

Kontinuumsmechanische Modellierung additiv gefertigter
Strukturen aus Polyamid 12: Mechanische Charakterisierung
und Anwendungspotenziale

Dominik Hahne

Vollständiger Abdruck der von der
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
der Universität der Bundeswehr München
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

angenommenen Dissertation.

Vorsitzender Prof. Dr.-Ing. habil. Markus Klein
Gutachter 1. Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Johlitz
2. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Holm Altenbach

Die Dissertation wurde am 19.09.2024 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 18.12.2024 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 31.01.2025 statt.

Kurzfassung

Der Werkstoff Polyamid 12 (PA12) ist ein teilkristalliner Thermoplast, der aufgrund seiner hohen Widerstandsfähigkeit gegen Chemikalien und Abrieb sowie einer guten thermischen Stabilität in der Automobil- und Flugzeugindustrie verwendet wird. Das Material ist mit diversen Fertigungstechnologien verarbeitbar, darunter das selektive Lasersintern, das durch gute und reproduzierbare mechanische Eigenschaften großes Potential zur industriellen Produktion bietet und somit ein detailliertes Verständnis des mechanischen Verhaltens motiviert. Die vorliegende Arbeit stellt einen Ansatz zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von selektiv lasergesintertem Polyamid 12 vor. Auf Basis eines umfangreichen temperatur- und geschwindigkeitsgeregelten experimentellen Programms wird ein kontinuumsmechanisches Modell entwickelt, dessen Parameter identifiziert, simulativ abgesichert und validiert werden.

Nach einer Einführung in die Technologie des selektiven Lasersinterns werden einige Voruntersuchungen durchgeführt, um den Werkstoff Polyamid 12 zu charakterisieren. Nach Vorstellung der beiden materialtheoretischen Ansätze der linearen Viskoelastizität und der endochronen Plastizität folgt der experimentelle Abschnitt der Arbeit. Hier werden die eigenentwickelten Prüfkörper, bei deren Entwicklung die geometrischen Freiheiten des SLS-Verfahrens gezielt genutzt werden, vorgestellt. Weiterhin widmet sich ein umfangreicher Abschnitt der kinematischen Beschreibung der Prüfkörper sowie der dazu eingesetzten Technik der digitalen Bildkorrelation. Die mechanischen Versuche, zu denen Zug-, Torsions- sowie einfache Scherversuche zählen, bilden den Hauptteil des experimentellen Kapitels. Im Vordergrund stehen Relaxationsversuche und Experimente mit konstanter Dehnrage bei diversen Temperaturen, die von zyklischen und gestuften Experimenten flankiert werden. Im Anschluss an die experimentellen Arbeiten steht die thermodynamisch konsistente Herleitung des dreidimensionalen Materialmodells für kleine Deformationen. Der Vorteil des umfangreichen experimentellen Programms wird im Rahmen der Parameteridentifikation deutlich. Mit den rein deviatorischen Experimenten kann zuerst allein der isochore Anteil des Materialmodells angepasst werden, bevor die volumetrischen Modellanteile anhand der Zugversuche identifiziert werden. Nach der abschließenden Implementierung in eine kommerzielle Software auf Basis der Methode der finiten Elemente folgen die Zusammenfassung und der Ausblick. Hier wird u. a. ein Materialmodell für finite Deformationen, das auf einem multiplikativen Split des Deformationsgradienten basiert, vorgestellt.

Abstract

Polyamide 12 (PA12) is a semi-crystalline thermoplastic used in the automotive and aerospace industries due to its high resistance to chemicals and abrasion and its good thermal stability. The material can be processed with various manufacturing technologies, including selective laser sintering, which offers great potential for industrial production due to its excellent and reproducible mechanical properties and thus motivates a detailed understanding of the mechanical behavior. This thesis presents an approach for modeling the mechanical behavior of selectively laser-sintered polyamide 12. A continuum mechanical model is developed on the basis of an extensive temperature- and velocity-controlled experimental program, the parameters of which are identified and simulatively verified and validated.

After an introduction to the technology of selective laser sintering, some preliminary investigations are carried out in order to characterize the material polyamide 12. After presenting the two material-theoretical approaches of linear viscoelasticity and endochronic plasticity, the experimental section of the work follows. Here, the test specimens developed in-house, in which the geometric freedoms of the SLS process are utilized, are presented. Furthermore, an extensive section is devoted to the kinematic description of the test specimens and the digital image correlation technique used for this purpose. The mechanical tests, which include tensile, torsion, and simple shear tests, form the central part of the experimental chapter. The focus is on relaxation tests and experiments with a constant strain rate at various temperatures flanked by cyclic and stepped experiments. The experimental work is followed by the thermodynamically consistent derivation of the three-dimensional material model for small deformations.

The advantage of the extensive experimental program becomes apparent in the context of parameter identification. Only the isochoric part of the material model can be adapted with purely deviatoric experiments before the volumetric model parts are identified based on the tensile tests. The summary and outlook are presented after the final implementation in commercial software based on the finite element method. A material model for finite deformations based on a multiplicative split of the deformation gradient is presented here.

Abkürzungen und Nomenklatur

Abkürzungen

DIC	Digitale Bildkorrelation
DMA	Dynamisch-Mechanische Analyse
DSC	Dynamische Differenzkalorimetrie
FEM	Finite-Elemente-Methode
PA6	Polyamid 6
PA12	Polyamid 12
RBE	Starrkörperelement
SLS	Selektives Lasersintern

Nomenklatur

Schreibweise für Tensoren

a, b, \dots	Tensoren 0. Stufe (Skalare)
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$	Tensoren 1. Stufe (Vektoren)
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	Tensoren 2. Stufe (Dyaden)

Kontinuumsmechanische Größen

$\hat{(\bullet)}$	Isochore kontinuumsmechanische Größen
$\bar{(\bullet)}$	Volumetrische kontinuumsmechanische Größen
$(\bullet)^D$	Deviator einer kontinuumsmechanischen Größe
$(\bullet)^V$	volumetrischer Anteil einer kontinuumsmechanischen Größe
$\dot{(\bullet)}$	Materielle Zeitableitung
$\overset{\Delta}{(\bullet)}$	Objektive Zeitableitung
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{F}_p	Plastischer Deformationsgradient
\mathbf{F}_e	Elastischer Deformationsgradient
\mathbf{F}_i	Inelastischer Deformationsgradient
$\bar{\mathbf{F}}$	Volumetrischer Deformationsgradient
$\hat{\mathbf{F}}$	Isochorer Deformationsgradient
$J = \det \mathbf{F}$	Jacobi-Determinante
\mathbf{u}	Verschiebungsfeld
φ	Torsionswinkel
$\mathbf{v}, \dot{\mathbf{x}}$	Geschwindigkeitsfeld
$\mathbf{a}, \ddot{\mathbf{x}}$	Beschleunigungsfeld
$d\mathbf{X}$	Linielement der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{x}$	Linielement der Momentankonfiguration
$d\mathbf{A}$	Flächenelement der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{a}$	Flächenelement der Momentankonfiguration

dV	Volumenelement der Referenzkonfiguration
dv	Volumenelement der Momentankonfiguration
U, V	Strecktensoren
R	Rotationstensor
C	Rechter Cauchy-Green-Deformationstensor
C_e	Elastischer rechter Cauchy-Green-Deformationstensor
C_i	Inelastischer rechter Cauchy-Green-Deformationstensor
B	Linker Cauchy-Green-Deformationstensor
B_i	Inelastischer linker Cauchy-Green-Deformationstensor
I	Identitätstensor 2. Stufe
0	Nulltensor
$\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}$	Dehnung
ε^H	Hencky-Dehnung
γ	Scherdehnung
E	Green-Lagrangescher-Verzerrungstensor
Γ	Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration
Γ_e	Elastischer Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration
Γ_i	Inelastischer Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration
A	Euler-Almansi-Verzerrungstensor
\dot{F}	Materieller Geschwindigkeitsgradient
L	Räumlicher Geschwindigkeitsgradient
L_i	Inelastischer, räumlicher Geschwindigkeitsgradient
D	Deformationsgeschwindigkeitstensor
D_i	Inelastischer Deformationsgeschwindigkeitstensor
W	Wirbeltensor
\dot{E}	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
T	Cauchy-Spannungstensor
P	1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
\bar{T}	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}_{eq}$	Gleichgewichtsspannung
$\boldsymbol{\sigma}_{neq}$	Nichtgleichgewichtsspannung
τ	Schubspannung

τ_F, σ_F	Fließspannung bzw. maximale Spannungsantwort
σ_{vM}	von-Mises-Vergleichsspannung
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{n}	Normalenvektor
\mathbf{b}	Fernwirkungskraft
\mathbf{q}, \mathbf{q}_0	Wärmestromvektor
m	Masse
ρ_0, ρ	Rohdichte
e	Innere Energie
$\rho_0 r, \rho r$	Spezifische Strahlungswärme
s	Entropie
φ_s	Entropiefluss
σ_s	Entropiezufuhr
\hat{s}	Entropieproduktion
θ	Absolute Temperatur
ψ	Freie Helmholtz'sche Energiedichte
W	Verzerrungsenergiefunktion

Tensoroperationen

$\text{Grad}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{X}}$	Gradient mit Bezug auf die Referenzkonfiguration
$\text{Div}(\bullet)$	Divergenzoperator mit Bezug auf die Referenzkonfiguration
$\text{grad}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{x}}$	Gradient mit Bezug auf die aktuelle Konfiguration
$\text{div}(\bullet)$	Divergenzoperator mit Bezug auf die aktuelle Konfiguration
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{jk}$	Einfaches Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren 2. Stufe
$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$	Zweifaches Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren 2. Stufe
$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$	Transponieren eines Tensorproduktes
$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$	Invertieren eines Tensorproduktes
$\text{tr}(\bullet)$	Spur eines zweistufigen Tensors
$\det(\bullet)$	Determinante eines zweistufigen Tensors
$\text{lin}(\bullet)$	Linearisierung eines zweistufigen Tensors

Material- und Modellparameter

α_θ	Temperaturleitfähigkeitskoeffizient
λ_θ	Wärmeleitungskoeffizient
η	Viskosität
t_r	Relaxationszeit
c_p	Spezifische Wärmekapazität
c_p^*	Volumenspezifische Wärmekapazität
G	Schubmodul
K	Kompressionsmodul
μ, λ	Lamé-Parameter
c_{10}^e	Neo-Hooke-Materialparameter
α	Temperaturausdehnungskoeffizient
$R = 8.314 \text{ J/molK}$	Universelle Gaskonstante
T_g	Glasübergangstemperatur
T_{im}	Temperatur der initialen Schmelzvorgänge
T_{pm}	Schmelztemperatur
T_{ic}	Temperatur der initialen Kristallisationsvorgänge

T_{pc}	Rekristallisationstemperatur
θ_0	Referenztemperatur
C_1, C_2	Parameter der WLF-Gleichung
E'	Speichermodul
E''	Verlustmodul
$\tan \delta$	Verlustfaktor

Für Jarno

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik an der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der Universität der Bundeswehr München. Ich möchte an dieser Stelle die Gelegenheit nutzen, mich bei all jenen Menschen zu bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein größter Dank gebührt meinem Doktorvater Professor Michael Johlitz, der die Rolle der wissenschaftlichen Vaterfigur hervorragend ausgefüllt hat. Seine konstruktiven Anmerkungen in den vielen Diskussionen haben mich immer wieder zu neuen Ideen inspiriert und mein Verständnis für kontinuumsmechanische Zusammenhänge enorm gefördert. Zudem waren seine fachlichen und psychologischen Hilfen bei der Bewältigung tiefer Talsohlen entlang des wissenschaftlichen Prozesses von entscheidender Bedeutung für das Gelingen dieses Promotionsprojektes.

Meinem Zweitgutachter Herrn Professor Holm Altenbach bin ich ebenfalls zu großem Dank verpflichtet. Mit seinem großen Erfahrungsschatz hat er in einigen Diskussionen auf diversen Konferenzen einen erheblichen Beitrag zur Modellierungsstrategie geleistet und mich außerdem durch anspruchsvolle Fragen zu Konferenzbeiträgen hervorragend auf die mündliche Prüfung vorbereitet.

Bei Herrn Professor Markus Klein bedanke ich mich sehr herzlich für die Übernahme des Vorsitzes der Promotionskommission.

Unserem Institutsleiter Professor Alexander Lion gebührt mein Dank, insbesondere dafür, dass er meine Vorstellung davon, wie gut ein mathematisch-physikalisches Gespür sein kann, erheblich erweitert hat. Die gemeinsamen Kaffeezeiten, die neben der Kontinuumsmechanik auch alles, was mit Bergen und Motoren zu tun hat, zum Thema hatten, werden mir immer in guter Erinnerung bleiben.

Zum Gelingen der Arbeit hat ferner die diskussionsfreudige und stets freundliche Atmosphäre am Institut beigetragen, für die ich mich bei allen aktuellen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen bedanken möchte.

Ein ganz besonderer Dank gebührt zudem meinen ehemaligen Kollegen bei der FEES Mechatronik GmbH, insbesondere und stellvertretend seien Ulrich Hohl, Uwe Harasztosi und Heiner Fees genannt, die mich zum „richtigen Ingenieur“ (Prof. Lion) ausgebildet und somit meinen wissenschaftlichen Weg überhaupt erst ermöglicht haben.

Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Eltern Vera und Franz-Josef sowie meinen Geschwistern Katrin und Oliver dafür bedanken, dass sie es in der ersten Hälfte meines bisherigen Lebens mit mir ausgehalten und mich in der zweiten bedingungslos unterstützt haben.

Die Danksagung möchte ich mit einem Dank von Herzen an meine geliebte Ehefrau beschließen: Ohne Dich, Klara, wäre ich soweit niemals gekommen!

München, im Februar 2025

Dominik Hahne

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Motivation	1
2. Selektives Lasersintern als industrielles Fertigungsverfahren	5
2.1. Schichtweises Aufschmelzen von Polymerpulver mit einem Laserstrahl . . .	6
2.2. Relevante Prozessparameter beim Lasersintern	9
2.3. PA12 als Werkstoff für das selektive Lasersintern	10
2.3.1. Anforderungsprofil an einen SLS-Werkstoff	11
2.3.2. PA12 als meistverwendeter SLS-Werkstoff	13
2.4. Werkstoffcharakterisierung von PA12	14
2.4.1. Dynamische Differenzkalorimetrie	14
2.4.2. Dynamisch-mechanische thermische Analyse	15
2.4.3. Transientes Flächenquellverfahren	16
2.5. Konzeption, Konstruktion und Inbetriebnahme der nachhaltig einsetzbaren, modularen Laborumgebung	17
2.6. Anforderungen an die Umgebung des SLS-Druckprozesses	17
2.7. Auslegung und Konstruktion der Laborumgebung	19
3. Kontinuumsmechanische Grundlagen	23
3.1. Kinematik – Bewegung eines materiellen Körpers	23
3.2. Bilanzgleichungen – Einhalten von thermodynamischen Gesetzen	27
3.3. Konsistentes Herleiten der Konstitutivgleichungen	31
4. Materialtheorie	33
4.1. Das Maxwell-Element als rheologisches Modell	33
4.2. Modellierung der Viskoelastizität	35
4.3. Modellierung der Plastizität	36
5. Experimente und Materialmodell	41
5.1. Entwicklung der Prüfkörpergeometrien	42
5.1.1. Gestalterische Ausführung der Rohrprobe	43
5.1.2. Gestalterische Ausführung der Probe für einfache Scherung	45
5.1.3. Gestalterische Ausführung der Zugprobe	47
5.2. Fertigungsstrategie der Prüfkörper im Pulvervolumen	48

5.3.	Kinematik der Prüfkörper	51
5.3.1.	Messprinzip der lokalen 3D-Dehnungsmessung	51
5.3.2.	Kinematik der Rohrprobe	53
5.3.3.	Kinematik der Scherprobe	57
5.3.4.	Kinematik der Zugprobe	59
5.3.5.	Erkenntnisse aus den lokalen Dehnungsmessungen	62
5.4.	Ergebnisse der mechanischen Experimente	65
5.4.1.	Relaxationsversuche	65
5.4.2.	Experimente mit verschiedenen Dehnraten	69
5.4.3.	Zyklische Versuche und Stufenversuch	73
5.5.	Das kombinierte, dreidimensionale Materialmodell der Viskoelastizität und endochronen Plastizität	77
6.	Parameteridentifikation	82
6.1.	Identifikations- und Optimierungsstrategie	82
6.2.	Identifikation der deviatorischen Materialparameter	83
6.2.1.	Auswertung der Konstitutivgleichungen für den Torsionsversuch	83
6.2.2.	Parametertest an zyklischen Torsionsversuchen	86
6.3.	Identifikation des volumetrischen Materialparameters	89
6.3.1.	Auswertung der Konstitutivgleichungen für den Zugversuch	89
6.3.2.	Volumetrische Erweiterung des Modells	93
6.3.3.	Parametertest im Stufenversuch	96
6.3.4.	Parametertest bei zyklischen Versuchen	97
7.	FE-Implementierung und Validierung	100
7.1.	Modellaufbau	102
7.2.	Simulationsergebnisse	105
7.2.1.	Torsionsversuche	106
7.2.2.	Zugversuche	108
7.3.	Validierungsversuche	112
7.3.1.	Validierungsversuch Scherprobe	112
7.3.2.	Validierungsversuch Rohrprobe unter Zugbelastung	114
8.	Zusammenfassung und Ausblick	118
8.1.	Anisotropie als Folge des Fertigungsprozesses	119
8.2.	Glasübergangstemperatur im Einsatzbereich	120
8.3.	Erweiterung des Modells auf finite Deformationen	121
8.3.1.	Kinematische Zusammenhänge der (Zwischen-)Konfigurationen	122
8.3.2.	Spannungstensoren	124
8.3.3.	Materialmodell	126
8.3.4.	Modellgleichungen für die finite Viskoplastizität	128
A.	mechanische Versuchsergebnisse	150
A.1.	Versuchsergebnisse der Scherprobe	150

A.2. Versuchsergebnisse der Rohrprobe unter Zugebelastung	152
A.3. Versuchsergebnisse der Torsionsproben im zyklischen Versuch	153

1. Einleitung und Motivation

Niemand weiß, was er kann, bis er es probiert hat.

Publilius Syrus (85 v. Chr. – 43 v. Chr.)

Der Werkstoff Polyamid 12 (PA12), auch als Nylon 12 bekannt, ist ein vielseitig einsetzbarer, teilkristalliner Thermoplast. Insbesondere die hohe Widerstandsfähigkeit gegen Chemikalien und Abrieb sowie eine gute thermische Stabilität legen eine Verwendung für (Kraftstoff-)Schläuche, Ummantelungen für Kabel, Anschlussstutzen, Dichtungen u. Ä. in der Automobil- und Flugzeugindustrie nahe. Aufgrund der Biokompatibilität ist auch ein Einsatz in Medizinprodukten möglich. Darüber hinaus erlauben die Materialeigenschaften eine Reihe von Fertigungstechnologien. So kann das Material neben dem klassischen Spritzguss auch additiv verarbeitet werden. Hier können sowohl das FDM-Verfahren, das auch für ambitionierte Heim-Anwender möglich ist, als auch laserbasierte Fertigungsverfahren eingesetzt werden [17].

Unter den additiven Fertigungsverfahren bietet das selektive Lasersintern (SLS) großes Potenzial im Rahmen einer Produktion im industriellen Maßstab. Als Gründe dafür lassen sich die guten und reproduzierbaren mechanischen Eigenschaften, eine hohe Zähigkeit sowie große, verglichen mit werkzeuggebundenen Fertigungstechnologien, geometrische Freiheiten anführen. Ferner ermöglicht das werkzeuglose Verfahren einen hohen Grad der Funktionsintegration und verschlankt den Produktionsprozess im Hinblick auf Rüstzeiten [19, 85, 132].

Die Kombination aus der Vielseitigkeit des Werkstoffs und des industriellen Potenzials des Fertigungsverfahrens motiviert ein detailliertes Verständnis des mechanischen Werkstoffverhaltens. Sofern das mechanische Werkstoffverhalten bekannt, in Form eines Materialmodells mathematisch beschrieben und implementiert ist, können mechanische Berechnungen mithilfe moderner Softwarelösungen, die sich der Methode der finiten Elemente (FEM) bedienen, kosten- und zeiteffizient durchgeführt werden. Für metallische Werkstoffe sind derartige Berechnungen heutzutage Standard und in industriellen Entwicklungsprozessen fest eingebunden. Für eine Vielzahl an Kombinationen aus Polymerwerkstoffen und den zugehörigen Fertigungsverfahren ist die Verfügbarkeit hochwertiger Materialmodelle nicht gegeben. Daher können Berechnungen – wenn überhaupt – nur vereinfacht durchgeführt werden. Grund dafür sind die starken Einflüsse diverser Prozessgrößen von industriellen Einsatzprofilen auf die häufig nichtlinearen Materialeigenschaften bei Polymeren.

Ein flüssigkeitsführendes Rohr in einem Kraftfahrzeug mit einem Temperaturanforderungsbereich von -40°C bis $+100^{\circ}\text{C}$, das aus einem metallischen Werkstoff gefertigt ist, verhält sich hinsichtlich seiner mechanischen Eigenschaften im gesamten thermischen Einsatzgebiet gleich bzw. ausreichend ähnlich, sodass die Temperatur kein Auslegungskriterium darstellt. Für das hier untersuchte Polyamid 12 hat eine Änderung der Temperatur in diesem Bereich große Auswirkungen auf die Festigkeit und die Duktilität, um nur zwei klassische, mechanische Werkstoffeigenschaften zu nennen. Zudem liegt die Glasübergangstemperatur T_g , eine charakteristische Größe eines jeden Polymers, bei ca. 37°C und somit mitten im Anforderungsbereich. Abbildung 1.1 veranschaulicht dies, indem es beispielhaft Ergebnisse von uniaxialen Zugversuchen bei zwei unterschiedlichen Temperaturen zeigt, die bei gleicher Dehnungsgeschwindigkeit durchgeführt worden sind. Die Dehnungsgeschwindigkeit bildet einen weiteren charakteristischen Einflussfaktor auf das mechanische Materialverhalten von Polymeren.

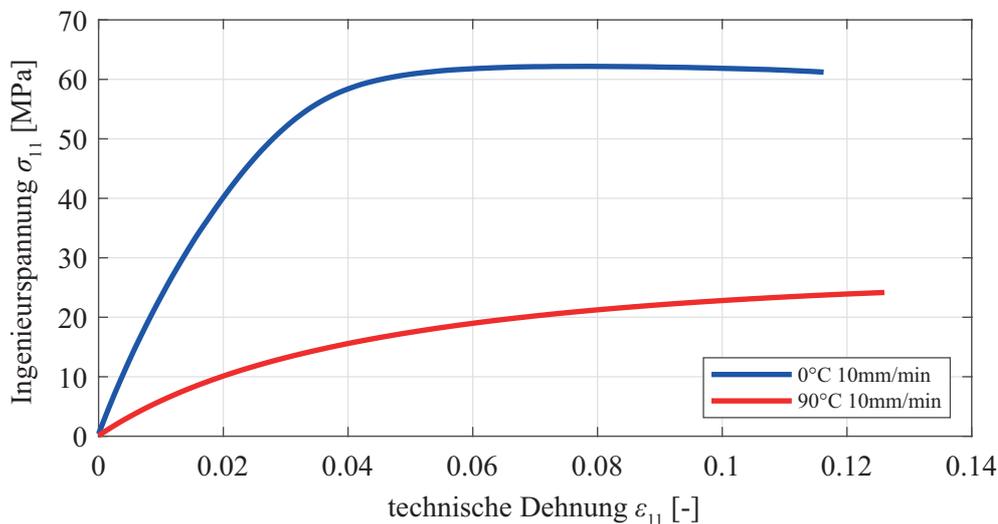


Abbildung 1.1.: Uniaxiale Zugversuche mit Probekörpern aus Polyamid 12 bei $T = 0^{\circ}\text{C}$ und $T = 90^{\circ}\text{C}$ bei derselben Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{u} = 10 \text{ mm/min}$

Möglichst viele der genannten Einflussfaktoren im Rahmen der Entwicklung eines Materialmodells für selektiv lasergesintertes PA12 zu berücksichtigen, ist das Ziel dieser Arbeit. Es soll also ausgehend von experimentellen Beobachtungen auf konstitutive Gleichungen mit einem möglichst großen Gültigkeitsbereich geschlossen werden. Unter einer konstitutiven Gleichung wird allgemein die Verknüpfung beteiligter Prozessgrößen mit materialspezifischen Zustandsgrößen verstanden. In der technischen Mechanik wird klassischerweise die Prozessgröße ‚Dehnung‘ mit der Zustandsgröße ‚Spannung‘ verbunden (siehe Abb. 1.1). Auf diesen Zusammenhang fokussiert sich diese Arbeit. Als weiteres Beispiel für konstitutive Zusammenhänge sei die Verknüpfung des Wärmestromvektors mit dem Temperaturfeld genannt. Um diese Zusammenhänge für ein bestimmtes Material zu ergründen, wird sich des Werkzeugkastens der Kontinuumsmechanik in Form von kinematischen Zu-

sammenhängen, Bilanzgleichungen und materialtheoretischen Ansätzen bedient. Je exakter sich die Berechnungsergebnisse der entwickelten Spannungs-Dehnungs-Beziehung mit dem tatsächlich im Experiment beobachteten Materialverhalten decken, desto besser gelingt die rechnerische Prognose bezüglich des Verhaltens im Einsatz. Daraus kann geschlossen werden, dass exakte Materialmodelle einen gezielten Materialeinsatz ermöglichen, der sowohl in technischer als auch in kommerzieller Hinsicht sinnvoll ist. Zudem sei der zeitgeistige Aspekt der Nachhaltigkeit und des Recyclings erwähnt. Jedes Gramm eines Polymerwerkstoffs, das aufgrund eines präzisen Materialmodells gezielt eingesetzt bzw. nicht eingesetzt wird, muss vom Unternehmen nicht eingekauft und verarbeitet werden und entzieht sich der Problematik der Entsorgung und fällt auch potentiell nicht der Umwelt zur Last.

Aufbau der Arbeit

Das allgemeine Vorgehen bei der Entwicklung eines Materialmodells gibt die Struktur der Arbeit vor. Zuerst werden das Material sowie der Verarbeitungsprozess des selektiven Lasersinterns erläutert. In diesem Zusammenhang werden einige (Vor-)Untersuchungen an PA12 durchgeführt, die auf Basis kalorimetrischer Messungen charakteristischer Temperaturen wie Glasübergangs-, Schmelz- und Rekristallisationstemperatur ein allgemeines Verständnis für das Material und das Verarbeitungsverfahren schaffen. Ferner wird über die dynamisch-mechanische Analyse ein erster Zugang zu den viskoelastischen Eigenschaften gegeben. Schließlich geht Kapitel 2 auch auf einige Aspekte der Inbetriebnahme der Anlagentechnik ein, die ebenfalls Teil des Projekts ist und eine erhebliche Herausforderung darstellte. Anstelle eines eigenen Kapitels, das den Stand der Technik abbildet, wird der bisherige Forschungsstand sequentiell aufgearbeitet und den jeweiligen Themengebieten der Arbeit direkt zugeordnet. Kapitel 3 stellt mit den Grundlagen der Kontinuumsmechanik den ersten Teil der theoretischen Grundlagen in Form von kinematischen Zusammenhängen und Bilanzgleichungen bereit, der dann durch die für die Arbeit relevanten, materialtheoretischen Zusammenhänge in Kapitel 4 komplettiert wird. Das fünfte Kapitel beinhaltet den experimentellen Teil der Arbeit, wobei neben den Ergebnissen der Torsions-, Zug- und Scherversuche auch der Entwicklungsprozess für die eigens entwickelten Prüfkörper sowie das für die Arbeit wichtige Prinzip der lokalen Dehnungsmessung erläutert wird. Zum Abschluss des Kapitels wird das Materialmodell, der wissenschaftliche Kern der Arbeit, vorgestellt, dem das Potenzial zugeschrieben wird, die experimentellen Ergebnisse am besten abzubilden. Als „Türsteher“ zwischen Wunsch und Wirklichkeit fungiert die Parameteridentifikation im sechsten Kapitel, denn hier entscheidet sich maßgeblich, ob sich zu den materialtheoretischen Überlegungen auch realistische Materialparameter finden lassen und wenn ja, wie viele Parameter erforderlich sind. Dieser Prozess stellt im Rahmen der Materialmodellentwicklung nach der Entwicklung des Modells die größte mathematische Herausforderung dar. Die Konstitutivgleichungen sind numerisch umzusetzen. Ein Algorithmus zum Abgleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse muss bereitgestellt werden, der die Materialparameter entsprechend auswählt, anpasst und auch deren Anzahl festlegt. In Kapitel 7 werden die Materialgleichungen in der kommerziellen FEM-Software

Comsol Multiphysics® implementiert und die Berechnungsergebnisse mit den im Rahmen der Parameteridentifikation ermittelten Modellantworten abgeglichen. Vor der abschließenden Diskussion werden Validierungsberechnungen, ebenfalls mit der Methode der finiten Elemente, durchgeführt.

2. Selektives Lasersintern als industrielles Fertigungsverfahren

Ich habe gelernt, dass der Weg des Fortschritts weder kurz noch unbeschwerlich ist.

Marie Curie (1867 – 1934)

Selektives Lasersintern (SLS) zählt zu den additiven Fertigungsverfahren, die in ISO 17296 genormt sind. Eine Übersicht zu den Fertigungsverfahren liefert Tabelle 2.1, die an die VDI 3405 angelehnt ist. Es handelt sich dabei um die direkte Herstellung von Bauteilen aus elektronischen Daten ohne formgebende Werkzeuge. Additive Fertigungsverfahren besitzen zudem die Gemeinsamkeit, dass Bauteile schichtweise aufgebaut werden und das Material nur an bestimmten, selektiven Stellen miteinander verbunden wird. Der Definition der DIN 8580 folgend, handelt es sich bei Verfahren der additiven Fertigung somit um Urformverfahren [133].

Durch die Verfügbarkeit von additiven Fertigungsanlagen für wenige Hundert Euro wird das Strangablegeverfahren (FDM oder FFF) für eine große Gruppe von (Heim-)Anwendern interessant und erlebbar. Dadurch ist der Begriff des 3D-Drucks häufig in dieser Technologie verhaftet und wird nicht mehr als „echte“ Fertigungstechnologie wahrgenommen. Darüber hinaus existieren weitere Verfahren der additiven Fertigung, die zur Herstellung von Prototypen, Designbeispielen und Musterteilen zum technischen Funktionsnachweis bereits seit Jahrzehnten eingesetzt werden. Mitnichten handelt es sich jedoch bei der Diskussion über additive Fertigung um alten Wein in neuen Schläuchen. Denn der interessante Aspekt ist, welche Verfahren die Vorteile der additiven Fertigung beibehalten und gleichzeitig den Einsatz im industriellen Umfeld (anforderungstreu, wiederholbar, rentabel) ermöglichen.

Der Versuch einer Einordnung, inwieweit sich additive Fertigungsverfahren im Rahmen einer industriellen Produktion eignen, findet sich zum Beispiel in [19] und [132]. Das selektive Lasersintern erweist sich im Rahmen dieser Vergleiche als vorteilhaft. Dabei werden die guten und reproduzierbaren mechanischen Eigenschaften, eine hohe Zähigkeit, die hohe geometrische Freiheit in der konstruktiven Auslegung, die Möglichkeit der Funktionsintegration sowie Aspekte der Produktindividualisierung als Vorteile des selektiven Lasersinterns genannt und somit das große Potenzial im industriellen Einsatz herausgestellt.

Strangablegeverfahren	(engl.: Fast Filament Fabrication)	FFF / FDM
Kunststofffilamente werden durch eine beheizte Düse geführt und im erwärmten Zustand verklebt.		
Wachsdrukverfahren	(engl.: Poly Jet Modelling)	PJM
Geschmolzene Wachse werden durch einen Druckkopf geführt (analog Tintenstrahldruck). Die Wachstropfen verfestigen sich beim Ablegen.		
Tintenstrahl-UV-Druck	(engl.: Multi Jet Printing)	MJP
Kleine Tropfen von UV-härtenden Präpolymeren werden mit einem Druckkopf orts aufgelöst abgelegt und durch eine UV-Quelle ausgehärtet.		
Stereolithographie	(engl.: Stereolithography)	SL(A)
Ein UV-Laser schreibt die gewünschte Schichtinformation in ein Bad aus UV-härtenden Präpolymeren.		
Selektives Lasersintern	(engl. Selective Laser Sintering)	SLS
Durch den Energieeintrag eines Lasers werden Pulverpartikel orts aufgelöst verschmolzen.		
Selektives Laserschmelzen	(engl: Selective Laser Melting)	SLM
Durch den Energieeintrag eines Lasers werden Pulverpartikel orts aufgelöst verschmolzen.		
Elektronenstrahlschmelzen	(engl.: Electron Beam Melting)	EBM
Durch den Energieeintrag eines Elektronenstrahls werden Pulverpartikel orts aufgelöst verschmolzen (verschweißt).		
Direktes Metallpulver sprühen	(engl.: Direct Metal Deposition)	DMD
Ein feiner Metallpulverstrahl wird in den Fokus eines Lasers gesprüht und orts aufgelöst verschweißt.		

Tabelle 2.1.: Additive Fertigungsverfahren (in Anlehnung an VDI3405 und [133])

Im Folgenden werden, das Verfahren sowie der eingesetzte Werkstoff näher erläutert.

2.1. Schichtweises Aufschmelzen von Polymerpulver mit einem Laserstrahl

Die Entwicklung des SLS-Verfahrens geht auf Arbeiten von Carl Deckard, der sich sowohl in Master- als auch Doktorarbeit dem Verfahren widmete [32], und Jeo Beaman aus der Mitte der 1980er Jahre an der University of Texas in Austin zurück (siehe z. B. US-Patent

US00555324A). Des Weiteren ist James Christian Nelson [119] einer der Pioniere des Verfahrens.

Der Markt für SLS-Anlagen wird von zwei Herstellern bestimmt:

- 3D-Systems, Rock Hill (SC), USA
- Electro Optical Systems (EOS), Krailing, Deutschland

Im Rahmen dieser Arbeit werden alle Proben auf dem Modell *P396* des Herstellers EOS hergestellt. Daher bezieht sich die Prozessbeschreibung auf dieses Modell. Beim selektiven Lasersintern wird das Polymerpulver mithilfe einer Beschichterklinge in einer definierten Schichtstärke aufgetragen. Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Bauteile wurden mit einer Schichtstärke von $120\ \mu\text{m}$ hergestellt. Anschließend wird das Pulverbett durch eine Infrarotheizung auf eine vorab festgelegte Prozesstemperatur gebracht. Diese Prozesstemperatur liegt typischerweise zwischen der Rekristallisationstemperatur und der Schmelztemperatur des eingesetzten Werkstoffs (siehe dazu auch Abschnitt 2.3.1). Vor dem Auftrag der ersten Pulverschicht wird eine Pulverbodenschicht als Fundament appliziert, die für die Dauer von ca. 2 Stunden der Prozesstemperatur ausgesetzt wird. Dies führt dazu, dass sowohl die Pulverbodenschicht als auch die umgebenden Komponenten der SLS-Anlage zu Beginn des eigentlichen Prozesses bereits die Prozesstemperatur (Abb. 2.3) angenommen haben. Nachdem die erste Pulverschicht aufgetragen und beheizt worden ist, folgt die orts aufgelöste Belichtung bauteilrelevanter Bereiche über die Schmelztemperatur durch den Laser. Die Pulverpartikel werden aufgeschmolzen, um sich direkt als einzelne Bauteilschicht wieder zu verfestigen. Anschließend senkt sich das Pulverbett um die Höhe einer Schichtstärke ab und die Schritte 'Auftrag der Pulverschicht', 'Aufheizen durch den IR-Strahler' und 'Belichten' werden erneut durchlaufen [4, 132]. So entstehen schichtweise Bauteile im Pulverbett, die durch das umgebende Pulver gestützt werden. Es sind, anders als bei vielen anderen additiven Fertigungsverfahren, keine Stützstrukturen erforderlich. Dadurch werden gestalterische Restriktionen, die im Rahmen der werkzeuggebundenen Herstellung von Polymerbauteilen gelten, obsolet [22, 57]. Abbildung 2.1 stellt die Prozessschritte dar.

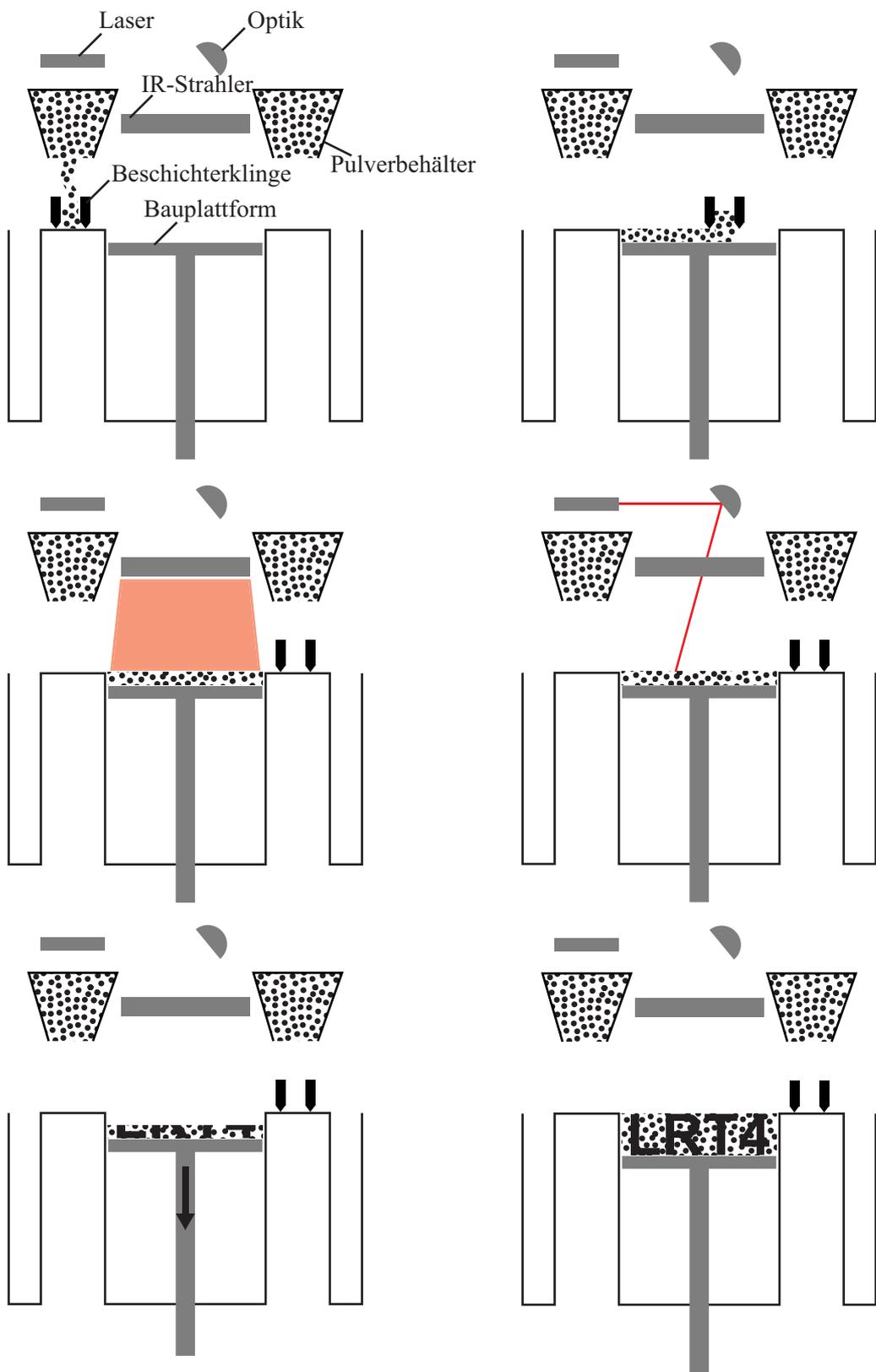


Abbildung 2.1.: Prozess des selektiven Lasersinterns anhand einer EOS P396

2.2. Relevante Prozessparameter beim Lasersintern

Der Großteil der erforderlichen Energie wird beim selektiven Lasersintern durch die Infrarotheizung bereitgestellt, die das Pulverbett gleichmäßig erwärmt. Der Belichtungsvorgang mithilfe des Lasers wird dann anhand der im Preprocessing vordefinierten Scanvektoren durchgeführt. Die für den Vorgang der Belichtung relevanten Parameter sind in Abb. 2.2 zusammengefasst. Das Konglomerat dieser Parameter legt die durch den Laserstrahl in das Pulverbett eingebrachte Energiemenge fest, die für die Bauteileigenschaften große Bedeutung besitzt.

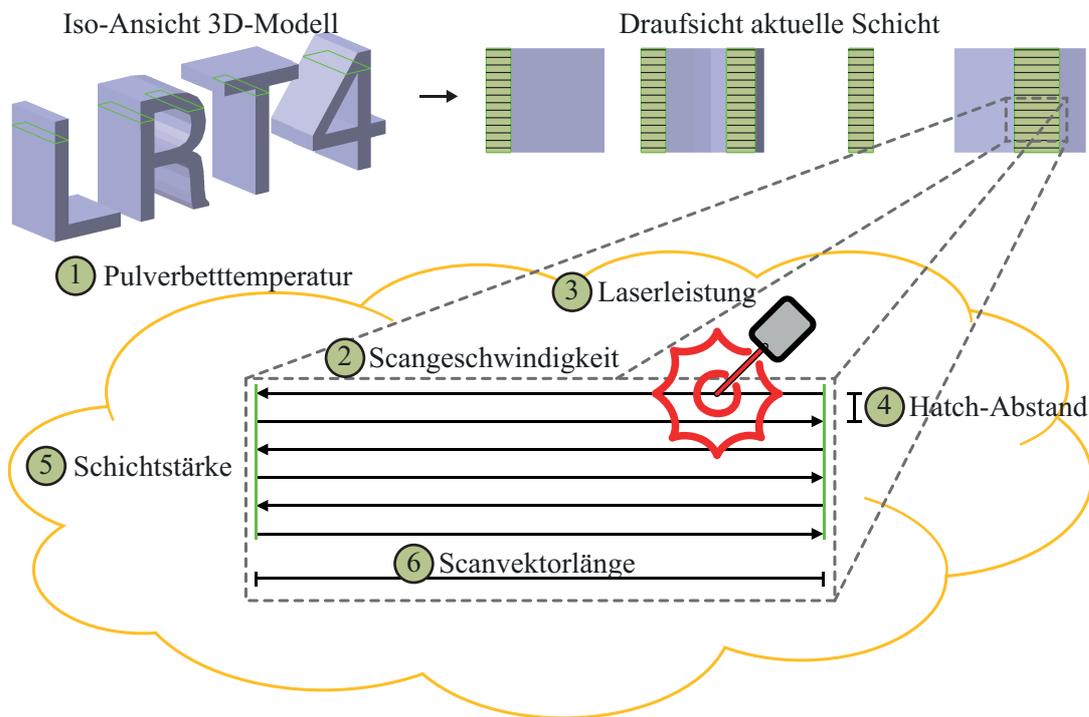


Abbildung 2.2.: Parameter beim selektiven Lasersintern

Es existiert eine Vielzahl von Publikationen, die sich mit den Prozesstemperaturen und deren Raten sowie den übrigen Prozessparametern wie Laserleistung, Belichtungsgeschwindigkeit, Hatch-Abstand etc. und deren Auswirkungen auf die Bauteileigenschaften sowie der Modellierung auseinandersetzen. Eine Publikation, an der mit DECKARD auch einer der Pioniere des Verfahrens beteiligt ist, beschäftigte sich schon Ende der 1990er Jahre mit der Modellierung der Energieeinkoppelung und der Wärmeverteilung im Pulverbett [164]. OSMANLIC beschäftigte sich in seiner Dissertation ebenfalls mit der Modellierung des SLS-Prozesses auf Pulvermaßstab, wobei die Untersuchungen von der Energieeinkoppelung bis zu den Schmelzbadabmaßen über mehrere Schichten sehr umfangreich waren [120]. Eine weitere Arbeit bezüglich der Laser-Pulver-Wechselwirkung stammt von WEGNER, wobei hier mithilfe von Hochgeschwindigkeits-Thermografie eine Korrelation zwischen den

Parameter	Einheit	EOS P396
Lasergeschwindigkeit	mm/s	4000
Laserleistung	W	40
Hatch-Abstand	mm	0.3
Schichtstärke	μm	120
Energiedichte	J/mm^3	0.28
Pulverbodenschichtdicke	mm	6
Gesamthöhe Druck	mm	$\approx 60\text{-}200$
Baukammertemperatur	$^{\circ}\text{C}$	130
Prozesskammertemperatur	$^{\circ}\text{C}$	173
Volumenauslastung	%	≈ 10

Tabelle 2.2.: Parametersatz für das Herstellen der Proben

Prozessparametern und den sich ergebenden Bauteileigenschaften hergestellt wurde [163]. Darüber hinaus gibt es weitere Arbeiten, die sich mit der Pulverbetttemperatur und der Dichteverteilung im Pulverbett beschäftigen [20, 36, 100, 101, 152].

Im Rahmen dieser Arbeit stehen der Prozess und dessen Parameter nicht im Fokus. Es geht lediglich um die Bauteile und deren mechanische Eigenschaften. Dazu wird zur Produktion der voreingestellte Parametersatz der Fa. EOS verwendet (Tabelle 2.2).

2.3. PA12 als Werkstoff für das selektive Lasersintern

Beim selektiven Lasersintern wird überwiegend Pulver aus Polyamid 12 (PA12) verwendet. Es sind zudem Pulver aus z. B. Polyamid 11 (PA11), thermoplastischen Polyurethanen (TPU) oder Poly-Ether-Ether-Keton (PEEK) erhältlich, die jedoch einen geringen Marktanteil aufweisen [133]. Insbesondere letztgenannter Werkstoff, der zu den Hochleistungspolymeren zählt, stellt aufgrund seiner hohen Schmelztemperatur erhöhte Anforderungen an die Anlagentechnik.

Innerhalb der Forschungslandschaft zum selektiven Lasersintern gibt es eine Reihe an Publikationen, die sich mit den erforderlichen Eigenschaftskombinationen, die für einen erfolgreichen Einsatz als SLS-Werkstoff notwendig sind, beschäftigen. Davon beschränken sich wiederum viele auf unterschiedliche Polyamide unter Zuhilfenahme von Nanopartikeln oder anderen Additiven und Zusatzwerkstoffen. In [131] wurden PA12 und Polyethylen ho-

her Dichte (HDPE) miteinander gemischt, wobei die schlechten mechanischen Kennwerte der Mischungen auf eine schlechte chemische Affinität hindeuten. Außerdem wurde die Verarbeitung von elektrisch leitfähigem, rußgefülltem PA12 mithilfe des SLS-Verfahrens in [9] untersucht. Die Anreicherung von PA6 und PA12 mit Nanopartikeln aus Ton wurde in [80] und [74] beleuchtet. In [111] wurde PA12 mit Aluminiumfüllung betrachtet. WUDY beschäftigte sich in ihren Arbeiten mit Alterungseffekten bezüglich der thermischen Eigenschaften im SLS-Prozess [167, 166]. Untersuchungen zu Temperatur- und Feuchteinflüssen auf PA11- und PA12-Pulver finden sich außerdem in [107].

Im Folgenden werden die Anforderungen an einen idealen SLS-Werkstoff anhand von Pulver-Herstellung und Verarbeitbarkeit sowie kalorischen Eigenschaften erläutert, bevor der Werkstoff PA12 detailliert beschrieben wird.

2.3.1. Anforderungsprofil an einen SLS-Werkstoff

Für den SLS-Prozess muss der Werkstoff in Pulverform vorliegen, sich also gut zu Pulver verarbeiten lassen. Die korrekte Partikelgröße ist sowohl für den Prozess als auch für die Bauteileigenschaften entscheidend. Die Partikelgröße muss optimalerweise im Bereich zwischen 45–90 μm liegen [49, 143]. Generell führen kleinere Partikel zu feineren Oberflächen, größerer Dichte und kleineren Bauteiltoleranzen. Zu kleine Partikel machen jedoch die Pulververarbeitung im Prozess aufgrund der Neigung zur statischen Aufladung schwieriger [50]. Weiterhin ist der Pulverfluss von großer Bedeutung für den Prozess, da durch die Beschichterklinge eine glatte und kompakte Pulverschicht erzeugt werden soll. Dafür spielen wiederum die Partikelgröße, deren Verteilung sowie die Partikeloberflächen eine Rolle [169]. Ferner wird der Pulverfluss auch durch die (Luft-)Feuchtigkeit als äußeren Einflussfaktor beeinträchtigt [27]. Zu trockenes Pulver neigt zu statischer Aufladung, zu feuchtes Pulver bildet Agglomerationen. Als Herstellprozess für thermoplastisches Pulver ist das Kaltmahlen bzw. die kryogene Vermahlung etabliert. Materialpellets werden mithilfe von Stickstoff auf -50°C gekühlt und in einem Stiftscheibenmahlwerk mit dem Prinzip der sieblosen Prallzerkleinerung gemahlen [37]. Durch die niedrige Temperatur werden ein Verschmelzen oder Verkleben sowie eine thermische (Vor-)Schädigung des Mahlguts ausgeschlossen.

Innerhalb des SLS-Prozesses wird das Pulver aus dem glasartigen Zustand über den thermoelastischen Zustand bis zur Schmelze erhitzt [46]. Teilkristalline Thermoplaste, zu denen PA12 zählt, sind dadurch gekennzeichnet, dass der Wechsel vom festen in den flüssigen Aggregatzustand innerhalb eines relativ kleinen Temperaturfensters erfolgt. Dies unterscheidet sie von den amorphen Thermoplasten, bei denen oberhalb der Glasübergangstemperatur ein kontinuierliches Erweichen stattfindet [40, 29]. Außerdem besitzt die Schmelze eines teilkristallinen Thermoplasts eine geringe Viskosität. Dies führt im Anwendungsfall des Lasersinterns zu einer guten Verbindung der Schichten, einer hohen Dichte und somit zu

einem Eigenschaftsportfolio, das spritzgegossenen Bauteilen ähnelt [37]. Eine Herausforderung bei der Verarbeitung teilkristalliner Thermoplaste ist das Schrumpfen im Verlauf der Abkühlung und der daraus entstehende Bauteilverzug, der sowohl bei der additiven Fertigung als auch beim Spritzguss von großer Bedeutung ist. Durch die Differenzkalorimetrie können Phasenübergänge und die Temperaturdifferenz zwischen Schmelz- und Rekristallisationstemperatur messtechnisch erfasst werden. Die gewünschten kalorischen Eigenschaften eines SLS-Werkstoffs sind anhand einer DSC-Messung von PA12 qualitativ in Abb. 2.3 zusammengefasst. Beim selektiven Lasersintern wird das Pulverbett durch den IR-Strahler (Abb. 2.1) auf eine Prozesstemperatur, die zwischen der Schmelztemperatur T_{im} und der Rekristallisationstemperatur T_{ic} liegt, vorgeheizt. Die Prozesstemperatur sollte knapp unterhalb der Schmelztemperatur liegen. Das hat zur Folge, dass die Laserleistung, die durch den Laser hervorgerufene thermische Ausdehnung und der thermische Gradient zwischen belichtetem und unbelichtetem Pulver minimiert werden [37, 50]. Die hohe Prozesstemperatur führt zudem zu einer minimierten Rekristallisationsrate, die gute Bauteiltoleranzen mit geringem Verzug realisiert [144, 167].

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Temperatur zwischen Schmelzen und Kristallisation sowie der Schmelzpeak möglichst hoch und der Temperaturbereich für den Schmelzprozess klein sein sollten. Ein großer Temperaturunterschied zwischen Schmelze und Kristallisation eröffnet prozessualen Spielraum, um beispielsweise die Laserleistung oder die Belichtungsgeschwindigkeit anzupassen.

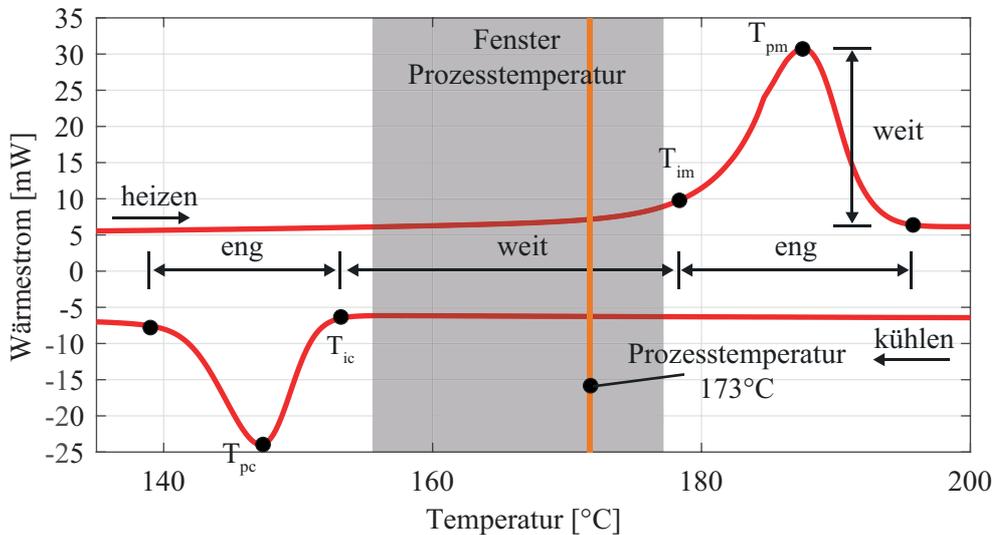


Abbildung 2.3.: Thermisches Profil für einen SLS-Werkstoff anhand einer DSC-Messung

2.3.2. PA12 als meistverwendeter SLS-Werkstoff

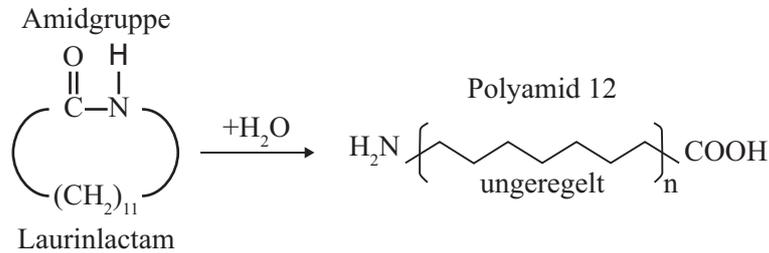


Abbildung 2.4.: Chemischer Aufbau von PA12

PA12 ist ein teilkristalliner Thermoplast. Die Einteilung verschiedener Polymere nach Art der Vernetzung in Elastomere, Duroplaste und Thermoplaste ist in verschiedenen Standardwerken umfassend beschrieben [23, 40]. Neben den teilkristallinen Thermoplasten existieren die amorphen Thermoplaste, die aufgrund der in Abschnitt 2.3.1 beschriebenen thermischen Anforderungen für die Verwendung als SLS-Werkstoff ungeeignet sind. Mit einem Marktanteil von 95% ist PA12 der meisteingesetzte Werkstoff für das selektive Lasersintern [133]. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Pulver mit der Bezeichnung *PA2200*, das durch Titandioxid als Weißpigment modifiziert und von der Fa. Evonik produziert wird, genutzt.

Polyamid 12 wird durch ringöffnende Polyaddition mit Laurinlactam als Monomer hergestellt (Abb. 2.4). Die für die Benennung wichtige Gruppe ist die Amidgruppe. Die 12 Kohlenstoff-Atome im Monomer geben dem Polyamid den Namen Polyamid 12. Dabei sind 11 Kohlenstoff-Atome in Methylengruppen und ein Kohlenstoff-Atom in der Amidgruppe gelagert. Die Amidgruppe ist aufgrund der hohen Elektronegativitätsdifferenz von Stickstoff N und Wasserstoff H sowie von Kohlenstoff C und Sauerstoff O stark polar. Dadurch bilden sich zwischen benachbarten Amidgruppen verschiedener Polymerketten Wasserstoffbrückenbindungen. Da der Abstand zwischen den Amidgruppen eines einzelnen Polymers, relativ zu anderen Polyamiden, groß ist, sind die intermolekularen Kräfte bei PA12 deutlich geringer als bei anderen Polyamiden. Dieser Abstand bewirkt, dass PA12 Wasser deutlich schlechter aufnimmt als andere Polyamide [40]. Da weniger polare Amidgruppen vorhanden sind und Wasser sich nur an die polaren Teile eines Moleküls bindet, kann nur wenig Wasser gebunden werden.

Bei dem im Rahmen dieser Arbeit verwendeten PA12-Pulver liegen aufgrund des Herstellprozesses offene, reaktive Kettenenden vor. Dadurch findet während der SLS-Verarbeitung eine Festphasen-Nachkondensation statt, bei der eine Kondensationsreaktion an den offenen Kettenenden stattfindet. Der Effekt der Kettenverlängerung verbessert die mechanischen Eigenschaften des hergestellten Bauteils, findet andererseits aber auch im ungesintertem (und folglich wiederverwendetem) Pulver statt und führt dort zu Alterungseffekten [78, 133, 172].

2.4. Werkstoffcharakterisierung von PA12

2.4.1. Dynamische Differenzkalorimetrie

Mithilfe der dynamischen Differenzkalorimetrie (*Differential Scanning Calorimetry DSC*) können für Polymere charakteristische Temperaturen wie Schmelztemperatur T_m und Glasübergangstemperatur T_g ermittelt werden. Die Grundlagen sowie das Messprinzip sind in einer Reihe von Büchern umfassend erläutert (z. B. [71, 168]) und in DIN EN ISO 11357 standardisiert. Prinzipiell wird das Probenmaterial mit dem Referenzmaterial Luft simultan erhitzt. Durch Änderung der spezifischen Wärmekapazität zwischen Proben- und Referenzmaterial bildet sich eine Temperaturdifferenz aus, die proportional zur spezifischen Wärmekapazität c_p ist. Enthalpie und spezifische Wärmekapazität können aus der zugeführten Wärmemenge ermittelt werden. Findet eine Phasenumwandlung statt, zeigen die Temperaturabhängigkeiten von spezifischer Wärmekapazität bzw. Enthalpie Änderungen im Kurvenverlauf. In Abb. 2.5 ist die DSC-Messung von selektiv lasergesintertem PA12 dargestellt, die bei einer Temperaturrate von $10 \frac{\text{K}}{\text{min}}$ durchgeführt wurde. Der charakteristische Sprung bei der Glasübergangstemperatur T_g von ca. 37°C ist nur schwach ausgeprägt. Sowohl die hohe und schmale Form als auch die Lage des Schmelz- und Rekristallisationsbereichs sind mit den Anforderungen an einen SLS-Werkstoff aus Abschnitt 2.3.1 konform. Der Unterschied zwischen dem ersten Durchlauf und den weiteren Durchläufen ist auf die Löschung des Gedächtnisses des Polymers zurückzuführen, wenn dieser bis zur Schmelze erhitzt wird. Die hier konstant gehaltene Abkühlrate des ersten Durchlaufs hat Einfluss auf den Schmelzpeak des zweiten Durchlaufs.

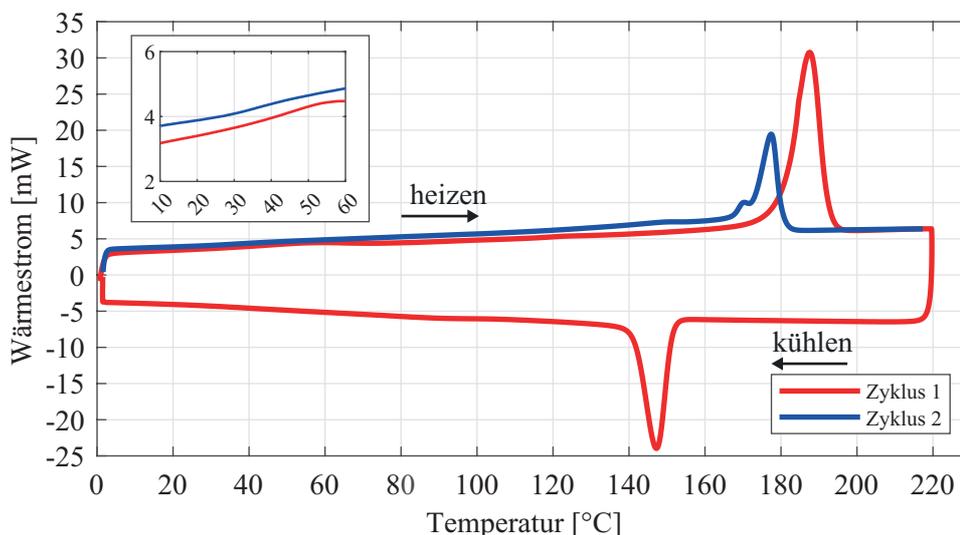


Abbildung 2.5.: DSC-Messung von lasergesintertem PA12

2.4.2. Dynamisch-mechanische thermische Analyse

Um die viskoelastischen Eigenschaften eines Werkstoffs innerhalb kurzer Versuchszeiten zu bestimmen, werden die Verfahren der mechanisch-dynamischen Analyse eingesetzt, die in DIN EN ISO 67214 genormt sind. Bei den hier gewählten Temperatur-Frequenzsweeps mit erzwungener Schwingung wird der Prüfkörper einer sinusförmigen Beanspruchung ausgesetzt. Dabei stellt sich bei konstanter Frequenz eine Phasenverschiebung δ zwischen gemessener Kraft und aufgebrachtener Deformation ein. Die aus der Kraft berechnete Spannung und die aus der Deformation ermittelte Dehnung sind durch den komplexwertigen Elastizitätsmodul E^* miteinander verbunden, der sich aus dem Speichermodul E' (Realteil) und dem Verlustmodul E'' (Imaginärteil) zusammensetzt. Abbildung 2.6 zeigt den ermittelten Speicher- und Verlustmodul des lasergesinterten PA12 als Funktion der Temperatur bei verschiedenen Frequenzen.

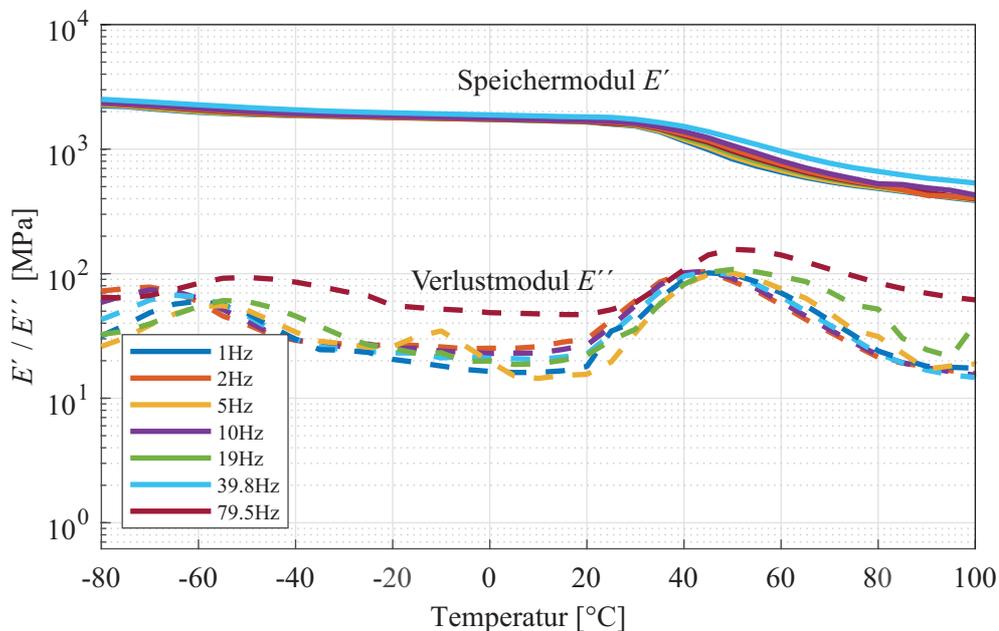


Abbildung 2.6.: Dynamisch-mechanische thermische Analyse von lasergesintertem PA12

Das Material reagiert auf Frequenzänderungen von zwei Zehnerpotenzen mit sehr geringer Änderung im Elastizitätsmodul. Der Verlustfaktor $\tan \delta$, der sich aus dem Quotienten von Verlust- und Speichermodul berechnet und ein Maß für die Viskosität darstellt, liegt bei Raumtemperatur zwischen $0.01 < \tan \delta < 0.025$. Ein Wert von $\tan \delta = 0$ entspricht dem Verhalten eines ideal-elastischen Festkörpers. Geht der Wert des Verlustfaktors gegen unendlich, verhält sich das Material wie eine ideal-viskose Flüssigkeit mit newtonschem Fließverhalten (siehe Abschnitt 4.1). Der absolut kleine Verlustfaktor und eine relativ kleine Änderungen bei steigender Frequenz lässt einen Ausblick auf das Verzerrungsverhalten bei unterschiedlichen Verzerrungsraten zu: Es ist mit stark nichtlinearer Ratenabhängigkeit zu

rechnen. Verglichen mit der DSC-Messung in Abb. 2.5 ist der Glasübergangsbereich deutlich zu erkennen, der bei $T \approx 30^\circ\text{C}$ mit einem großen Gradienten beider Module beginnt. Damit wird der Glasbereich des Materials verlassen. Die niedrige Glasübergangstemperatur ist aus praktischer Sicht eine Herausforderung, da Einsatztemperaturen für SLS-Teile zwischen -40°C und $+80^\circ\text{C}$, beispielsweise im Bereich des Automobilbaus, üblich sind. Die Glasübergangstemperatur liegt somit mitten im thermischen Einsatzbereich, sodass dessen vollumfängliche Modellierung eine große Herausforderung darstellt.

2.4.3. Transientes Flächenquellverfahren

Zur Messung der thermischen Eigenschaften von Materialien wie der Wärmeleitfähigkeit λ_θ , der Temperaturleitfähigkeit α_θ und der volumenspezifischen Wärmekapazität c_p^* wird folgend die bewährte Hot-Disk-Methode genutzt. Dies ist ein transientes Flächenquellenverfahren (*Transient Plane Source*) und wurde 1989 von SILAS E. GUSTAFSSON patentiert [56, 55]. Diese Methode ist für ihre Genauigkeit und Vielseitigkeit bekannt und wird in verschiedenen Bereichen wie Materialwissenschaft, Technik und Qualitätskontrolle eingesetzt.

In der vorliegenden Arbeit wird die Anlage vom Typ *T2500S* mit der Software *Hot Disk Thermal Analyser 7.4* verwendet. Der Heiz- und Temperatursensor aus einer $10\ \mu\text{m}$ starken Nickel-Doppelspirale dient als Wärmequelle sowie als Widerstandsthermometer und leitet einen Heizstrom, der wiederum eine zweiteilige, den Sensor umgebende Probe erwärmt. Die Wärmewelle breitet sich radial vom Sensor in der Probe aus. Die daraus resultierende Temperaturänderung wird unmittelbar gemessen. Durch Auswertung der Fourier'schen Differentialgleichung (Gl. (2.1)) für die Wärmeleitung ohne Wärmequelle, d. h. in ihrer homogenen Form, werden daraus die thermischen Eigenschaften des umgebenen Materials ermittelt.

$$c_p^* \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Nachfolgend werden die Eigenschaften von gesinterten Vollzylindern mit Radius 20 mm und Höhe 10 mm in den in Abb. 5.9 dargestellten Orientierungen untersucht. Zudem wurden Messungen an Neupulver und Recyclingpulver durchgeführt. Für die Pulvermessung muss der Versuchstiegel mit einem Gewicht beschwert werden, das erheblichen Einfluss auf das Messergebnis hat. Für die hier gezeigten Messergebnisse beträgt das Gewicht 500 g. Jede Messung wurde drei Mal wiederholt. Es sind jeweils der Mittelwert und die Standardabweichung dargestellt.

	$\lambda_{\theta} \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$	$\alpha_{\theta} \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \right]$	$c_p^* \left[\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3\text{K}} \right]$
PA12 Neupulver	0.0832 ± 0.0002	0.1194 ± 0.0009	0.6970 ± 0.0030
PA12 Recyclingpulver	0.0824 ± 0.0002	0.1110 ± 0.0010	0.7430 ± 0.0070
Vollzylinder X	0.2855 ± 0.0069	0.1589 ± 0.0131	1.8060 ± 0.1130
Vollzylinder ZX45	0.2900 ± 0.0044	0.1752 ± 0.0123	1.6613 ± 0.0956
Vollzylinder Z	0.2925 ± 0.0017	0.1668 ± 0.0044	1.7550 ± 0.0368

Tabelle 2.3.: Thermische Materialparameter für PA12-Pulver und SLS-Bauteile

Aus den Messergebnissen in Tabelle 2.3 wird erkenntlich, dass die Orientierung der Proben im Pulverbett keinen erheblichen Einfluss auf die thermischen Eigenschaften des Vollmaterials hat. Zwischen den gefertigten Teilen und dem Pulver als Ausgangsmaterial bestehen erwartbarerweise erhebliche Unterschiede bezüglich der thermischen Parameter.

2.5. Konzeption, Konstruktion und Inbetriebnahme der nachhaltig einsetzbaren, modularen Laborumgebung

Aufbau und Inbetriebnahme der Lasersinteranlage in industriellem Stil sind Bestandteil des Projekts. Zur Inbetriebnahme musste eine Laborumgebung geschaffen werden, die den Aufstell- und Betriebsbedingungen der Anlage gerecht wird. Die Ausführungen basieren im Wesentlichen auf [58].

2.6. Anforderungen an die Umgebung des SLS-Druckprozesses

Die Anforderungen werden durch den Hersteller des Drucksystems definiert. Die Aufstellbedingungen geben alle wesentlichen Randbedingungen vor. Dazu zählen die allgemeine Infrastruktur bzgl. elektrischer Leistung der Komponenten, Anforderungen an die Druckluft, Wandabstände etc., aber auch die zulässigen Grenzen für Temperatur und Luftfeuchtigkeit innerhalb der Laborumgebung. Laut Hersteller sollte die Luftfeuchtigkeit im Rahmen der Verarbeitung zwischen $\approx 40\text{-}60\%$ liegen. Neben dem Herstellprozess der Teile sind außerdem die vor- und nachgelagerten Prozesse des Pulverhandlings relevant für konstante

Temperatur und Luftfeuchtigkeit. Die infrastrukturellen Umstände am Campus erfordern die Entwicklung einer eigens vorgesehenen Laborumgebung, in der alle Prozesse der Fertigung, Vor- und Nachbereitung (Abb. 2.7) stattfinden. Nach Klärung der Anforderungen führte die konzeptionelle Arbeit schnell zu dem Ergebnis eines Fachwerks aus Aluminium-Stranggussprofilen, das doppelwandig verkleidet ist. Als Vorteile haben sich insbesondere der modulare und einfache Aufbau, Skalierbarkeit und gute Isolation ergeben.

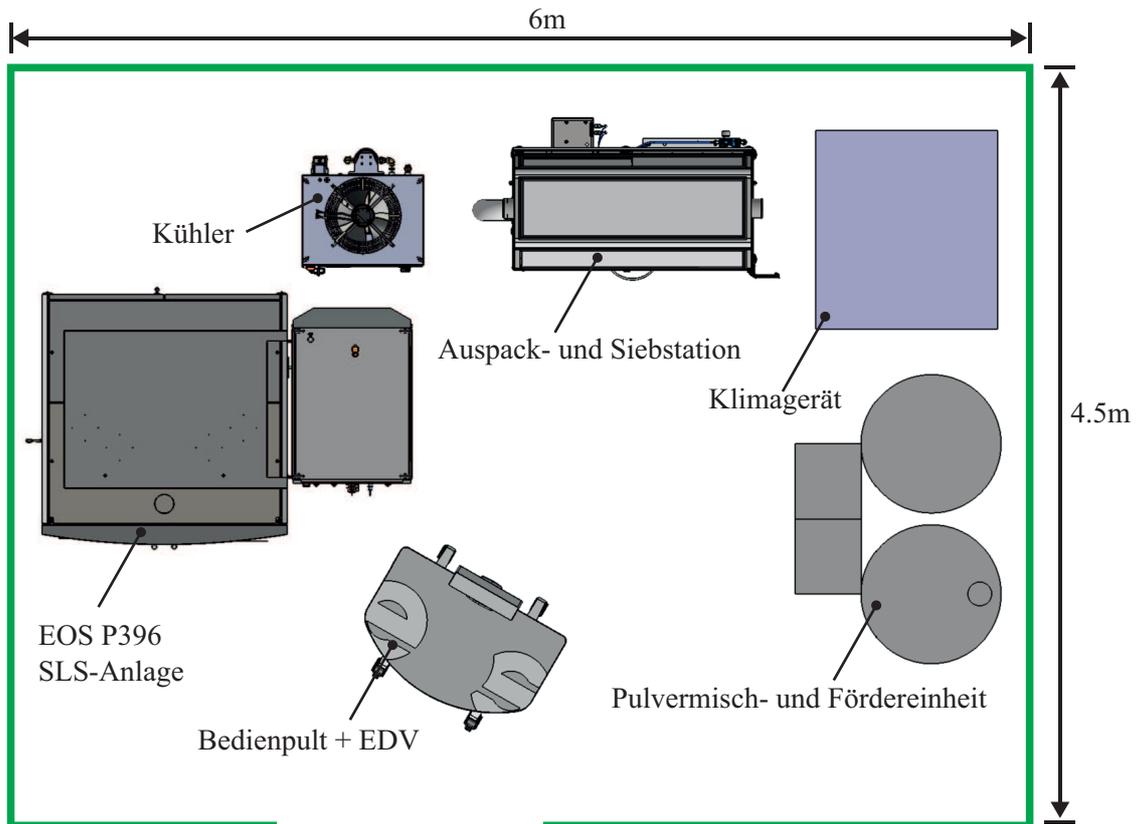
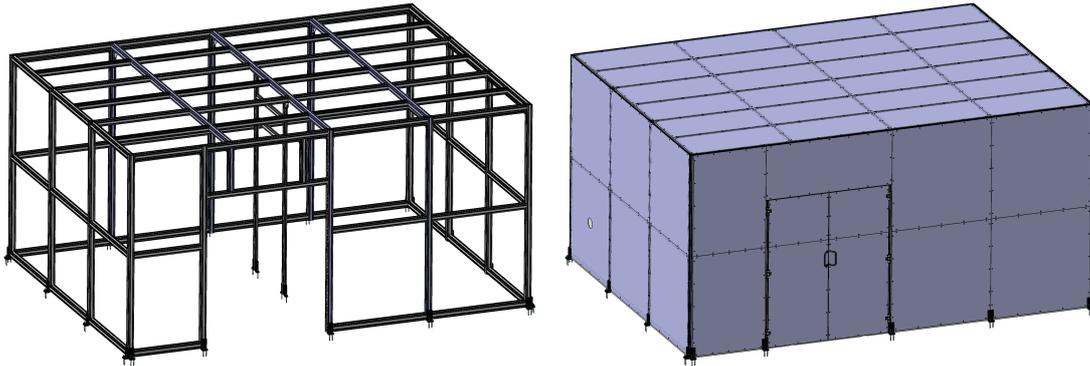


Abbildung 2.7.: Komponenten des SLS-Systems

In Abb. 2.7 ist eine CAD-Draufsicht der SLS-Systemkomponenten zu sehen, die in die Laborumgebung integriert werden sollen. Eine Sandstrahlanlage, in der das Postprocessing der Bauteile durchgeführt wird, kann im nichtklimatisierten Bereich platziert werden.

2.7. Auslegung und Konstruktion der Laborumgebung

Nach Festlegen des Konzepts erfolgte die konstruktive Ausarbeitung mit möglichst geringerer Einzelteilvariation. Das Ergebnis des konstruktiven Entwurfs ist in Abb. 2.8 zu sehen.



a) Fachwerkstruktur der Laborumgebung

b) verkleidete Laborumgebung

Abbildung 2.8.: Konstruktiver Entwurf der Laborumgebung

Aus strukturmechanischer Sicht ist das Dach der Laborumgebung von Interesse, da hier, neben dem nicht zu vernachlässigenden Eigengewicht, die Baugruppe zur Pulverförderung befestigt ist. Die Dachlasten konnten mithilfe eines Simulationsmodells des Fachwerks mit linear-elastischen Balkenelementen nachgebildet werden. Zur Effizienzsteigerung der Simulation wurden die Profilgeometrien der verwendeten Dachprofile (leichte und schwere Ausführung) simulativ einem 3-Punkt-Biegeversuch unterzogen. Dazu wurden die Profile mithilfe von Starrkörper-Elementen (RBE-Element, engl. rigid body elements) an den Stirnseiten fixiert und mittig auf kleiner Fläche einer Last von $F = 1.000 \text{ N}$ appliziert. Auf die genaue Wirkungsweise und Einsatzgebiete von RBE-Elementen wird an dieser Stelle nicht näher eingegangen und auf die einschlägige Literatur verwiesen [44]. Mit gegebenem Elastizitätsmodul und Kraft kann mithilfe der berechneten Durchbiegung das axiale Widerstandsmoment ermittelt und auf eine Standardgeometrie zurückgeführt werden. Aufgrund der doppelt symmetrischen Ausführung der Profile bieten sich Quadrat oder Kreis als Standardprofil an. Die Ergebnisse der Berechnung sind in Abb. 2.9 dargestellt.

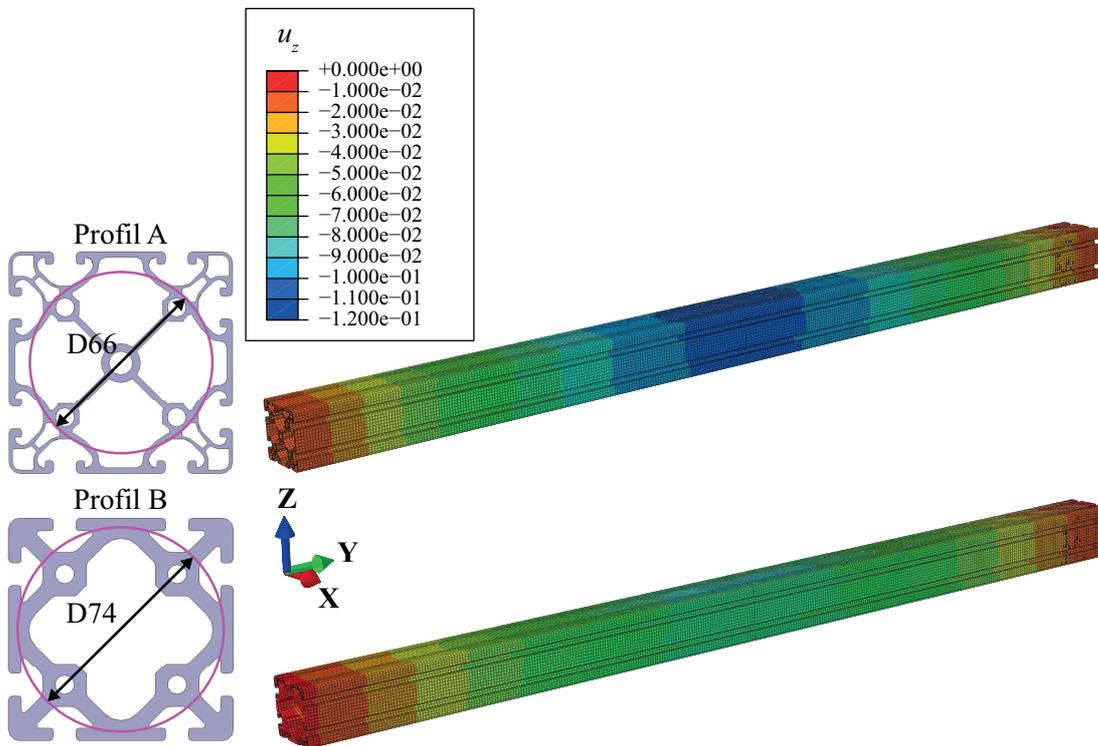


Abbildung 2.9.: 3-Punkt-Biegeberechnung der Kabinenprofile

Die Verbindung der Profile untereinander wurde starr ausgeführt, sodass keine Relativbewegungen zwischen den Profilen möglich ist. Dadurch werden die zwischen den Profilen vorhandenen Schraubverbindungen zwar nicht detailliert, jedoch im Rahmen eines Kraftniveaus, das die Vorspannkraft der Schrauben nicht übersteigt, in ausreichender Näherung abgebildet. Das Fachwerk der Kabine ist auf dem Boden fest verankert. Das Eigengewicht der Profile wurde mithilfe einer anhand des tatsächlichen Profils modifizierten Dichte des kreisrunden Vollprofils aufgebracht. Die Pulverfördereinheit ist mit vier Schrauben am Dach befestigt, wobei laut Spezifikation des Maschinenlieferanten mit einer Last von $F = 1.000 \text{ N}$ pro Schraube zu rechnen ist. Die Befestigung der Pulverfördereinheit am Kabinendach ist in Abb. 2.10 zu erkennen. Die Dachlasten sind durch Knotenlasten an den entsprechenden vier Knoten aufgebracht worden. Die Ergebnisse der Dachlastberechnung sind in Abb. 2.11 dargestellt. Die maximale Durchbiegung von $u \approx 4 \text{ mm}$ führt aufgrund der großen absoluten Abmaße der Kabine zu kleinen Dehnungen und einer Mises-Vergleichsspannung von $\sigma_{vM} < 10 \text{ MPa}$. Somit wird die Auslegung des Kabinenfachwerks als tragfähig bewertet.

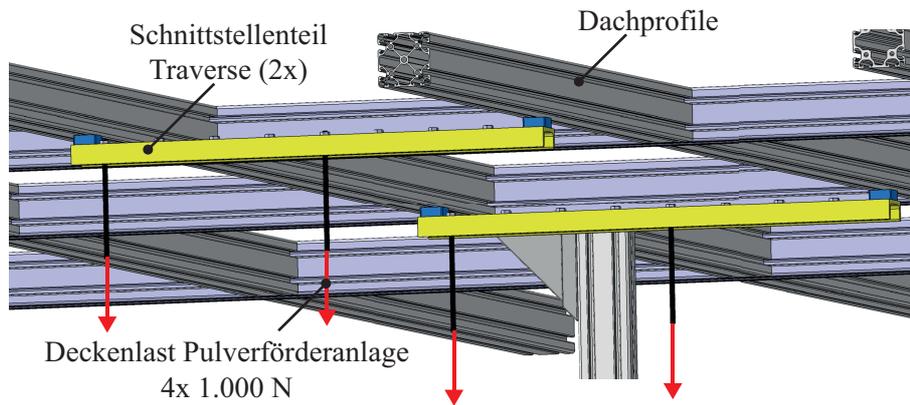


Abbildung 2.10.: Befestigung der Pulverfördereinheit am Kabinendach

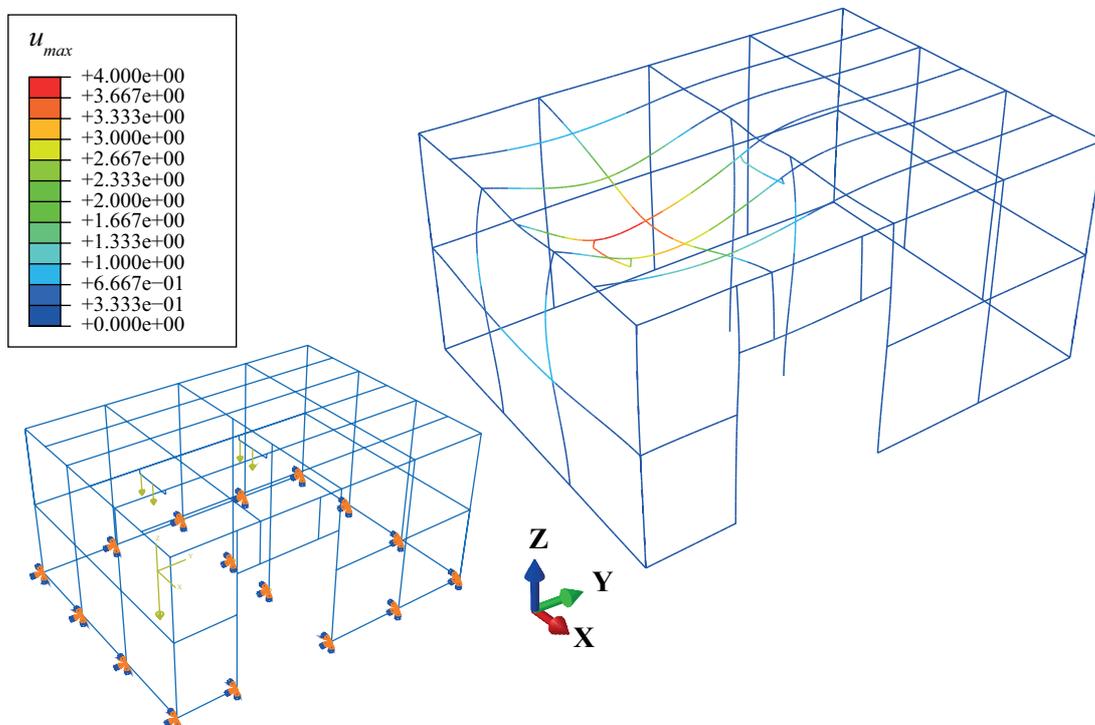


Abbildung 2.11.: Berechnungsergebnis für das Kabinenfachwerk

Die Klimatisierung der Kabine ist durch ein Split-Klimagerät ausgeführt worden, das zudem über eine Einheit zur Be- und Entfeuchtung der Luft verfügt. Datenlogging bietet die Möglichkeit, im Rahmen der Qualitätssicherung die Temperatur und Luftfeuchtigkeit im Fertigungsverlauf inklusive Pre- und Postprocessing jederzeit nachzuvollziehen. Abbildung 2.12 zeigt die innerhalb der Laborumgebung in Betrieb genommene Anlage.



Abbildung 2.12.: Ansicht der Laborumgebung nach Fertigstellung

3. Kontinuumsmechanische Grundlagen

Ein Gegner verschwindet, wenn ich ihn zu meinem Freund mache.

Abraham Lincoln (1809 – 1865)

Im folgenden Kapitel werden einige für die Arbeit wichtige kontinuumsmechanische Grundlagen erläutert. Die Ausführungen basieren im Wesentlichen auf der Habilitationsschrift von JOHLITZ [76]. Die Theorie der Kontinuumsmechanik ist in einigen Standardwerken umfangreich erläutert, wie z. B. ALTENBACH [5], BETTEN [12], GREVE [52], HAUPT [66], HOLZAPFEL [72] und KRAWIETZ [83].

Nach Erläuterung der kinematischen Größen und deren Symbolen im Rahmen der geometrisch nichtlinearen und linearen Theorie folgt die Aufzählung der benötigten Bilanzgleichungen.

3.1. Kinematik – Bewegung eines materiellen Körpers

Der Bereich der Kinematik beschreibt die Verschiebungen und Verzerrungen kontinuumsmechanischer Körper. Ein Körper besteht aus einer überabzählbaren Anzahl materieller Punkte, die mit physikalischen Eigenschaften ausgestattet sind und erfährt zu verschiedenen Zeitpunkten t unterschiedliche Beanspruchungen, z. B. Translationen, Drehungen und Verzerrungen. Angepasst an den jeweiligen Beanspruchungszustand, kann eine Konfiguration definiert werden. Dabei sind insbesondere die Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt $t = t_0$, die innerhalb dieser Arbeit mit der Ausgangskonfiguration übereinstimmt, sowie die Momentankonfiguration, die jeweils am Zeitpunkt t ($t > t_0$) gilt, von Bedeutung. Innerhalb eines kartesischen Koordinatensystems lässt sich für jeden materiellen Punkt, in der Abbildung beispielsweise mit X und Y bezeichnet, ein Ortsvektor definieren, der die Lage der materiellen Punkte in der jeweiligen Konfiguration beschreibt. Der Ortsvektor, der die Lage des materiellen Punktes X in der Referenzkonfiguration beschreibt, wird mit \mathbf{X} bezeichnet.

In der Momentankonfiguration entsprechend mit \mathbf{x} . Um den infinitesimal kleinen Abstand der beiden materiellen Punkte X und Y zu beschreiben, werden die Vektoren $d\mathbf{X}$ bzw. $d\mathbf{x}$ verwendet.

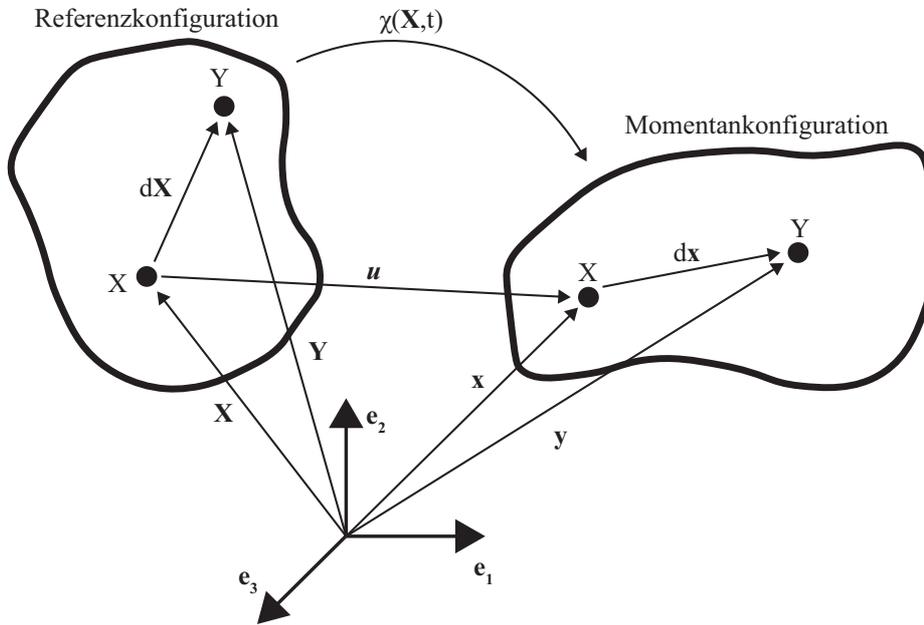


Abbildung 3.1.: Beschreibung verschiedener Konfigurationen innerhalb der kontinuumsmechanischen Theorie

Die Bewegungsfunktion, die eine eindeutige Verknüpfung zwischen der Referenzposition \mathbf{X} und der momentanen Position \mathbf{x} ermöglicht, ist definiert als

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (3.1)$$

Der Verbindungsvektor zwischen den Positionen zweier materieller Punkte \mathbf{X} und \mathbf{x} zwischen Referenz- und Momentankonfiguration wird Verschiebung \mathbf{u} genannt und ist definiert als

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (3.2)$$

Wird die Bewegungsfunktion nach dem Ortsvektor \mathbf{X} abgeleitet, ergibt sich der Deformationsgradient \mathbf{F} , der Linienelemente von der Referenz- auf die Momentankonfiguration abbildet.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u} \quad (3.3)$$

Um Volumenelemente zwischen den Konfigurationen abzubilden, ist die Jacobi-Determinante $J = \det \mathbf{F}$ erforderlich

$$dv = (\det \mathbf{F}) dV = J dV. \quad (3.4)$$

Für Flächenelemente gilt folgende Transportvorschrift

$$da = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}. \quad (3.5)$$

Zusätzlich werden Deformationsmaße eingeführt, die Quadrate von Linienelementen aufeinander abbilden.

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} &:= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X} \\ dS^2 &= d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} &:= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Durch diese Operation werden die Starrkörperrotationen aus den Deformationsmaßen eliminiert. Damit lassen sich der rechte Cauchy-Green-Verzerrungstensor \mathbf{C} als Maß der Referenzkonfiguration und der linke Cauchy-Green-Verzerrungstensor \mathbf{B} als Maß der Momentankonfiguration definieren. Darin bezeichnen \mathbf{U} und \mathbf{V} jeweils Strecktensoren, die von den für den Spannungszustand irrelevanten Rotationstensoren \mathbf{R} abzugrenzen sind.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (3.8)$$

Durch das Bilden der Differenz von Linienquadraten bzgl. der jeweiligen Konfiguration lassen sich der Green-Lagrangesche-Verzerrungstensor \mathbf{E} auf der Referenzkonfiguration bzw. der Euler-Almansische-Verzerrungstensor \mathbf{A} auf der Momentankonfiguration definieren.

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} \\ ds^2 - dS^2 &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \cdot d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\ \mathbf{A} &:= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Um die beiden Verzerrungstensoren ineinander zu überführen, sind die mathematischen Tensoroperationen des *push-forward* und *pull-back* erforderlich. Unter einem *push-forward* wird die Transformation einer materiellen in eine eulersche Größe verstanden, wobei ein *pull-back* genau den umgekehrten Weg beschreitet. Um den materiellen Verzerrungstensor \mathbf{E} zu bestimmen, wird der Verzerrungstensor der Momentankonfiguration \mathbf{A} auf die Referenzkonfiguration abgebildet.

renzkonfiguration zurückgezogen (pull-back).

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \quad (3.11)$$

Umgekehrt kann \mathbf{A} auf Basis von \mathbf{E} wie folgt berechnet werden (push-forward):

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (3.12)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden überwiegend kleine Deformationen behandelt. Dadurch fallen Referenz- und Momentankonfiguration zusammen. Der Green'sche Verzerrungstensor kann durch Linearisierung in den Tensor für technische Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ überführt werden. Ferner dürfen bei kleinen Deformationen alle auftretenden Anteile des Verzerrungstensors zu einer Gesamtverzerrung aufsummiert werden [64].

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{lin } \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad } \mathbf{u}^T) \quad (3.13)$$

Große Deformationen werden im Rahmen dieser Arbeit erst im Ausblick relevant, das Konzept soll der Vollständigkeit halber an dieser Stelle kurz eingeführt werden. Im Gegensatz zu der additiven Aufteilung der Verzerrungen ist bei der Beschreibung von (thermo-) viskoelastischen Materialien bei großen Verzerrungen eine multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten \mathbf{F} erforderlich. Es entstehen sogenannte fiktive Zwischenkonfigurationen, bei denen wiederum eine additive Aufspaltung der relevanten Verzerrungsmaße stattfindet. Für den Fall einer elastisch-plastischen Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p$ findet sich ein multiplikativer Split bei KRÖNER und LEE [84, 91, 90]. Andere Beispiele sind eine isochor-volumetrische Zerlegung [43] oder eine thermisch-mechanische Zerlegung [104]. Für die Beschreibung viskoelastischer Materialien ist schließlich die elastisch-inelastische Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_i$ relevant, die auf LUBLINER [105] zurückgeht.

Im Rahmen der Bilanzgleichungen und um zeitabhängiges Materialverhalten zu beschreiben, werden Deformationsgeschwindigkeiten benötigt. Auch hier wird zwischen dem materiellen Geschwindigkeitsgradienten $\dot{\mathbf{F}}$ und räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} unterschieden.

$$\dot{\mathbf{F}} = \text{Grad } \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.15)$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Größen lässt sich mithilfe der Kettenregel herstellen

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} . \quad (3.16)$$

Durch Einsatz des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} lassen sich zeitliche Änderungen von Linien-, Flächen- und Volumenelementen aufeinander abbilden.

$$(\mathbf{dx})^\cdot = \mathbf{L} \cdot \mathbf{dx} \quad (3.17)$$

$$(\mathbf{da})^\cdot = ((\text{tr } \mathbf{L}) \mathbf{I} - \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{da} \quad (3.18)$$

$$(\mathbf{dv})^\cdot = (\text{tr } \mathbf{L}) \mathbf{dv} \quad (3.19)$$

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} lässt sich weiter in den Deformationsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} , der symmetrisch ist, und den schiefsymmetrischen Wirbeltensor \mathbf{W} zerlegen

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mathbf{D}^T \quad (3.20)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = -\mathbf{W}^T. \quad (3.21)$$

Für die Energiebilanz im nun folgenden Abschnitt wird zudem die materielle Verzerrungsrate $\dot{\mathbf{E}}$ benötigt. Zwischen \mathbf{D} und $\dot{\mathbf{E}}$ gelten die Transportvorschriften des *push-forward* und *pull-back* aus Gln. (3.11) und (3.12)

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.22)$$

3.2. Bilanzgleichungen – Einhalten von thermodynamischen Gesetzen

Neben der Einführung der kinematischen Größen sind Bilanzgleichungen, die physikalische und Naturgesetze berücksichtigen, eine wichtige Säule im Rahmen kontinuumsmechanischer Betrachtungen. Relevanz besitzen neben den klassischen Bilanzen der Mechanik (Impuls, Masse und Drall) auch die thermodynamischen Bilanzen für Energie und Entropie. Da alle Bilanzen die gleiche Form besitzen, wurde das Konzept der Masterbilanz entwickelt [33, 38]. Grundsätzlich lässt sich die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe ψ über den Fluss $\Phi \cdot \mathbf{n} = \varphi$, über den Körperperrand $\partial\mathcal{B}$, einem Zufuhrterm σ und einen Produktionsterm $\hat{\psi}$ ausdrücken [76, 82, 150].

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{dv} = \int_{\partial\mathcal{B}} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{da} + \int_{\mathcal{B}} \sigma(\mathbf{x}, t) \mathbf{dv} + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \mathbf{dv} \quad (3.23)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Felder stetig differenzierbar sind und unter der Berücksichtigung von

$$(\mathrm{d}v)^{\cdot} = \mathrm{tr}(\mathrm{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \mathrm{d}v = \mathrm{div} \mathbf{v} \mathrm{d}v, \quad (3.24)$$

dem Reynoldsschen Transporttheorem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{B}} \psi(\mathbf{x}, t) \mathrm{d}v = \int_{\mathcal{B}} \left(\dot{\psi}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \mathrm{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \mathrm{d}v \quad (3.25)$$

und dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{\mathcal{B}} \mathrm{div} \mathbf{\Phi} \mathrm{d}v = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}a \quad (3.26)$$

entsteht die lokale Formulierung für den materiellen Punkt

$$\dot{\psi} + \psi \mathrm{div} \mathbf{v} = \mathrm{div} \mathbf{\Phi} + \sigma + \hat{\psi}. \quad (3.27)$$

Die Massenbilanz gibt die Ausgangsdichte ρ_0 als zeitlich konstante Größe vor.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{B}} \rho \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \mathrm{d}V = 0 \quad (3.28)$$

Wird in der Masterbilanz $\psi = \rho$ gesetzt, wobei es keinerlei Zufluss- und Produktionsterme gibt, entsteht die lokale Form der Massenbilanz auf der Momentankonfiguration

$$\dot{\rho} + \rho \mathrm{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.29)$$

Aus Gl. (3.4) zum Transport von Volumenelementen lässt sich der Zusammenhang zwischen den Dichten der Momentan- und Referenzkonfiguration herstellen.

$$\rho = (\det \mathbf{F})^{-1} \rho_0 \quad (3.30)$$

Um zur Impulsbilanz zu gelangen, wird in die Masterbilanz für ψ der Impuls des materiellen Körpers

$$\mathbf{I}(\mathcal{B}, t) = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{x}} \mathrm{d}v \quad (3.31)$$

eingesetzt. Hinzu kommen als Zuflusssterm die auf die Oberfläche des Körper einwirkenden Nahwirkungskräfte $\varphi = \mathbf{t}$ sowie die entsprechenden Fernwirkungskräfte (z. B. die Schwerkraft) als Produktionsterm $\sigma = \rho \mathbf{b}$. Unter Zuhilfenahme des Cauchy-Theorems

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}, \quad (3.32)$$

das den Cauchy-Spannungstensor \mathbf{T} unter Berücksichtigung des Normalenvektors \mathbf{n} auf den Spannungsvektor \mathbf{t} projiziert, sowie unter Berücksichtigung von Gl. (3.26) ergibt sich schließlich die lokale Form der Impulsbilanz auf der Momentankonfiguration

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (3.33)$$

Für die Referenzkonfiguration gilt

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}. \quad (3.34)$$

Der Cauchy-Spannungstensor \mathbf{T} bezieht sich auf die aktuelle, deformierte Fläche und lässt sich somit als aktuelle, wahre Spannung definieren. Mit \mathbf{P} wird wiederum die 1. Piola-Kirchhoff-Spannung bezeichnet, die auch als Ingenieurspannung bekannt ist und sich auf die Referenzfläche bezieht. Für die Umrechnung kann folglich die Transportvorschrift für Flächenelemente (Gl. (3.5)) herangezogen werden.

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.35)$$

An dieser Stelle sei erneut angemerkt, dass im Bereich kleiner Deformationen kein Unterschied zwischen den Spannungstensoren gemacht werden muss. Als letzte Bilanz der klassischen Mechanik beschreibt die Drehimpulsbilanz die Änderung des Dralls infolge der auf der Körperoberfläche wirkenden Spannungen und Fernwirkungskräfte. Das Auswerten der Bilanz führt zum Nachweis der Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (3.36)$$

Als erste der thermodynamischen Bilanzgleichungen wird auf die Energiebilanz eingegangen. Zentrale Aussage ist, dass sich die Energie eines Körpers infolge der an ihm verrichteten mechanischen und thermischen Arbeit ändert. Die Energiebilanz setzt sich in eulerscher Darstellung aus der Spannungsleistung $\mathbf{T} : \mathbf{D}$ als Produktionsterm, der Divergenz des Wärmestroms $\operatorname{div} \mathbf{q}$, als Fluss über den Rand, sowie der Wärmezufuhr ρr zusammen.

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r \quad (3.37)$$

Das Konzept der dualen Variablen von HAUPT & TSAKMAKIS [67] besagt, dass die Spannungsleistung invariant gegenüber der Konfiguration ist, also gilt

$$\frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \mathbf{D}. \quad (3.38)$$

Darin beschreibt $\bar{\mathbf{T}}$ den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, der im Gegensatz zu \mathbf{P} immer symmetrisch ist. Zwischen \mathbf{T} und $\bar{\mathbf{T}}$ gilt die Transportvorschrift

$$\bar{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.39)$$

Die Energiebilanz mit Bezug auf die Referenzkonfiguration lässt sich somit formulieren als

$$\rho_0 \dot{e} = \bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}} - \text{Div} \mathbf{q}_0 + \rho_0 r. \quad (3.40)$$

Im Zuge der Linearisierung für kleine Deformationen fallen die Konfigurationen und die Spannungstensoren zusammen. Es gilt demnach

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{P} = \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.41)$$

Mit der bereits angegebenen konstanten Dichte der Referenzkonfiguration $\rho_0 = \text{konst.}$ und der Linearisierung des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ aus Gl. (3.13) geht die spezifische Spannungsleistung in

$$\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.42)$$

über und die Energiebilanz lässt sich folgendermaßen formulieren:

$$\rho_0 \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \text{Div} \mathbf{q}_0 + \rho_0 r. \quad (3.43)$$

Als letzte thermodynamische Gleichung wird auf Basis des zweiten Hauptsatzes, nachdem die Entropieproduktion nicht negativ sein darf, die Entropie bilanziert. Für den Entropiefluss wird

$$\varphi_s = -\frac{\mathbf{q}}{\theta} \quad (3.44)$$

und für die Entropiezufuhr

$$\sigma_s = \frac{\rho r}{\theta}, \quad (3.45)$$

nach der in der Kontinuumsmechanik üblichen Auswertung nach COLEMAN & NOLL [26],

gewählt. Mit der absoluten Temperatur θ [K] lautet die Entropiegleichung auf der Referenzkonfiguration:

$$\rho_0 \dot{s} + \text{Div} \left(\frac{\mathbf{q}_0}{\theta} \right) - \frac{\rho_0 r}{\theta} = \hat{s} \geq 0. \quad (3.46)$$

Alternativ lässt sich die Entropiegleichung mit Bezug zur Momentankonfiguration formulieren:

$$\rho \dot{s} + \text{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{\rho r}{\theta} = \hat{s} \geq 0. \quad (3.47)$$

3.3. Konsistentes Herleiten der Konstitutivgleichungen

Die in den Abschnitten 3.1 und 3.2 eingeführten kontinuumsmechanischen Beziehungen und Bilanzgleichungen, die Verzerrungsprozesse beschreiben und physikalische Randbedingungen vorgeben können, sind unabhängig vom Material. Zur Lösung mechanischer Probleme ist der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung von elementarer Bedeutung. Bevor konkrete materialtheoretische Ansätze, die für Polymere relevant sind, präsentiert werden, wird das allgemeine Vorgehen zur Herleitung von Konstitutivgesetzen anhand der bereits eingeführten Entropiebilanz (Gl. (3.46)) vorgestellt. Dazu wird die Helmholtz'sche freie Energiedichte ψ in Form der Legendre-Transformation eingeführt:

$$\psi = e - \theta s \quad (3.48)$$

Das Auflösen nach der Entropie, der zeitlichen Ableitung und dem Einsetzen in die Entropiebilanz, liefert die Clausius-Duhem-Ungleichung

$$-\rho_0 \dot{\psi} - \rho_0 s \dot{\theta} - \frac{\mathbf{q}_0}{\theta} \cdot \text{Grad} \theta + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0. \quad (3.49)$$

Für isotherme Prozesse vereinfacht sich die Clausius-Duhem-Ungleichung zur Clausius-Planck-Ungleichung

$$-\rho_0 \dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0. \quad (3.50)$$

Nun können Prozessparameter gewählt werden, für die die freie Energiefunktion auswertbar ist. Im einfachsten Fall der Elastizität ist die (Ingenieur-)Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ eine beliebige Funktion der aktuellen Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (3.51)$$

Für das verallgemeinerte Hookesche Stoffgesetz lautet die Verzerrungsenergiefunktion

$$W = \rho_0 \psi = \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \lambda (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I})^2. \quad (3.52)$$

Zur Auswertung von Gl. (3.50) ist die zeitliche Ableitung erforderlich. Da $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$ gilt, ist die Kettenregel anzuwenden und es ergibt sich

$$\rho_0 \dot{\psi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = (2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.53)$$

Einsetzen in die Gl. (3.50) liefert die Ungleichung

$$(\boldsymbol{\sigma} - (2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I})) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0. \quad (3.54)$$

Die Auswertung der Ungleichung unter Verwendung der Argumentation von COLEMAN & NOLL [26] führt auf das verallgemeinerte, isotrope Hookesche Gesetz in Lamé-Konstanten

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}, \quad (3.55)$$

das mit den Materialparametern Kompressionsmodul K und Schubmodul G als

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}^D + K \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad (3.56)$$

geschrieben werden kann. Darin ist $\boldsymbol{\varepsilon}^D$ der Deviator der Ingenieurdehnung, der sich wie folgt berechnet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^D = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad (3.57)$$

Der Subtrahend in Gl. (3.57) wird dabei als Kugeltensor der Ingenieurverzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ bezeichnet. Mit diesem Zusammenhang kann das Hookesche Gesetz in deviatorisch-volumetrischer Darstellung geschrieben werden

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}^D + 3K \boldsymbol{\varepsilon}^V. \quad (3.58)$$

Mit den kinematischen Beziehungen, den Bilanz- und Konstitutivgleichungen wurden die drei wesentlichen Bestandteile kontinuumsmechanischer Modellierung dargestellt. Mit diesen Werkzeugen lässt sich das Verhalten von materiellen Körpern bei äußeren Einwirkungen (z. B. Lasten oder Temperaturänderungen) beschreiben. Die bereits vorgestellte Materialtheorie der Elastizität wird im folgenden Kapitel durch weitere materialtheoretische Ansätze ergänzt, die für das experimentell beobachtete Materialverhalten hilfreich sein können.

4. Materialtheorie

All models are wrong, but some are useful.

George E. P. Box (1919 — 2013)

Im letzten Abschnitt des vorherigen Kapitels wurde die Herleitung von Konstitutivgleichungen am Beispiel der Elastizität vorgestellt. Darüber hinaus gibt es abhängig vom beobachteten Materialverhalten eine Vielzahl möglicher Ansätze. Da sich Polymere grundsätzlich viskoelastisch verhalten, wird die lineare Viskoelastizitätstheorie als zentrale Materialklasse für diese Arbeit vorgestellt. Ferner wird das Konzept der endochronen Plastizität vorgestellt, um das duktile Werkstoffverhalten ohne klar abgegrenzte Fließgrenze zu beschreiben. Um das Material zu symbolisieren, werden rheologische Modelle eingesetzt, die aus masselosen Federn, Dämpfern und Reibelementen aufgebaut sind. Diese Modelle helfen bei der Formulierung der Konstitutivgesetze und liefern einen anschaulichen Zugang [66, 83].

4.1. Das Maxwell-Element als rheologisches Modell

Das Maxwell-Element besteht aus einer Reihenschaltung von Hookescher Feder und Newtonschem Fluid [110]. Im Hinblick auf die später gezeigten Torsionsversuche wird das Maxwell-Element rein gestaltsändernd eingeführt. Die nach ROBERT HOOKE (1635-1703) benannte Feder unterstellt einen linearen Zusammenhang zwischen Deformation γ und resultierender Spannung τ mit der Steifigkeit G als Proportionalitätsfaktor. Beim Newtonschen Fluid, benannt nach ISAAC NEWTON (1643-1727), sind die Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ und die Spannung τ über die dynamische Viskosität $\eta > 0$ miteinander verbunden. Die linearen Zusammenhänge lassen erkennen, dass das Modell in seiner einfachsten Form für geometrische lineare Zusammenhänge verwendbar ist. Eine komplexitätssteigernde Erweiterung auf strukturviskose (scherverdünnende) oder dilatante (scherverdickende) Fluide bzw. nichtlineare Federn ist jedoch möglich. Die gesamte auf das Element aufgebrauchte Scherung γ zerfällt dabei additiv in einen elastischen Anteil γ_{el} der Feder und einen inelastischen γ_{in} Anteil des Dämpfers.

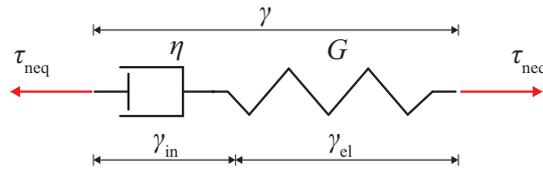


Abbildung 4.1.: Maxwell-Element

Die Spannung in Feder und Dämpfer ist identisch, sodass folgender Zusammenhang gilt:

$$\tau = G\gamma_{el} = \dot{\gamma}_{in}\eta \quad (4.1)$$

Bei Berücksichtigung des additiven Zusammenhangs der Scherungsanteile sowie Umstellen des zweiten Teils der Gl. (4.1) nach der inelastischen Dehnung ergibt sich nach zeitlicher Differentiation die Gleichung für die Spannungsrate

$$\dot{\tau} = G\dot{\gamma} - \frac{G}{\eta}\tau, \quad (4.2)$$

die nach Umstellen letztlich zur Differentialgleichung für die Scherspannung führt

$$\dot{\tau} + \frac{G}{\eta}\tau = G\dot{\gamma}. \quad (4.3)$$

Multiplikation mit $e^{\frac{G}{\eta}t}$ sowie Anwenden der Produktregel führt zu

$$\frac{d}{dt}\left(\tau e^{\frac{G}{\eta}t}\right) = G\dot{\gamma}e^{\frac{G}{\eta}t}. \quad (4.4)$$

Integration liefert schließlich die zeitabhängige Spannungsfunktion für das Maxwell-Element

$$\tau(t)e^{\frac{G}{\eta}t} - \tau(0) = \int_0^t G\dot{\gamma}(u)e^{\frac{G}{\eta}u} du. \quad (4.5)$$

Mit der Randbedingung $\tau(0) = 0$ ergibt sich

$$\tau(t) = \int_0^t G\dot{\gamma}(u)e^{-\frac{G}{\eta}(t-u)} du. \quad (4.6)$$

Neben dem Maxwell-Element gibt es andere Modellierungsansätze, die sich Reihen- und Parallelschaltungen der Grundelemente bedienen und mit denen sich unterschiedliches Materialverhalten abbilden lässt. Dazu sei auf die einschlägige Literatur verwiesen [5, 83]. Das Maxwell-Element wird im Rahmen dieser Arbeit zur Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens verwendet, das im Folgenden näher erläutert werden soll.

4.2. Modellierung der Viskoelastizität

Mithilfe der Theorie der Viskoelastizität können alle Materialien beschrieben werden, die sich teilweise elastisch, wie Festkörper, und teilweise viskos, wie Flüssigkeiten, verhalten und die in einer Reihe von Standardwerken umfassend beschrieben sind [42, 159]. Die elastisch-inelastische Zerlegung sowie die ersten Arbeiten zum Thema wurden bereits im Rahmen der Zerlegungsmöglichkeiten für den Deformationsgradienten \mathbf{F} erwähnt (Kapitel 3.1). Zudem sind als erste Werke im Bereich der Viskoelastizität die Arbeiten von COLEMAN & GURTIN [25] sowie COLEMAN & NOLL [26] zu erwähnen. Die Theorie der Viskoelastizität wurde bisher anhand der rheologischen Modell motiviert. Dazu ist zu sagen, dass beispielsweise in der Definition von Viskoelastizität von HAUPT [64] keine rheologischen Modelle vorkommen. Der Zugang wird hier ausschließlich über innere Zustandsvariablen geschaffen, die das schwindende Gedächtnis des Materials abbilden. Es gibt eine ganze Reihe von Publikationen, die sich innerer Zustandsvariablen zur Materialbeschreibung bedienen. An dieser Stelle werden beispielhaft nur einige Quellen erwähnt, etwa JOHLITZ [75], LION [97, 98], LOOS [103], SEDLAN [138] sowie SCHEFFER [150]. Bei der Anwendung rheologischer Modelle ist im Fall des Maxwell-Elements die inelastische Dehnung der Newtonschen Flüssigkeit eine solche innere Zustandsvariable. Einen Überblick über die Nutzung interner Variablen zur Beschreibung verschiedener naturwissenschaftlich-technischer Phänomene liefern HORSTEMEYER & BAMMANN [73]. Dort sind auch die beiden für diese Arbeit relevanten Felder der Viskoelastizität und Plastizität abgebildet. Charakteristische Eigenschaft viskoelastischer Materialien ist die Geschwindigkeits- und Geschichtsabhängigkeit. Um viskoelastisches Materialverhalten abzubilden, erweitert man im einfachsten Fall das bereits erläuterte Maxwell-Element um eine parallelgeschaltete Hookesche Feder (Abb. 4.2 a)). Um die Komplexität realen Materialverhaltens abbilden zu können, ist meist das generalisierte Maxwell-Modell erforderlich (Abb. 4.2 b))[151].

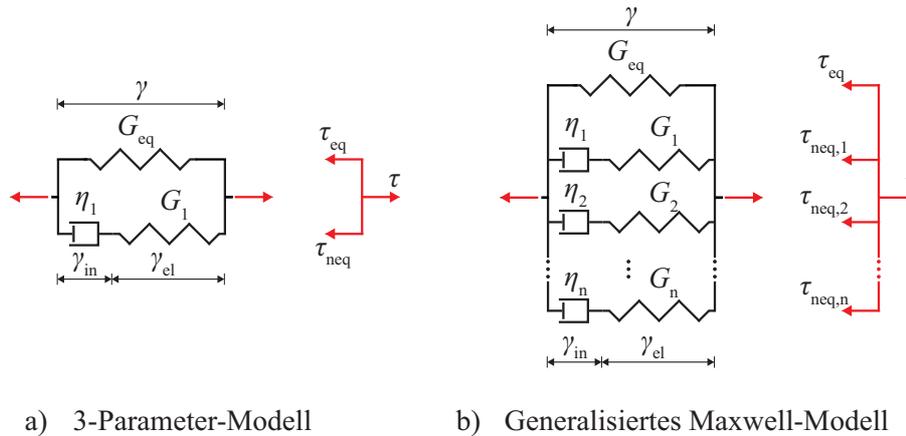


Abbildung 4.2.: Rheologische Modelle der Viskoelastizität

Die parallel geschaltete einzelne Hookesche Feder bildet die Gleichgewichtsspannung ab, also den Teil des Materialverhaltens, der nicht von der Scherrate abhängig ist. Wird das Modell mit einer derart geringen Scherrate $\dot{\gamma}$ angeregt, dass die Dämpfer der Bewegung folgen können, verschwindet die Spannung in den Maxwell-Elementen und die Spannungsantwort besteht ausschließlich aus der Gleichgewichtsspannung

$$\tau = \tau_{\text{eq}} = G_{\text{eq}}\dot{\gamma}. \quad (4.7)$$

Bei einer unendlich schnellen Anregung $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ „sperren“ die Dämpfer und es folgt $\gamma_{\text{in},n} = 0$. Somit entsteht die Spannung rein aus der Parallelschaltung der Federn und die Gesamtspannung wird

$$\tau = \tau_{\text{eq}} + \sum_{i=1}^n \tau_{\text{neq},i} = G_{\text{eq}}\dot{\gamma} + \sum_{i=1}^n G_i \dot{\gamma}_{\text{el},i}. \quad (4.8)$$

Für alle anderen Scherraten antworten die Maxwell-Elemente mit viskositätsabhängigen, inelastischen Dehnungen. Durch mehrere Maxwell-Elemente und eine entsprechende Staffelung der Viskositäten können somit Nichtlinearitäten abgebildet werden.

4.3. Modellierung der Plastizität

Nach der Definition von HAUPT zeigen plastische Materialien eine Hysterese bei zyklischer Belastung und weisen keine Geschwindigkeitsabhängigkeit auf [64]. Geschichtsabhängig sind die Materialien insofern, als dass sie über ein perfektes Gedächtnis verfügen und die aktuelle Spannung somit von der gesamten Verzerrungsgeschichte abhängt. Die wissenschaftliche Geschichte der Plastizität beginnt wohlmöglich bei TRESKA, der auf Grundlage

von Umformversuchen ein Versagenkriterium auf Basis der maximalen Schubspannung entwickelte [157]. Als Basis für die modernen theoretischen Ansätze der Plastizität seien noch die Arbeiten von SAINT-VENANT und LEVY genannt [93, 130]. Plastisches Materialverhalten wird, wie auch bei der Viskoelastizität, durch innere Variablen beschrieben, wobei nicht zwingend auch ein rheologisches Modell existieren muss. Eines der bekanntesten rheologischen Modelle ist das Prandtl-Element [83, 122]. Dieses besteht aus einer Hooke'schen Feder und einem St.-Venant-Element (Abb. 4.3). Unterhalb einer bestimmten Spannung, die als Fließspannung τ_F bezeichnet wird, verhält sich das Modell rein linear-elastisch. Wird im monotonen Scherversuch die Fließspannung überschritten, wandelt sich das Modell zu einer Flüssigkeit mit unendlich kleiner Viskosität. Die Scherung γ wächst, wobei die Spannung das Niveau der Fließspannung τ_F beibehält. Durch die Fallunterscheidung kann die aus dem Prandtl-Element abgeleitete Differentialgleichung – ohne sie hier explizit aufzuführen – nicht mehr geschlossen integriert werden. Das Verhalten eines einzelnen Prandtl-Elements wird als ideal-plastisch bezeichnet. Verfestigungseffekte lassen sich durch Parallelschaltung mehrerer Prandtl-Elemente abbilden.

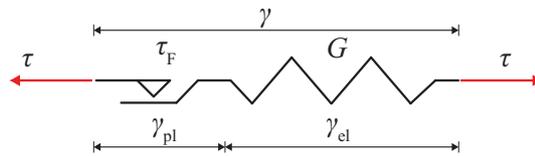


Abbildung 4.3.: Prandtl-Element

Für Materialien, bei denen sich im Übergang zum plastischen Verhalten keine eindeutige Fließgrenze zeigt, existiert unter anderem der Ansatz der endochronen Plastizität, der auf Valanis zurückgeht [160]. Für die rheologische Modellvorstellung werden die St.-Venant-Elemente durch andersartige und ebenfalls geschwindigkeitsunabhängige Elemente ersetzt, für die es jedoch kein idealisiertes Standardmodell gibt und die nur im Zusammenhang mit einer Hooke'schen Feder Verwendung finden. In Anlehnung an [83] wird eine Darstellung nach Abb. 4.4 verwendet.

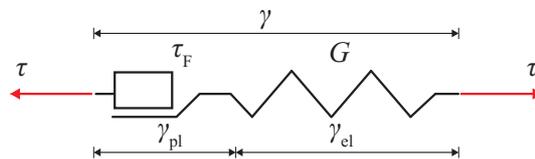


Abbildung 4.4.: Endochrones Element

Für die Spannung innerhalb des Elements gilt der Zusammenhang

$$\tau = G\gamma_{el} = \frac{|\dot{\gamma}|}{\tau_F} \dot{\gamma}_{pl} \cdot \quad (4.9)$$

Darin beschreibt der Materialparameter τ_F die maximale Spannungsantwort des Modells. Analog zu Gl. (4.2) kann auch hier die Differentialgleichung für die Spannungsrate ermittelt werden

$$\dot{\tau} + |\dot{\gamma}| \frac{G}{\tau_F} \tau = G\dot{\gamma}. \quad (4.10)$$

Für den monotonen Scherversuch mit $\dot{\gamma} = |\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}_0 > 0$ und $\gamma(t) = \dot{\gamma}_0 t$ wird Gl. (4.10) zu

$$\dot{\tau} + \dot{\gamma}_0 \frac{G}{\tau_F} \tau = G\dot{\gamma}_0. \quad (4.11)$$

Über die Zwischenschritte

$$\frac{d}{dt} \left(\tau(t) e^{\frac{G}{\tau_F} \dot{\gamma}_0 t} \right) = G\dot{\gamma}_0 e^{\frac{G}{\tau_F} \dot{\gamma}_0 t}, \quad (4.12)$$

$$\tau(t) e^{\frac{G}{\tau_F} \dot{\gamma}_0 t} = G\dot{\gamma}_0 \int_0^t e^{\frac{G}{\tau_F} \dot{\gamma}_0 u} du \quad (4.13)$$

und

$$\tau(t) e^{\frac{G}{\tau_F} \dot{\gamma}_0 t} = G\dot{\gamma}_0 \frac{\tau_F}{G\dot{\gamma}_0} \left(e^{\frac{G}{\tau_F} \dot{\gamma}_0 t} - 1 \right) \quad (4.14)$$

kann schließlich die zeitabhängige Spannungsfunktion ermittelt werden

$$\tau(t) = \tau_F \left(1 - e^{-\frac{G}{\tau_F} \dot{\gamma}_0 t} \right), \quad (4.15)$$

die sich auch als Funktion von der Scherung ausdrücken lässt

$$\tau(\gamma) = \tau_F \left(1 - e^{-\frac{G}{\tau_F} \gamma} \right). \quad (4.16)$$

Dabei handelt es sich um eine ratenunabhängige, nichtlineare Funktion der Dehnung, die die Eigenschaften

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tau(\gamma) = \tau_F \quad (4.17)$$

und

$$\left. \frac{d\tau}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} = G \quad (4.18)$$

besitzt. Zur Veranschaulichung ist die Funktion mit frei gewählten Parametern in Abb. 4.5 ausgewertet. Für die Scherdehnungen sind Sinusfunktionen mit Amplituden von $\gamma = 0.1$ und $\gamma = 0.08$ vorgegeben. Nach Durchlauf der ersten Periode bleibt die Spannungsantwort für jede weitere Periode unverändert. Die Frequenz der Sinusfunktion ist kein relevanter Faktor, da die Spannungen von der Dehnungsamplitude, jedoch nicht von der Dehnrates abhängen. Die Trajektorien im Spannungs-Scherungs-Diagramm werden zwar schneller durchlaufen, behalten jedoch ihre Form bei. Dehnratenunabhängigkeit bedeutet auch, dass das Modell keinerlei Relaxation zeigt.

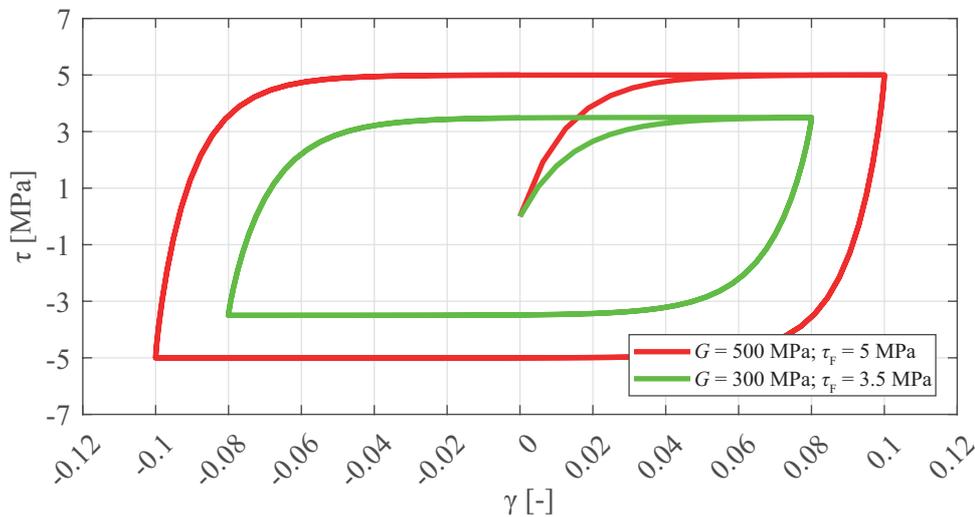


Abbildung 4.5.: Modellantwort des endochronen Plastizitätselements

Anhand der Grafik lässt sich ebenfalls erkennen, dass Plastizität im Rahmen dieser Theorie nicht über bleibende Deformationen definiert ist. Wird in Abb. 4.5 eine Scherung $-0.1 < \gamma < 0.1$ ausgewählt, so lassen sich mehrere Spannungen τ zuordnen. Welche Spannung nun für den aktuellen Fall die „richtige“ ist, hängt davon ab, auf welchem Weg die Spannung erreicht worden ist. Somit kann gesagt werden, dass die Spannung von der Verzerrungsgeschichte abhängt. Folglich lässt sich das Modell auch mithilfe der akkumulierten Verzerrung anstelle der Zeit formulieren [121].

Für die akkumulierte Dehnung $s(t)$ gilt

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\gamma}(u)| du \quad (4.19)$$

und

$$\dot{s}(t) = |\dot{\gamma}(t)|. \quad (4.20)$$

Mit der akkumulierten Dehnung als unabhängige Variable und nach Anwendung der Kettenregel lässt sich auf Basis von Gl. (4.10) die Spannung formulieren

$$\dot{\tau}(s)|\dot{\gamma}| + |\dot{\gamma}|\frac{G}{\tau_F}\tau(s) = G\gamma'(s)|\dot{\gamma}|. \quad (4.21)$$

Über den Zwischenschritt

$$\dot{\tau}(s) + \frac{G}{\tau_F}\tau(s) = G\gamma'(s) \quad (4.22)$$

kann analog zu den Rechenschritten bei den Gleichungen (4.4) bis (4.6) die Spannung in Abhängigkeit der akkumulierten Dehnung in Integralform angegeben werden

$$\tau(s) = \int_0^s G e^{-\frac{G}{\tau_F}(s-\bar{s})} \gamma'(\bar{s}) d\bar{s}. \quad (4.23)$$

Beim Vergleich von Gleichung (4.23) und (4.6) wird die Ähnlichkeit zwischen dem endochronen Plastizitätselement und dem viskoelastischen Maxwell-Element deutlich. Wird die Zeit als unabhängige Variable durch die ebenfalls monoton wachsende, akkumulierte Dehnung ersetzt, kann das Modell der Viskoelastizität zu einem Modell der endochronen Plastizität umgewandelt werden (Korrespondenzprinzip nach HAUPT [66]). Der Begriff ‚endochron‘ (endo, griechisch: *innerhalb, von (innen)*; chronos, griechisch: *Zeit*) geht auf die monoton wachsende Dehnung als dem Modell inhärente Zeitskala zurück.

Aus beiden materialtheoretischen Ansätzen soll nun ein viskoplastisches Materialmodell entwickelt werden, das im Anschluss an die im folgenden Kapitel aufgeführten mechanischen Versuchsergebnisse ausführlich dargestellt wird.

5. Experimente und Materialmodell

Wenn man es nur versucht, so geht's, das heißt mitunter, doch nichts stets.

Wilhelm Busch (1832 – 1908)

Nach der Bereitstellung der theoretischen Grundlagen folgt nun der experimentelle Teil der Arbeit. Alle hier beschriebenen Tests sind auf einer Universalprüfmaschine *Z020* der Fa. Zwick/Roell durchgeführt worden. Die entsprechend verwendete Kraft- und Momentsensorik wurde situativ angepasst. Für die mechanischen Experimente sind die Kraftsensoren mit einem Messbereich von 2.5 kN und 20 kN verwendet worden. Weiterhin wird der Momentsensor der Fa. Giessmann/Theiss mit einem Messbereich bis 100 Nm verwendet. Moment- und Kraftsensor wurden grundsätzlich kombiniert eingesetzt. Dadurch entsteht der Vorteil, dass die jeweils nicht zu messende Größe als Störgröße betrachtet und von der Maschine auf Null geregelt werden kann. Insbesondere bei den Torsionsversuchen ist eine parallele Nullkraftregelung als Vorteil hervorzuheben, den es bei einfachen Scherversuchen nicht gibt. Hierbei werden die Normalkräfte, die die Scherkräfte überlagern, ignoriert, da sie nicht messbar und damit auch nicht regelbar sind. Außerdem steht eine Klimakammer zur Verfügung, die einen Temperaturbereich von -50°C bis $+150^{\circ}\text{C}$ abdecken kann.

Das Kapitel beginnt mit einer Vorstellung der berücksichtigten Probengeometrien und der Motivation für deren Gestaltung. Nach ausführlicher Beschreibung der Kinematik der verschiedenen Probengeometrien folgen letztlich die Ergebnisse der mechanischen Versuche. Abschließend wird das Materialmodell, mit dessen Hilfe das mechanische Materialverhalten beschrieben werden soll, vorgestellt.

Zu selektiv lasergesintertem Polyamid 12 gibt es aufgrund der relativen Neuheit des Verfahrens sowie des aktuell großen Interesses an additiver Fertigung viele wissenschaftliche Publikationen. DIZON ET AL. liefern eine Übersicht zu experimentellen Untersuchungen diverser additiver Fertigungsverfahren für Polymere [35]. Mechanische Experimente an SLS-Teilen, die mit den hier ermittelten Daten gut korrespondieren, werden von LAMMENS ET AL. vorgestellt [89]. Eine Auswirkung der Variation des Titandioxid-Anteils sowie der thermischen Pulveralterung auf die mechanischen Eigenschaften wurde von DU MAIRE untersucht [108, 109]. Untersuchungen bzgl. des Versagensverhaltens bei zyklischer Belastung finden sich in [162] und [161]. Neuere Untersuchungen beschäftigen sich auch mit verstärkten PA12-Typen, die mit dem SLS-Verfahren hergestellt werden. Ein Ver-

gleich zwischen glaskugelverstärktem PA12, das lasergesintert und spritzgegossen ist, befindet sich in [31], wobei hier explizit die gesteigerte Steifigkeit und die Abnahme der Wechselfestigkeit der glaskugelgefüllten Teile herausgearbeitet wird. In [106] findet sich ein Vergleich zwischen den Verfahren SLS und MJP (Tabelle 2.1) für glaskugelgefülltes PA12. Hier wird die deutlich höhere Anisotropie, die sich beim MJP-Verfahren ergibt, betont. Der Zusammenhang zwischen den mechanischen Eigenschaften und beschleunigter Bewitterung von SLS-PA12 wurde in [124] untersucht. Dabei wurde eine deutliche Abnahme sowohl der Zugfestigkeit als auch der Bruchdehnung für PA12 festgestellt. Ähnliche Ergebnisse sind in [139] zu finden, wobei hier auch äußerliche Veränderungen der Proben wie Vergilben beleuchtet wurden. Dabei konnte herausgearbeitet werden, dass Polyamid eine schlechte Lichtbeständigkeit aufweist und UV-Licht mit einer Wellenlänge von 254 nm die C-N-Verbindung direkt aufbricht [41, 128]. In [136] finden sich experimentelle Ergebnisse auf Scherbelastung, die mit dem Chaboche-Modell abgebildet werden. Das Materialmodell wird hier um ein Versagensmodell auf Basis von Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) erweitert. SCHOB und SAGRADOV untersuchten das Versagensverhalten bei quasistatischer Belastung und liefern einen Modellierungsansatz für das viskoplastische Verhalten auf Basis des Chaboche-Modells [129, 135]. Außerdem gibt es einen Modellierungsansatz auf Basis des Bodner-Partom-Modells [170]. In [77] wurde das Mooney-Rivlin-Modell zur Modellierung von SLS-PA12 verwendet, wobei der experimentelle Anteil bemerkenswerterweise ohne Relaxationsversuche auskommt und die Dehnung unterhalb von $\varepsilon_{11} = 2\%$ bleibt. Bezüglich der genauen Struktur der Modelle von Chaboche und Bodner-Partom sei auf die einschlägige Literatur verwiesen. Es sei nur erwähnt, dass das Chaboche-Modell [24] eine Fließfunktion besitzt, das Bodner-Partom-Modell [15] nicht. Beide Modelle haben ihren Ursprung in der Metallplastizität und können sowohl kinematische als auch isotrope Verfestigung abbilden. Einer der Gründe für die Wahl der endochronen Plastizität als Modellierungsansatz ist, neben dem bereits erwähnten Korrespondenzprinzip, dass die Begriffe der Ver- und Entfestigung innerhalb der Gruppe metallischer Werkstoffe verwurzelt sind.

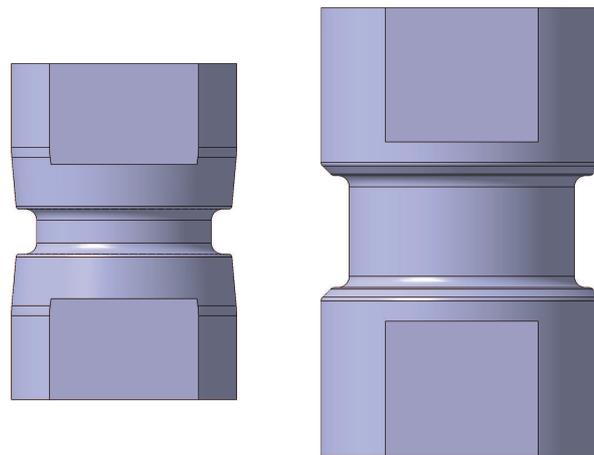
5.1. Entwicklung der Prüfkörpergeometrien

Die Norm-Probegeometrien sind in ihrer geometrischen Ausführung mit den Randbedingungen für werkzeuggebundene Fertigungsverfahren ausgelegt worden. Als Beispiel sei die DIN EN ISO 527 zur Bestimmung der Zugeigenschaften von Kunststoffen genannt. Dort heißt es, dass die Prüfverfahren an Bauteilen angewandt werden, „die entweder in den ausgewählten Maßen geformt oder aus Fertigteilen und Halbzeugen, wie Formteilen, Schichtpressstoffen, Folien und extrudierten oder gegossenen Platten ausgearbeitet, geschnitten oder gestanzt werden“ [34]. Das Einsatzgebiet des hier untersuchten PA12 legt die Verwendung einer rohrförmigen Probegeometrie nahe. Rohrproben sind in der Regel durch Spritzguss hergestellt. Aufgrund der fertigungstechnischen Restriktion entstehen dünnwandige Proben konstanter Wandstärke mit einem taillierten Mittelbereich [92, 123].

Der Vorteil von Rohrproben ist, dass sich alle einachsigen Verzerrungszustände wie Zug, Druck und Torsion applizieren lassen. Außerdem können auch kombinierte Belastungen realisiert werden. Um die mit der Rohrprobe ermittelten experimentellen Daten auf eine breite Basis zu stellen, werden Zug- und Scherproben im klassischen Sinne im experimentellen Programm berücksichtigt. Übergeordnetes Ziel einer jeden Probengestaltung ist das Schaffen eines Bereichs, in dem sich ein möglichst homogener Verzerrungszustand herstellen lässt. Dies sollte gleichzeitig der Bereich der größten Verzerrung sein, um den Versagensbereich a priori festlegen zu können. Effekte, die sich zwangsläufig durch die Randbedingungen der Einspannung in der Maschine ergeben, sind zu minimieren bzw. vom zu untersuchenden Probenbereich abzugrenzen.

5.1.1. Gestalterische Ausführung der Rohrprobe

Aufgrund der Grenzen der werkzeuggebundenen Fertigungsverfahren und des entsprechenden Herstellungsaufwands werden Rohrproben selten für mechanische Tests eingesetzt. Es existieren einige Untersuchungen, die sich insbesondere mit kurzfaserverstärkten Werkstoffen befassen [1, 2, 92, 118, 134, 156]. Einige Arbeiten beschäftigen sich mit dem Einsatz von Polyvinylchlorid (PVC) und Polyethylen (HDPE) als Pipeline-Material und untersuchen folglich Schläuche unter Innendruck, mit Fokus auf die Versagensmechanik [10, 11, 54, 148]. Als Beispiel für Auslegung und Test mithilfe von rohrförmigen Geometrien sind außerdem die Arbeiten von BORNEMANN und SCHLIMMER zu nennen, die sich jedoch auf Klebeverbindungen fokussieren [16]. Der Einsatzbereich von PA12 für flüssigkeitsführende Rohre und Schläuche motiviert den Einsatz einer rohrförmigen Probengeometrie im Rahmen dieser Arbeit, wobei zugleich die mögliche Formkomplexität, die sich durch die Fertigung im SLS-Verfahren ergibt, gezielt eingesetzt wird [85]. Konkret bedeutet das, dass hinterschnittige Geometrien unproblematisch sind und Wandstärkeninhomogenitäten aufgrund des langen Abkühlzeitraums weniger Verzug hervorrufen und daher leichter hingenommen werden können. Im Einspannbereich der Prüfmaschine ist die Steifigkeit der Probe zu maximieren. Im mittleren Bereich wird eine dünnwandige Geometrie geschaffen, sodass ein Großteil der Verzerrung in diesem Bereich stattfindet und darüber hinaus in diesem Bereich ein homogener Spannungszustand unterstellt werden kann. Abbildung 5.1 zeigt zwei Evolutionsstufen der Rohrprobe, die für Tests verwendet wurden [59]. Beim ersten Entwurf der Probe ist aufgrund der kleineren Abmessungen der Doppelkerbe ein homogenerer Spannungszustand zu erwarten. Der Zugang für lokale Dehnungsmessung mithilfe der digitalen Bildkorrelation gestaltete sich jedoch als schwierig, sodass letztlich die größere Probe (Abb. 5.1 b) verwendet wurde.



a) Rohrprobe V1

b) Rohrprobe V2

Abbildung 5.1.: Frontansicht der beiden Entwürfe für die Rohrprobe

Abbildung 5.2 zeigt eine Schnittdarstellung der Rohrproben-Baugruppe. Der Stopfen im Einspannbereich der Probe wird separat hergestellt und durch eine Übergangspassung eingesetzt, wodurch die Einspannbereiche zusätzlich gestützt werden. Die Abflachungen auf beiden Seiten dienen der Einspannung in der Prüfmaschine.

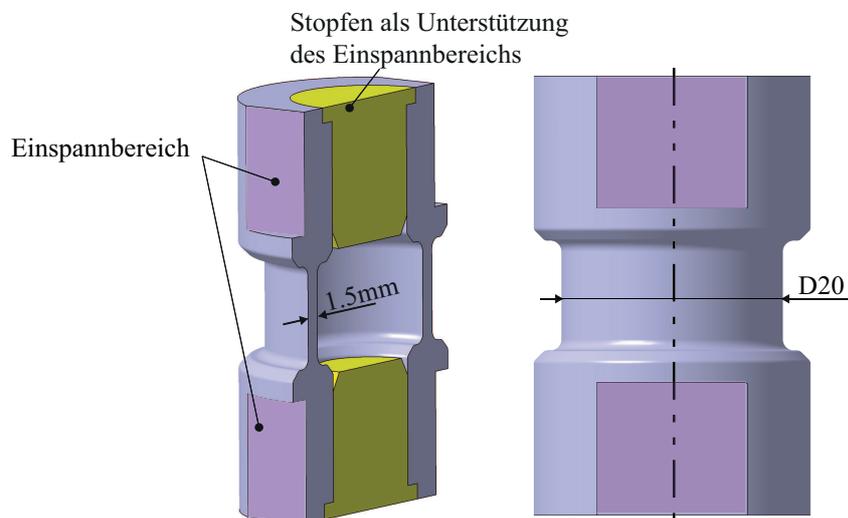


Abbildung 5.2.: Iso-Ansicht und Maße der für das SLS-Verfahren entwickelten Rohrprobe

Um das Verhalten der Probe bezüglich Homogenität des Verzerrungszustands und Konzentration der Spannungen im dünnwandigen Bereich der Doppelkerbe zu untersuchen, wur-

de eine linear-elastische, numerische FEM-Simulation¹ durchgeführt. Dazu wurde für den Elastizitätsmodul ein Wert von $E = 1.000 \text{ MPa}$ gewählt und eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0.4$ unterstellt. Der Wert des Elastizitätsmoduls ist an die Ergebnisse der dynamisch-mechanischen Analyse angelehnt, die in Abschnitt 2.4.2 beschrieben sind. Letztlich sind die Ergebnisse der linear-elastischen FEM-Simulation jedoch ausschließlich qualitativ zu interpretieren und dienen als Absicherung der geometrischen Vorauslegung. Um die Geometrie zu vereinfachen, wurde der Stopfen mit der Grundgeometrie der Rohrprobe verschmolzen. Die Probe ist einseitig fest eingespannt und wurde auf der anderen Seite mit einem Drehwinkel $\varphi = 2^\circ$ beaufschlagt. Die Ergebnisse der Simulation sind in Abb. 5.3 zu sehen und zeigen, dass sich die Spannungen im Bereich der Doppelkerbe konzentrieren und das Design der Probe somit zielführend ist.

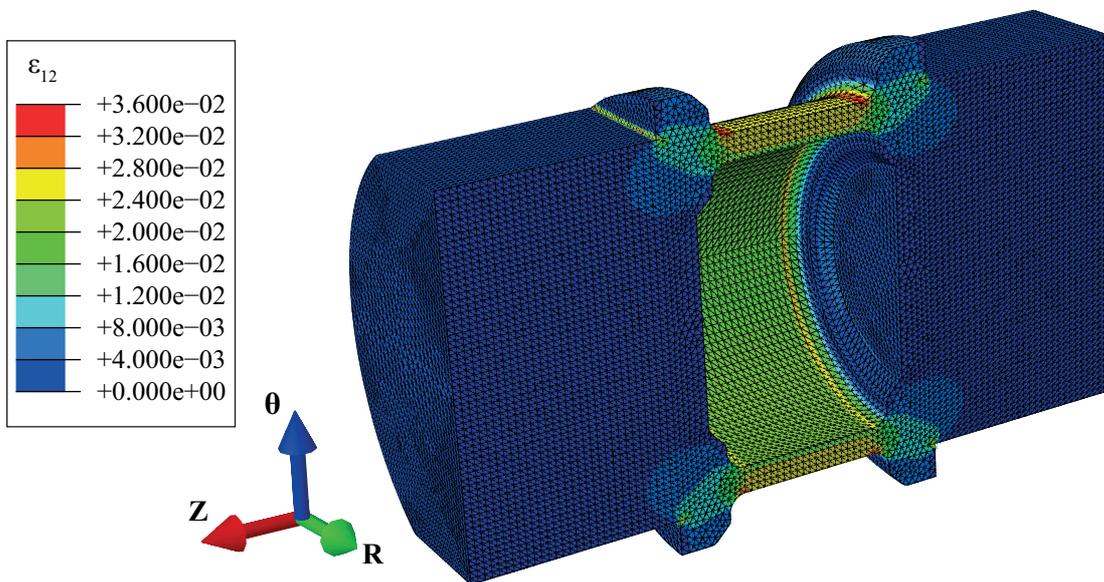


Abbildung 5.3.: Linear-elastische FEM-Berechnung des Dehnungszustands der Rohrprobe bei Torsionsbelastung

5.1.2. Gestalterische Ausführung der Probe für einfache Scherung

Bei der Prüfkörpergeometrie für einfache Scherung wurde die geometrische Grundform der Miyauchi-Probe gewählt, die ursprünglich für metallische Bleche entwickelt worden ist [116]. Eine Verstärkung der Einspannbereiche analog zur Zugprobe wäre auch hier möglich, brachte jedoch im Rahmen von Voruntersuchungen keinen Effekt, da die Einspannvorrichtung sehr großflächig aufliegt und dadurch die Kerbwirkung im Übergang minimal wird.

¹Auf die Methode der finiten Elemente wird in Kapitel 7 genauer eingegangen.

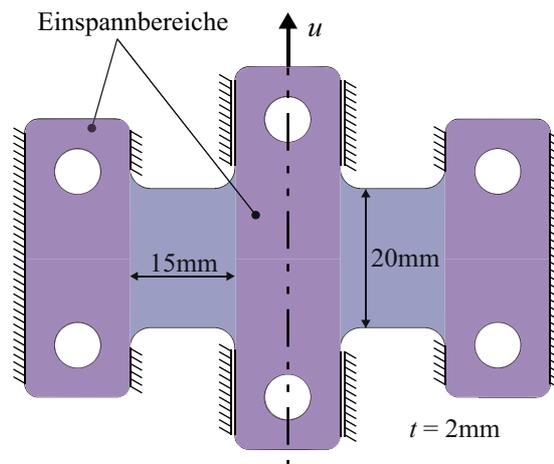


Abbildung 5.4.: Frontansicht und Maße der Scherprobe

Das Verhalten der Scherprobe wurde erneut anhand einer linearen FEM-Berechnung abgeschätzt, deren Ergebnisse in Abb. 5.5 dargestellt sind. Bei einer vorgegebenen Verschiebung von $u = 0.5 \text{ mm}$ sind reine Scherdehnungen nur in einem kleinen Bereich in der Mitte des Scherbereichs zu finden. Diese Information ist im Hinblick auf die Auswertung der lokalen Dehnungsmessung (Abschnitt 5.3.3) von großer Bedeutung.

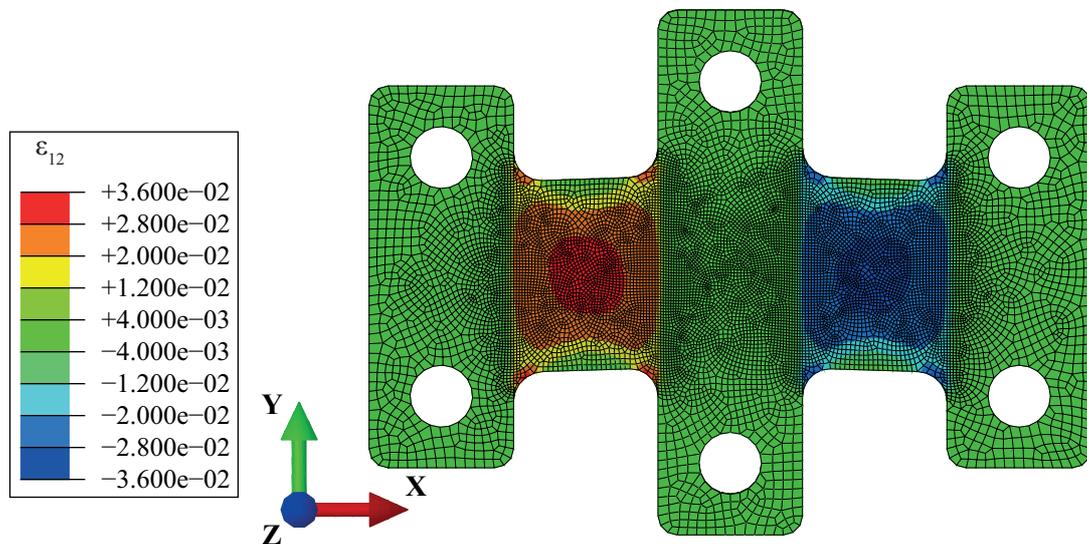


Abbildung 5.5.: Linear-elastische FEM-Berechnung des Dehnungszustands der Scherprobe bei einfacher Scherbelastung

5.1.3. Gestalterische Ausführung der Zugprobe

Die Zugprobe ist an die Vorgaben der DIN EN ISO 527-2 angelehnt, wobei deren Maße der Probenform 1BA am nächsten kommen. Die Probe wurde aufgrund der geometrischen Freiheitsgrade des SLS-Verfahrens dreidimensional gestaltet und dadurch die Einspannbereiche zusätzlich verstärkt. Dadurch sinkt die Gefahr, dass die Probe am Übergang vom geklemmten zum verformenden Bereich aufgrund der Kerbwirkung durch die Klemme reißt. Abbildung 5.6 zeigt die Probe mit gekennzeichnetem Einspannbereich und den relevanten Abmaßen. Die Bohrung im Einspannbereich dient der Befestigung im Betriebsfestigkeitsprüfstand.

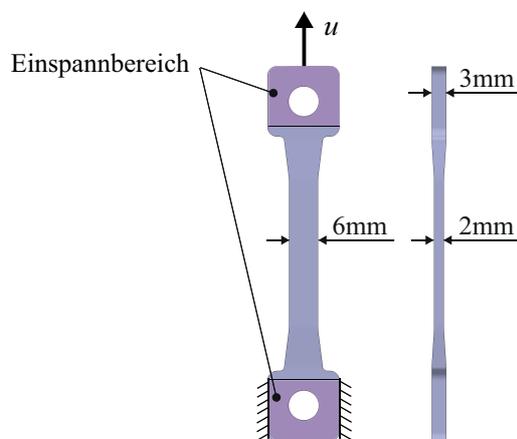


Abbildung 5.6.: Front- und Seitenansicht und Maße der Zugprobe

Analog zur Rohrprobe ist die Probengeometrie durch eine linear-elastische Simulation abgesichert worden, deren Ergebnisse bei einer Verschiebung von $u = 1 \text{ mm}$ in Abb. 5.7 zu sehen sind. Die Auslegungsabsicht eines homogenen Dehnungszustands im mittleren Bereich des Prüfkörpers kann anhand der Berechnungsergebnisse bestätigt werden.

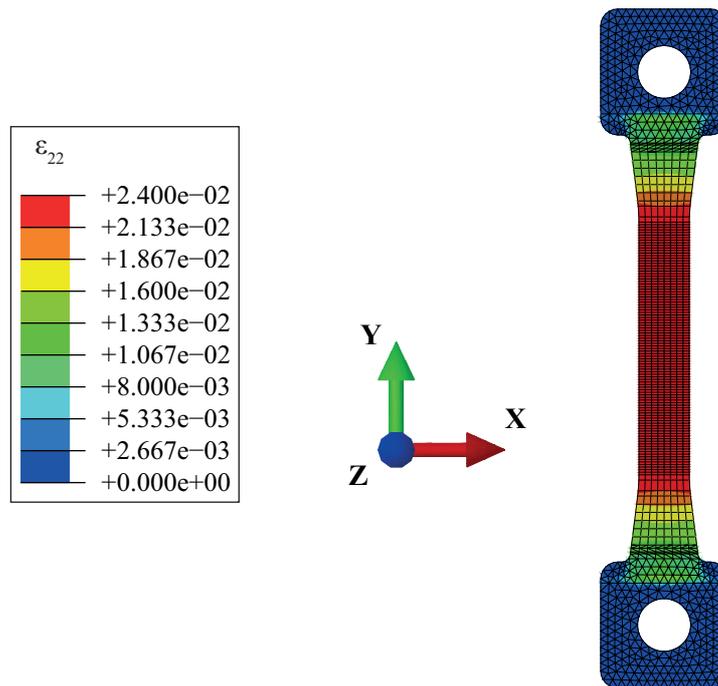


Abbildung 5.7.: Linear-elastische FEM-Berechnung des Dehnungszustands der Zugprobe

5.2. Fertigungsstrategie der Prüfkörper im Pulvervolumen

Bezüglich der Fertigungsstrategie wird der praktische Ansatz verfolgt, das Bauvolumen durch zusätzliche Teile im Bauraum, die parallel zu den Prüfkörpern gefertigt werden, bestmöglich auszufüllen. Abbildung 5.8 liefert eine schematische Darstellung des Bau-raums mit Rohrproben und Zusatzteilen, anhand dessen einige Erläuterungen insbesondere zum thermischen Verhalten der gefertigten Teile gemacht werden.

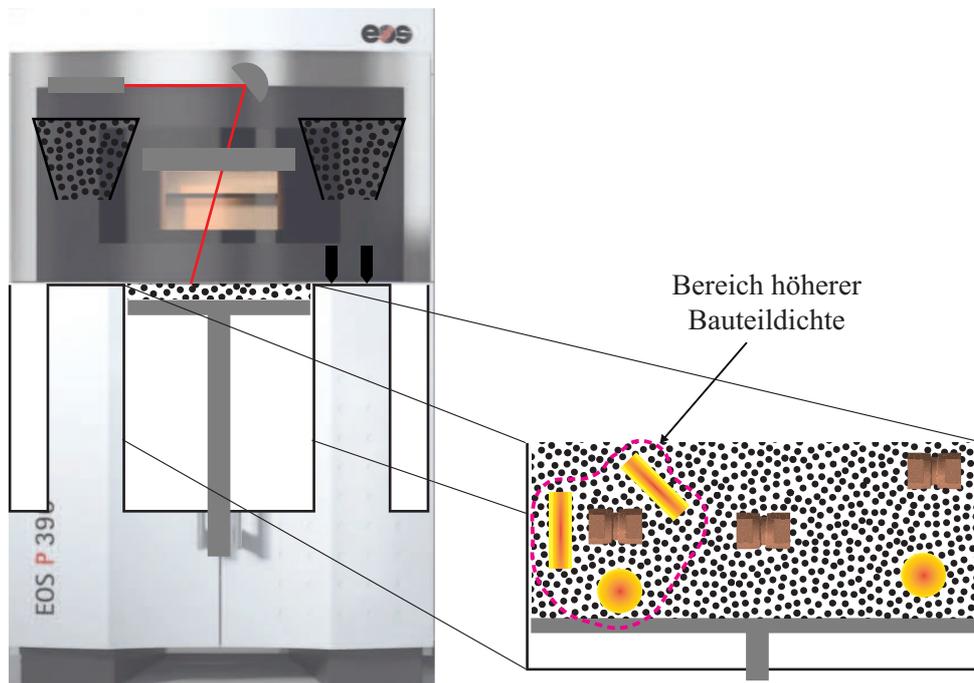


Abbildung 5.8.: Darstellung des Pulvervolumens nach abgeschlossener Fertigung

Bereiche mit größerer Bauteildichte halten die Prozesstemperatur länger als Bereiche, in denen weniger Bauteile platziert sind, da in diesen Bereichen während der Fertigung durch den Laser mehr Energie eingekoppelt wird. Werden Bauteile aus zentraler Lage des Pulvervolumens betrachtet, so ist die thermische Geschichte aufgrund der niedrigeren Abkühlrate länger als bei Bauteilen, die in Randbereichen des Pulvervolumens platziert sind. Bauteile, die zuletzt belichtet werden und im Pulvervolumen oben liegen, sind der Prozesstemperatur für kürzere Zeit ausgesetzt als Bauteile im unteren Bereich des Pulvervolumens. Ferner beeinflussen sich benachbarte Teile gegenseitig in ihrem Abkühlverhalten [14]. Somit ist die thermische Geschichte eines jeden einzelnen Probekörpers bei der gewählten Fertigungsstrategie nicht nachvollziehbar.

Um die durch die Fertigung resultierende Streuung abzubilden, werden die Probekörper für die jeweiligen Experimente aus mindestens zwei verschiedenen Fertigungschargen gemischt. Es findet keine gezielte Konditionierung der Bauteile statt. Nach abgeschlossenem SLS-Postprocessing (Auspacken und Sandstrahlen) werden die Bauteile für mindestens 48 Stunden bei Raumklima gelagert, bevor sie den Versuchen zugeführt werden. Dies entspricht dem luftfeuchten Zustand, der sich durch Lagerung bei 23°C und 50% Luftfeuchtigkeit einstellt und entsprechend große praktische Relevanz besitzt [78].

Durch den Schichtaufbau der SLS-Probekörper kann ein anisotropes Werkstoffverhalten in Abhängigkeit der Lage innerhalb des Pulvervolumens erwartet werden. Abbildung 5.9 zeigt schematisch drei von unendlich vielen möglichen Fertigungslagen. Eine ausführliche

Übersicht zum mechanischen Verhalten bei verschiedenen Orientierungen im Fertigungsprozess liefert z. B. die Arbeit von BLATTMEIER [14]. In [3] werden ebenfalls die Auswirkungen auf die mechanischen Eigenschaften durch die Bauteilorientierung im Pulvervolumen untersucht. Die Abbildung 5.10 stellt die experimentellen Ergebnisse von Torsionsversuchen bei einer Traversengeschwindigkeit der Torsionsachse von $\dot{\varphi} = 10^\circ/\text{min}$ dar.

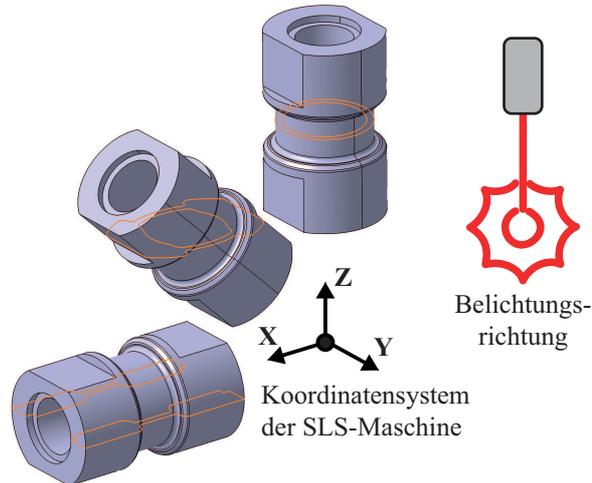


Abbildung 5.9.: Drei mögliche Orientierungen der Rohrprobe im Pulvervolumen

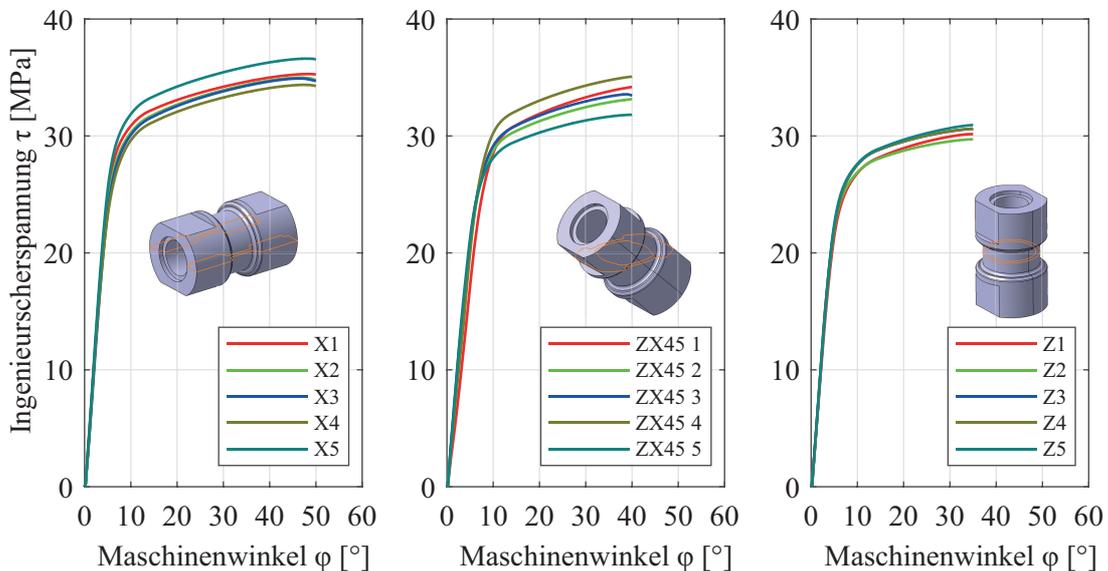


Abbildung 5.10.: Torsionsversuche mit verschiedenen Orientierungen der Prüfkörper im Pulvervolumen

Die Ergebnisse zu den verschiedenen Orientierungen zeigen unterschiedliche maximale Torsionsfestigkeiten sowie unterschiedlich ausgeprägte Duktilitäten. Wird der qualitati-

ve Kurvenverlauf betrachtet, so verhalten sich die unterschiedlichen Orientierungen sehr ähnlich. Um den experimentellen Aufwand im beherrschbaren Rahmen zu halten, wird vorerst eine Probenorientierung untersucht. Alle weiteren Rohrproben werden in x-Richtung in der Maschine orientiert. Die übrigen Probengeometrien korrespondieren entsprechend. Bis zu welchem Grad der Verzerrung ein Materialmodell reichen kann, wird im folgenden Kapitel im Rahmen der lokalen Dehnungsmessung diskutiert.

5.3. Kinematik der Prüfkörper

Um einen Werkstoff mechanisch charakterisieren zu können, muss das Spannungs-Dehnungs-Verhalten bekannt sein. Das DIC-Messprinzip wird am Beispiel der Rohrprobe erläutert, da die rotationssymmetrische Geometrie eine 3D-Dehnungsmessung erfordert. Für die Messung der Dehnungen an Zug- und Scherprobe ist eine 2D-Messung mit einer einzelnen Kamera prinzipiell ausreichend, die Messungen wurden jedoch ebenfalls mit einem 3D-Messaufbau mit zwei Kameras der Fa. LiMess durchgeführt. Die anschließende Auswertung erfolgt mit der Software Istra4D (Version 4.4.7).

5.3.1. Messprinzip der lokalen 3D-Dehnungsmessung

In Abb. 5.11 ist der prinzipielle Messaufbau der 3D-Dehnungsmessung dargestellt.

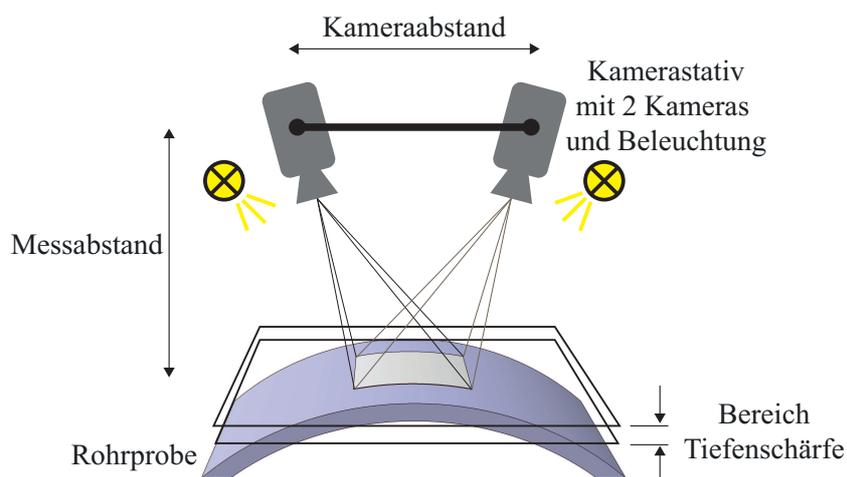


Abbildung 5.11.: Messaufbau 3D-Dehnungsmessung

Abhängig vom zu ermittelnden Tiefenschärfebereich werden zwei Kameras mit definiertem

Abstand auf dem Stativ befestigt. Der Kameraabstand, der Messabstand sowie der Winkel zwischen den Kameras werden nicht im Vorhinein ermittelt, sondern sind das Ergebnis eines Kalibrierungsschrittes. Die Beleuchtung erfolgt durch flächige LED-Beleuchtungseinheiten.

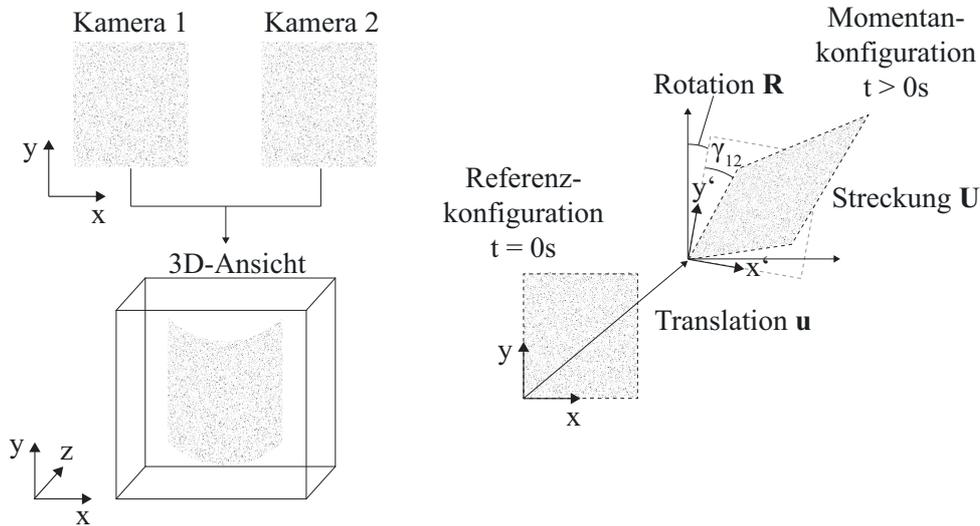


Abbildung 5.12.: Messprinzip der 3D-Dehnungsmessung mit zwei Kameras

Auf Basis der Photogrammetrie sowie der digitalen Bildkorrelation erfolgt die dreidimensionale Dehnungsmessung [142]. Auf die zu untersuchenden Probenbereiche wird ein stochastisches Grauwertmuster – ein sogenanntes Speckle-Muster – appliziert. Beide Kameras fertigen Bilder des Musters mit definierter Aufzeichnungsrate über den gesamten Versuchszeitraum an. Die Software teilt das Messfeld in Facetten definierter Größe auf. Abhängig von der Bildqualität können die Facettengrößen gewählt werden. Für die hier durchgeführten Messungen wurde eine Facettengröße von 17×17 Pixeln realisiert. Die Grauwertverteilungen in beiden Kameras werden analysiert und daraus die dreidimensionalen Koordinaten berechnet. Zur Berechnung der Felddehnung werden die Facetten im deformierten und undeformierten zeitlich korreliert. Schließlich werden auf Basis der in Kapitel 3.1 erläuterten kinematischen Grundlagen die entsprechenden Feldgrößen ausgewertet, die in Abb. 5.12 nochmal dargestellt sind. Mithilfe des Verschiebungsvektors \mathbf{u} zweier materieller Punkte in Referenz- und Momentankonfiguration kann durch Gleichung (3.13) die Ingenieurdehnung ϵ berechnet werden. Daneben werden durch die Software ebenfalls die Hencky-Dehnung

$$\epsilon^H = \ln(\mathbf{U}) \quad (5.1)$$

und die Green'sche Dehnung

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad } \mathbf{u}^T + \text{Grad } \mathbf{u}^T \cdot \text{Grad } \mathbf{u}), \quad (5.2)$$

die die Ingenieurdehnung um den quadratischen Anteil erweitert, ausgewertet. Ebenfalls lässt sich aus Abb. 5.12 der wichtige Aspekt entnehmen, dass im Rahmen der kinematischen Berechnungen zwischen Starrkörperrotationen \mathbf{R} und Streckungen \mathbf{U} zu unterscheiden ist.

Ziel der lokalen Dehnungsmessung ist das Herstellen eines Zusammenhangs zwischen dem Weg bzw. Winkel der Maschinentraverse und der lokalen Dehnung im Bereich größter Dehnung aller drei vorgestellten Probegeometrien. Alle mechanischen Experimente finden auf derselben, eingangs erwähnten Universalprüfmaschine statt, sodass der Zusammenhang zwischen Weg und Winkel der Maschine und den lokalen Dehnungen auf Basis einer Messreihe hergestellt und dann für alle folgenden Messungen als gültig angenommen wird. Dazu werden die lokalen Dehnungsmessungen jeweils dreimal wiederholt und gemittelt.

5.3.2. Kinematik der Rohrprobe

Da die Rohrprobe für mehrere Spannungszustände Anwendung findet, muss auch das Verzerrungsverhalten entsprechend bestimmt werden. Ziel ist es, den Traversenwinkel φ der Universalprüfmaschine mathematisch mit der lokalen Scherung γ innerhalb der Doppelkerbe zu verbinden. Darüber hinaus wird im Rahmen eines Zugversuchs ein Zusammenhang zwischen dem Traversenweg x und der Dehnung ε in Richtung der Probenachse hergestellt. In Abb. 5.13 ist der Dehnungszustand der Rohrprobe in der 3D-Ansicht zu sehen. Ausgegeben werden die gemittelten Dehnungsdaten innerhalb eines Auswertepolygons, das manuell festgelegt wird. Aufgrund des schichtweisen Aufbaus der Probe kann bei großen Dehnungen eine Inhomogenität im Verzerrungszustand anhand eines Streifenmusters erkannt werden.

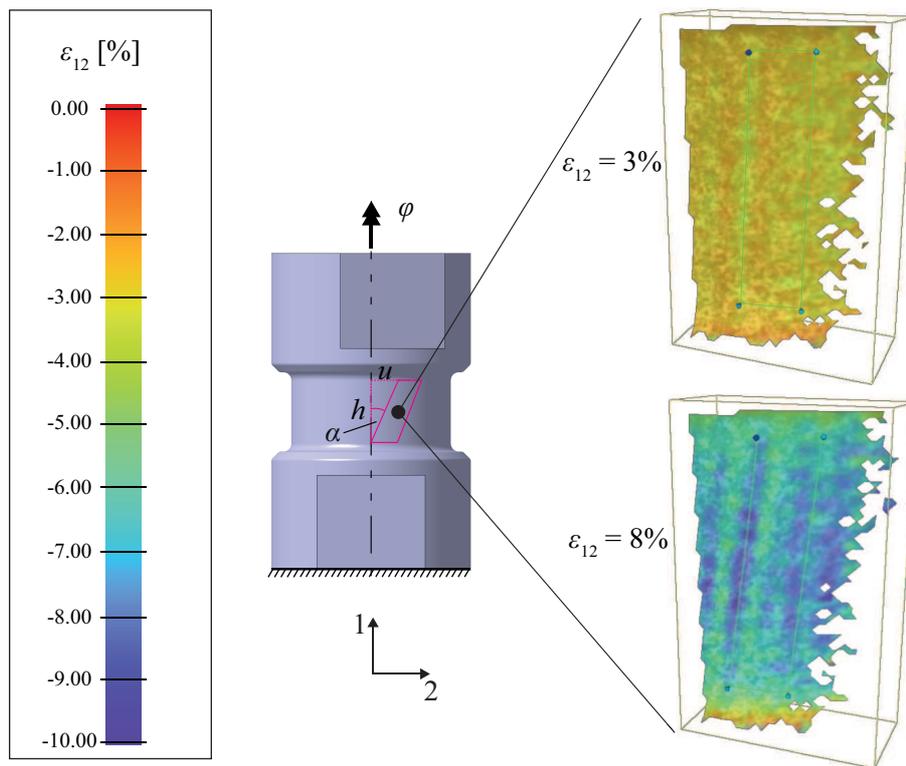


Abbildung 5.13.: Lokale 3D-Dehnungsmessung des Scherzustands der Rohrprobe

Im Rahmen des Postprocessing werden die Messdaten der 3D-Dehnungsmessung mit der Winkelmessung der Traverse korreliert. Dazu gehört die Auswahl einer geeigneten Ansatzfunktion sowie die anschließende Parametrierung. Für die Scherdehnungen der Rohrprobe wurde als Ansatzfunktion eine modifizierte Reihe der Exponentialfunktion gewählt, die mit dem zweiten Glied beginnt und bei Abbruch nach dem fünften Glied eine ausreichende Genauigkeit aufweist.

$$\gamma(\varphi) = \sum_{n=1}^4 p_n \frac{\varphi^n}{n!} \quad (5.3)$$

Um Gl. (5.3) an die ermittelten Messdaten anzupassen, wurde das nichtlineare, gradientenbasierte Optimierungsverfahren *fmincon* in Matlab gewählt [21, 47]. Die Ergebnisse sind für verschiedene Dehnungsniveaus in Abb. 5.14 dargestellt.

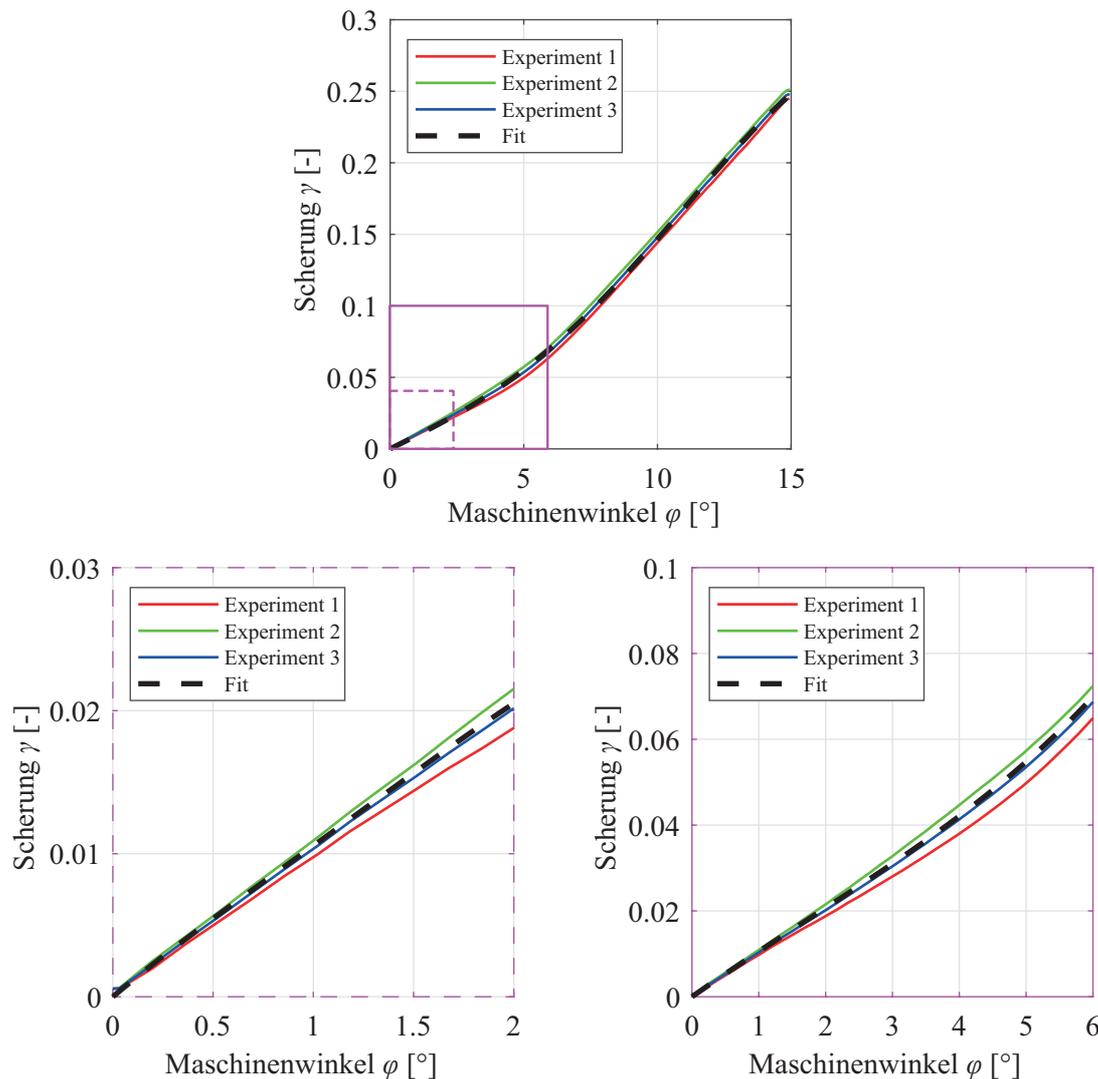


Abbildung 5.14.: Zusammenhang zwischen Maschinenwinkel φ und Scherdehnung γ

Der Prozess der Korrelation von Maschinenweg u und Dehnung in Achsrichtung ε_{11} der Probe wurde ebenfalls durchgeführt. Als mathematischer Ansatz genügt ein Polynom dritter Ordnung ohne Absolutglied

$$\varepsilon_{11}(x) = \sum_{n=1}^3 p_n u^n. \quad (5.4)$$

Die korrelierten Kamerabilder zum Dehnungszustand sowie der Zusammenhang zwischen Maschinenweg und Dehnung in Achsrichtung für verschiedene Dehnungsniveaus ($\varepsilon_{11} = 2\%$ und $\varepsilon_{11} = 8\%$) sind in den Abbildungen 5.15 und 5.16 zu sehen.

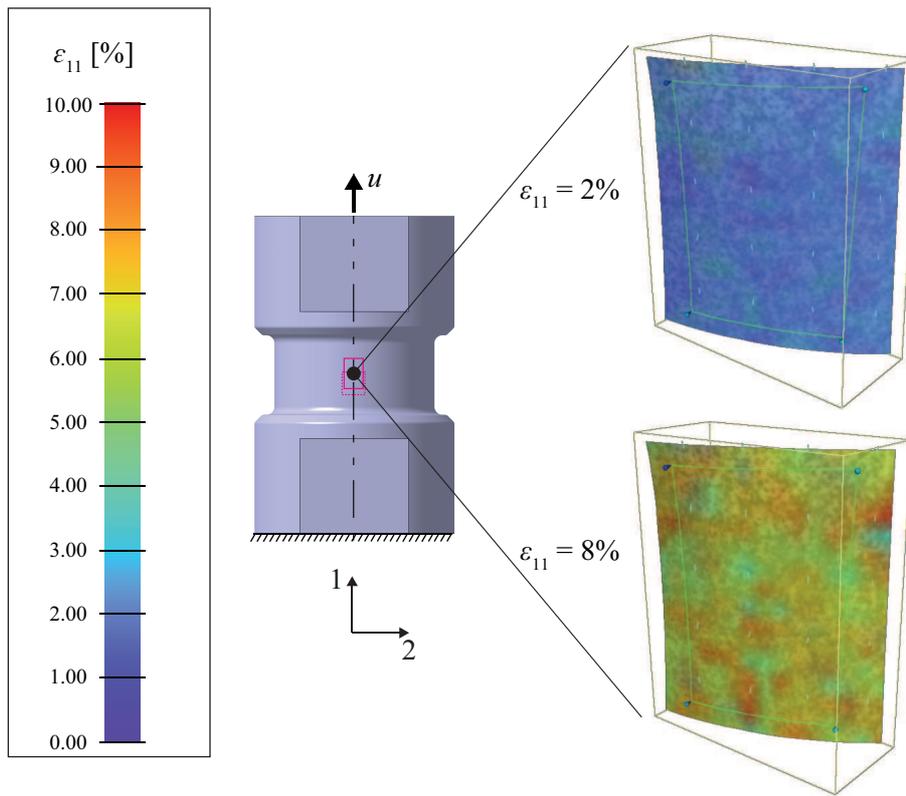


Abbildung 5.15.: Dehnungszustand im uniaxialen Zugversuch bei der Rohrprobe

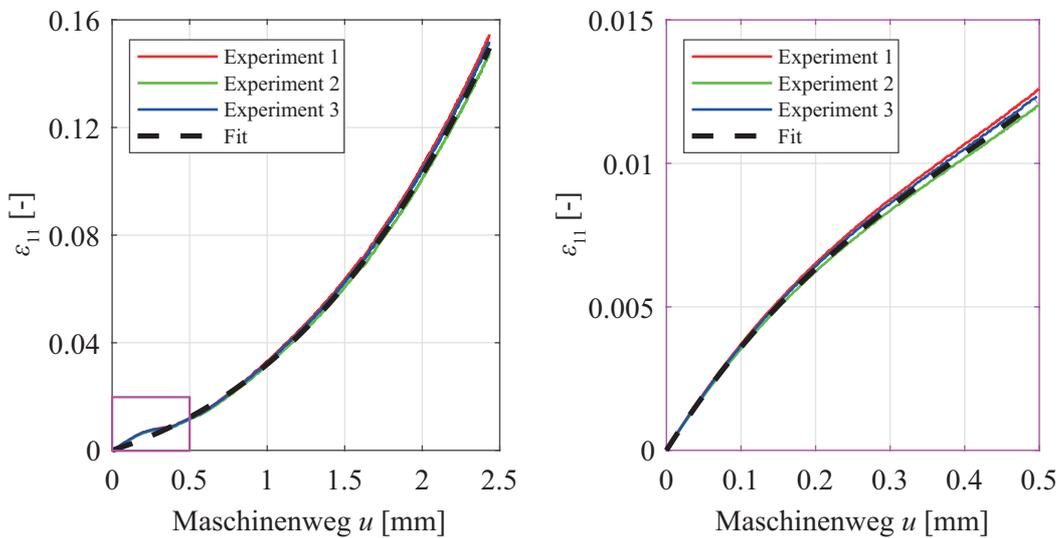


Abbildung 5.16.: Zusammenhang zwischen Maschinenweg u und Dehnung ε_{11}

In Abb. 5.16 wird die Motivation für getrennte Auswertung verschiedener Dehnungsniveaus deutlich. Während bei einem Maschinenweg von $u \leq 0.5$ mm die Dehnung einen konkav-

ven Verlauf annimmt, stellt sie sich für größere Deformationen $u \leq 2.5 \text{ mm}$ konvex dar. Der konkave Verlauf zu Beginn ist zu erkennen, wird jedoch im Anpassungsprozess des mathematischen Zusammenhangs ignoriert, da er einen entsprechend kleinen Beitrag zum Fehler leistet. Bei Verzicht auf die Anpassung bei verschiedenen Dehnungsniveaus und ausschließlicher Verwendung der Dehnungsfunktion für große Maschinenwege wird die Aussage zur lokalen Dehnung bei nur kleinen Maschinenwegen (z.B. im Relaxationsversuch) ungenau. Die Alternative ist ein anderer funktionaler Ansatz, der den geometrischen Verlauf auch für große Maschinenwege detailgetreu abbilden kann. Die hier verwendeten Polynomfunktionen sind jedoch sehr einfach in der Handhabung und lassen sich in kurzer Zeit an verschiedene Dehnungsniveaus anpassen.

Das Vorgehen wird im Folgenden für die Scherprobe und die Zugprobe wiederholt. Da die zu erfassende Geometrie zweidimensional ist, ist die messtechnische Erfassung deutlich einfacher.

5.3.3. Kinematik der Scherprobe

Die linear-elastische Berechnung der Scherprobe in Abb. 5.5 hat gezeigt, dass ein reiner Scherzustand im mittleren Bereich des Messfeldes zu erwarten ist. Daher wurde das Auswertepolygon entsprechend klein gewählt. Um die Scherdehnung γ mit dem Maschinenweg u mathematisch zu verbinden, genügt auch hier eine Polynomfunktion dritter Ordnung. In Abb. 5.18 ist deutlich sichtbar, dass die Messergebnisse im Bereich großer Dehnungen stark streuen. Im Hinblick auf die Interpretation der späteren Berechnungsergebnisse ist festzuhalten, dass Abweichungen in den Berechnungen oberhalb einer Scherdehnung von $\gamma \geq 0.1$ auch auf die Streuung der lokalen Dehnungsmessung und damit eine nicht korrekt ausgewiesene tatsächliche Scherdehnung zurückzuführen ist.

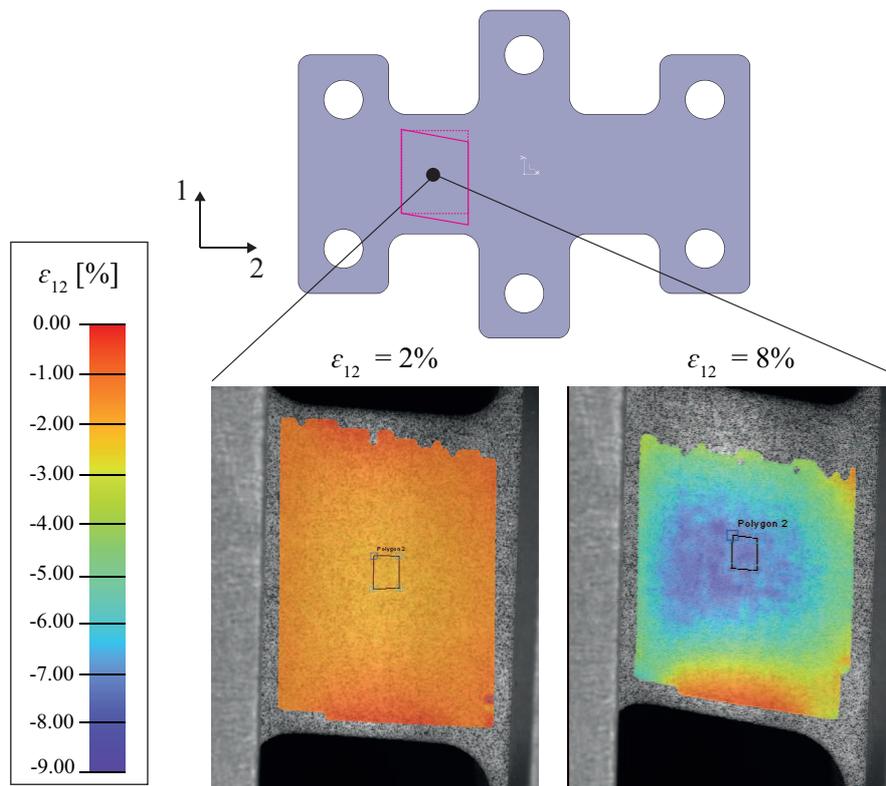


Abbildung 5.17.: Lokale Dehnungsmessung mittels DIC im einfachen Scherzustand der Scherprobe

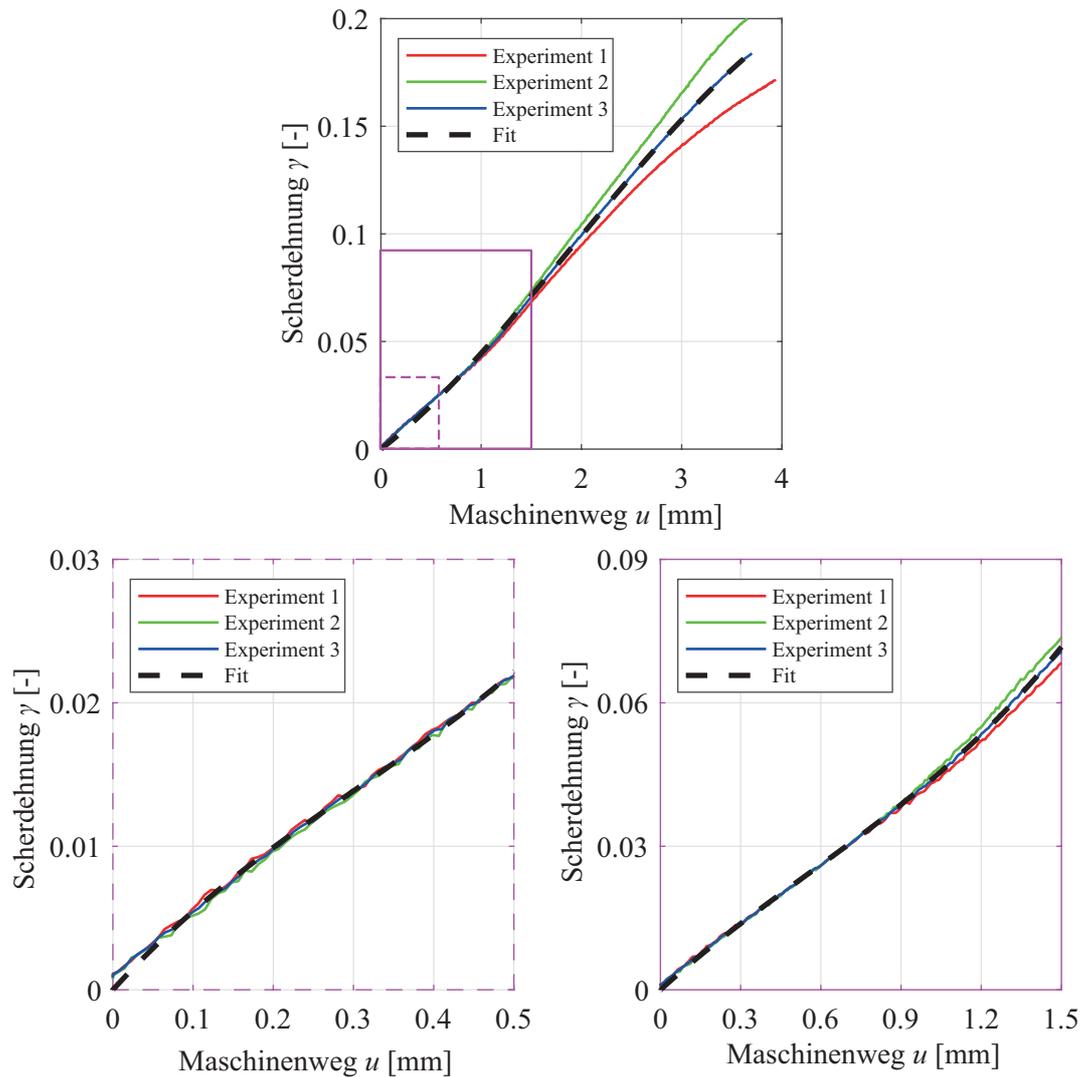


Abbildung 5.18.: Zusammenhang zwischen Maschinenweg u und Scherdehnung γ

5.3.4. Kinematik der Zugprobe

Analog zur Rohrprobe sind bei großen Deformationen auch hier Inhomogenitäten im Verzerrungszustand zu erkennen. Aufgrund des zweidimensionalen Messbereichs kann hier sowohl die Dehnung in Zugrichtung ε_{11} als auch die entsprechende Querdehnung ε_{22} , die im Fall isotropen Materialverhaltens der Dehnung in Dickenrichtung ε_{33} entspricht, gemessen werden. Daraus lässt sich die Querkontraktionszahl ν , auch Poissonzahl genannt, berechnen. Abbildung 5.19 zeigt die Dehnungsmessungen der Zugprobe. Das Auswertepolygon wurde im späteren Versagensbereich der Probe platziert.

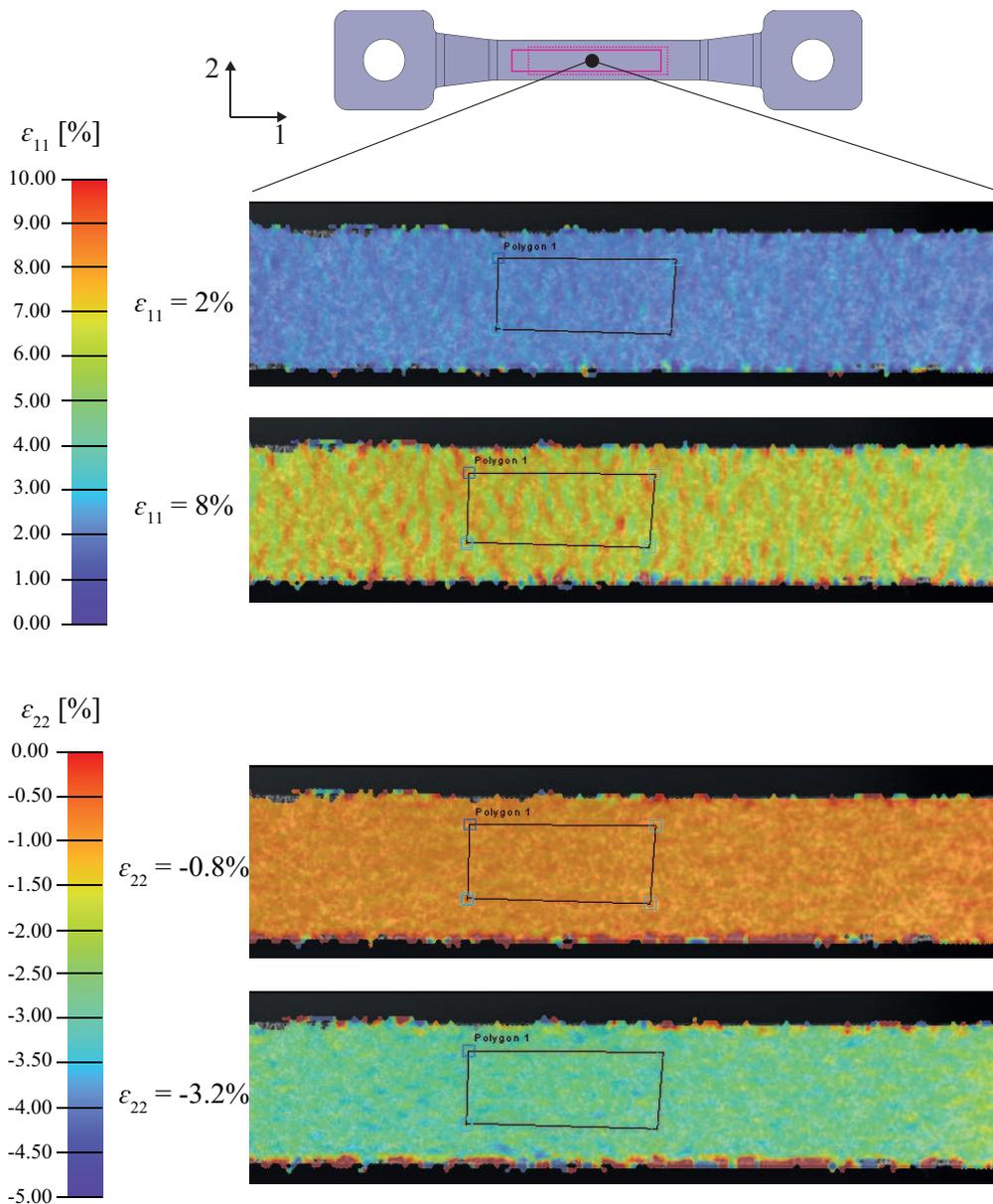


Abbildung 5.19.: Lokale Dehnungsmessung im uniaxialen Zugversuch der Zugprobe

Um einen mathematischen Zusammenhang zwischen dem Weg der Maschine und den Dehnungen in Längs- und Querrichtung ϵ_{11} und ϵ_{22} herzustellen, genügt ein Polynom dritter Ordnung analog Gl. (5.4).

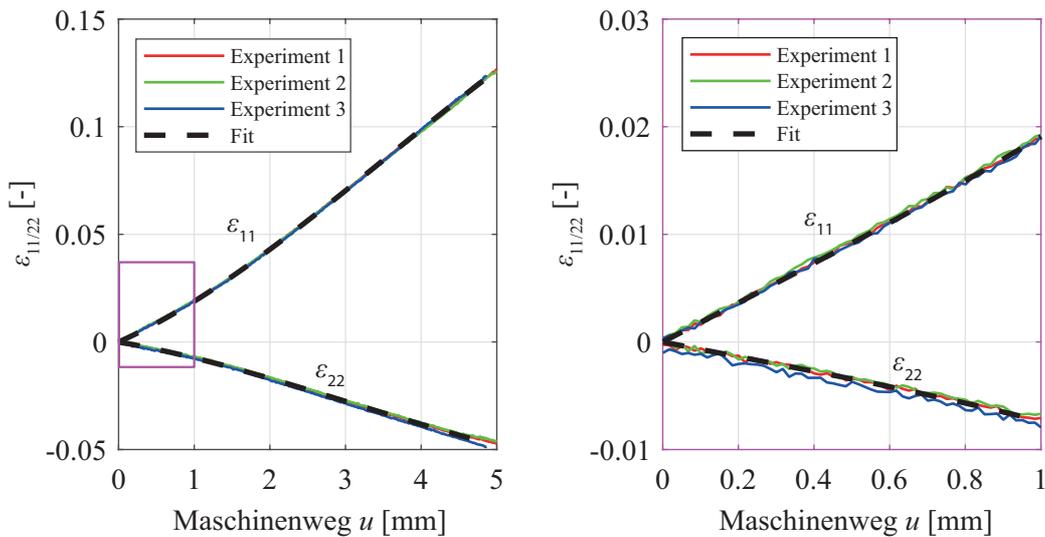


Abbildung 5.20.: Zusammenhang zwischen Maschinenweg u , Längsdehnung ε_{11} und Querdehnung ε_{22}

Mithilfe der Ergebnisse kann die Querkontraktionszahl ν anhand des Zusammenhangs

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (5.5)$$

berechnet werden. Neben dem dividierten Rohsignal der Messung ist in Abb. 5.21 a) die errechnete Querkontraktionszahl aus dem Quotienten der angepassten Polynome aus Abb. 5.20 dargestellt. Zusätzlich wurde die Querkontraktion im Rahmen eines Relaxationsversuchs messtechnisch erfasst. Dabei wird eine Deformation in Zugrichtung von $u = 1$ mm, die anhand der bisherigen Ergebnisse einer Dehnung in Zugrichtung von $\varepsilon_{11} = 0.02$ entspricht, mit einer Geschwindigkeit von $\dot{u} = 100$ mm/min erreicht und anschließend für $t = 1000$ s gehalten. Abbildung 5.21 b) zeigt, dass die Querkontraktion von $\nu \approx 0.4$ nur zu Beginn des Relaxationsversuchs, also direkt nach Ende des Dehnungssprungs, der nicht dargestellt ist, erreicht wird und sich bei konstanter Dehnung ε_{11} reziprok zur Spannung verhält. Entsprechend kann eine entlang der y-Achse verschobene und mit Vorfaktor versehene natürliche Logarithmusfunktion der Form

$$\nu_{\text{fit}}(t) = p_1 \cdot \ln(t) + p_2 \quad (5.6)$$

an die Daten angepasst werden.

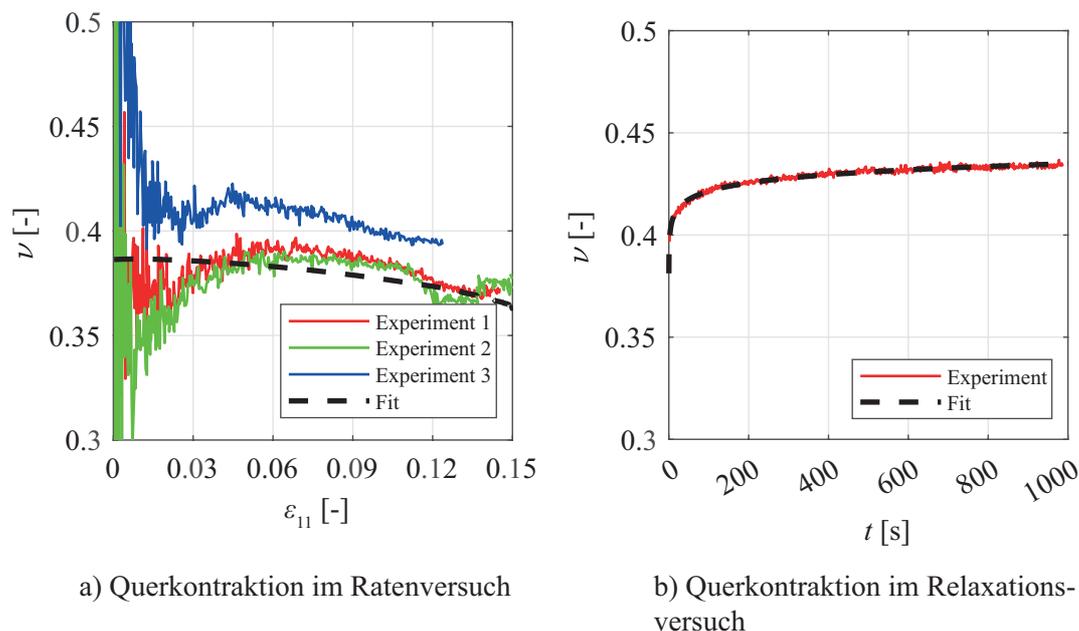


Abbildung 5.21.: Querkontraktionszahl der Zugprobe

Die Ergebnisse der lokalen Dehnungsmessungen bedürfen einer kritischen Einordnung. Dazu werden die wichtigsten Erkenntnisse zusammengefasst und Implikationen im Hinblick auf die Materialmodellierung abgeleitet.

5.3.5. Erkenntnisse aus den lokalen Dehnungsmessungen

Die dreidimensionale Dehnungsmessung der Rohrprobe, insbesondere im Torsionsversuch, ist mit großen Herausforderungen im Hinblick auf die Kalibration der Kameras sowie die Einstellung des Tiefenschärfebereichs verbunden. Bei großen Deformationen verlassen einige Facetten den Tiefenschärfebereich des Messfeldes. Andere Facetten, die vorher nicht erfasst wurden, treten in den Tiefenschärfebereich ein. Beide Bereiche haben gemeinsam, dass sie nicht im gesamten Messzeitintervall erfasst werden können und somit auch keinen Beitrag zur Auswertung leisten. Die Konsequenz daraus ist, dass der gültige Messbereich mit steigenden Deformationen kleiner wird. Darunter leidet die Genauigkeit der Messung. Dennoch konnte eine gute Wiederholgenauigkeit bei der lokalen Dehnungsmessung im Torsionsversuch realisiert werden. Bei den lokalen Dehnungsmessungen der Scherprobe sind die Abweichungen der einzelnen Messreihen zueinander deutlich größer, obwohl das Messfeld aufgrund der Zweidimensionalität einfacher zu erfassen ist. Hier stellt sich vielmehr das Problem der Homogenität des Spannungszustands ein, da die einfache Scherung eine rotationale Verformung ist, bei der die konstante Höhe des Scherbereichs (15 mm lt. Abb. 5.23) erzwungen werden muss. Eine Abweichung vom homogenen Scherzustand

stellt sich daher insbesondere im freien Randbereich ein (Abb. 5.5). In [70] wird die Inhomogenität im Spannungszustand des einfachen Scherversuchs ebenfalls herausgearbeitet und als Schlussfolgerung der Torsionsversuch zur Bestimmung der deviatorischen Materialparameter empfohlen. Zusätzlich erlaubt die Maschinenregelung im Torsionsversuch eine komplette Kraftfreiheit entlang der Torsionsachse, die bei allen Torsionsmessungen realisiert worden ist. Bezüglich der Homogenität ist weiterhin zu beachten, dass insbesondere bei der Zugprobe sowie der Torsionsprobe im Scherzustand bei großen Dehnungen auch große Inhomogenitäten im Verzerrungsfeld zu erkennen sind. Während sich bei der Zugprobe punktförmige Bereiche großer Dehnungen herausbilden (Abb. 5.19), deren Verteilung keinem erkennbaren Muster folgt, bildet sich im Torsionsversuch eine streifenförmige Struktur großer Dehnungen (Abb. 5.13) aus, anhand derer sich der Schichtaufbau des Bauteils aufgrund der Fertigungslage in der Maschine widerspiegelt (Abb. 5.22).

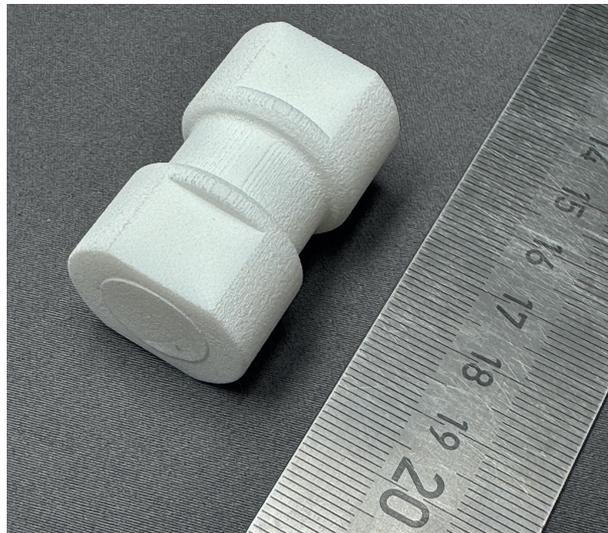


Abbildung 5.22.: Schichtaufbau der Rohrprobe in x-Orientierung (vgl. Abb. 5.9)

Im Rahmen der Auswertung wurde das Auswertepolygon möglichst groß gewählt, sodass Inhomogenitäten im Dehnungsfeld nivelliert werden. Im Rahmen der Identifikation der Materialparameter sollen möglichst große Dehnungen berücksichtigt werden. Sofern dies nicht möglich ist bzw. auf die Inhomogenitäten in der lokalen Dehnung zurückgeführt werden kann, wird der Gültigkeitsbereich des Materialmodells auf kleinere Dehnungen reduziert. Die im Rahmen der mechanischen Tests ausgewerteten Spannungen beziehen sich immer auf die lokalen Dehnungsgrößen. Für alle Versuche wurde die Ingenieurdehnung (Gl. (3.13)) ausgewertet. Die Dehnungen wurden lokal in einem kleinen Messbereich ausgewertet. Zur Spannungsberechnung wurde der komplette Querschnitt der Probe herangezogen. In Abb. 5.23 ist dies am Beispiel der Scherprobe dargestellt und ist auf alle untersuchten Probengeometrien übertragbar.

Alle dargestellten Spannungen bestehen folglich aus einer Kombination von lokalen Dehnungsgrößen und den Ausgangsquerschnitten A_0 des relevanten Probenbereichs. Die Zug-

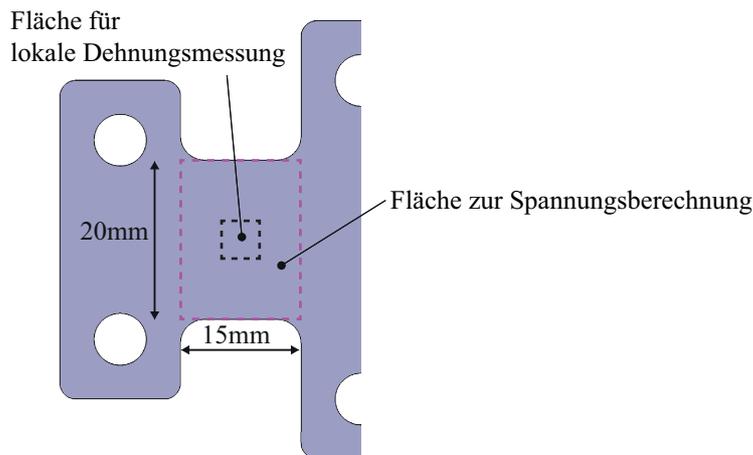


Abbildung 5.23.: Vergleich des Messbereichs der lokalen Dehnungsmessung mit der zur Spannungsberechnung relevanten Querschnittsfläche

probe weist in dem Zusammenhang eine Besonderheit auf, da aufgrund des zweidimensionalen, ebenen Messbereichs die zu den Längsdehnungen korrespondierenden Querdehnungen ebenfalls erfasst worden sind. Damit ist es prinzipiell möglich, Querschnittsverjüngungen im Zugversuch zu berechnen. Bezüglich der Auswertung der Querdehnung ist jedoch zu beachten, dass die Querkontraktionszahl bei viskoelastischen Materialien nicht skalarwertig, sondern eine Funktion der Zeit bzw. der Frequenz ist, wie die Auswertung des Relaxationsversuchs (Abb. 5.21) zeigt. Die Zeit- bzw. Frequenzabhängigkeit wurde zum Beispiel auch von TSCHOEGL [158] und LAKES [88] herausgearbeitet. Weiterhin verfügt die Querkontraktionszahl über eine Temperaturabhängigkeit, da sich ein teilkristalliner Thermoplast wie Polyamid 12 oberhalb seiner Glasübergangstemperatur je nach Kristallinitätsgrad unterschiedlich stark erweicht und schließlich in die Schmelze übergeht. Somit wird sich die Querkontraktionszahl bei höheren Temperaturen in Richtung eines inkompressiblen Verhaltens $\nu = 0.5$ entwickeln. Messungen zeigen, dass Polyamid 6 im luftfeuchten Zustand im Temperaturbereich zwischen -20°C und $+60^{\circ}\text{C}$ eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0.39 \dots 0.45$ besitzt. Andere Polyamid-Typen zeigen ein ähnliches Verhalten [147]. Das bei Raumtemperatur aufgenommene Messergebnis von $\nu \approx 0.4$ für Polyamid 12 fügt sich also gut in die Werte aus der Literatur ein. Es steht jedoch lediglich das Messergebnis bei Raumtemperatur zur Verfügung. Das zeitabhängige Verhalten lässt darüber hinaus den Schluss zu, dass die Querdehnung zudem von der Belastungsgeschwindigkeit abhängt [30, 94]. Im Ratenversuch wurde die Querdehnung bei einer Transversengeschwindigkeit von $\dot{u} = 1 \text{ mm/min}$ aufgezeichnet. Die zur Querkontraktion ermittelten Messdaten bei einer Temperatur und einer Dehnrage können demnach nicht zur vollumfänglichen Anpassung des Materialmodells dienen. Es ist jedoch möglich, die Modellantworten zur Querkontraktion sowohl qualitativ als auch quantitativ abzugleichen und die Messwerte als Indikationswerte zu nutzen.

5.4. Ergebnisse der mechanischen Experimente

Ziel der mechanischen Experimente ist die phänomenologische Charakterisierung makroskopischer Materialeigenschaften [65, 83]. Diese Vorgehensweise unterscheidet sich grundsätzlich von der mikromechanischen Herangehensweise, bei der Wechselwirkungen zwischen den Molekülketten abgebildet werden sollen. Hierzu gibt es eine Reihe von Arbeiten, die sich mit elastomeren Strukturen beschäftigen [8, 69, 68, 79]. Für mikromechanische Herangehensweise bei der Modellierung von teilkristallinen Thermoplasten seien beispielsweise die Arbeiten von BOYCE [18], GUEGUEN [53] oder LLANA & BOYCE [102] genannt. Die mechanischen Kennwerte von Polymeren hängen charakteristisch von inneren Variablen ab, die sich wiederum als Evolutionsgleichungen in Abhängigkeit der Geschichte entwickeln. So spielt die Dehnrage bei der Durchführung der mechanischen Experimente eine entscheidende Rolle. Weiterhin ist die Temperatur als wichtige Prüfbedingung zu beachten.

5.4.1. Relaxationsversuche

Ursächlich für die Geschichtsabhängigkeit der mechanischen Eigenschaften von Polymeren ist ein Spektrum molekularer Relaxationsprozesse, die unterschiedliche Relaxationszeiten besitzen. Diese Relaxationsprozesse werden auf makroskopischer, phänomenologischer Ebene durch Evolutionsgleichungen für innere Zustandsvariablen der Modelle beschrieben. Die hier verwendeten inneren Zustandsvariablen bilden die Gesamtheit der inelastischen Effekte ab. Für viskoelastische Effekte gilt: Je weiter Deformationsereignisse zurückliegen, desto weniger werden die Spannungen im aktuellen Zeitpunkt beeinflusst [64]. Um diese inneren Zustandsvariablen für die viskoelastischen Effekte zu erfassen, bietet sich der Relaxationsversuch an, bei dem zum Zeitpunkt t_0 ein Verzerrungszustand hergestellt und in der Folge konstant gehalten wird. Durch die Spannungsantwort im Zeitverlauf kann das schwindende Gedächtnis des Materials beobachtet werden. Das Herstellen des Verzerrungszustands kann praktisch nicht über einen „idealen Sprung“ erfolgen. Die Verzerrungsgeschwindigkeit ist einerseits so schnell zu wählen, dass das Kurzzeitgedächtnis des Materials nicht schon im Verlauf des Verzerrungssprungs angeregt wird. Andererseits ist sie so langsam zu wählen, dass die Spannungsantwort nicht durch Effekte, die aus der Maschinensteifigkeit resultieren, überlagert wird. Relaxationsversuche wurden mit allen drei Probengeometrien in einem Temperaturbereich von 0°C bis 90°C durchgeführt. Je Temperaturstufe wurden die Relaxationsversuche drei Mal wiederholt. Die Identifikation der Parameter erfolgt anhand der Mittelwerte. Die Standardabweichung ist jeweils dargestellt. Beispielfhaft sind in Abb. 5.24 die Ergebnisse der drei Einzelversuche bei 20°C sowie die Auswertungsergebnisse mit Mittelwert und Standardabweichung dargestellt. Für die anderen Temperaturen sind die Ergebnisse der Relaxationsversuche in Abb. 5.25 zusammengefasst.

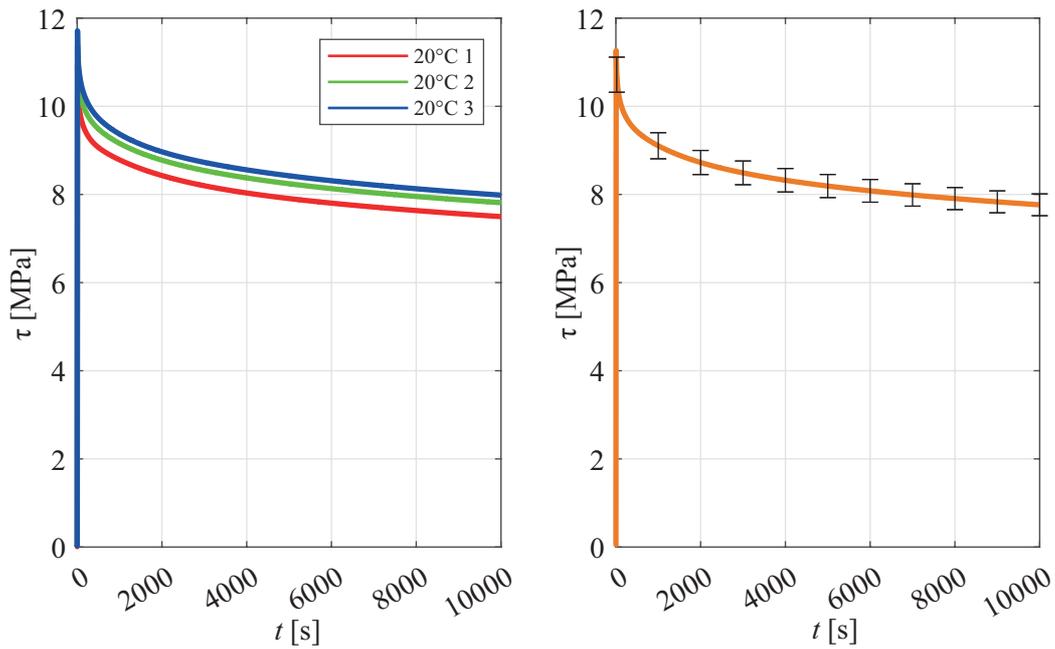


Abbildung 5.24.: Relaxationsversuch der Rohrprobe für Torsionsbelastung bei 20°C

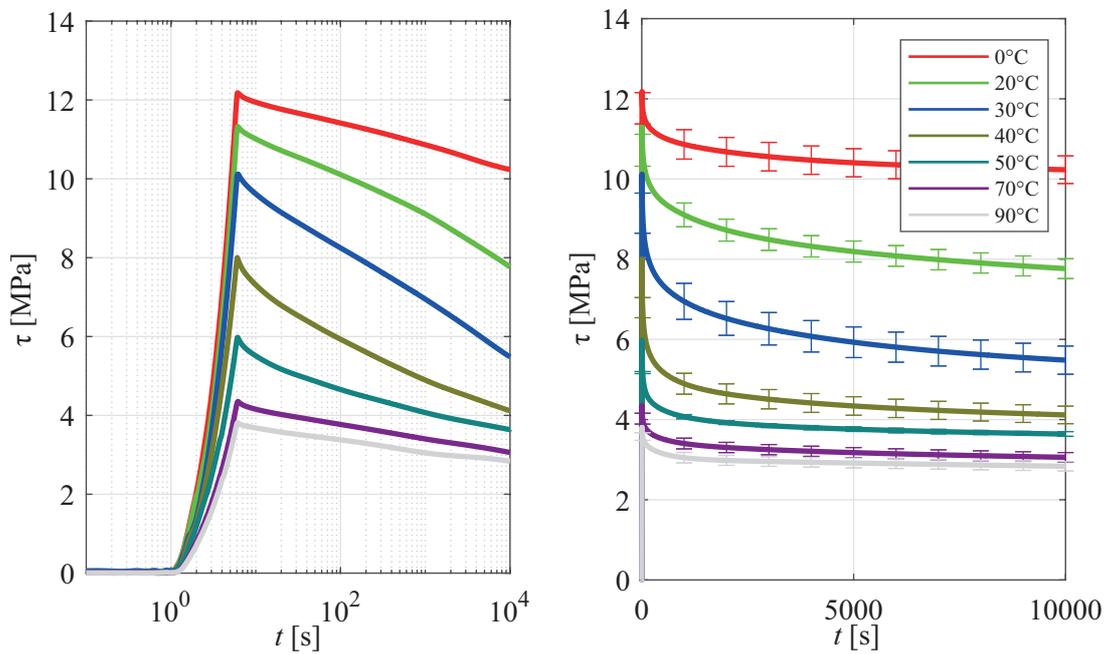


Abbildung 5.25.: Relaxationsversuche der Rohrprobe für Torsionsbelastung im Temperaturbereich von 0°C bis 90°C

Neben der Geschichtsabhängigkeit des Materials lässt sich in den Abbildungen auch eine

starke Temperaturabhängigkeit erkennen. In der halblogarithmischen Darstellung in Abb. 5.25 können grob zwei Gruppen ausgemacht werden, deren qualitativer Kurvenverlauf sich ähnelt (0°C bis 30°C & 40°C bis 90°C) und die durch die Glasübergangstemperatur $T_g = 37^\circ\text{C}$ getrennt sind. Dieses Verhalten korrespondiert mit den Erkenntnissen aus der dynamisch-mechanischen Analyse (Abschnitt 2.4.2). Insbesondere die halblogarithmische Darstellung lässt erkennen, dass am Versuchsende noch kein Gleichgewichtszustand erreicht worden ist. Um das Langzeitverhalten des Materials über die Dauer des Relaxationsversuchs hinaus abzuschätzen, wird bei Polymeren das Zeit-Temperatur-Superpositionsprinzip angewendet. Die bereits angesprochenen molekularen Relaxationsprozesse laufen bei höheren Temperaturen schneller ab [40, 39]. Voraussetzung für die Anwendung ist das Vorliegen eines thermorheologisch einfachen Materials. Das bedeutet, dass die molekularen Prozesse bei höheren Temperaturen schneller ablaufen, sich aber in Anzahl und Art nicht ändern [137]. Praktisch wird der Verlauf der Spannung durch horizontale Verschiebung der Temperaturkurven relativ zu einer Referenztemperatur T_0 zur Deckung gebracht. Dadurch kann eine Masterkurve erstellt werden, die das Verhalten bei der Referenztemperatur auf größere Zeitskalen extrapoliert. Zur mathematischen Abbildung der Verschiebungsfaktoren a_T gibt es einige Ansätze, die ihren Ursprung in der chemischen Reaktionskinetik haben. Aus der eher als „Faustformel“ bekannten van't-Hoff'schen Regel, die besagt, dass sich die Geschwindigkeit chemischer Reaktionen bei einer Temperaturerhöhung von 10°C etwa verdoppelt bis vervierfacht, wurde schließlich 1889 die Arrhenius-Gleichung entwickelt, nach der die Verschiebungsfunktion durch

$$\log(a_T) = \frac{E_A}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (5.7)$$

berechnet werden kann, wobei E_A die zu bestimmende Aktivierungsenergie und R die universelle Gaskonstante ist [13]. Im Bereich des Glasübergangs und darüber hinaus folgen die Verschiebungsfaktoren eher aus der Williams-Landel-Ferry-Gleichung (WLF-Gleichung) [165]

$$\log(a_T) = -\frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + T - T_0}, \quad (5.8)$$

die über die beiden Faktoren C_1 und C_2 angepasst werden kann [51]. In Abb. 5.26 sind die manuell verschobenen Relaxationsfunktionen abgebildet. Während die Anpassung der Verschiebungsfaktoren mithilfe der Gleichungen (5.7) und (5.8) über den gesamten Temperaturbereich nicht gelingt, kann für den Bereich von 40°C bis 90°C , also oberhalb der Glasübergangstemperatur, die WLF-Gleichung mit den Parametern $C_1 = 8.83$ und $C_2 = 55.74$ K in guter Näherung angepasst werden (Abb. 5.27).

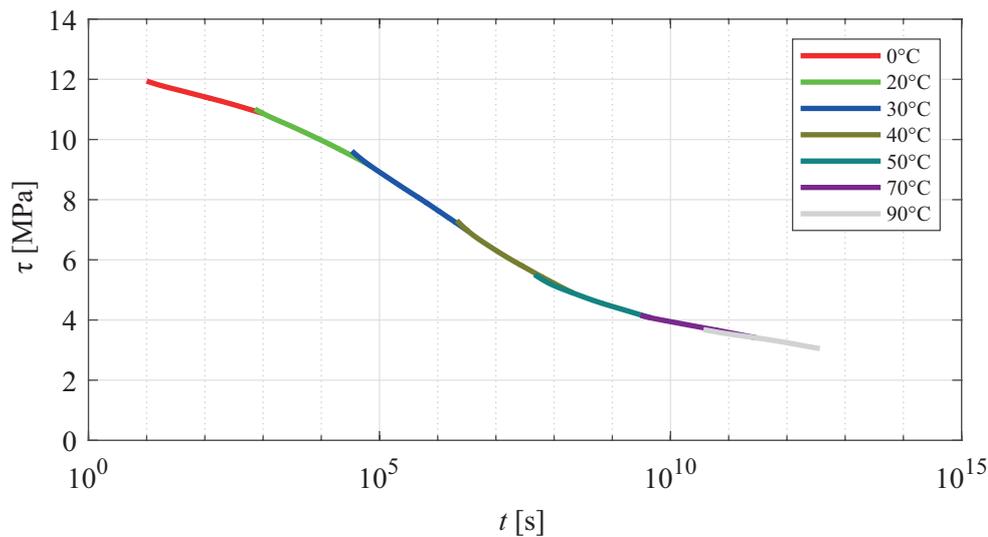


Abbildung 5.26.: Manuelle Zeit-Temperatur-Verschiebung der Relaxationsfunktionen für die Referenztemperatur $T_0 = 0^\circ\text{C}$

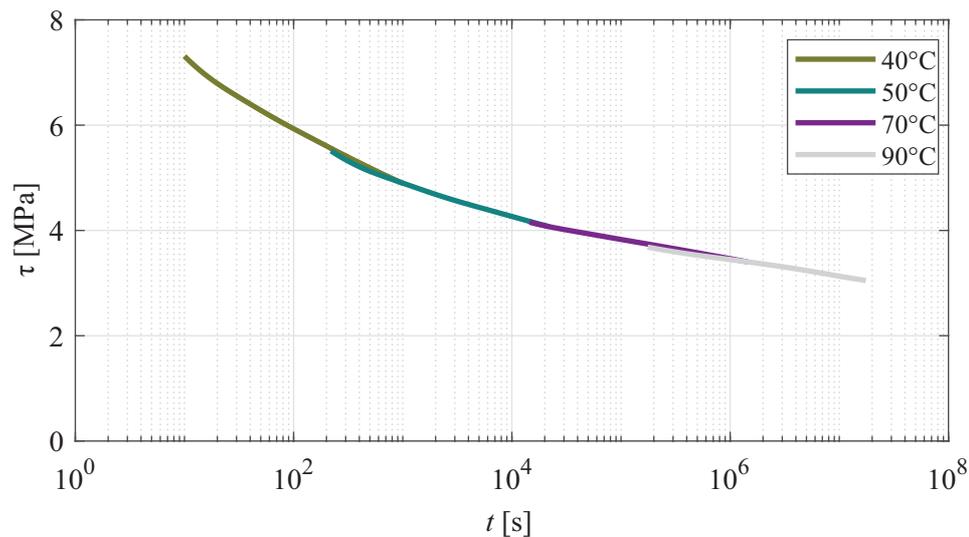


Abbildung 5.27.: Zeit-Temperatur-Verschiebung der Relaxationsfunktionen durch die WLF-Gleichung für die Referenztemperatur $T_0 = 40^\circ\text{C}$

Für die Modellierung wird deviatorisch ohne Gleichgewichtsfeder gearbeitet und das Material somit als ein hoch scherviskoses Fluid modelliert. Aufgrund seiner chemischen Beständigkeit sowie der guten Verschleiß- und Ermüdungsfestigkeit wird PA12 bevorzugt in flüssigkeitsführenden Rohren und Schläuchen eingesetzt [40]. Prozessflüssigkeiten, insbesondere Schmier- und Kühlflüssigkeiten, nehmen im Einsatz häufig Temperaturen an, die oberhalb der Glasübergangstemperatur von PA12 liegen. Daher wird die Modellierung auf den Bereich oberhalb der Glasübergangstemperatur beschränkt.

Die Ergebnisse der Relaxationsversuche mit der Zugprobe sind in Abb. 5.28 dargestellt. Bei den Zugproben stellt sich oberhalb T_g ein Gleichgewichtszustand ein. Für den volumetrischen Anteil des Materialmodells ist folglich eine Gleichgewichtsfeder vorzusehen. Fernab der Motivation anhand des Kurvenverlaufs der Relaxationsversuche bedeutet das Fehlen einer volumetrischen Gleichgewichtsfeder, dass sich das Material auf einen einzigen materiellen Punkt komprimieren ließe. Dies scheint, unabhängig von der Zeitskala, nicht realistisch [171]. Außerdem wird durch die volumetrische Gleichgewichtsfeder dem ersten Axiom der Rheologie nach REINER Rechnung getragen, das besagt, dass sich alle (isotropen) Materialien unter hydrostatischem Druck wie ideal-elastische Körper verhalten [125, 126]. Folglich sollten also innerhalb des Materialmodells alle inelastischen Effekte durch die gestaltsändernden Spannungsanteile abgebildet werden.

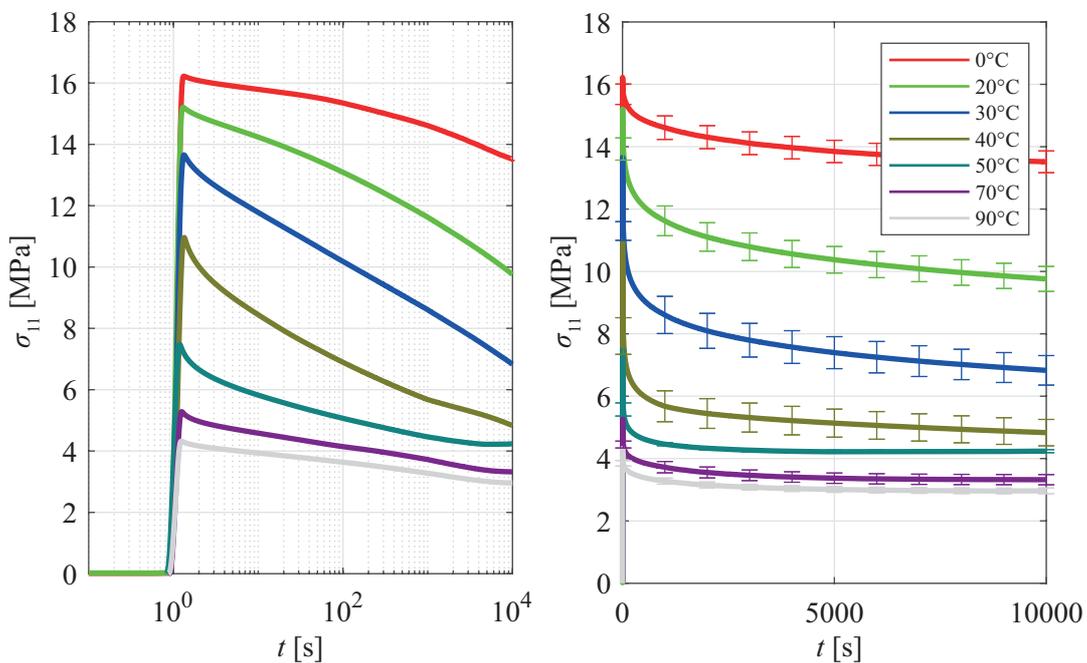


Abbildung 5.28.: Relaxationsversuche der Zugprobe im Temperaturbereich von 0°C bis 90°C

Um die Materialparameter zu validieren, wurden Relaxationsversuche mit der Scherprobe sowie mit uniaxialen Zugversuchen der Rohrprobe durchgeführt, deren Ergebnisse im Anhang A.1 und A.2 dokumentiert sind.

5.4.2. Experimente mit verschiedenen Dehnraten

Neben dem schwindenden Gedächtnis verhalten sich viskoelastische Materialien ratenabhängig. Aus den dynamisch-mechanischen Vorversuchen wurde die Hypothese abge-

leitet, dass das Material eine nichtlineare Ratenabhängigkeit zeigt. Im Versuchsprogramm wurde jedes Experiment für jede Probengeometrie und jede Temperatur dreifach wiederholt und statistisch ausgewertet. Abbildung 5.29 zeigt beispielsweise drei Torsionsversuche bei einer monotonen Traversengeschwindigkeit von $\dot{\varphi} = 10^\circ/\text{min}$ und einer Temperatur von 20°C sowie deren Mittelwert und Standardabweichung.

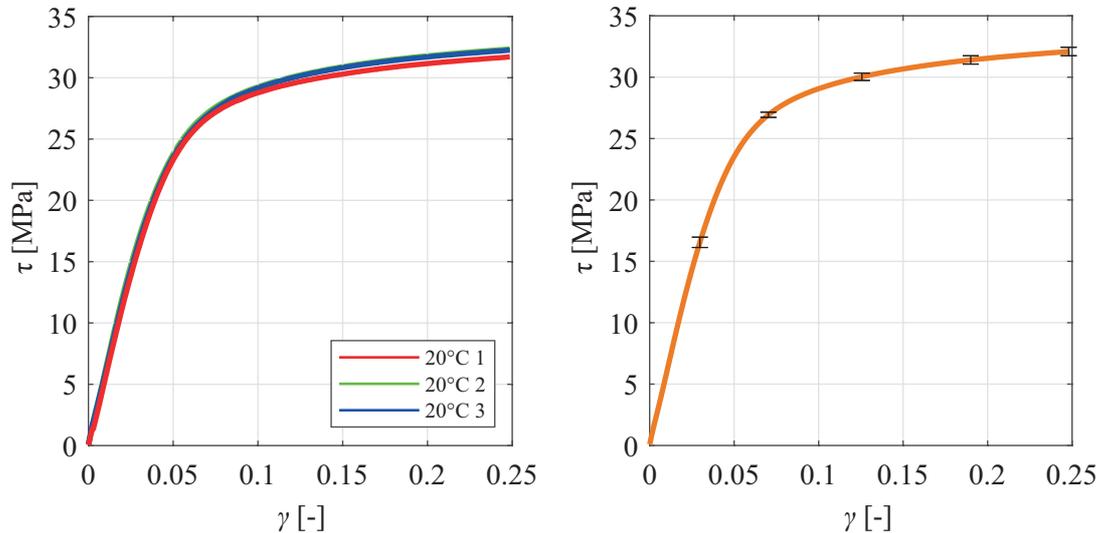


Abbildung 5.29.: Monotoner Ratenversuch der Rohrprobe bei $T = 20^\circ\text{C}$ und $\dot{\varphi} = 10^\circ/\text{min}$

Monotone Ratenversuche im gesamten Temperaturbereich

Die Mittelwerte der Ratenversuche in Temperaturbereich von 0°C bis 90°C sind für die Torsionsversuche der Rohrprobe in Abb. 5.30 dargestellt. Die Ergebnisse für die Zugprobe befinden sich in Abb. 5.31. Die Zugversuche mit konstanter Dehnrate ähneln qualitativ dem Verhalten im Torsionsversuch. Die Grenzen für die Verzerrung sind durch die Grenzen der lokalen, optischen Verzerrungsmessungen (Abschnitt 5.3) definiert. Bei den hier dargestellten Versuchen konnte kein Versagen der Proben festgestellt werden. Mit steigender Temperatur ist eine Abnahme der Festigkeit feststellbar. Aus praktischer Sicht sind Bereiche geringerer Festigkeit relevant für die rechnerische Bauteilauslegung. Dies ist ein weiterer Grund für die priorisierte Modellierung oberhalb der Glasübergangstemperatur.

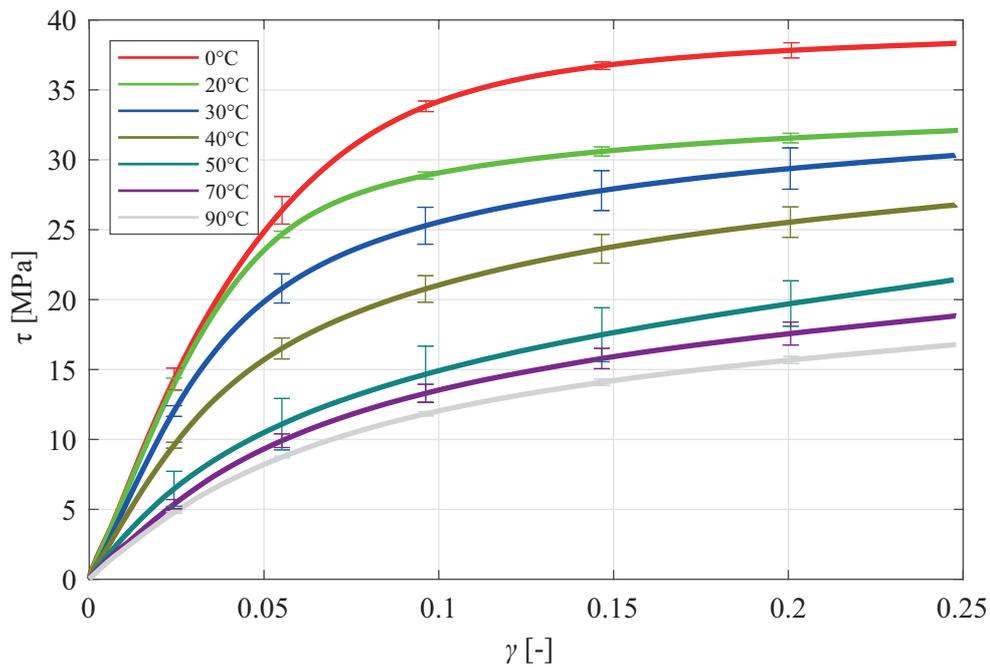


Abbildung 5.30.: Monotone Ratenversuche der Rohrprobe bei $\dot{\varphi} = 10^\circ/\text{min}$

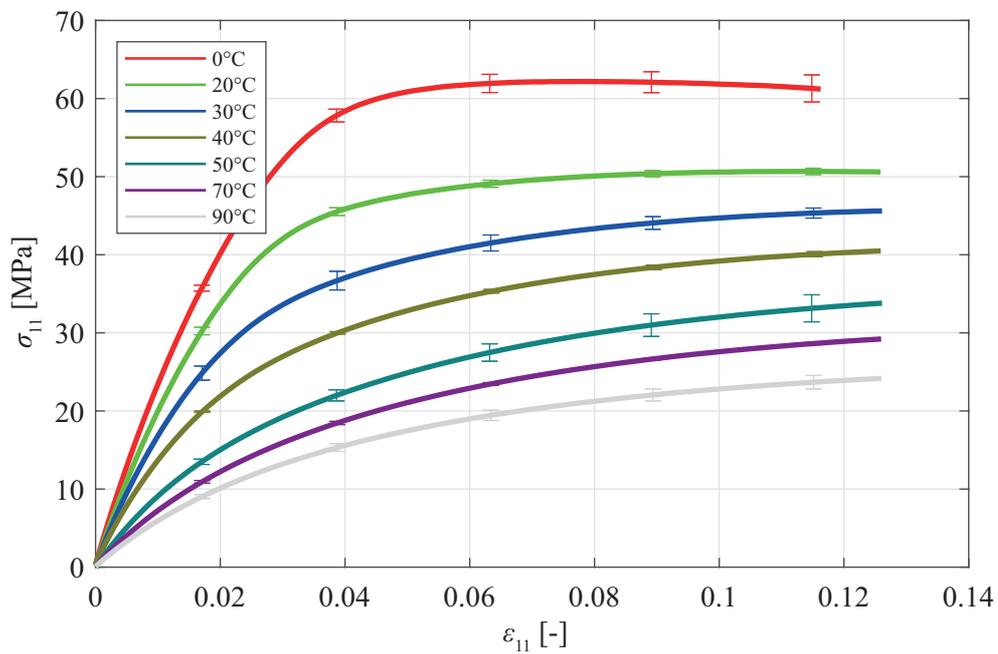


Abbildung 5.31.: Monotone Ratenversuche der Zugprobe bei $\dot{u} = 1 \text{ mm}/\text{min}$

Ratenversuche bei einer Temperatur von 50°C und verschiedenen Dehnraten

Abbildung 5.32 zeigt Torsionsversuche, bei denen die Winkelgeschwindigkeit der Maschinentraverse um drei Zehnerpotenzen variiert wurde. Es ist eine starke nichtlineare Ratenabhängigkeit zu erkennen, die sich bei den anderen Versuchstemperaturen ähnlich darstellt. Die Nichtlinearität in der Ratenabhängigkeit wird durch die Zugversuche, deren Ergebnisse in Abb. 5.33 dargestellt sind, bestätigt. Bei den Torsionsversuchen ist eine große Überlappung der Standardabweichungen zwischen den einzelnen Traversengeschwindigkeiten zu erkennen. Dies legt die Empfehlung nahe, größere Abstände zwischen den einzelnen Dehnraten zu wählen, um die Unterschiede deutlicher werden zu lassen. Deutlich höhere Dehnraten können jedoch durch die Universalprüfmaschine nicht mehr abgebildet werden. Bei deutlich niedrigeren Dehnraten wird das Versuchsprogramm zeitlich aufwendiger. Bei einer Traversengeschwindigkeit von $\dot{\varphi} = 0.001^\circ/\text{min}$ dauert ein einzelner Torsionsversuch über 10 Tage. In einem derart langen Versuchszeitraum müssen eventuelle Alterungseffekte und Temperaturschwankungen berücksichtigt werden, die die Versuchsauswertung erschweren. Daher wird das Modell auf Basis der vorhandenen Mittelwerte angepasst.

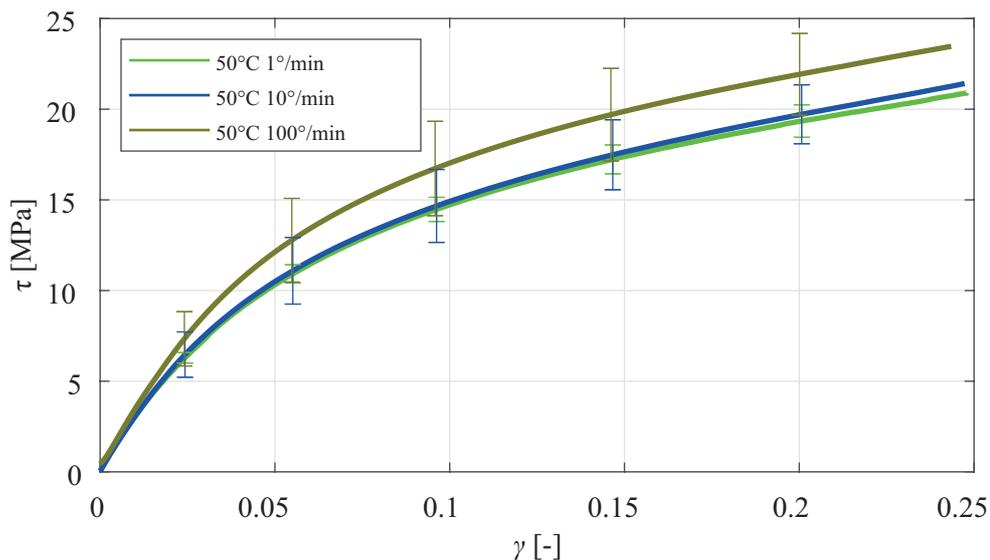


Abbildung 5.32.: Monotone Ratenversuche der Rohrprobe bei $T = 50^\circ\text{C}$

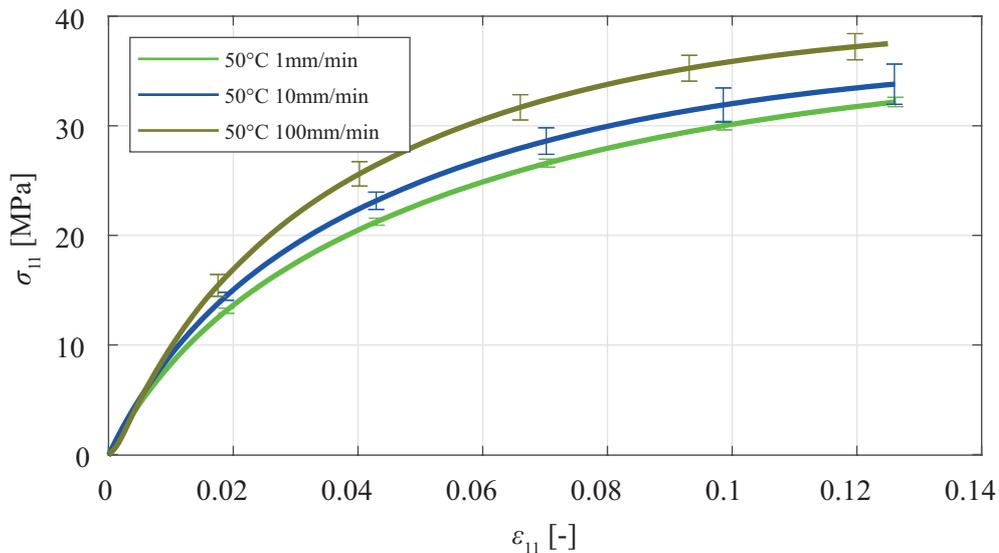


Abbildung 5.33.: Monotone Ratenversuche der Zugprobe bei $T = 50^\circ\text{C}$

Zur Validierung der Parameter, die anhand der Zug- und Torsionsversuche identifiziert wurden, dienen die Zugversuche mit der Rohrprobe sowie die einfachen Scherversuche. Die Versuchsergebnisse befinden sich im Anhang A.1 und A.2.

5.4.3. Zyklische Versuche und Stufenversuch

Alle zyklischen und Stufenversuche werden bei 20°C oder 50°C durchgeführt, um sich definitiv ober- oder unterhalb des Glasübergangsbereichs zu befinden. Die Modellierung konzentriert sich auf die Versuche bei 50°C . Versuche unterhalb der Glasübergangstemperatur dienen zur Bestätigung eines phänomenologisch ähnlichen Verhaltens des Werkstoffs unterhalb der Glasübergangstemperatur.

Der Stufenversuch ist eine Reihung von Relaxationsversuchen mit kleinen Dehnungssprüngen und kürzeren, intermittierenden Haltezeiten. Die Relaxationsversuche wurden mit einem Maschinenweg $u = 0.4 \text{ mm}$ und einer Relaxationszeit von $t = 10000 \text{ s}$ durchgeführt (Abb. 5.28). Der Maschinenweg u im Stufenversuch entspricht dem Wert der Relaxationsversuche, wird jedoch bei einer Zwischenhaltezeit von 1000 s in vier Stufen von je 0.1 mm unterteilt. Der Weg zurück zur Ausgangslage wird auf dieselbe Weise beschriftet. Die in Abb. 5.34 dargestellten Kurven für Be- und Entlastung würden sich bei deutlich länger gewählten Zwischenhaltezeiten treffen und in ihren Schnittpunkten die Stützstellen für die Gleichgewichtskurve vorgeben. Anders als bei den Relaxations- und monotonen Ratenversuchen wurden Stufen- und zyklische Versuche nicht wiederholt. Es gibt folglich keine

Mittelwerte und Standardabweichungen. Dies ist insbesondere bei der späteren Einordnung der Simulationsergebnisse zu beachten.

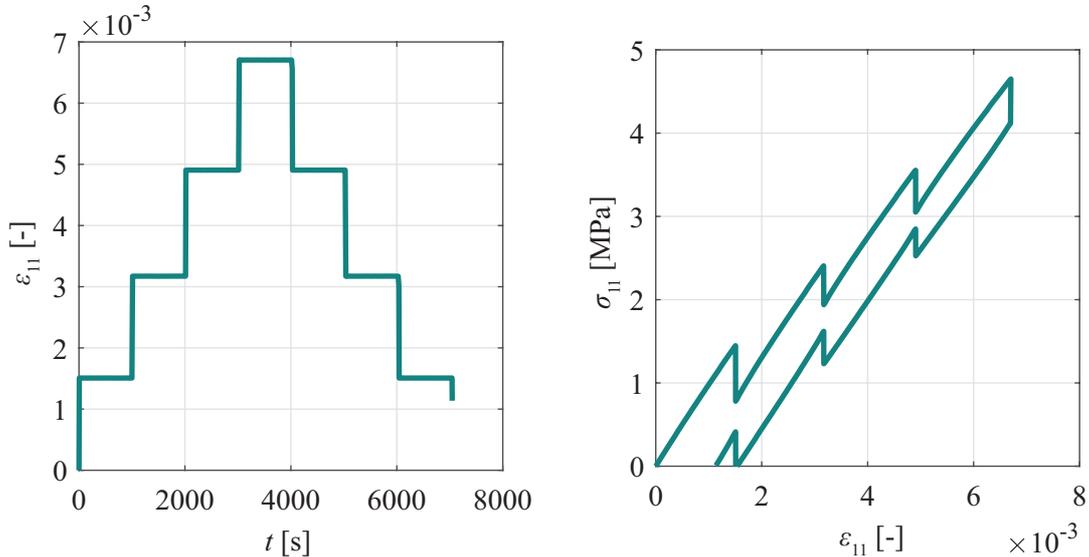


Abbildung 5.34.: Stufenversuch der Zugprobe bei einer Traversengeschwindigkeit von $\dot{u} = 1$ mm/min.

Für die Zugprobe wurden neben dem Stufenversuch auch zyklische Versuche durchgeführt. Bisher sind alle Versuche mit neuen Proben durchgeführt worden. Neu bedeutet, dass die thermische und mechanische Geschichte nur durch den Herstellprozess und die anschließende Lagerung bei Raumklima gekennzeichnet ist. Durch die zyklischen Versuche soll untersucht werden, wie sich das Material bei Mehrfachbelastung verhält. Dabei kann außerdem die Relaxation bei zyklischer Belastung beobachtet werden. Da die Zugprobe nicht auf Druck belastet werden kann (es würde unmittelbar ein Knickfall eintreten), sind die zyklischen Versuche im Zug-Schwellbereich durchgeführt worden. Dabei wurde der Weg der Maschinentraverse mit $u = 0.3 \pm 0.1$ mm sowie $u = 1.0 \pm 0.5$ mm vorgegeben. Es wurden drei Zyklen gefahren, wobei die Traversengeschwindigkeit mit $\dot{u} = 1$ mm/min langsam gewählt wurde. Die Abbildungen 5.35 und 5.36 zeigen die Versuchsergebnisse der zyklischen Zugversuche mit drei Zyklen.

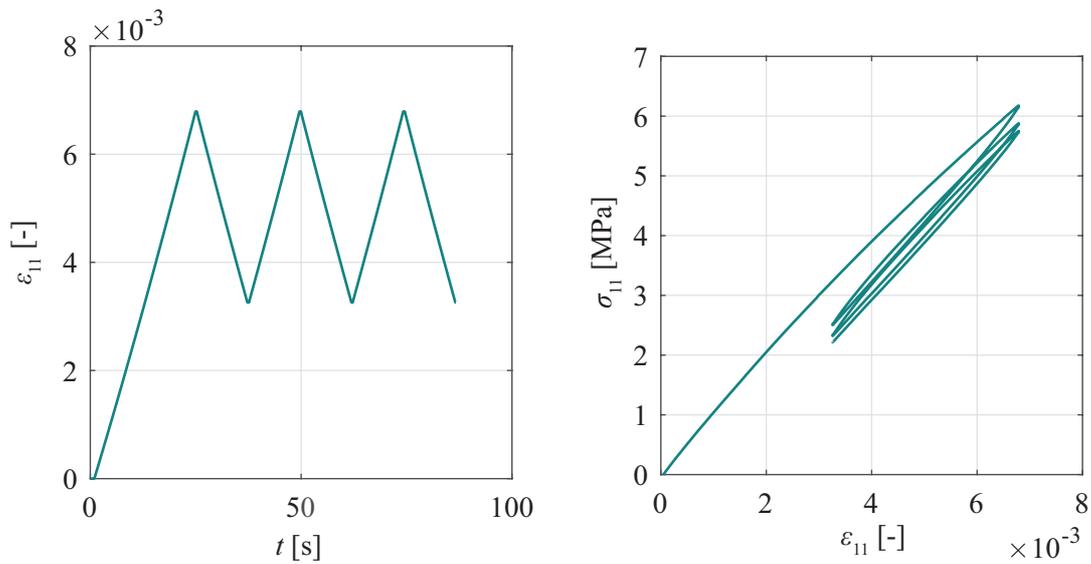


Abbildung 5.35.: Zyklischer Versuch der Zugprobe bei einem Traversenweg von $u = 0.3 \pm 0.1$ mm bei $T = 50^\circ\text{C}$

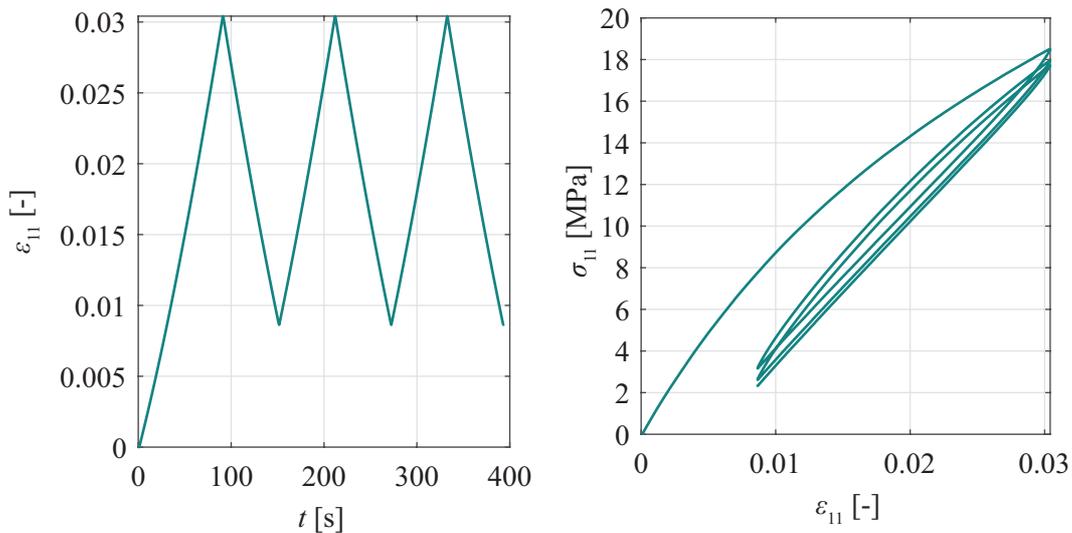


Abbildung 5.36.: Zyklischer Versuch der Zugprobe bei einem Traversenweg von $u = 1.0 \pm 0.5$ mm bei $T = 50^\circ\text{C}$

Zyklische Torsionsversuche wurden ebenfalls mit verschiedenen Dehnungsniveaus durchgeführt. Für einen Maschinenwinkel von $\varphi = 6^\circ$ und den beiden untersuchten Temperaturen sind die Ergebnisse in Abb. 5.37 dargestellt. Die Ratenabhängigkeit über drei Zehnerpotenzen der Traversengeschwindigkeit stellt sich ähnlich wie bei den monotonen Scher- und Zugversuchen dar. Das vollständige Versuchsprogramm der zyklischen Versuche befindet

sich im Anhang A.3. Die Relaxation bei zyklischer Belastung im Verlauf von fünf Zyklen ist nur sehr schwach ausgeprägt.

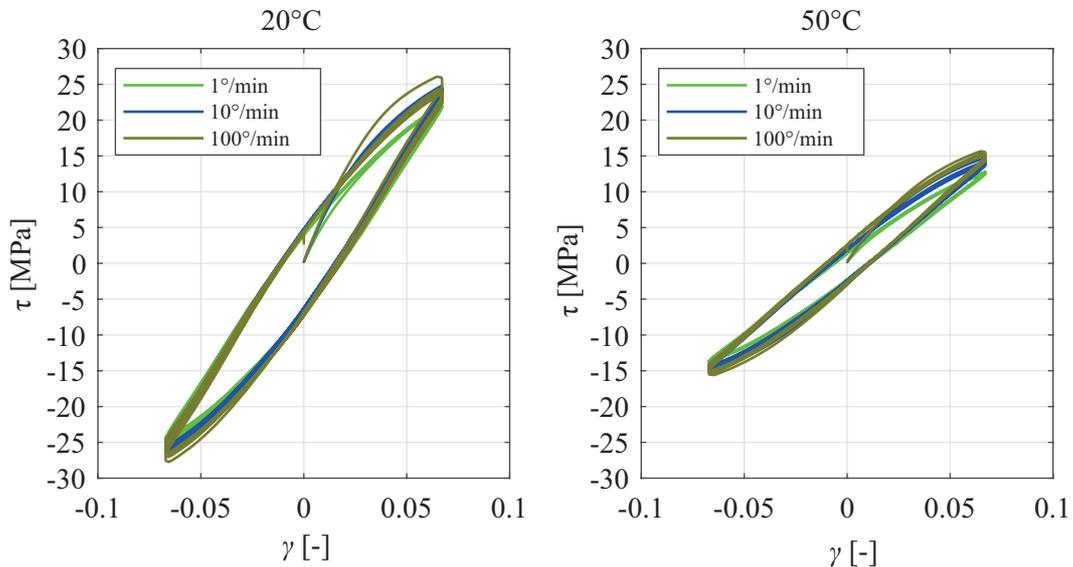


Abbildung 5.37.: Zyklische Versuche bei $\varphi = 6^\circ$

Insbesondere bei hohen Raten kann bei 20°C eine Differenz im qualitativen Verlauf zwischen der ersten und den darauffolgenden Belastungszyklen ausgemacht werden. Bei größeren Deformationen ist dieser Unterschied deutlich erkennbar, wie Abb. 5.38 zeigt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist hier nur eine Traversengeschwindigkeit dargestellt. Der qualitative Verlauf der Kennlinie ist bei anderen Traversengeschwindigkeiten ähnlich (siehe Anhang A.3).

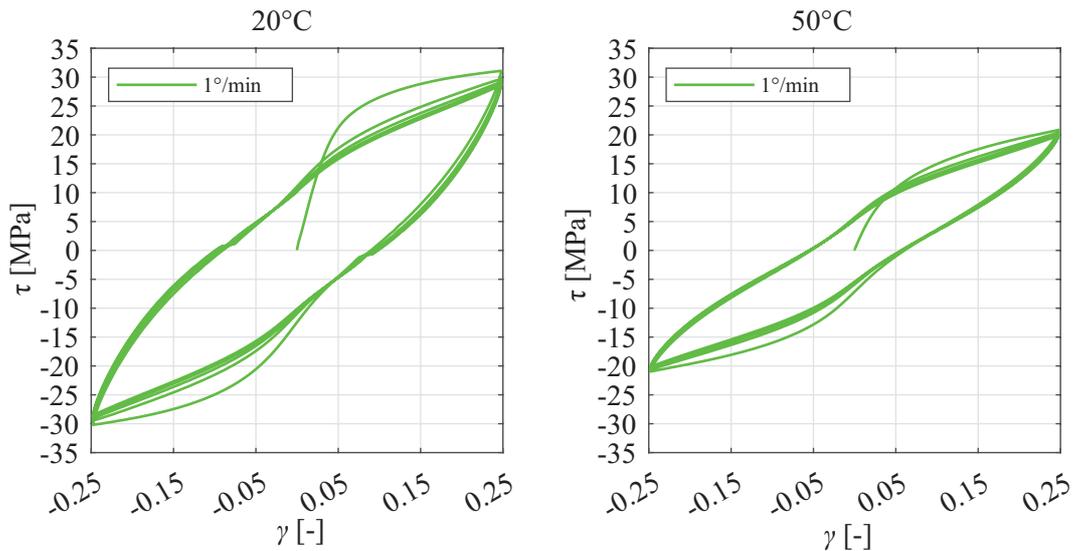


Abbildung 5.38.: Zyklische Versuche bei $\varphi = 15^\circ$ und $\dot{\varphi} = 1^\circ/\text{min}$

5.5. Das kombinierte, dreidimensionale Materialmodell der Viskoelastizität und endochronen Plastizität

Ausgehend vom 3-Parameter-Modell (Abb. 4.2), das in Abschnitt rein deviatorisch eingeführt worden ist, wird das Materialmodell nun dreidimensional hergeleitet [60]. Formal wird aus der Scherung γ der zweistufige Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ und aus der Scherspannung τ wird der ebenfalls zweistufige Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$. Die Gesamtdehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$ für die Gleichgewichtsfeder zerfällt für das Überspannungselement additiv in die elastische Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}$ und die inelastische Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{in}}$.

Für kleine Deformationen werden die Dehnung der Gleichgewichtsfeder $\boldsymbol{\varepsilon}$ sowie die Dehnung der Feder des Überspannungselements $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}$ als Prozessvariablen gewählt.

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}, \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (5.9)$$

Als freie Energiefunktion dient das Hookesche Materialgesetz für die im Modell enthaltenen linearen Federn

$$W = \rho_0 \psi = \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \lambda (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I})^2 + \mu_{\text{el}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} + \frac{1}{2} \lambda_{\text{el}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} : \mathbf{I})^2. \quad (5.10)$$

Um die Clausius-Planck-Ungleichung auswerten zu können, ist die Zeitableitung der freien Energiefunktion erforderlich (siehe auch Gleichung (3.53))

$$\rho_0 \dot{\psi} = (2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (2\mu_{\text{el}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} + \lambda_{\text{el}} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}) \mathbf{I}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{el}}. \quad (5.11)$$

Mit $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{el}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}}$ liefert die Clausius-Planck-Ungleichung

$$[\boldsymbol{\sigma} - (2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}) - (2\mu_{\text{el}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} + \lambda_{\text{el}} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}) \mathbf{I})] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + [2\mu_{\text{el}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} + \lambda_{\text{el}} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}) \mathbf{I}] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}} \geq 0. \quad (5.12)$$

Nach deren Auswertung ergibt sich die Spannung

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu_{\text{el}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} + \lambda_{\text{el}} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}) \mathbf{I} \quad (5.13)$$

und die Dissipationsrestungleichung

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}} \geq 0. \quad (5.14)$$

Im Fall der in Kapitel 4 vorgestellten Materialmodelle lauten die Evolutionsgleichungen für das viskoelastische Maxwell-Element (Gl. 4.1)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}} = \frac{1}{\eta} \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} \quad (5.15)$$

und für das endochrone Element (Gl. 4.9)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}} = \frac{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\|}{\sigma_{\text{F}}} \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}. \quad (5.16)$$

Die Dissipationsrestungleichung wird erfüllt, wenn die Materialparameter $\eta > 0$ und $\sigma_{\text{F}} > 0$ sind.

Der Zusammenhang zwischen den Lamé-Parametern (μ , λ), Schubmodul G und Kompressionsmodul K wurde in Abschnitt 3.3 behandelt und wird an dieser Stelle detaillierter dargestellt. Der Lamé-Parameter μ entspricht dem Schubmodul G . Für den Lamé-Parameter λ gilt

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G. \quad (5.17)$$

Angewendet auf die Nichtgleichgewichtsspannung aus Gl. 5.13 erhält man

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} = 2G_{\text{el}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} + \left(K_{\text{el}} - \frac{2}{3}G_{\text{el}} \right) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}})\mathbf{I} \quad (5.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} = K_{\text{el}} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}})\mathbf{I} + 2G_{\text{el}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} - \frac{2G_{\text{el}}}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}})\mathbf{I} \quad (5.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} = K_{\text{el}} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}})\mathbf{I} + 2G_{\text{el}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}})\mathbf{I} \right) \quad (5.20)$$

und kann daraus die Nichtgleichgewichtsspannung in Abhängigkeit des Scher- und Kompressionsmoduls ermitteln

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} = 3K_{\text{el}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}^{\text{V}} + 2G_{\text{el}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{el}}^{\text{D}} \quad (5.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} = 3K_{\text{el}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{V}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{in}}^{\text{V}}) + 2G_{\text{el}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{D}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{in}}^{\text{D}}) . \quad (5.22)$$

Um das Materialverhalten der selektiv lasergesinterten Probekörper zu beschreiben, sollen die vorgestellten Materialmodelle additiv kombiniert werden. Aus den beiden Evolutionsgleichungen (5.15) und (5.16) wird

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}} = \left(\frac{1}{\eta} + \frac{|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|}{\sigma_{\text{F}}} \right) \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}} . \quad (5.23)$$

Dieses neue Materialmodell interpoliert zwischen linearer Viskoelastizität bei kleinen Dehnraten und endochroner Plastizität bei hohen Dehnraten. Somit kann die nichtlineare Ratenabhängigkeit sowie die Relaxation bei konstanter Deformation gleichermaßen abgebildet werden. Da im Rahmen des Versuchsprogramms sowohl rein gestaltsändernde Torsionsversuche als auch Zugversuche durchgeführt wurden, ist es zielführend, die Evolutionsgleichung, die sich aus der Dissipationsrestungleichung ergibt, additiv in einen volumetrischen und einen deviatorischen Anteil aufzuteilen. Aus Gl. (5.14) wird

$$(\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^{\text{V}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^{\text{D}}) : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}}^{\text{V}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}}^{\text{D}}) \geq 0 . \quad (5.24)$$

Aufgrund der Symmetrie der Spannungs- und Dehnungstensoren sowie der orthogonalen Ausrichtung von deviatorischen zu volumetrischen Tensoren und deren Auswirkungen auf das Skalarprodukt folgt

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^{\text{V}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}}^{\text{V}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^{\text{D}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{in}}^{\text{D}} \geq 0 . \quad (5.25)$$

Die Evolutionsgleichung des neuen Materialmodells in Gl. (5.23) wird ebenfalls einem volumetrisch-deviatorischen Split unterzogen. Somit ergeben sich die beiden Evolutions-

gleichungen

$$\dot{\epsilon}_{\text{in}}^{\text{D}} = \left(\frac{1}{\eta_{\text{D}}} + \frac{\|\dot{\epsilon}^{\text{D}}\|}{|\sigma_{\text{F}}^{\text{D}}|} \right) 2G_{\text{el}}(\epsilon^{\text{D}} - \epsilon_{\text{in}}^{\text{D}}) \quad (5.26)$$

für den deviatorischen Anteil sowie

$$\dot{\epsilon}_{\text{in}}^{\text{V}} = \left(\frac{1}{\eta_{\text{V}}} + \frac{\|\dot{\epsilon}^{\text{V}}\|}{|\sigma_{\text{F}}^{\text{V}}|} \right) 3K_{\text{el}}(\epsilon^{\text{V}} - \epsilon_{\text{in}}^{\text{V}}) \quad (5.27)$$

für den volumetrischen Anteil. Um die Relaxationszeiten zu identifizieren, werden die Zusammenhänge

$$t_{\text{r}}^{\text{D}} = \frac{\eta^{\text{D}}}{G_{\text{el}}} \quad (5.28)$$

sowie

$$t_{\text{r}}^{\text{V}} = \frac{\eta^{\text{V}}}{K_{\text{el}}} \quad (5.29)$$

genutzt. So können die Evolutionsgleichungen (5.26) und (5.27) zu

$$\dot{\epsilon}_{\text{in}}^{\text{V}} = \left(\frac{3}{t_{\text{r}}^{\text{V}}} + \frac{3K_{\text{el}}\|\dot{\epsilon}^{\text{V}}\|}{|\sigma_{\text{F}}^{\text{V}}|} \right) (\epsilon^{\text{V}} - \epsilon_{\text{in}}^{\text{V}}) \quad (5.30)$$

und

$$\dot{\epsilon}_{\text{in}}^{\text{D}} = \left(\frac{2}{t_{\text{r}}^{\text{D}}} + \frac{2G_{\text{el}}\|\dot{\epsilon}^{\text{D}}\|}{|\sigma_{\text{F}}^{\text{D}}|} \right) (\epsilon^{\text{D}} - \epsilon_{\text{in}}^{\text{D}}) \quad (5.31)$$

umgeschrieben werden. Mithilfe dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen können die Parameter des deviatorischen und volumetrischen Anteils der inelastischen Dehnungen unabhängig voneinander sequentiell identifiziert werden. Die bisher dargestellten Gleichungen gelten für das 3-Parameter-Modell. Die Evolutionsgleichungen (5.30) und (5.31) sind für jedes Überspannungselement zu lösen. Die Nichtgleichgewichtsspannung der diskreten rheologischen Kette berechnet sich durch die Summe der Spannungen jedes Überspannungselements, wobei die Anzahl der deviatorischen und volumetrischen Überspannungselemente nicht gleich sein muss. Wie in Abschnitt 5.4.1 motiviert wurde, existiert für den volumetrischen Spannungsanteil eine Gleichgewichtsspannung, die sich durch

$$\sigma_{\text{eq}}^{\text{V}} = 3K_{\text{eq}}\epsilon^{\text{V}} \quad (5.32)$$

berechnen lässt. Die Gesamtspannung lässt sich bei einer diskreten rheologischen Kette wie

folgt berechnen

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}}^{\text{V}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^{\text{V}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^{\text{D}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}}^{\text{V}} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq},i}^{\text{V}} + \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq},i}^{\text{D}}. \quad (5.33)$$

Somit stehen alle Gleichungen zur Identifikation der Materialparameter t_{r}^{V} , t_{r}^{D} , K_{el} , K_{eq} , G_{el} , $\sigma_{\text{F}}^{\text{V}}$, $\sigma_{\text{F}}^{\text{D}}$ zur Verfügung. Im nächsten Kapitel werden die Materialparameter identifiziert.

6. Parameteridentifikation

Jeder hat einen Plan – bis ihm ins Gesicht geschlagen wird.

Mike Tyson (*1966)

Auf Basis der in Abschnitt 5.5 eingeführten Gleichungen für das Materialmodell mit volumetrisch-deviatorischer Aufteilung werden die Parameter identifiziert, sodass die experimentellen Ergebnisse aus Kapitel 5 bestmöglich abgebildet werden können.

6.1. Identifikations- und Optimierungsstrategie

Bei der Identifikation der Materialparameter stellt sich die Herausforderung, vom beobachteten experimentellen Verhalten auf die Ursache in Form der Materialparameter rückzuschließen. Mathematisch wird eine solche Problemstellung als invers bezeichnet [127]. Zur Lösung des inversen Problems wird eine Fehlerfunktion f definiert, die von den Materialparametern p in Form eines Vektors abhängt. Der Ausgabewert der Funktion ist die Summe der quadrierten Differenz zwischen der experimentell ermittelten Spannung und der berechneten Spannung mit dem aktuellen Parametersatz p und soll minimiert werden. Als experimentelle Daten werden zur Identifikation die Relaxations- und die monotonen Ratenversuche herangezogen. Bei den Daten handelt es sich um ein diskretes Signal mit j Datenpunkten. Die Funktion wird an jedem Datenpunkt ausgewertet, sodass

$$f(p) = \sum_j \|\sigma_j^{\text{exp}} - \sigma_j^{\text{num}}\| \quad (6.1)$$

gilt. Bei den Gleichungen für die Spannungen bzw. für die inelastischen Dehnungen handelt es sich um Differentialgleichungen erster Ordnung, die sich als Anfangswertprobleme gut mit dem impliziten Eulerverfahren¹ lösen lassen. Es wird also ein Parametervektor p definiert, der alle Parameter enthält. Zudem sind die Grenzen der Parameter a priori festzulegen. Dies ist insbesondere bei der Staffelung der Relaxationszeiten und damit der Viskositäten in den Newtonschen Dämpfern von Bedeutung. Die Iterationsvorschrift zur Lösung der Differentialgleichungen sowie die Auswertung der Modellantworten werden in einen

¹Auf die Iterationsvorschrift zum impliziten Eulerverfahren wird in Kapitel 7 genauer eingegangen.

Optimierungsalgorithmus eingebettet, sodass die Modellantwort mit den experimentellen Daten abgeglichen und die Parameter angepasst werden können, bis die Fehlerfunktion Gl. (6.1) ihr Minimum erreicht. Der Optimierungsalgorithmus in MatLab[®] wurde im Verlauf der Parameteridentifikation alternierend eingesetzt. Um einen großen Suchradius bei der Wahl eines neuen Parametersatzes zu realisieren und somit die Fokussierung auf ein lokales Minimum zu vermeiden, wurde das Verfahren *pattern search* [95, 155] eingesetzt. Zudem wurde auf evolutionäre Algorithmen [45, 48] sowie den nichtlinearen Minimierer *fmincon* zurückgegriffen, der bereits im Rahmen der lokalen Dehnungsmessung zum Einsatz gekommen ist (Kapitel 5.3). Die Algorithmen sind im Rahmen dieser Arbeit Mittel zum Zweck. Bezüglich der konkreten Inhalte und Vorgehensweise der einzelnen Optimierungsalgorithmen sei auf die o. g. Literatur verwiesen.

6.2. Identifikation der deviatorischen Materialparameter

6.2.1. Auswertung der Konstitutivgleichungen für den Torsionsversuch

Zunächst wird auf Basis der Torsionsversuche ausschließlich der deviatorische Anteil der Nichtgleichgewichtsspannung angepasst. Die Vorgehensweise zur Anpassung des rein gestaltsändernden Modellbereichs ist bereits in [61] beschrieben. Für den Fall der Scherdehnung ist der symmetrische Dehnungstensor nur auf zwei Positionen besetzt.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Es existiert kein volumetrischer Spannungsanteil. Darüber hinaus wird, wie in Kapitel 5.4.1 motiviert, der deviatorische Anteil ohne Gleichgewichtsspannung modelliert. Zur Identifikation der Relaxationszeiten $t_{r,i}$ stehen die Relaxationsversuche zur Verfügung. Die Schubmodule $G_{el,i}$ werden dabei ebenfalls identifiziert, später aber erneut zur Identifikation freigegeben. Da im Rahmen der Relaxation die Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$ und somit auch das Forbenius-Skalarprodukt verschwindet, geht die Evolutionsgleichung (5.12) in die Evolutionsgleichung des Maxwell-Elements über. Nachdem die Relaxationszeiten identifiziert sind, werden Versuche bei mehreren Scherraten gemeinsam mit dem Relaxationsversuch zur Identifikation der Schubmodule $G_{el,i}$ sowie der Parameter $\sigma_{F,i}^D$ verwendet. Dabei werden die Relaxationszeiten nicht mehr variiert. Um die inelastischen Dehnungen zu berechnen,

ist Gl. (5.31) zu lösen. Die Berechnung der Gesamtspannung aus Gl. (5.33) vereinfacht sich zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq}}^{\text{D}} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\sigma}_{\text{neq},i}^{\text{D}} = \sum_{i=1}^m 2G_{\text{el},i} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{D}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{in},i}^{\text{D}}). \quad (6.3)$$

Die Anzahl der erforderlichen deviatorischen, rheologischen Elemente i wird iterativ ermittelt. Die Relaxationsversuche haben eine Dauer von $t = 10000$ s. Als Startwert für die Anzahl der Elemente können zwei Elemente je zeitlicher Dekade vorgesehen werden. Bei der Staffelung der Relaxationszeiten handelt es sich ebenfalls um einen iterativen Prozess. Der Relaxationsversuch kann letztlich mit $i = 6$ deviatorischen Elementen identifiziert werden (Abb. 6.1).

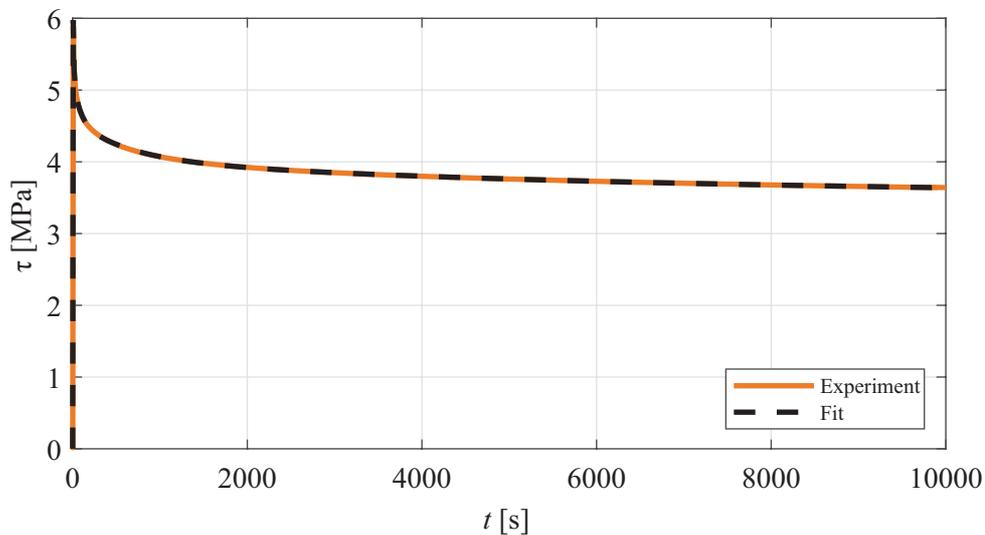


Abbildung 6.1.: Identifikation des Relaxationsversuchs im Torsionsversuch bei 50°C

Die anschließende, kombinierte Identifikation der Relaxations- und Ratenversuche mit fixierten Relaxationszeiten ist in Abbildung 6.2 für das große Scherdehnungsniveau zu sehen.

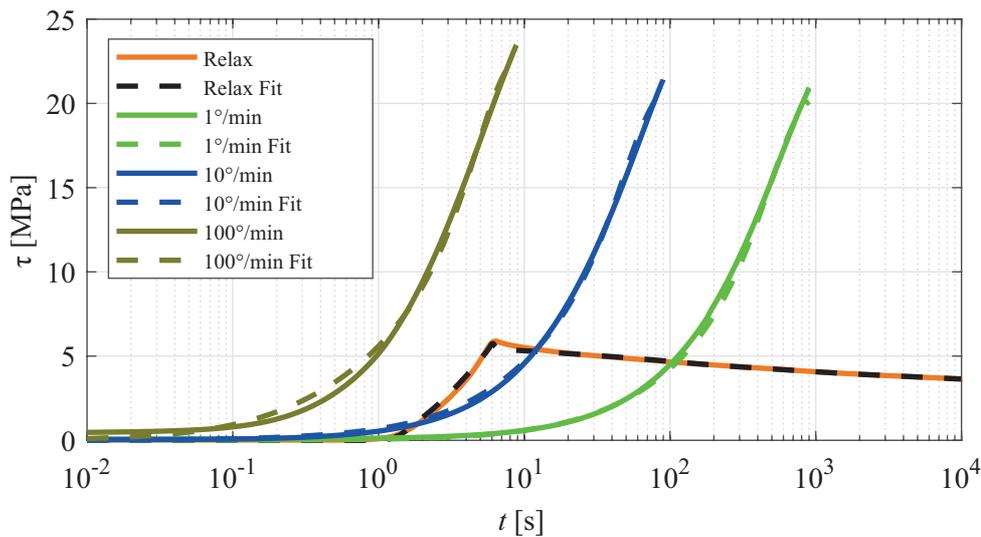


Abbildung 6.2.: Identifikation des Relaxationsversuchs und der Ratenversuche im Torsionsversuch bei 50°C und $\varphi = 15^{\circ}$

Die Ratenversuche inklusive der Modellantwort sind für zwei verschiedene Scherdehnungsniveaus in Abb. 6.3 erneut über der Scherung dargestellt. Das Modell ist für beide Scherdehnungsniveaus separat identifiziert worden. Ergo existieren auch zwei verschiedene Parametersätze. Das separate Identifizieren von kleineren Dehnungen ist durch deren Relevanz in der praktischen Auslegung von technischen Polymerbauteilen aus (teilkristallinen) Thermoplasten motiviert. Zur Herleitung eines praxisrelevanten Auslegungsbereichs soll kurz auf das Konzept der Grenzdehnung eingegangen werden, zu dem es eine Reihe von Untersuchungen gibt, z. B. [86, 113, 112, 114]. Die Fließdehnung ε_{F} kennzeichnet dabei einen Beanspruchungszustand, dem sich bleibende (mikromechanische) Werkstoffveränderungen zuordnen lassen. Darüber hinaus wurde aus der temperatur- und dehnratenabhängigen Fließgrenze die kritische Grenzdehnung $\varepsilon_{\text{F}\infty}$ abgeleitet, die als asymptotischer Grenzwert der Fließdehnungen ε_{F} definiert ist und mithilfe eines Kriechversuchs bei niedrigen Dehnraten aufgenommen wird. Durch das Einbeziehen der unterschiedlichen Fließdehnungen ε_{F} stellt die kritische Grenzdehnung $\varepsilon_{\text{F}\infty}$ eine Größe dar, die nicht von Temperatur und Dehnrate abhängt und somit eine Art werkstoffspezifischer Absolutaussage zur praktischen Dehnungsauslegung liefert. Kritische Grenzdehnungen für das mit PA12 verwandte und weitverbreitete PA6 liegen zwischen $\varepsilon_{\text{F}\infty} \approx 3 - 4\%$ [149]. Daher werden Dehnungen, die in etwa der kritischen Grenzdehnung eines ähnlichen Polyamidwerkstoffs entsprechen, gezielt separat betrachtet. Große Deformationen werden dennoch berücksichtigt, um das Modell hinsichtlich seiner Leistungsfähigkeit zu testen.

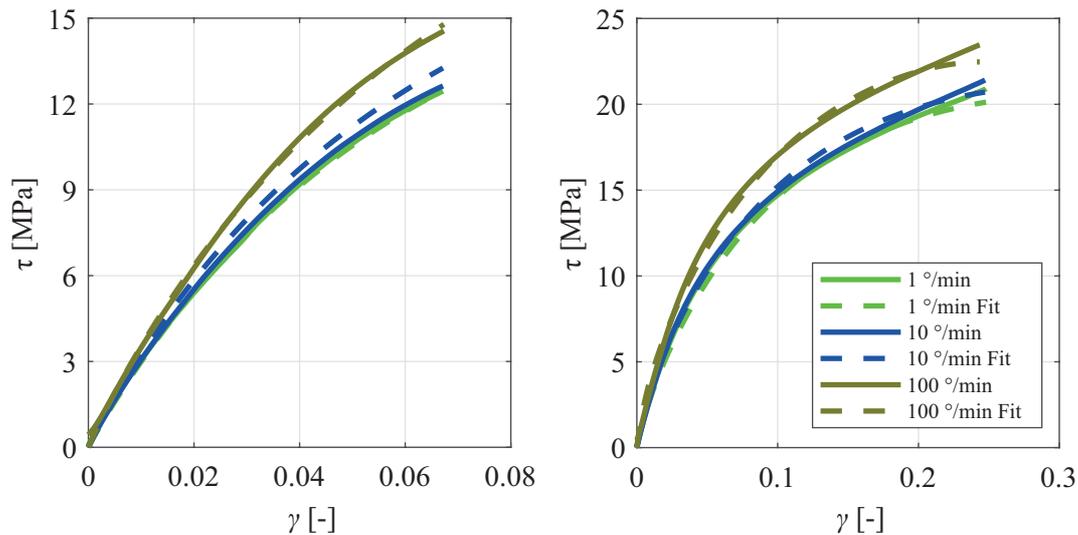


Abbildung 6.3.: Identifikation der Ratenversuche im Torsionsversuch bei 50°C und $\varphi = 6^{\circ}$ (links) sowie $\varphi = 15^{\circ}$ (rechts)

Die deviatorischen Parameter sind in den Tabellen 6.1 und 6.2 zusammengefasst. Obwohl das Modell keine Gleichgewichtsspannung besitzt, kann das Element mit der längsten Relaxationszeit im Rahmen der durchgeführten Versuche als solches interpretiert werden. Die Parametersätze können im Hinblick auf die Optimierung nicht als globales Minimum gesehen werden. Es lassen sich andere Parameterkombinationen finden, die ähnliche Ergebnisse liefern. Die diskreten Signale der Versuche sind allesamt mit einer Zeitschrittweite $h = 0.01\text{ s}$ abgetastet worden. Somit liefern Abweichungen zwischen experimentellen Daten und Modelldaten bei länger andauernden Versuchen, z. B. Relaxationsversuchen oder Versuchen mit kleiner Dehnrates, einen größeren Beitrag zum Gesamtfehler und werden durch den Optimierungsalgorithmus priorisiert. Dies lässt sich durch Wichtungsfaktoren für den jeweiligen Fehlerbeitrag ausgleichen. Neben der Gleichgewichtung bei paralleler Identifikation mehrerer Versuche können durch Wichtungsfaktoren Prioritäten für einzelne Versuche gesetzt werden. Allein durch leichte Anpassung der Wichtungsfaktoren können somit verschiedene Parameterkombinationen generiert werden, deren Auswirkung auf die Optimierungsergebnisse kaum wahrnehmbar ist.

6.2.2. Parametertest an zyklischen Torsionsversuchen

Mit den identifizierten Parametern werden nun die zyklischen Torsionsversuche simuliert. Es stehen die Versuche mit einem Traversenwinkel von $\varphi = 6^{\circ}$ und $\varphi = 15^{\circ}$ im Vordergrund. Dabei wurden auch jeweils die beiden unterschiedlichen Parametersätze gewählt. Wie in Abschnitt 5.4.3 bereits beschrieben wurde, untersuchen zyklische Versuche vorrangig das Verhalten bei Mehrfachbelastung sowie das Relaxationsverhalten unter zyklischer

Element Nr.	$t_{r,i}^D$ [s]	$G_{el,i}$ [MPa]	$\sigma_{F,i}$ [MPa]
1	0.22	269.69	1000.00
2	9.43	17.97	0.5
3	80.68	89.67	0.78
4	627.71	49.96	0.71
5	5000.00	35.81	0.57
6	598019.21	204.03	19.83

Tabelle 6.1.: Parametersatz für das deviatorische Modell bei großer Dehnung ($\varphi = 15^\circ$)

Element Nr.	$t_{r,i}^D$ [s]	$G_{el,i}$ [MPa]	$\sigma_{F,i}$ [MPa]
1	0.22	105.77	843.84
2	9.43	42.69	3.40
3	80.68	77.63	0.69
4	627.71	34.74	1.41
5	5000.00	22.47	1.81
6	598019.21	204.54	19.50

Tabelle 6.2.: Parametersatz für das deviatorische Modell bei kleiner Dehnung ($\varphi = 6^\circ$)

Belastung. Der erste Halbzyklus wird vom Modell in guter Näherung abgebildet, da der Verlauf einem monotonen Ratenversuch entspricht, auf den das Modell angepasst worden ist. Ansonsten lassen sich in den Folgezyklen auch bei kleinen Scherdehnungen die Modellgrenzen gut erkennen. Während die Absolutwerte der Spannungen an den jeweiligen Scherdehnungsgrenzlagen für beide Dehnungsniveaus gut wiedergegeben werden, entspricht der qualitative Verlauf einer Modellantwort eines rein endochronen Modells. Dies wird insbesondere für das hohe Scherdehnungsniveau in Abb. 6.5 deutlich. Hier kann aufgrund des qualitativen Kurvenverlaufs sowie des Unterschieds zwischen dem ersten Halbzyklus und den Folgezyklen von Entfestigungs- und Versagenseffekten ausgegangen werden, die das hier entwickelte Modell nicht abbilden kann.

Für die Berechnung mit einem Traversenwinkel von $\varphi = 6^\circ$ entspricht die Spannungsantwort des Modells ebenfalls dem Verlauf des endochronen Plastizitätsmodells. Die experimentellen Daten zeigen zwischen den Dehnungsendlagen nach dem ersten Halbzyklus einen Verlauf, der im Vergleich zur Modellantwort eine deutlich kleinere Hysteresekurve aufweist. Wird der zyklische Versuch bei der Parameteridentifikation neben dem Relaxationsversuch und den monotonen Ratenversuchen eingebunden, so lässt sich das Modellverhalten im zyklischen Versuch zu Lasten der Abbildungsqualität der monotonen Ratenversuche optimieren. Die Ratenversuche werden in diesem Fall eher linear angenähert und sind daher oberhalb einer Scherung von $\gamma = 0.04$ nicht mehr ausreichend genau. Somit können die Materialparameter bezüglich verschiedener Optimierungsziele nur einen Kompromiss abbilden. Da die Spannungen in den Dehnungsendlagen gut abgebildet werden, wurden an den bisher identifizierten Parametersätzen keine Änderungen vorgenommen.

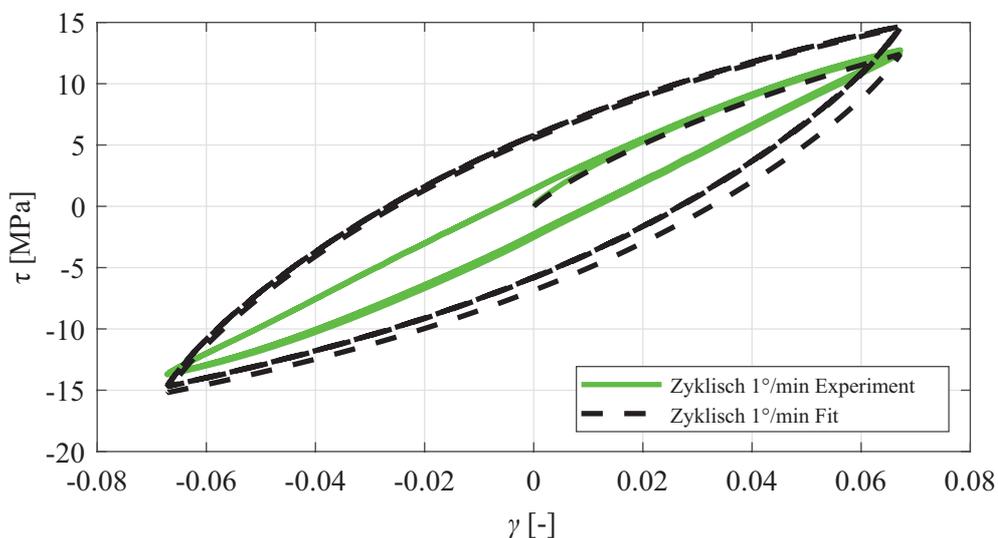


Abbildung 6.4.: Identifikation des zyklischen Torsionsversuchs bei 50°C und $\varphi = 6^\circ$

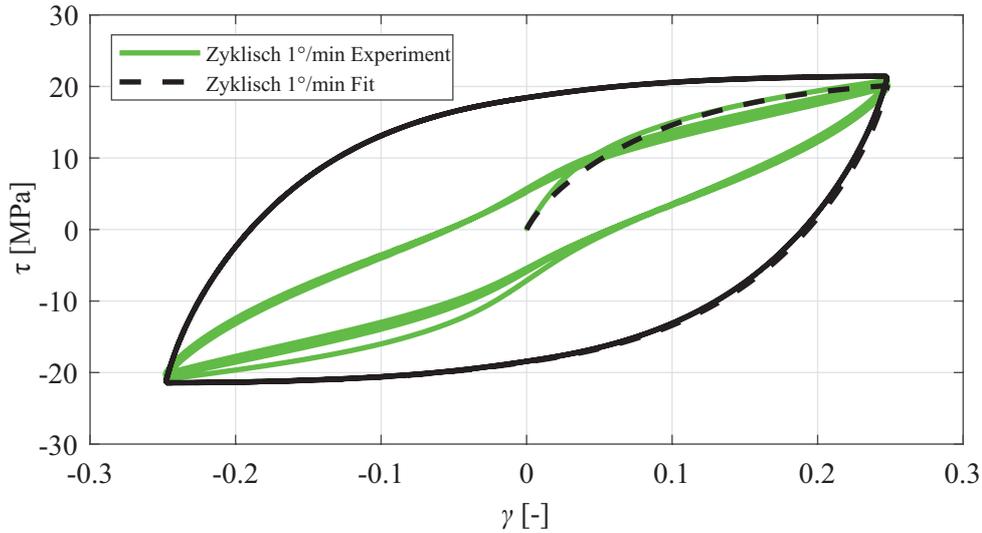


Abbildung 6.5.: Identifikation des zyklischen Torsionsversuchs bei 50°C und $\varphi = 15^{\circ}$

6.3. Identifikation des volumetrischen Materialparameters

6.3.1. Auswertung der Konstitutivgleichungen für den Zugversuch

Im Folgenden werden die Tensoren aufgestellt, die zur Auswertung des einachsigen Zugversuchs erforderlich sind und bereits in [60] beschrieben sind. Der Spannungs- und der Dehnungstensor sind wie folgt besetzt, wobei die Dehnung in Zugrichtung mit ε_{11} benannt wird und für die beiden Querdehnungen bei isotropem Materialverhalten $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_q$ gilt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_q & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_q \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Zur Auswertung des Materialmodells sind die Kugelanteile und die Deviatoren von Spannungs- und Dehnungstensor erforderlich, die sich als Produkt einer skalaren, zeitabhängigen Funktion und einer konstanten Diagonalmatrix darstellen lassen.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^V = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_q) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^D = \frac{2}{3}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_q) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^V = \frac{\sigma}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}^D = \frac{2\sigma}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Die Zusammenhänge für volumetrische und deviatorische Spannungen gelten gleichermaßen für den Gleichgewichts- und den Nichtgleichgewichtsanteil. So ergibt sich für die Spannung im einachsigen Zugversuch

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_{\text{eq}}^V}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{\text{neq},i}^V}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{2\sigma_{\text{neq},i}^D}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Die folgenden Operationen finden auf Basis der skalaren Gleichungen statt. Die Diagonalmatrizen, mit deren Hilfe eine tensorielle Darstellung gelingt, sind konstant. Aus Gleichung (6.7) lassen sich die Gleichungen für die Zugspannung und die beiden identischen Querspannungen ableiten.

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{\text{eq}}^V + \sum_{i=1}^n \frac{1}{3}\sigma_{\text{neq},i}^V + \sum_{i=1}^n \frac{2}{3}\sigma_{\text{neq},i}^D \quad (6.8)$$

$$0 = \frac{1}{3}\sigma_{\text{eq}}^V + \sum_{i=1}^n \frac{1}{3}\sigma_{\text{neq},i}^V - \sum_{i=1}^n \frac{1}{3}\sigma_{\text{neq},i}^D \quad (6.9)$$

Subtraktion von (6.8) und (6.9) sowie äquivalente Umformung vereinfacht die Gleichungen für die Spannungen.

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_{\text{neq},i}^D \quad (6.10)$$

$$0 = \sigma_{\text{eq}}^V + \sum_{i=1}^n \sigma_{\text{neq},i}^V - \sum_{i=1}^n \sigma_{\text{neq},i}^D \quad (6.11)$$

Aus den skalaren Funktionen lässt sich weiterhin mithilfe von Gl. (5.32) die skalare Gleichung für die volumetrische Gleichgewichtsspannung identifizieren

$$\sigma_{\text{eq}}^V = 3K_{\text{eq}}(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_q). \quad (6.12)$$

Durch Einsetzen von (6.12) in (6.11) und entsprechende Umformung lässt sich ein Aus-

druck für die Querdehnung ε_q gewinnen.

$$0 = 3K_{\text{eq}}(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_q) + \sum_{i=1}^n \sigma_{\text{neq},i}^V - \sum_{i=1}^n \sigma_{\text{neq},i}^D \quad (6.13)$$

$$\varepsilon_q = -\frac{3K_{\text{eq}}}{6K_{\text{eq}}}\varepsilon_{11} - \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{\text{neq},i}^V - \sum_{i=1}^n \sigma_{\text{neq},i}^D}{6K_{\text{eq}}} \quad (6.14)$$

Bei sehr langsamen Prozessen verschwinden die Nichtgleichgewichtsspannungen und somit auch der hintere Teil von Gleichung (6.14). Übrig bleibt das Verhältnis der Querdehnungen zur Zugdehnung im Gleichgewichtszustand des Modells von $\nu_{\text{eq}} = 0.5$. Sofern mit einer deviatorischen Gleichgewichtsfeder G_{eq} gearbeitet wird, fließt diese in die Berechnung der Querkontraktionszahl ein und es entsteht der aus der linearen Elastizitätstheorie bekannte Zusammenhang

$$\nu_{\text{eq}} = \frac{3K_{\text{eq}} - 2G_{\text{eq}}}{6K_{\text{eq}} + 2G_{\text{eq}}}. \quad (6.15)$$

Ferner können nach Differentiation der Gleichung (5.22) und Einsetzen der Zusammenhänge aus (6.5) und (6.6) sowie (5.30) und (5.31) die Differentialgleichungen für die Nichtgleichgewichtsspannungen gewonnen werden.

$$\dot{\sigma}_{\text{neq},i}^D = 2G_{\text{el},i}(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_q) - \left(\frac{2}{t_{r,i}^D} + \frac{2G_{\text{el},i}\|\dot{\varepsilon}^D\|}{|\sigma_{F,i}^D|} \right) \sigma_{\text{neq},i}^D. \quad (6.16)$$

$$\dot{\sigma}_{\text{neq},i}^V = 3K_{\text{el},i}(\dot{\varepsilon}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_q) - \left(\frac{3}{t_{r,i}^V} + \frac{3K_{\text{el},i}\|\dot{\varepsilon}^V\|}{|\sigma_{F,i}^V|} \right) \sigma_{\text{neq},i}^V. \quad (6.17)$$

Die Längsdehnung ε_{11} sowie deren Zeitableitung $\dot{\varepsilon}_{11}$ sind Funktionen, die nach Abschluss des experimentellen Programms für jeden Versuch zur Verfügung stehen. Die Querdehnung ist im Rahmen der Experimente ebenfalls erfasst worden, soll aber im Identifikationsprozess des Materialmodells neben der Spannung als Ergebnis berechnet und im Vergleich zu den Messwerten interpretiert werden. Mit der bisherigen Formulierung ist es schwierig, die als unbekannt betrachtete Rate der Querdehnung $\dot{\varepsilon}_q$ aus Gl. (6.16) und Gl. (6.17) zu eliminieren.

Um die Rate der Querdehnungen auszugliedern, werden Gl. (6.16) und Gl. (6.17) zunächst integriert

$$\sigma_{\text{neq},i}^D = 2G_{\text{el},i}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_q) - \int \left(\frac{2}{t_{r,i}^D} + \frac{2G_{\text{el},i}\|\dot{\varepsilon}^D\|}{|\sigma_{F,i}^D|} \right) \sigma_{\text{neq},i}^D dt \quad (6.18)$$

$$\sigma_{\text{neq},i}^V = 3K_{\text{el},i}(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_q) - \int \left(\frac{3}{t_{r,i}^V} + \frac{3K_{\text{el},i} \|\dot{\varepsilon}^V\|}{|\sigma_{F,i}^V|} \right) \sigma_{\text{neq},i}^V dt \quad (6.19)$$

Die Integrale werden in zwei zusätzliche Variablen z_i^D und z_i^V überführt, nach deren Zeitableitung und Einsetzen der Nichtgleichgewichtsspannungen zwei Evolutionsgleichungen entstehen, die nicht die Rate der Querdehnung beinhalten. Somit werden die Nichtgleichgewichtsspannungen zu

$$\sigma_{\text{neq},i}^D = 2G_{\text{el},i}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_q) - z_i^D \quad (6.20)$$

und

$$\sigma_{\text{neq},i}^V = 3K_{\text{el},i}(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_q) - z_i^V. \quad (6.21)$$

Die Evolutionsgleichungen für die neu eingeführten Variable sehen wie folgt aus

$$\dot{z}_i^D = \left(\frac{2}{t_{r,i}^D} + \frac{2G_{\text{el},i} \|\dot{\varepsilon}^D\|}{|\sigma_{F,i}^D|} \right) (2G_{\text{el},i}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_q) - z_i^D) \quad (6.22)$$

$$\dot{z}_i^V = \left(\frac{3}{t_{r,i}^V} + \frac{3K_{\text{el},i} \|\dot{\varepsilon}^V\|}{|\sigma_{F,i}^V|} \right) (3K_{\text{el},i}(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_q) - z_i^V) \quad (6.23)$$

Um die im Rahmen der Identifikation zu lösenden Gleichungen weiter zu reduzieren, werden die Nichtgleichgewichtsspannungen aus Gl. (6.14) im nächsten Schritt in Abhängigkeit von z_i^D und z_i^V ausgedrückt. Mit den Definitionen

$$K_{\text{el}} := \sum_{i=1}^m K_{\text{el},i} \quad (6.24)$$

$$G_{\text{el}} := \sum_{i=1}^n G_{\text{el},i} \quad (6.25)$$

können Gl. (6.20) und Gl. (6.21) umgeschrieben und voneinander subtrahiert werden

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{\text{neq},i}^V - \sum_{i=1}^n \sigma_{\text{neq},i}^D = (3K_{\text{el}} - 2G_{\text{el}})\varepsilon_{11} + (6K_{\text{el}} + 2G_{\text{el}})\varepsilon_q - \sum_{i=1}^n z_i^V + \sum_{i=1}^n z_i^D. \quad (6.26)$$

Einsetzen in Gl. (6.14) liefert

$$\varepsilon_q = -\nu_{\text{eq}}\varepsilon_{11} - \left(\frac{3K_{\text{el}} - 2G_{\text{el}}}{6K_{\text{eq}}} \varepsilon_{11} + \frac{6K_{\text{el}} + 2G_{\text{el}}}{6K_{\text{eq}}} \varepsilon_q - \frac{\sum_{i=1}^n z_i^V + \sum_{i=1}^n z_i^D}{6K_{\text{eq}}} \right). \quad (6.27)$$

Nach einigen algebraischen Umformungen ergibt sich folgende Gleichung für die Querdehnung

$$\varepsilon_q = -\frac{6K_{\text{eq}}\nu_{\text{eq}} + 3K_{\text{el}} - 2G_{\text{el}}}{6K_{\text{eq}} + 6K_{\text{el}} + 2G_{\text{el}}} \varepsilon_{11} + \frac{\sum_{i=1}^n z_i^V - \sum_{i=1}^n z_i^D}{6K_{\text{eq}} + 6K_{\text{el}} + 2G_{\text{el}}}. \quad (6.28)$$

Somit stehen alle Gleichungen bereit, um das Materialmodell für den Zugversuch auszuwerten. Für m volumetrische und n deviatorische inelastische Elemente entsteht aus den Gleichungen (6.22), (6.23) und (6.28) ein semi-explizites differential-algebraisches Differentialgleichungssystem, das aus insgesamt $m + n + 1$ Gleichungen der Form

$$0 = f(\varepsilon, \varepsilon_q, z_i^D, z_i^V), \quad (6.29)$$

$$\dot{z}_i^D = g(\varepsilon, \varepsilon_q, z_i^D), \quad (6.30)$$

$$\dot{z}_i^V = h(\varepsilon, \varepsilon_q, z_i^V) \quad (6.31)$$

besteht. Das Gleichungssystem kann numerisch durch rückwärtige Differenzenformeln (siehe Abschnitt 7) erster Ordnung sowie durch Vorgabe einer singulären Massenmatrix gelöst werden [140, 141]. Die Zugspannung kann letztlich mithilfe von Gl. (6.10) und Gl. (6.20) einfach berechnet werden. Durch die vorangegangene Identifikation der deviatorischen Parameter stehen diese bereits fest, sodass lediglich die volumetrischen Parameter zu identifizieren sind.

6.3.2. Volumetrische Erweiterung des Modells

Dem ersten Axiom der Rheologie nach REINER folgend (Abschnitt 5.4.1), wird das Modell im ersten Schritt um eine volumetrische Gleichgewichtsfeder erweitert. Somit finden sich alle inelastischen Anteile im gestaltsändernden Dehnungsanteil wieder. Im Zuge dessen wird eine Parameterstudie für mögliche Querdehnungen durchgeführt. Es gilt $K_{\text{el}} = 0$ (Gl. 6.24) sowie $\sum_{i=1}^n z_i^V = 0$ aufgrund der fehlenden inelastischen, volumetrischen Elemente. Der Wert für G_{el} ergibt sich aus der Summe der Schubmodule aus Tabelle 6.1 und nimmt somit für $t = 0$ einen Wert von $G_{\text{el}} = 667.13$ MPa an. Ohne deviatorisches Gleichgewichtselement nimmt die Gleichgewichtsquerkontraktionszahl automatisch den Wert $\nu_{\text{eq}} = 0.5$ an, Gl. (6.15). Mit der Vorgabe von K_{eq} und anschließender Auswertung des Gleichungssystems (6.29) bis (6.31), das nunmehr aus sechs Differentialgleichungen und einer algebraischen Gleichung besteht, die miteinander gekoppelt sind, können mögliche Werte für die Querdehnung ermittelt werden. Ausgewertet wurde der Relaxationsversuch

der Zugprobe bei 50°C und $t = 10.000$ s.

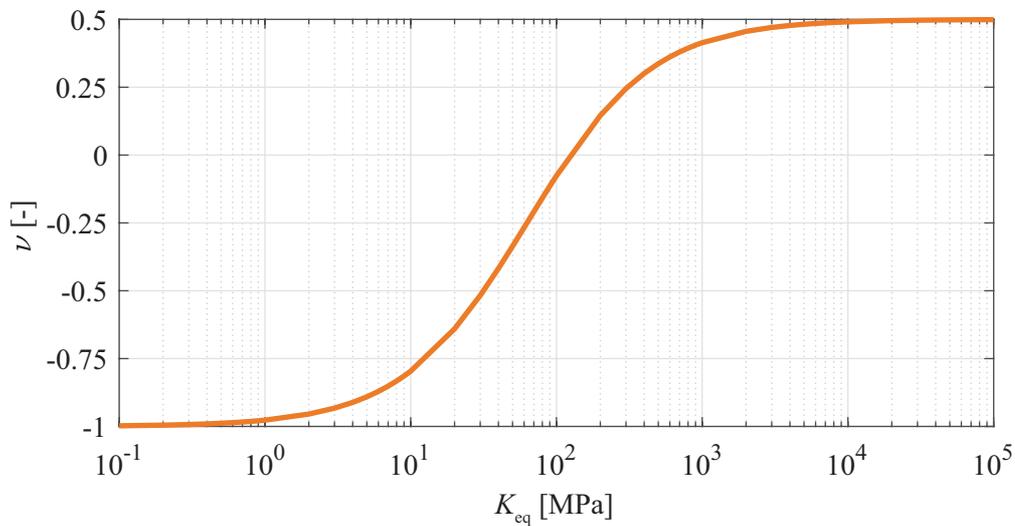


Abbildung 6.6.: Querdehnung bei $t = 10.000$ s im Relaxationsversuch bei 50°C

Anhand der Abb. 6.6 ist erkennbar, dass ein Gleichgewichtskompressionsmodul von $K_{eq} \geq 1.000$ MPa eine sehr geringe Auswirkung auf den Wert der Querkontraktionszahl hat, da diese bereits gegen $\nu_{eq} = 0.5$ konvergiert. Dies bedeutet gleichzeitig, dass sich bei feststehenden deviatorischen Parametern auch durch die Wahl eines sehr hohen Gleichgewichtskompressionsmoduls keine höhere Spannungsantwort erzielen lässt. Oberhalb eines Gleichgewichtskompressionsmoduls von $K_{eq} = 1.000$ MPa ändert sich die Spannungsantwort nur noch in Nuancen. Somit fällt die Identifikation des Kompressionsmoduls schwer. Bei nur marginaler Änderung der Spannungsantwort, infolge der Variation des Kompressionsmoduls in zwei Zehnerpotenzen, stellt sich die Frage, welcher Kompressionsmodul der „richtige“ ist. Daher wird im ersten Identifikationsschritt der gemessene Verlauf der Querdehnung (Abb. 5.21) für die ersten 1.000 s als Indikationsparameter, wie in Abschnitt 5.3.5 beschrieben, eingeführt. Die Ergebnisse des Fitprozesses für Relaxations- und Ratenversuche mit einem Gleichgewichtskompressionsmodul von $K_{eq} = 1.450$ MPa sind in den Abbildungen 6.7, 6.8 und 6.9 zu sehen. Analog zum Torsionsversuch wurden auch hier bei den monotonen Ratenversuchen zwei verschiedene Dehnungsniveaus berücksichtigt. In Abb. 6.8 sind die Deformationen von $u = 2.5$ mm und $u = 5$ mm berücksichtigt. Die Parametersätze sind entsprechend von dem jeweiligen Deformationsniveau des Torsionsversuchs übernommen.

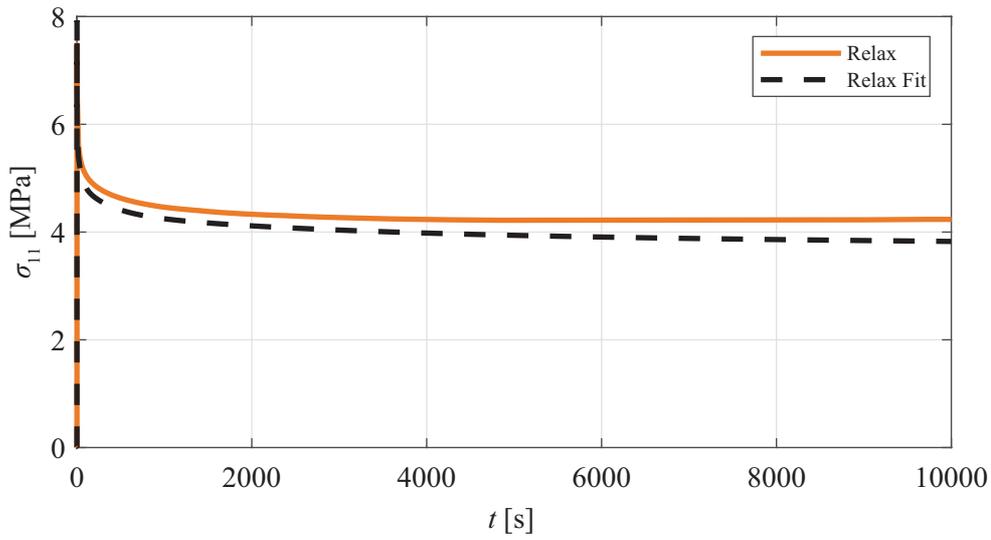


Abbildung 6.7.: Identifikation des Relaxationsversuchs für den Zugversuch bei 50°C

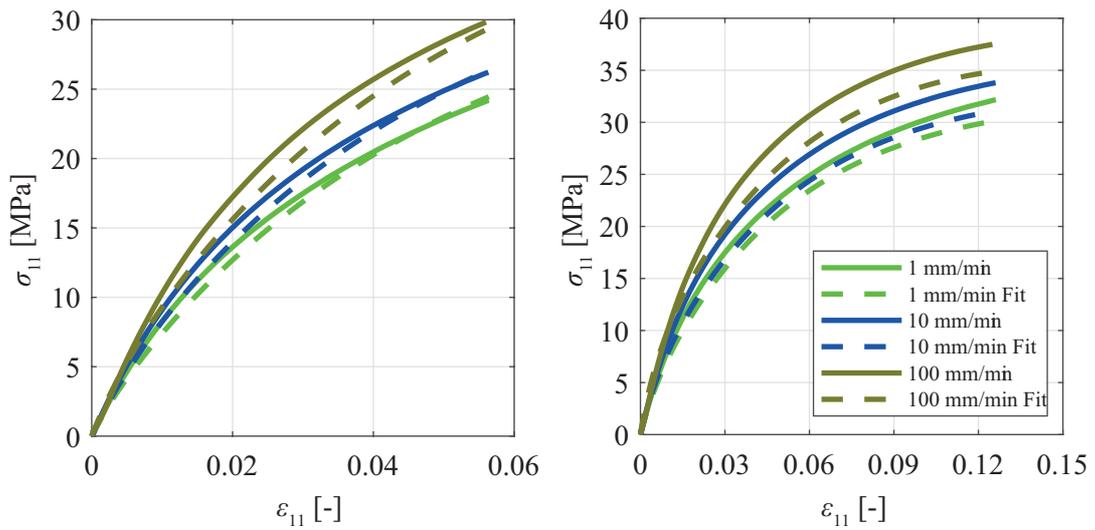


Abbildung 6.8.: Identifikation der Ratenversuche für den Zugversuch bei 50°C

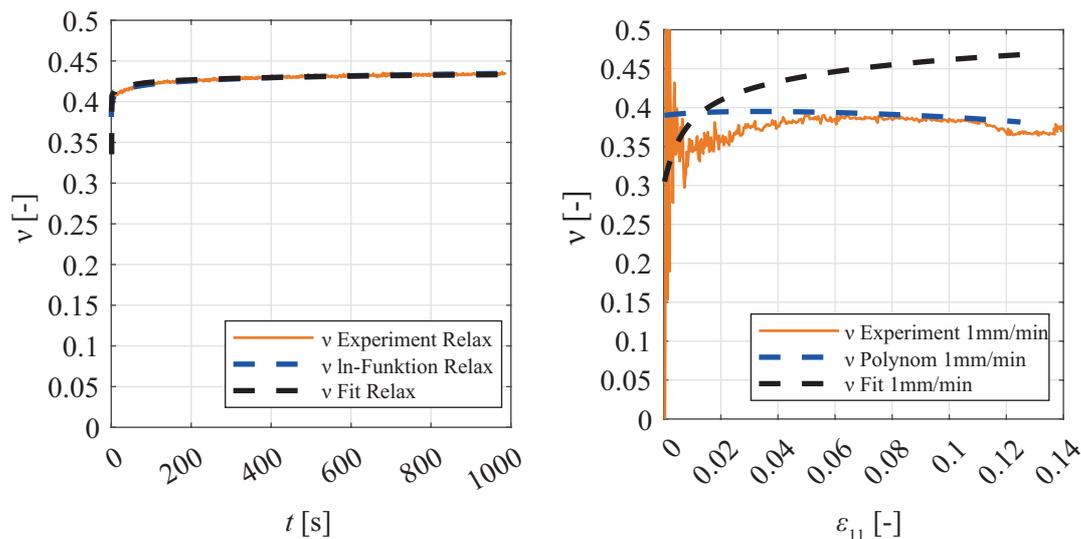


Abbildung 6.9.: Identifikation der Querkontraktionszahl für den Relaxations- und Ratenversuch unter Zugbelastung bei 50°C

Durch die Konstanzhaltung der Zugdehnung ϵ_{11} im Bereich der Relaxation ist die Messung der Querdehnung in diesem Versuch mit deutlich geringerem Rauschen verbunden als die Messung der Querdehnung im monotonen Ratenversuch. Als Indikationsparameter zur Anpassung der Daten wurde daher der Relaxationsversuch höher priorisiert. Anhand der Abb. 6.9 ist erkennbar, dass der qualitative Verlauf der Modellantwort im Relaxationsversuch den Messwerten ähnelt. Die experimentellen Daten des Ratenversuchs sowie das daran angepasste Polynom sind mit der Modellantwort nur schwer in Einklang zu bringen. Bei weiteren Messwerten im Ratenversuch (Abb. 5.21) ist erkennbar, dass der Verlauf des Signals sowie die Unsicherheit reproduzierbar ist. Während der Messwert für die Querkontraktionszahl bis zu einer Dehnung von $\epsilon_{11} \approx 5\%$ ansteigt und damit zumindest tendenziell der Modellantwort entspricht, bleibt sie anschließend konstant, um gegen Versuchsende zu fallen. Laut der Theorie wird das plastische Verhalten vom deviatorischen Spannungsanteil bestimmt und die Querkontraktionszahl entwickelt sich folglich in Richtung inkompressiblen Verhaltens. Dies ist hier nicht zu beobachten. Die Modellantwort hingegen zeigt ein Verhalten, das mit der Theorie konform geht. Für die Qualität der Messung können die Inhomogenitäten im Dehnungsfeld bei höheren Deformationen als Erklärungsansatz dienen, eine definitive, die Abweichungen erklärende Antwort kann jedoch nicht gegeben werden.

6.3.3. Parametertest im Stufenversuch

Die Ergebnisse in Abb. 6.10 zeigen, dass sowohl der Wert für die volumetrische Gleichgewichtsfeder K_{eq} als auch das Relaxationsverhalten gut abgebildet werden können.

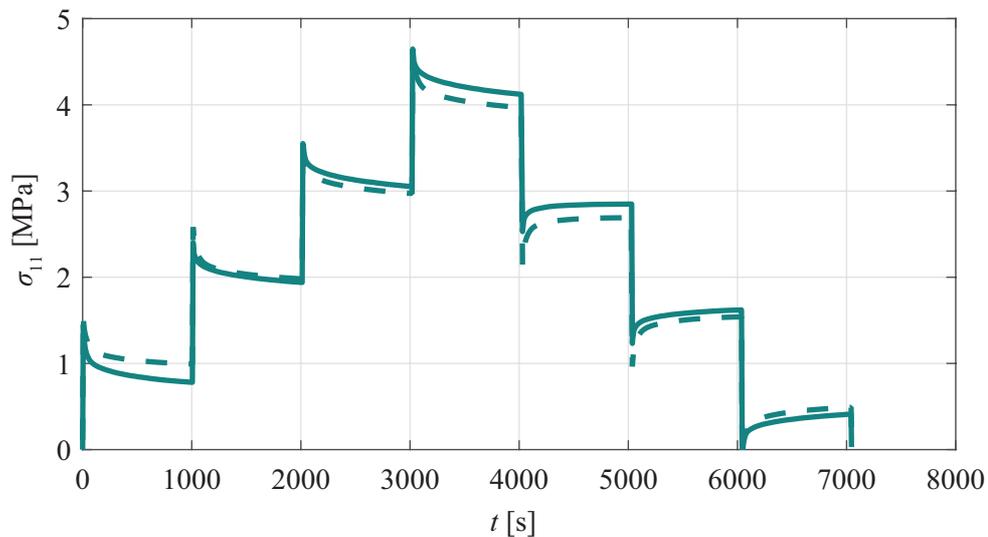


Abbildung 6.10.: Identifikation des Stufenversuchs für den Zugversuch bei 50°C

6.3.4. Parametertest bei zyklischen Versuchen

Die zyklischen Versuchsergebnisse für die Zugprobe und die Simulationsergebnisse sind in den Abbildungen 6.11 und 6.12 dargestellt. Die Versuche mit kleinen Deformationen können durch das Modell in guter Näherung abgebildet werden. Für größere zyklische Deformationen zeigt das Modell eine deutliche Abweichung von den experimentellen Werten.

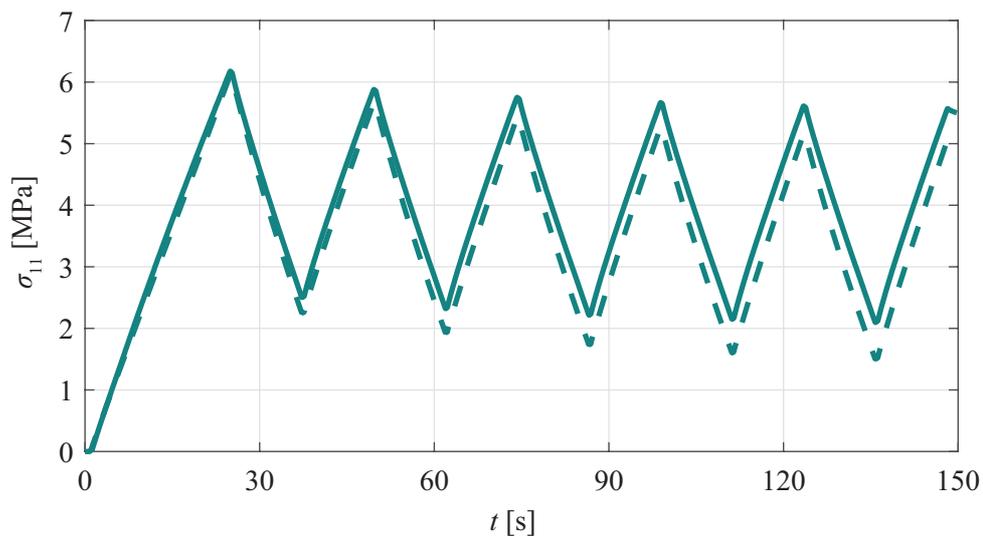


Abbildung 6.11.: Identifikation des zyklischen Zugversuchs bei 50°C mit $u = 0.3 \pm 0.1$ mm

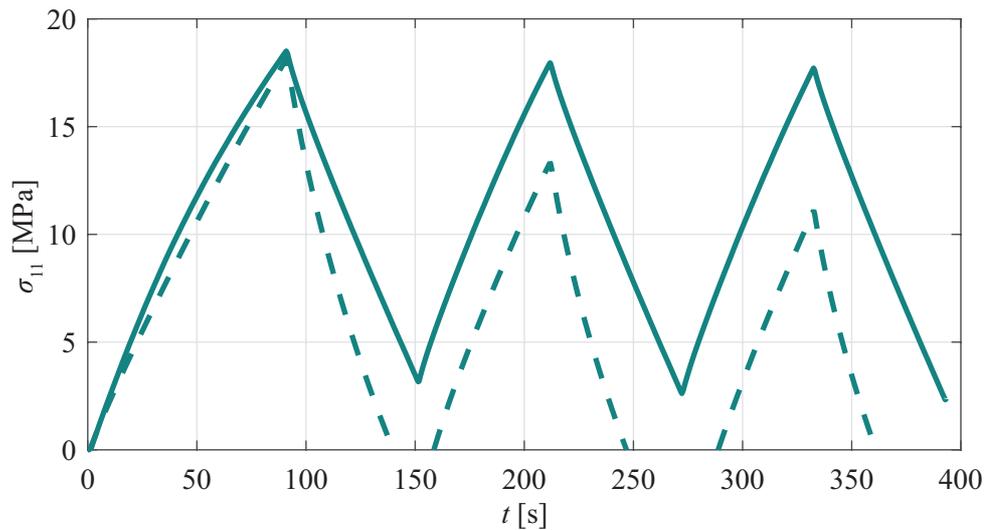


Abbildung 6.12.: Identifikation des zyklischen Zugversuchs bei 50°C mit $u = 1.0 \pm 0.5 \text{ mm}$

Die Modellantworten zum zyklischen Zugversuch korrespondieren mit den Ergebnissen aus den zyklischen Torsionsversuchen (Abb. 6.5 und Abb. 6.4). Bei größeren Deformationen entsteht durch den Modellanteil der endochronen Plastizität eine zu große Hysteresekurve, die in der Abb. 6.12 als zu großes, zyklisches Relaxationsverhalten wahrgenommen wird. Bei Darstellung der Spannung über der Dehnung (anstelle der Zeit) kann der qualitative Verlauf der Spannung analog zum endochronen Modell in Abb. 6.13 gut erkannt werden. Wie auch bei zyklischer Torsion vergrößert sich dieser Effekt bei großen Deformationen und führt folglich zu größeren Abweichungen in der Modellantwort.

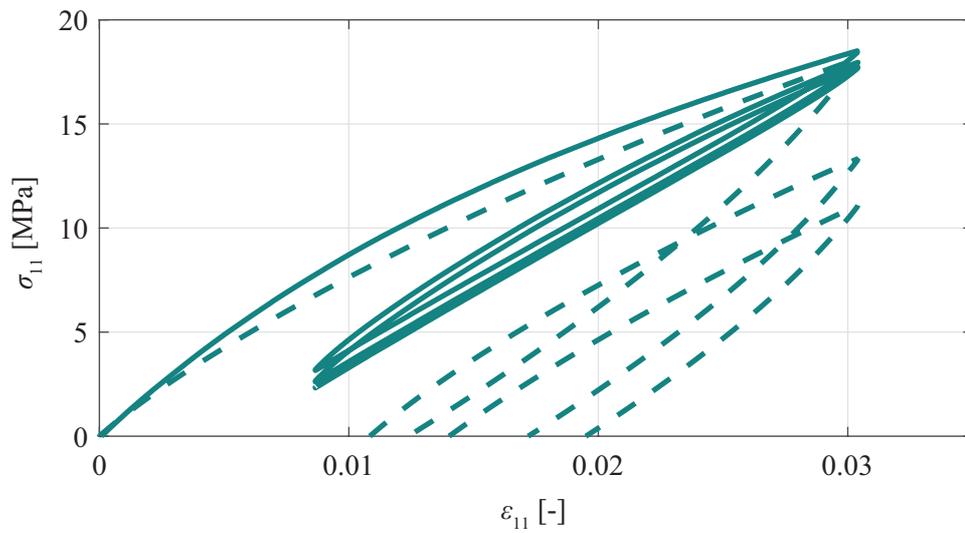


Abbildung 6.13.: Darstellung des zyklischen Zugversuchs über der Dehnung ε_{11} bei 50°C mit $u = 1.0 \pm 0.5 \text{ mm}$

Nach der Identifikation der Parameter folgt nun die Implementation in Comsol Multiphysics®, einer Software, die sich der Methode der finiten Elemente bedient und mit deren Hilfe sich somit komplexe Strukturen bzgl. ihres Spannungs-Dehnungs-Verhaltens untersuchen lassen.

7. FE-Implementierung und Validierung

Neben der in MatLab® erfolgten Umsetzung soll das Materialmodell in der auf der Methode der Finiten Elemente basierenden Software Comsol Multiphysics® (Version 6.2) implementiert und getestet werden. Neben der Möglichkeit, Differentialgleichungen in der generellen oder Koeffizientenform zu implementieren, kann auch die allgemeinste, schwache Form implementiert werden. Dazu wird auf die Bilanzgleichung des Impulses, die das Gleichgewicht der inneren Kräfte und Spannungen beschreibt, zurückgegriffen. Bei Beschränkung auf quasi-statische Prozesse und unter Vernachlässigung volumenspezifischer Lasten vereinfacht sich die Impulsbilanz (Gl. 3.33) zu

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (7.1)$$

Unter Berücksichtigung der statischen Randbedingungen aus dem Cauchy-Theorem (Gl. 3.32)

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (7.2)$$

und Multiplikation mit einer beliebigen, jedoch den geometrischen Randbedingungen genügenden und infinitesimal kleinen Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ sowie anschließender Integration über das betrachtete Gebiet \mathcal{B} , entsteht die schwache Form der Impulsbilanz

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \delta \mathbf{u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}) \, dA = \mathbf{0}. \quad (7.3)$$

Mit der Rechenregel für die Divergenz

$$\delta \mathbf{u} \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = \text{Div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) \quad (7.4)$$

und Anwendung der Produktregel ergibt sich

$$\text{Div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) = \text{Grad}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{u} \text{Div } \boldsymbol{\sigma}. \quad (7.5)$$

Der Gaußsche Integralsatz (Gl. 3.26) liefert zudem

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dA. \quad (7.6)$$

So kann die schwache Form der Impulsbilanz in der Form

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{Grad} \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA \quad (7.7)$$

geschrieben werden. Gleichung (7.7) bilanziert die virtuelle Arbeit der inneren und äußeren Kräfte. Bei der Auswertung der Gleichung an realen Systemen entstehen nichtlineare Gleichungssysteme, die nur mithilfe numerischer Verfahren gelöst werden können. Ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (7.8)$$

stellt die einfachste Lösung dar, bei der \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix ist, \mathbf{f} den Vektor der äußeren Kräfte und \mathbf{u} den Vektor der Knotenverschiebungen darstellt. Im Modul *Structural Mechanics* der Software ist das verwendete Hookesche Stoffgesetz bereits implementiert. Ein Modul, das die Evolutionsgleichungen der linearen Viskoelastizität löst, existiert ebenfalls, sodass das bestehende Modul lediglich um die Komponente der endochronen Plastizität erweitert werden muss. Durch die Zeitabhängigkeit der viskoelastischen Stoffe müssen transiente Simulationen zur Bestimmung der unbekanntenen Variablen durchgeführt werden. Um ausgehend von Startwerten die zeitdiskreten Lösungen zu berechnen, werden auch in Comsol Multiphysics® die Evolutionsgleichungen mithilfe der impliziten, rückwärtigen Differenzenformeln (BDF – backward differentiation formula) gelöst. Bei der rückwärtigen Differenzenformel erster Ordnung handelt es sich um das bereits erwähnte Euler-Rückwärts-Verfahren, mit dem alle bisher vorgestellten Berechnungsergebnisse in MatLab® erzeugt wurden. Die Iterationsvorschrift für eine Differentialgleichung $\dot{y} = f(t, y)$ lautet in diesem Fall

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = h f(y(t_{n+1}), t_{n+1}), \quad (7.9)$$

wobei h die Zeitschrittweite $t_{n+1} - t_n$ bezeichnet. Die Iterationsvorschriften werden als implizit bezeichnet, da der zu berechnende Funktionswert $y(t_{n+1})$ auf beiden Seiten der Gleichung zu finden ist. Die Iterationsvorschrift für ein BDF-Verfahren zweiter Ordnung lautet

$$3y(t_{n+2}) - 4y(t_{n+1}) + y(t_n) = 2h f(y(t_{n+2}), t_{n+2}). \quad (7.10)$$

In Comsol Multiphysics® können BDF-Verfahren, die grundsätzlich bis zur sechsten Ordnung stabil sind, bis zur fünften Ordnung durchgeführt werden [62, 63].

Anhand der Ergebnisse des Identifikationsprozesses wird das rein deviatorische Modell

für die Torsionsversuche mit sechs deviatorischen Elementen aufgebaut und anschließend für die Berechnung der Zugversuche um einen Gleichgewichtskompressionsmodul erweitert.

7.1. Modellaufbau

Ziel einer jeden FEM-Berechnung ist die möglichst realitätsnahe Wiedergabe des Spannungs- und Verformungszustands des jeweils untersuchten Bauteils bzw. der untersuchten Baugruppe. Bei den untersuchten Probekörpern handelt es sich jeweils um Einzelteile, die ausschließlich mit der Prüfmaschine, deren Steifigkeit die Steifigkeit der untersuchten Proben um mehrere Zehnerpotenzen übersteigt, interagieren. Dadurch entfallen etwaige Herausforderungen beim Definieren von Kontakten zwischen Bauteilen oder Systemgrenzen. Alle untersuchten Strukturen sind dünnwandig. Das gilt für den schlanken Mittelbereich der Zugprobe genauso wie für den doppelt gekerbten Bereich der Rohrprobe und die Scherprobe. Die aufgebrachten Deformationen rufen homogene Spannungs- und Verzerrungszustände hervor. Bei der Scherprobe, die im einfachen Scherversuch untersucht wurde, können Inhomogenitäten im Spannungszustand jedoch nicht ausgeschlossen werden. Die messtechnische Erfassung ist jedoch nicht möglich und führt dazu, dass Abweichungen von der reinen Scherspannung im einfachen Scherversuch ignoriert werden.

Unter diesen Voraussetzungen soll im Folgenden auf die Wahl der Elemente sowie die Vernetzung der Bauteile eingegangen werden. Dünnwandige Bauteile sollten durch ebene Elementtypen abgebildet werden, dickwandige durch volumetrische Elemente. Innerhalb eines Bauteils können dünn- und dickwandige Strukturen über entsprechende Kopplungselemente miteinander verbunden werden [81]. Die Zugprobe ist durch die Ausführung mit unterschiedlichen Dickenbereichen zwar geometrisch dreidimensional ausgeführt (Abb. 5.6), wird aber dennoch als ebene Geometrie berechnet, da sich die Bereiche größerer Dicke überwiegend im Bereich der Einspannung befinden und somit für die Gesamtsteifigkeit der Probe von untergeordneter Bedeutung sind. Für die Rohrprobe wurde das Modell vereinfacht, um einen rotationssymmetrischen Aufbau zu ermöglichen. Dazu sind die nachträglich montierten Stopfen zur Aussteifung des Einspannbereichs mit dem Grundkörper der Rohrprobe vereinigt. Zudem wurden die abgeflachten Einspannbereiche ignoriert und zu einer Einspannung auf der gesamten Mantelfläche in diesem z-Höhenbereich der Probe idealisiert. Beide Modifikationen sind von geringem Einfluss, da sie in keiner mechanischen Wechselwirkung mit dem dünnwandigen Bereich des Rohres stehen, auf den sich die Berechnung fokussiert. Somit kann der Aufbau einer ebenen Rechnung auf eine rotationssymmetrische Rechnung übertragen werden. Die Scherprobe besitzt eine konstante Dicke und eine beidseitig flächige Einspannung, sodass keine geometrischen Modifikationen getätigt werden müssen, um die Randbedingungen korrekt abzubilden. Neben der Problemgerechtigkeit ist auch die höhere Recheneffizienz eine Motivation für den ebenen Modellaufbau. Die Randbedingungen sowie die Geometrie des zweidimensional-achsensymmetrischen

Aufbaus der Rohrprobe sind in Abb. 7.1 mit der Umfangsverschiebung dargestellt. Für den Zugversuch an der Rohrprobe ändert sich lediglich die Richtung der Verschiebung. Für die Randbedingungen der Zug- und Scherprobe dienen die Abbildungen 5.6 und 5.4 zur Orientierung.

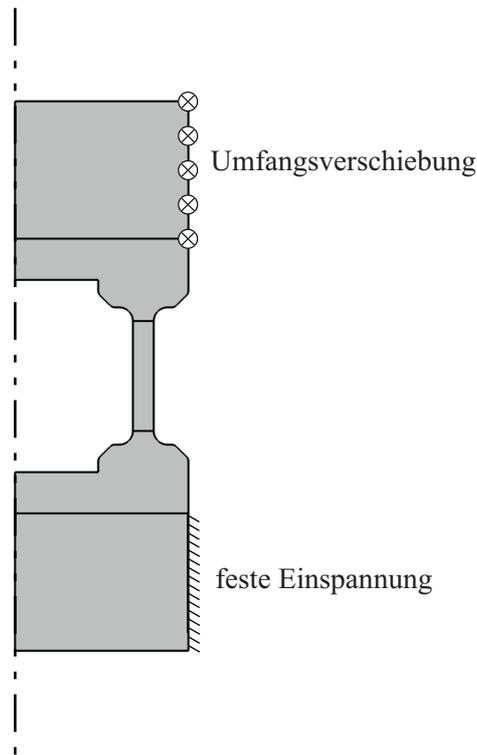


Abbildung 7.1.: Zweidimensional-achsensymmetrisches Modell der Rohrprobe

Die Scherprobe wurde mit 2D-Elementen für einen homogenen Spannungszustand in Dickenrichtung aufgebaut. Die Rohrprobe ist mit 2D-achsensymmetrischen Elementen für achsensymmetrische Randbedingungen aufgebaut. Hier können Spannungsinhomogenitäten in Dickenrichtung der dünnwandigen Doppelkerbe berücksichtigt werden. Diese werden jedoch als klein erwartet.

Die Bauteile wurden mithilfe von Dreiecks- und Viereckselementen vernetzt. Innerhalb der meisten Softwarepakete werden diese Elemente als Tri- bzw. Quadelemente bezeichnet (Triangle, engl. Dreieck, sowie Quadrilateral, engl. Viereck). Die Elemente sind von quadratischer Ordnung, also verfügt jede Seite über genau einen Zwischenknoten neben den elementbegrenzenden Eckknoten. Neben der gesteigerten Ergebnisqualität lassen sich die verrundeten Geometrien der Bauteile durch quadratische Ansatzfunktionen detailgetreuer bzw. mit weniger Elementen abbilden. Zu Beginn des Vernetzungsprozesses werden die für die Auswertung besonders relevanten Bereiche, in denen große Spannungen erwartet werden, strukturiert mit Viereckselementen ausgestattet, die möglichst zur Belastungsrichtung

ausgerichtet sind. Die Struktur kann hier sehr effizient abgebildet werden, da die Nachbarschaftsbeziehungen der Elemente implizit gegeben sind. Außerdem weisen strukturierte Netze eine schnellere Konvergenz auf. Nach der strukturierten Vernetzung folgt die freie, unstrukturierte Vernetzung der übrigen Geometrie mit Dreieckselementen, wodurch komplexe Geometrien einfacher abgebildet werden können [81].

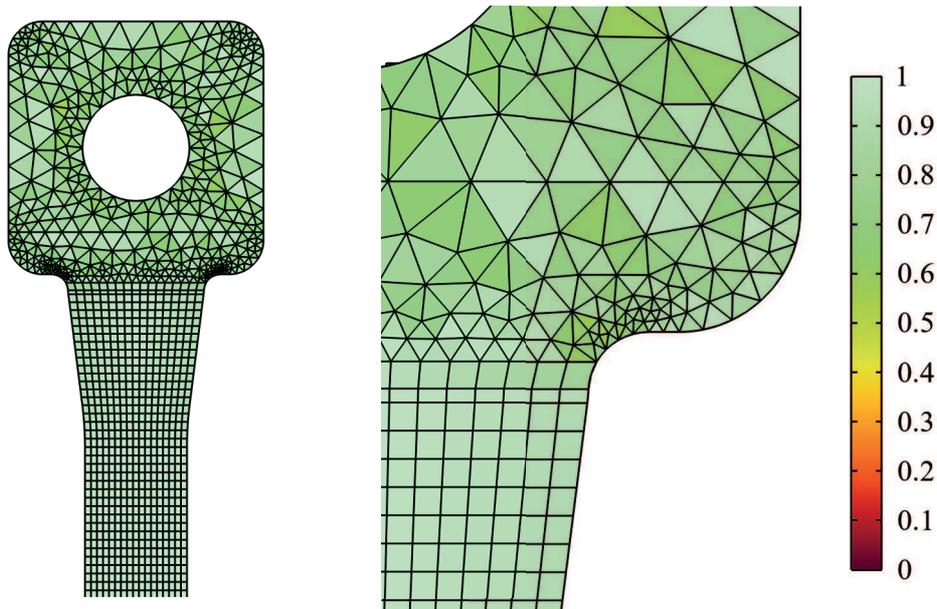


Abbildung 7.2.: Vernetzung der Zugprobe mit Dreiecks- und Viereckselementen

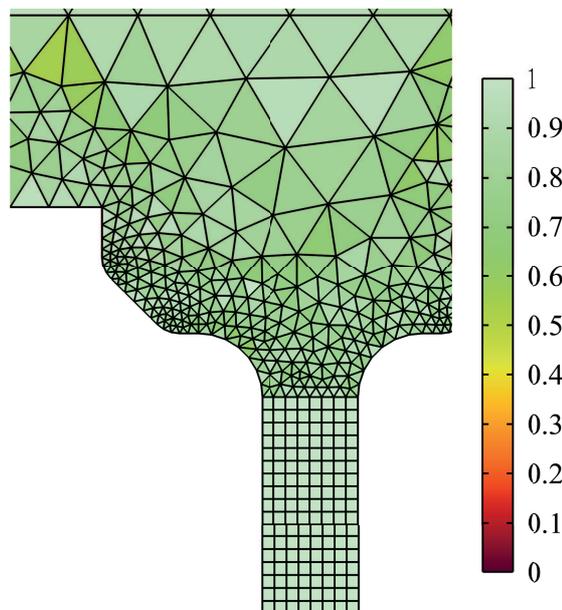


Abbildung 7.3.: Vernetzung der Rohrprobe mit Dreiecks- und Viereckselementen

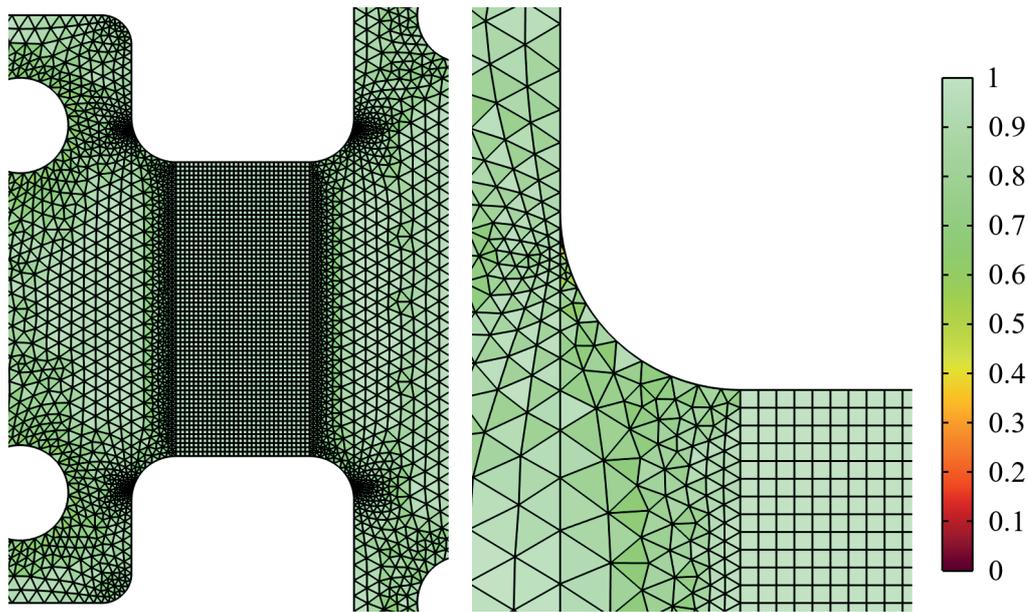


Abbildung 7.4.: Vernetzung der Scherprobe mit Dreiecks- und Viereckselementen

Die Abbildungen zeigen die Vernetzung mit Dreiecks- und Viereckselementen mit der Elementschiefe s_k als Qualitätsmaß, die sich durch

$$s_k = 1 - \max\left(\frac{\zeta_{\max} - \zeta_{\text{opt}}}{180^\circ - \zeta_{\text{opt}}}, \frac{\zeta_{\text{opt}} - \zeta_{\min}}{\zeta_{\text{opt}}}\right) \quad (7.11)$$

berechnet. Mit $\zeta_{\min/\max}$ sind der maximale bzw. minimale Innenwinkel des Elements bezeichnet, wobei ζ_{opt} den Winkel des gleichwinkeligen, idealen Elements meint. Folglich entspricht ein Wert von $s_k = 1$ dem exakt gleichwinkeligen Element. Elementschiefen von bis zu $s_k = 0.5$ werden als akzeptabel eingeschätzt. Spitzwinkelige oder kurzseitige Elemente mit geringem Qualitätsmaß sind in der Regel zu steif, unterschätzen die tatsächlichen Deformationen und führen zu schlecht konditionierten Matrizen und ungenauen Ergebnissen [87].

7.2. Simulationsergebnisse

In den folgenden Abbildungen sind Berechnungsergebnisse mit den in Kapitel 6 identifizierten Parametern (Tabelle 6.1) zu sehen. Für die Abbildungen wurde jeweils der letzte Zeitschritt der transienten Berechnungsergebnisse gewählt. Die Deformation ist mithilfe einer Rampenfunktion vorgegeben, um die experimentellen Deformationsgeschwindigkeiten korrekt abzubilden.

7.2.1. Torsionsversuche

In Abb. 7.5 ist das Ergebnis des Relaxationsversuchs nach 10000 s zu sehen. Der Traversenwinkel der Maschine von $\varphi = 2^\circ$ wird in die Umfangsverschiebung am Kreisbogen von $v = 0.44$ mm umgerechnet. Für den monotonen Ratenversuch entspricht der Winkel $\varphi = 15^\circ$ einer Umfangsverschiebung von $v = 3.35$ mm. Auch hier ist der letzte Zeitschritt in Abb. 7.6 dargestellt. Für beide Lastfälle lassen sich die homogene Spannung im dünnwandigen Bereich der Doppelkerbe (vgl. Abb. 5.3) sowie die relativ geringen Spannungen im restlichen Bereich der Probe erkennen.

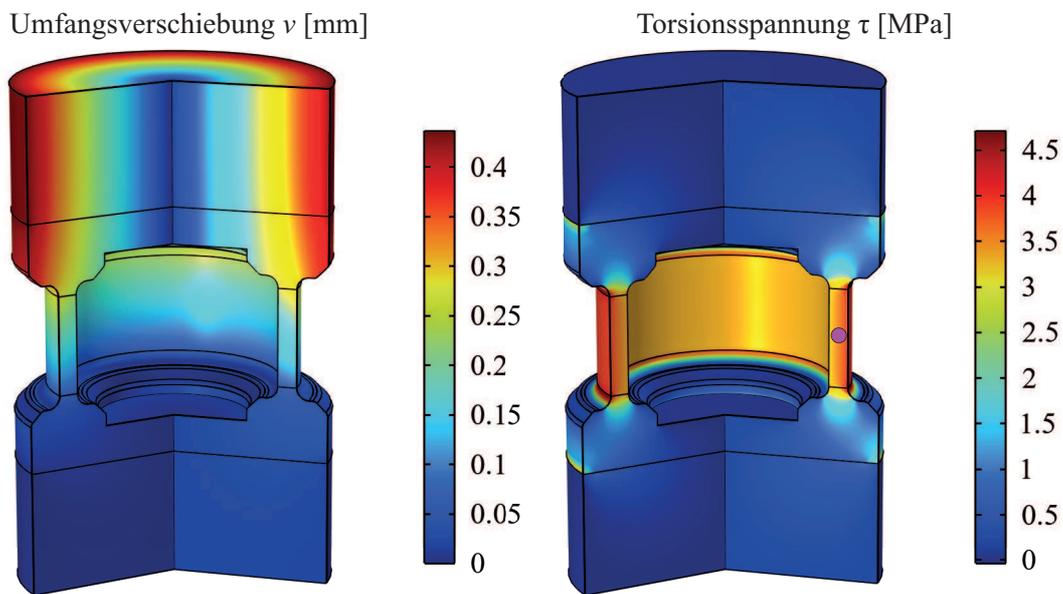


Abbildung 7.5.: FEM-Ergebnis der Spannung im Relaxationsversuch unter Torsionsbelastung bei 50°C und $t = 10000$ s

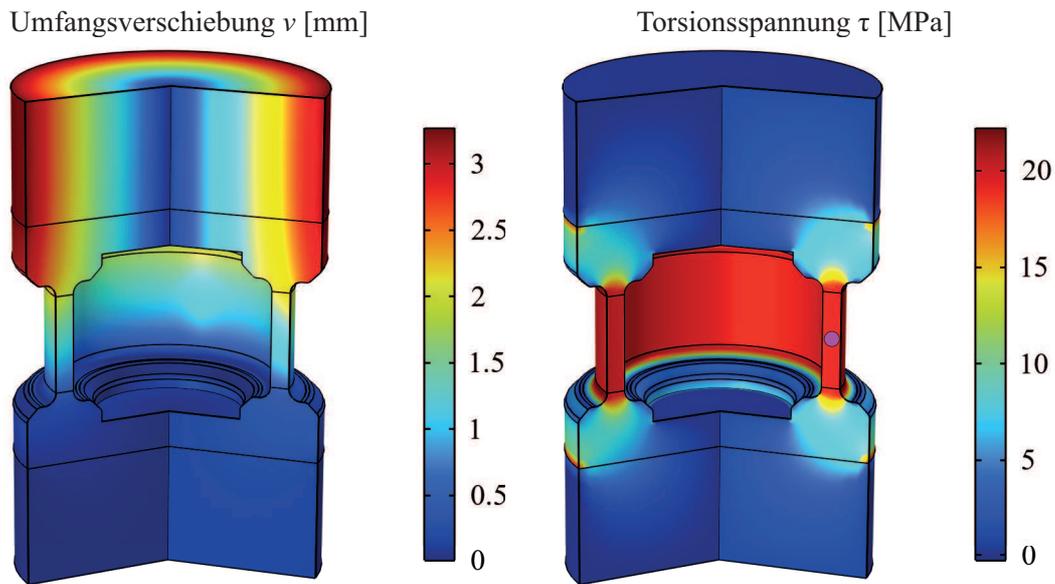


Abbildung 7.6.: FEM-Ergebnis der Spannung im Ratenversuch unter Torsionsbelastung bei 50°C und $\dot{\varphi} = 10^{\circ}/\text{min}$

In beiden Abbildungen ist der Auswertepunkt in der Mitte der Doppelkerbe zu erkennen, an dem die FEM-Ergebnisse mit den vorherigen Simulationsergebnissen in MatLab[®] verglichen werden sollen. Dieser Vergleich ist für den Relaxationsversuch und monotonen Ratenversuch in Abb. 7.7 dargestellt.

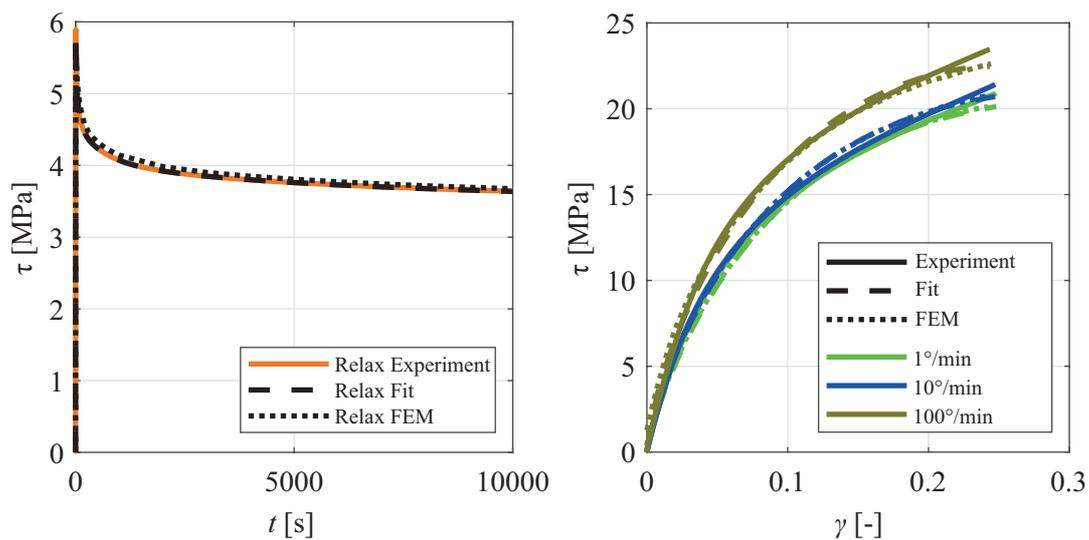


Abbildung 7.7.: Vergleich der FEM-Ergebnisse mit den Ergebnissen der Parameteridentifikation

Für die Torsionsversuche können die Ergebnisse der Parameteridentifikation durch die FEM-Implementierung bestätigt werden.

7.2.2. Zugversuche

Bei der Berechnung des Zugversuchs mit der Methode der Finiten Elemente wurden ein Relaxationsversuch mit einer Deformation von $u = 0.4$ mm sowie ein Versuch mit konstanter Dehnrates von $\dot{u} = 1$ mm/min berücksichtigt. Die Berechnungsergebnisse von Zugspannung σ_{11} und Deformation u der Zugprobe sind in den Abbildungen 7.8 und 7.9 dargestellt.

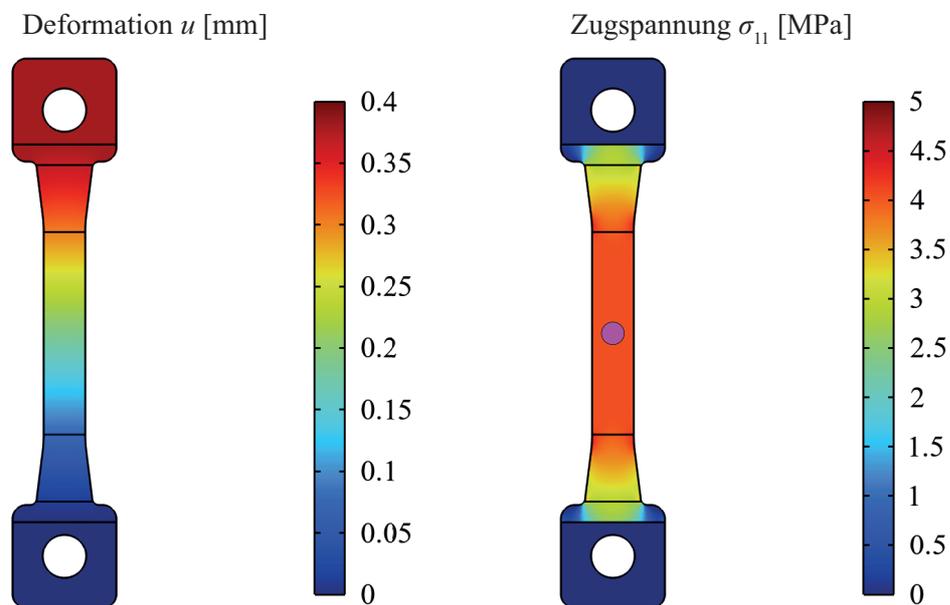


Abbildung 7.8.: FEM-Ergebnis der Spannung im Relaxationsversuch unter Zugbelastung bei 50°C und $t = 10000$ s

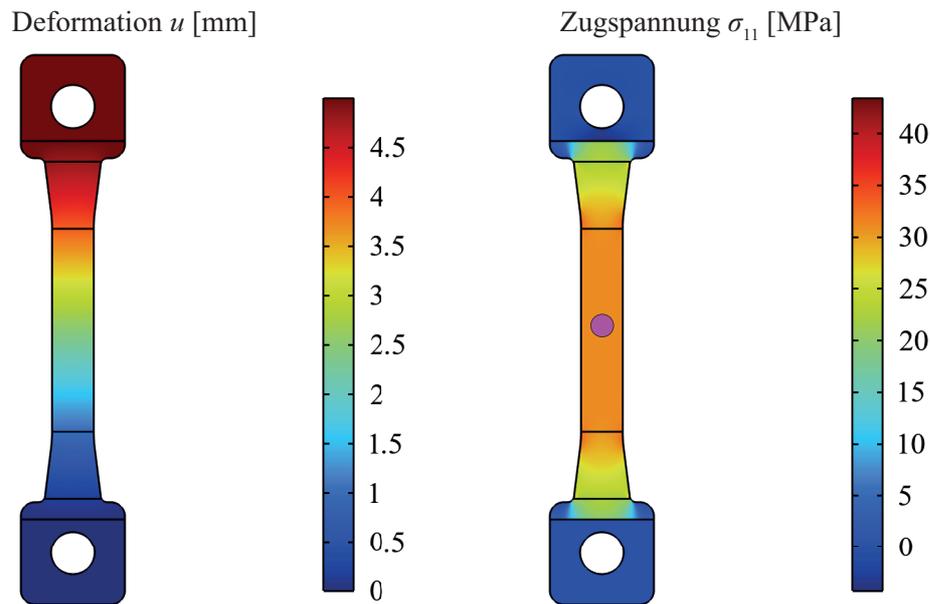


Abbildung 7.9.: FEM-Ergebnis der Spannung im Relaxationsversuch unter Zugbelastung 50°C und $\dot{u} = 1 \text{ mm/min}$

Für den Zugversuch erfolgt ebenfalls der Abgleich zwischen den Ergebnissen der Parameteridentifikation und der FEM-Implementierung. Dabei wurden die Spannungstensoren jeweils vollständig ausgewertet, sodass neben der experimentell ermittelten Spannung σ_{11} auch die einzelnen Tensorkomponenten ermittelt worden sind. So verfügt der Spannungsdeviator im Zugversuch unter Annahme von Isotropie über zwei verschiedene Komponenten σ_{11}^D sowie $\sigma_{22}^D = \sigma_{33}^D$. Der volumetrische Spannungstensor ist entlang der Hauptdiagonalen mit drei identischen Komponenten besetzt $\sigma_{11}^V = \sigma_{22}^V = \sigma_{33}^V$. Die Summe der 22- bzw. 33-Komponenten von Spannungsdeviator und volumetrischem Spannungstensor muss Null ergeben, um die Spannungsfreiheit in beide Richtungen orthogonal zur Zugrichtung zu gewährleisten. Dieser Vergleich ist vor allem aufgrund der unterschiedlichen Berechnungsweise von FEM und den zur Parameteridentifikation verwendeten Modellen interessant. Im Rahmen der Identifikation stand zur Ermittlung der Querdehnungen eine algebraische Gleichung (Gl. 6.14) zur Verfügung, die mit den Gleichungen zur Spannungsberechnung gekoppelt ist. Im Rahmen des FEM-Berechnungsprozesses wird die Querdehnung iterativ ermittelt, sodass die Spannungsfreiheit in beide Querrichtungen immer gewährleistet ist. In Abb. 7.10 ist der Vergleich der Spannungskomponenten für den monotonen Ratenversuch abgebildet, wobei in Abb. 7.11 explizit der Vergleich der ermittelten Querkontraktionszahlen dargestellt ist.

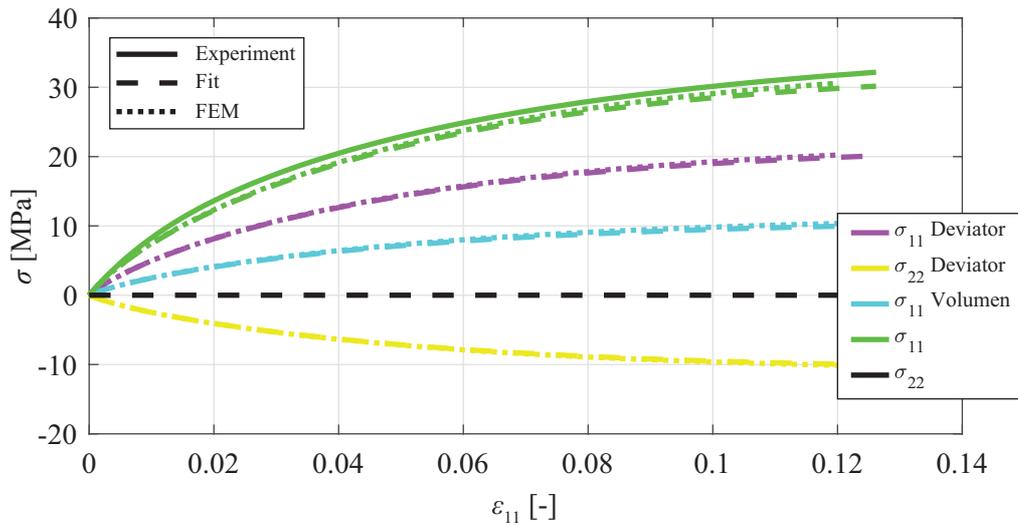


Abbildung 7.10.: Vergleich der Spannungskomponenten zwischen FEM und Parameteridentifikation für den monotonen Ratenversuch

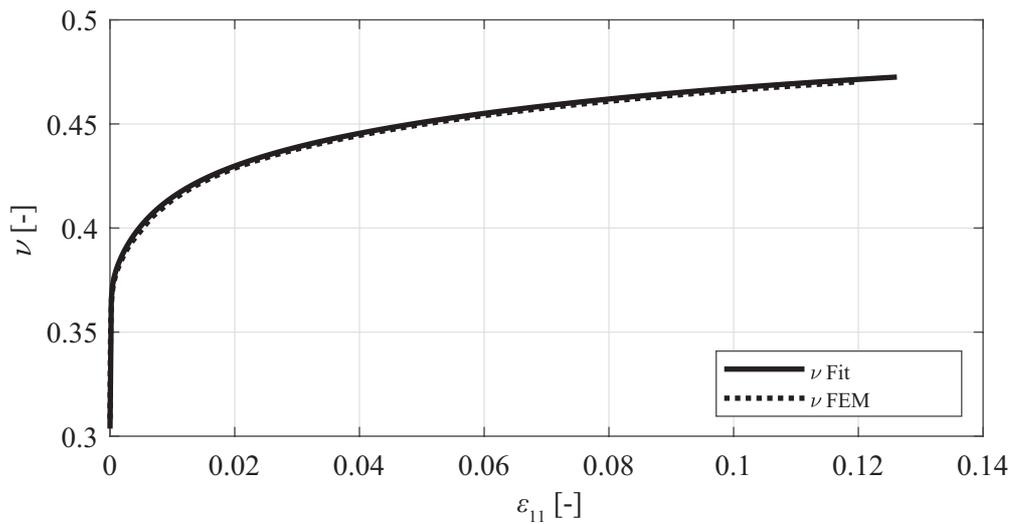


Abbildung 7.11.: Vergleich der Querkontraktionszahlen zwischen FEM und Parameteridentifikation für den monotonen Ratenversuch

Analog wurde mit dem Relaxationsversuch verfahren. Die Ergebnisse für die tensoriellen Spannungskomponenten und die Querkontraktionszahl sind in den Abbildungen 7.12 und 7.13 dargestellt.

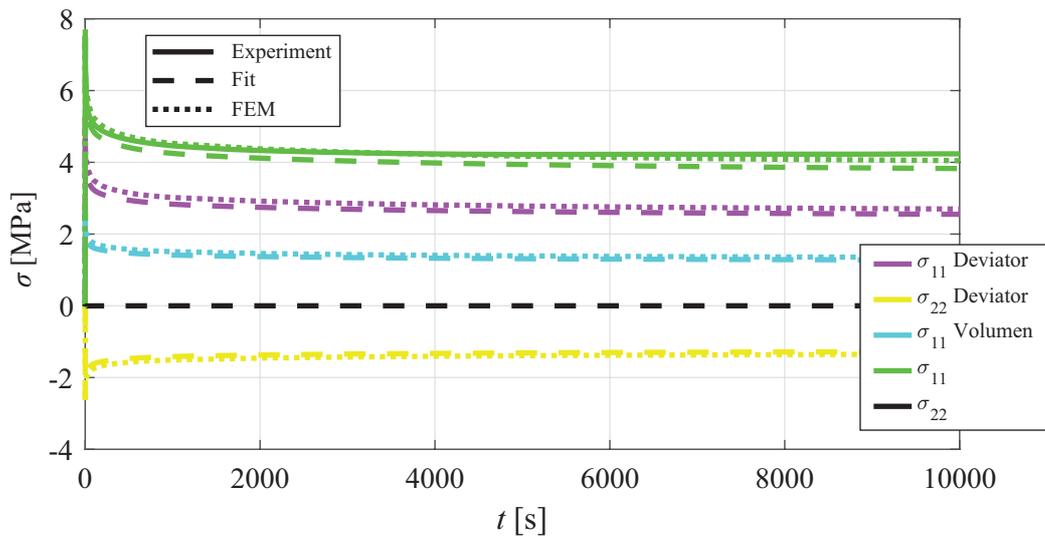


Abbildung 7.12.: Vergleich der Spannungskomponenten zwischen FEM und Parameteridentifikation für den monotonen Ratenversuch

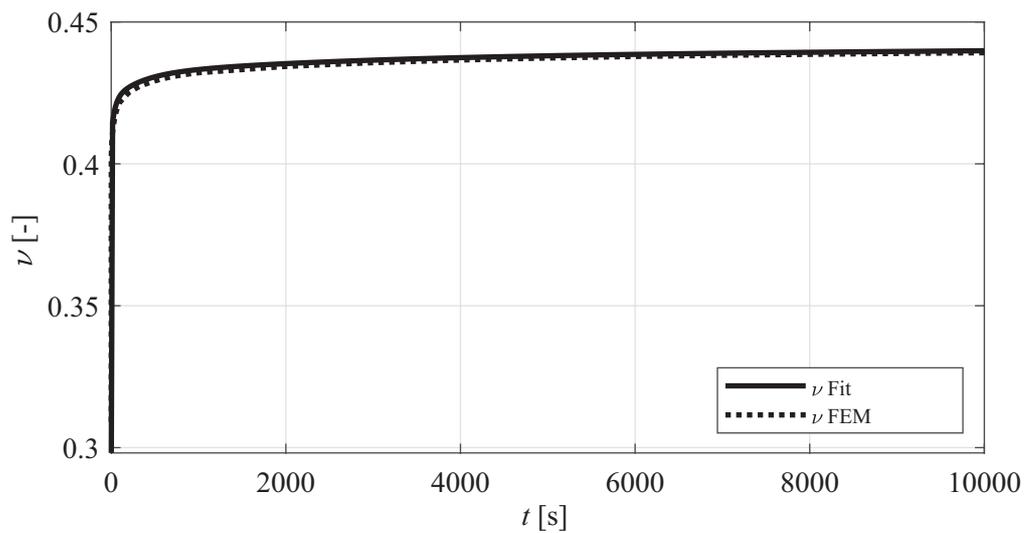


Abbildung 7.13.: Vergleich der Querkontraktionszahlen zwischen FEM und Parameteridentifikation für den monotonen Ratenversuch

Insgesamt können die Ergebnisse, die im Rahmen der Parameteridentifikation erzielt worden sind, durch die FEM-Berechnungen bestätigt werden und sollen im Folgenden validiert werden.

7.3. Validierungsversuche

In den kommenden Abschnitten wird das Materialmodell bzw. werden dessen Parameter einer Validierung unterzogen. Dazu werden experimentelle Ergebnisse herangezogen, die nicht zur Identifikation der Parameter verwendet wurden. In diesem Fall handelt es sich um einen einfachen Scherversuch mit der in Abschnitt 5.1.2 vorgestellten Scherprobe vom Miyachi-Typ und um einen Zugversuch mit der Rohrprobe, die bisher nur im rein deviatorischen Scherzustand zur Identifikation herangezogen wurde. Es wurden die Ergebnisse des Raten- und Relaxationsversuchs bei $T = 50^\circ\text{C}$ validiert, wobei sich die Validierung der Ratenversuche auf eine Dehnrates beschränkt.

7.3.1. Validierungsversuch Scherprobe

Als erster Validierungsversuch wird das Ergebnis des einfachen Scherversuchs vorgestellt. Bei dem Experiment mit konstanter Dehnrates wurde die Maschinentraverse mit einer Geschwindigkeit von $\dot{u} = 10 \text{ mm/min}$ bewegt. Die Ergebnisse sind in den folgenden beiden Abbildungen 7.14 und 7.15 dargestellt.

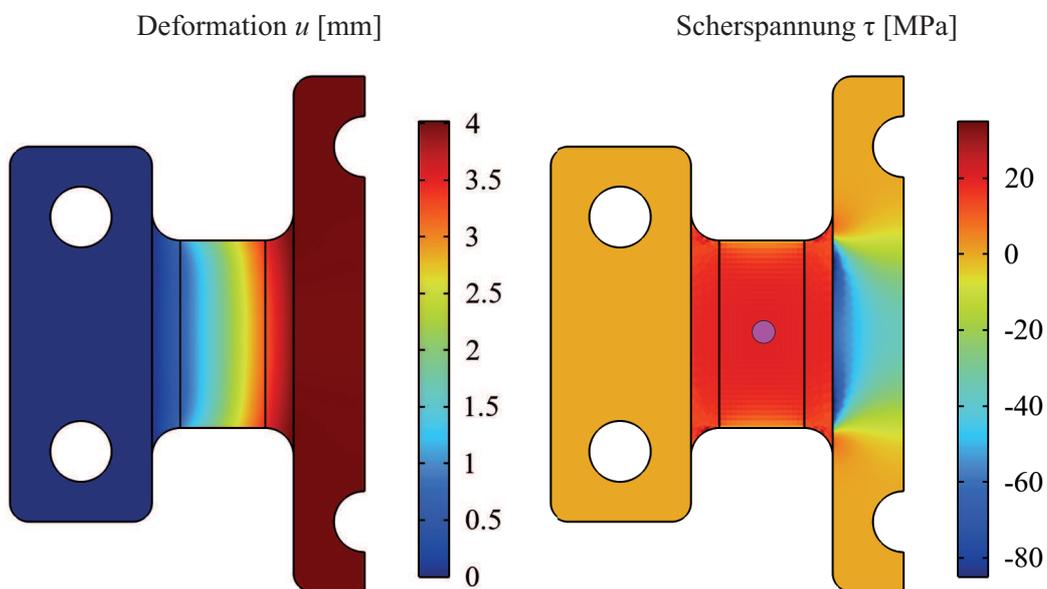


Abbildung 7.14.: FEM-Ergebnis der Scherspannung im Ratenversuch mit $\dot{u} = 10 \text{ mm/min}$ bei 50°C

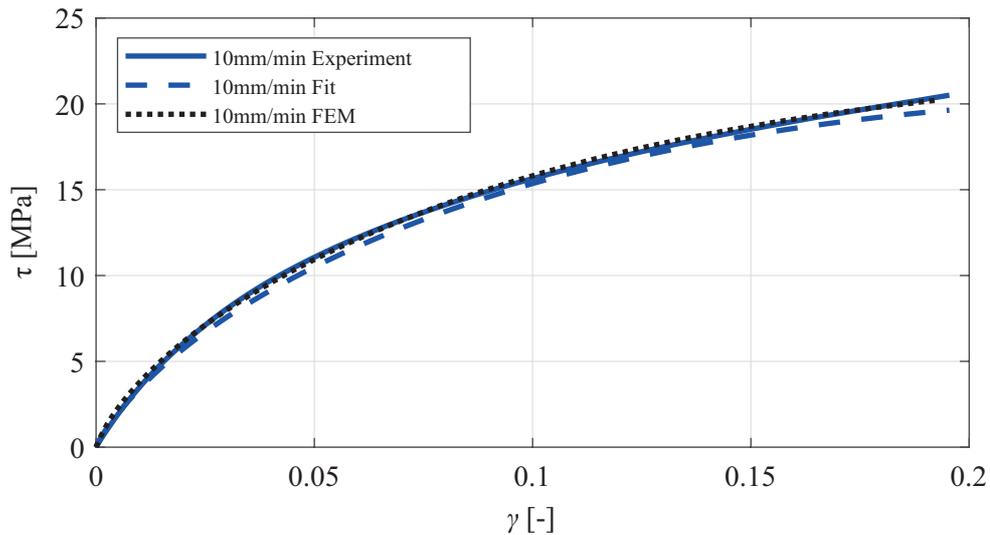


Abbildung 7.15.: Modellergebnisse der Scherspannung im Ratenversuch mit $\dot{u} = 10 \text{ mm/min}$ bei 50°C

Im Hinblick auf die Abweichungen zwischen den einzelnen, lokalen Verzerrungsmessungen (Abb. 5.18) und der Inhomogenität des Spannungszustands beim einfachen Scherversuch konnte eine derart hohe Ergebnisqualität der Validierungsrechnung nicht erwartet werden. Abbildung 7.14 suggeriert einen homogenen Spannungszustand im Bereich der Scherfläche, der jedoch dem absolut großen Bereich der Farbskala geschuldet ist. Bei einem kleineren Spannungsniveau und einer dadurch feiner abgestuften Farbskala kann der Spannungszustand im Relaxationsversuch in Abb. 7.16 eher mit den in Abschnitt 5.1.2 vorgestellten Ergebnissen des linear-elastischen Simulationsmodells in Einklang gebracht werden.

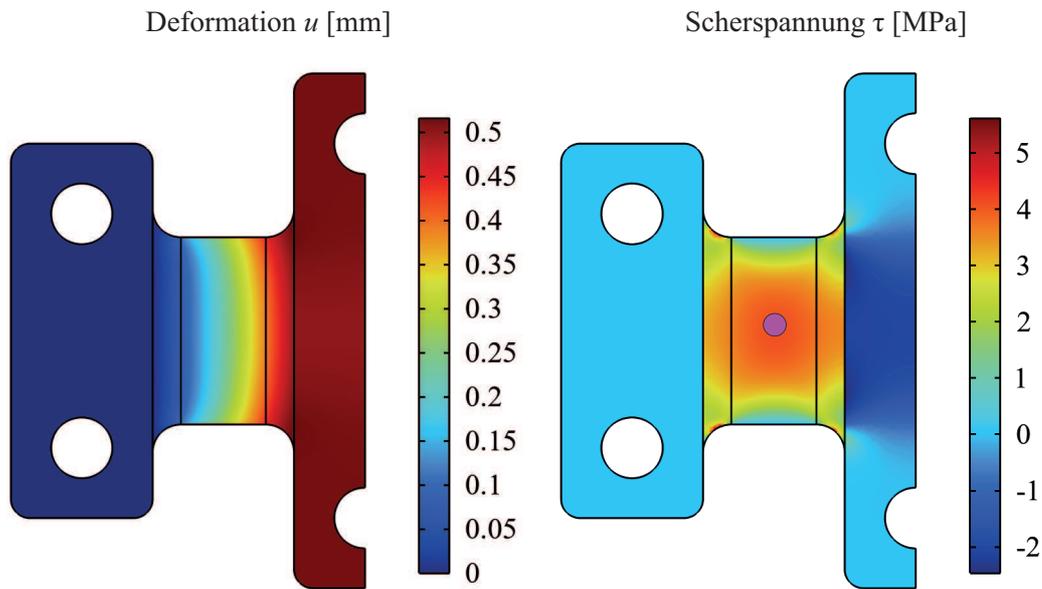


Abbildung 7.16.: FEM-Ergebnis der Scherspannung im Relaxationsversuch bei 50°C

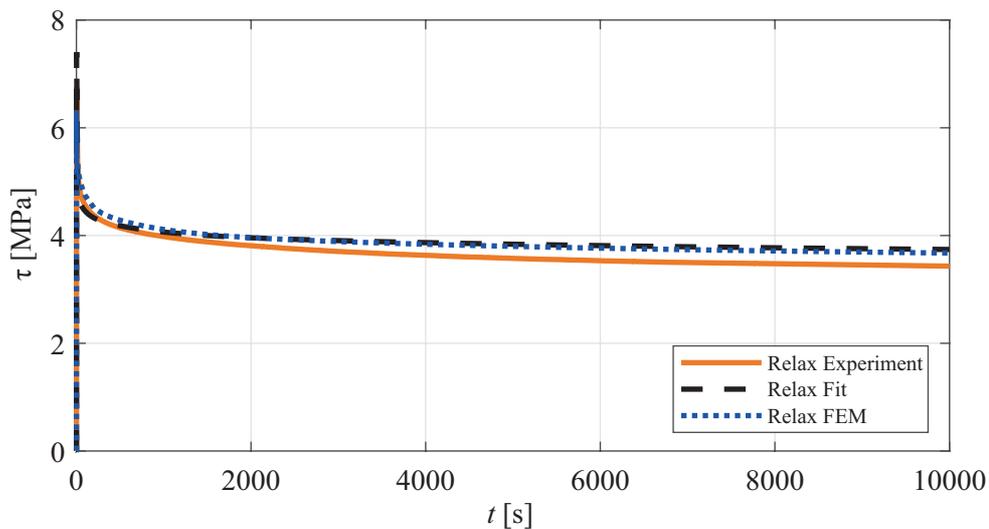


Abbildung 7.17.: Modellergebnisse der Scherspannung im Relaxationsversuch bei 50°C und $t = 10000$ s

7.3.2. Validierungsversuch Rohrprobe unter Zugbelastung

Der Zugversuch der Rohrprobe wurde mit einer konstanten Dehnrates von $\dot{u} = 1$ mm/min und bis zu einer Deformation von $u = 2.5$ mm durchgeführt. Für den Relaxationsver-

sich wurde eine konstante Deformation von $u = 0.2 \text{ mm}$ umgesetzt. Aufgrund der axial-symmetrischen Ausführung der Rohrprobe und der damit einhergehenden Behinderung der Querdehnung kann im Bereich der Doppelkerbe kein homogener Spannungszustand erzielt werden. In Abb. 7.18 ist die Auswertung der Spannung der Deformation im Ratenversuch zu sehen. Die Zugspannung im Bereich der Doppelkerbe ist durch eine Biegespannung überlagert. Dieser Effekt war auch im Experiment zu beobachten, wie Abb. 7.19 zeigt.

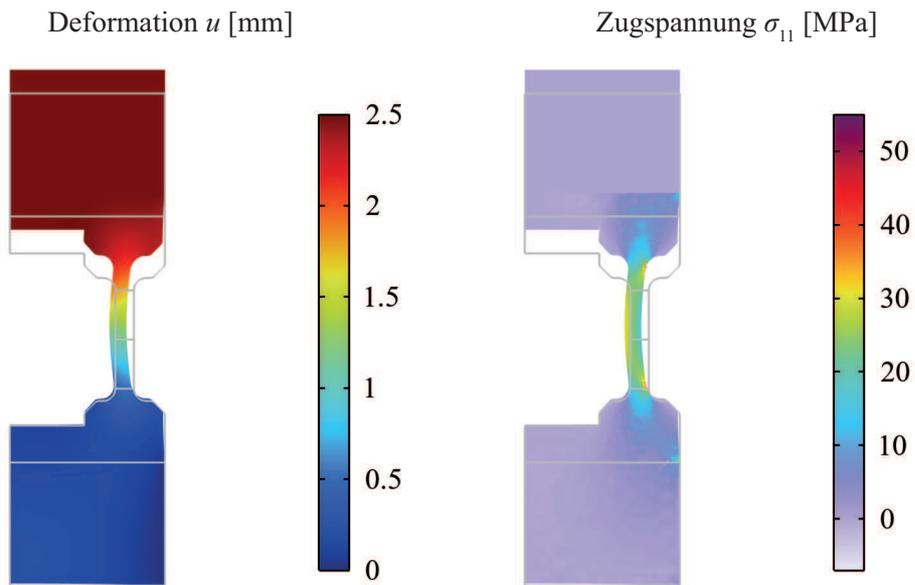


Abbildung 7.18.: FEM-Ergebnis der Zugspannung im Ratenversuch mit $\dot{u} = 1 \text{ mm/min}$ bei 50°C

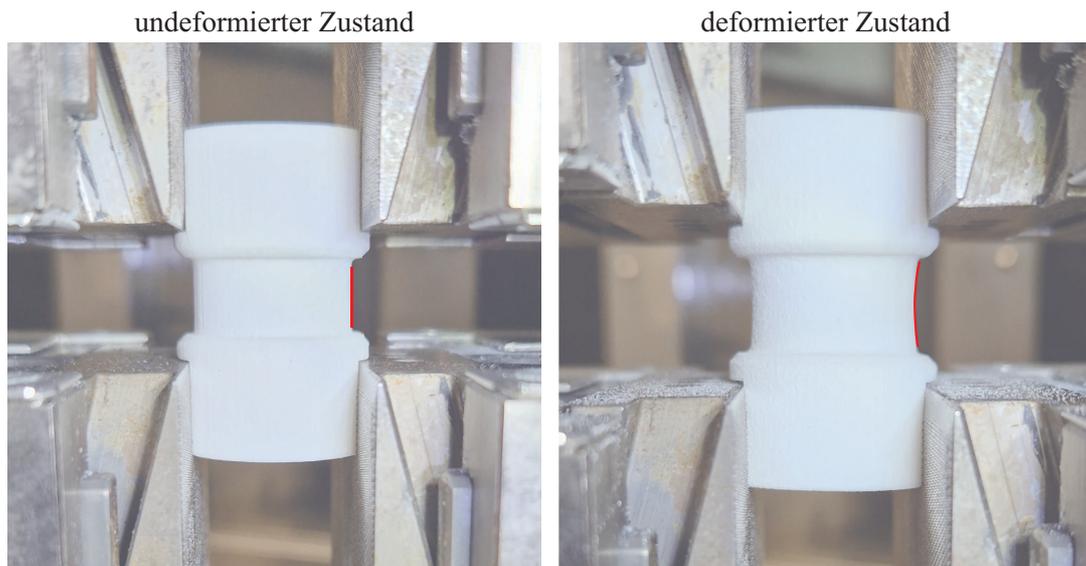


Abbildung 7.19.: Biegeeffekt im Zugversuch

Aufgrund der überlagerten Biegespannung bezieht sich das experimentell ermittelte Kraftsignal nicht auf eine reine Deformation in Achsrichtung der Rohrprobe. Das in MatLab[®] implementierte Modell berechnet die Zugspannung auf Basis von gemessenen Dehnungen, die sich auf der äußeren Druckseite der Doppelkerbe befinden, also die tatsächlichen Zugdehnungen unterschätzen. Demzufolge ist die Modellantwort mit großen Abweichungen gegenüber der Spannung auf Basis der Kraftmesswerte und der Querschnittsfläche A_0 behaftet. Bei der Berechnung mithilfe der FEM wurde aufgrund des inhomogenen Spannungszustands im Bereich der Doppelkerbe ein anderer Weg der Auswertung beschritten. Als Grundlage wurde die Mises-Vergleichsspannung σ_{vM} (benannt nach RICHARD VON MISES) ausgewertet, die einen realen Spannungszustand auf eine fiktive, einachsige Spannung zurückführt [6]¹. Durch Integration der Vergleichsspannung σ_{vM} über die mittige Querschnittsfläche der deformierten Probe kann ein einachsiges Kraftsignal erzeugt werden, das sich auf die Querschnittsfläche A_0 der Probe beziehen lässt. Abbildung 7.20 zeigt die verschiedenen Spannungsantworten. Es kann festgehalten werden, dass das auf Zug belastete Rohr bei höheren Deformationen aufgrund des inhomogenen Dehnungsverhaltens nicht gut zur Validierung geeignet ist. Bei den kleinen Deformationen im Relaxationsversuch sind zwar ebenfalls Spannungsinhomogenitäten zu erkennen (Abb. 7.21), die Ergebnisqualität ist jedoch hoch und führt zu einer guten Validierung der Modellparameter (Abb. 7.22).

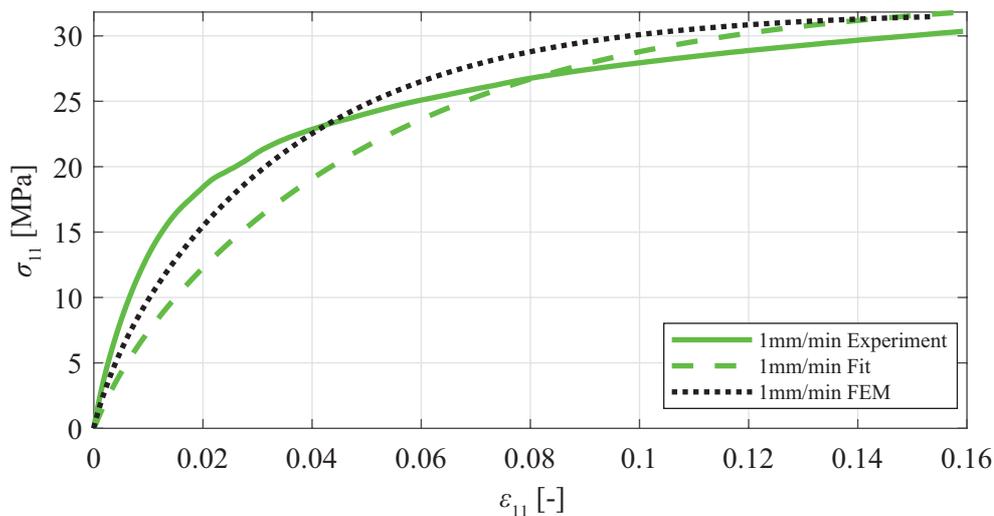


Abbildung 7.20.: Modellergebnisse der Scherspannung im Ratenversuch mit $\dot{u} = 1 \text{ mm/min}$ bei 50°C

¹Neben der von-Mises-Vergleichsspannung gibt es noch weitere Festigkeitshypothesen, die in der Praxis Anwendung finden. Dazu sei auf die einschlägige Literatur verwiesen, z. B. [6].

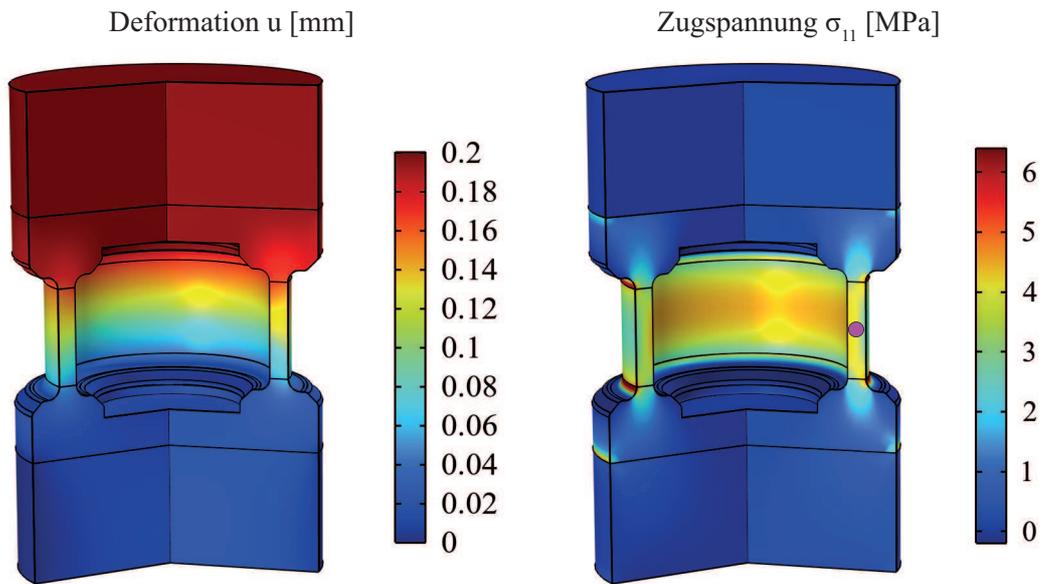


Abbildung 7.21.: FEM-Ergebnis der Zugspannung im Relaxationsversuch bei 50°C und $t = 10000$ s

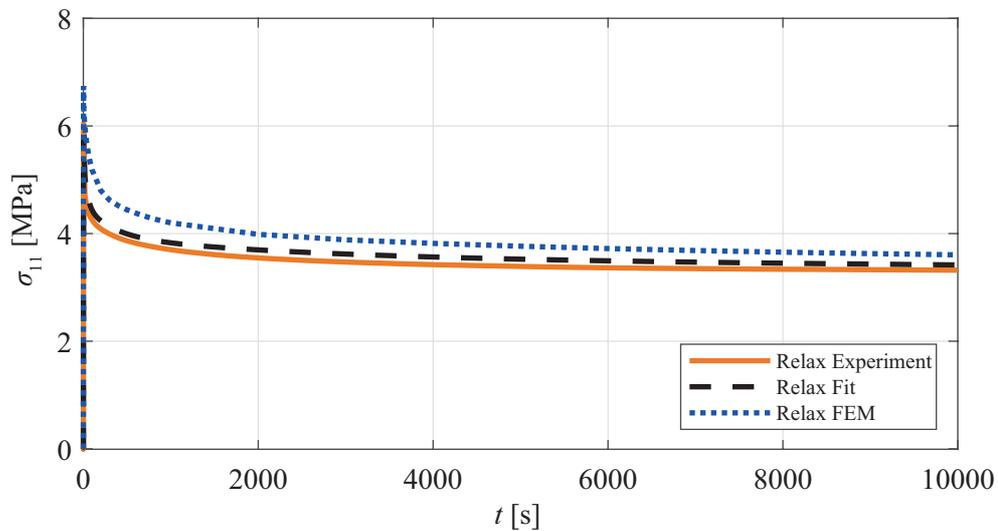


Abbildung 7.22.: Modellergebnisse der Scherspannung im Relaxationsversuch bei 50°C und $t = 10000$ s

Nachdem das Modell erfolgreich mithilfe der Methode der Finiten Elemente implementiert und validiert wurde, sollen nun die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und einige Limitationen des Modells kritisch beleuchtet sowie ein Ausblick auf künftige Arbeiten gegeben werden.

8. Zusammenfassung und Ausblick

So eine Arbeit ist eigentlich nie fertig, man muss sie für fertig erklären, wenn man nach Zeit und Umständen das Mögliche getan hat.

Johann Wolfgang von Goethe (1749 – 1832)

Ziel der Arbeit war es, ein Modell zu entwickeln, das in der Lage ist, viskoelastisches Materialverhalten mit nichtlinearer Ratenabhängigkeit in Kombination mit Plastizität ohne klare Fließgrenze abzubilden. Das experimentelle Programm mit der Vorstellung von drei verschiedenen, selbst entwickelten Probekörpern bildet die Grundlage zur Ermittlung der Materialeigenschaften. Dabei wurden zwei rein gestaltsändernde und zwei volumetrisch-deviatorische Versuchsreihen bei diversen, kontrollierten Temperaturniveaus durchgeführt. Somit diente eine Versuchsreihe der Identifikation der Materialparameter und eine weitere zur Validierung. Nach umfangreicher Herleitung der Modellgleichungen aus den materialtheoretischen Ansätzen der Viskoelastizität und der endochronen Plastizität konnte ein differential-algebraisches Gleichungssystem bereitgestellt werden, das zur Beschreibung des Modellverhaltens und der Identifikation der Parameter dient. Die Modellantwort mit den identifizierten Parametern zeigt eine gute Übereinstimmung mit den rein deviatorischen und volumetrisch-deviatorischen Experimentalergebnissen. Mithilfe der kommerziellen FEM-Software Comsol Multiphysics[®] können die Modellantworten des dreidimensionalen Modells nachvollzogen und bestätigt werden. Das Modell ermöglicht für einen praktisch relevanten Auslegungsbereich von $\epsilon \leq 5\%$ bei Temperaturen oberhalb des Glasübergangs eine zuverlässige Vorhersage der Spannungen für transiente Berechnungen. Bei monotonen Ratenversuchen sind die Modellantworten bei Dehnungen bis zu $\epsilon \leq 12\%$ zufriedenstellend. Zyklische Versuche können im Rahmen kleiner Dehnung abgebildet werden, wobei das Modell insbesondere die qualitativen Spannungsverläufe der zyklischen Versuche auf höherem Dehnungsniveau nicht mehr abzubilden vermag. Die hohe Ergebnisqualität des Modells für einen praxisrelevanten Auslegungsbereich soll jedoch erneut herausgestellt werden. Abschließend sollen nun einige Einschränkungen des Modells kritisch diskutiert und ein Ausblick auf offene Punkte für zukünftige Arbeit gegeben werden.

8.1. Anisotropie als Folge des Fertigungsprozesses

In den mechanischen Tests zeigten die Bauteile bereits anisotropes Verhalten (Abb. 5.10). Die sich durch den Schichtaufbau im Fertigungsprozess ergebende Anisotropie wird durch das Materialmodell bisher nicht berücksichtigt. Abbildung 8.1 stellt zwei Fertigungslagen der Zugprobe und die Komponenten des Dehnungstensors mit dem zugehörigen Schichtaufbau dar. Die Dehnung entlang der Zugachse ist mit ε_{11} bezeichnet, wobei ε_{22} und ε_{33} die Querdehnungen bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die x-Fertigungslage der Zugprobe getestet und modelliert. Die gemessenen Querdehnungen und die daraus errechneten Querkontraktionszahlen (Abb. 5.21) korrespondieren mit der ε_{22} -Komponente in Abb. 8.1. Die beiden Querdehnungskomponenten wurden im Rahmen der Modellierung als identisch $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ angenommen. Es liegt jedoch der Verdacht nahe, dass Unterschiede in der Querdehnung innerhalb einer Schicht ε_{22} und zwischen den Schichten ε_{33} existieren. Wird die z-Fertigungslage der Zugprobe betrachtet, so läge es nahe, transversale Isotropie zu unterstellen. Hier würde die ε_{11} -Richtung als Vorzugsrichtung fungieren und die beiden Richtungen ε_{22} und ε_{33} würden eine isotrope Ebene bilden. Somit würde das bisherige Modell mit dem Schub- und Kompressionsmodul jeweils senkrecht zur Vorzugsrichtung erweitert. Schließlich sind im Rahmen der Identifikation Stabilitätskriterien, die sich aus der Forderung der positiven Definitheit der Steifigkeitsmatrix ableiten, zu erfüllen [7]. Die von der z-Fertigungslage abweichenden Lagen lassen sich durch Rotationen abbilden. Diese Anisotropie zu berücksichtigen, ist der nächste Schritt in der Weiterentwicklung des Materialmodells, sodass die Fertigungslage eines Bauteils im Rahmen der Berechnung berücksichtigt werden kann.

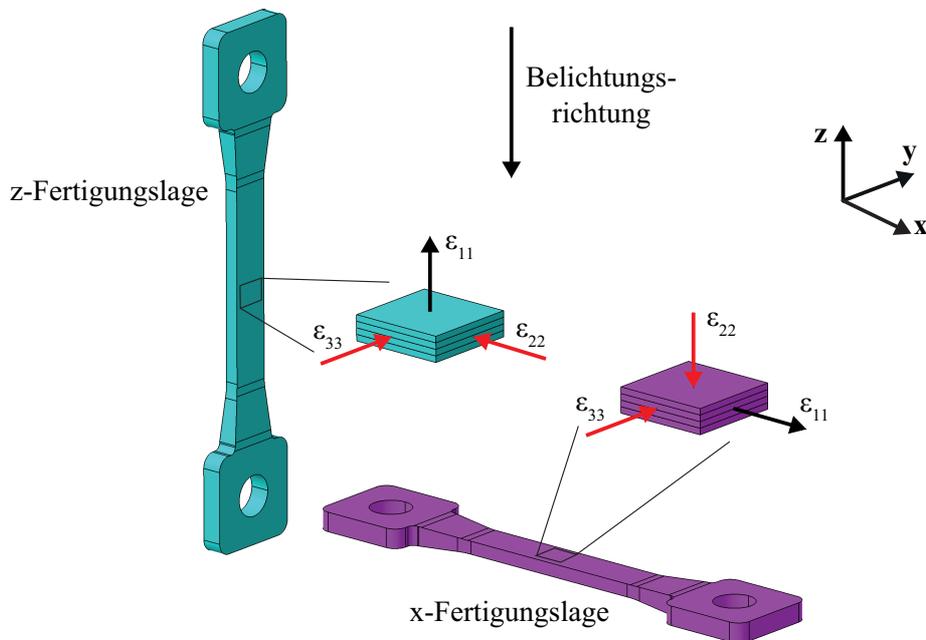


Abbildung 8.1.: Fertigungslagen mit Schichtaufbau und Dehnungen

8.2. Glasübergangstemperatur im Einsatzbereich

Die Modellierung erfolgt bisher isotherm in einem Bereich oberhalb der Glasübergangstemperatur. Ein Elastomer weist im entropieelastischen Bereich oberhalb seiner Glasübergangstemperatur eine größere Verformbarkeit auf als im spröden energieelastischen Bereich. Die Erhöhung der Verformbarkeit geht mit einer Abnahme der Festigkeit einher. Ähnliche Effekte lassen sich bei dem hier untersuchten teilkristallinen Thermoplasten PA12 feststellen. Bezüglich des mechanischen Verhaltens im Experiment kann eine Abnahme der Festigkeit hin zu höheren Temperaturen beobachtet werden. Im Rahmen des betrachteten Deformationsniveaus konnte jedoch auch bei tiefen Temperaturen kein vorzeitiges Versagen festgestellt werden. Eine Versprödung bei tiefen Temperaturen ist demnach kein Kriterium, das den Werkstoffeinsatz limitiert. Soll ein für die Praxis relevanter Temperaturbereich vollständig abgebildet werden, so ist der Bereich des Glasübergangs, der nominal bei $T_g = 37^\circ\text{C}$ liegt, als Herausforderung zu sehen. Dazu ist festzuhalten, dass die kalorischen und (thermo-)mechanischen Eigenschaften sich durch den Glasübergang verändern. Die Modellierung des Glasübergangs bzw. der molekularen Ursachen ist seit geraumer Zeit Gegenstand wissenschaftlicher Arbeiten. Die Arbeiten von TOOL gehen auf die 1940er Jahre zurück [153] [154]. Als Arbeiten, die, genau wie die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Modelle, auf der rationalen Thermodynamik basieren, seien noch die Arbeiten von CUNAT [28], LION [99] und MITTERMEIER [115] genannt. Die Tatsache, dass diese Arbeiten sich neben vielen anderen ausschließlich der Modellierung des Glasübergangs widmen, zeigt auf, dass es sich beim Glasübergang um ein komplexes Phänomen handelt, das nicht mit einfachen Methoden innerhalb eines Materialmodells berücksichtigt werden kann.

Aus Zeit und Kostengründen werden Simulationen für technische Thermoplaste meistens nicht über den gesamten Temperaturbereich durchgeführt, sondern in dem Zustand, in dem sich der Werkstoff im „schlechtesten“ Zustand befindet. Bei thermoplastischen Polymeren im Allgemeinen und PA12 im Besonderen ist dies immer die höchste Einsatztemperatur. Sofern die erforderliche Festigkeit bei der maximalen Einsatztemperatur gewährleistet ist, so stellen niedrigere Temperaturen meist kein Problem dar. Zu berücksichtigen bleibt, dass die Duktilität bei tiefen Temperaturen abnimmt. Für das hier beschriebene PA12 können im Rahmen der Experimente bis 0°C innerhalb eines praktikablen Dehnungsbereichs keine Restriktionen für die Auslegung konstatiert werden. Bezüglich der Berücksichtigung des Glasübergangs scheint der praktikable Ansatz der Modellierung und Berechnung oberhalb der Glasübergangstemperatur daher ein gangbarer Weg. Das Verlassen des isothermen Pfads und Einbeziehen des Glasübergangs bedeutet eine enorme Komplexitätssteigerung des Modells, die den praktischen Nutzen vermutlich nicht rechtfertigen kann.

8.3. Erweiterung des Modells auf finite Deformationen

Das Hookesche Stoffgesetz für kleine Deformationen bildet die Grundlage für das hier entwickelte Materialmodell. Mithilfe der Theorien der Viskoelastizität und der endochronen Plastizität können Nichtlinearitäten abgebildet werden, das Modell ist jedoch geometrisch linear und für kleine Deformationen ausgelegt. Dies ist aus praktischer Sicht ausreichend, da thermoplastische Polymerbauteile – im Gegensatz zu Bauteilen aus Elastomerwerkstoffen – im Bereich kleiner Deformationen betrieben bzw. auf diese ausgelegt werden. In Abb. 8.2 ist ein Ratenversuch bei $T = 20^\circ\text{C}$ und einer Traversengeschwindigkeit von $\dot{u} = 1\text{mm}/\text{min}$ dargestellt, für den neben der Ingenieurspannung σ_{ing} auch die wahre Spannung σ_{wahr} , die sich auf die jeweils tatsächliche Querschnittsfläche A der Zugprobe bezieht, ausgewertet wurde. Die Auswertung wurde mit diesen Parametern durchgeführt, da sie mit der Messung der Querkontraktionszahl im Ratenversuch (Abb. 5.21) übereinstimmen und diese Information für die Auswertung der tatsächlichen Querschnittsfläche erforderlich ist.

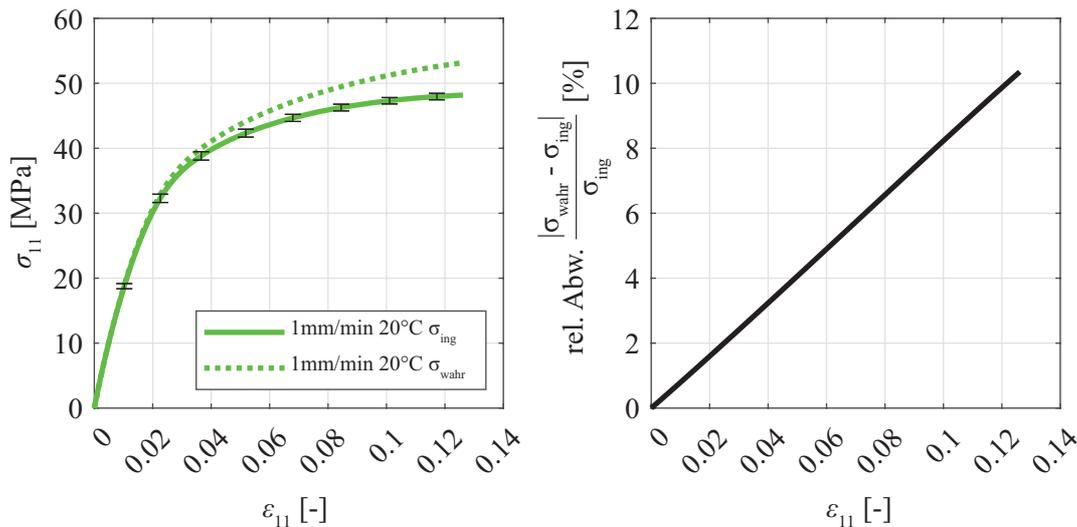


Abbildung 8.2.: Vergleich von Ingenieurspannung und wahrer Spannung bei der Zugprobe mit $\dot{u} = 1\text{mm}/\text{min}$ bei $T = 20^\circ\text{C}$

Die Ergebnisse der Parameteridentifikation zeigen, dass Ingenieurspannungen auch bei großen Deformationen von $\varepsilon = 10\%$ bzw. Scherungen von $\gamma = 0.25$ noch gut abgebildet werden können. Es gibt jedoch bei Dehnungen oberhalb von $\varepsilon \geq 5\%$ einen relevanten Unterschied zwischen der wahren Spannung und der im Modell berücksichtigten Ingenieurspannung. Um die wahren Spannungen konsequent als die vom Modell zu beschreibende Größe heranzuziehen, ist der Umfang der lokalen Dehnungsmessungen deutlich auszuweiten, da sowohl die Temperaturen als auch die verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten

berücksichtigt werden müssen. Außerdem muss ein Materialmodell für finite Deformationen existieren, das in den folgenden Abschnitten in seinen Gleichungen bereitgestellt wird.

8.3.1. Kinematische Zusammenhänge der (Zwischen-)Konfigurationen

Aus kinematischer Sicht wird zur Beschreibung des Materialverhaltens ein multiplikativer Split des Deformationsgradienten benötigt, der im Rahmen des kontinuummechanischen Grundlagenkapitels bereits angesprochen wurde (Abschnitt 3.1). Als Folge der bisherigen Modellierungsstrategie muss der Deformationsgradient in einen isochoren Anteil $\hat{\mathbf{F}}$ und einen volumetrischen Anteil $\bar{\mathbf{F}}$ aufgeteilt werden. Im Rahmen des geometrisch linearen Modells sind die inelastischen Effekte durch den rein gestaltsändernden Spannungsanteil abgebildet worden. Somit wird der isochore Anteil in einen elastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}_e$ und einen inelastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}_i$ multiplikativ aufgeteilt.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \hat{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}} \\ \hat{\mathbf{F}} &= \hat{\mathbf{F}}_e \cdot \hat{\mathbf{F}}_i \\ \Rightarrow \mathbf{F} &= \hat{\mathbf{F}}_e \cdot \hat{\mathbf{F}}_i \cdot \bar{\mathbf{F}}\end{aligned}\tag{8.1}$$

Mithilfe der bereits eingeführten Jacobi-Determinante J lässt sich der volumetrische Anteil

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}\tag{8.2}$$

berechnen. Der isochore Anteil, für den $\det \hat{\mathbf{F}} = 1$ gilt, kann über

$$\hat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}\tag{8.3}$$

berechnet werden. Durch den multiplikativen Split sind neben der Momentan- und Referenzkonfiguration (Abb. 3.1) fiktive Zwischenkonfigurationen erforderlich, die für die Kombination von isochor-volumetrischem und elastisch-inelastischem Split in der Arbeit von JOHLITZ [76] vorgestellt worden sind, an die sich die folgenden Ausführungen anlehnen. Die verschiedenen Konfigurationen sind in Abb. 8.3 dargestellt.

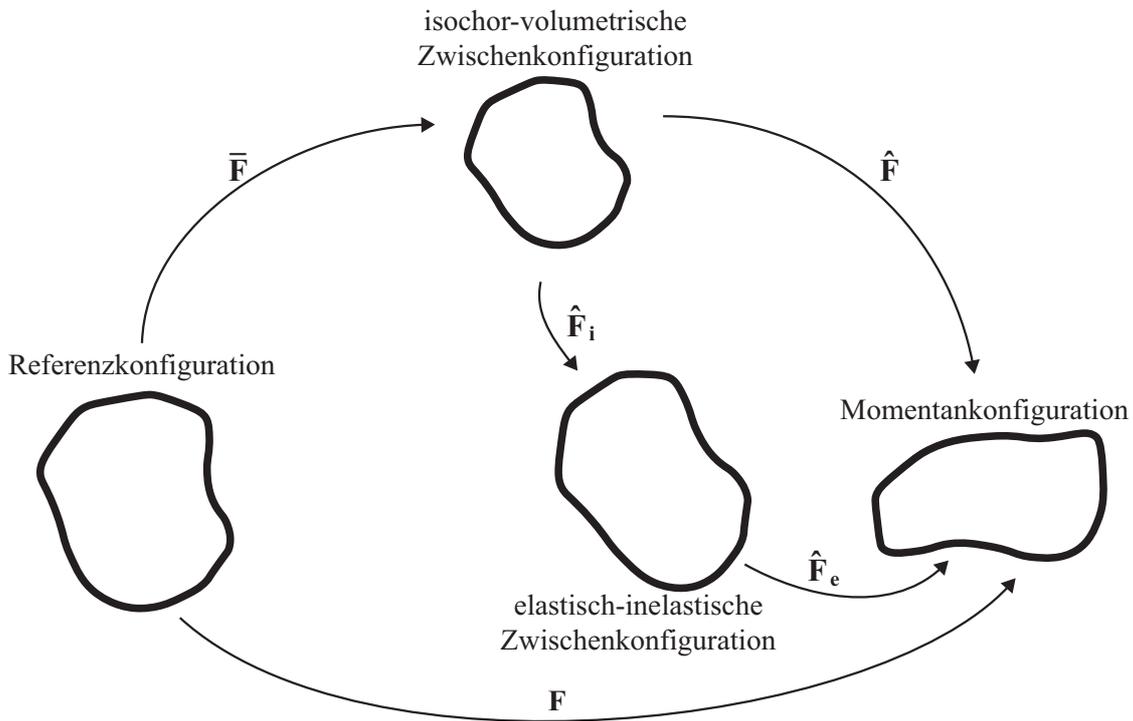


Abbildung 8.3.: Split des Deformationsgradienten mit Zwischenkonfigurationen (in Anlehnung an JOHLITZ [76])

Zwischen den Konfigurationen gelten die Regeln des „*push-forward*“ und „*pull-back*“ nach Gln. (3.11) und (3.12). Wird der „*push-forward*“ für den Greenschen Verzerrungstensor ausgeführt, so entsteht auf der isochor-volumetrischen Zwischenkonfiguration ein neuer Verzerrungstensor Γ_{IV}

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{IV} &= \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \bar{\mathbf{F}}^{-1} \\
 &= \frac{1}{2} J^{-\frac{2}{3}} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{I}) + \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{B}}^{-1}) \\
 &= \hat{\Gamma}_{IV} + \bar{\Gamma}_{IV}.
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Der Vorteil dieses Verzerrungsmaßes ist, dass sich die volumetrischen und isochoren Verzerrungsanteile auf der Zwischenkonfiguration – analog zur linearen Theorie – additiv aufteilen. Im Weiteren wird der isochore, rechte Cauchy-Green-Tensor benötigt, für den

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \hat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C} \tag{8.5}$$

und

$$\det \hat{\mathbf{C}} = 1 \Rightarrow \left(\det \hat{\mathbf{C}} \right)' = \frac{\partial \det \hat{\mathbf{C}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}} : \dot{\hat{\mathbf{C}}} = \hat{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\hat{\mathbf{C}}} = 0 \tag{8.6}$$

gilt. Die Aufteilung in gestaltsändernde und volumetrische Verzerrungsanteile folgt der Modellierungsstrategie für kleine Deformationen. Dabei wurde das inelastische Materialverhalten gestaltsändernd abgebildet. Um dies auch im finiten Modell umzusetzen, wird der isochore Anteil des Deformationsgradienten $\hat{\mathbf{F}}$ in einen isochor-elastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}_e$ und einen isochor-inelastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}_i$ aufgeteilt. Somit lassen sich Nichtgleichgewichtsspannungen innerhalb des deviatorischen Spannungsanteils abbilden. Auf der elastisch-inelastischen Zwischenkonfiguration entsteht durch den „push-forward“ des Verzerrungstensors $\hat{\Gamma}_{IV}$ der isochor-volumetrischen Zwischenkonfiguration der Verzerrungstensor $\hat{\Gamma}_{EI}$

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{EI} &= \hat{\mathbf{F}}_i^{-T} \cdot \hat{\Gamma}_{IV} \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^{-1} &&= \hat{\mathbf{F}}_i^{-T} \cdot \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{F}}^T \cdot \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{I} \right) \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{F}}_e^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_e - \hat{\mathbf{F}}_i^{-T} \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^{-1} \right) &&= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{C}}_e - \mathbf{I} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{B}}_i^{-1} \right) \\ &= \hat{\Gamma}_e + \hat{\Gamma}_i\end{aligned}\quad (8.7)$$

Für den isochor-elastischen rechten Cauchy-Green-Tensor gilt der Zusammenhang aus Gl. (8.5)

$$\hat{\mathbf{C}}_e = \hat{\mathbf{F}}_e^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_e. \quad (8.8)$$

Der isochor-inelastische linke Cauchy-Green-Tensor berechnet sich wiederum durch

$$\hat{\mathbf{B}}_i = \hat{\mathbf{F}}_i \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^T. \quad (8.9)$$

Aus Gl. (8.7) wird ersichtlich, dass dieses Vorgehen den additiven Split der elastischen und inelastischen Deformationsmaße auf der Zwischenkonfiguration sicherstellt. Mithilfe des isochoren, inelastischen Deformationsgradienten kann eine Bedingung für den isochoren, inelastischen Geschwindigkeitsgradienten abgeleitet werden. Aus der Vorüberlegung, dass alle isochoren Deformationsmaße volumenerhaltend sind, kann nach wenigen tensoriellen Umformungen die Bedingung für die Spur des isochoren, inelastischen Geschwindigkeitsgradienten $\hat{\mathbf{L}}_i$ hergeleitet werden.

$$\det \hat{\mathbf{F}}_i = 1 \Rightarrow \left(\det \hat{\mathbf{F}}_i \right) \dot{} = \hat{\mathbf{F}}_i^{-T} : \dot{\hat{\mathbf{F}}}_i = \text{tr} \left(\dot{\hat{\mathbf{F}}}_i \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^{-1} \right) = \text{tr} \left(\hat{\mathbf{L}}_i \right) = 0. \quad (8.10)$$

Hieraus ergibt sich später eine rein deviatorische Form der Evolutionsgleichungen. Für den isochoren, inelastischen Deformationsgeschwindigkeitstensor folgt aus Gl. (8.10)

$$\hat{\mathbf{D}}_i = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{L}}_i + \hat{\mathbf{L}}_i^T \right) \Rightarrow \text{tr}(\hat{\mathbf{D}}_i) = 0. \quad (8.11)$$

8.3.2. Spannungstensoren

Analog zur linearen Theorie wird die Spannung in volumetrisch-deviatorischer Aufteilung bereitgestellt. Der auf der Momentankonfiguration operierende Cauchy-Spannungstensor

ist durch

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^V + \mathbf{T}^D \quad (8.12)$$

gegeben. Nach Rücktransport des Cauchy-Spannungstensors auf die Referenzkonfiguration ergibt sich der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\bar{\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} . \quad (8.13)$$

Diese Transportvorschrift kann ebenfalls für die Zwischenkonfigurationen bzw. für Teile des Spannungstensors angewendet werden. Konkret wird die Spannung auf der isochor-volumetrischen Zwischenkonfiguration \mathbf{T}_{IV} benötigt. Außerdem muss für die Berücksichtigung elastischer und inelastischer Anteile der Deviator der Cauchy-Spannung auf diese Zwischenkonfigurationen transportiert werden.

$$\mathbf{T}_{IV} = \hat{J}\hat{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-T} \quad (8.14)$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{J}\hat{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{T}^D \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-T} \quad (8.15)$$

Unter Berücksichtigung des Ansatzes für den volumetrischen Anteil des Cauchy-Spannungstensors $\mathbf{T}^V = -p\mathbf{I}$, der vorher dargestellten Zusammenhänge zwischen den Spannungstensen auf den verschiedenen Konfigurationen sowie des isochor-volumetrischen Splits des Deformationsgradienten \mathbf{F} kann die zweite Piola-Kirchhoff-Spannung zu

$$\bar{\mathbf{T}} = -p J^{\frac{1}{3}} \hat{\mathbf{C}}^{-1} + J^{\frac{1}{3}} \hat{\mathbf{T}} \quad (8.16)$$

umgeschrieben werden. Auf dieser Basis wird durch einige Rechenschritte die Spannungsleistung $\bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}}$ mit Bezug auf die Referenzkonfiguration berechnet

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}} &= -\frac{p\dot{J}}{3} \hat{\mathbf{C}}^{-1} : (\mathbf{I} + 2\hat{\mathbf{T}}_{IV}) - p J \hat{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\hat{\mathbf{T}}}_{IV} \\ &+ J \hat{\mathbf{T}} : \dot{\hat{\mathbf{T}}}_{IV} + \frac{\dot{J}}{3} \hat{\mathbf{T}} : (\mathbf{I} + 2\hat{\mathbf{T}}_{IV}) . \end{aligned} \quad (8.17)$$

Zur Vereinfachung der Spannungsleistung sind folgende Zusammenhänge erforderlich

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}^{-1} : (\mathbf{I} + 2\hat{\mathbf{T}}_{IV}) &= \hat{\mathbf{C}}^{-1} : \hat{\mathbf{C}} = \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{C}}) &= 3 \\ \hat{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\hat{\mathbf{T}}}_{IV} &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\hat{\mathbf{C}}} &= 0 \\ \hat{\mathbf{T}} : (\mathbf{I} + 2\hat{\mathbf{T}}_{IV}) &= \hat{J}\hat{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{T}^D \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-T} : \hat{\mathbf{C}} = \text{tr}(\mathbf{T}^D) &= 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

Somit kann die Spannungsleistung zu

$$\bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}} = -p \dot{J} + J \hat{\mathbf{T}} : \dot{\hat{\mathbf{T}}}_{IV} \quad (8.19)$$

vereinfacht werden. Diese Darstellung beruht auf einer Arbeit von LION [96].

8.3.3. Materialmodell

Die Grundlage für die Herleitung der Konstitutivgleichung bildet die Clausius-Planck-Ungleichung für die isotherme Modellierung in Bezug zur Referenzkonfiguration

$$-\rho_0 \dot{\psi} + \bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0. \quad (8.20)$$

Die Ungleichung beinhaltet neben der bereits eingeführten Spannungsleistung die Zeitableitung der spezifischen freien Helmholtz'schen Energiefunktion $\dot{\psi}$ und die Dichte ρ_0 . Als Prozessvariablen für die freie Energiefunktion werden die Determinante des Deformationsgradienten $J = \det \mathbf{F}$ sowie der elastische, isochore rechte Cauchy-Green-Tensor gewählt $\hat{\mathbf{C}}_e$. Der isochore rechte Cauchy-Green-Tensor $\hat{\mathbf{C}}$ ist kein Teil der Prozessvariablen, da der deviatorische Spannungsanteil keine Gleichgewichtsspannung besitzt.

$$\psi = \psi_{\text{eq}}^{\text{vol}}(J) + \psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}(\hat{\mathbf{C}}_e) \quad (8.21)$$

Für die Auswertung der Clausius-Planck-Ungleichung (Gl. 8.20) ist die Zeitableitung der Energiefunktion erforderlich

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi_{\text{eq}}^{\text{vol}}(J)}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}(\hat{\mathbf{C}}_e)}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} : \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e. \quad (8.22)$$

Neben Gl. (8.19) sind die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_{\text{IV}} &= \frac{1}{2} \dot{\hat{\mathbf{C}}}, \\ \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e &= \hat{\mathbf{F}}_i^{-\text{T}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}} \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^{-1} - \hat{\mathbf{L}}_i^{\text{T}} \cdot \hat{\mathbf{C}}_e - \hat{\mathbf{C}}_e \cdot \hat{\mathbf{L}}_i \quad \text{und} \\ \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} : \dot{\hat{\mathbf{C}}}_e &= \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} : \left(\hat{\mathbf{F}}_i^{-\text{T}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}} \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^{-1} \right) - \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} : \left(\hat{\mathbf{C}}_e \cdot \hat{\mathbf{L}}_i + \hat{\mathbf{L}}_i^{\text{T}} \cdot \hat{\mathbf{C}}_e \right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

erforderlich, um unter Ausnutzung der isochoren Gestalt von $\dot{\hat{\mathbf{C}}}$ die Clausius-Planck-Ungleichung wie folgt umzuschreiben:

$$\begin{aligned} - \left(p + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}^{\text{vol}}}{\partial J} \right) \dot{J} + \left(\frac{1}{2} J \hat{\mathbf{T}} - \rho_0 \hat{\mathbf{F}}_i^{-1} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^{-\text{T}} \right) : \dot{\hat{\mathbf{C}}} \\ + \rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} : \left(\hat{\mathbf{C}}_e \cdot \hat{\mathbf{L}}_i + \hat{\mathbf{L}}_i \cdot \hat{\mathbf{C}}_e \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Schließlichen ergeben sich die konstitutiven Zusammenhänge

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{eq}}^{\text{vol}}}{\partial J}$$

$$J \hat{\mathbf{T}} = 2 \rho_0 \hat{\mathbf{F}}_i^{-1} \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \cdot \hat{\mathbf{F}}_i^{-\text{T}} \quad (8.25)$$

Nun muss die Dissipationsrestungleichung ausgewertet werden. Durch Ausnutzung des Zusammenhangs für die isotrope Tensorfunktion $\psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}$ und den symmetrischen Tensors $\hat{\mathbf{C}}_e$

$$\hat{\mathbf{C}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} = \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} \cdot \hat{\mathbf{C}}_e \quad (8.26)$$

kann die Restungleichung wie folgt ausgewertet werden

$$\rho_0 \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} : \left(\hat{\mathbf{C}}_e \cdot \hat{\mathbf{L}}_i + \hat{\mathbf{L}}_i \cdot \hat{\mathbf{C}}_e \right) = 2 \rho_0 \hat{\mathbf{C}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} : \hat{\mathbf{D}}_i \geq 0, \quad (8.27)$$

wobei

$$\hat{\mathbf{D}}_i = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{L}}_i + \hat{\mathbf{L}}_i^{\text{T}} \right) \quad (8.28)$$

gilt.

Auf Basis der Restungleichung muss nun die Evolutionsgleichungen für den Tensor $\hat{\mathbf{D}}_i$ abgeleitet werden. Dazu wird auf die bereits in Abschnitt 5.5 eingeführten Materialparameter η für die Viskosität des Dämpfers und σ_F für die Maximalspannung des endochronen Modellanteils zurückgegriffen.

$$\hat{\mathbf{D}}_i = \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\|\hat{\mathbf{D}}\|}{\sigma_F} \right) 2 \rho_0 \hat{\mathbf{C}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} + \beta \mathbf{I} \quad (8.29)$$

In der Evolutionsgleichung muss β bestimmt werden, sodass die Bedingung $\text{tr } \hat{\mathbf{D}}_i = 0$ aus Gl. (8.11) erfüllt wird. Mit

$$\beta = -\frac{2}{3} \rho_0 \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\|\hat{\mathbf{D}}\|}{\sigma_F} \right) \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} : \hat{\mathbf{C}}_e \quad (8.30)$$

entsteht

$$\hat{\mathbf{D}}_i = 2 \rho_0 \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\|\hat{\mathbf{D}}\|}{\sigma_F} \right) \left(\hat{\mathbf{C}}_e \cdot \frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \psi_{\text{neq}}}{\partial \hat{\mathbf{C}}_e} : \hat{\mathbf{C}}_e \right) \mathbf{I} \right). \quad (8.31)$$

und komplettiert somit die Konstitutiv- und Evolutionsgleichungen um viskoplastisches Materialverhalten zu beschreiben. Als abschließenden Schritt werden im folgenden Ab-

schnitt die freien Energiefunktionen zur Herleitung des Werkstoffgesetzes dargestellt.

8.3.4. Modellgleichungen für die finite Viskoplastizität

Unter der Annahme, dass sich das Material unter hydrostatischem Druck linear-elastisch verhält, wird ein volumetrischer Term nach SIMO und TAYLOR verwendet [146]. Für die rein deviatorischen Spannungsanteile, die die inelastischen Effekte abbilden, wird das Neo-Hooke-Modell, als Sonderfall des Mooney-Rivlin-Modells, verwendet [117].

$$\begin{aligned}\rho_0 \psi_{\text{eq}}^{\text{vol}}(J) &= \frac{1}{2} K [(J - 1)^2 + (\ln J)^2] \\ \rho_0 \psi_{\text{neq}}^{\text{iso}}(\hat{\mathbf{C}}_e) &= c_{10}^e (\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{C}}_e} - 3)\end{aligned}\quad (8.32)$$

Mithilfe der Ansätze für die freien Energiefunktionen lassen sich die konstitutiven Zusammenhänge aus Gl. (8.25) auswerten.

$$\begin{aligned}p &= -K \left[(J - 1) + \frac{\ln J}{J} \right] \\ \hat{\mathbf{T}} &= 2 J^{-1} c_{10}^e \hat{\mathbf{C}}_i^{-1} - \frac{2}{3} J^{-1} \left(c_{10}^e \text{tr} \hat{\mathbf{C}}_e \right) \hat{\mathbf{C}}^{-1}\end{aligned}\quad (8.33)$$

Nun muss der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor mithilfe der Transportvorschriften und der Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}} &= J \mathbf{F}^{-1} \cdot (-p \mathbf{I} + \mathbf{T}^{\text{D}}) \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}} = -p J \mathbf{C}^{-1} + J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{\text{D}} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}} \\ \mathbf{T}^{\text{D}} &= \hat{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{F}}^{\text{T}} \\ \bar{\mathbf{F}}^{-\text{T}} &= \bar{\mathbf{F}}^{-1} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{I} \\ \hat{\mathbf{C}}^{-1} &= J^{\frac{2}{3}} \mathbf{C}^{-1} \\ \text{tr} \hat{\mathbf{C}}_e &= \text{tr} \left(\hat{\mathbf{C}}_i^{-1} \cdot \hat{\mathbf{C}} \right)\end{aligned}\quad (8.34)$$

berechnet werden. Es ergibt sich nach einigen Rechenschritten

$$\bar{\mathbf{T}} = -p J \mathbf{C}^{-1} + 2 c_{10}^e J^{-\frac{2}{3}} \left(\hat{\mathbf{C}}_i^{-1} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\hat{\mathbf{C}}_i^{-1} \cdot \hat{\mathbf{C}} \right) \hat{\mathbf{C}}^{-1} \right). \quad (8.35)$$

Auf der elastisch-inelastischen Zwischenkonfiguration hat die Evolutionsgleichung die Form

$$\hat{\mathbf{D}}_i = \hat{\mathbf{\Gamma}}_i^{\Delta} = 2 c_{10}^e \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\|\hat{\mathbf{D}}\|}{\sigma_F} \right) \left(\hat{\mathbf{C}}_e - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{C}}_i^{-1} \right) \mathbf{I} \right). \quad (8.36)$$

Mit dem bekannten Zusammenhang für die Relaxationszeit aus Gl. (5.28) und der Transportvorschrift

$$\dot{\hat{\mathbf{C}}}_i = 2 \hat{\mathbf{F}}_i^T \cdot \hat{\mathbf{D}}_i \cdot \hat{\mathbf{F}}_i \quad (8.37)$$

kann die Evolutionsgleichung auf der Referenzkonfiguration durch die materielle Zeitableitung des rechten Cauchy-Green-Tensors dargestellt werden

$$\dot{\hat{\mathbf{C}}}_i = \left(\frac{4}{t_r} + \frac{4c_{10}^e \|\dot{\hat{\mathbf{C}}}\|}{\sigma_F} \right) \left(\hat{\mathbf{C}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{C}}_i^{-1} \right) \hat{\mathbf{C}}_i \right). \quad (8.38)$$

Somit steht mit Gl. (8.38) die Evolutionsgleichung zur Verfügung, die aufgrund ihrer rein deviatorischen Gestalt mit dem von SHUTOV vorgestellten Einschnittverfahren gelöst werden kann [145]. Als Alternative dazu kann die Evolutionsgleichung mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst werden. Sofern die Lösung für den inelastischen, isochoren, rechten Cauchy-Green-Tensor zur Verfügung steht, kann die Spannungsantwort des Modells mithilfe von Gl. (8.35) ausgewertet werden.

Beim Vergleich der Evolutionsgleichungen des geometrisch linearen Modells mit dem Modell für finite Deformationen wird klar, dass die numerische Umsetzung des finiten Modells einen deutlichen Mehraufwand bedeutet. Als Vorteil des finiten Modells kann angeführt werden, dass durch das Berücksichtigen der quadratischen Anteile des Verschiebungsfeldes, verglichen mit dem geometrischen, linearen Modell, immer das akkuratere Ergebnis erzielt wird. Dadurch wird das kritische Einordnen der Ergebnisse im Hinblick auf das aktuelle Verzerrungsniveau obsolet. Zur Anpassung des finiten Modells muss das experimentelle Programm deutlich ausgeweitet werden, da lokale Dehnungsmessungen für jedes Geschwindigkeits-, Verzerrungs- und Temperaturniveaus durchzuführen sind, um die Querkontraktionen des Materials unter allen relevanten Randbedingungen vollständig beschreiben zu können. Inwieweit sowohl der numerische als auch der experimentelle Aufwand gerechtfertigt ist, muss anhand des Verzerrungsniveaus des Bauteils sowie der gewünschten Ergebnisqualität situativ entschieden werden.

Abbildungsverzeichnis

1.1. Uniaxiale Zugversuche mit Probekörpern aus Polyamid 12 bei $T = 0^{\circ}\text{C}$ und $T = 90^{\circ}\text{C}$ bei derselben Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{u} = 10 \text{ mm/min}$	2
2.1. Prozess des selektiven Lasersinterns anhand einer EOS P396	8
2.2. Parameter beim selektiven Lasersintern	9
2.3. Thermisches Profil für einen SLS-Werkstoff anhand einer DSC-Messung	12
2.4. Chemischer Aufbau von PA12	13
2.5. DSC-Messung von lasergesintertem PA12	14
2.6. Dynamisch-mechanische thermische Analyse von lasergesintertem PA12	15
2.7. Komponenten des SLS-Systems	18
2.8. Konstruktiver Entwurf der Laborumgebung	19
2.9. 3-Punkt-Biegeberechnung der Kabinenprofile	20
2.10. Befestigung der Pulverfördereinheit am Kabinendach	21
2.11. Berechnungsergebnis für das Kabinenfachwerk	21
2.12. Ansicht der Laborumgebung nach Fertigstellung	22
3.1. Beschreibung verschiedener Konfigurationen innerhalb der kontinuumsmechanischen Theorie	24
4.1. Maxwell-Element	34
4.2. Rheologische Modelle der Viskoelastizität	36
4.3. Prandtl-Element	37
4.4. Endochrones Element	37
4.5. Modellantwort des endochronen Plastizitätselements	39
5.1. Frontansicht der beiden Entwürfe für die Rohrprobe	44
5.2. Iso-Ansicht und Maße der für das SLS-Verfahren entwickelten Rohrprobe	44
5.3. Linear-elastische FEM-Berechnung des Dehnungszustands der Rohrprobe bei Torsionsbelastung	45
5.4. Frontansicht und Maße der Scherprobe	46
5.5. Linear-elastische FEM-Berechnung des Dehnungszustands der Scherprobe bei einfacher Scherbelastung	46
5.6. Front- und Seitenansicht und Maße der Zugprobe	47
5.7. Linear-elastische FEM-Berechnung des Dehnungszustands der Zugprobe	48
5.8. Darstellung des Pulvervolumens nach abgeschlossener Fertigung	49

5.9. Drei mögliche Orientierungen der Rohrprobe im Pulvervolumen	50
5.10. Torsionsversuche mit verschiedenen Orientierungen der Prüfkörper im Pulvervolumen	50
5.11. Messaufbau 3D-Dehnungsmessung	51
5.12. Messprinzip der 3D-Dehnungsmessung mit zwei Kameras	52
5.13. Lokale 3D-Dehnungsmessung des Scherzustands der Rohrprobe	54
5.14. Zusammenhang zwischen Maschinenwinkel φ und Scherdehnung γ	55
5.15. Dehnungszustand im uniaxialen Zugversuch bei der Rohrprobe	56
5.16. Zusammenhang zwischen Maschinenweg u und Dehnung ε_{11}	56
5.17. Lokale Dehnungsmessung mittels DIC im einfachen Scherzustand der Scherprobe	58
5.18. Zusammenhang zwischen Maschinenweg u und Scherdehnung γ	59
5.19. Lokale Dehnungsmessung im uniaxialen Zugversuch der Zugprobe	60
5.20. Zusammenhang zwischen Maschinenweg u , Längsdehnung ε_{11} und Querdehnung ε_{22}	61
5.21. Querkontraktionszahl der Zugprobe	62
5.22. Schichtaufbau der Rohrprobe in x-Orientierung (vgl. Abb. 5.9)	63
5.23. Vergleich des Messbereichs der lokalen Dehnungsmessung mit der zur Spannungsberechnung relevanten Querschnittsfläche	64
5.24. Relaxationsversuch der Rohrprobe für Torsionsbelastung bei 20°C	66
5.25. Relaxationsversuche der Rohrprobe für Torsionsbelastung im Temperaturbereich von 0°C bis 90°C	66
5.26. Manuelle Zeit-Temperatur-Verschiebung der Relaxationsfunktionen für die Referenztemperatur $T_0 = 0^\circ\text{C}$	68
5.27. Zeit-Temperatur-Verschiebung der Relaxationsfunktionen durch die WLF-Gleichung für die Referenztemperatur $T_0 = 40^\circ\text{C}$	68
5.28. Relaxationsversuche der Zugprobe im Temperaturbereich von 0°C bis 90°C	69
5.29. Monotoner Ratenversuch der Rohrprobe bei $T = 20^\circ\text{C}$ und $\dot{\varphi} = 10^\circ/\text{min}$	70
5.30. Monotone Ratenversuche der Rohrprobe bei $\dot{\varphi} = 10^\circ/\text{min}$	71
5.31. Monotone Ratenversuche der Zugprobe bei $\dot{u} = 1 \text{ mm}/\text{min}$	71
5.32. Monotone Ratenversuche der Rohrprobe bei $T = 50^\circ\text{C}$	72
5.33. Monotone Ratenversuche der Zugprobe bei $T = 50^\circ\text{C}$	73
5.34. Stufenversuch der Zugprobe bei einer Traversengeschwindigkeit von $\dot{u} = 1 \text{ mm}/\text{min}$	74
5.35. Zyklischer Versuch der Zugprobe bei einem Traversenweg von $u = 0.3 \pm 0.1 \text{ mm}$ bei $T = 50^\circ\text{C}$	75
5.36. Zyklischer Versuch der Zugprobe bei einem Traversenweg von $u = 1.0 \pm 0.5 \text{ mm}$ bei $T = 50^\circ\text{C}$	75
5.37. Zyklische Versuche bei $\varphi = 6^\circ$	76
5.38. Zyklische Versuche bei $\varphi = 15^\circ$ und $\dot{\varphi} = 1^\circ/\text{min}$	77
6.1. Identifikation des Relaxationsversuchs im Torsionsversuch bei 50°C	84
6.2. Identifikation des Relaxationsversuchs und der Ratenversuche im Torsionsversuch bei 50°C und $\varphi = 15^\circ$	85

6.3.	Identifikation der Ratenversuche im Torsionsversuch bei 50°C und $\varphi = 6^\circ$ (links) sowie $\varphi = 15^\circ$ (rechts)	86
6.4.	Identifikation des zyklischen Torsionsversuchs bei 50°C und $\varphi = 6^\circ$	88
6.5.	Identifikation des zyklischen Torsionsversuchs bei 50°C und $\varphi = 15^\circ$	89
6.6.	Querdehnung bei $t = 10.000$ s im Relaxationsversuch bei 50°C	94
6.7.	Identifikation des Relaxationsversuchs für den Zugversuch bei 50°C	95
6.8.	Identifikation der Ratenversuche für den Zugversuch bei 50°C	95
6.9.	Identifikation der Querkontraktionszahl für den Relaxations- und Ratenversuch unter Zugbelastung bei 50°C	96
6.10.	Identifikation des Stufenversuchs für den Zugversuch bei 50°C	97
6.11.	Identifikation des zyklischen Zugversuchs bei 50°C mit $u = 0.3 \pm 0.1$ mm	97
6.12.	Identifikation des zyklischen Zugversuchs bei 50°C mit $u = 1.0 \pm 0.5$ mm	98
6.13.	Darstellung des zyklischen Zugversuchs über der Dehnung ε_{11} bei 50°C mit $u = 1.0 \pm 0.5$ mm	99
7.1.	Zweidimensional-achsensymmetrisches Modell der Rohrprobe	103
7.2.	Vernetzung der Zugprobe mit Dreiecks- und Viereckselementen	104
7.3.	Vernetzung der Rohrprobe mit Dreiecks- und Viereckselementen	104
7.4.	Vernetzung der Scherprobe mit Dreiecks- und Viereckselementen	105
7.5.	FEM-Ergebnis der Spannung im Relaxationsversuch unter Torsionsbelastung bei 50°C und $t = 10000$ s	106
7.6.	FEM-Ergebnis der Spannung im Ratenversuch unter Torsionsbelastung bei 50°C und $\dot{\varphi} = 10^\circ/\text{min}$	107
7.7.	Vergleich der FEM-Ergebnisse mit den Ergebnissen der Parameteridentifikation	107
7.8.	FEM-Ergebnis der Spannung im Relaxationsversuch unter Zugbelastung bei 50°C und $t = 10000$ s	108
7.9.	FEM-Ergebnis der Spannung im Relaxationsversuch unter Zugbelastung 50°C und $\dot{u} = 1$ mm/min	109
7.10.	Vergleich der Spannungskomponenten zwischen FEM und Parameteridentifikation für den monotonen Ratenversuch	110
7.11.	Vergleich der Querkontraktionszahlen zwischen FEM und Parameteridentifikation für den monotonen Ratenversuch	110
7.12.	Vergleich der Spannungskomponenten zwischen FEM und Parameteridentifikation für den monotonen Ratenversuch	111
7.13.	Vergleich der Querkontraktionszahlen zwischen FEM und Parameteridentifikation für den monotonen Ratenversuch	111
7.14.	FEM-Ergebnis der Scherspannung im Ratenversuch mit $\dot{u} = 10$ mm/min bei 50°C	112
7.15.	Modellergebnisse der Scherspannung im Ratenversuch mit $\dot{u} = 10$ mm/min bei 50°C	113
7.16.	FEM-Ergebnis der Scherspannung im Relaxationsversuch bei 50°C	114
7.17.	Modellergebnisse der Scherspannung im Relaxationsversuch bei 50°C und $t = 10000$ s	114

7.18. FEM-Ergebnis der Zugspannung im Ratenversuch mit $\dot{u} = 1 \text{ mm/min}$ bei 50°C	115
7.19. Biegeeffekt im Zugversuch	115
7.20. Modellergebnisse der Scherspannung im Ratenversuch mit $\dot{u} = 1 \text{ mm/min}$ bei 50°C	116
7.21. FEM-Ergebnis der Zugspannung im Relaxationsversuch bei 50°C und $t = 10000 \text{ s}$	117
7.22. Modellergebnisse der Scherspannung im Relaxationsversuch bei 50°C und $t = 10000 \text{ s}$	117
8.1. Fertigungslagen mit Schichtaufbau und Dehnungen	119
8.2. Vergleich von Ingenieurspannung und wahrer Spannung bei der Zugprobe mit $\dot{u} = 1 \text{ mm/min}$ bei $T = 20^\circ\text{C}$	121
8.3. Split des Deformationsgradienten mit Zwischenkonfigurationen (in Anlehnung an JOHLITZ [76])	123
A.1. Relaxationsversuche der Scherprobe	150
A.2. Monotone Ratenversuche der Scherprobe bei $\dot{x} = 10 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$	151
A.3. Relaxationsversuche der Rohrprobe auf Zug bei 20°C und 50°C	152
A.4. Monotone Zugversuche der Rohrprobe bei $\dot{x} = 1 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$	152
A.5. Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 2^\circ$ und 20°C	153
A.6. Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 2^\circ$ und 50°C	154
A.7. Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 6^\circ$ und 20°C	155
A.8. Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 6^\circ$ und 50°C	156
A.9. Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 15^\circ$ und 20°C	157
A.10. Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 15^\circ$ und 50°C	158

Tabellenverzeichnis

2.1. Additive Fertigungsverfahren (in Anlehnung an VDI3405 und [133])	6
2.2. Parametersatz für das Herstellen der Proben	10
2.3. Thermische Materialparameter für PA12-Pulver und SLS-Bauteile	17
6.1. Parametersatz für das deviatorische Modell bei großer Dehnung ($\varphi = 15^\circ$)	87
6.2. Parametersatz für das deviatorische Modell bei kleiner Dehnung ($\varphi = 6^\circ$) .	87

Literaturverzeichnis

- [1] Stephan Adden und Peter Horst. „Damage Propagation in Non-Crimp Fabrics under Bi-Axial Static and Fatigue Loading“. In: *Compos. Sci. Technol.* 66.5 (2006), S. 626–633. ISSN: 0266-3538. DOI: 10.1016/j.compscitech.2005.07.034.
- [2] Stephan Adden und Peter Horst. „Stiffness Degradation under Fatigue in Multi-axially Loaded Non-Crimped-Fabrics“. In: *Int. J. Fatigue* 32.1 (2010), S. 108–122. ISSN: 0142-1123. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2009.02.002.
- [3] U. Ajoku u. a. „Investigating Mechanical Anisotropy and End-Of-Vector Effect in Laser-Sintered Nylon Parts“. In: *Proc. Inst. Mech. Eng., Part B* 220.7 (2006), S. 1077–1086. DOI: 10.1243/09544054JEM537.
- [4] Gabriele Alscher. „Das Verhalten teilkristalliner Thermoplaste beim Lasersintern“. Diss. RWTH Aachen, 2000.
- [5] Holm Altenbach. „Kontinuumsmechanik“. 2. Aufl. Berlin [u. a.]: Springer Vieweg, 2012. ISBN: 9783642241192.
- [6] Holm Altenbach. „Holzmann/Meyer/Schumpich Technische Mechanik Festigkeitslehre“. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2020. ISBN: 978-3-658-32022-5. DOI: 10.1007/978-3-658-32023-2.
- [7] Holm Altenbach, Johannes Altenbach und Konstantin Naumenko. „Ebene Flächen-tragwerke“. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2023. ISBN: 978-3-662-68390-3. DOI: 10.1007/978-3-662-68391-0.
- [8] Ellen M. Arruda und Mary C. Boyce. „A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 41.2 (1993), S. 389–412. ISSN: 0022-5096. DOI: 10.1016/0022-5096(93)90013-6.
- [9] Siddharth Ram Athreya, Kyriaki Kalaitzidou und Suman Das. „Processing and Characterization of a Carbon Black-Filled Electrically Conductive Nylon-12 Nanocomposite Produced by Selective Laser Sintering“. In: *Mater. Sci. Eng. A* 527.10 (2010), S. 2637–2642. ISSN: 0921-5093. DOI: 10.1016/j.msea.2009.12.028.
- [10] A. Benhamena u. a. „Three Finite Element Analysis of Semi-Elliptical Crack in High Density Poly-Ethylene Pipe Subjected to Internal Pressure“. In: *Mater. Des.* 31.6 (2010), S. 3038–3043. DOI: 10.1016/j.matdes.2010.01.029.

-
- [11] A. Benhamena u. a. „J Integral Solution for Semi-Elliptical Surface Crack in High Density Poly-Ethylene Pipe under Bending“. In: *Mater. Des.* 32.5 (2011), S. 2561–2569. DOI: 10.1016/j.matdes.2011.01.045.
- [12] Josef Betten. „Kontinuumsmechanik“. 2., erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2001. ISBN: 9783642626456.
- [13] Michael Binnewies u. a. „Allgemeine und Anorganische Chemie“. 3. Aufl. 2016. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN: 9783662450673.
- [14] Monika Blattmeier. „Strukturanalyse von lasergesinterten Schichtverbunden mit werkstoffmechanischen Methoden“. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012. ISBN: 978-3-8348-2500-1. DOI: 10.1007/978-3-8348-2501-8.
- [15] Sol R. Bodner und Yehuda Partom. „Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-Hardening Materials“. In: *J. Appl. Mech.* 42.2 (1975), S. 385–389. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.3423586.
- [16] Jörg Bornemann und Michael Schlimmer. „Berechnung und Auslegung von Klebverbindungen“. In: *Adhäsion Kleben & Dichten* (2004). DOI: 10.1007/BF03251309.
- [17] Ludwig Bottenbruch und Rudolf Binsack. „Kunststoff Handbuch 3/4 Technische Thermoplaste Polyamide“. 4. Aufl. Kunststoff-Handbuch / Hrsg. Gerhard W. Becker 3, Technische Thermoplaste / hrsg. von Ludwig Bottenbruch. München: Hanser, 1998. ISBN: 3446164863.
- [18] M.C. Boyce, S. Socrate und P.G. Llana. „Constitutive Model for the Finite Deformation Stress–Strain Behavior of Polyethylene Terephthalate above the Glass Transition“. In: *Polymer* 41.6 (2000), S. 2183–2201. ISSN: 0032-3861. DOI: 10.1016/S0032-3861(99)00406-1.
- [19] Jannis Breuninger u. a., Hrsg. „Generative Fertigung mit Kunststoffen: Konzeption und Konstruktion für Selektives Lasersintern“. Berlin und Heidelberg: Springer Vieweg, 2013. ISBN: 9783642243240.
- [20] Gabriel Bugada, Miguel Cervera und Guillermo Lombera. „Numerical Prediction of Temperature and Density Distributions in Selective Laser Sintering Processes“. In: *Rapid Prototyp. J.* 5 (März 1999), S. 12–26. DOI: 10.1108/13552549910251846.
- [21] Richard H. Byrd, Jean C. Gilbert und Jorge Nocedal. „A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming“. In: *Math. Program.* 89.1 (2000), S. 149–185. ISSN: 1436-4646. DOI: 10.1007/PL00011391.
- [22] R. Ian Campbell u. a. „The Potential for the Bespoke Industrial Designer“. In: *Des. J.* 6.3 (2003), S. 24–34. DOI: 10.2752/146069203789355273.
- [23] Bodo Carlowitz, Hrsg. „Kunststoff-Handbuch“. Neuauflg. München: Hanser, 1990. ISBN: 3446144161.
-

-
- [24] Jean-Louis Chaboche. „Thermodynamic Formulation of Constitutive Equations and Application to the Viscoplasticity and Viscoelasticity of Metals and Polymers“. In: *Int. J. Solids. Struct.* 34.18 (1997), S. 2239–2254. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00162-X.
- [25] Bernard D. Coleman und Morton E. Gurtin. „Thermodynamics with Internal State Variables“. In: *J. Chem. Phys.* 47.2 (1967), S. 597–613. ISSN: 0021-9606. DOI: 10.1063/1.1711937.
- [26] Bernard D. Coleman und Walter Noll. „Foundations of linear viscoelasticity“. In: *Reviews of Modern Physics* 33 (1961), S. 239–249.
- [27] David J. Craik und B. F. Miller. „The Flow Properties of Powders under Humid Conditions“. In: *J. Pharm. Pharmacol.* 10.S1 (1958), S. 136–144. DOI: 10.1111/j.2042-7158.1958.tb10392.x.
- [28] Christian Cunat. „The DNLR Approach and Relaxation Phenomena. Part I – Historical Account and DNLR Formalism“. In: *Mech. Time-Depend. Mat.* 5.1 (2001), S. 39–65. ISSN: 1573-2738. DOI: 10.1023/A:1009899519935.
- [29] Rainer Dahlmann. „Menges Werkstoffkunde Kunststoffe“. Hrsg. von Edmund Haberstroh und Georg Menges. 7. München: Hanser, 2022. ISBN: 9783446460867.
- [30] Jörg Dassow. „Messung und Beschreibung der Querkontraktionszahl von teilkristallinen Thermoplasten als nichtlinear viskoelastischer Materialkennwert“. Diss. Aachen, 1996, S. 90. ISBN: 3-86073-484-9.
- [31] Hellen De Coninck u. a. „On the Difference in Mechanical Behavior of Glass Bead-Filled Polyamide 12 Specimens Produced by Laser Sintering and Injection Molding“. In: *3D Print. Addit. Manuf.* 11.2 (2024), S. 419–433. DOI: 10.1089/3dp.2022.0160.
- [32] Carl Deckard. „Selective Laser Sintering“. Diss. University of Texas in Austin, 2001.
- [33] Stefan Diebels. „Mikropolare Zweiphasenmodelle: Modellierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien“. Habilitationsschrift, Institut für Mechanik (Bauwesen), Nr. II-4, Universität Stuttgart, 2000.
- [34] „Kunststoffe – Bestimmung der Zugeigenschaften – Teil 2: Prüfbedingungen für Form- und Extrusionsmassen (ISO 527-2:2012)“. Norm. Juni 2012.
- [35] John Ryan C. Dizon u. a. „Mechanical Characterization of 3D-Printed Polymers“. In: *Addit. Manuf.* 20 (2018), S. 44–67. ISSN: 2214-8604. DOI: 10.1016/j.addma.2017.12.002.

-
- [36] L. Dong u. a. „Three-Dimensional Transient Finite Element Analysis of the Selective Laser Sintering Process“. In: *J. Mater. Process. Technol.* 209.2 (2009), S. 700–706. ISSN: 0924-0136. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2008.02.040.
- [37] Dietmar Drummer, Dominik Rietzel und Florian Kühnlein. „Development of a Characterization Approach for the Sintering Behavior of New Thermoplastics for Selective Laser Sintering“. In: *Phys. Procedia* 5 (2010), S. 533–542. ISSN: 1875-3892. DOI: 10.1016/j.phpro.2010.08.081.
- [38] Wolfgang Ehlers. „Grundlegende Konzepte in der Theorie poröser Medien“. In: *Techn. Mech.* 16 (1996), S. 63–76.
- [39] Gottfried W. Ehrenstein und Sonja Pongratz. „Beständigkeit von Kunststoffen“. Edition Kunststoffe. München: Hanser Verlag, 2007. ISBN: 978-3-446-41149-4. DOI: 10.3139/9783446411494.
- [40] Peter Elsner. „Domininghaus - Kunststoffe: Eigenschaften und Anwendungen“. 8th ed. VDI-Buch. Dordrecht: Springer, 2011. ISBN: 978-3-642-16173-5.
- [41] D. Feldman. „Polymer Weathering: Photo-oxidation“. In: *J. Environ. Polym. Degrad.* 10.4 (2002), S. 163–173. DOI: 10.1023/A:1021148205366.
- [42] John D. Ferry. „Viscoelastic Properties of Polymers“. Third edition. New York u. a.: John Wiley & Sons, 1980. ISBN: 0471048941.
- [43] Paul J. Flory. „Thermodynamic Relations for High Elastic Materials“. In: *T. Faraday Soc.* 57 (1961), S. 829–838.
- [44] Peter Fröhlich. „FEM-Anwendungspraxis: Einstieg in die Finite Elemente Analyse“. Springer eBook Collection Computer Science and Engineering. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2005. ISBN: 978-3-663-10053-9. DOI: 10.1007/978-3-663-10053-9.
- [45] Matthias Gerdtts und Frank Lempio. „Mathematische Optimierungsverfahren des Operations Research“. Berlin, New York: De Gruyter, 2011. ISBN: 9783110249989.
- [46] Ian Gibson und Dongping Shi. „Material Properties and Fabrication Parameters in Selective Laser Sintering Process“. In: *Rapid Prototyp. J.* 3.4 (1997), S. 129–136. ISSN: 1355-2546. DOI: 10.1108/13552549710191836.
- [47] Philip E. Gill, Walter Murray und Margaret H. Wright. „Practical Optimization“. London: Academic Press, 1981. ISBN: 0-12-283950-1.
- [48] David E. Goldberg. „Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning“. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1989. ISBN: 978-0201157673.

-
- [49] R. D. Goodridge, K. W. Dalgarno und D. J. Wood. „Indirect Selective Laser Sintering of an Apatite-Mullite Glass-Ceramic for Potential Use in Bone Replacement Applications“. In: *Proc. Inst. Mech. Eng., Part H* 220.1 (2006), S. 57–68. ISSN: 0954-4119. DOI: 10.1243/095441105X69051.
- [50] R.D. Goodridge, C.J. Tuck und R.J.M. Hague. „Laser Sintering of Polyamides and Other Polymers“. In: *Prog. Mater. Sci.* 57.2 (2012), S. 229–267. ISSN: 0079-6425. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2011.04.001.
- [51] Wolfgang Grellmann und Sabine Seidler, Hrsg. „Kunststoffprüfung“. 3., [aktualisierte] Aufl. München: Hanser, 2015. ISBN: 978-3-446-44390-7.
- [52] Ralf Greve. „Kontinuumsmechanik“. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. ISBN: 9783642624636.
- [53] O. Gueguen u. a. „Micromechanically Based Formulation of the Cooperative Model for the Yield Behavior of Semi-Crystalline Polymers“. In: *Acta Mater.* 56.7 (2008), S. 1650–1655. ISSN: 1359-6454. DOI: 10.1016/j.actamat.2007.12.015.
- [54] M.A. Guidara u. a. „Structural Integrity Assessment of Defected High Density Polyethylene Pipe: Burst Test and Finite Element Analysis Based on J-integral Criterion“. In: *Eng. Fail. Anal.* 57 (2015), S. 282–295. ISSN: 1350-6307. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2015.07.042.
- [55] Silas E Gustafsson. „Transient Plane Source Techniques for Thermal Conductivity and Thermal Diffusivity Measurements of Solid Materials“. In: *Rev. Sci. Instrum.* 62.3 (1991), S. 797–804.
- [56] Silas E. Gustafsson. „A device for measuring thermal properties of a sample of a material“. PCT/SE98/00137. 16.03.1989.
- [57] R. Hague, I. Campbell und P. Dickens. „Implications on Design of Rapid Manufacturing“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 217.1 (2003), S. 25–30. DOI: 10.1243/095440603762554587.
- [58] Dominik Hahne, Alexander Lion und Michael Johlitz. „Design of a Room-in-Room Laboratory Environment for the SLS Printing Process“. In: *Lectures Notes on Advanced Structured Materials*. Hrsg. von Holm Altenbach u. a. Bd. 153. Springer International Publishing, 2022. Kap. 12, S. 183–192. ISBN: 978-3-031-11588-2.
- [59] Dominik Hahne, Alexander Lion und Michael Johlitz. „Selective Laser Sintered Pipe Specimen Under Torsional Load: Experimental Investigations and Material Modeling“. In: *Lectures Notes on Advanced Structured Materials 2*. Hrsg. von Holm Altenbach u. a. Bd. 203. Advanced Structured Materials. Cham: Springer Nature Switzerland, 2024, S. 123–140. ISBN: 978-3-031-49042-2. DOI: 10.1007/978-3-031-49043-9-7.
-

-
- [60] Dominik Hahne, Alexander Lion und Michael Johlitz. „A Three-Dimensional, Continuum Mechanical Model for Additively Manufactured Polyamide 12“. In: *Continuum Mech. Therm.* (2025). submitted for publication.
- [61] Dominik Hahne, Alexander Lion und Michael Johlitz. „Material Modeling of Selective Laser Sintered Polyamid 12 for the Deviatoric Stress State“. In: *Lectures Notes on Advanced Structured Materials 2*. Hrsg. von Holm Altenbach u. a. Advanced Structured Materials. accepted for publication. Cham: Springer Nature Switzerland, 2025.
- [62] Ernst Hairer, Syvert P. Nørsett und Gerhard Wanner. „Nonstiff problems“. 2. Aufl. Bd. 8. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin: Springer, 1993. ISBN: 3-540-56670-8.
- [63] Ernst Hairer und Gerhard Wanner. „Stiff and differential-algebraic problems“. 2., rev. ed. Bd. 14. Springer series in computational mathematics. Berlin: Springer, 1996. ISBN: 3-540-60452-9.
- [64] Peter Haupt. „Viskoelastizität und Plastizität“. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1977. ISBN: 978-3-540-07730-5. DOI: 10.1007/978-3-662-13379-8.
- [65] Peter Haupt. „On the Mathematical Modelling of Material Behavior in Continuum Mechanics“. In: *Acta Mech.* 100 (1993), S. 129–154.
- [66] Peter Haupt. „Continuum Mechanics and Theory of Materials“. Second Edition. Advanced Texts in Physics. Berlin und Heidelberg: Springer, 2002. ISBN: 978-3-662-04775-0. DOI: 10.1007/978-3-662-04775-0.
- [67] Peter Haupt und Christos Tsakmakis. „On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics“. In: *Continuum Mech. Therm.* 1.3 (1989), S. 165–196. ISSN: 1432-0959. DOI: 10.1007/BF01171378.
- [68] Gert Heinrich und Michael Kaliske. „Theoretical and Numerical Formulation of a Molecular Based Constitutive Tube-Model of Rubber Elasticity“. In: *Comput. Theor. Polym. Sci.* 7.3 (1997), S. 227–241. ISSN: 1089-3156. DOI: 10.1016/S1089-3156(98)00010-5.
- [69] Gert Heinrich und Manfred Klüppel. „Recent Advances in the Theory of Filler Networking in Elastomers“. In: *Filled Elastomers Drug Delivery Systems*. Springer Berlin Heidelberg, 2002, S. 1–44. ISBN: 978-3-540-45362-8. DOI: 10.1007/3-540-45362-8_1.
- [70] M. Heyder, A. Öchsner und S. Ströhla. „Bewertung von Spannungszuständen bei der experimentellen Bestimmung des Schubmoduls an zellularen Materialien“. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 33.2 (2002), S. 85–89. DOI: 10.1002/1521-4052.
-

-
- [71] Günther Höhne, Wolfgang Hemminger und Hans-Jürgen Flammersheim. „Differential Scanning Calorimetry: With 19 Tables“. 2. Berlin u. a.: Springer, 2003. ISBN: 978-3-662-06710-9.
- [72] Gerhard A. Holzapfel. „Nonlinear solid mechanics“. Chichester [u.a.]: Wiley, 2000. ISBN: 9780471823193.
- [73] Mark F. Horstemeyer und Douglas J. Bammann. „Historical Review of Internal State Variable Theory for Inelasticity“. In: *Int. J. Plast.* 26.9 (2010), S. 1310–1334. ISSN: 0749-6419. DOI: 10.1016/j.ijplas.2010.06.005.
- [74] Prashant K. Jain, Pulak M. Pandey und P.V.M. Rao. „Selective Laser Sintering of Clay-Reinforced Polyamide“. In: *Polym. Compos.* 31.4 (2010), S. 732–743. DOI: 10.1002/pc.20854.
- [75] Michael Johlitz. „Experimentelle Untersuchung und Modellierung von Maßstabseffekten in Klebungen“. Diss. 2008. DOI: 10.22028/D291-22500.
- [76] Michael Johlitz. „Zum Alterungsverhalten von Polymeren: Experimentell gestützte, thermo-chemomechanische Modellbildung und numerische Simulation“. Habilitationsschrift. Universität der Bundeswehr München, 2015.
- [77] Mahmoud Kadkhodaei u. a. „Modeling of Hyperelasticity in Polyamide 12 Produced by Selective Laser Sintering“. In: *Continuum. Mech. Therm.* (2023), S. 1735–1744. ISSN: 1432-0959.
- [78] Wolfgang Kaiser. „Kunststoffchemie für Ingenieure: Von der Synthese bis zur Anwendung“. 3. Aufl. München: Hanser, 2011. ISBN: 978-3-446-43049-5.
- [79] Michael Kaliske und Gert Heinrich. „An Extended Tube-Model for Rubber Elasticity: Statistical-Mechanical Theory and Finite Element Implementation“. In: *Rubber Chem. Technol.* 72.4 (1999), S. 602–632. ISSN: 0035-9475. DOI: 10.5254/1.3538822.
- [80] J. Kim und T.S. Creasy. „Selective Laser Sintering Characteristics of Nylon 6/Clay-Reinforced Nanocomposite“. In: *Polym. Test.* 23.6 (2004), S. 629–636. ISSN: 0142-9418. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2004.01.014.
- [81] Bernd Klein. „FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau“. 10., verbesserte Auflage. Lehrbuch. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015. ISBN: 978-3-658-06053-4. DOI: 10.1007/978-3-658-06054-1.
- [82] Nadine Koprowski-Theiß. „Kompressible, viskoelastische Werkstoffe“. Bd. 25. Saarbrücker Reihe Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. Aachen: Shaker Verlag, 2011. ISBN: 9783844001112.
-

-
- [83] Arnold Krawietz. „Materialtheorie“. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1986.
- [84] Ekkehart Kröner. „Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen“. In: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 4 (1960), S. 273–334.
- [85] Martin Kumke. „Methodisches Konstruieren von additiv gefertigten Bauteilen“. Bd. 124. AutoUni – Schriftenreihe. Wiesbaden: Springer, 2018. ISBN: 9783658222093.
- [86] Johannes Kunz. „Ein Plädoyer für die dehnungsbezogene Auslegung“. In: *Kunststoffe* 101.4 (2011), S. 50–54.
- [87] Paul M. Kurowski. „Finite Element Analysis for Design Engineers“. 3rd ed. Warrendale: SAE International, 2023. ISBN: 978-1-4686-0535-8.
- [88] R. S. Lakes und A. Wineman. „On Poisson’s Ratio in Linearly Viscoelastic Solids“. In: *J. Elast.* 85.1 (2006), S. 45–63. ISSN: 1573-2681. DOI: 10.1007/s10659-006-9070-4.
- [89] N. Lammens u. a. „On the Visco-Elasto-Plastic Response of Additively Manufactured Polyamide-12 (PA12) through Selective Laser Sintering“. In: *Polym. Test.* 57 (2017), S. 149–155. ISSN: 0142-9418. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2016.11.032.
- [90] E. H. Lee. „Elastic-Plastic Deformation at Finite Strain“. In: *J. Appl. Mech.* 36 (1969), S. 1–6.
- [91] E. H. Lee und D. T. Liu. „Finite-Strain Elastic-Plastic Theory with Application to Plane-Wave Analysis“. In: *J. Appl. Phys.* 38(1) (1967), S. 19–27.
- [92] Karoline Lenke. „Kurzfaserverstärktes Polyamid – Charakterisierung der Mikroschädigungsentwicklung unter zweiachsiger mechanischer Last“. Diss. Technische Universität Berlin und Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung.
- [93] Maurice Lévy. „Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au-delà des limites où l’élasticité pourrait les ramener à leur premier état; présenté le 20 juin 1870“. In: *J. Math. Pures Appl.* 16 (1871), S. 369–372.
- [94] Bernd Lewen. „Das nichtlinear viskoelastische Verhalten von Kunststoffen am Beispiel der Zeit-Temperatur-Verschiebung und der Querkontraktionszahl“. Aachen, Techn. Hochsch., Diss., 1991. Diss. Aachen, 1991, S. 132.
- [95] Robert Michael Lewis und Virginia Torczon. „Pattern Search Algorithms for Bound Constrained Minimization“. In: *SIOPT* 9.4 (1999), S. 1082–1099. ISSN: 1052-6234. DOI: 10.1137/S1052623496300507.
-

-
- [96] A. Lion, B. Dippel und C. Liebl. „Thermomechanical Material Modelling Based on a Hybrid Free Energy Density Depending on Pressure, Isochoric Deformation and Temperature“. In: *Int. J. Solids Struct.* 51.3 (2014), S. 729–739. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.10.036.
- [97] A. Lion und J. Peters. „Coupling Effects in Dynamic Calorimetry: Frequency-Dependent Relations for Specific Heat and Thermomechanical Responses — A One-Dimensional Approach Based on Thermodynamics with Internal State Variables“. In: *Thermochimica Acta* 500.1 (2010), S. 76–87. ISSN: 0040-6031. DOI: 10.1016/j.tca.2009.12.014.
- [98] A. Lion, J. Peters und S. Kolmeder. „Simulation of Temperature History-Dependent Phenomena of Glass-Forming Materials Based on Thermodynamics with Internal State Variables“. In: *Thermochim. Acta* 522.1 (2011), S. 182–193. ISSN: 0040-6031. DOI: 10.1016/j.tca.2010.12.017.
- [99] A. Lion u. a. „Representation of the Glass-Transition in Mechanical and Thermal Properties of Glass-Forming Materials: A Three-Dimensional Theory Based on Thermodynamics with Internal State Variables“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 58.9 (2010), S. 1338–1360. ISSN: 0022-5096. DOI: 10.1016/j.jmps.2010.05.010.
- [100] F.R. Liu u. a. „Micro Scale 3D FEM Simulation on Thermal Evolution within the Porous Structure in Selective Laser Sintering“. In: *Journal of Materials Processing Technology* 212.10 (2012), S. 2058–2065. ISSN: 0924-0136. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2012.05.010.
- [101] Xin Liu u. a. „Multiphysical Modeling of the Heating Phase in the Polymer Powder Bed Fusion Process“. In: *Additive Manufacturing* (2015). ISSN: 2214-8604. DOI: 10.1016/j.addma.2017.10.006.
- [102] P.G. Llana und M.C. Boyce. „Finite Strain Behavior of Polyethylene Terephthalate above the Glass Transition Temperature“. In: *Polymer* 40.24 (1999), S. 6729–6751. DOI: 10.1016/S0032-3861(98)00867-2.
- [103] Klara Loos. „Strain-induced Crystallisation in Technical Rubber: from Experiments through Sophisticated Material Models to Advanced Simulations“. Diss. Universität der Bundeswehr München, 2021.
- [104] S.C.H. Lu und K.D. Pister. „Decomposition of Deformation and Representation of the Free Energy Function for Isotropic Thermoelastic Solids“. In: *Int. J. Solids Struct.* 11 (1975), S. 927–934.
- [105] Jacob Lubliner. „A Model of Rubber Viscoelasticity“. In: *Mech. Res. Commun.* 12 (1985), S. 93–99.

-
- [106] Federico Lupone u. a. „Selective Laser Sintering versus Multi Jet Fusion: A Comprehensive Comparison Study Based on the Properties of Glass Beads-Reinforced Polyamide 12“. In: *Adv. Eng. Mater.* 26.3 (2024). DOI: 10.1002/adem.202301345.
- [107] Mohamad Mahmoud, Brendan Huitorel und Abdoulaye Fall. „Rheology and Agglomeration Behavior of Semi-Crystalline Polyamide Powders for Selective Laser Sintering: A Comparative Study of PA11 and PA12 Formulations“. In: *J. Powder Technol.* 433 (2024). DOI: 10.1016/j.powtec.2023.119279.
- [108] P. du Maire u. a. „Characterisation of the thermal ageing effects on the mechanical properties when reusing polyamide 12 in the selective laser sintering process“. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 53.4 (2022), S. 503–508. DOI: 10.1002/mawe.202100393.
- [109] P. du Maire u. a. „Charakterisierung der mechanischen Eigenschaften von Polyamid 12 Pulver bei Verwendung von Titandioxid als antimikrobieller Zusatzstoff“. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 54.4 (2023), S. 385–390. DOI: 10.1002/mawe.202200329.
- [110] James C. Maxwell. „On the Dynamical Theory of Gases“. In: *Philos. Trans. R. Soc.* 157 (1867), S. 49–88.
- [111] Alida Mazzoli, Giacomo Moriconi und Marco Giuseppe Pauri. „Characterization of an Aluminum-Filled Polyamide Powder for Applications in Selective Laser Sintering“. In: *Mater. Des.* 28.3 (2007), S. 993–1000. ISSN: 0261-3069. DOI: 10.1016/j.matdes.2005.11.021.
- [112] G. Menges und H. Schmidt. „Spannungsrisssbildung und elastisch-plastisches Verformungsverhalten von thermoplastischen Kunststoffen bei Langzeit-Beanspruchung“. In: *Plastverarbeiter* 57.11 (1968), S. 547–551.
- [113] Georg Menges. „Ingenieurmäßige Festigkeitsrechnung für Spritzgussteile aus Thermoplasten“. In: *Kunststoffe* 57.1 (1967), S. 2–8.
- [114] Georg Menges. „Dimensionierung von Kunststoffbauteilen auf Basis von kritischen Deformationen“. In: *Kunststoffe Plast.* 24.8 (1977), S. 15–25.
- [115] Christoph Mittermeier. „Beitrag zur kontinuumsmechanischen Modellierung des Glasübergangs und der daraus resultierenden physikalischen Alterung“. Diss. Universität der Bundeswehr München, 2017.
- [116] Kunio Miyauchi. „Proposal of a Planar Simple Shear Test in Sheet Metals“. In: *Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research (Japan)* 78.3 (1984), S. 27–40.
- [117] Melvin Mooney. „A Theory of Large Elastic Deformation“. In: *J. Appl. Phys.* 11.9 (1940), S. 582–592. ISSN: 0021-8979. DOI: 10.1063/1.1712836.
-

-
- [118] E. Moosbrugger u. a. „Multiaxial Fatigue Behaviour of a Short-Fibre Reinforced Polyamide – Experiments and Calculations“. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 42.10 (2011), S. 950–957. DOI: <https://doi.org/10.1002/mawe.201100864>.
- [119] J. Nelson. „Selective Laser Sintering: A Definition for the Process and an Empirical Sintering Model“. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 1993.
- [120] Fuad Osmanlic. „Modeling of Selective Laser Sintering of Viscoelastic Polymers“. Diss. Universität Erlangen-Nürnberg, 2019.
- [121] Allen C. Pipkin und Ronald S. Rivlin. „Mechanics of Rate-Independent Materials“. In: *ZAMP* 16.3 (1965), S. 313–327. ISSN: 1420-9039. DOI: 10.1007/BF01591911.
- [122] Ludwig Prandtl. „Spannungsverteilung in plastischen Koerpern.“ In: *Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics* (1924), S. 43–54.
- [123] Alfred Puck und Helmut Schürmann. „Die Zug/Druck-Torsionsprüfung an rohrförmigen Probekörpern“. In: *Kunststoffe* 72 (1982), S. 554–561.
- [124] Tuomas Puttonen, Mika Salmi und Jouni Partanen. „Mechanical Properties and Fracture Characterization of Additive Manufacturing Polyamide 12 after Accelerated Weathering“. In: *Polym. Test.* 104 (2021), S. 107376. ISSN: 0142-9418. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2021.107376.
- [125] M. Reiner und E. Müller. „Rheologie in elementarer Darstellung“. Fachbuchverl. VEB, 1967.
- [126] Markus Reiner. „Deformation, strain and flow: An elementary introduction to rheology“. 3rd ed. London: H.K. Lewis, 1969. ISBN: 0718601629.
- [127] Andreas Rieder. „Keine Probleme mit inversen Problemen: Eine Einführung in ihre stabile Lösung“. 1. Aufl. Wiesbaden: Vieweg, 2003. ISBN: 3-528-03198-0. DOI: 10.1007/978-3-322-80234-7.
- [128] Agnés Roger, Daniel Sallet und Jacques Lemaire. „Photochemistry of Aliphatic Polyamides. 3. Mechanisms of Photooxidation of Polyamides 6, 11, and 12 at Short Wavelength“. In: *Macromolecules* 18.9 (1985), S. 1771–1775. DOI: 10.1021/ma00151a021.
- [129] Ilja Sagradov u. a. „Experimental Investigation and Numerical Modelling of 3D Printed Polyamide 12 with Viscoplasticity and a Crack Model at Different Strain Rates“. In: *Mater. Today Commun.* 25 (2020). ISSN: 2352-4928. DOI: 10.1016/j.mtcomm.2020.101542.

-
- [130] Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant. „Mémoire sur l’Etablissement des Equations Différentielles des Mouvements Intérieurs Opérés dans les Corps Solids Ductiles au-delà des Limites où l’Elasticité Pourrait les Ramener à Leur Premier Etat“. In: *Comptes Rendus* 70 (1870), S. 473.
- [131] Gean Salmoria u. a. „Selective Laser Sintering of PA12/HDPE Blends: Effect of Components on Elastic/Plastic Behavior“. In: *Polym. Test.* 27 (Sep. 2008), S. 654–659. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2008.04.007.
- [132] Manfred Schmid. „AM auf dem Weg in die Produktion“. In: *Kunststoff-Xtra* (Sep. 2014), S. 6–9. ISSN: 1664-3933.
- [133] Manfred Schmid. „Additive Fertigung mit Selektivem Lasersintern (SLS): Prozess- und Werkstoffüberblick“. Essentials. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015. ISBN: 978-3-658-12288-1.
- [134] F. Schmidt u. a. „Monitoring of Multiaxial Fatigue Damage Evolution in Impacted Composite Tubes Using Non-Destructive Evaluation“. In: *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.* 43.3 (2012), S. 537–546. ISSN: 1359-835X. DOI: 10.1016/j.compositesa.2011.12.002.
- [135] Daniela Schob u. a. „Experimental Determination and Numerical Simulation of Material and Damage Behaviour of 3D Printed Polyamide 12 under Cyclic Loading“. In: *Eng. Fract. Mech.* 229 (2020), S. 106841. ISSN: 00137944. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.106841.
- [136] Daniela Schob u. a. „Characterization and Simulation of Shear-Induced Damage in Selective-Laser-Sintered Polyamide 12“. In: *Materials* 17.1 (2024). DOI: \url{10.3390/ma17010038}.
- [137] Friedrich Rudolf Schwarzl. „Polymermechanik: Struktur und mechanisches Verhalten von Polymeren“. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1990. ISBN: 978-3-642-61506-1. DOI: 10.1007/978-3-642-61506-1.
- [138] Konstantin Sedlan. „Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomerwerkstoffen: Experimentelle Untersuchung und Modellbildung“. Diss. Kassel, Universität Gesamthochschule, FB 15, Maschinenbau, Feb. 2001.
- [139] Alec S.D. Shackelford u. a. „Degradation of Laser Sintered Polyamide 12 Parts Due to Accelerated Exposure to Ultraviolet Radiation“. In: *Addit. Manuf.* 46 (2021). DOI: 10.1016/j.addma.2021.102132.
- [140] Lawrence F. Shampine und Mark W. Reichelt. „The MATLAB ODE Suite“. In: *SISC* 18.1 (1997), S. 1–22. ISSN: 1064-8275. DOI: 10.1137/S1064827594276424.
- [141] Lawrence F. Shampine, Mark W. Reichelt und Jacek A. Kierzenka. „Solving Index-1 DAEs in MATLAB and Simulink“. In: *SIAM Review* 41.3 (1999), S. 538–552. ISSN: 0036-1445. DOI: 10.1137/S003614459933425X.
-

-
- [142] William N. Sharpe. „Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics“. Boston, MA: Springer US, 2008. ISBN: 978-0-387-26883-5. DOI: 10.1007/978-0-387-30877-7.
- [143] Yusheng Shi u. a. „Development of a Polymer Alloy of Polystyrene (PS) and Polyamide (PA) for Building Functional Part Based on Selective Laser Sintering (SLS)“. In: *Proc. Inst. Mech. Eng. L J. Mater.* 218 (Nov. 2004), S. 299–306. DOI: 10.1243/1464420042722237.
- [144] Yusheng Shi u. a. „Effect of the Properties of the Polymer Materials on the Quality of Selective Laser Sintering Parts“. In: *Proc. Inst. Mech. Eng. Pt. L J. Mater. Des. Appl.* 218 (Juli 2004), S. 247–252. DOI: 10.1177/146442070421800308.
- [145] A.V. Shutov, R. Landgraf und J. Ihlemann. „An explicit solution for implicit time stepping in multiplicative finite strain viscoelasticity“. In: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 265 (2013), S. 213–225.
- [146] J. C. Simo und R. L. Taylor. „Penalty Function Formulations for Incompressible Nonlinear Elastostatics“. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 35.1 (1982), S. 107–118. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/0045-7825(82)90035-4.
- [147] Christian Sirch, Christian Bierögl und Wolfgang Grellmann. „Temperaturabhängige Bestimmung der lokalen Querkontraktionszahl an Kunststoffen mittels Laserextensometrie“. In: *Fortschritte in der Werkstoffprüfung für Forschung und Praxis: Werkstoffeinsatz, Qualitätssicherung und Schadensanalyse ; [Tagung Werkstoffprüfung 2014, 04. bis 05. November 2014, Berlin]*. Hrsg. von Wolfgang Grellmann und Holger Frenz. Deutsche Gesellschaft für Materialkunde, 2014. Kap. 21, S. 149–154. ISBN: 978-3-981-45168-9.
- [148] Alexandre Kepler Soares, Dídida I. Covas und Luisa Fernanda Reis. „Analysis of PVC Pipe-Wall Viscoelasticity during Water Hammer“. In: *J. Hydraul.* 134.9 (2008), S. 1389–1394. ISSN: 0733-9429. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2008)134:9(1389).
- [149] Markus Stommel, Marcus Stojek und Wolfgang Korte. „FEM zur Berechnung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen“. 2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Hanser eLibrary. München: Hanser, 2018. ISBN: 978-3-446-44714-1. DOI: 10.3139/9783446452831.
- [150] Tobias Scheffer. „Charakterisierung des nichtlinear-viskoelastischen Materialverhaltens gefüllter Elastomere“. Diss. 2016. DOI: 10.13140/RG.2.1.3058.0722.
- [151] Arthur Victor Tobolsky. „Mechanische Eigenschaften und Struktur von Polymeren“. Stuttgart: Berliner Union, 1967. ISBN: 3408535078.
-

-
- [152] Alva E. Tontowi und T.H.C. Childs. „Density Prediction of Crystalline Polymer Sintered Parts at Various Powder Bed Temperatures“. In: *Rapid Prototyp. J.* 7.3 (2001), S. 180–184. ISSN: 1355-2546. DOI: 10.1108/13552540110395637.
- [153] Arthur Q. Tool. „Relaxation of Stresses in Annealing Glass“. In: *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 34 (1945), S. 199.
- [154] Arthur Q. Tool. „Relation between Inelastic Deformability and Thermal Expansion of Glass in its Annealing Range“. In: *J. Am. Ceram. Soc.* 29.9 (1946), S. 240–253. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1946.tb11592.x.
- [155] Virginia Torczon. „On the Convergence of Pattern Search Algorithms“. In: *SIAM J. Optim.* 7 (1997), S. 1–25.
- [156] Volker Trappe. „Beschreibung des intralaminaren Ermüdungsverhaltens von CFK mit Hilfe innerer Zustandsvariablen: Zugl.: Braunschweig, Techn. Univ., Diss., 2001“. Als Ms. gedr. Bd. 646. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 5, Grund- und Werkstoffe, Kunststoffe. Düsseldorf: VDI-Verl., 2002. ISBN: 3183646056.
- [157] Henri E. Tresca. „Sur l’écoulement des corps solides soumis a de fortes pressions“. Imprimerie de Gauthier-Villars, successeur de Mallet-Bachelier, rue de Seine, 1864.
- [158] N. W. Tschoegl, Wolfgang G. Knauss und Igor Emri. „Poisson’s Ratio in Linear Viscoelasticity – A Critical Review“. In: *Mech. Time-Depend. Mat.* 6.1 (2002), S. 3–51. ISSN: 1573-2738. DOI: 10.1023/A:1014411503170.
- [159] Nicholas W. Tschoegl. „The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction ; with 25 Tables“. Berlin und Heidelberg: Springer, 1989. ISBN: 978-3-642-73604-9.
- [160] Kirk C. Valanis. „A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface“. In: *Arch. Mech. Stos.* 23.4 (1971), S. 515–553.
- [161] Brecht Van Hooreweder u. a. „Experimental investigation of scaling laws for mechanical fatigue behaviour“. In: *8th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics 2009*. Bd. 8. 2009, S. 659–663.
- [162] Brecht Van Hooreweder u. a. „Microstructural Characterization of SLS-PA12 Specimens under Dynamic Tension/Compression Excitation“. In: *Polym. Test.* 29.3 (2010), S. 319–326. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2009.12.006.
- [163] Andreas Wegner. „Theorie über die Fortführung von Aufschmelzvorgängen als Grundvoraussetzung für eine robuste Prozessführung beim Laser-Sintern von Thermoplasten“. Diss. Universität Duisburg-Essen, 2015.
- [164] John D. Williams und Carl R. Deckard. „Advances in Modeling the Effects of Selected Parameters on the SLS Process“. In: *Rapid Prototyp. J.* 4.2 (1998), S. 90–100. ISSN: 1355-2546. DOI: 10.1108/13552549810210257.
-

-
- [165] Malcolm L. Williams, Robert F. Landel und John D. Ferry. „The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids“. In: *Journal of the American Chemical Society* 77.14 (1955), S. 3701–3707.
- [166] Katrin Wudy und Dietmar Drummer. „Aging Effects of Polyamide 12 in Selective Laser Sintering: Molecular Weight Distribution and Thermal Properties“. In: *Addit. Manuf.* 25 (2019), S. 1–9. ISSN: 22148604.
- [167] Katrin Wudy u. a. „Analysis of Time Dependent Thermal Properties for High Rates in Selective Laser Sintering“. In: *Rapid Prototyp. J.* 24.5 (2018), S. 894–900. ISSN: 1355-2546.
- [168] Bernhard Wunderlich. „Thermal Analysis of Polymeric Materials“. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. ISBN: 978-3-540-26360-9. DOI: 10.1007/b137476.
- [169] S. Yang und J.R.G. Evans. „Metering and Dispensing of Powder; the Quest for New Solid Freeforming Techniques“. In: *Powder Technol.* 178.1 (2007), S. 56–72. ISSN: 0032-5910. DOI: 10.1016/j.powtec.2007.04.004.
- [170] Fahmi Zairi, Krzysztof Woznica und Moussa Nait-Abdelaziz. „Phenomenological Nonlinear Modelling of Glassy Polymers“. In: *Comptes Rendus. Mécanique* 333.4 (2005), S. 359–364. DOI: 10.1016/j.crme.2005.02.003.
- [171] Edgar Dutra Zanotto. „Do Cathedral Glasses Flow?“ In: *Am. J. Phys.* 66.5 (Mai 1998), S. 392–395. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.19026.
- [172] H. Zarringhalam u. a. „Effects of Processing on Microstructure and Properties of SLS Nylon 12“. In: *Mater. Sci. Eng.* 435-436 (2006), S. 172–180. ISSN: 0921-5093. DOI: 10.1016/j.msea.2006.07.084.

A. mechanische Versuchsergebnisse

A.1. Versuchsergebnisse der Scherprobe

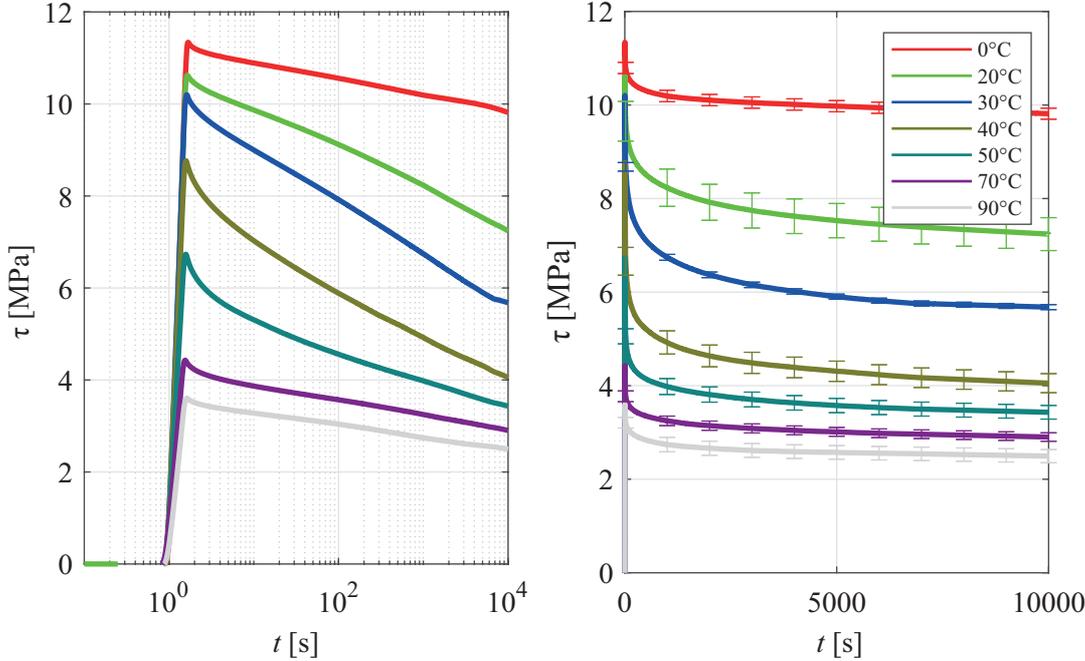


Abbildung A.1.: Relaxationsversuche der Scherprobe

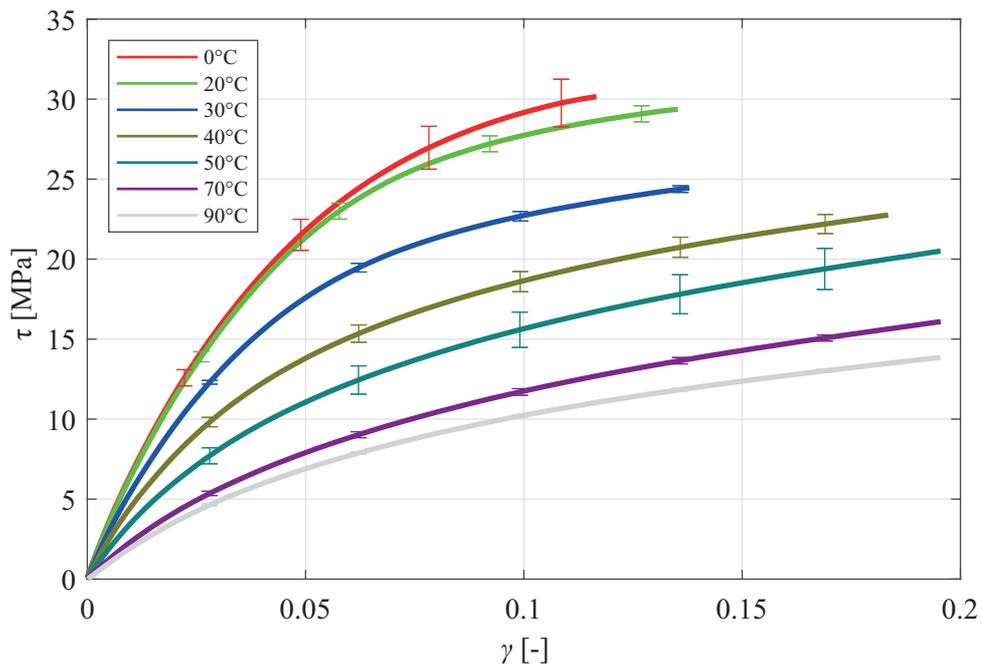


Abbildung A.2.: Monotone Ratenversuche der Scherprobe bei $\dot{x} = 10 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$

A.2. Versuchsergebnisse der Rohrprobe unter Zugbelastung

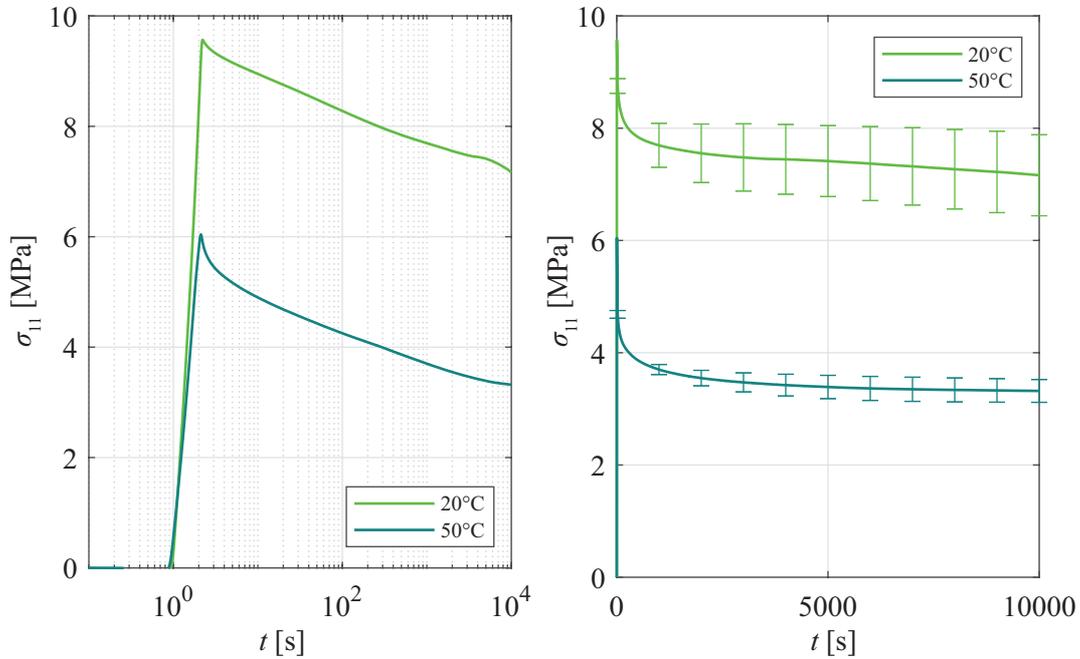


Abbildung A.3.: Relaxationsversuche der Rohrprobe auf Zug bei 20°C und 50°C

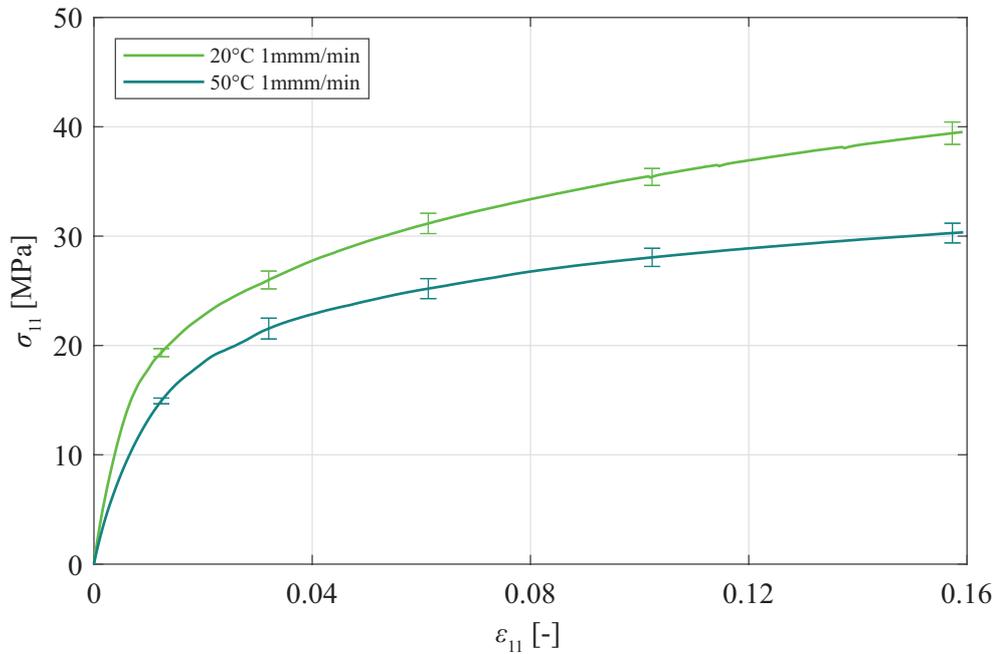


Abbildung A.4.: Monotone Zugversuche der Rohrprobe bei $\dot{\epsilon} = 1 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$

A.3. Versuchsergebnisse der Torsionsproben im zyklischen Versuch

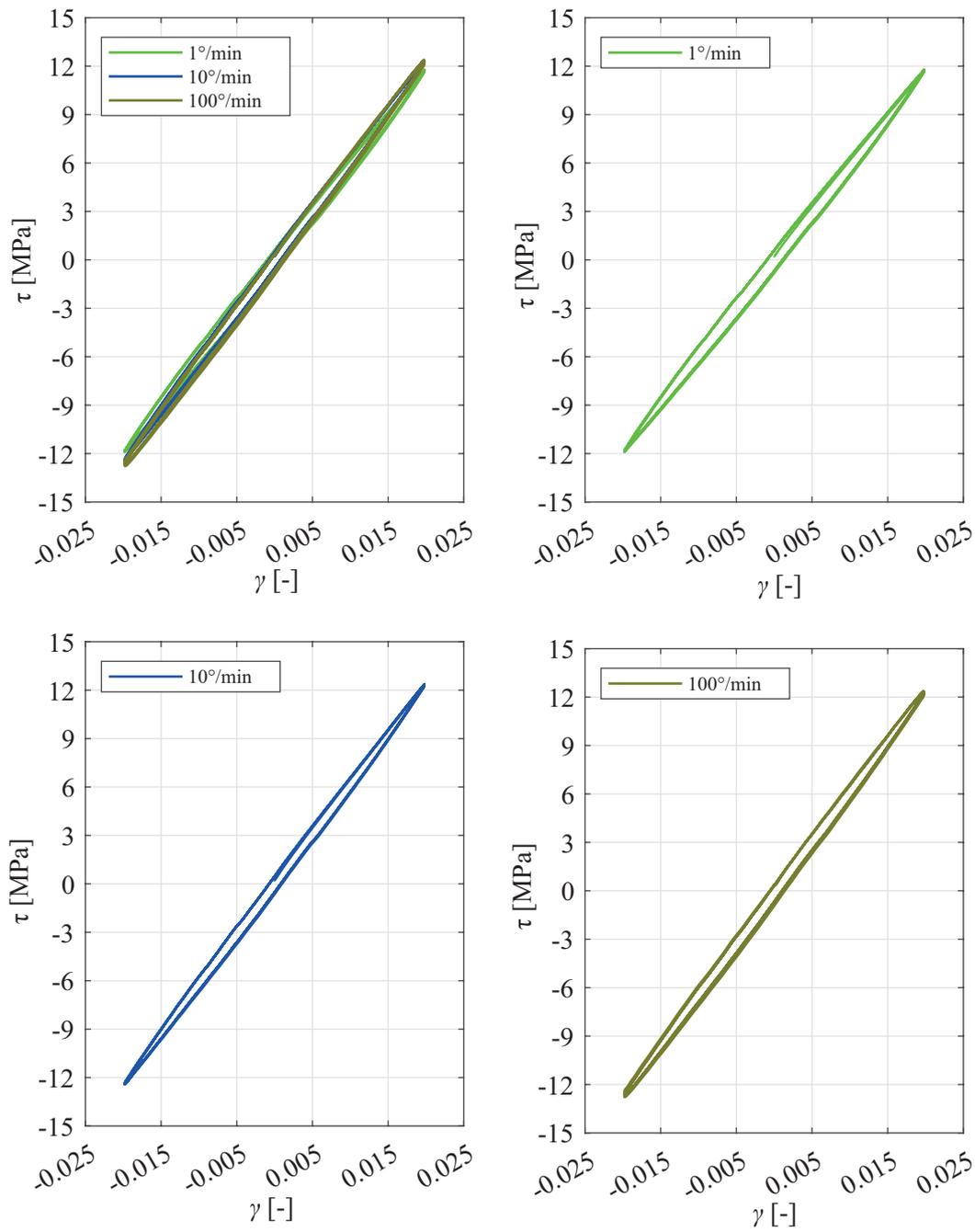


Abbildung A.5.: Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 2^\circ$ und 20°C

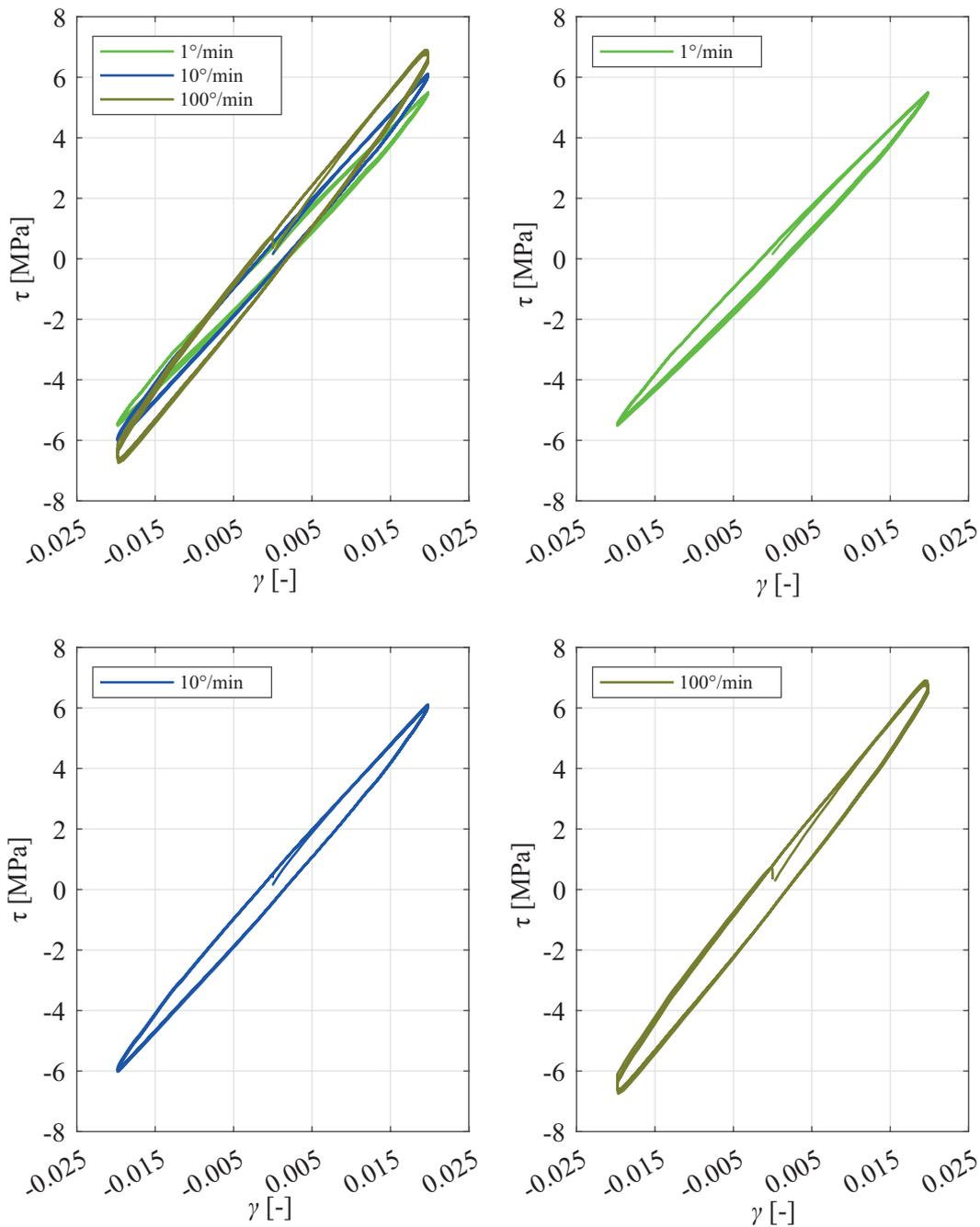


Abbildung A.6.: Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 2^\circ$ und 50°C

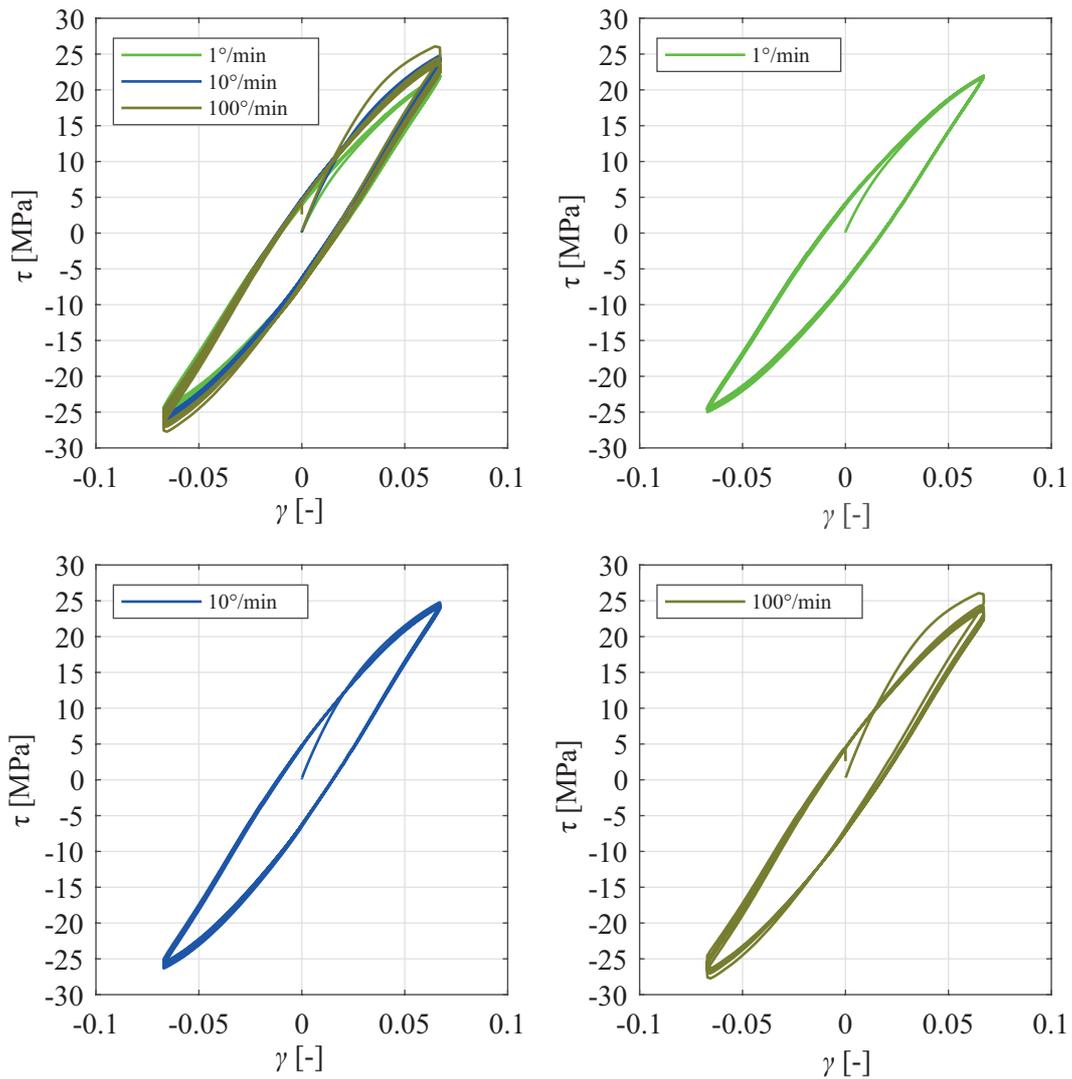


Abbildung A.7.: Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 6^\circ$ und 20°C

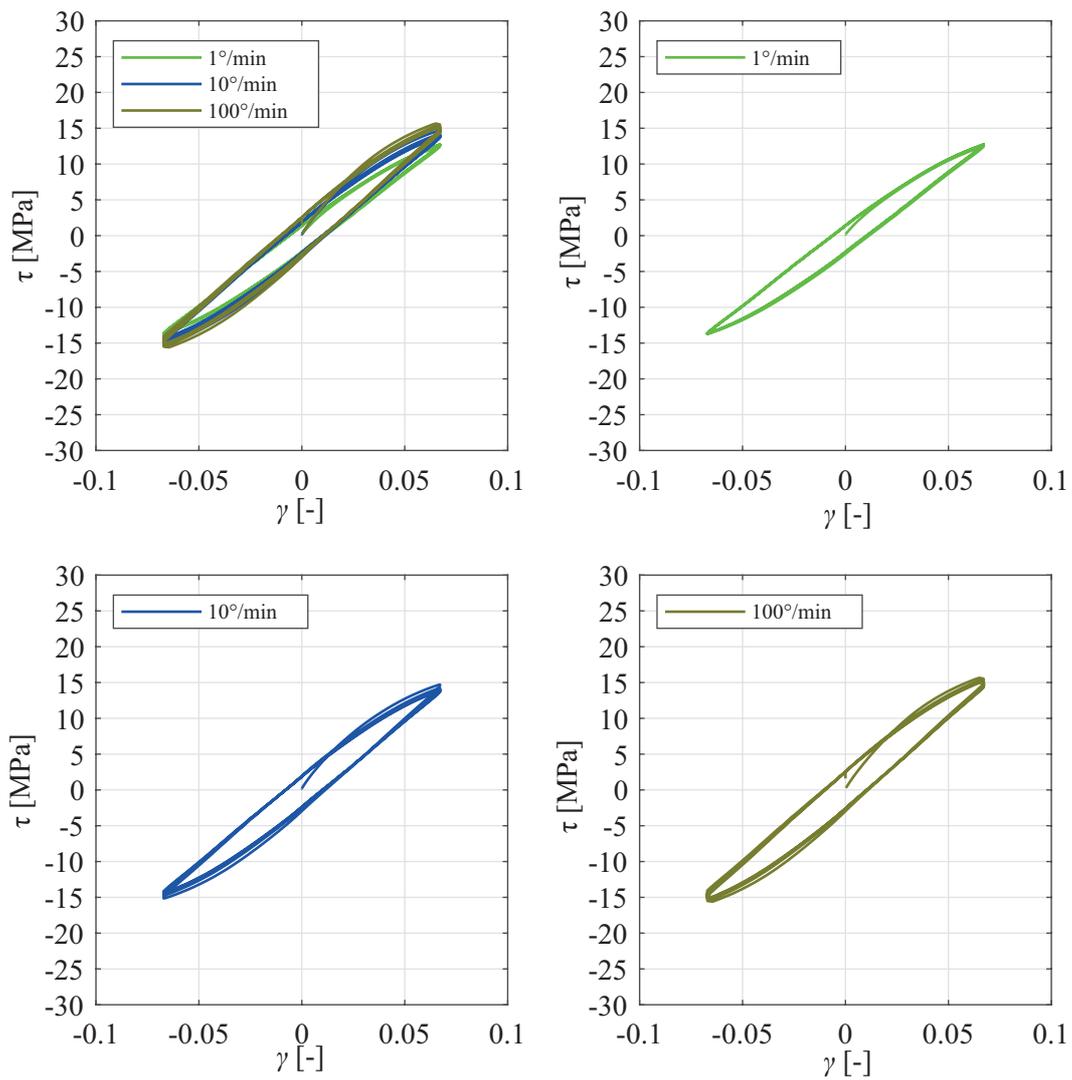


Abbildung A.8.: Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 6^\circ$ und 50°C

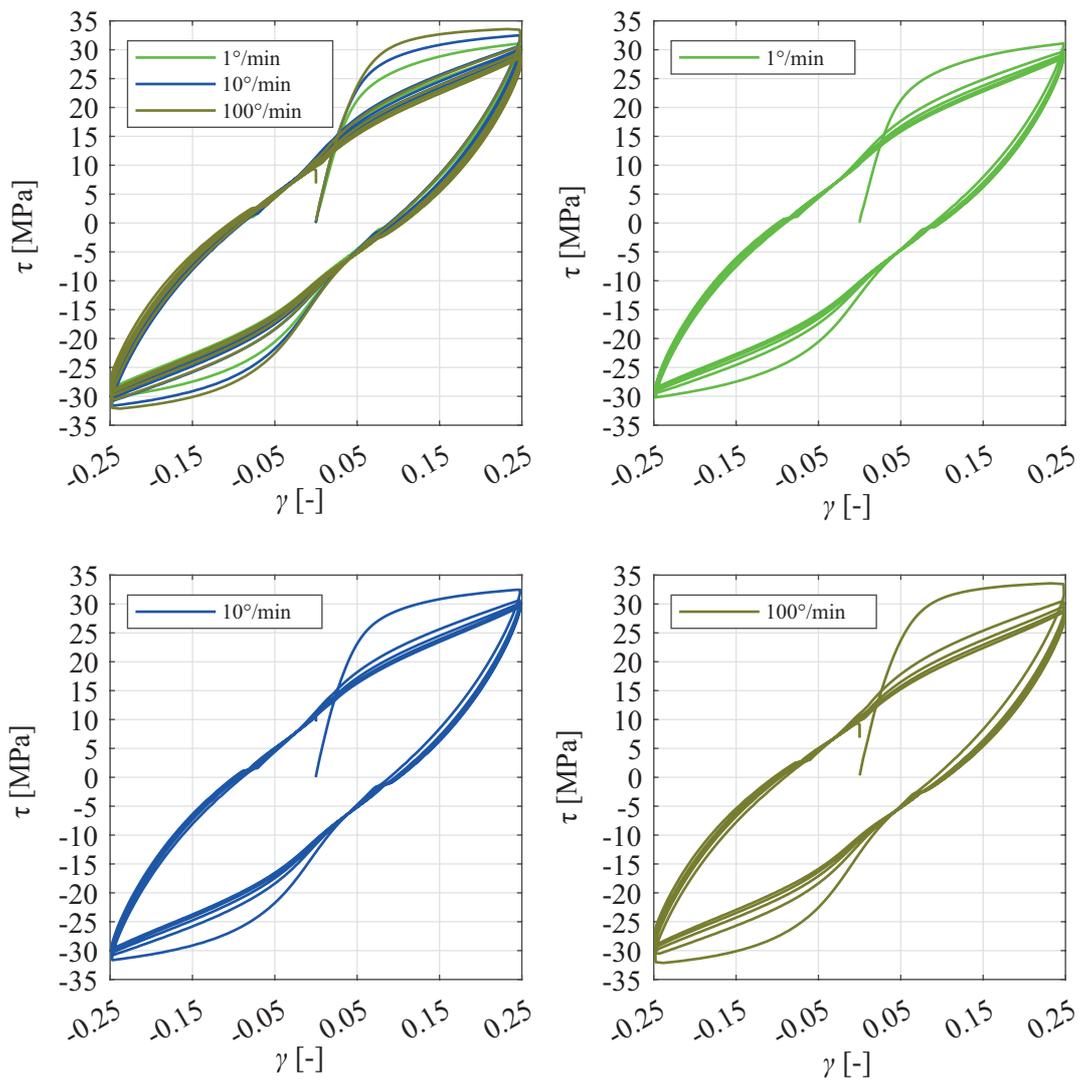


Abbildung A.9.: Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 15^\circ$ und 20°C

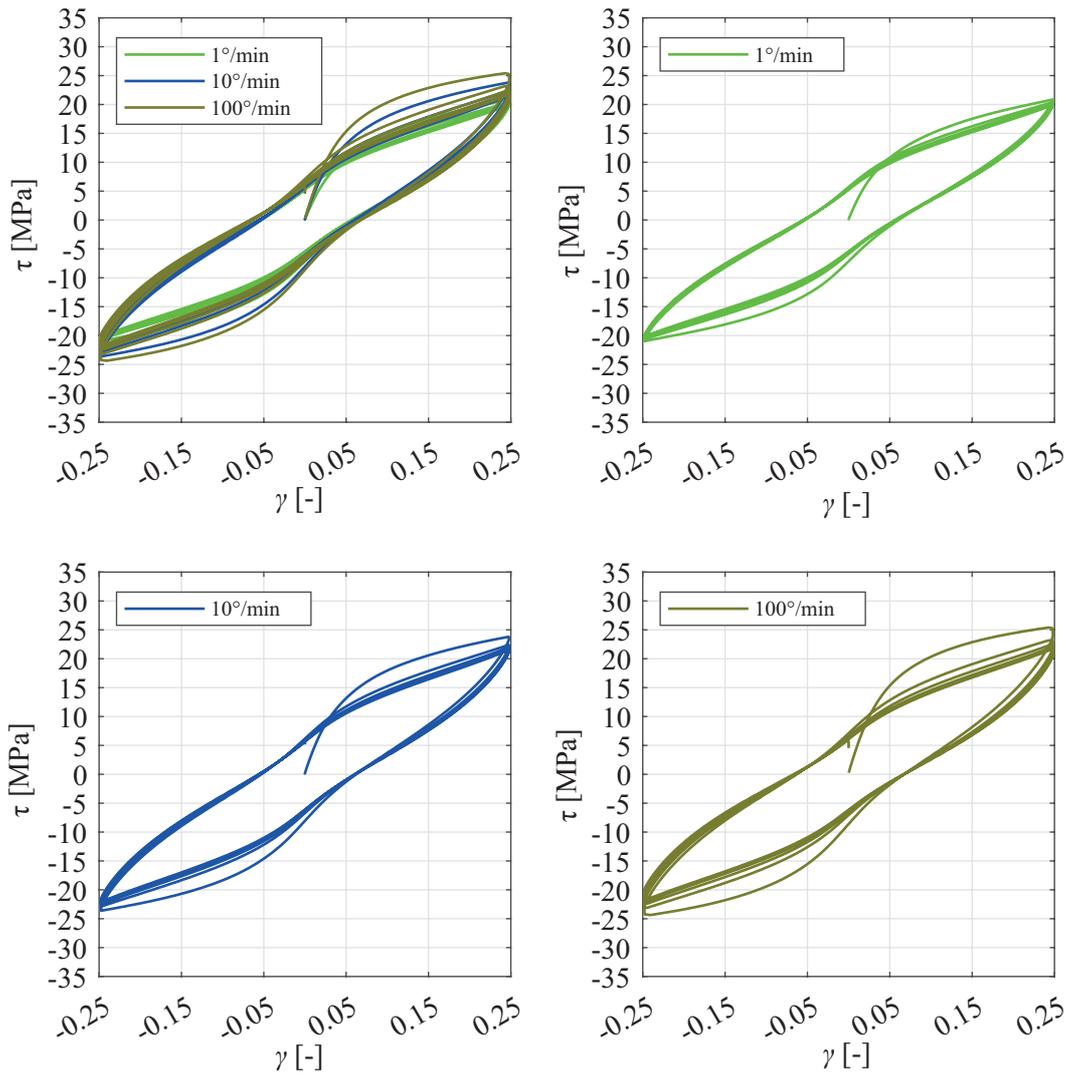


Abbildung A.10.: Zyklische Torsionsversuche bei $\varphi = 15^\circ$ und 50°C