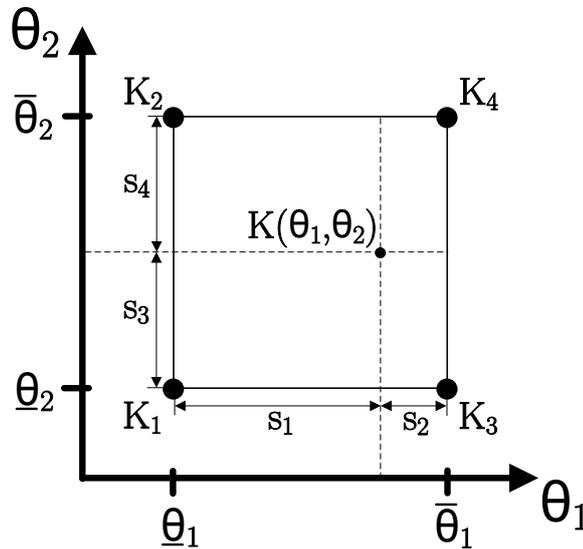
durchgeführt. Der Parameter  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  ergibt sich aus der Linearkombination der Eckpunkte

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

mit den unbekanntenen Faktoren  $\alpha_i$ . Diese unterliegen den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{\tilde{p}} \alpha_i = 1, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad (5.12)$$

siehe Gl. (5.4). Aus **Abbildung 5.2** lassen sich die Teilstrecken  $s_1$  bis  $s_4$  wie folgt



**Abbildung 5.2:** Zwei variierende Parameter  $\theta_1$  und  $\theta_2$ : Polytop (Quadrat) mit den vier Eckpunkten  $(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2)$ ,  $(\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ ,  $(\bar{\theta}_1, \underline{\theta}_2)$  und  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\theta_1 - \underline{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1}, & s_2 &= 1 - s_1 = \frac{\bar{\theta}_1 - \theta_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1}, \\ s_3 &= \frac{\theta_2 - \underline{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2}, & s_4 &= 1 - s_3 = \frac{\bar{\theta}_2 - \theta_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

bestimmen. In Anlehnung an den Fall mit einem Parameter und  $p = 1$ , erhält man die  $\alpha_i$  aus dem Produkt der gegenüberliegenden Teilstrecken, bezogen auf den betreffenden Eckpunkt.

*Zum Beispiel Eckpunkt  $(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2)$ : Die gegenüberliegende Strecke zu  $\underline{\theta}_1$  in  $\theta_1$ -Richtung ist  $s_2$  und zu  $\underline{\theta}_2$  in  $\theta_2$ -Richtung entsprechend  $s_4$ . Das Produkt aus  $s_2 s_4$  entspricht dann dem*

Faktor  $\alpha_1$ . Für die anderen Eckpunkte erfolgt die Bestimmung der  $\alpha_i$  analog gemäß der gleichen Vorgehensweise.

Daraus resultiert der variierende Parametervektor  $\theta$  folgendermaßen

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \underbrace{s_2 s_4}_{\alpha_1} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \underbrace{s_2 s_3}_{\alpha_2} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \underbrace{s_1 s_4}_{\alpha_3} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \underbrace{s_1 s_3}_{\alpha_4} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

mit den Faktoren  $\alpha_i$ .

Der LPV-Regler Gl. (5.10) wird entsprechend implementiert, indem für jeden Eckpunkt zunächst in Echtzeit das Produkt  $\alpha_i \mathbf{K}_i$  gebildet und dann in jedem Abtastschritt die Summation der Produkte durchgeführt wird.

### 5.2.2 Simulationskonfiguration der verallgemeinerten Strecke

Die verallgemeinerte Strecke, siehe **Abbildung 3.4**, besteht aus den Übertragungsfunktionen:

- Drosselklappe als Regelstrecke Gl. (5.2), mit  $T = 1$  ms

$$G_{DK}(z) = \frac{64.1 ((-0.016(z-1) + 0.001)(z - e^{-0.0625}) + 0.016(z-1)^2)}{(z-1)(z - e^{-0.0625})} \quad (5.15)$$

- Sensitivitätsgewichtungsfilter  $PT_1$ -Glieder Gl. (3.70), mit  $M = 0.1$ ,  $\omega_B = 2\pi 10$  [rad/sec] und  $T = 1$  ms

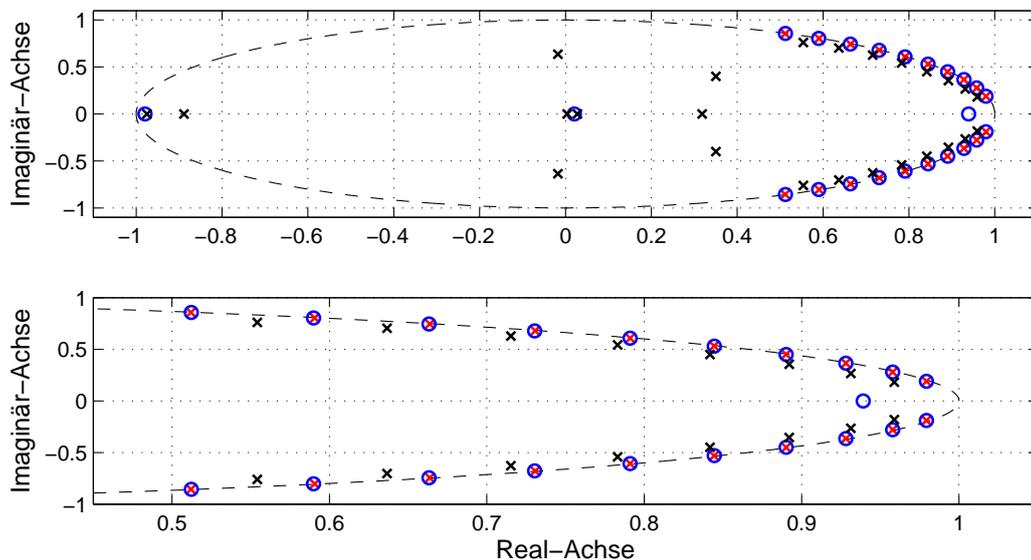
$$G_{WS_1}(z) = \frac{\left(\frac{1}{0.1}\right)(z - e^{-0.0628}) - \left(\frac{1}{0.1}\right)(z-1)}{z - e^{-0.0628}} \quad (5.16)$$

- Störmodell  $G_{WD}(z, \theta)$  Gl. (3.67)
  - Grundfrequenz  $f_0 = [20, 30]$  Hz
  - $\nu_{l=1} = 1.0$     $\nu_{l=2} = 1.5$     $\nu_{l=3} = 2.0$     $\nu_{l=4} = 2.5$     $\nu_{l=5} = 3.0$   
 $\nu_{l=6} = 3.5$     $\nu_{l=7} = 4.0$     $\nu_{l=8} = 4.5$     $\nu_{l=9} = 5.0$     $\nu_{l=10} = 5.5$

Aus dieser Konfiguration entsteht das polytope Zustandsraummodell für die verallgemeinerte Strecke Gl. (3.74) mit den Systemmatrizen Gl. (3.81). Die verallgemeinerte Strecke hat die Ordnung 23 und setzt sich aus den Ordnungen der Teilstrecken zusammen. Die Drosselklappe hat Ordnung 2, das Gewichtungsfilter Ordnung 1 und das polytope Störmodell die Ordnung  $2 \times 10$  (2 Ordnungen pro Frequenz). Mit diesem Modell für die verallgemeinerte Strecke werden die vier dynamischen LTI-Regler, siehe Gl. (3.40), für jede Ecke des Polytops berechnet. Dem Ansatz entsprechend hat jeder Regler die

gleiche Ordnung wie die Strecke, also 23. Betrachtet man jede Ecke des Polytops einzeln und schließt jeweils den Regelkreis mit dem dazugehörigen LTI-Regler, können vier Störübertragungsfunktionen  $G_{Z_i}(z) = Y_P(z)/Y_D(z)$  für  $i = 1, \dots, 4$  aufgestellt werden. Anhand dieser lassen sich Stabilitätsaussagen treffen sowie die Auslegungskriterien überprüfen.

An der vierten Ecke, mit  $\theta = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ , werden die Stabilitäts-/Auslegungskriterien im Detail erläutert. Zunächst zu den Bedingungen, die an die Störübertragungsfunktion gestellt werden. Die Pole von  $G_{Z_4}(z)$  müssen bei einem stabilen Regelkreis alle innerhalb des Einheitskreises liegen. Des Weiteren sollten bei einer exakten Störfrequenzenunterdrückung die Pole des Störmodells  $G_{WD}(z)$  durch die Nullstellen von  $G_{Z_4}(z)$  kompensiert werden. In **Abbildung 5.3** ist das Pol-/ Nullstellendiagramm der Störübertragungsfunktion  $G_{Z_4}(z)$  sowie das Poldiagramm vom Störmodell  $G_{WD}(z)$  dargestellt. Im oberen Diagramm ist klar



**Abbildung 5.3:** Pol-/Nullstellendiagramm (Polytopter Ansatz): Im oberen Diagramm sind die Nullstellen (blaue Kreise) sowie die Pole (schwarze Kreuze) der Störübertragungsfunktion  $G_{Z_4}(z)$ , die Pole des Störmodells  $G_{WD}(z)$  (rote Kreuze) und der Einheitskreis (schwarz gestrichelt) dargestellt; Vergrößerung des Real-Achsenabschnitts von 0,45 bis 1,05 im unteren Diagramm

zu erkennen, dass alle Pole von  $G_{Z_4}(z)$  (schwarze Kreuze) innerhalb des Einheitskreises (schwarz gestrichelte Linie) liegen. Das bedeutet, dass der geschlossene Regelkreis, für diese Ecke des Polytops, stabil ist. Die 10 vorgegebenen Frequenzen des Störmodells sind im vergrößerten Real-Achsenabschnitt, siehe **Abbildung 5.3** Diagramm unten, in Form von konjugiert komplexen Polpaaren (rote Kreuze) auf dem Einheitskreis klar zu erkennen. Sie werden zu circa 99% durch die Nullstellen von  $G_{Z_4}(z)$  (blaue Kreise) kompensiert. Das bedeutet, dass Störungen mit diesen spezifizierten Frequenzen, die auf die Regelstrecke

wirken, durch den Regler nahezu komplett unterdrückt werden. Somit sind die Anforderungen an den Regler in Bezug auf die Auslegungskriterien erfüllt. Hier wurde nur die vierte Ecke betrachtet, die anderen Ecken erfüllen ebenfalls diese Kriterien. Die optimierten LTI-Regler an den vier Ecken sind jeweils stabil. In **Tabelle 5.1** sind die Beträge der LTI-Reglerpole für jede Ecke aufgeführt (stabile Pole, wenn  $|z_i| < 1$ ,  $i = 1, \dots, 23$ ). Bei der  $H_\infty$ -Regleroptimierung wird nach dem besten Regler gesucht, der den geschlossenen Regelkreis stabilisiert und die vorab definierten Kriterien erfüllt. Da kann es vorkommen, dass der Regler (beziehungsweise einzelne LTI-Regler an den Ecken) instabil ist und Pole außerhalb des Einheitskreises (beim zeitdiskreten Fall) liegen. In den Beiträgen von Zhou und Doyle (1998), Witte u. a. (2010), Balini u. a. (2011) sowie Péni u. a. (2014) wird diese Tatsache diskutiert. Eine weitere Möglichkeit wäre, wie in Ballesteros u. a. (2014a, 2014b) beschrieben, das Polytop mit den vier Ecken (Quadrat) auf drei Ecken (Dreieck) zu reduzieren, die Anzahl an Optimierungsvariablen zu verringern und somit das Finden eines stabilen Reglers zu erleichtern.

Die Echtzeitinterpolation zwischen den einzelnen LTI-Reglern für jede Ecke Gl. (5.10), in Abhängigkeit von dem variierenden Parameter  $\theta$ , siehe Gl. (5.14), wurde entsprechend implementiert.

### 5.2.3 Simulationsergebnisse

Simuliert werden zwei Szenarien mit *MATLAB/Simulink* der Fa. MathWorks<sup>®</sup>. Szenario eins behandelt ein konstantes Frequenzsignal für den variierenden Parameter mit Grundfrequenz  $f_0 = 25$  Hz. Beim zweiten Szenario steigt die Grundfrequenz rampenförmig über das gesamte Frequenzintervall  $f_0 \in [20, 30]$  Hz an. Die Simulationszeit beträgt 50 Sekunden und als Störung wird das Signal  $y_D(f_0) = \sum_{l=1}^{l=10} \cos(2\pi\nu_l f_0 T)$ , eine Summe von Kosinusschwingungen mit  $l = 10$  Frequenzen, auf die Regelstrecke (Drosselklappe) gegeben. Die Reglerberechnung erfolgt mit der MATLAB-Toolbox *YALMIP* und dem *SeDuMi 1.3 solver*, siehe hierzu Lofberg (2004), Sturm (1999) und Labit u. a. (2002). Es wurde ein dynamischer LPV-Regler für das Grundfrequenzintervall  $f_0 \in [20, 30]$  Hz berechnet und anschließend beide Szenarien simuliert.

In **Abbildung 5.4** sind die Simulationsergebnisse für das erste Szenario mit konstanter Grundfrequenz dargestellt. Im Graph oben links ist die Grundfrequenz und daneben das einseitige Amplitudenspektrum des Störsignals (Summe von Kosinusschwingungen) mit 10 Frequenzen abgebildet. Die Grundfrequenz ist  $f_0 = 25$  Hz, entsprechend multipliziert mit den  $\nu_l$ , erhält man die 10 Frequenzen  $25 \text{ Hz}, 37.5 \text{ Hz}, \dots, 137.5 \text{ Hz}$ . Dieses Signal wurde als Eingangsstörung auf die Regelstrecke gegeben und der offene Regelkreis sowie der geschlossene Regelkreis mit dem LPV-Regler simuliert. Die Ergebnisse sind in **Abbildung 5.4**, Graph unten links, in Form des Öffnungswinkels der Drosselklappe dargestellt. Als Vergleich ist der Drosselklappenwinkel  $y_{P(OL)}$  (rote Linie) für den offenen Kreis und  $y_{P(CL)}$  (schwarz gestrichelte Linie) für den geschlossenen Regelkreis einander

gegenübergestellt worden. Im Graph unten rechts das dazugehörige einseitige Amplitudenspektrum des Streckenausgangs  $y_{P(OL)}$  (rote Linie) und  $y_{P(CL)}$  (schwarz gestrichelte Linie). Aus den beiden unteren Graphen ist klar ersichtlich, dass der LPV-Regler alle auftretenden Störfrequenzen unterdrückt und somit den Öffnungswinkel, trotz Störung, in der Notluftposition hält.

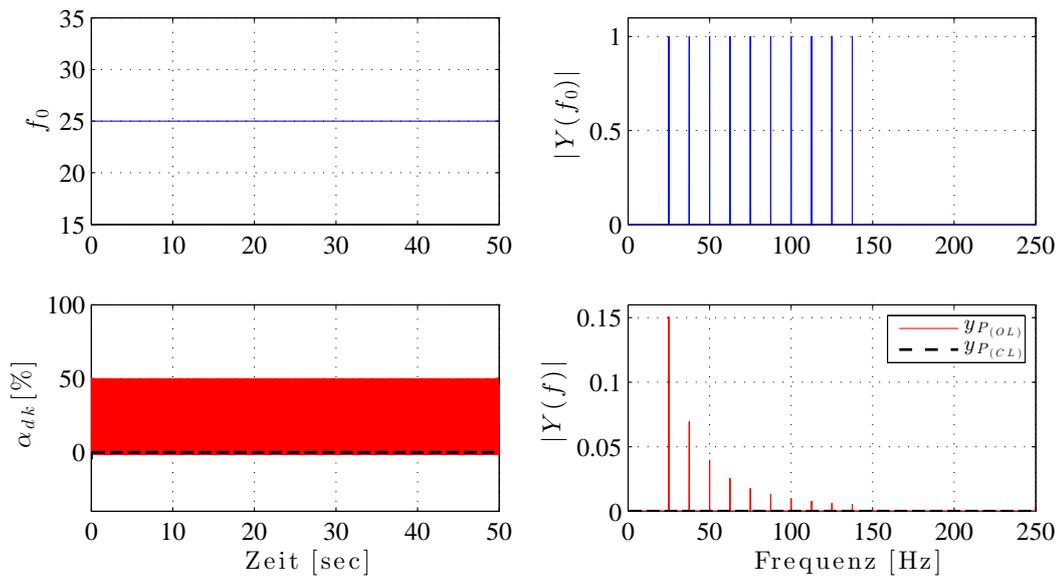
Zudem ist in **Abbildung 5.5** das Spektrogramm für  $y_{P(OL)}$  (links) und  $y_{P(CL)}$  (rechts) einander gegenübergestellt. Das Spektrogramm wurde mit der MATLAB-Funktion „*spectrogram(x,window,noverlap,nfft)*“ der Fa. MathWorks<sup>®</sup> erzeugt, siehe hierzu Werner (2006). Dabei stellt das Spektrogramm eine zeitvariante Frequenzverteilung mit Hilfe der Kurzzeit-Fourier-Transformation dar. Der Betrag der komplexwertigen Funktion  $S(t, \omega)$  im Quadrat ( $|S(t, \omega)|^2$ ) ist von der Zeit  $t$  und der Frequenz  $\omega$  abhängig und wird farbcodiert (hohe Energieintensität rot zu niedrige Energieintensität blau) in einem Zeit-Frequenz-Diagramm dargestellt. Hier ist deutlich am Farbverlauf zu erkennen, dass die Energieintensität bei den auftretenden Frequenzen ohne Ausnahme verringert und somit reduziert wird.

Das zweite Szenario wird mit einer variierenden Grundfrequenz, im Frequenzintervall  $f_0 \in [20, 30]$  Hz, simuliert. Darin steigt die Grundfrequenz  $f_0$  vom Minimalwert zum Maximalwert rampenförmig über die gesamte Simulationszeit von 50 Sekunden an, siehe **Abbildung 5.6** oben. Daraus ergibt sich als Störsignal die variierende Kosinusschwingung. Im Vergleich zum ersten Szenario besteht dieses Signal nicht mehr aus den einzelnen Frequenzen, sondern aus einem Frequenzspektrum mit Frequenzen zwischen  $f_{0_{min}}$  und  $f_{0_{max}}$ . Die Simulationsergebnisse für den offenen Kreis sowie für den geschlossenen Regelkreis mit LPV-Regler sind in Form des Öffnungswinkels der Drosselklappe von der Regelgröße  $y_P$  im unteren Graphen dargestellt. Auch bei diesem zweiten Szenario wird die Störung, trotz variierender Grundfrequenz  $f_0$ , bis auf ein Minimum unterdrückt und der Drosselklappenwinkel auf Null Prozent gehalten.

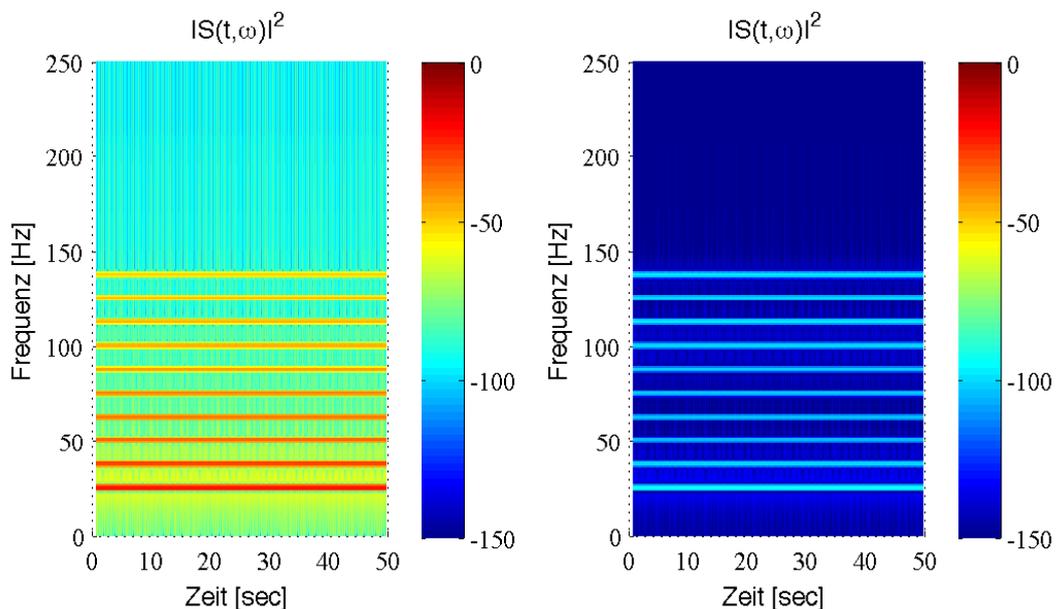
Das spiegelt sich auch im Spektrogrammvergleich, siehe **Abbildung 5.7**, der Signale  $y_{P(OL)}$  (links) und  $y_{P(CL)}$  (rechts) wider. In beiden Diagrammen sind klar die zehn variierenden Frequenzen anhand der Energieintensität (farbcodiert) zu erkennen, die im geschlossenen Regelkreis deutlich reduziert werden.

Betrag Pole $G_{K_1}(z)$	Betrag Pole $G_{K_2}(z)$	Betrag Pole $G_{K_3}(z)$	Betrag Pole $G_{K_4}(z)$
$ z_1  = 0.9794$			
$ z_2  = 0.0068$	$ z_2  = 0.0144$	$ z_2  = 0.0007$	$ z_2  = 0.0208$
$ z_3  = 0.9994$	$ z_3  = 0.9997$	$ z_3  = 0.9976$	$ z_3  = 0.9984$
$ z_4  = 0.9994$	$ z_4  = 0.9997$	$ z_4  = 0.9976$	$ z_4  = 0.9984$
$ z_5  = 0.9993$	$ z_5  = 0.9986$	$ z_5  = 0.9968$	$ z_5  = 0.9971$
$ z_6  = 0.9993$	$ z_6  = 0.9986$	$ z_6  = 0.9968$	$ z_6  = 0.9971$
$ z_7  = 0.9978$	$ z_7  = 0.9980$	$ z_7  = 0.9969$	$ z_7  = 0.9970$
$ z_8  = 0.9978$	$ z_8  = 0.9980$	$ z_8  = 0.9969$	$ z_8  = 0.9970$
$ z_9  = 0.9974$	$ z_9  = 0.9976$	$ z_9  = 0.9972$	$ z_9  = 0.9970$
$ z_{10}  = 0.9974$	$ z_{10}  = 0.9976$	$ z_{10}  = 0.9972$	$ z_{10}  = 0.9970$
$ z_{11}  = 0.9972$	$ z_{11}  = 0.9973$	$ z_{11}  = 0.9973$	$ z_{11}  = 0.9972$
$ z_{12}  = 0.9972$	$ z_{12}  = 0.9973$	$ z_{12}  = 0.9973$	$ z_{12}  = 0.9972$
$ z_{13}  = 0.9392$	$ z_{13}  = 0.9392$	$ z_{13}  = 0.9974$	$ z_{13}  = 0.9391$
$ z_{14}  = 0.9971$	$ z_{14}  = 0.9972$	$ z_{14}  = 0.9974$	$ z_{14}  = 0.9974$
$ z_{15}  = 0.9971$	$ z_{15}  = 0.9972$	$ z_{15}  = 0.9392$	$ z_{15}  = 0.9974$
$ z_{16}  = 0.9975$			
$ z_{17}  = 0.9975$			
$ z_{18}  = 0.9974$	$ z_{18}  = 0.9974$	$ z_{18}  = 0.9975$	$ z_{18}  = 0.9975$
$ z_{19}  = 0.9974$	$ z_{19}  = 0.9974$	$ z_{19}  = 0.9975$	$ z_{19}  = 0.9975$
$ z_{20}  = 0.9973$	$ z_{20}  = 0.9973$	$ z_{20}  = 0.9975$	$ z_{20}  = 0.9975$
$ z_{21}  = 0.9973$	$ z_{21}  = 0.9973$	$ z_{21}  = 0.9975$	$ z_{21}  = 0.9975$
$ z_{22}  = 0.9972$	$ z_{22}  = 0.9972$	$ z_{22}  = 0.9976$	$ z_{22}  = 0.9975$
$ z_{23}  = 0.9972$	$ z_{23}  = 0.9972$	$ z_{23}  = 0.9976$	$ z_{23}  = 0.9975$

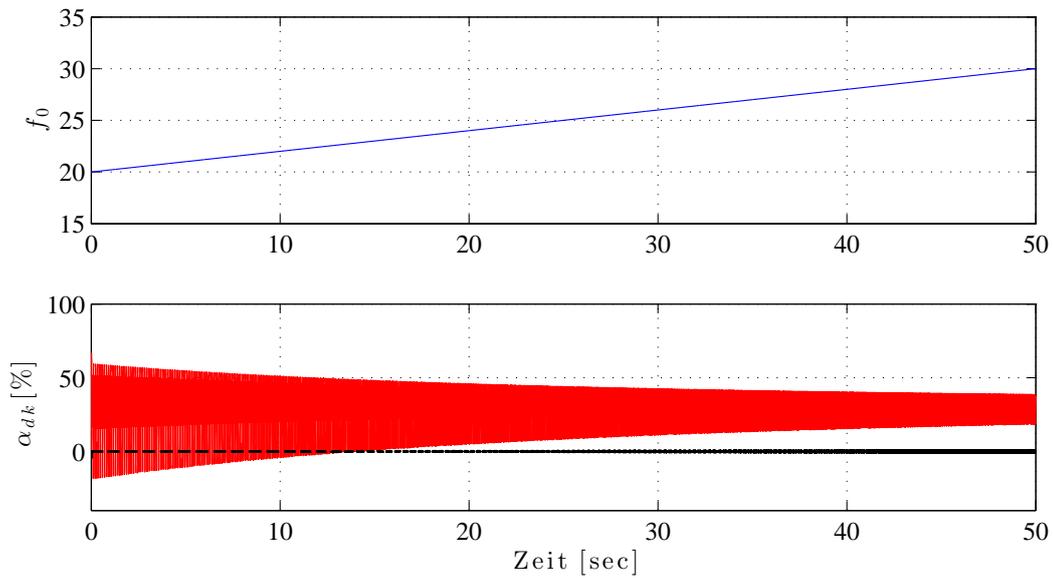
**Tabelle 5.1:** Beträge der Reglerpole: Reglerübertragungsfunktion  $G_{K_1}(z)$  für die 1. Ecke  $(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2)$ ,  $G_{K_2}(z)$  für die 2. Ecke  $(\underline{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$ ,  $G_{K_3}(z)$  für die 3. Ecke  $(\bar{\theta}_1, \underline{\theta}_2)$  und  $G_{K_4}(z)$  für die 4. Ecke  $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$



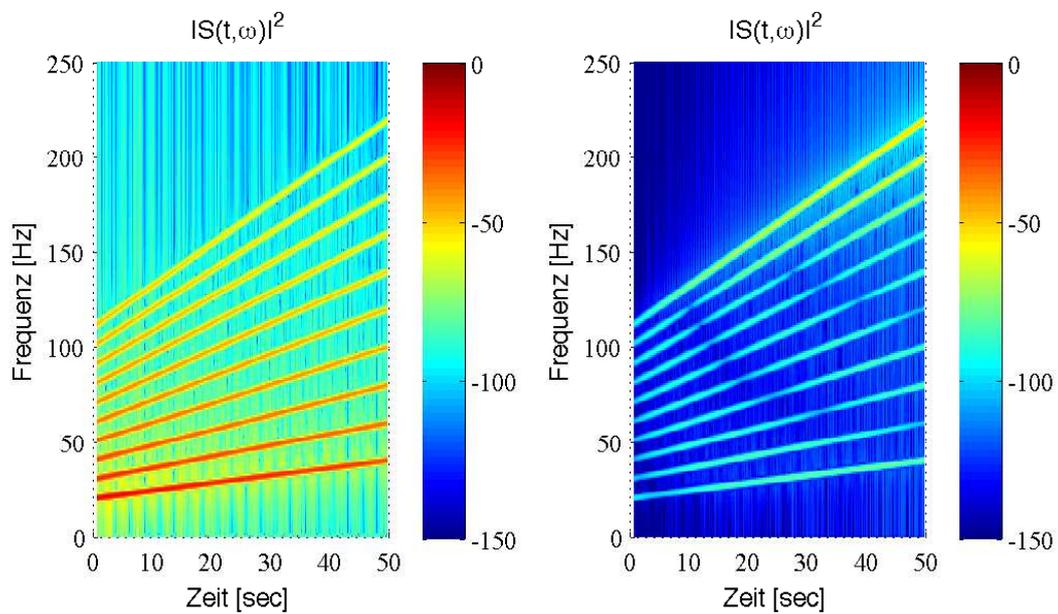
**Abbildung 5.4:** Szenario 1 (Polytooper Ansatz): Konstantes Frequenzsignal  $f_0 = 25$  Hz für den variierenden Parameter  $\theta_{nom}$  oben links; einseitiges Amplitudenspektrum des Störsignals (überlagerte Kosinusschwingung) oben rechts; Simulationsergebnis Störsignal auf Regelstrecke im offenen Kreis ( $y_{P(OL)}$  rot) und im geschlossenen Regelkreis ( $y_{P(CL)}$  schwarz) unten links; einseitiges Amplitudenspektrum für den offenen Kreis ( $y_{P(OL)}$  rot) und für den geschlossenen Regelkreis ( $y_{P(CL)}$  schwarz) unten rechts



**Abbildung 5.5:** Szenario 1 (Polytooper Ansatz): Spektrogramm für den offenen Kreis  $y_{P(OL)}$  links und für den geschlossenen Regelkreis  $y_{P(CL)}$  rechts; Farbskala von  $-150$  mit niedriger (blau) bis  $0$  mit hoher Energieintensität (rot)



**Abbildung 5.6:** Szenario 2 (Polytope Ansatz): Rampenförmiges Frequenzsignal für den variierenden Parameter  $\tilde{\theta}_{nom}$  im Frequenzintervall  $[f_{0min}, f_{0max}]$  oben; Simulationsergebnis Störsignal auf Regelstrecke im offenen Kreis ( $y_{P_{OL}}$  rot) und im geschlossenen Regelkreis ( $y_{P_{CL}}$  schwarz) unten



**Abbildung 5.7:** Szenario 2 (Polytope Ansatz): Spektrogramm für den offenen Kreis  $y_{P_{OL}}$  links und für den geschlossenen Regelkreis  $y_{P_{CL}}$  rechts; Farbskala von  $-150$  mit niedriger (blau) bis  $0$  mit hoher Energieintensität (rot)

### 5.3 Linear-fractionaler LPV-Ansatz in der Simulation

Wie im vorhergehenden **Unterabschnitt 5.2** beschrieben, wird im Folgenden der linear-fractionale LPV-Ansatz mit einem variierenden Parameter aus **Abschnitt 4** ebenfalls in der Simulation, anhand des Drosselklappenmodells Gl. (5.2), getestet. Bei der linear-fractionalen LPV-Reglerberechnung erhält man für das komplette Grundfrequenzintervall  $f_0 \in [f_{0_{min}}, f_{0_{max}}]$  einen Regler. Aufgrund der LF-Form dieses Reglers werden die Reglermatrizen in Echtzeit, abhängig vom variierenden Parameter, in jedem Abtastschritt neu berechnet. Aus diesem Zusammenhang ergibt sich der linear-fractionale LPV-Regler.

#### 5.3.1 Implementierung des linear-fractionalen LPV-Reglers

Der dynamische LPV-Regler Gl. (4.26) lässt sich folgendermaßen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_K(k+1) &= \mathbf{A}_K(\tilde{\theta}_{nom})\mathbf{x}_K(k) + \mathbf{B}_K(\tilde{\theta}_{nom})y_P(k) \\ u_K(k) &= \mathbf{C}_K(\tilde{\theta}_{nom})\mathbf{x}_K(k) + \mathbf{D}_K(\tilde{\theta}_{nom})y_P(k) \end{aligned} \quad (5.17)$$

mit den variierenden Reglermatrizen

$$\begin{aligned} \Lambda_{\tilde{\theta}_{nom}} &:= \Theta_l (\mathbf{I}_{2l} - \mathbf{D}_{K\theta\theta} \Theta_l)^{-1}, \\ \mathbf{A}_K(\tilde{\theta}_{nom}) &:= \mathbf{A}_K + \mathbf{B}_{K\theta} \Lambda_{\tilde{\theta}_{nom}} \mathbf{C}_{K\theta}, \\ \mathbf{B}_K(\tilde{\theta}_{nom}) &:= \mathbf{b}_{K1} + \mathbf{B}_{K\theta} \Lambda_{\tilde{\theta}_{nom}} \mathbf{d}_{K\theta1}, \\ \mathbf{C}_K(\tilde{\theta}_{nom}) &:= \mathbf{c}_{K1}^T + \mathbf{d}_{K1\theta}^T \Lambda_{\tilde{\theta}_{nom}} \mathbf{C}_{K\theta} \quad \text{und} \\ \mathbf{D}_K(\tilde{\theta}_{nom}) &:= d_{K11} + \mathbf{d}_{K1\theta}^T \Lambda_{\tilde{\theta}_{nom}} \mathbf{d}_{K\theta1} \end{aligned} \quad (5.18)$$

implementieren, siehe hierzu Apkarian und Gahinet (1995, S.861, Gl.6.18). Beim LF-Ansatz wird der variierende Parameter  $\tilde{\theta}_{nom}$  auf das Intervall  $[-1, 1]$  normiert. Folglich entspricht

$$\Theta_l = \tilde{\theta}_{nom} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2l} \end{bmatrix} \quad l = 1, \dots, L \quad (5.19)$$

der negativen Einheitsmatrix bei  $f_{0_{min}}$  und der positiven Einheitsmatrix bei  $f_{0_{max}}$ . Durch diesen Zusammenhang wird  $\Lambda_{\tilde{\theta}_{nom}}$  in Echtzeit für jeden Abtastschritt, abhängig von der variierenden Grundfrequenz  $f_0$ , neu berechnet und die Systemmatrizen des LPV-Reglers fortlaufend angepasst, siehe Gl. (5.18).

#### 5.3.2 Simulationskonfiguration der verallgemeinerten Strecke

Um beide Ansätze entsprechend miteinander vergleichen zu können, wird für die verallgemeinerte Strecke, siehe **Abbildung 4.5**, dieselbe Simulationskonfiguration wie beim polytopen Ansatz gewählt. Das Streckenmodell sowie das Sensitivitätsgewichtungsfilter

entsprechen dem Drosselklappenmodell aus Gl. (5.15) und dem  $PT_1$ -Gewichtungsfiler aus Gl. (5.16). Hingegen wird für  $G_{WD}(z)$  das Störmodell in LF-Form Gl. (4.86) mit

- Grundfrequenz  $f_0 = [20, 30]$  Hz
- $\nu_{l=1} = 1.0$     $\nu_{l=2} = 1.5$     $\nu_{l=3} = 2.0$     $\nu_{l=4} = 2.5$     $\nu_{l=5} = 3.0$   
 $\nu_{l=6} = 3.5$     $\nu_{l=7} = 4.0$     $\nu_{l=8} = 4.5$     $\nu_{l=9} = 5.0$     $\nu_{l=10} = 5.5$

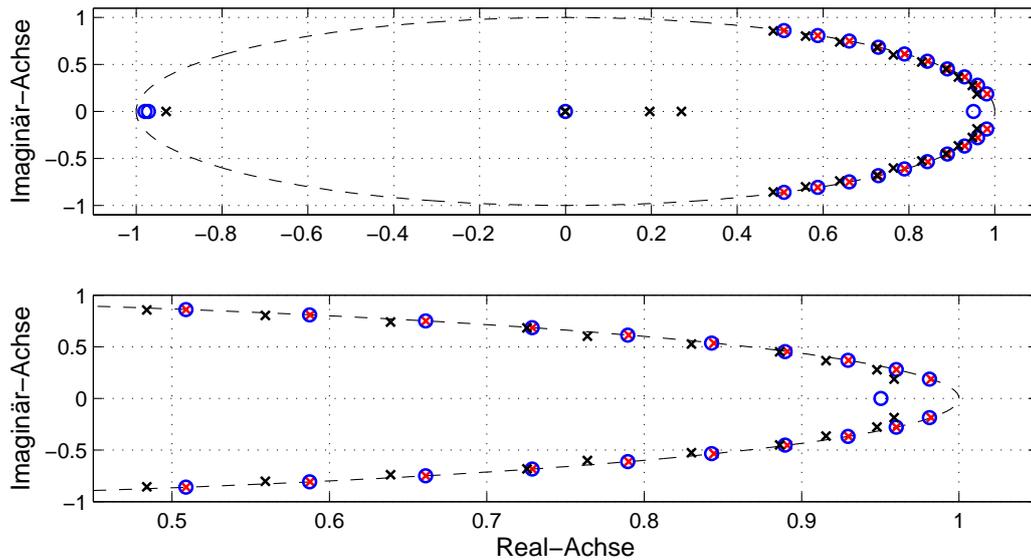
verwendet. Im linear-fractionalen Störmodell werden entsprechend dieselben 10 Frequenzen durch die  $\nu_l$  vorgegeben. Die verallgemeinerte Strecke, wie auch der linear-fractionale LPV-Regler haben jeweils eine Ordnung von 23. Bei Erhalt eines Reglers, siehe Gl. (4.32)-(4.36), wird für den geschlossenen Regelkreis zum einen Stabilität und zum anderen eine  $\mathcal{L}_2$ -Systemverstärkung  $< 1$  für das gesamte Frequenzintervall  $[f_{0min}, f_{0max}]$  garantiert.

Für die Intervallschranke  $f_{0max}$  ergibt sich eine Störübertragungsfunktion  $G_{Zmax}(z) = Y_P(z)/Y_D(z)$ , mit deren Hilfe die Auslegungskriterien überprüft werden können. Gemäß Gl. (5.19) ist für  $f_0 = f_{0max}$  der normierte variierende Parameter  $\tilde{\theta}_{nom} = +1$  und die Unsicherheitsmatrix entspricht dann der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_{20}$  mit Dimension  $[20 \times 20]$ . An  $G_{Zmax}(z)$  gilt die Bedingung, dass die Pole innerhalb des Einheitskreises liegen müssen und eine Pol-/Nullstellenkürzung der Pole des Störmodells mit den Nullstellen von  $G_{Zmax}(z)$ , für eine hundertprozentige Störunterdrückung, stattfinden muss.

Anhand von  $G_{Zmax}(z)$ , bei einer Grundfrequenz von  $f_{0max} = 30$  Hz, werden die beschriebenen Bedingungen überprüft. In **Abbildung 5.8** ist das Pol-/Nullstellendiagramm der Störübertragungsfunktion  $G_{Zmax}(z)$  sowie das Poldiagramm vom Störmodell  $G_{WD}(z)$  dargestellt. Im oberen Diagramm ist klar zu erkennen, dass alle Pole von  $G_{WD}(z)$  (schwarze Kreuze) innerhalb des Einheitskreises liegen und somit ein stabiler Regelkreis garantiert ist. Des Weiteren ist im unteren Diagramm der vergrößerte Real-Achsenabschnitt von 0.45 bis 1.05 dargestellt. Acht konjugiert komplexe Polpaare von  $G_{WD}(z)$  (rote Kreuze) werden durch entsprechende Nullstellen von  $G_{Zmax}(z)$  (blaue Kreise) vollständig kompensiert. Die weiteren zwei Störfrequenzen werden nicht exakt getroffen und somit auch nicht komplett kompensiert. Beide dynamischen LTI-Regler,  $G_{Kmin}(z)$  für  $\tilde{\theta}_{nom} = -1$  und  $G_{Kmax}(z)$  für  $\tilde{\theta}_{nom} = +1$ , sind stabil und besitzen nur Pole mit Betrag  $|z_i| < 1$ ,  $i = 1, \dots, 23$ , siehe **Tabelle 5.2**.

### 5.3.3 Simulationsergebnisse

Im Folgenden werden die Simulationsergebnisse des linear-fractionalen Ansatzes vorgestellt. Simuliert werden die zwei identischen Szenarien wie in **Unterabschnitt 5.2.3**, jedoch mit linear-fractionalem LPV-Regler. Beim ersten Szenario bleibt die Grundfrequenz des variierenden Parameters konstant bei  $f_0 = 25$  Hz und beim zweiten Szenario steigt die Grundfrequenz rampenförmig über das gesamte Frequenzintervall  $f_0 \in [20, 30]$  Hz an. Die Simulationszeit beträgt 50 Sekunden und als Störung wird das Signal einer überlagerten



**Abbildung 5.8:** Pol-/Nullstellendiagramm (Linear-fractionaler Ansatz): Im oberen Diagramm sind die Nullstellen (blaue Kreise) sowie die Pole (schwarze Kreuze) der Störübertragungsfunktion  $G_{Z_{max}}(z)$ , die Pole des Störmodells  $G_{WD}(z)$  (rote Kreuze) und der Einheitskreis (schwarz gestrichelt) dargestellt; Vergrößerung des Real-Achsenabschnitts von 0.45 bis 1.05 im unteren Diagramm

Kosinusschwingung  $y_D(f_0) = \sum_{l=1}^{l=10} \cos(2\pi\nu_l f_0 T)$  mit  $l = 10$  Frequenzen auf die Drosselklappe gegeben. Die Reglerberechnung erfolgt mit der MATLAB-Toolbox *YALMIP* und dem *SeDuMi 1.3 solver*, siehe hierzu Lofberg (2004), Sturm (1999) und Labit u. a. (2002). Es wurde ein dynamischer, linear-fractionaler LPV-Regler für das Grundfrequenzintervall  $f_0 \in [20, 30]$  Hz berechnet und anschließend beide Szenarien simuliert.

In **Abbildung 5.9** sind die Ergebnisse des ersten Szenarios dargestellt. Im Graph oben links ist das konstante Grundfrequenzsignal  $f_0 = 25$  Hz abgebildet. Daneben das einseitige Amplitudenspektrum des Störsignals, das aus der Summe von 10 harmonischen Kosinusschwingungen besteht. Dieses Signal wurde als Eingangsstörung auf die Regelstrecke gegeben und der offene Regelkreis sowie der geschlossene Regelkreis mit dem linear-fractionalen Regler simuliert. Als Vergleich ist im Graph unten links der Drosselklappenwinkel  $y_{P_{(OL)}}$  (rote Linie) für den offenen Kreis und  $y_{P_{(CL)}}$  (schwarz gestrichelte Linie) für den geschlossenen Regelkreis einander gegenübergestellt. Im Graph unten rechts das dazugehörige einseitige Amplitudenspektrum des Streckenausgangs  $y_{P_{(OL)}}$  (rote Linie) und  $y_{P_{(CL)}}$  (schwarz gestrichelte Linie). Aus den beiden unteren Graphen ist klar ersichtlich, dass der linear-fractionale Regler alle auftretenden Störfrequenzen nahezu vollständig unterdrückt und somit der Öffnungswinkel, trotz Störung, nur mit kleiner Amplitude um die Notluftposition schwingt. Da jedoch keine hundertprozentige Pol-/Nullstellenkürzung der Störfrequenzen im geschlossenen Regelkreis auftritt, ist bei vereinzelt Frequenzen

die Energieintensität höher.

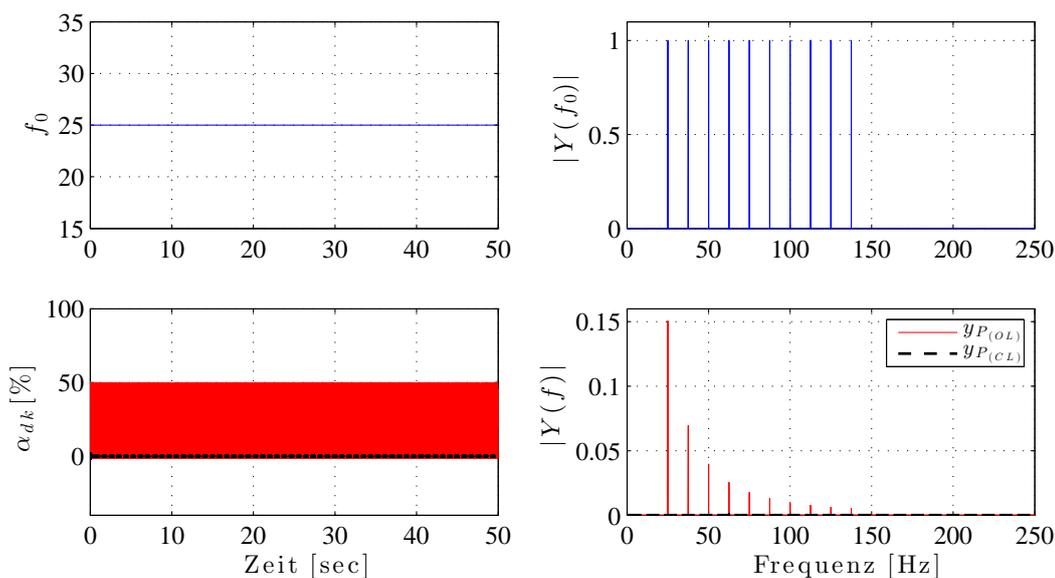
Dies ist im Spektrogramm für den offenen Kreis (links) sowie für den geschlossenen Regelkreis (rechts), siehe **Abbildung 5.10**, klar zu erkennen. Die vierte Frequenz mit  $\nu_4 = 2.5$  sowie die siebte Frequenz mit  $\nu_7 = 4.0$ , das entspricht 62.5 und 100 Hz, weist im geschlossenen Regelkreis (rechts), verglichen mit den anderen Frequenzen, eine wesentlich höhere Energieintensität auf. Jedoch ist auch diese Frequenz im Amplitudenspektrum, siehe **Abbildung 5.9** unten rechts, im Vergleich zum offenen Kreis stark reduziert worden.

Beim zweiten Szenario variiert die Grundfrequenz  $f_0$  zwischen den Intervallschranken  $[f_{0_{min}}, f_{0_{max}}] = [20, 30]$  Hz und die Systemmatrizen des LPV-Reglers, siehe Gl. (5.18), werden in Echtzeit in jedem Abtastschritt fortlaufend angepasst. Die Simulationsergebnisse sind in **Abbildung 5.11** dargestellt. Im Graph oben ist die variierende Grundfrequenz  $f_0$  abgebildet. Die Ergebnisse für den Öffnungswinkel der Drosselklappe im offenen Kreis  $y_{P_{(OL)}}$  (rote Linie) sowie für den geschlossenen Regelkreis  $y_{P_{(CL)}}$  (schwarz gestrichelte Linie) mit LPV-Regler sind im Graph unten einander gegenübergestellt. Im Spektrogramm **Abbildung 5.12** ist eine sehr gute Störunterdrückung zu sehen, die sich für höhere Frequenzen minimal verschlechtert. Dies resultiert daraus, dass nicht alle Störfrequenzen durch eine Pol-/Nullstellenkürzung exakt kompensiert werden, siehe **Abbildung 5.8**. Des Weiteren tritt für Frequenzen größer 130 Hz der *Waterbed Effect*, siehe hierzu Hong und Bernstein (1998) sowie Zhou und Doyle (1998, S.98ff, Ab.6.5), in Bezug auf die Sensitivitätsfunktion auf. Am Drosselklappenwinkel im Graph unten ist deutlich zu erkennen, dass mit fortlaufender Simulationsdauer und steigenden Störfrequenzen, die Schwingungsamplitude um die Notluftposition minimal ansteigt. Im Vergleich zum unregulierten Fall, ist das Ziel der Störunterdrückung in jeder Hinsicht erfüllt.

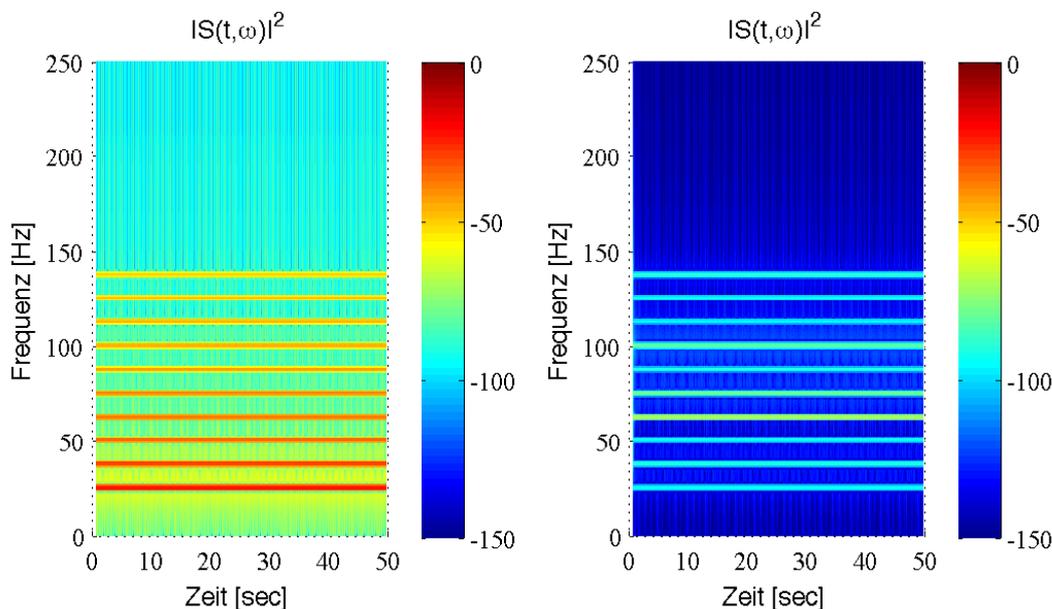
Der Spektrogrammvergleich für den offenen Kreis (links) und für den geschlossenen Regelkreis (rechts) in **Abbildung 5.12** verdeutlicht die erhaltenen Simulationsergebnisse. Anhand der Energieintensitäten jeder monofrequenten Kosinusschwingung, ist im Vergleich zwischen  $y_{P_{(OL)}}$  und  $y_{P_{(CL)}}$  zu erkennen, ab welcher Frequenz und zu welchem Zeitpunkt Frequenzen unterdrückt oder verstärkt werden. Die ersten sechs Schwingungen werden durchgehend unterdrückt, wobei die letzten vier Frequenzen der überlagerten Kosinusschwingung ab 25 Sekunden Simulationszeit weniger stark unterdrückt werden. Dies deckt sich mit der steigenden Öffnungswinkelamplitude um die Notluftposition. Nichtsdestotrotz ist im geschlossenen Regelkreis mit LPV-Regler ein stabiler Regelkreis mit sehr guter Störunterdrückung gegeben.

Betrag Pole $G_{K_{min}}(z)$	Betrag Pole $G_{K_{max}}(z)$
$ z_1  = 0.971411154746960$	$ z_1  = 0.971409005949518$
$ z_2  = 0.000000019278772$	$ z_2  = 0.000000018756999$
$ z_3  = 0.999923076723695$	$ z_3  = 0.999537378928730$
$ z_4  = 0.999923076723695$	$ z_4  = 0.999537378928730$
$ z_5  = 0.999898176123303$	$ z_5  = 0.999488120538156$
$ z_6  = 0.999898176123303$	$ z_6  = 0.999488120538156$
$ z_7  = 0.999885873442320$	$ z_7  = 0.999700011673623$
$ z_8  = 0.999885873442320$	$ z_8  = 0.999700011673623$
$ z_9  = 0.999817030734459$	$ z_9  = 0.9997280795511862$
$ z_{10}  = 0.999817030734459$	$ z_{10}  = 0.999728079551186$
$ z_{11}  = 0.999698223334227$	$ z_{11}  = 0.999232856468627$
$ z_{12}  = 0.999698223334227$	$ z_{12}  = 0.999232856468627$
$ z_{13}  = 0.998987544359954$	$ z_{13}  = 0.998200508100621$
$ z_{14}  = 0.998987544359954$	$ z_{14}  = 0.998200508100621$
$ z_{15}  = 0.998948054386297$	$ z_{15}  = 0.997954527329948$
$ z_{16}  = 0.998948054386297$	$ z_{16}  = 0.997954527329948$
$ z_{17}  = 0.943618087007394$	$ z_{17}  = 0.950378857905549$
$ z_{18}  = 0.999137469231172$	$ z_{18}  = 0.998925064070233$
$ z_{19}  = 0.999137469231172$	$ z_{19}  = 0.998925064070233$
$ z_{20}  = 0.999763388423405$	$ z_{20}  = 0.999693743188033$
$ z_{21}  = 0.999763388423405$	$ z_{21}  = 0.999693743188033$
$ z_{22}  = 0.999837119563144$	$ z_{22}  = 0.999650595726760$
$ z_{23}  = 0.999837119563144$	$ z_{23}  = 0.999650595726760$

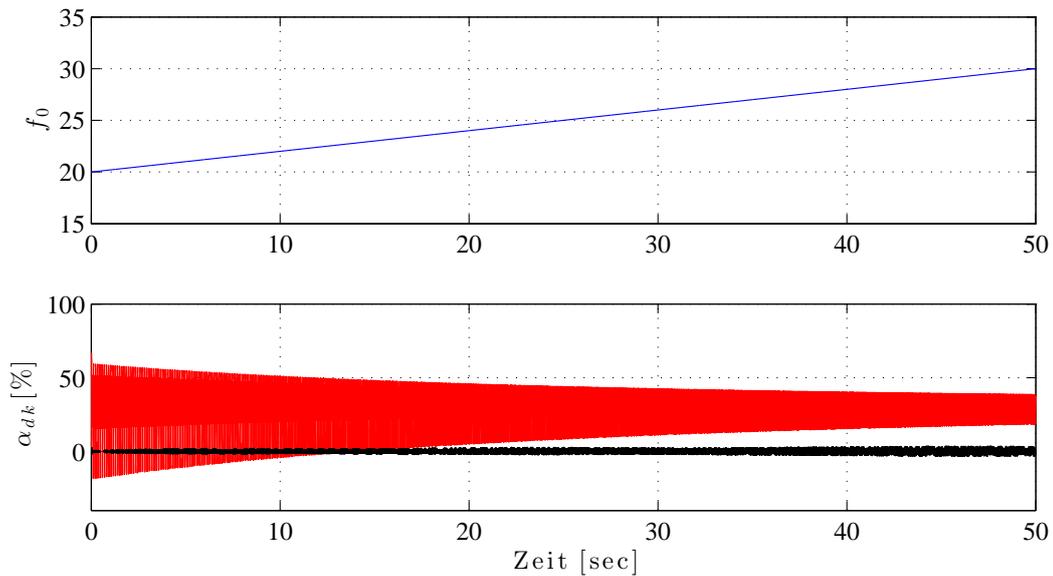
**Tabelle 5.2:** Beträge der Reglerpole: Reglerübertragungsfunktion  $G_{K_{min}}(z)$  für die untere Schranke bei  $f_{0_{min}}$  ( $\theta_{nom} = -1$ ) und  $G_{K_{max}}(z)$  für die obere Schranke bei  $f_{0_{max}}$  ( $\tilde{\theta}_{nom} = +1$ )



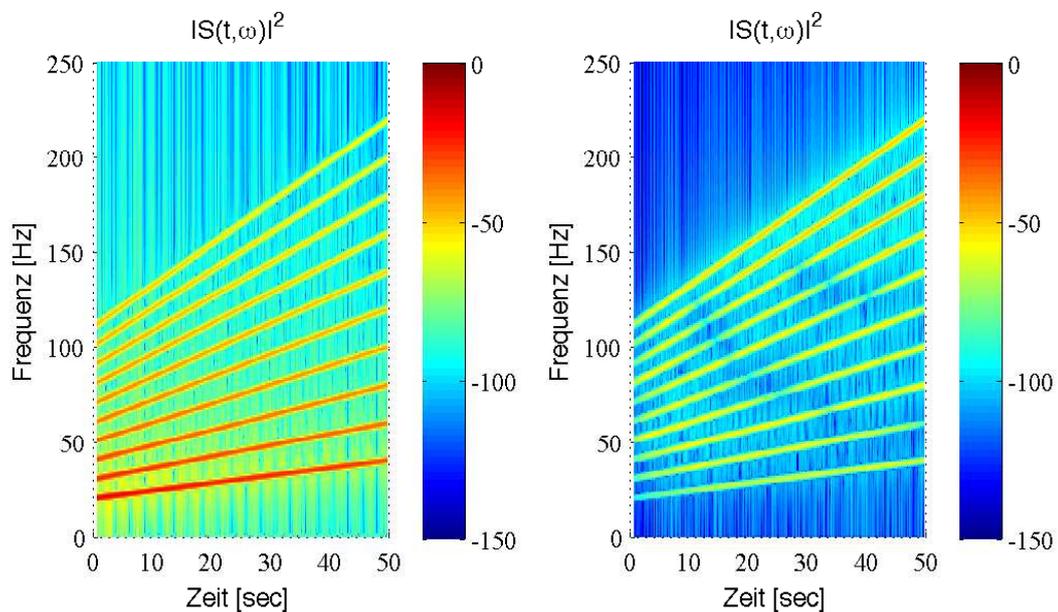
**Abbildung 5.9:** Szenario 1 (Linear-fractionaler Ansatz): Konstantes Frequenzsignal  $f_0 = 25$  Hz für den variierenden Parameter  $\tilde{\theta}_{nom}$  oben links; einseitiges Amplitudenspektrum des Störsignals (überlagerte Kosinusschwingung) oben rechts; Simulationsergebnis Störsignal auf Regelstrecke im offenen Kreis ( $y_{P(OL)}$  rot) und im geschlossenen Regelkreis ( $y_{P(CL)}$  schwarz) unten links; einseitiges Amplitudenspektrum für den offenen Kreis ( $y_{P(OL)}$  rot) und für den geschlossenen Regelkreis ( $y_{P(CL)}$  schwarz) unten rechts



**Abbildung 5.10:** Szenario 1 (Linear-fractionaler Ansatz): Spektrogramm für den offenen Kreis  $y_{P(OL)}$  links und für den geschlossenen Regelkreis  $y_{P(CL)}$  rechts; Farbskala von  $-150$  mit niedriger (blau) bis  $0$  mit hoher Energieintensität (rot)



**Abbildung 5.11:** Szenario 2 (Linear-fractionaler Ansatz): Rampenförmiges Frequenzsignal für den variierenden Parameter  $\tilde{\theta}_{nom}$  im Frequenzintervall  $[f_{0min}, f_{0max}]$  oben; Simulationsergebnis Störsignal auf Regelstrecke im offenen Kreis ( $y_{P(OL)}$  rot) und im geschlossenen Regelkreis ( $y_{P(CL)}$  schwarz) unten



**Abbildung 5.12:** Szenario 2 (Linear-fractionaler Ansatz): Spektrogramm für den offenen Kreis  $y_{P(OL)}$  links und für den geschlossenen Regelkreis  $y_{P(CL)}$  rechts; Farbskala von  $-150$  mit niedriger (blau) bis  $0$  mit hoher Energieintensität (rot)

## 5.4 Vergleich der LPV-Ansätze

Beide Ansätze, der Polytope sowie der Linear-Fraktionale, erfüllen die Bedingung der Stabilität im geschlossenen Regelkreis, wie auch die geforderte Störunterdrückung für vorab definierte Frequenzen. Der variierende Parameter, die Grundfrequenz  $f_0$ , kann sich dabei in einem definierten Intervall beliebig ändern. Aufgrund der Parameterreduktion auf zwei variierende Parameter beim polytopen Ansatz sowie auf einen variierenden Parameter beim linear-fraktionalen Ansatz, hat man theoretisch die Möglichkeit beliebig viele Frequenzen im Störmodell Gl. (2.18) vorzugeben. In der praktischen Anwendung muss ein Kompromiss zwischen der Anzahl an Frequenzen und dem Frequenzintervall für die Grundfrequenz  $f_0 \in [f_{0_{min}}, f_{0_{max}}]$  gefunden werden. Je größer die Anzahl an Frequenzen, desto kleiner muss das Intervall für  $f_0$  gewählt werden. Dies resultiert aus der Tatsache, dass mit jeder vorgegebenen Frequenz, das Störmodell und entsprechend die verallgemeinerte Strecke um zwei Ordnungen erhöht wird. Das Finden eines LPV-Reglers, der alle Kriterien erfüllt, wird angesichts der immer größer werdenden Dimension schwieriger.

Die jeweiligen LPV-Regler werden mit der MATLAB-Toolbox *YALMIP* und dem *SeDuMi 1.3 solver* berechnet. Beim polytopen Ansatz müssen vier LTI-Regler, einer pro Ecke, durch gleichzeitiges Lösen der LMIs gefunden werden. Dabei werden die LMIs zu einer Einzigen zusammengefasst und mit dem Toolbox-Befehl „*solvesdp(F,h,options)*“ in den Optimierungsvariablen  $h$ , mit Nebenbedingungen  $F$ , gelöst. Jedoch hat die zusammengefasste LMI eine Matrixdimension von  $[94 \times 94]$  (*YALMIP-Solver-Ausgabe*). Zum Vergleich muss beim linear-fraktionalen Ansatz jeweils eine LMI in  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{S}$ , siehe Gl. (4.32), mit Matrixdimension von  $[64 \times 64]$  (*YALMIP-Solver-Ausgabe*) gelöst werden. In **Tabelle 5.3** sind vier interne Kenngrößen des *SeDuMi-Solvers* (MATLAB-Ausgabe bei Befehldurchführung), bezogen auf ein Störmodell mit  $l = 10$  Frequenzen, für beide Ansätze einander gegenübergestellt. Daraus ist klar ersichtlich, dass der polytope Ansatz, verglichen

	Polytope Ansatz	Linear-funktionaler Ansatz
Anzahl an Gleichungen	8215	592
Ordnung	563	217
Dimension	52025	12502
Radius	$1.0 \times 10^{10}$	$1.5 \times 10^5$

**Tabelle 5.3:** Interne Kenngrößen des *SeDuMi-Solvers*

mit dem linear-fraktionalen Ansatz, einen höheren Rechenaufwand fordert. Die Anzahl an Gleichungen ist fast 14 mal größer, die Ordnung ist mehr als doppelt so hoch und beim Optimierungsradius liegen mehrere Zehnerpotenzen dazwischen. Ändert sich die praktische Anwendung und steigt die Ordnung des Regelstreckenmodells, muss zwangsläufig

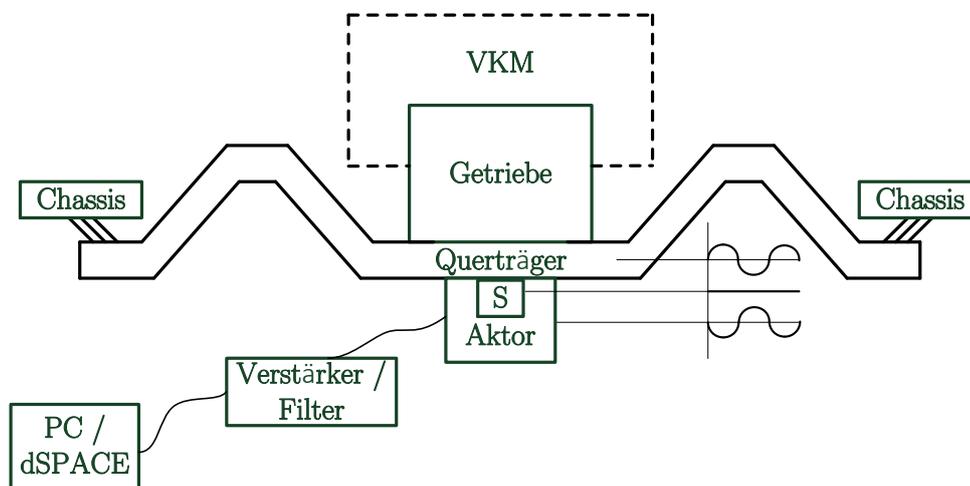
die Ordnung des Störmodells verringert und somit die Frequenzanzahl reduziert werden. Aufgrund der Tatsache, dass beim polytopen Ansatz für jede Ecke ein LTI-Regler berechnet und dann in Echtzeit, abhängig vom variierenden Parameter, interpoliert wird, ist die Störunterdrückung bei diesem Ansatz im definierten Frequenzintervall für  $f_0$  effektiver als beim linear-fractionalen Ansatz. Problematisch ist das Finden dieser Regler, da die Dimension mit jeder zusätzlichen Ordnung im Störmodell oder in der Regelstrecke extrem ansteigt. Die optimierten LTI-Regler (einer pro Ecke) für die Regelstrecke Drosselklappe, siehe **Unterabschnitt 5.2.2** für  $\nu_1 = 1.0, \nu_2 = 1.5, \dots, \nu_{10} = 5.5$ , besitzen alle Pole innerhalb des Einheitskreises, siehe **Tabelle 5.1**, und sind somit stabil, jedoch ist das Finden einer Lösung (mit stabilen LTI-Reglern) schwierig und sehr zeitaufwändig.

Beim linear-fractionalen Ansatz wird lediglich ein Regler für den gesamten Frequenzbereich berechnet, der durch die LF-Form und in Abhängigkeit vom variierenden Parameter durch die Unsicherheitsmatrix in Echtzeit angepasst wird und somit LPV ist. Die Dimension des Optimierungsproblems ist für diesen Fall viel geringer und somit einfacher lösbar, siehe zweite Spalte der **Tabelle 5.3**. Des Weiteren ist der LTI-Regler für die untere Schranke (bei  $f_{0min} \implies \tilde{\theta}_{nom} = -1$ ) sowie für die obere Schranke (bei  $f_{0max} \implies \tilde{\theta}_{nom} = +1$ ) ebenfalls stabil, siehe **Tabelle 5.2**. In Bezug auf die praktische Umsetzung ist der linear-fractionale dem polytopen Ansatz vorzuziehen.

Zur Veranschaulichung und zur Bewertung der beiden Ansätze in Bezug auf eine praktische Anwendung ist die Drosselklappe,  $IT_1$ -Glied mit Systemordnung zwei, sehr gut geeignet. Dennoch muss für die AVC-Anwendung am KFZ, siehe **Abschnitt 6**, vorab evaluiert und in der Simulation getestet werden, mit welchem Ansatz die größtmögliche Anzahl an Frequenzen vorgegeben und trotzdem das Optimierungsproblem zur Reglerberechnung gelöst werden kann.

## 6 AVC-Erprobung am KFZ mit Messergebnissen

Ziel der praktischen Umsetzung ist die zuvor erarbeiteten sowie in der Simulation getesteten theoretischen Ansätze direkt am Kraftfahrzeug zu erproben und gleichzeitig zu verifizieren. Die vom Motor erzeugten Schwingungen werden durch das angeflanschte Getriebe über den Querträger in das Chassis und somit in den Fahrgastinnenraum emittiert. Dabei bildet das Getriebe mit dem Querträger eine starre Verbindung. Hier ist die Stelle an der mit einem aktiven Tilger den Schwingungen entgegengewirkt werden soll. Der Tilger (Aktor) wird unterhalb des Querträgers zusätzlich angeflanscht. Mit einem Sensor werden die Vertikalbeschleunigungen detektiert, im *Rapid Control Prototyping System* (RCP System) verarbeitet und eine Steuergröße für den Aktor generiert, der dann die Gegenschwingungen mit gleicher Amplitude und entgegengesetzter Phase erzeugt.



**Abbildung 6.1:** Schematische Darstellung der AVC-Konfiguration am KFZ: Getriebe angeflanscht an den Verbrennungsmotor (VKM) und starr mit dem Querträger sowie dem Chassis verbunden; einen zusätzlich angeflanschten aktiven Schwingungstilger unterhalb des Querträgers, direkt daneben ein montierter Sensor und beide über eine Verstärker-/Filtereinheit mit dem PC verbunden

Die gesamte *Active Vibration Control* (AVC)-Konfiguration ist in **Abbildung 6.1** schematisch dargestellt. Dabei ist der aktive Tilger als elektromagnetischer Massenschwinger, siehe hierfür Knake-Langhorst u. a. (2006, S.2672f, Abb.6), ausgeführt und direkt unterhalb des Querträgers angeflanscht. Unmittelbar daneben ist ein Beschleunigungssensor montiert. Aktor und Sensor sind über eine Verstärker-/Filtereinheit mit dem PC verbunden. Mit dem Rapid Control Prototyping System der Fa. *dSPACE* ist es möglich, das AVC-System in Echtzeit zu erproben. Der Regler wird in *MATLAB/Simulink* implementiert, daraus mit *Real-Time Workshop* ein echtzeitfähiger C-Code erstellt und auf die MicroAutoBox (MABX) der Fa. *dSPACE* geladen. Auf dieser MABX läuft der echtzeitfähige Code, der die Messsignale intern verarbeitet und dann gemäß dem Regelalgorithmus die Stellgröße für den Aktor generiert. Ein-/Ausgangsgrößen der MABX sind

Spannungssignale zwischen  $0V - 5V$  am Eingang beziehungsweise  $0V - 4.5V$  am Ausgang. Weitere Informationen über RCP Systeme, Bypassvarianten, Vorgehensweisen sowie mögliche Hardware- und Softwarekonfigurationen sind in Abel und Bollig (2006, S.295ff, Kap.7) sowie in Wallentowitz und Reif (2008, S.651ff, Kap.17) aufgeführt. Im Folgenden ist die verwendete Software sowie die Hardware für die praktische AVC-Anwendung am KFZ detailliert aufgelistet.

## 6.1 AVC-Systemkomponenten

### Software

- The MathWorks<sup>TM</sup> MATLAB<sup>®</sup>  
R2010a Version 7.10 (32Bit), R2012a Version 7.14 (64Bit)
  - *Simulink*
  - *Control System Toolbox*
  - *Optimization Toolbox*
  - *Real-Time Workshop*
  - *Robust Control Toolbox*
  - *Signal Processing Toolbox*
  - *System Identification Toolbox*
  - *Symbolic Math Toolbox*
  - *YALMIP Toolbox, SeDuMi 1.3 solver*
- dSPACE (Release 7.0) ControlDesk Developer Version 3.7

### Hardware

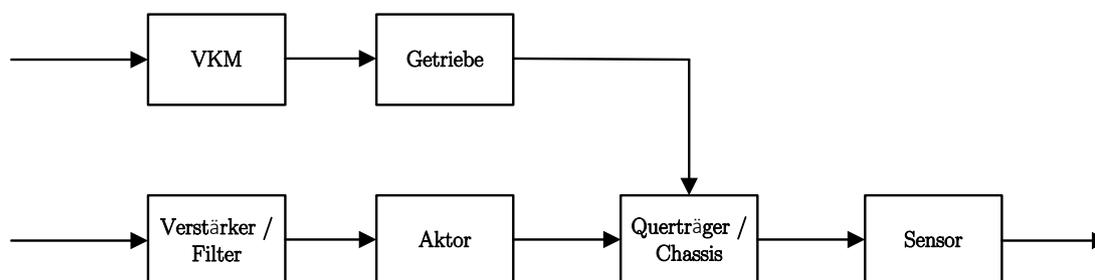
- dSPACE MicroAutoBox (MABX I) DS1401/1501
- Antialiasing-Filter, Tiefpassfilter mit veränderlicher Verstärkung und 400Hz Eckfrequenz
- Prototyp eines Linearaktors (elektromagnetisches Prinzip), Dauerleihgabe der *ContiTech Vibration Control GmbH*
- Elmo Servo Drives  
VPF Analog Servo Drives VIO-15/60 (Verstärker)  
VPF Analog Servo Drives VIO-STARTER (Ansteuerplatine)
- PCB PIEZOTRONICS
  - ICP<sup>®</sup> Beschleunigungssensor (Modell 338C04), Messbereich  $\pm 50g$
  - 16-Kanal Signal-Conditioner (Series 481A)
  - Portabler Handshaker  $\pm 1g$  (Modell 394C06) zur Sensorkalibrierung
- Handelsübliches Notebook mit WIN7

## Versuchsfahrzeug

- Audi A4 1.9 TDI, Leistung 96kW, Erstzulassung 2000

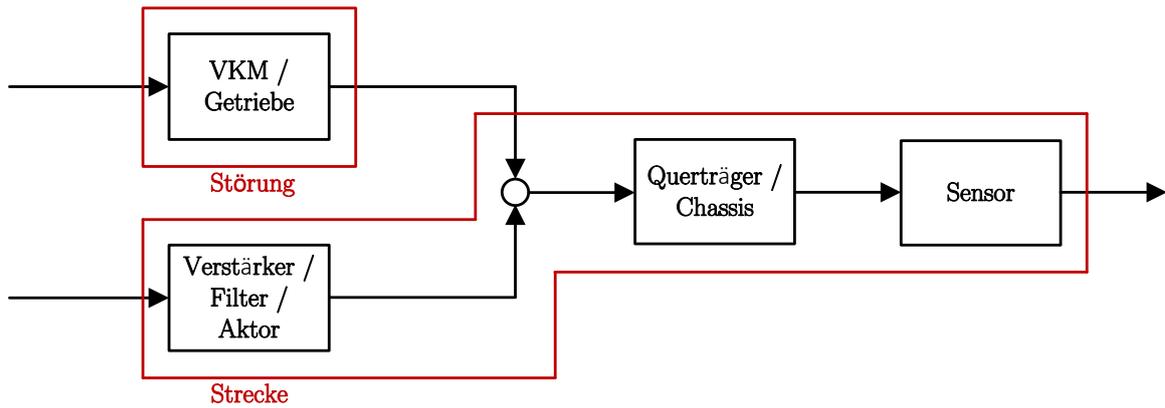
## 6.2 Identifikation der Regelstrecke

In diesem Unterabschnitt wird die Modellbildung der AVC-Regelstrecke durchgeführt. Die Reglersyntheseverfahren aus **Abschnitt 3** und **Abschnitt 4** sind modellbasierte Verfahren, die jeweils ein Modell der Regelstrecke zur Berechnung des LPV-Reglers benötigen. In **Abbildung 6.1** ist die schematische AVC-Konfiguration dargestellt. Ziel ist es, diese Regelstrecke entweder physikalisch durch Differentialgleichungen zu modellieren oder als *Black-Box* zu identifizieren. In diesem Fall wird aufgrund der Komplexität des Systems die zweite Option angewendet, sodass die Strecke als *Black-Box* identifiziert wird. Wie in **Abbildung 6.2** aufgezeigt, lässt sich die AVC-Konfiguration in ihrer Anord-



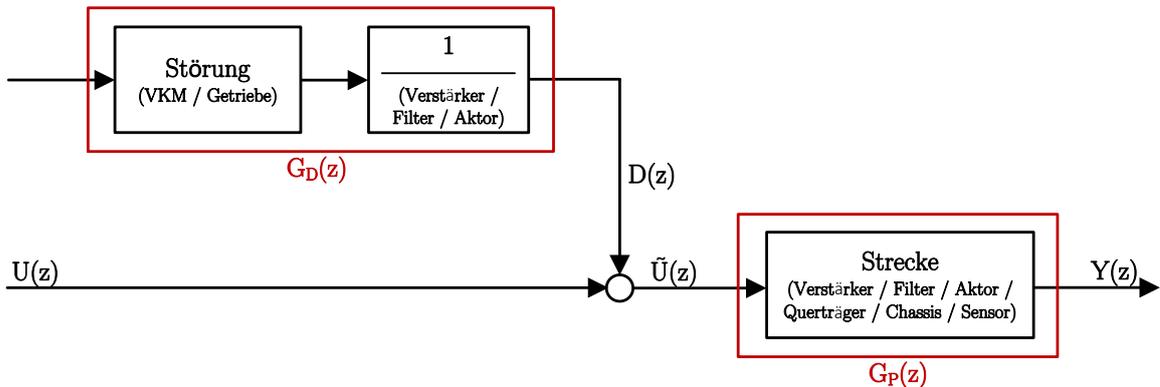
**Abbildung 6.2:** AVC-Konfiguration am KFZ (ohne PC/dSPACE): Systemdarstellung durch Teilsysteme

nung und entsprechender Wirkungsweise durch Einzelsysteme vereinfacht darstellen. Es handelt sich dabei um die Teilsysteme Verbrennungskraftmaschine (VKM), Getriebe, die Verstärker-/Filtereinheit, der Aktor (Tilger), die Querträger-/Chassiseinheit sowie dem Sensor. Das Filter ist als analoger Tiefpass mit einer Eckfrequenz von 400 Hz ausgeführt und wird als Antialiasing-Filter für das analoge Beschleunigungssensorsignal verwendet. Schwingungen, die im Teilsystem VKM erzeugt und über das Teilsystem Getriebe und Chassis emittiert werden, sind die zu unterdrückenden Störungen. Die zusätzlich hinzugefügten AVC-Komponenten sind in die Teilsysteme Verstärker-/Filtereinheit, Aktor und Sensor unterteilt. Die gesamte Konfiguration kann man zu einem Teilsystem *Störung* und einem Teilsystem *Strecke* zusammenfassen und durch diese ersetzen, siehe **Abbildung 6.3**. Folglich besteht das Teilsystem *Störung* aus den Teilsystemen VKM und Getriebe sowie das Teilsystem *Strecke* aus der Verstärker-/Filtereinheit, dem Aktor, der Querträger-/Chassiseinheit und dem Sensor. Dabei wirkt das Ausgangssignal aus dem Teilsystem *Störung* als Störgröße auf das Teilsystem *Strecke*. Im letzten Schritt kann man aus der vereinfachten Darstellung der AVC-Konfiguration den Signalfussplan in Form eines Blockschaltbildes aufstellen. Das Blockschaltbild, siehe **Abbildung 6.4**, besteht



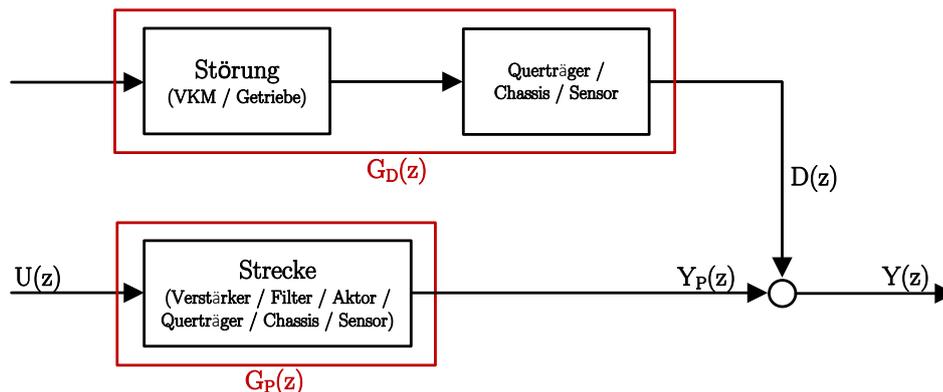
**Abbildung 6.3:** Zusammengefasste Darstellung der AVC-Konfiguration am KFZ: Teilsystem *Störung* besteht aus den Teilsystemen VKM und Getriebe; Teilsystem *Strecke* besteht aus der Verstärker-/Filtereinheit, dem Aktor, der Querträger-/Chassiseinheit und dem Sensor

aus dem zeitdiskreten Störmodell  $G_D(z)$  mit Ausgangsgröße  $D(z)$ , die als additive Eingangsstörung auf das zeitdiskrete Streckenmodell  $G_P(z)$  wirkt. In diesem Fall besteht



**Abbildung 6.4:** Blockschaltbild der AVC-Konfiguration am KFZ: Störmodell  $G_D(z)$  sowie Regelstrecke  $G_P(z)$  mit der Eingangsstörung  $D(z)$  (über das Getriebe emittierte Motorschwingungen)

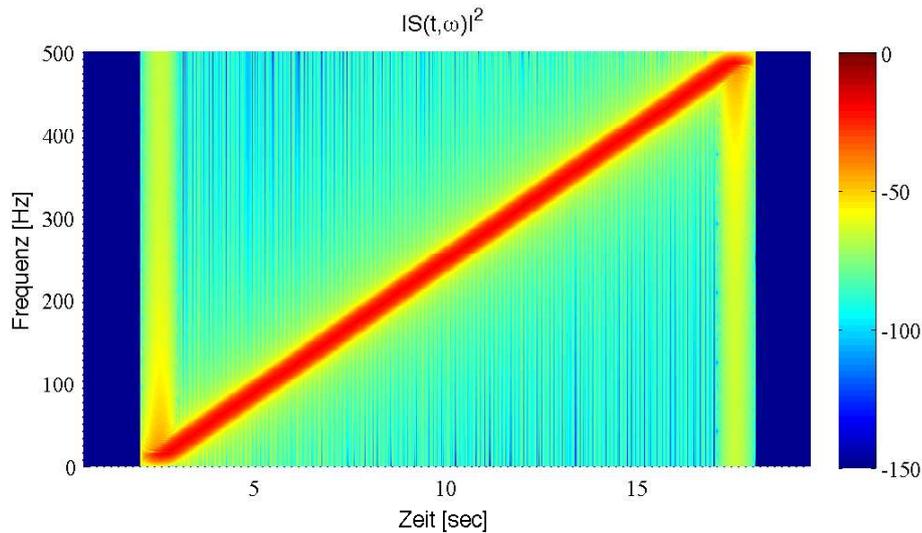
das Störmodell  $G_D(z)$  aus dem Teilsystem *Störung* (VKM/Getriebe) und dem inversen Teilsystem von *Verstärker/Filter/Aktor* (lediglich einem Verstärkungsfaktor). Durch die Annahme die Störgröße  $D(z)$  entspricht den Motorschwingungen (Motordrehfrequenz Gl. (2.1) und deren Oberwellen), braucht das Störmodell  $G_D(z)$  nicht identifiziert zu werden und kann durch das Störmodell Gl. (2.18) ersetzt werden. Im anderen Fall, Störgröße  $D(z)$  als additive Ausgangsstörung, siehe **Abbildung 6.5**, besteht das Störmodell  $G_D(z)$  aus dem Teilsystem *Störung* und dem Teilsystem *Querträger/Chassis/Sensor*. Dieser Fall



**Abbildung 6.5:** Blockschaltbild der AVC-Konfiguration am KFZ: Störmodell  $G_D(z)$  sowie Regelstrecke  $G_P(z)$  mit der Ausgangsstörung  $D(z)$  (über das Getriebe emittierte Motorschwingungen)

wurde beim Erstellen der verallgemeinerten Strecke für die Reglerberechnung nicht weiterverfolgt, da die zu unterdrückenden Frequenzen des Störmodells ungenügend getroffen wurden.

Im Weiteren gilt es ein zeitdiskretes Modell  $G_P(z)$ , bestehend aus den Teilsystemen Verstärker, Filter, Aktor, Querträger, Chassis und Sensor zu identifizieren. Hierfür wird ein *Chirp-Signal*, Sinusschwingung mit ansteigender Frequenz, erzeugt und dem Aktor als Steuergröße vorgegeben. Im Spektrogramm (beschrieben im **Unterabschnitt 5.2.3**), siehe **Abbildung 6.6**, ist das mit der MATLAB-Funktion „*chirp(T,F0,T1,F1)*“ erzeugte Signal im relevanten Frequenzbereich von 10 Hz bis 490 Hz zu sehen. Der gesamte Frequenzbereich von  $f_s < 1/(2T) = 500$  Hz, mit  $T = 1$  ms, kann folglich komplett angesteuert werden. Bei der praktischen Durchführung der Messreihen hat sich gezeigt, dass durch zu große Amplituden der Steuergröße Resonanzanregungen entstehen, die die Messdaten verfälschen und somit die Identifikation unbrauchbar machen. Deshalb wurden die Messungen nur mit einer kleinen Chirp-Amplitude durchgeführt. Im Frequenzbereich um die Resonanzfrequenz des Aktors, zwischen 55 Hz und 60 Hz, konnten mit dieser Maßnahme Aktoranschläge (Schwingungsmasse des Aktors schlägt ans Aktorgehäuse) verhindert und somit der Messbereich des Beschleunigungssensors über den gesamten Frequenzbereich vollständig angesteuert werden. Das Steuersignal (Chirp-Signal) gibt *dSPACE* in Form eines Spannungssignals an den Verstärker weiter, der wiederum ein entsprechendes Stromsignal generiert und damit den Tilger ansteuert. Es wurden mehrere Messungen durchgeführt und dabei die analog gefilterten Beschleunigungssignale am Querträger aufgenommen. Aus diesen Messreihen kann mit der *System Identification Toolbox* von MATLAB eine lineare, zeitdiskrete Übertragungsfunktion ermittelt werden.

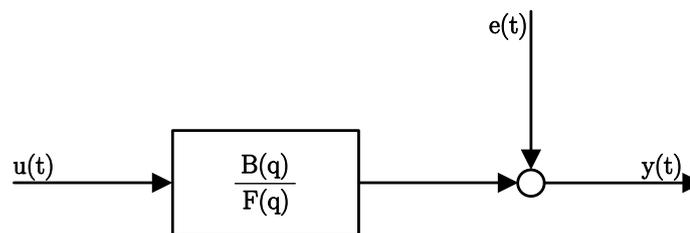


**Abbildung 6.6:** Spektrogramm des Chirp-Signals als Steuergröße für den Aktor zur Streckenidentifikation (Farbskala von blau mit niedriger zu rot mit starker Energieintensität)

Dafür wird die *Output Error* (OE)-Modellstruktur

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t) \quad (6.1)$$

verwendet, siehe hierzu Ljung (1987, S.75, Gl.4.25), mit dem Vorwärtsverschiebungsoperator  $q$  zu jedem Abtastzeitpunkt  $t = t_k = kT$ ,  $k = 1, 2, \dots$  und Abtastzeit  $T = 1$  ms. In **Abbildung 6.7** ist das Blockschaltbild der OE-Modellstruktur, gegeben in Ljung (1987, S.76, Abb.4.3), dargestellt. Mit Hilfe des MATLAB-Befehls „`oe(dataIdent,[nb nf 1])`“,



**Abbildung 6.7:** Blockschaltbild der OE-Modellstruktur

unter Angabe der Ordnung für das Zähler-/Nennerpolynom  $[nb \ nf]$ , wird eine zeitdiskrete Übertragungsfunktion anhand der Messdaten berechnet. Die Messdaten können je nach Art des Identifikationssignals vorab geteilt werden, sodass der eine Teil zur Identifikation und der andere Teil für die Validierung zur Verfügung steht. Bei diesem Chirp-Signal wurden die kompletten Messdaten zur Validierung benutzt. Mit dem MATLAB-

Befehl „*compare(dataVal,sys)*“ wird der *Normalized Root Mean Square Error* (NRMSE), siehe MATLAB-Dokumentation, als Vergleichsgröße in Prozent errechnet. Diese Kenngröße gibt an, zu wie viel Prozent der simulierte Ausgang  $\hat{y}(t)$  mit dem Messsignal  $y(t)$  übereinstimmt.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, aus den gespeicherten Messreihen direkt ein kontinuierliches Streckenmodell  $G_P(s)$  mit der *CONTSID-Toolbox* für MATLAB, gemäß Garnier und Wang (2008, Kap.1 und 9) und <http://www.iris.cran.uhp-nancy.fr/contsid>, zu identifizieren und anschließend mit dem MATLAB-Befehl „*c2d(sys,Ts,method)*“ in ein zeitdiskretes Modell  $G_P(z)$  umzuwandeln. Die dabei verwendeten Algorithmen/Funktionen sowie die damit verbundenen Vorteile für praktische Anwendungen sind in Garnier (2015) in einem ganzheitlichen Überblick aufgeführt und kommen im Folgenden zur Anwendung.

Beide Identifikationsvarianten wurden auf die Messreihen angewandt und jeweils ein zeitdiskretes Streckenmodell identifiziert. Mit der *System Identification Toolbox* von MATLAB und der Vorgabe, eine OE-Modellstruktur Gl. (6.1), ergab sich folgende Übertragungsfunktion

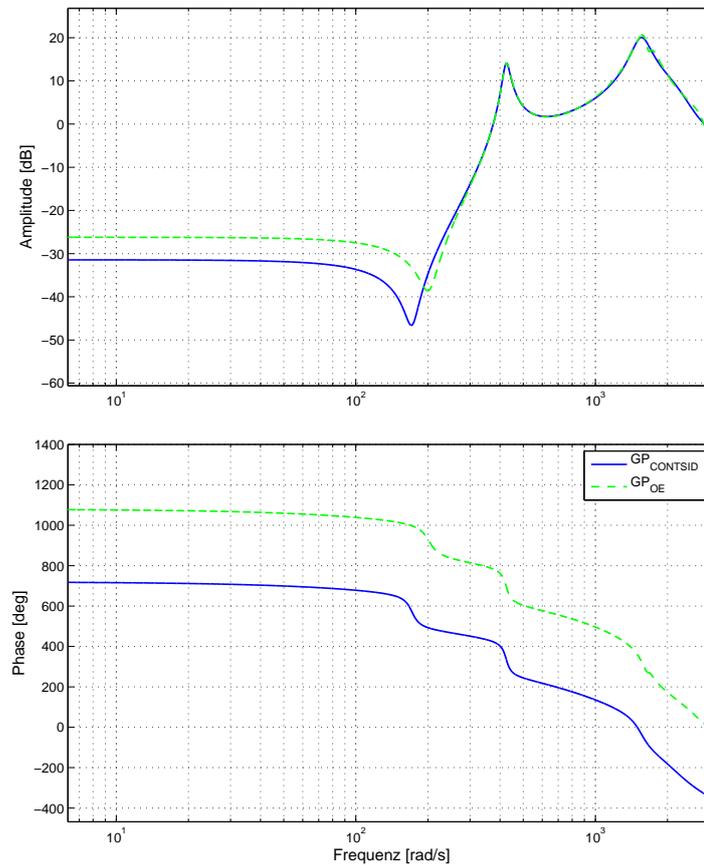
$$\begin{aligned}
 G_{P_{OE}}(z) &= \frac{Y(z)}{\tilde{U}(z)} = \\
 &= ( -0.003719z^{-1} - 0.05902z^{-2} - 1.07z^{-3} + 1.747z^{-4} + 0.4794z^{-5} + \dots \\
 &\quad \dots - 0.6295z^{-6} + 0.1521z^{-7} - 1.389z^{-8} - 0.1335z^{-9} + 1.014^{-10} ) \times \\
 &\quad ( 1 - 0.1618z^{-1} + 0.6478z^{-2} - 0.244z^{-3} - 0.444z^{-4} + 0.3437z^{-5} + \dots \\
 &\quad \dots + 0.1816z^{-6} + 0.3598z^{-7} + 0.4245z^{-8} + 0.02583z^{-9} + 0.06849z^{-10} + \dots \\
 &\quad \dots + 0.008474^{-11} )^{-1} . \tag{6.2}
 \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion  $G_{P_{OE}}(z)$  besitzt eine Zählerpolynomordnung von *zehn* und eine Nennerpolynomordnung von *elf*. Hierbei konnte ein NRMSE-Wert, also eine Übereinstimmung zwischen dem simulierten Streckenausgang  $\hat{y}(t)$  und dem Messsignal  $y(t)$ , von 84.25 % erreicht werden. Mit der *CONTSID-Toolbox* für MATLAB und anschließendem Umwandeln vom Kontinuierlichen ins Zeitdiskrete (MATLAB-Befehl *c2d*) wurde folgende Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned}
 G_{P_{CONTSID}}(z) &= \frac{Y(z)}{\tilde{U}(z)} = \\
 &= ( 0.002382z^7 - 0.08863z^6 - 0.8853z^5 + 3.543z^4 - 4.036z^3 + \dots \\
 &\quad \dots + 1.174z^2 + 0.5208z - 0.2231 ) \times \\
 &\quad ( z^8 - 1.983z^7 + 2.186z^6 - 1.985z^5 + 1.441z^4 - 0.634z^3 + \dots \\
 &\quad \dots + 0.4031z^2 - 0.2104z + 0.06895 )^{-1} \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

identifiziert. Hierfür ergab sich ein NRMSE-Wert von 82.20 % bei einer Zähler-/Nennerkon-

figuration von *sieben* und *acht*. Ein Erhöhen der Ordnungen für das Zähler-/Nennerpolynom erbrachte bei beiden Varianten nur minimale prozentuale Verbesserungen des NRMSE-Werts, sodass kein Mehrwert hinsichtlich Genauigkeit entstand. Beide Übertragungsfunktionen  $G_{POE}(z)$  und  $G_{PCONTSID}(z)$  sind im Bodediagramm, siehe **Abbildung 6.8**, einander gegenübergestellt. Ab  $300 \text{ [rad/s]}$ , das entspricht  $47.75 \text{ Hz}$ , sind beide Streckenübertra-



**Abbildung 6.8:** Amplitudengang (oben) und Phasengang (unten) der zeitdiskreten Streckenübertragungsfunktionen  $G_{POE}(z)$  (grün gestrichelt) und  $G_{PCONTSID}(z)$  (blau)

gungsfunktionen im Amplitudengang nahezu identisch. Im Frequenzbereich  $< 300 \text{ [rad/s]}$  unterscheiden sich die Amplitudenverläufe in einem konstanten Versatz von ca.  $5 \text{ [dB]}$ . Das bedeutet, die stationäre Verstärkung beider identifizierten Modelle ist reell und positiv, jedoch verschieden. Der Phasenverlauf ist über den gesamten Frequenzbereich  $[1 - 500] \text{ Hz}$  gleich, abgesehen von einem konstanten Phasenversatz von ca.  $360^\circ$ , der durch die unterschiedliche stationäre Verstärkung entsteht und sich in einem Vielfachen von  $\pm 360^\circ$  zur Phase  $0^\circ$  widerspiegelt. Für den weiteren Verlauf, Reglersynthese bis praktische Realisierung und Erprobung, ist ein Modell  $G_P(z)$  der Strecke oberhalb der Resonanzfrequenz des Aktors ( $> 60 \text{ Hz}$ ) entscheidend. Diesbezüglich sind beide Modelle Gl. (6.2) und Gl. (6.3) fast identisch und der NRMSE-Wert liegt in diesem Frequenzbereich bei über 90%.

In diesem Unterabschnitt wurde mittels zweier Identifikationsmethoden das Streckenmodell  $G_{POE}(z)$  mit Ordnung *elf* und das Modell  $G_{PCONTSID}(z)$  mit Ordnung *acht* für die AVC-Konfiguration mit Eingangsstörung, siehe **Abbildung 6.4**, ermittelt.

### 6.3 Reglersynthese

Im Weiteren wird das Modell der Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion Gl. (6.3) verwendet. Es besitzt im Vergleich zum Modell Gl. (6.2) eine um drei Ordnungen verringerte Übertragungsfunktion, wodurch auch die Ordnung der verallgemeinerten Strecke reduziert wird. Von Seiten der Hardware gibt es jedoch Einschränkungen in Bezug auf die maximale Ordnung des Reglers, die in Echtzeit realisierbar ist. Die *MABX I* lässt sich maximal mit einem dynamischen LPV-Regler 20ter Ordnung betreiben. Aufgrund dessen darf die erstellte verallgemeinerte Strecke für die Reglersynthese eine Ordnung von 20 nicht überschreiten. Jede einstellbare Frequenz im Störmodell erhöht die Ordnung des Störmodells um zwei, der Gewichtungsfilter besitzt die Ordnung eins, also lassen sich maximal fünf Frequenzen im Störmodell vorgeben. Dies bezieht sich auf eine Abtastzeit von  $T = 1$  ms. Verringert man die Abtastzeit auf  $T = 0.5$  ms, ist lediglich ein LPV-Regler 16ter Ordnung hardwareseitig in Echtzeit realisierbar.

Beide Ansätze, der *Polytope Ansatz* aus **Abschnitt 3** sowie der *Linear-Fraktionale Ansatz* aus **Abschnitt 4**, sind Reglersyntheseverfahren, die auf der  $H_\infty$ -Theorie basieren. Eine Eigenschaft dieser Verfahren ist, dass die Ordnung der verallgemeinerten Strecke der Ordnung des Reglers entspricht. Darüber hinaus besitzen die optimierten  $H_\infty$ -Regler aufgrund von Performance-Kriterien (hier: Pole des Störmodells liegen auf dem Einheitskreis) häufig instabile Pole, die zu gezielten Pol-/Nullstellenkürzungen im geschlossenen Regelkreis führen sollen, siehe hierzu Balini u. a. (2011). Diese instabilen Regler sind für eine praktische Umsetzung ungeeignet. Die identifizierten Streckenmodelle Gl. (6.2) sowie Gl. (6.3) sind stabil und besitzen keine Pole auf beziehungsweise außerhalb des Einheitskreises. In der praktischen Umsetzung ist es nicht sinnvoll, eine stabile Strecke mit einem instabilen Regler, der die instabilen Streckennullstellen mit instabilen Reglerpolen theoretisch kürzt, zu stabilisieren. Weicht das identifizierte Modell grundlegend von der realen Regelstrecke ab oder tritt ein Fehler auf (Sensordefekt), würde durch den instabilen Regler ein instabiler Regelkreis resultieren. Unter der Voraussetzung, dass die instabilen Nullstellen der Regelstrecke durch instabile Reglerpole in der Führungsübertragungsfunktion  $G_W(z) = Y(z)/W(z)$  hundertprozentig gekürzt werden können, tritt ein weiteres Problem auf. In der Stellübertragungsfunktion  $G_U(z) = U(z)/W(z)$  von der Führungsgröße  $W(z)$  zur Stellgröße  $U(z)$  bleiben die instabilen Reglerpole erhalten.  $G_U(z)$  ist instabil und die Stellgröße  $U(z)$  wächst über alle Grenzen. Deshalb sollten nur stabile LPV-Regler in der Praxis realisiert werden.

Die polytope Reglersynthese mit dem identifizierten Modell Gl. (6.3) sowie anschließende

Simulationen haben gezeigt, dass kein stabiler, polytooper LPV-Regler gefunden werden konnte und die Stabilität des geschlossenen Regelkreises dadurch stark beeinträchtigt wird. Prozentuale Streckenmodelländerungen (Verstärkungs-/Poländerungen) führten in Vorabsimulationen zu einem instabilen Verhalten des geschlossenen Regelkreises. Dies hat zur Folge, dass im Weiteren ausschließlich der *linear-fraktionale* Ansatz weiterverfolgt, implementiert und am KFZ umgesetzt wurde.

#### LPV-Reglersynthese mit dem linear-fraktionalen Ansatz aus Kapitel 4:

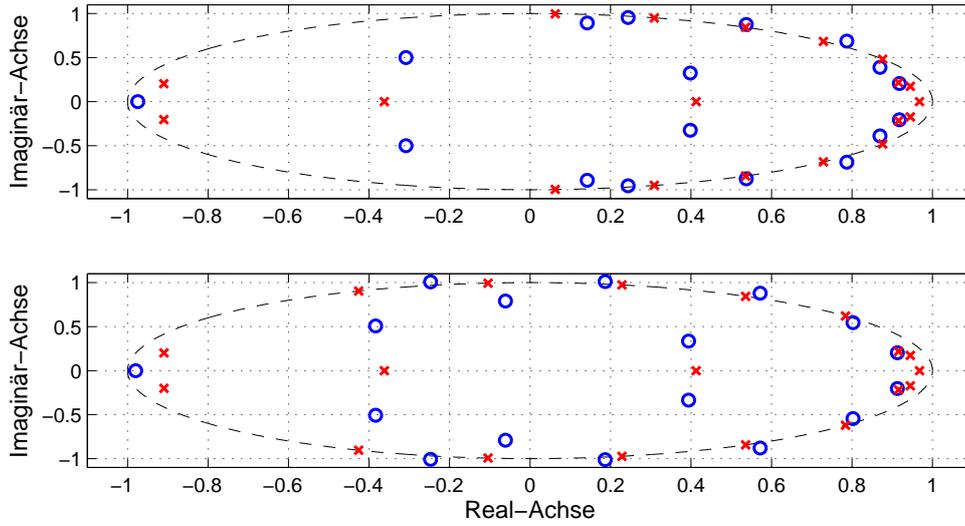
- Störmodell in LF-Form Gl. (4.86) zehnter Ordnung
  - Motordrehzahl  $n_{MOT} \in [2400, 3200] 1/min$ 
    - \* Frequenzintervall  $f_{MOT} = f_0 \in [40, 53.3] \text{ Hz}$
  - 5 Störfrequenzen
    - \*  $\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 3, \quad \nu_3 = 4, \quad \nu_4 = 5, \quad \nu_5 = 6$
- Identifiziertes Modell der Regelstrecke Gl. (6.3) achter Ordnung
- Gewichtungsfiler  $PDT_1$  Gl. (3.71) erster Ordnung
  - $A = 0.1, \quad M = 1.5, \quad \omega_B = 188.5 [rad/s]$
- Verallgemeinerte LPV-Strecke 19ter Ordnung in LF-Form (**Abbildung 4.5**)
  - Systemmatrizen mit  $y_D$  als Eingangsstörung Gl. (4.93)
- Berechnen dynamischer LPV-Regler Gl. (4.26)
  - Durchführung Schritte 1 bis 5 Gl. (4.32)-(4.36)

Das Motordrehzahlband ( $2400-3200 [1/min]$ ) sowie die 5 Störfrequenzen ( $\nu_1, \dots, \nu_5$ ) wurden so festgelegt, dass man im Amplitudengang der identifizierten Strecke  $G_{PCONTSID}(z)$  oberhalb des Aktors (erster Amplitudengipfel  $370-500 [rad/s]$ ) liegt, siehe hierzu **Abbildung 6.8**. (Zur Erläuterung: Untere Schranke der Grundfrequenz  $f_0 = 40 \text{ Hz}$  multipliziert mit  $\nu_1 = 2$  gleich  $80 \text{ Hz}$ , das entspricht  $502.65 [rad/s]$ .)

Die Optimierung ergab folgende Reglermatrizen

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{K}}[19 \times 19] & \mathbf{b}_{\mathbf{K}_1}[19 \times 1] & \mathbf{B}_{\mathbf{K}_\theta}[19 \times 10] \\ \mathbf{c}_{\mathbf{K}_1}^T[1 \times 19] & d_{K_{11}}[1 \times 1] & \mathbf{d}_{\mathbf{K}_{1\theta}}^T[1 \times 10] \\ \mathbf{C}_{\mathbf{K}_\theta}[10 \times 19] & \mathbf{d}_{\mathbf{K}_{\theta 1}}[10 \times 1] & \mathbf{D}_{\mathbf{K}_{\theta\theta}}[10 \times 10] \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

aus denen mit Gl. (5.18) und  $\tilde{\theta}_{nom}(f_{0min}) = -1$  sowie  $\tilde{\theta}_{nom}(f_{0max}) = +1$  jeweils ein LTI-Regler 19ter Ordnung für  $f_{0min}$  und  $f_{0max}$  berechnet werden kann. In **Abbildung 6.9** sind die dazugehörigen Pol-/Nullstellendiagramme für den LTI-Regler bei  $f_{0min}$  (oben) und bei  $f_{0max}$  (unten) dargestellt. Beide LTI-Regler sind stabil, dabei stehen die blauen Kreise für die Nullstellen, die roten Kreuze für die Polstellen und in schwarz gestrichelt ist der



**Abbildung 6.9:** Pol-/Nullstellendiagramm LTI-Regler bei  $f_{0_{min}} = 40$  Hz (oben) und  $f_{0_{max}} = 53.3$  Hz (unten): Nullstellen (blaue Kreise), Polstellen (rote Kreuze) und der Einheitskreis (schwarz gestrichelt)

Einheitskreis dargestellt. In **Tabelle 6.1** sind zusätzlich die Beträge der Reglerpole aufgeführt. Aus den optimierten Reglermatrizen Gl. (6.4) und den daraus entstehenden variierenden Reglermatrizen  $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\tilde{\theta}_{nom})$ ,  $\mathbf{B}_{\mathbf{K}}(\tilde{\theta}_{nom})$ ,  $\mathbf{C}_{\mathbf{K}}(\tilde{\theta}_{nom})$  und  $\mathbf{D}_{\mathbf{K}}(\tilde{\theta}_{nom})$ , siehe Gl. (5.18), erhält man den dynamischen LPV-Regler

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathbf{K}}(k+1) &= \mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\tilde{\theta}_{nom})\mathbf{x}_{\mathbf{K}}(k) + \mathbf{B}_{\mathbf{K}}(\tilde{\theta}_{nom})y_P(k) \\ u_K(k) &= \mathbf{C}_{\mathbf{K}}(\tilde{\theta}_{nom})\mathbf{x}_{\mathbf{K}}(k) + \mathbf{D}_{\mathbf{K}}(\tilde{\theta}_{nom})y_P(k) \end{aligned} \quad (6.5)$$

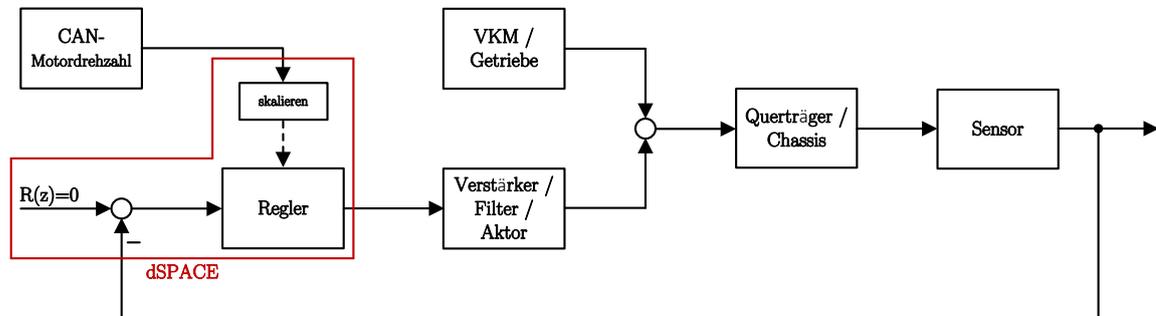
für Motordrehzahlen im Bereich zwischen 2400 [1/min] und 3200 [1/min]. Dieser wird in Abhängigkeit der Eingangsgrößen CAN-Motordrehzahl  $n_{MOT}$  und Sensorsignal  $e$  (neben dem Aktor) in *MATLAB/Simulink* programmiert, mit *Real-Time Workshop* echtzeitfähiger *C-Code* generiert und direkt auf die *MABX I* geladen. Mit Hilfe von *Control-Desk* steuert man anschließend die Messungen und speichert die Messreihen ab.

Betrag Pole $G_{K_{min}}(z)$	Betrag Pole $G_{K_{max}}(z)$
$ z_1  = 0.932246102484486$	$ z_1  = 0.931839540410470$
$ z_2  = 0.932246102484486$	$ z_2  = 0.931839540410470$
$ z_3  = 0.362099942192764$	$ z_3  = 0.999894481328334$
$ z_4  = 0.999886467456245$	$ z_4  = 0.999894481328334$
$ z_5  = 0.999886467456245$	$ z_5  = 0.362100022211510$
$ z_6  = 0.999558299337195$	$ z_6  = 0.999495504346108$
$ z_7  = 0.999558299337195$	$ z_7  = 0.999495504346108$
$ z_8  = 0.999795178548152$	$ z_8  = 0.999832225778971$
$ z_9  = 0.999795178548152$	$ z_9  = 0.999832225778971$
$ z_{10}  = 0.999900348169337$	$ z_{10}  = 0.999898446802233$
$ z_{11}  = 0.999900348169337$	$ z_{11}  = 0.999898446802233$
$ z_{12}  = 0.412941414100592$	$ z_{12}  = 0.999884024390856$
$ z_{13}  = 0.999899955672725$	$ z_{13}  = 0.999884024390856$
$ z_{14}  = 0.999899955672725$	$ z_{14}  = 0.412941438893307$
$ z_{15}  = 0.967731540483027$	$ z_{15}  = 0.967747975739675$
$ z_{16}  = 0.960677060969548$	$ z_{16}  = 0.960798702148952$
$ z_{17}  = 0.960677060969548$	$ z_{17}  = 0.960798702148952$
$ z_{18}  = 0.941167547350691$	$ z_{18}  = 0.941296577512918$
$ z_{19}  = 0.941167547350691$	$ z_{19}  = 0.941296577512918$

**Tabelle 6.1:** Beträge der Reglerpole: Reglerübertragungsfunktion  $G_{K_{min}}(z)$  für die untere Schranke  $f_{0_{min}} = 40$  Hz und  $G_{K_{max}}(z)$  für die obere Schranke bei  $f_{0_{max}} = 53.\bar{3}$  Hz

## 6.4 Messergebnisse AVC-Szenario am KFZ

Der komplette Messaufbau des AVC-Szenarios am KFZ, siehe **Abbildung 6.1**, ist schematisch in **Abbildung 6.10** aufgezeigt. Über die *MABX* der Fa. dSPACE werden das CAN-



**Abbildung 6.10:** Schematische Darstellung der einzelnen Komponenten der AVC-Konfiguration am KFZ in einem Blockschaltbild

Motordrehzahlssignal des KFZ sowie das Sensorsignal des PCB-Beschleunigungssensors eingelesen und entsprechend verarbeitet (roter Kasten **Abbildung 6.10**). Das CAN-Signal  $n_{MOT}$  wird zur Grundfrequenz  $f_0$  umgewandelt, skaliert und normiert, dies entspricht dann dem normierten variierenden Parameter  $\tilde{\theta}_{nom} \in [-1, +1]$ , siehe Gl. (4.81). Mit dem Beschleunigungssignal wird lediglich ein Soll-/Istvergleich durchgeführt. Bei einer Führungsgröße  $R(z) = 0$  ist die Eingangsgröße des Reglers entsprechend die negative Einheitsrückführung des Beschleunigungssignals. Der Regler auf der MABX berechnet eine Ausgangsgröße, die dSPACE in Form eines Spannungssignals an die Verstärker-/Filtereinheit weitergibt. Durch den Aktor wird eine Gegenschwingung produziert, die den motorseitig erzeugten Schwingungen (emittiert durch das Getriebe) entgegenwirkt.

Im Folgenden eine Liste über die durchgeführten Testsznarien.

### Testsznarien (TS) bei stehendem KFZ:

- **1.TS** Annähernd konstante Motordrehzahl bei 2690 [1/min]
  - Regler **AN** (bei 0 [s]) - **AUS** (bei 5.6 [s]) - **AN** (bei 13.37 [s]) - **AUS** (bei 21.88 [s]) - **AN** (bei 27.67 [s]) - **AUS** (bei 33.03 [s])
- **2.TS** Annähernd konstante Motordrehzahl bei 3100 [1/min]
  - Regler **AN** (bei 0 [s]) - **AUS** (bei 6.05 [s]) - **AN** (bei 14.98 [s]) - **AUS** (bei 25.18 [s])
- **3.TS** Stufenförmige Erhöhung der Motordrehzahl
  - Regler **AUS** (bei 0 [s]) - **AN** (bei 0.84 [s]) - **AUS** (bei 5.51 [s]) - **AN** (bei 10.91 [s]) - **AUS** (bei 16.05 [s]) - **AN** (bei 19.84 [s]) - **AUS** (bei 25.21 [s])

- **AN** (bei 30.39 [s]) - **AUS** (bei 39.65 [s]) - **AN** (bei 47.1 [s]) - **AUS** (bei 52.23 [s])
- **4.TS** Gaspedalstöße zwischen 2400 [1/min] und 3200 [1/min]
  - Regler **AN** (bei 0 [s]) - **AUS** (bei 21.64 [s]) - **AN** (bei 41.91 [s])
- **5.TS** Gaspedalstöße zwischen 2400 [1/min] und 3200 [1/min] mit Überschreitung
  - Regler **AUS** (bei 0 [s]) - **AN** (bei 1.34 [s]) - **AUS** (bei 39.95 [s])

Bei jedem Testszenario wurden die CAN-Motordrehzahl, die Stellgröße des Reglers  $u_K$  sowie das Beschleunigungssignal des Sensors durch *ControlDesk* mitgeschnitten und aufgezeichnet. Aus dem Sensorbeschleunigungssignal lässt sich mit der MATLAB-Funktion „*spectrogram(x,window,noverlap,nfft)*“ das Spektrogramm (wie im **Unterabschnitt 5.2.3** beschrieben) dieses Signals zur besseren Anschauung erzeugen. Die folgenden Abbildungen der Messergebnisse haben für die einzelnen Messszenarien jeweils den gleichen Aufbau. In drei einzelnen Graphen sind von oben nach unten die CAN-Motordrehzahl, die Stellgröße des Reglers sowie das Sensorbeschleunigungssignal abgebildet. Beim Graph mit der Motordrehzahl ist zusätzlich die untere (2400 [1/min]) sowie die obere Drehzahlsschranke (3200 [1/min]) in rot dargestellt. Der zweite Graph mit der Stellgröße des LPV-Reglers ist gemäß dem dSPACE-Ausgang als Spannungssignal in [V] skaliert. Im dritten Graphen ist das Beschleunigungssignal des Sensors neben dem Aktor in  $[m/s^2]$  eine entscheidende Kenngröße hinsichtlich der Performance des kompletten AVC-Systems. In einer separaten Abbildung ist zu jedem Testszenario jeweils das Spektrogramm des Beschleunigungssignals dargestellt. Durch das Spektrogramm wird das Unterdrücken einzelner Frequenzen visuell vorteilhafter veranschaulicht. Anhand der Farbintensität von blau (schwache Intensität) zu rot (starke Intensität), für alle Frequenzen über der Zeit, wird dies entsprechend verdeutlicht.

Die Messergebnisse des **1.TS** sind in **Abbildung 6.11** und **Abbildung 6.12** dargestellt. Die Motordrehzahl wird durch die Gaspedalstellung annähernd konstant bei 2690 [1/min] gehalten und der Regler gemäß der Reihenfolge **AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS** aktiviert oder deaktiviert. Am Beschleunigungssignal ist deutlich zu erkennen, dass bei aktivem Regler eine Reduktion in der Beschleunigung von ca. 4  $[m/s^2]$  auf 2  $[m/s^2]$  stattfindet. Im Spektrogramm, siehe **Abbildung 6.12**, sind die fünf eingestellten Ordnungen (bei 2700 [1/min] – 90 [Hz], 135 [Hz], 180 [Hz], 225 [Hz] und 270 [Hz]) komplett unterdrückt. Klar zu erkennen an den fünf waagrechten Streifen (konstante Frequenz über der Zeit) mit hoher Energieintensität (rot), die bei aktiviertem Regler verschwinden. Jedoch tritt bei aktiviertem Regler eine Frequenzverstärkung im Bereich um 150 Hz auf, dass dem *Waterbed Effect*, siehe Hong und Bernstein (1998) sowie (Zhou und Doyle, 1998, S.98ff, Ab.6.5), zuzuschreiben ist.

Erhöht man die Motordrehzahl auf 3100 [1/min], wie im **2.TS**, ergibt sich das gleiche Ergebnis, siehe **Abbildung 6.13**. Die eingestellten fünf Ordnungen bezogen auf die

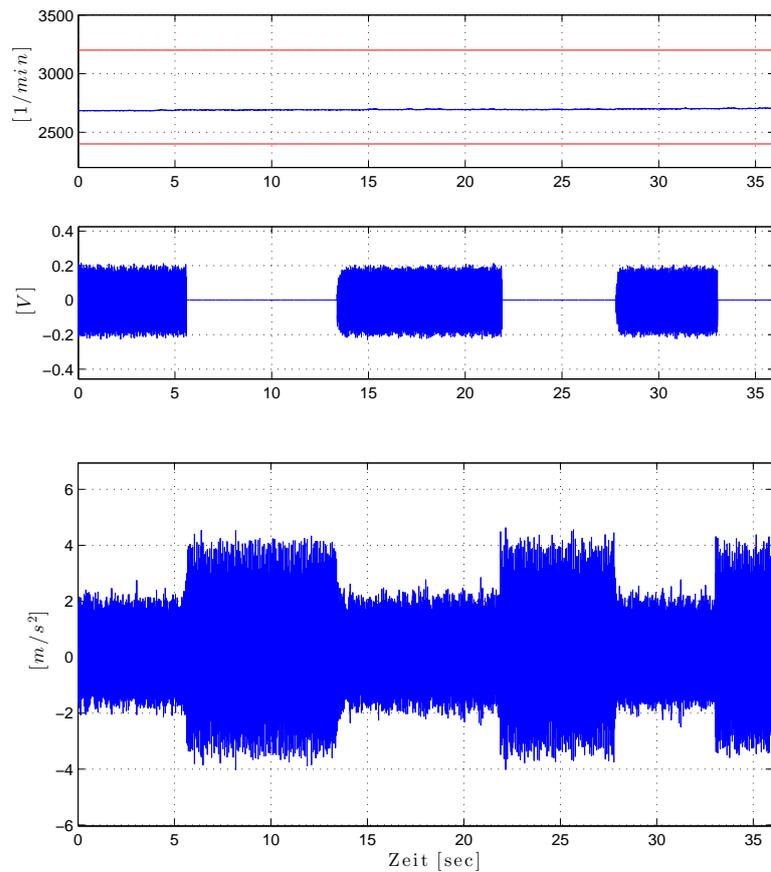
erhöhte Motordrehzahl (bei ca. 3100 [1/min] – 104 [Hz], 156 [Hz], 208 [Hz], 260 [Hz] und 312 [Hz]) sind wieder komplett unterdrückt, siehe Spektrogramm in **Abbildung 6.14**. Im **2.TS**, mit der Aktivierungsreihenfolge **AN - AUS - AN - AUS** des Reglers, ist wieder eine signifikante Unterdrückung der Amplitude des Beschleunigungssignals vorhanden.

Wird die Motordrehzahl wie im **3.TS** stufenförmig erhöht, siehe **Abbildung 6.15**, erhält man die gleichen Ergebnisse. Bei diesem Testszenario wurde der Regler in kurzen Intervallen aktiviert/deaktiviert (**AUS - AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS**). Langsame Drehzahlanstiege ändern nichts am Gesamtbild. Die Reduktionswirkung entspricht bei aktiviertem LPV-Regler weiter ca. 2 [m/s<sup>2</sup>]. Die Darstellung des Spektrogramms, siehe **Abbildung 6.16**, bestätigt dies visuell.

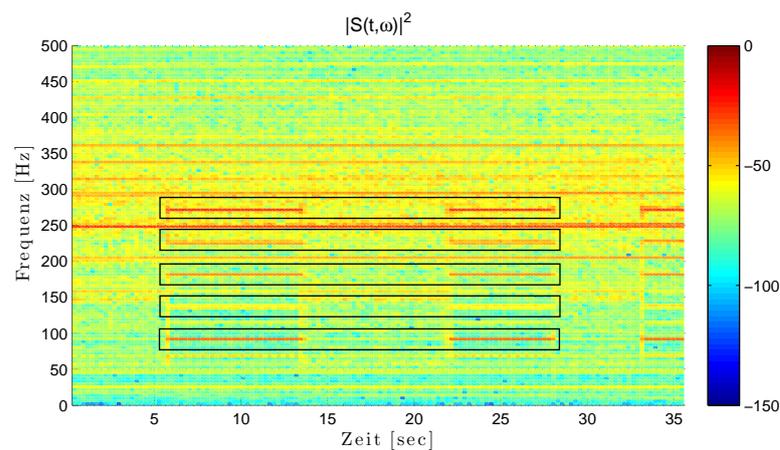
Entscheidend, hinsichtlich Stabilität und Performance des AVC-Ansatzes, wird es bei den Szenarien **4.TS** und **5.TS** mit schnellen Motordrehzahlschwankungen zwischen 2400 [1/min] und 3200 [1/min]. Gaspedalstöße beziehungsweise Lastwechselreaktionen führen nicht zu einem instabilen Verhalten, siehe **Abbildung 6.17**. Die Unterdrückungswirkung bleibt weiterhin erhalten. Beim **4.TS** ist die Aktivierungsreihenfolge für den Regler **AN - AUS - AN**. Das Beschleunigungssignal, siehe dritter Graph **Abbildung 6.17**, sowie das Spektrogramm, siehe **Abbildung 6.18**, bestätigen die Reduktion der durch das Getriebe emittierten Motorschwingungen. Voreingestellte Frequenzordnungen im Störmodell werden weitestgehend bis auf ein Minimum unterdrückt.

Beim **5.TS** mit der Regleraktivierungsreihenfolge **AUS - AN - AUS** und schnelleren/kürzeren Lastwechselreaktionen verhält sich der geschlossene Regelkreis ebenso stabil, siehe **Abbildung 6.19** und **Abbildung 6.20**. Bei aktiviertem LPV-Regler unterschreitet die Motordrehzahl die untere Schranke von 2400 [1/min] bei einer Messzeit von 30.97 [s]. Dies bedeutet, der variierende Parameter  $\tilde{\theta}_{nom}$  liegt nicht mehr im vordefinierten Wertebereich. Aufgrund einer Gegenkopplung beziehungsweise Beginn eines instabilen Regelkreisverhaltens, führt dies zu einem prägnanten Beschleunigungsausschlag am Sensor. Die Unterschreitung des Motordrehzahlwertebereichs beläuft sich zeitlich auf 0.46 [s] und beträgt 173 [1/min]. Außer der kurzzeitigen Mitkopplung bleibt der Regelkreis trotz Unterschreitung der unteren Motordrehzahlgrenze stabil und die Reduktionswirkung anschließend weiter erhalten. Auch sehr schnelle kurzhubige Gaspedaländerungen (zwischen 31.9 [s] und 37.25 [s] Messzeit) verschlechtern nicht die Reduktionswirkung.

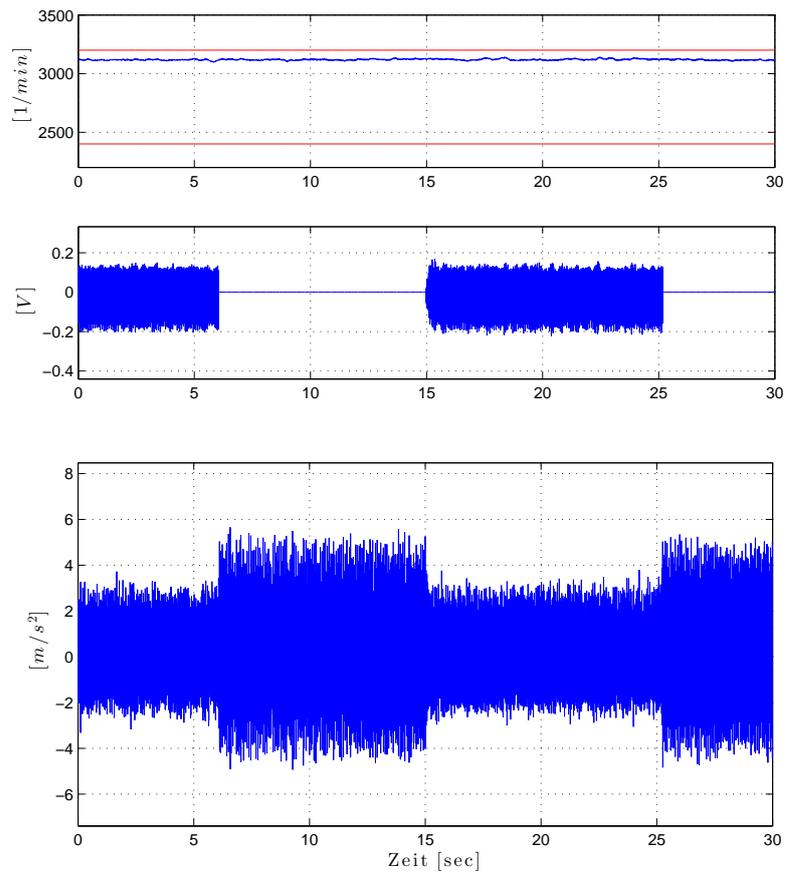
Zusammenfassend wurde in diesem Abschnitt die komplette AVC-Toolkette hardware- sowie softwareseitig beschrieben. Des Weiteren wurde ein Modell der Regelstrecke identifiziert, anhand dessen ein linear-fractionaler LPV-Regler für einen vordefinierten Motordrehzahlbereich berechnet, implementiert und als AVC-System am KFZ erprobt wurde. Messreihen verschiedener Testszenarien belegen bei Aktivierung des Reglers eine massive Reduktion der emittierten Schwingungen am Querträger.



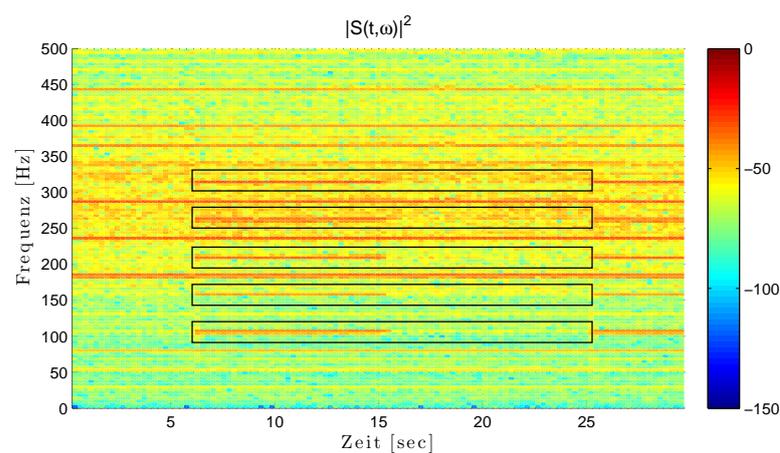
**Abbildung 6.11:** Messergebnis 1.TS (annähernd konstante Motordrehzahl bei  $2690 [1/min]$ ) – Graph (von oben nach unten) der CAN-Motordrehzahl, der Stellgröße des Reglers ( $u_K$  dSPACE-Ausgang) und des Sensorbeschleunigungssignals; Regler AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS



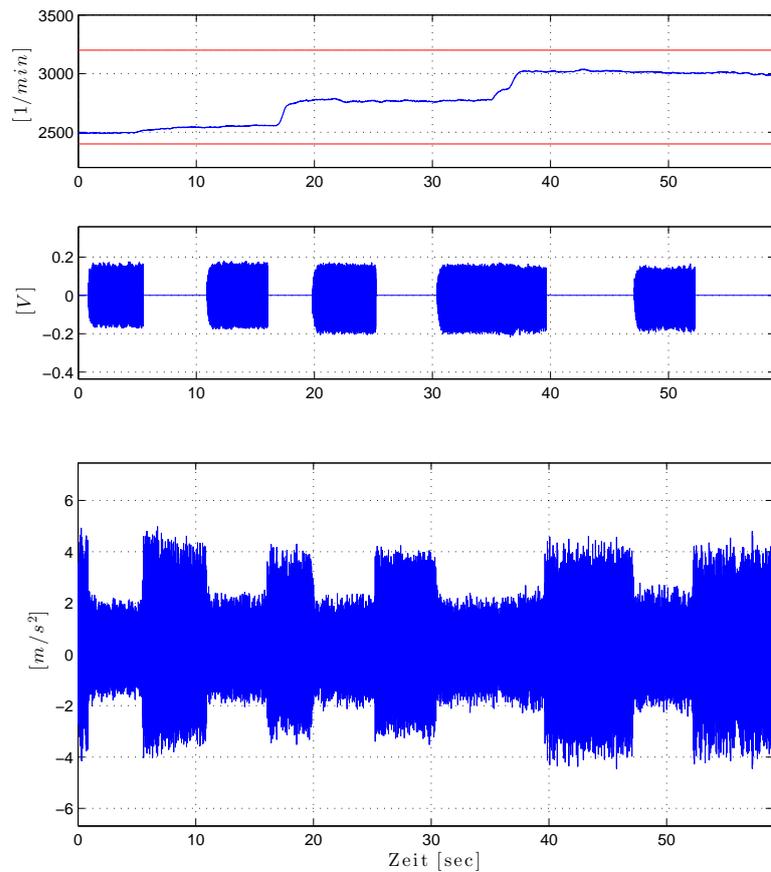
**Abbildung 6.12:** Messergebnis 1.TS (annähernd konstante Motordrehzahl bei  $2690 [1/min]$ ) – Spektrogramm des Beschleunigungssignals; Regler AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS



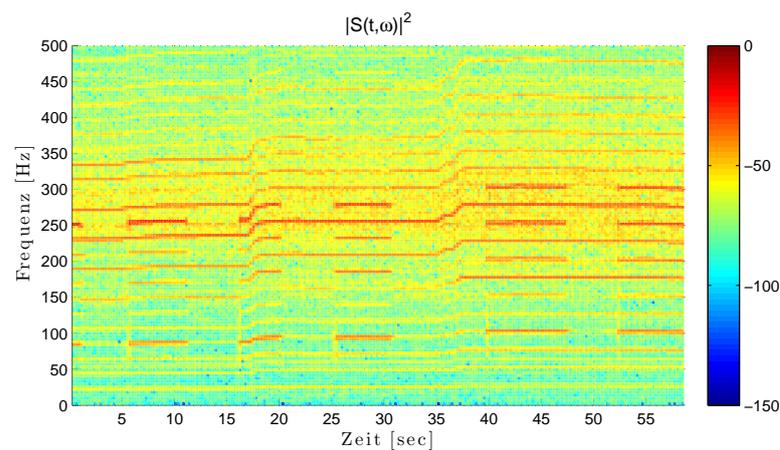
**Abbildung 6.13:** Messergebnis **2.TS** (annähernd konstante Motordrehzahl bei  $3100 [1/min]$ ) – Graph (von oben nach unten) der CAN-Motordrehzahl, der Stellgröße des Reglers ( $u_K$  dSPACE-Ausgang) und des Sensorbeschleunigungssignals; Regler **AN - AUS - AN - AUS**



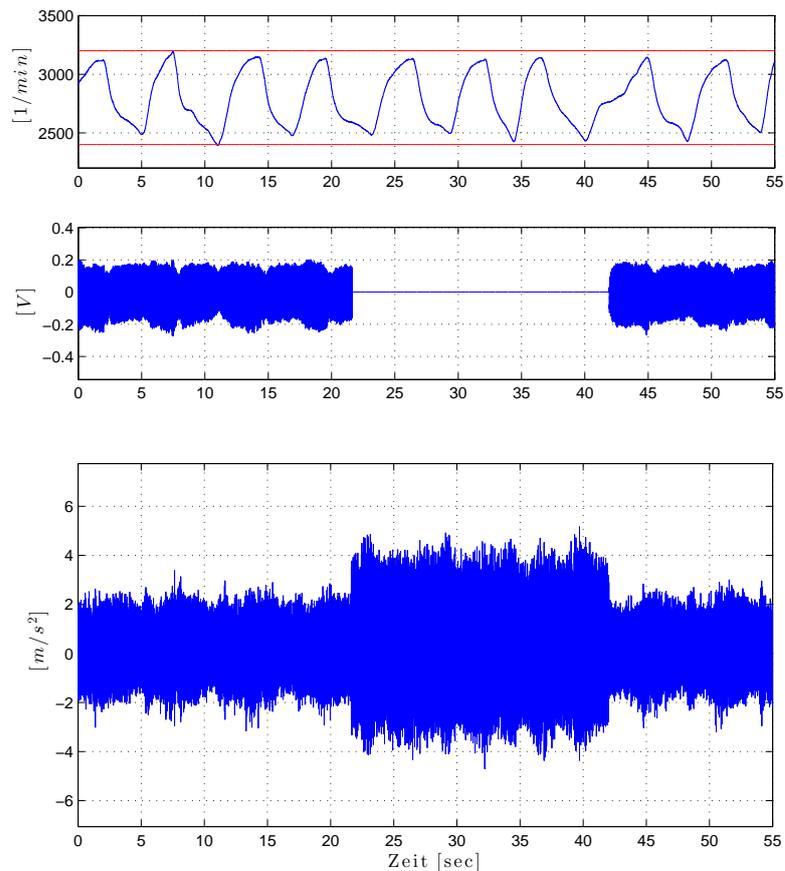
**Abbildung 6.14:** Messergebnis **2.TS** (annähernd konstante Motordrehzahl bei  $3100 [1/min]$ ) – Spektrogramm des Beschleunigungssignals; Regler **AN - AUS - AN - AUS**



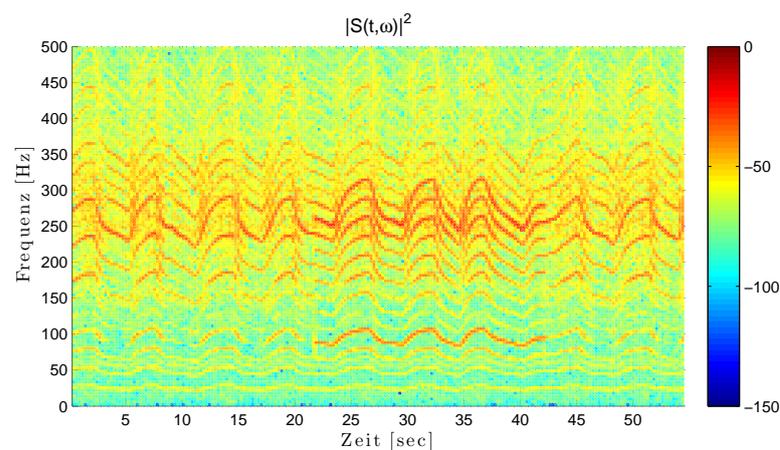
**Abbildung 6.15:** Messergebnis **3.TS** (stufenförmige Erhöhung der Motordrehzahl) – Graph (von oben nach unten) der CAN-Motordrehzahl, der Stellgröße des Reglers ( $u_K$  dSPACE-Ausgang) und des Sensorbeschleunigungssignals; Regler **AUS - AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS**



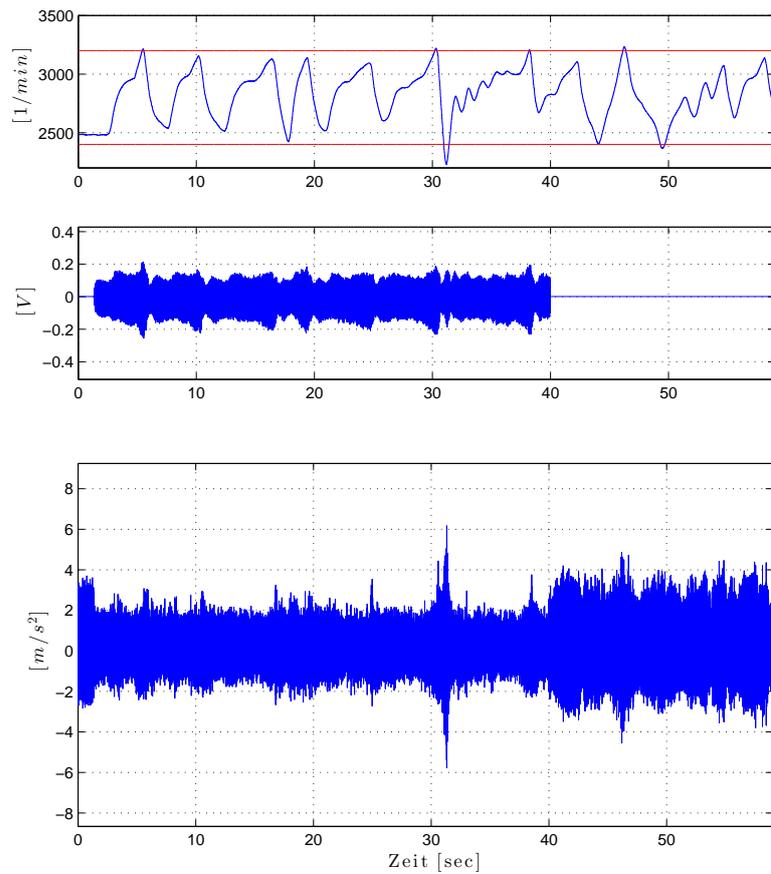
**Abbildung 6.16:** Messergebnis **3.TS** (stufenförmige Erhöhung der Motordrehzahl) – Spektrogramm des Beschleunigungssignals; Regler **AUS - AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS - AN - AUS**



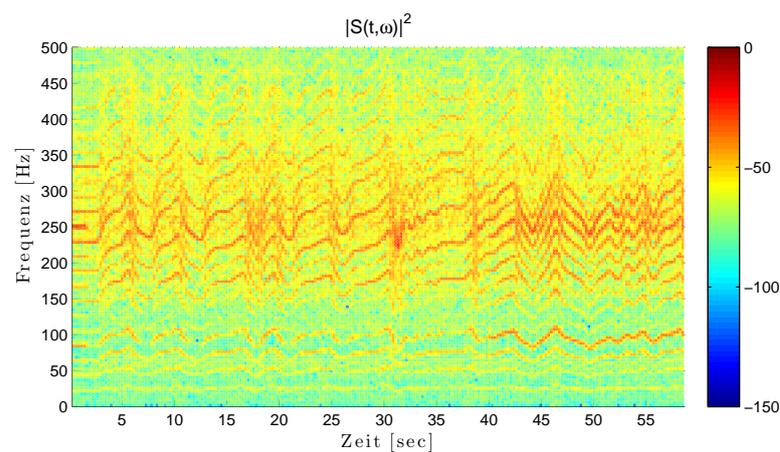
**Abbildung 6.17:** Messergebnis 4.TS (Gaspedalstöße zwischen 2400  $[1/min]$  und 3200  $[1/min]$ ) – Graph (von oben nach unten) der CAN-Motordrehzahl, der Stellgröße des Reglers ( $u_K$  dSPACE-Ausgang) und des Sensorbeschleunigungssignals; Regler AN - AUS - AN



**Abbildung 6.18:** Messergebnis 4.TS (Gaspedalstöße zwischen 2400  $[1/min]$  und 3200  $[1/min]$ ) – Spektrogramm des Beschleunigungssignals; Regler AN - AUS - AN



**Abbildung 6.19:** Messergebnis 5.TS (Gaspedalstöße zwischen 2400  $[1/min]$  und 3200  $[1/min]$  mit Überschreitung) – Graph (von oben nach unten) der CAN-Motordrehzahl, der Stellgröße des Reglers ( $u_K$  dSPACE-Ausgang) und des Sensorbeschleunigungssignals; Regler AUS - AN - AUS



**Abbildung 6.20:** Messergebnis 5.TS (Gaspedalstöße zwischen 2400  $[1/min]$  und 3200  $[1/min]$  mit Überschreitung) – Spektrogramm des Beschleunigungssignals; Regler AUS - AN - AUS

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein regelungstechnischer LPV-Ansatz, basierend auf der  $H_\infty$ -Theorie, durch theoretische Neuerungen für die praktische Anwendung einer *Aktiven Schwingungskompensation am KFZ* angepasst und erprobt. Ziel ist es, die vom Verbrennungsmotor des KFZ erzeugten Schwingungen, emittiert durch das Getriebe, am Querträger durch ein AVC-System zu reduzieren beziehungsweise zu unterdrücken. Dabei werden drei wesentliche Schwerpunkte bearbeitet. Die ersten beiden Schwerpunkte befassen sich mit den theoretischen Neuerungen, wobei im dritten Schwerpunkt Simulationsstudien, die praktische Realisierung sowie die Erprobung am KFZ im Vordergrund stehen.

Der modellbasierte LPV-Reglerentwurf erfordert ein LPV-Modell der verallgemeinerten Strecke, bestehend aus dem Störmodell, dem Regelstreckenmodell sowie den Filtern für die Performance-Kriterien. In **Abschnitt 2** wird das relevante zeitdiskrete Störmodell einer überlagerten Schwingung aus harmonischen Einzelschwingungen hergeleitet. Auf Basis eines zeitkontinuierlichen, invarianten Modells einer harmonischen Schwingung wird zunächst mit Hilfe von Diskretisierungsmethoden entsprechend das zeitkontinuierliche Modell in ein Zeitdiskretes umgewandelt. Da die erzeugten Motorschwingungen zum einen drehzahlabhängig und zum anderen größtenteils aus der Motordrehfrequenz plus deren Harmonischen bestehen, wird letztlich ein zeitdiskretes, invariantes Modell einer Multisinusschwingung entwickelt, siehe Gl. (2.18)-Gl. (2.19), und im Weiteren verwendet. Abhängig von der Anzahl an benötigten Frequenzen wird durch eine Parallelschaltung von Modellen einzelner Sinusschwingungen entsprechend ein Multisinusmodell erzeugt. Ausgehend von diesem Modell ergeben sich beim Erstellen des LPV-Störmodells, mit der Motordrehzahl/Motordrehfrequenz als variierender Parameter, die folgenden Problemstellungen. Jede Frequenz im Multisinusstörmodell benötigt aufgrund der Struktur der diskreten Systemmatrix, jeweils einen variierenden Parameter. Eine große Anzahl an Frequenzen bedeutet eine große Anzahl an variierenden Parametern, dies ist beim Reglerentwurf nicht mehr realisierbar. Dabei ist es irrelevant, ob die variierenden Parameter sich als polytope Menge oder als Menge von Systemunsicherheiten darstellen lassen. Hierfür wurden zwei neuartige Methoden entwickelt, das zeitdiskrete Störmodell eines Multisinus Gl. (2.18) fallspezifisch so zu approximieren, dass die Abhängigkeit ein variierender Parameter pro Frequenz aufgehoben wird.

In **Abschnitt 3** ist der polytope LPV-Fall betrachtet worden. Zunächst sind die theoretischen Grundlagen sowie die Reglersynthese Gl. (3.37)-(3.40) kurz und prägnant hergeleitet worden. Die Wertemenge des variierenden Parameters ist ein Polytop. Bei einem Parameter bedeutet dies eine Gerade mit unterer und oberer Schranke, also zwei Ecken. Dabei entsprechen  $p$  Frequenzen  $p$  variierenden Parametern und somit  $2^p$  Ecken. Das Problem mit der Abhängigkeit zwischen Frequenz und variierendem Parameter wurde durch eine Approximation der nichtlinearen Kosinusfunktion gelöst. Anstelle der Kosinusfunktion kann durch eine Reihenentwicklung mit zwei Parametern, siehe Gl. (3.64),

jede Frequenz aus der Grundfrequenz multipliziert mit einem Faktor und anschließender Summation erzeugt werden. Somit ist eine Reduzierung der  $2^p$  Ecken auf  $2^2$  Ecken, unabhängig von der Anzahl an variierenden Parametern  $p$ , erreicht worden. Ein Störmodell für eine überlagerte Störung (aus harmonischen Einzelschwingungen) mit einer beliebigen Anzahl an Frequenzen lässt sich somit durch zwei variierende Parameter, die ein Polytop mit vier Ecken aufspannen, erzeugen. Die Erstellung der verallgemeinerten Strecke ergibt sich dann gemäß der konzeptionellen Zuordnung der auftretenden Störung auf den Streckeneingang oder den Streckenausgang, siehe hierzu Gl. (3.74)-Gl. (3.82) sowie **Abbildung 3.4**. Bei der Reglersynthese erhält man für jede Ecke einen LTI-Regler, aus denen in Echtzeit der LPV-Regler interpoliert wird.

Beim linear-fractionalen Ansatz ergibt sich dieselbe Problemstellung, pro Frequenz ein variierender Parameter, jedoch wurde hierfür eine andere Lösung entwickelt, siehe **Abschnitt 4**. Gemäß dieser Methode werden die variierenden Parameter zu einer Menge zusammengefasst und als Streckenunsicherheit betrachtet. Das sich ergebende System mit Unsicherheit hat eine LF-Form. Indem man das LPV-Störmodell in eine LF-Form umwandelt, hebt man die Abhängigkeit ein variierender Parameter pro Frequenz auf. Dabei wird nicht die Kosinusfunktion approximiert, sondern die Modellparameter des LF-Modells werden, abhängig von der Grundfrequenz, für jede einstellbare Frequenz durch eine Optimierung berechnet. Somit ergibt sich nur ein variierender Parameter pro Frequenz, siehe Gl. (4.81), die Grundfrequenz beziehungsweise die Motordrehfrequenz. Die verallgemeinerte Strecke beinhaltet somit ein LPV-Störmodell in LF-Form, das lediglich durch einen variierenden Parameter bestimmt ist, siehe Gl. (4.87)-Gl. (4.94) sowie **Abbildung 4.5**. Bei der Reglersynthese erhält man die Reglermatrizen, siehe Gl. (4.36), die für den gesamten Frequenzbereich gültig sind und aus denen in Echtzeit der LPV-Regler Gl. (5.17)-Gl. (5.18) berechnet wird.

Anhand eines einfachen praktischen Modells einer Drosselklappe wurden beide Ansätze in MATLAB/Simulink implementiert und im **5. Abschnitt** in der Simulation hinsichtlich der Auslegungskriterien getestet. Beide Neuerungen, polytopes LPV-Störmodell mit zwei variierenden Parametern sowie das LPV-Störmodell in LF-Form mit einem variierenden Parameter, konnten umgesetzt und durch Simulationen validiert werden. Es wurden bei beiden Methoden jeweils zehn Frequenzen im Störmodell vorgegeben und diese dann, bei entsprechender Störung, im geschlossenen Kreis unterdrückt. Bezogen auf die vorgegebenen Simulationskonfigurationen konnten bei der Reglersynthese folgende Kenntnisse gewonnen werden:

- Polytope Ansatz
  - Je größer die Ordnung der verallgemeinerten Strecke, desto schwieriger ist das Finden eines LPV-Reglers.
  - Das Finden eines stabilen LPV-Reglers ist nur mit großem Aufwand möglich.

- Linear-fractionaler Ansatz
  - Das Finden eines stabilen LPV-Reglers ist auch für verallgemeinerte Strecken mit größerer Ordnung möglich.
  - Der linear-fractionale Ansatz hat im Vergleich zum polytopen Ansatz eine schlechtere Regelgüte.

Im **6. Abschnitt** wurde der dritte Schwerpunkt dieser Arbeit ausgeführt. Dabei ging es um die praktische Umsetzung der theoretischen Ansätze in Form eines *AVC-Systems* am KFZ. Das Testfahrzeug wurde mit Sensorik und Messtechnik ausgerüstet. Zum Unterdrücken der motorseitig entstehenden Schwingungen am Querbalken wurde ein elektromagnetischer Massenschwinger verwendet. Die Regelstrecke wurde identifiziert und aus den Messungen ein entsprechendes zeitdiskretes Modell erstellt. Aus den Kenntnissen der Simulationsstudien mit der Drosselklappe und der Tatsache, dass das Regelstreckenmodell nicht zu hundert Prozent der Realität entspricht, konnte lediglich der linear-fractionale Ansatz umgesetzt werden. Der instabile LPV-Regler vom polytopen Ansatz war am KFZ nicht realisierbar. Messergebnisse belegen das positive Ergebnis des LF-Ansatzes. Hardwareseitig konnten fünf Frequenzen im LPV-Störmodell eingestellt werden, sodass der echtzeitfähige C-Code des LPV-Reglers noch auf der MABX I der Fa. dSPACE lauffähig war. Die eingestellten Frequenzen wurden im Drehzahlband von  $2400 - 3200 [1/min]$ , bei konstanten sowie ständig ändernden Drehzahlen, unterdrückt. Zeitverläufe sowie das Spektrogramm des Beschleunigungssignals vom Sensor am Querbalken zeigen, bei Aktivierung des Reglers, eine deutliche Reduktion der Schwingungen von  $4 [m/s^2]$  auf  $2 [m/s^2]$ . Insgesamt wurden fünf verschiedene Testszenarien durchgeführt, alle mit demselben positiven Ergebnis.

Es wird angemerkt, dass es von Seiten der MABX I Hardwarebeschränkungen bezüglich der maximalen Anzahl an einstellbaren Frequenzen im LPV-Störmodell, bei einer fixen Regelstreckenordnung, gab. Auf der MABX I der Fa. dSPACE lief bei einer Abtastzeit von 1 ms nur echtzeitfähiger C-Code eines LPV-Reglers mit maximal 20ter Ordnung. Wurde die Abtastzeit halbiert, so musste die Ordnung des Reglers auf 16 reduziert werden. Des Weiteren gab es Beschränkungen im LF-Ansatz, in Form des definierten Motordrehzahlbandes sowie der Anzahl an einstellbaren Frequenzen im Störmodell, für die ein LPV-Regler optimiert werden kann. Je größer die Anzahl an Frequenzen im Störmodell und somit die Ordnung der verallgemeinerten Strecke, desto kleiner das mögliche Motordrehzahlband und umgekehrt.

Daraus ergeben sich folgende offene Punkte für weiterführende Arbeiten. Theoriebasiert gibt es sowohl für den polytopen sowie für den linear-fractionalen Ansatz keine Restriktion hinsichtlich instabiler LPV-Regler durch die Optimierung. Dies gilt es auf theoretischer Ebene detaillierter zu untersuchen und Lösungen in puncto der polytopen Reglersynthese zu erarbeiten, sodass ein stabiler, polytoper LPV-Regler optimiert wird. Eine Möglichkeit

wäre, wie in Ballesteros u. a. (2014a, 2014b) beschrieben, das Polytop (Quadrat) durch ein Dreieck zu ersetzen. Somit müssten nur drei LTI-Regler in der Berechnung optimiert werden, was das Finden eines stabilen LPV-Reglers vermutlich erleichtert. Im nächsten Schritt könnte dann der stabile, polytope LPV-Regler praktisch umgesetzt und in der AVC-Konfiguration getestet werden. Eine weitere Aufgabe, die bestehende MABX I durch eine MABX II (leistungsstärkerer Prozessor und mehr Arbeitsspeicher) zu ersetzen und somit die Performance des AVC-Systems zu verbessern. Momentan können maximal fünf Frequenzen im LPV-Störmodell vorgegeben und praktisch erprobt werden. Mit der MABX II kann die Anzahl an Frequenzen im Störmodell, bei gleichbleibender Ordnung der verallgemeinerten Strecke, vermutlich erhöht werden, sodass echtzeitfähiger C-Code eines LPV-Reglers ( $> 20$ ter Ordnung) lauffähig sein wird.

## Literatur

- Abbas, H. S.** 2010. *Linear Parameter-Varying Modeling, Identification and Low-Complexity Controller Synthesis*. Dissertation. Technische Universität Hamburg-Harburg, Deutschland.
- Abel, D.** und **A. Bollig.** 2006. *Rapid Control Prototyping: Methoden und Anwendungen*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Alt, B.** 2011. *Modellbasierte Regelung ausgewählter Komponenten im Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs mit Ottomotor*. Dissertation. Universität der Bundeswehr München, Deutschland. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12: Verkehrstechnik/Fahrzeugtechnik, Nr. 729.
- Apkarian, P.** und **P. Gahinet.** 1995. A Convex Characterization of Gain-Scheduled  $H_\infty$  Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40(5). S. 853–864.
- Apkarian, P., P. Gahinet** und **G. Becker.** 1994. Self-Scheduled  $H_\infty$  Linear Parameter-Varying Systems. *Proceedings of the American Control Conference (ACC), Baltimore, Vereinigte Staaten von Amerika, 29 Juni - 1 Juli, 1994*, 1. S. 856–860.
- Balini, H., C. W. Scherer** und **J. Witte.** 2011. Performance Enhancement for AMB Systems Using Unstable  $H_\infty$  Controllers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 19(6). S. 1479–1492.
- Ballesteros, P.** und **C. Bohn.** 2011a. A Frequency-Tunable LPV Controller for Narrowband Active Noise and Vibration Control. *Proceedings of the American Control Conference (ACC), San Francisco, Vereinigte Staaten von Amerika, 29 Juni - 01 Juli, 2011*. S. 1340–1345.
- Ballesteros, P.** und **C. Bohn.** 2011b. Disturbance Rejection through LPV Gain-Scheduling Control with Application to Active Noise Cancellation. *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Mailand, Italien, 28 August - 2 September, 2011*. S. 7897–7902.
- Ballesteros, P., X. Shu** und **C. Bohn.** 2014a. A Discrete-Time MIMO LPV Controller for the Rejection of Nonstationary Harmonically Related Multisine Disturbances. *Proceedings of the American Control Conference (ACC), Portland, Vereinigte Staaten von Amerika, 4-6 Juni, 2014*. S. 4464–4469.
- Ballesteros, P., X. Shu** und **C. Bohn.** 2014b. Discrete-Time Switching MIMO LPV Gain-Scheduling Control for the Reduction of Engine-Induced Vibrations in Vehicles. *Proceedings of the 19th World Congress, Kapstadt, Südafrika, 24-29 August, 2014*. S. 7572–7578.

- Ballesteros, P., X. Shu, W. Heins und C. Bohn.** 2012. LPV Gain-Scheduled Output Feedback for Active Control of Harmonic Disturbances with Time-Varying Frequencies. *Advances on Analysis and Control of Vibrations - Theory and Applications, InTech, Kapitel 3*, S. 65–86.
- Ballesteros, P., X. Shu, W. Heins und C. Bohn.** 2013. Reduced-Order Two-Parameter pLPV Controller for the Rejection of Nonstationary Harmonically Related Multisine Disturbances. *Proceedings of the European Control Conference (ECC), Zürich, Schweiz, 17-19 Juli, 2013*. S. 1835–1842.
- Bodson, M.** 2001. Performance of an Adaptive Algorithm for Sinusoidal Disturbance Rejection in High Noise. *Automatica* 37(7). S. 1133–1140.
- Bodson, M. und S. C. Douglas.** 1997. Adaptive Algorithms for the Rejection of Sinusoidal Disturbances with Unknown Frequency. *Automatica* 33(12). S. 2213–2221.
- Bodson, M., J. S. Jensen und S. C. Douglas.** 2001. Active Noise Control for Periodic Disturbances. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 9(1). S. 200–205.
- Bodson, M., A. Sacks und P. Khosla.** 1994. Harmonic Generation in Adaptive Feedforward Cancellation Schemes. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39(9). S. 1939–1944.
- Bohn, C., A. Cortabarria, V. Härtel und K. Kowalczyk.** 2004. Active Control of Engine-Induced Vibrations in Automotive Vehicles Using Disturbance Observer Gain Scheduling. *Control Engineering Practice* 12(8). S. 1029–1039.
- Borgeest, K.** 2010. *Elektronik in der Fahrzeugtechnik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Boyd, S. P., L. El Ghaoui, E. Feron und V. Balakrishnan.** 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM.
- Brown, L. J. und Q. Zhang.** 2004. Periodic Disturbance Cancellation with Uncertain Frequency. *Automatica* 40(4). S. 631–637.
- Crocker, M. J.** 2007. *Handbook of Noise and Vibration Control*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- De Oliveira, M. C., J. Bernussou und J. C. Geromel.** 1999. A New Discrete-Time Robust Stability Condition. *Systems & Control Letters* 37(4). S. 261–265.
- De Oliveira, M. C., J. C. Geromel und J. Bernussou.** 1999. An LMI Optimization Approach to Multiobjective Controller Design for Discrete-Time Systems. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Vereinigte Staaten von Amerika, 7-10 Dezember, 1999*. S. 3611–3616.

- De Oliveira, M. C., J. C. Geromel und J. Bernussou.** 2002. Extended  $H_2$  and  $H_\infty$  Norm Characterizations and Controller Parametrizations for Discrete-Time Systems. *International Journal of Control* 75(9). S. 666–679.
- Doyle, J., A. Packard und K. Zhou.** 1991. Review of LFTs, LMIs, and  $\mu$ . *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, England, 11-13 Dezember, 1991* S. 1227–1232.
- Duarte, F., P. Ballesteros, X. Shu und C. Bohn.** 2013. An LPV Discrete-Time Controller for the Rejection of Harmonic Time-Varying Disturbances in a Lightweight Flexible Structure. *Proceedings of the American Control Conference (ACC), Washington, D.C., Vereinigte Staaten von Amerika, 17-19 Juni, 2013*. S. 4092–4097.
- Elliott, S. J.** 2008. A Review of Active Noise and Vibration Control in Road Vehicles. *Southampton, England, University of Southampton (ISVR Technical Memorandum, No. 981)*.
- Füger, T., N. Lachhab und F. Svaricek.** 2012. Parameterreduktion zur Störunterdrückung mit einem diskreten LPV-Regler. *Proceedings of the Workshop of the GMA FA 1.40. Salzburg, Österreich, 16-19 September, 2012*.
- Füger, T., N. Lachhab und F. Svaricek.** 2013. Parameter Reduction for Disturbance Attenuation with a Discrete-Time LPV Controller. *Proceedings of the IFAC 5th Symposium on System, Structure and Control, Part of 2013 IFAC Joint Conference SSSC, FDA, TDS, Grenoble, Frankreich, 4-6 Februar, 2013*. S. 791–796.
- Gahinet, P.** 1996. Explicit Controller Formulas for LMI-based  $H_\infty$  Synthesis. *Automatica* 32(7). S. 1007–1014.
- Gahinet, P. und P. Apkarian.** 1993. An LMI-Based Parametrization of all  $H_\infty$  Controllers with Applications. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, San Antonio, Vereinigte Staaten von Amerika, 15-17 Dezember, 1993*. S. 656–661.
- Gahinet, P. und P. Apkarian.** 1994. A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 4(4). S. 421–448.
- Garnier, H.** 2015. Direct Continuous-Time Approaches to System Identification. Overview and Benefits for Practical Applications. *European Journal of Control* 24. S. 50–62.
- Garnier, H. und L. Wang.** 2008. *Identification of Continuous-Time Models from Sampled Data*. London: Springer-Verlag.
- Hackbusch, W., H. R. Schwarz und E. Zeidler.** 1996. *Teubner–Taschenbuch der Mathematik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

- Heins, W., P. Ballesteros und C. Bohn.** 2011. Gain-Scheduled State-Feedback Control for Active Cancellation of Multisine Disturbances with Time-Varying Frequencies. *Mechanics and Control*. 30(3). S. 127–137.
- Heins, W., P. Ballesteros und C. Bohn.** 2012. Experimental Evaluation of an LPV-Gain-Scheduled Observer for Rejecting Multisine Disturbances with Time-Varying Frequencies. *Proceedings of the American Control Conference (ACC), Montreal, Kanada, 27-29 Juni, 2012*. pp. 768–774.
- Heins, W., P. Ballesteros, X. Shu und C. Bohn.** 2012. LPV Gain-Scheduled Observer-Based State Feedback for Active Control of Harmonic Disturbances with Time-Varying Frequencies. *Advances on Analysis and Control of Vibrations - Theory and Applications, InTech, Kapitel 2*, S. 35–64.
- Hoffmann, C. und H. Werner.** 2015. A Survey of Linear Parameter-Varying Control Applications Validated by Experiments or High-Fidelity Simulations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 23(2). S. 416–433.
- Hong, J. und D. Bernstein.** 1998. Bode Integral Constraints and Spillover in Active Noise and Vibration Control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 6(1). S. 111–120.
- Inoue, T., A. Takahashi, H. Sano, M. Onishi und Y. Nakamura.** 2004. NV Countermeasure Technology for a Cylinder-On-Demand Engine – Development of Active Booming Noise Control System Applying Adaptive Notch Filter. *SAE World Congress, Detroit, Vereinigte Staaten von Amerika, 8-11 März, 2004*.
- Kinney, C. E. und R. A. de Callafon.** 2006. Scheduling Control for Periodic Disturbance Attenuation. *Proceedings of the 2006 IEEE American Control Conference (ACC), Minneapolis, Vereinigte Staaten von Amerika, 14-16 Juni, 2006*. S. 4788–4793.
- Knake-Langhorst, S., C. Bohn und H.-J. Karkosch.** 2006. Active Vibration Control Systems as Prototyping Tools for Passive Vibration Absorbers. *Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design, München, Deutschland, 4-6 Oktober, 2006*. S. 2671–2676.
- Kowalczyk, K., F. Svaricek und C. Bohn.** 2004. Disturbance-Observer-Based Active Control of Transmission-Induced Vibrations. *Proceedings of the IFAC Symposium Advances in Automotive Control, Salerno, Italien, 19-23 April, 2004*. S. 78–83.
- Kuo, S. M. und D. R. Morgan.** 1999. Active Noise Control: A Tutorial Review. *Proceedings of the IEEE* 87(6). S. 943–973.
- Labit, Y., D. Peaucelle und D. Henrion.** 2002. SeDuMi Interface 1.02: A Tool for Solving LMI Problems with SeDuMi. *IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*. S. 272–277.

- Ljung, L.** 1987. *System Identification: Theory For The User*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc.
- Lofberg, J.** 2004. YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. S. 284–289.
- Lueg, P.** 1936. Process of Silencing Sound Oscillations. *US Patent 2,043,416*.
- Lunze, J.** 2008. *Regelungstechnik 2 - Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Wiesbaden: Springer Vieweg.
- Lutz, H. und W. Wendt.** 2003. *Taschenbuch der Regelungstechnik, 5. erweiterte Auflage*. Frankfurt a. Main: Verlag Harri Deutsch.
- Maciejowski, J. M.** 1989. *Multivariable Feedback Design*. Wokingham: Addison-Wesley Publishing Company (Electronic Systems Engineering Series).
- Marino, R., G. L. Santosuosso und P. Tomei.** 2003. Robust Adaptive Compensation of Biased Sinusoidal Disturbances with Unknown Frequency. *Automatica* 39(10). S. 1755–1761.
- Matsuoka, H., T. Mikasa und H. Nemoto.** 2004. NV Countermeasure Technology for a Cylinder-On-Demand Engine – Development of Active Control Engine Mount. *SAE World Congress, Detroit, Vereinigte Staaten von Amerika, 8-11 März, 2004*.
- Morgan, D. R.** 1980. An Analysis of Multiple Correlation Cancellation Loops with a Filter in the Auxiliary Path. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* 28(4). S. 454–467.
- Mukhtar, A. und W. Herbert.** 2011. Discrete-Time LPV Controller Synthesis Using Dilated LMIs with Application to an Arm-Driven Inverted Pendulum. *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Mailand, Italien, 28 August - 2 September, 2011*. S. 7708–7712.
- Nelder, J. A. und R. Mead.** 1965. A Simplex Method for Function Minimization. *The computer journal* 7(4). S. 308–313.
- Olsson, C.** 2005. *Active Vibration Control of Multibody Systems: Application to Automotive Design*. Dissertation. Universität Uppsala, Schweden.
- Packard, A.** 1994. Gain Scheduling via Linear Fractional Transformations. *Systems & Control Letters* 22(2). S. 79–92.
- Papageorgiou, M., M. Leibold und M. Buss.** 2012. Methode der Kleinsten Quadrate. *Optimierung*. S. 121–138. Springer Berlin Heidelberg.

- Paschedag, J.** 2008. *Aktive Schwingungsisolierung in Kfz-Motoraufhängungen - Systemkonfiguration und Methoden*. Dissertation. Universität München, Deutschland.
- Paulo, S. R. D.** 2013. *Adaptive Filtering - Algorithms and Practical Implementation*. New York: Springer US.
- Péni, T., Z. Szabó und J. Bokor.** 2014. Stable  $H_\infty$  Controller Design Based on a Novel Parameterization of the Controller Set. *Proceedings of the European Control Conference (ECC), Straßburg, Frankreich, 24-27 Juni, 2014*. S. 67–72.
- Scherer, C., P. Gahinet und M. Chilali.** 1997. Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 42(7). S. 896–911.
- Scherer, C. und S. Weiland.** 2000. Linear Matrix Inequalities in Control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, Niederlande*.
- Schüßler, H. W.** 2008. *Digitale Signalverarbeitung 1 - Analyse diskreter Signale und Systeme*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Shannon, C. E.** 1949. Communication in the Presence of Noise. *Proceedings of the IRE* 37(1). S. 10–21.
- Shu, X., P. Ballesteros und C. Bohn.** 2011. Active Vibration Control for Harmonic Disturbances with Time-Varying Frequencies through LPV Gain Scheduling. *Proceedings of the Control and Decision Conference (CCDC), Mianyang, China, 23-25 Mai, 2011*. S. 728–733.
- Shu, X., P. Ballesteros, W. Heins und C. Bohn.** 2013. Design of Structured Discrete-Time LPV Gain-Scheduling Controllers through State Augmentation and Partial State Feedback. *Proceedings of the American Control Conference (ACC), Washington, D.C., Vereinigte Staaten von Amerika, 17-19 Juni, 2013*. S. 6090–6095.
- Shu, X., W. Heins, P. Ballesteros und C. Bohn.** 2013. Two-Parameter pLPV Modeling of Nonstationary Harmonically Related Multisine Disturbances for Reduced-Order Gain-Scheduling Control. *Proceedings of the 32nd IAESTED International Conference on Modelling, Identification and Control, Innsbruck, Österreich, 11-13 Februar, 2013*. S. 404–411.
- Skogestad, S. und I. Postlethwaite.** 2001. *Multivariable Feedback Control—Analysis and Design*. New York: John Wiley & Sons.
- Stoorvogel, A. A., A. Saberi und B. M. Chen.** 1994. The Discrete-Time  $H_\infty$  Control Problem with Strictly Proper Measurement Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control* 39(9). S. 1936–1939.
- Sturm, J.** 1999. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization over Symmetric Cones. *Optimization Methods and Software* 11(1-4). S. 625–653.

- Svaricek, F., T. Fueger, H. Karkosch, P. Marienfeld und C. Bohn.** 2010. Automotive Applications of Active Vibration Control. *Vibration Control, Sciyo, Kapitel 13* Vol. 1. S. 303–318.
- Tipler, P. A. und G. Mosca.** 2015. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Unbehauen, H.** 2007. *Regelungstechnik II—Zustandsregelung, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
- Wallentowitz, H. und K. Reif.** 2008. *Handbuch Kraftfahrzeugelektronik: Grundlagen-Komponenten-Systeme-Anwendungen*. Wiesbaden: Vieweg.
- Werner, M.** 2006. *Digitale Signalverarbeitung mit MATLAB<sup>®</sup>*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Witte, J., H. M. N. K. Balini und C. W. Scherer.** 2010. Robust and LPV Control of an AMB System. *Proceedings of the American Control Conference (ACC), Baltimore, Vereinigte Staaten von Amerika, 30 Juni - 02 Juli, 2010*. S. 2194–2199.
- Wu, F.** 1995. *Control of Linear Parameter Varying Systems*. Dissertation. Universität von Kalifornien, Berkeley, Vereinigte Staaten von Amerika.
- Zeller, P.** 2012. *Handbuch Fahrzeugakustik: Grundlagen, Auslegung, Berechnung, Versuch*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Zhang, M.** 1999. *Aktive Schalldämpfung in einem Kanal*. Dissertation. Techn. Wiss. ETH Zürich, Schweiz.
- Zhou, K. und J. C. Doyle.** 1998. *Essentials of Robust Control*. Upper Saddle River: Prentice Hall.

## Stabilität

**Definition 1:** (Einfache) Stabilität (Unbehauen, 2007, S.223f)

Die Ruhelage  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  des autonomen Systems in Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)], \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

heißt stabil (im Sinne von Ljapunow), wenn für jede reelle Zahl  $\epsilon > 0$  eine andere reelle Zahl  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  existiert, sodass für alle  $\mathbf{x}(0)$  mit

$$\|\mathbf{x}(0)\| \leq \delta(\epsilon) \quad (\text{A.2})$$

die Bedingung

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \epsilon, \quad t \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

erfüllt ist. Dabei beschreibt die Euklidische Norm  $\|\mathbf{x}\|$  des Vektors  $\mathbf{x}(0)$  die Entfernung des Zustandspunktes von der Ruhelage  $\mathbf{0}$  und zwar durch die Länge des Zustandsvektors

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (\text{A.4})$$

**Definition 2:** Asymptotische Stabilität (Unbehauen, 2007, S.224)

Die Ruhelage  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  des Systems gemäß Gl. (A.1) heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil ist und wenn für alle Trajektorien  $\mathbf{x}(t)$ , die hinreichend nahe bei der Ruhelage beginnen,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0 \quad (\text{A.5})$$

gilt. Die Gesamtheit aller Punkte des Zustandsraums, die Anfangspunkte solcher Trajektorien sein können, die für  $t \rightarrow \infty$  gegen die Ruhelage konvergieren, wird als *Einzugsbereich* der Ruhelage bezeichnet. Umfasst der Einzugsbereich den gesamten Zustandsraum, so heißt die Ruhelage *global asymptotisch stabil*.

**Direkte Methode von Ljapunow** (Unbehauen, 2007, S.225)

... Dies legt den Schluss nahe, dass eine stabile Ruhelage dadurch gekennzeichnet sein muss, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie des Systems in der Umgebung der Ruhelage nie positiv wird. Gelingt es nun, die Energie als Funktion der Zustandsgrößen

darzustellen, und für diese skalare Funktion  $V(\mathbf{x})$  zu zeigen, dass

1.  $V(\mathbf{x}) > 0$  für alle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,
  2.  $V(\mathbf{x}) = 0$  für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,
  3.  $\dot{V}(\mathbf{x}) \neq 0$
- (A.6)

wird, so hat man die Stabilität der Ruhelage ohne explizite Kenntnis der Lösungen bewiesen.

**Definitheit** (Unbehauen, 2007, S.225f)

Eine Funktion  $V(\mathbf{x})$  heißt *positiv definit* in einer Umgebung  $\Omega$  des Ursprungs  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , falls

1.  $V(\mathbf{x}) > 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
  2.  $V(\mathbf{x}) = 0$  für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (A.7)

gilt.  $V(\mathbf{x})$  heißt *positiv semidefinit* in  $\Omega$ , wenn sie auch für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  den Wert Null annehmen kann, das heißt wenn

1.  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,
  2.  $V(\mathbf{x}) = 0$  für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (A.8)

wird. Die Begriffe *negativ definit* und *negativ semidefinit* werden ganz entsprechend definiert.

**Funktion in quadratischer Form** (Unbehauen, 2007, S.226f)

Eine wichtige Klasse positiv definiten Funktionen  $V(\mathbf{x})$  hat die quadratische Form

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad (\text{A.9})$$

wobei  $\mathbf{P}$  eine symmetrische Matrix sei. Als zweidimensionales Beispiel sei die Funktion

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2$$

betrachtet. Auch wenn alle Elemente von  $\mathbf{P}$  positiv sind, ist wegen des gemischten Produkts die Funktion nicht unbedingt positiv definit. Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$V(x_1, x_2) = p_{11} \left( x_1 + \frac{p_{12}}{p_{11}} x_2 \right)^2 + \left( p_{22} - \frac{p_{12}^2}{p_{11}} \right) x_2^2$$

und damit als zusätzliche Bedingung

$$p_{22} - \frac{p_{12}^2}{p_{11}} > 0,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\det \mathbf{P} > 0.$$

Eine Verallgemeinerung für Matrizen höherer Dimension stellt das Kriterium von Sylvester dar:

Die quadratische Form  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  ist positiv definit, falls alle („nordwestlichen“) Hauptdeterminanten von  $\mathbf{P}$  positiv sind.

Genügt eine Matrix  $\mathbf{P}$  dem Kriterium von Sylvester, so wird sie auch als positiv definit bezeichnet.