

Impactverhalten schwach gekrümmter Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen

Ingo Ehrlich

Universität der Bundeswehr München
Dezember 2004

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen

Impactverhalten schwach gekrümmter Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen

Ingo Ehrlich

Von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität der
Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs
(Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. G. Siebert
1. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. N. Gebbeken
2. Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Rapp

Tag der Prüfung: 17. Dezember 2004

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Ingenieur am Wehrwissenschaftlichen Institut für Werk-, Explosiv- und Betriebsstoffe (WIWEB) in Erding.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Lehrer und Doktorvater Herrn Professor Dr.-Ing. habil. N. Gebbeken für seine Förderung und Unterstützung meiner Arbeit. Seine Hinweise, Anregungen und Ideen während zahlreicher Diskussionen haben diese Arbeit wesentlich geprägt.

Für die Übernahme des Koreferats, die fachlichen Gespräche, die vielfältige Unterstützung und das große Interesse an meiner Arbeit danke ich Herrn Professor Dr.-Ing. H. Rapp.

Herrn Professor Dr.-Ing. G. Siebert danke ich für die Übernahme des Vorsitzes im Promotionsverfahren.

Die Dissertation wurde erst durch die besondere Förderung meiner Arbeit am Wehrwissenschaftlichen Institut durch Herrn Direktor und Professor J. Kunz ermöglicht. Für die zahlreichen Diskussionen und Anregungen während der Entstehung meiner Arbeit danke ich Herrn Dr.-Ing. G. Maier. Weiter gilt mein Dank Herrn Dr.-Ing. J. Wolfrum, der durch seine Unterstützung und die vielen fachlichen und persönlichen Gespräche sehr zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen hat.

Ferner danke ich für die vielfältige Unterstützung meiner Arbeit Herrn Professor Dr.-Ing. Cuntze, Herrn Professor Dr.-Ing. Emmerling, Herrn Professor i. R. Dr.-Ing. Fahlbusch, Herrn Dr.-Ing. Breuer, Herrn Dr.-Ing. Greulich, Herrn Dr.-Ing. Petry und Herrn Dipl.-Ing. Seggewiß.

Ich möchte an dieser Stelle auch diejenigen dankend erwähnen, die bei der Entstehung dieser Arbeit Anteil hatten: Herrn Dipl.-Ing. Dietel, Herrn E. Lauterborn, Herrn N. Lauterborn, Herrn Haindl, Herrn Hasselhuhn, Herrn OFw Huber, Herrn Kratzer, Herrn Macher, Herrn Matwijiw, Herrn Schrädobler, Frau Stapf sowie meinen Studenten und Praktikanten.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Frau Katharina für ihre Geduld und für ihr großes Verständnis während der Entstehung meiner Arbeit bedanken.

Taufkirchen/Vils, Dezember 2004

Ingo Ehrlich

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Formelzeichen und Bezeichnungen	ix
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.1.1 Aspekte der Modellbildung	2
1.2 Stand der Technik	2
1.2.1 Schädigungsverlauf unter Impact-Belastung	3
1.2.2 Impactgeschwindigkeit	3
1.2.3 Einflußgrößen auf die Schädigung	4
1.2.4 Mechanische Modellierung	7
1.3 Zielsetzung und Vorgehen	8
2 Lineare anisotrope Elastizität	9
2.1 Das HOOKEsche Gesetz des isotropen Körpers	9
2.1.1 Materialgesetz	9
2.1.2 Kinematische Beziehungen	12
2.1.3 Lokale Bewegungsgleichung	14
2.2 Materialsymmetrien	15
2.2.1 Anisotropie	15
2.2.2 Monotropie	18
2.2.3 Orthotropie	19
2.2.4 Transversalisotropie	20
2.2.5 Isotropie	23

3	Betrachtungen ausgewählter Plattentheorien	25
3.1	KIRCHHOFFSche Plattentheorie	26
3.1.1	Annahmen	26
3.1.2	Grundgleichungen der KIRCHHOFF-Platte	27
3.1.3	Plattenspannungen in Abhängigkeit der Schnittgrößen	33
3.1.4	Randbedingungen der KIRCHHOFF-Platte	35
3.1.5	Gelenkig gelagerte Rechteckplatte - Lösung nach NAVIER	37
3.1.6	Fest eingespannte Rechteckplatte - RITZ-Ansatz	40
3.2	Die schwach gekrümmte KIRCHHOFF-Platte	44
3.2.1	Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen	47
3.2.2	Materialgesetz	49
3.2.3	Schwach gekrümmte Platte über rechteckigem Grundriß	50
3.3	Erweiterte KIRCHHOFFSche Theorie für orthotrope Platten	53
3.3.1	Annahmen der orthotropen KIRCHHOFF-Platte	54
3.3.2	Grundgleichungen der orthotropen KIRCHHOFF-Platte	54
3.3.3	Plattenspannungen der orthotropen KIRCHHOFF-Platte	57
3.3.4	Randbedingungen der orthotropen KIRCHHOFF-Platte	57
4	Grundgleichungen anisotroper Laminatplatten	59
4.1	Monotrope Einzelschicht	59
4.1.1	Schnittgrößen der monotropen Einzelschicht	61
4.1.2	Spannungsberechnung der monotropen Einzelschicht	63
4.2	Klassische Laminattheorie (CLT)	65
4.2.1	Berechnung der interlaminaren Spannungen	68
4.2.2	Variationsformulierung des elastischen Potentials einer symmetrischen, schubstarrten Laminatplatte	70
4.2.3	Wahl der Ansatzfunktionen	76
4.3	Schubdeformationstheorie 1. Ordnung	77
4.3.1	Variationsformulierung des elastischen Potentials einer symmetrischen, schubweichen Laminatplatte	79
4.3.2	Wahl der Ansatzfunktionen	83
4.4	Anwendung schubstarrer oder -weicher Theorien	84
4.5	Vergleich schubstarrer und -weicher Theorien	85
4.5.1	Schubstarre Laminatplatte	86
4.5.2	Schubweiche Laminatplatte	87
4.5.3	Vergleich der Ergebnisse	87

5	Transversale Stoßbelastung an Rechteckplatten	91
5.1	Näherungsweise Berechnung der Plattenbiegung	91
5.1.1	Maximaldurchbiegung der Laminatplatte beim Impact	96
6	Experimentelle Einrichtungen, Versuchsdurchführung und Auswertung	99
6.1	Probenkörperherstellung und -geometrie	99
6.1.1	Zusammensetzung und Kennzeichnung des Prepregsystems	99
6.1.2	Verarbeitung des Prepregsystems	100
6.1.3	Probenkörpergeometrie	102
6.1.4	Untersuchungen zur Qualitätssicherung	104
6.2	Instrumentierte Fallbolzenanlage	107
6.3	Mikroskopische Untersuchungsmethoden	109
6.3.1	Ultraschallanalyse	109
6.3.2	Lichtmakroskopische Untersuchungen	111
7	Ergebnisse der Untersuchungen	113
7.1	Ergebnisse des Niedergeschwindigkeitsimpacts	113
7.2	Ergebnisse der mikroskopischen Untersuchungen	116
7.3	Auswertung der Schadensprojektionsflächen	121
7.4	Untersuchungsergebnisse des Impactverhaltens	122
8	Diskussion der Ergebnisse	129
8.1	Einfluß der Probenkörpergeometrie auf die Schadensfläche	129
8.2	Einfluß der Probenkörpergeometrie auf den Impactvorgang	130
8.3	Impact- und Probenkörpergeometrieabhängigkeit der Rißverläufe	130
8.4	Berücksichtigung der Schubweichheit	131
8.5	Einfluß von Scheiben- und Transversalbelastungen	132
8.6	Einfluß der Randbedingungen auf das Impactverhalten	134
8.7	Geometrieeinfluß	134
8.7.1	Konvergenz	134
8.7.2	Berechnungsergebnisse	137

9 Zusammenfassung und Ausblick	141
Anhang	144
A Koordinatentransformation	145
Literaturverzeichnis	147

Formelzeichen und Bezeichnungen

Lateinische Buchstaben

A	Fläche
A_0	Ausgangs-, Grundfläche
A_{del}	Delaminationsfläche
\tilde{A}_{del}	Projektion der Delaminationsfläche
a	Seitenabmessung der Platte
a_0	Seitenlänge der Rechtecklast
a_{ij}	Koeffizienten eines Doppelreihenansatzes
b	Seitenabmessung der Platte
b_0	Seitenlänge der Rechtecklast
b_{ij}	Koeffizienten eines Doppelreihenansatzes
C	Drillsteifigkeit der orthotropen Platte
C_1, C_2	Interaktionskonstanten
c	Federkonstante
c_{ij}	Koeffizienten eines Doppelreihenansatzes
D	Dehnsteifigkeit
du	infinitesimale Länge
dx	infinitesimale Länge
$d\bar{x}$	infinitesimale Länge nach Belastung
dy	infinitesimale Länge
dz	infinitesimale Länge
E	isotroper Elastizitätsmodul
E_{dis}	dissipierte Energie
E_f	Elastizitätsmodul der isotropen Faser
E_{imp}	Impactenergie
E_{kin}	Kinetische Energie
E_{Lf}	Elastizitätsmodul der anisotropen Faser in Faserlängsrichtung
E_m	Elastizitätsmodul der Matrix
E_{max}	Maximalenergie
E_{pot}	Potentielle Energie
E_r	Elastizitätsmodul in radialer Richtung
E_{Tf}	Elastizitätsmodul der anisotropen Faser senkrecht zur Faserlängsrichtung
E_{vers}	Schädigungsenergie
E_z	Elastizitätsmodul in z -Richtung
F	Normalkraft
\tilde{F}	Festigkeitskriterium

F_i	Koeffizienten des Festigkeitskriteriums
F_{ij}	Koeffizienten des Festigkeitskriteriums
F_E	Eckkraft
F_{max}	Maximalkraft
F_{vers}	Schädigungskraft
f	Überhöhung; $\tilde{U} = -f$
$f(x, y)$	Dimensionslose Funktion
$\tilde{f}(x, y)$	Dimensionslose Funktion
$f(z)$	Gewichtsfunktion
G	Gewichtskraft der Platte
G_1	Gewichtskraft des Impactors
G_f	Gleitmodul der isotropen Faser
G_{LTf}	Gleitmodul der anisotropen Faser
G_m	Gleitmodul der Matrix
G_{rz}	Gleitmodul
$G_{r\varphi}$	Gleitmodul
g	Fallbeschleunigung
H	Biege-Drill-StEIFigkeit der orthotropen Platte (Kap. 3.3)
H	Plattenschlankkeitsverhältnis (Kap. 4)
h	Plattendicke
h_k	Einzelschichtdicke
h_s	Schubdicke
I_{imp}	Impactimpuls
K	Plattenbiegesteifigkeit
K	Schubkorrekturfaktor (Kap. 4.3)
\tilde{K}	Strukturkrümmung
K_x	Plattenbiegesteifigkeit der orthotropen Platte
K_y	Plattenbiegesteifigkeit der orthotropen Platte
l	Länge
l_0	Grundlänge
Δl	Längenänderung
M	Randmoment
ΔM	Änderung der Feuchte
m	Masse der Platte
\bar{m}	Vergleichsmasse der Platte
m_1	Masse des Impactors
m_{imp}	Impactmasse
m_x	Biegemoment
m_y	Biegemoment
m_{xy}	Torsionsmoment
$m_{xy,max}$	Maximales Torsionsmoment
P	Einzelkraft
p_0	Rechtecklast
$p(x, y)$	Flächenlast an der Stelle (x, y)
p_{mn}	FOURIERKoeffizienten der Flächenlast $p(x, y)$
q_x	Querkraft
\bar{q}_x	Ersatzquerkraft

q_y	Querkraft
\bar{q}_y	Ersatzquerkraft
R	Radius des Kugelsegmentes
R_a	Außenradius des Kugelsegmentes
R_d	Radiale Druckfestigkeit
R_i	Innenradius des Kugelsegmentes
R_z	Radiale Zugfestigkeit
r_1	Kreisradius
r_2	Kreisradius
r_3	Kreisradius
r_a	Übergangsradius
r_i	Übergangsradius
r_k	Radius des Impactdorns
S	Querschubfestigkeit in r - z -Richtung
S_{ij}	Pfad
T	Tangentialkraft
ΔT	Temperaturänderung
t	Zeit
t_0	Zeitpunkt des ersten Kontakts
t_0	Zeitpunkt beim Kontaktkraftmaximums
t_1	Zeitpunkt des letzten Kontakts
\tilde{U}	Überhöhung; $\tilde{U} = -f$
u	Verschiebung in x-Richtung
\tilde{u}	Näherung der Verschiebung in x-Richtung
u_{ij}	Koeffizienten eines Doppelreihenansatzes
v	Verschiebung in y-Richtung
\tilde{v}	Näherung der Verschiebung in y-Richtung
v_{ij}	Koeffizienten eines Doppelreihenansatzes
W	Arbeit
W_a	Endwertarbeit der äußeren Belastung
W_f	Formänderungsarbeit des elastischen Potentials
w	Verschiebung / Durchbiegung in z-Richtung
\tilde{w}	Näherung der Verschiebung / Durchbiegung in z-Richtung
w_{ij}	Koeffizienten eines Doppelreihenansatzes
w_{mn}	FOURIERkoeffizienten der Biegefläche $w(x, y)$
$w_{0,max}$	Maximalverschiebung / -durchbiegung in z-Richtung im Aufprallpunkt
w_{max}	Maximalverschiebung / -durchbiegung in z-Richtung
w_{max}^{ebPl}	Maximalverschiebung / -durchbiegung in z-Richtung der ebenen Platte
w_{plast}	Plastische Verformung beim Impact
w_{vers}	Schädigungsweg
X, Y, Z	Je Volumeneinheit eingeprägte äußere Kräfte
X_i	Ansatzfunktion in x-Richtung
x, y, z	Globales Koordinatensystem
x_0	Mittelpunktskoordinaten der Rechtecklast
x_1, x_2, x_3	Faserorientiertes Koordinatensystem
Y_j	Ansatzfunktion in y-Richtung
y_0	Mittelpunktskoordinaten der Rechtecklast

Z_d	Druckfestigkeit in z -Richtung
Z_z	Zugfestigkeit in z -Richtung
z_k	Abstand der Unterseite der k -ten Einzelschicht von der Mittelfläche
\tilde{z}_k	Abstand der Mittelfläche der k -ten Einzelschicht von der Laminatmittelfläche

Griechische Buchstaben

γ	Gleitung
ε_x	Längsverzerrung in x -Richtung
ε_y	Längsverzerrung in y -Richtung
ε	Längsverzerrung
η	Dimensionslose Länge
κ'	Parameter zur Bestimmung der Vergleichsmasse \bar{m}
κ''	Parameter zur Bestimmung der Maximaldurchbiegung $w_{0,max}$
κ_x	Querschnittsneigung, (Ver)drehwinkel in x -Richtung; $\kappa_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
κ_y	Querschnittsneigung, (Ver)drehwinkel in y -Richtung; $\kappa_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
κ_{xy}	Verdrillung, Verwindung; $\kappa_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
ν	POISSON-Zahl / Querdehnungszahl / Querkontraktionszahl
ν_f	Querkontraktionszahl der isotropen Faser
ν_{LTf}	Querkontraktionszahl der anisotropen Faser
ν_m	Querkontraktionszahl der Matrix
ν_{rz}	Querkontraktionszahl
$\nu_{r\varphi}$	Querkontraktionszahl
ξ	Dimensionslose Länge
Π	Potential
Σ	Summenzeichen
σ	Normalspannung
σ_{ii}	Normalspannung in ii -Richtung
$\sigma_{x,max}$	Maximale relative Spannung in x -Richtung
$\sigma_{x,max}^B$	Maximale relative Biegespannung in x -Richtung
$\sigma_{x,max}^{mem}$	Maximale relative Membranspannung in x -Richtung
τ	Schubspannung
τ_{ij}	Schubspannung in ij -Richtung
Φ	AIRYSchen Spannungsfunktion
φ	Faserorientierungswinkel
φ_f	Faservolumengehalt
φ_k	Faserorientierungswinkel der k -ten Einzelschicht
ψ_i	Winkel bei einer Verschiebung in i -Richtung

Matrizen und Vektoren

$[A]$	Matrix der Scheibensteifigkeiten
$[B]$	Matrix der Koppelsteifigkeiten
$[C]$	Steifigkeitsmatrix im lokalen Koordinatensystem

$[\bar{C}]$	Steifigkeitsmatrix im globalen Koordinatensystem
$[C_{iso}]$	Isotrope Steifigkeitsmatrix
$[C_{mono}]$	Monotrope Steifigkeitsmatrix
$[C_{ortho}]$	Orthotrope Steifigkeitsmatrix
$[C_{tiso}]$	Transversalisotrope Steifigkeitsmatrix
$[D]$	Matrix der Plattensteifigkeiten
$[Q]$	Matrix der reduzierten Einzelschichtsteifigkeiten im lokalen Koordinatensystem
$[\bar{Q}]$	Matrix der reduzierten Einzelschichtsteifigkeiten im globalen Koordinatensystem
$[S]$	Nachgiebigkeitsmatrix im lokalen Koordinatensystem
$[\bar{S}]$	Nachgiebigkeitsmatrix im globalen Koordinatensystem
$[S_{iso}]$	Isotrope Nachgiebigkeitsmatrix
$[S_{mono}]$	Monotrope Nachgiebigkeitsmatrix
$[S_{ortho}]$	Orthotrope Nachgiebigkeitsmatrix
$[S_{tiso}]$	Transversalisotrope Nachgiebigkeitsmatrix
$[T_\epsilon]$	Transformationsmatrix der Verzerrungen
$[T_\epsilon]^{-1}$	Inverse der Transformationsmatrix der Verzerrungen (Rücktransformation)
$[T_\sigma]$	Transformationsmatrix der Spannungen
$[T_\sigma]^{-1}$	Inverse der Transformationsmatrix der Spannungen (Rücktransformation)
$[Z_{ijkl}]$	Koeffizientenmatrix
$\{K\}$	Vektor der je Volumeneinheit eingepprägten äußeren Kräfte
$\{m\}$	Momentenvektor
$\{n\}$	Schnittkraftvektor
$\{\epsilon\}$	Vektor der Verzerrungen
$\{\epsilon_o\}$	Vektor der Verzerrungen der Mittelfläche
$\{\epsilon_M\}$	Vektor der hygroskopischen Verzerrungen
$\{\epsilon_T\}$	Vektor der Temperaturverzerrungen
$\{\kappa\}$	Vektor der Plattenverzerrungen
$\{\sigma\}$	Spannungsvektor

Symbole, Operatoren und Indizes

Δ	LAPLACE-Operator; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
i, j, k, l	Indizes
m, n	Indizes
o, \circ	Bezogen auf die Mittelfläche

Abkürzungen und weitere Bezeichnungen

2D	Zweidimensional
3D	Dreidimensional
8552	Matrixsystem der Firma HEXCEL
AFK	Aramidfaserverstärkte Kunststoffe

BVID	Barrely Visible Impact Damage - „kaum sichtbarer Schaden“
CLT	Classical Laminate Theory - Klassische Laminattheorie
CFK	Kohlenstoffaserverstärkte Kunststoffe
DSC	Differential Scanning Calorimetrie - Dynamische Differenzkalorimetrie
ES	Einzelsschicht
ESZ	ebener Spannungszustand
FEM	Finite Elemente Methode
FSDT	First Order Shear Deformation Theory - Schubdeformationstheorie 1. Ordnung
FVK	Faserverstärkte Kunststoffe
FVKW	Faserverbundwerkstoffe
GFK	Glasfaserverstärkte Kunststoffe
IM7	Kohlenstoffaser
KS	Koordinatensystem
PC	Personal Computer
P-ES	Parallelfaserverstärkte Einzelsschicht
PTFE	Polytetrafluorethylen - Teflon
RT	Raumtemperatur
SV	Schichtverbund
UD	Unidirektional
WIWEB	Wehrwissenschaftliches Institut für Werk-, Explosiv- und Betriebsstoffe

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

Faserverstärkte Kunststoffe (FVK) bestehen im Wesentlichen aus den Komponenten der Verstärkungsfasern, eingebettet in eine Matrix aus duroplastischem oder thermoplastischem Kunststoff. Die Fasern übernehmen dabei die Funktion ähnlich eines Seils, das auf Zug aber zunächst nicht auf Druck belastbar ist. Erst die Matrix behindert die Fasern am Ausknicken, so daß der Verbund auch Drucklasten ertragen kann. Krafteinleitung in den Werkstoff, Kraftübertragung zwischen den Fasern, Sicherung der geometrischen Gestalt und der Schutz der Fasern vor äußeren Einflüssen sind die weiteren zu nennenden Hauptaufgaben der Matrix. Der Vorteil von FVK besteht in der Möglichkeit einer gerichteten Bauweise. Durch die Anordnung der Fasern und durch einen gezielten Schichtaufbau können die Eigenschaften des Verbundes in einem weiten Bereich „eingestellt“ werden. Die dabei erzielbaren spezifischen Steifigkeiten und Festigkeiten liegen höher als die hochlegierter Stähle. Diese Besonderheiten machen die FVK attraktiv für die Anwendung in der Luft- und Raumfahrttechnik. Neben den Vorzügen der faserverstärkten Kunststoffe gibt es allerdings auch eine Anzahl an materialtypischen Problemen. Ein erheblicher Nachteil im Vergleich zu den klassischen Metallen besteht in der geringen Impacttoleranz der FVK. Transversale Schlagbeanspruchungen rufen bei duktilen Werkstoffen überwiegend plastische Verformungen hervor, während der Faserverbund vergleichsweise spröde auf diese Belastungsformen reagiert. Die Folge sind großflächige Schichttrennungen, sogenannte Delaminationen, die die Druckfestigkeit und Schwingfestigkeit des Laminates deutlich verringern. Faserverstärkte Strukturen müssen aus diesem Grund nach wie vor über aufwendige Versuchsreihen gegen Querschlagschäden, die z. B. aus Vogel-, Hagel- oder Steinschlag, fallengelassenem Werkzeug oder Beschuß resultieren, qualifiziert werden. In Standardimpactversuchen wird dabei an planen Probenkörpern deren Impacttoleranz unter genormten Bedingungen getestet [59, 60, 61, 69, 72]. Der geometrische Einfluß und die dominierenden mechanischen Mechanismen auf das Schädigungsverhalten der Faserverbunde unter Schlagbeanspruchung sind dabei noch weitestgehend unerforscht. Vorversuche zeigen jedoch einen erheblichen Einfluß der Probekörperkrümmung auf das Impactverhalten [14, 16, 53]. Die meisten realen Strukturen weisen eine Krümmung auf, so daß sich die im Experiment an planen Probenkörpern ermittelten Impacttoleranzen nur eingeschränkt übertragen lassen. Die Folge dieser Unsicherheit ist oftmals eine Überdimensionierung gefährdeter Bauteile, womit solche Strukturen nicht

mehr den Anforderungen des Leichtbaus genügen.

1.1.1 Aspekte der Modellbildung

Als ein Beispiel für Strukturelemente mit schwacher Krümmung können die Rumpf- oder die Flügelbeplankungen eines Luftfahrzeuges gesehen werden. Hierbei ist der Begriff der schwachen Krümmung für Bereiche wie der Flügelvorderkante nicht oder nur eingeschränkt gültig. Im folgenden werden Krümmungsradien von $189\text{mm} \leq r \leq 564\text{mm}$ bei Wandstärken von $h = 4\text{mm}$ betrachtet. Aufgrund der Komplexität ist es aber nicht zielführend, die Gesamtstruktur eines Luftfahrzeuges zu modellieren und zu untersuchen. Vielmehr ist die Fragestellung nach dem Impactverhalten schwach gekrümmter Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen an einer repräsentativen Substruktur zu studieren. Die Ersatzsteifigkeit der Anschlußstruktur muß dabei durch eine geeignete Wahl der Randbedingungen berücksichtigt werden. Durch eine quasi-feste Einspannung oder die gefederte Lagerung einer Teststruktur lassen sich verschiedene Ersatzsteifigkeiten realisieren. Die in den Versuchseinrichtungen des Wehrwissenschaftlichen Instituts für Werk-, Explosiv- und Betriebsstoffe (WIWEB) in Erding zur Verfügung gestandene instrumentierte Fallbolzenanlage (s. Kap. 6.2) erlaubte dabei nur die Untersuchung verhältnismäßig kleiner Probekörper mit einer seitlichen Abmessung von $150\text{mm} \times 100\text{mm}$. Um auch den Vergleich zu den oben genannten genormten Impacttests zu ermöglichen, wurden für die Untersuchungen die Seitenabmessungen der Probekörper in Anlehnung an die DIN 65561 [69] und die DIN EN 6038 [72] als Ausgangsgeometrie gewählt. Die Krümmung realer Strukturen wurde dabei durch einlamierte Kugelsegmente unterschiedlicher Krümmungsradien modelliert (s. Kap. 6.1.3). Diese Vorgehensweise ermöglicht es, im Rahmen genormter und erprobter Testbedingungen den Einfluß der unterschiedlichen Krümmungen auf das Impactverhalten von Platten aus faserverstärkten Kunststoffen zu untersuchen. Die Wahl dieser Ersatzgeometrie schränkt aber auch den direkten Vergleich mit der Gesamtstruktur eines Luftfahrzeuges ein und ist als ein grundsätzliches Problem der Modellbildung zu verstehen.

1.2 Stand der Technik

Im Vergleich zu Metallen zeigen Faser-Matrix-Verbundwerkstoffe unter Schlagbeanspruchung ein relativ sprödes Materialverhalten. Charakteristisch ist daher, daß das Material bei einer Schlagbeanspruchung im Inneren geschädigt wird. Die in den Werkstoff eingebrachte Schlagenergie wird dabei vornehmlich durch Reißbildung dissipiert. In Abhängigkeit von der Schadenstoleranz des Werkstoffs entstehen dabei Delaminationen überwiegend zwischen den Lagen unterschiedlicher Faserorientierung. Unter Schadenstoleranz versteht man dabei die Fähigkeit eines Bauteils, bis zu einem bestimmten Ausmaß Fehlstellen oder Schädigungen, welche bei der Herstellung oder während des Betriebs entstehen können, zu ertragen, ohne daß die Sicherheit des Bauteils gefährdet wird. Die Schadenstoleranz kann dabei sowohl durch konstruktive Maßnahmen als auch durch die Wahl des Werkstoffs verbessert werden [96]. Als typische Schädigungsformen sind die Durchtrennung von einzelnen oder mehreren Fasern, der sogenannte Faserbruch (Abb. 1.1 (d)), die Trennung parallel verlaufender Fasern in einer Einzelschicht (Abb. 1.1 (a)), der intralaminare Reiß, und die flächige Trennung

zueinander gedrehter Faserschichten, die als interlaminare Risse oder als Delaminationen bezeichnet werden (Abb. 1.1 (b)), zu nennen. Seltener sind translaminare Risse, die mehrere Schichten durchtrennen (Abb. 1.1 (c)).

1.2.1 Schädigungsverlauf unter Impact-Belastung

Der Schädigungsverlauf eines Faserverbundes unter Impact-Belastung kann über mehrere Teilschritte beschrieben werden [6, 41, 109]. Die lagenweise unterschiedlich orientierte Monotropie der parallelfaserverstärkten Einzellagen des Verbundes führt unter Impact zu Belastungsunstetigkeiten im Laminat mit einem komplexen dreidimensionalen Spannungszustand. Reißauslösend ist die zur Faserlängsrichtung orthogonale Zugbeanspruchung in der

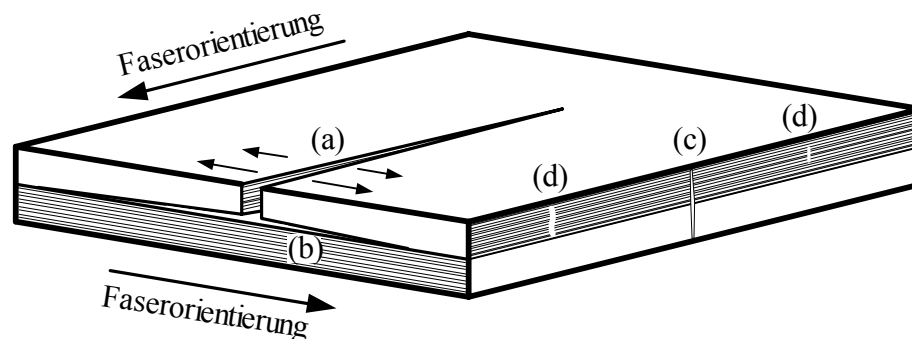


Abbildung 1.1: Schadensverlauf: (a) faserparalleler, intralaminarer Riß, (b) flächiger, interlaminarer Riß (Delamination), (c) translaminarer Riß, (d) Faserbruch.

Einzelschichtebene [8, 9, 47, 52]. Diese führt aufgrund der Überschreitung zulässiger Dehnung der Matrix zwischen zwei Einzelfasern zu frühzeitigem Versagen der Matrix [79]. Der hieraus resultierende intralaminare Riß wächst bei ansteigender Belastung zur Grenzschicht zweier zueinander gedrehter Lagen (Abb. 1.1 (a)). Der an dieser Stelle vorherrschende Steifigkeitssprung an den Lagen infolge der Änderung der Faserorientierung erzwingt durch lokale Spannungs- und Dehnungsüberschreitungen einen Reißfortschritt zwischen den Lagen [77]. Dieses interlaminare Schadenswachstum in Form der flächigen Trennung von benachbarten Schichten wird als Delamination bezeichnet (Abb. 1.1 (b)). Nach FRIEDRICH [25] können die Delaminationen aufgrund von interlaminaren Zug- und Schubspannungen bzw. -verzerrungen weiter wachsen. Neben dem reinen Delaminationswachstum kommt es aufgrund der weiterhin vorhandenen Belastungsmodi und der fehlenden stützenden Wirkung der Nachbarschichten zu neuen, kleineren intralaminaren Rissen senkrecht zu den Delaminationen [8, 9]. Für gewebeverstärkte Schichten oder 3D-verstärkte Lamine lassen sich ähnliche aber weniger anschauliche Mechanismen finden.

1.2.2 Impactgeschwindigkeit

Die Begriffe Nieder-, Mittel- und Hochgeschwindigkeitsimpact lassen sich nicht klar voneinander abgrenzen. Im Allgemeinen geht man jedoch davon aus, daß es sich bei Impactge-

schwindigkeiten unterhalb von 20m/s bei kohlenstoffaserverstärkten Kunststoffen (CFK) eher um einen Niedergeschwindigkeitsimpact handelt [12], während bei Geschwindigkeiten oberhalb von 100m/s von einem Hochgeschwindigkeitsimpact gesprochen wird [7, 54]. Dazwischen kann der Bereich als Mittengeschwindigkeitsimpact bezeichnet werden. Ausschlaggebend für diese Geschwindigkeitsklassifizierung des Impacts ist aber die werkstoffabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung im Bauteil. Eine schematische Darstellung findet sich hierzu bei CANTWELL et al. [7] (s. Abb. 1.2). Wird eine Struktur im unteren

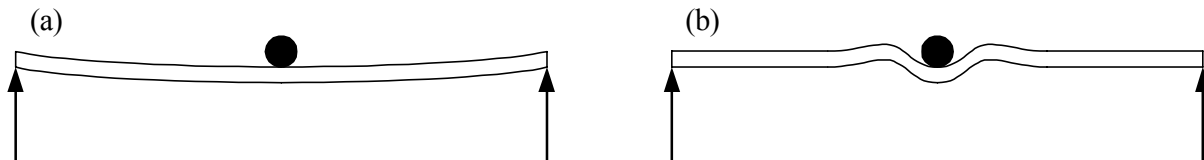


Abbildung 1.2: (a) Niedergeschwindigkeitsimpact, (b) Hochgeschwindigkeitsimpact; [7].

Geschwindigkeitsbereich durch Impact belastet, so kann sich die Last in die Gesamtstruktur ausbreiten, so daß das Bauteil quasistatisch belastet wird. Bei Stößen mit hohen Geschwindigkeiten findet eine lokal dominierte Belastung der Struktur statt. Bedingt durch die hohe Geschwindigkeit kann sich die Belastung in dem Bauteil nicht schnell genug verteilen und es kommt zu lokalen Überbeanspruchungen. Während beim Niedergeschwindigkeitsimpact die Gesamtstruktur an dem Impact beteiligt wird, wirkt sich die Hochgeschwindigkeitsbelastung zunächst nur auf einen kleinen lokal begrenzten Bereich aus [29]. Der Hochgeschwindigkeitsimpact führt daher bei gleicher Energie zu lokal begrenzten, aber hier zu größeren Schädigungen als im Niedergeschwindigkeitsbereich [42].

1.2.3 Einflußgrößen auf die Schädigung

Die Art und die Größe des Schlagschadens werden durch verschiedene Parameter beeinflusst. Dazu gehören im Wesentlichen die Faser- und Harzeigenschaften, der Laminataufbau, die Schichtdicken, sowie die äußeren Einflüsse, wie die umgebende Feuchtigkeit, die Temperatur, die Impactenergie, die Geschwindigkeit, die Form und die Größe des Impactors, die Randbedingungen und die Größe der nicht gestützten Fläche (Stützfenster).

Interne Einflußgrößen

Die Größe der durch Impact verursachten Delaminationen wird hauptsächlich durch die Biegeverformung beeinflusst und hängt damit neben den Impactparametern von der Faser, vom Laminataufbau, der Dicke der einzelnen Lagen und der Plattengeometrie ab. Es existieren Modelle, die es erlauben die Größe der Delaminationen in Abhängigkeit von den Faserorientierungen zwischen zwei Lagen und deren Lagendicken abzuschätzen [41, 51]. Es zeigt sich, daß mit größer werdendem Orientierungsunterschied zwischen benachbarten Laminatlagen die Schädigungsfläche ansteigt. Neben dem Laminataufbau übt die Dicke der einzelnen Lagen einen entscheidenden Einfluß auf die Impact-Schädigung aus. Bei gleichen Materialeigenschaften und Laminataufbau, jedoch unterschiedlichen Lagendicken, weist das Laminat mit den dickeren Lagen die größere delaminierte Fläche auf. Diese Einflüsse

bestätigt MORLO in [54]. MORLO führte Untersuchungen zur Bestimmung des Einflusses der Prepregdicke, des Stützfensters und der äußeren Spannungen an verschiedenen Materialien auf das Schadensverhalten im Niedergeschwindigkeitsbereich durch. Eine Vergrößerung der Prepregdicke bei vergrößerter Biegesteifigkeit und gleicher Dehnsteifigkeit der Probenkörper führte zu einer größeren Schadensfläche und reduzierter Restdruckfestigkeit. Bei kleineren Stützfenstern setzt der äußere sichtbare Schaden früher ein, wogegen die Restdruckfestigkeit unbeeinflusst bleibt. Der Einfluß der Faserorientierung auf das Impactverhalten wird vor allem an vernähten Laminaten deutlich. Dabei läßt sich eine Abnahme der Schädigungsfläche gegenüber den unvernähten Laminaten nachweisen. Als mögliche Ursache wird die deutliche Zunahme der interlaminaren Bruchzähigkeit aufgrund der die Laminatlagen durchdringenden Nähfäden angegeben [49].

Faserwerkstoff

Den Einfluß des Faserwerkstoffs auf das Impact-Verhalten differenziert zu beurteilen ist schwierig, da sich die untersuchten Laminatsysteme trotz identischem Harzsystem meist im Laminataufbau und/oder dem Faservolumengehalt unterscheiden. ALTSTÄDT et al. [4] zeigen jedoch in einer grundlegenden Untersuchung, daß der Einfluß des Fasertyps, bei identischer Matrix und gleichem Laminataufbau, auf die Restfestigkeit nach Schlagbeanspruchung relativ gering ist. Dagegen ist ein deutlicher Einfluß der Faser auf die Größe der sich bildenden Schädigungsfläche zu beobachten, jedoch kann kein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Fasereigenschaften und der Größe der Schädigungsflächen hergestellt werden. Zudem zeigt sich, daß Glasfaserlaminat im Allgemeinen ein deutlich besseres Impact-Verhalten aufweisen als vergleichbare kohlenstoffaserverstärkte Laminat. Dies läßt sich auf Unterschiede der interlaminaren Festigkeiten zurückführen, die wiederum vom Werkstoffaufbau (Glas- oder Kohlenstoffaser) abhängen.

Matrixwerkstoff

Ein Zusammenhang zwischen dem Impact-Verhalten und den Eigenschaften der Matrix kann relativ sicher hergestellt werden. Es zeigt sich, daß mit zunehmender Reinharzzähigkeit, d. h. mit steigenden Bruchzähigkeitskennwerten der Matrix, sowohl die Schädigungsflächen abnehmen als auch die Restfestigkeitswerte der geimpacteten Probenkörper zunehmen. Dabei existiert die Modellvorstellung, daß bei einem zähen Harz die Energie mehr durch Deformation der Matrix als durch die Schaffung freier Oberflächen umgesetzt wird [4].

Bruchzähigkeit des Laminatsystems

Die Bruchzähigkeit ist ein Maß für den Widerstand eines Werkstoffs gegen Rißausbreitung. Die Beanspruchungen eines rißbehafteten Bauteils werden in der Bruchmechanik bezüglich der Rißfortschrittsrichtung an der Rißspitze bzw. -front beschrieben, hergeleitet und der Zusammenhang mit der Rißausbreitung ermittelt. Sie können in drei Grundbeanspruchungen aufgeteilt werden: Normal-, Längsschub- und Querschubbeanspruchung. Diese werden als Mode I, II und III bezeichnet. In der Arbeit von HEUTLING [41] wurde ein Zusammenhang zwischen den interlaminaren Mode-II-Bruchzähigkeitswerten und der Schadenstoleranz gegen Impact gefunden. Dabei kann ein Probekörper bei Schlagbeanspruchung als Platte angesehen werden, die beim Aufprall des Schlagkörpers eine Biegung erfährt [4]. In Folge der Durchbiegung treten dabei erhebliche interlaminare Schubspannungen auf, vergleichbar mit

einer Belastung unter Mode-II-Beanspruchung. Dabei kommt es bevorzugt zu interlaminarer Rißausbreitung zwischen zwei Lagen mit unterschiedlicher Orientierung [41].

Einfluß der geometrischen Größen

Daß ein direkter Zusammenhang zwischen dem Verhalten unter Schlagbeanspruchung und den äußeren geometrischen Abmessungen der belasteten Probekörper besteht, konnten GOLOVOY et al. in [33] anhand von Schlagbiegeversuchen unidirektionaler, glasfaserverstärkter Dreipunkt-Biegeproben nachweisen. ber eine Variation der Auflagerabstnde konnte das Längen-Dicken-Verhältnis der untersuchten Proben auf einfache Weise geändert werden. Dadurch war es möglich, in den Proben eine überwiegende Schub- oder eine überwiegende Zug-Druck-Belastung durch die Schlagbeanspruchung zu realisieren. Dabei zeigte sich, daß die zum Initiieren eines Bruchs notwendige Impact-Energie, mit zunehmendem Längen- zu Dickenverhältnis, d. h. mit zunehmender Zug-Druck-Beanspruchung der Probe deutlich ansteigt. Erste Untersuchungen zur Impacttoleranz zylindrischer Faserverbundbauteile führten CHRISTOFOROU et al. [10] durch. Der Einfluß der Strukturkrümmung wird bei den Arbeiten von LUI et al. [52] an gebogenen FVK-Balken und von MAIER [53] bei thermomechanisch behandelten und dadurch schwach gekrümmten CFK-Impactprobenkörpern deutlich.

Umweltfaktoren

Wird ein faserverstärkter Kunststoff einer natürlichen Umgebung ausgesetzt, so sind vor allem die Temperatur, die Feuchtigkeit und die Zeit bestimmende Faktoren für die Eigenschaftsveränderungen des Werkstoffs. Im Gegensatz zur Feuchteaufnahme findet die Durchwärmung eines faserverstärkten Kunststoffverbundes sehr viel schneller statt und kann somit annähernd als homogen im Innern einer dünnen Probe betrachtet werden. Demgegenüber ist der zeitliche Einfluß bei der Betrachtung der Feuchteaufnahme, d. h. die Einwirkdauer, von Bedeutung [1, 99].

Einfluß der Temperatur

Der Einfluß unterschiedlicher Temperaturen auf das mechanische Verhalten von Hochleistungsverbundwerkstoffen ist relativ gut untersucht [99]. Änderungen im mechanischen Verhalten aufgrund einer Temperatureinwirkung können dabei auf unterschiedliche Ursachen zurückgeführt werden:

- Erweichung und thermischer Abbau des Matrixmaterials,
- Bildung von Rissen und Delaminationen im Laminat aufgrund der thermischen Ausdehnung,
- Nachvernetzungsvorgnge im Matrixsystem,
- Veränderungen im Feuchtegehalt des Laminats,
- Abbau der Interphase und Abbau der Fasereigenschaften.

Impactversuche bei verschiedenen Temperaturen unterhalb der Glasübergangstemperatur des Matrixsystems zeigen, daß die Schädigungen im Werkstoff bis zur Schmelz- bzw. Zersetzungstemperatur mit steigender Temperatur abnehmen [96]. Dies wird auf eine Zunahme der Bruchzähigkeit der Matrix mit steigender Temperatur zurückgeführt.

Einfluß der Feuchtigkeit

Der Einfluß von Feuchtigkeit auf das Impact-Verhalten ist sehr differenziert zu beurteilen: Einerseits kommt es durch die mit der Aufnahme der Feuchtigkeit verbundenen Erweichung der Matrix im Allgemeinen zu einem Anstieg der zum Initiieren des Bruchs notwendigen Energie. Andererseits tritt vor allem bei glasfaserverstärkten Systemen, aufgrund der Abnahme der Festigkeit der Fasern und der Verringerung der Festigkeit und Steifigkeit der Interphase und der Matrix, eine Reduzierung des Energieaufnahmevermögens auf [41, 99]. Wie bereits oben beschrieben, stellt die Einwirkdauer einen wesentlichen Faktor bei der Betrachtung der Feuchteaufnahme und der daraus resultierenden Materialdegradationen dar.

1.2.4 Mechanische Modellierung

Plattenmodellierung

Da das intra- und interlaminare Versagen maßgebend für das Schädigungsverhalten der Gesamtstruktur ist (Kap. 1.2.1), kann auf eine dreidimensionale Spannungsermittlung verzichtet werden. Für die Beschreibung der Durchbiegung ebener flächenförmiger Strukturen gibt es u. a. verschiedene analytische Ansätze. Ein grundlegender Ansatz für die Berechnung eines ebenen, isotropen Flächentragwerkes ist z. B. die KIRCHHOFFSche Plattentheorie. Die vereinfachten Annahmen dieser Theorie erlauben dabei die Analyse isotroper, schubstarrer Platten [37, 101]. Mit diesem Ansatz lassen sich die Biegefläche sowie ein Teil der Schnittspannungen berechnen. Da die FVK im Vergleich zu vielen Metallen als schubweich zu bezeichnen sind, ist die Annahme der Schubstarrheit der KIRCHHOFFSchen Theorie für bestimmte Dickenverhältnisse jedoch nicht ausreichend. Als Beispiele für erweiterte Plattentheorien, die die Schubbeanspruchung des ebenen Flächentragwerkes berücksichtigen, sind die Ansätze von HENCKY und MINDLIN [18, 37] sowie REISSNER [18, 88] zu nennen. Mit diesen Theorien läßt sich das Spannungs- und Verzerrungsfeld der schubweichen Platte ermitteln.

Stoßmodellierung

Neben der Berechnung der Plattendurchbiegung statisch belasteter Strukturen kann nach einem Ansatz von SZABO [101] auch die Maximaldurchbiegung einer isotropen Platte unter Stoßbelastung approximiert werden. Als grundlegendes Stoßmodell zur Beschreibung der Interaktion zwischen Impactor und Ziel wäre das HERTZSche Kontaktmodell [40] zu nennen, das sich auf zwei kugelförmige, isotrope Körper beschränkt. TAN et al. [102] und LEE et al. [50] liefern einen erweiterten Ansatz der HERTZSchen Kontakttheorie, der die Ermittlung des Stoßkraft-Zeit-Verlaufes quasiisotroper, elastischer Impactvorgänge bei FVK im Niedergeschwindigkeitsbereich ermöglicht.

Versagensmodellierung

Neben der reinen Strukturantwort der durch einen Stoß belasteten Platte ist ab dem Schädigungsschwellwert der Probe die Beschreibung des Impactschadens erforderlich. Hierfür ist die Einführung von Versagenskriterien notwendig, die bei den verschiedenen Modellen in der Formulierung unterschiedlicher Lastfälle variieren. Generell lassen sich zwei Beschreibungsgruppen anführen:

1. Nicht-interaktive Modelle wie z. B. das Spannungsmaximum-Kriterium ohne Differenzierung zwischen Faser- und Matrixversagen und
2. interaktive Modelle wie z. B. das Modell nach HASHIN [39] und CHOI et al. [8, 9], das zwischen Faser- und Matrixversagen unterscheidet.

Die erste Modellgruppe setzt das sofortige Versagen der Schicht bei Erreichen eines Kriteriums voraus und berücksichtigt nicht, daß im Umfeld des initiierten Schadens die Nachbarlagen einen Teil der Last mittragen. Modelle, die diesen Effekt mit einbeziehen, werden als CDM (Continuum Damage Model) bezeichnet [109]. Der Abfall der Schichtsteifigkeit erfolgt in der Realität abgestuft. Durch Berücksichtigung dieses Materialverhaltens ist es prinzipiell möglich, Werkstoffmodelle zu entwickeln, die sich in ein Finite-Element-Programm implementieren lassen, wodurch die numerische Simulation des Schädigungsablaufs, der Schadensstruktur und -fläche möglich ist. Die Generierung geeigneter Werkstoffmodelle erforderte jedoch bisher immer die Anpassung an die experimentellen Ergebnisse durch nicht-physikalische Parameter [109]. Mit dem Finite-Element-Programm *ANSYS Structural* kann lediglich das erste Versagen eines Verbundes (First Ply Failure) numerisch berechnet werden. Die Simulation der Rißausbreitung ist mit diesem Programm aber nicht möglich. Bis zu den Programmversionen *6.x* wurden die Querschubbelastungen bei Schichtverbunden nicht immer fehlerfrei berechnet, so daß abhängig von den Dickenverhältnissen und den Randbedingungen die Biegesteifigkeiten der Laminatplatten nicht in allen Fällen korrekt ermittelt wurden.

1.3 Zielsetzung und Vorgehen

Ziel dieser Arbeit ist es, den Geometrieinfluß schwach gekrümmter Probenkörper auf das Impactverhalten faserverstärkter Kunststoffplatten zu untersuchen. Dabei besteht die wesentliche Eigenleistung in einer möglichst allgemeingültigen Abbildung der oben genannten Fragestellung im Experiment und deren Analyse. Hierzu werden, ausgehend von den Standardimpactversuchen an planen Probenkörpern, Kugelsegmente in Impactprobenkörpern aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff laminiert und definierten transversalen Schlagbeanspruchungen ausgesetzt. Das Schädigungsverhalten des Verbundes wird in Abhängigkeit unterschiedlicher Geometrien und Impactenergien untersucht (s. Kap. 6). Ausgewertet werden die Ergebnisse aus dem Kraft-Zeit-, Weg-Zeit- und Energie-Zeit-Verlauf des Impacts als auch aus den mikroskopischen Analyseverfahren (s. Kap. 7). Die im Versuch vorliegende Beanspruchung wird mit analytischen zweidimensionalen Schichtmodellen abgebildet. Zur Hinführung auf eine Problemlösung werden im Kapitel 2 die Zusammenhänge der linearen anisotropen Elastizität und im Kapitel 3 ausgewählte Plattentheorien betrachtet. Über die Beschreibung des Faserverbundes im Kapitel 4 mit Hilfe der Klassischen Laminattheorie (Classical Laminate Theory - CLT) und der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (First Order Shear Deformation Theory - FSDT) soll der sich beim Impact ausbildende Spannungszustand und das daraus bei Überbeanspruchung resultierende Versagen diskutiert werden (s. Kap. 8). Ergänzend wird an einem achsensymmetrischen, dreidimensionalen Finite-Element-Modell der dreidimensionale Spannungszustand betrachtet (s. Kap. 8.7). Mit Hilfe dieser Vorgehensweise ist der Geometrieinfluß auf das Impactverhalten faserverstärkter Kunststoffe phänomenologisch zu beschreiben und zu klären.

Kapitel 2

Lineare anisotrope Elastizität

Die lineare anisotrope Elastizität beschreibt das Materialverhalten anisotroper Körper und stellt somit den allgemeinsten Fall der Werkstoffeigenschaften dar. Zunächst werden die Gleichungen für das HOOKEsche Gesetz am Beispiel eines isotropen Körpers aufgestellt, der als Spezialfall der Anisotropie gesehen werden kann. Im weiteren werden die allgemeinen Gleichungen linearer anisotroper, monotroper, orthotroper, transversalisotroper und isotroper Materialien eingeführt (s. a. ALTENBACH et al. [3], EMMERLING [17], FAHLBUSCH [22], GEBBEKEN [28, 31], GROSS et al. [36], R. M. JONES [46], REDDY et al. [86]).

2.1 Das HOOKEsche Gesetz des isotropen Körpers

2.1.1 Materialgesetz

Das HOOKEsche Gesetz beschreibt das Materialverhalten belasteter Körper im linearen Bereich. Lasten können z. B. durch Kraft, Temperatur oder Feuchtigkeit eingepreßt werden. Im folgenden sollen die Temperatur- und Feuchtigkeitseinflüsse vernachlässigt werden. Die Last ruft als Reaktion Verzerrungen in dem Material hervor, die nach Dehnungen, Stauchungen und Gleitungen unterschieden werden. Bei einer Dehnung oder bei einer Stauchung ändert der betrachtete Körper seine Abmessungen und somit sein Volumen, aber nicht seine Gestalt. Bei einer Gleitung ändert der Körper seine Gestalt, jedoch nicht sein Volumen (s. a. Abb. 2.1). Dehnung und Stauchung eines Körpers berechnen sich aus dem Verhältnis der Längenänderung des Körpers zu seiner Ausgangs- oder Grundlänge:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.1)$$

Die Gleitung γ wird bestimmt durch die Winkeländerung des deformierten Körpers:

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\Delta v}{l_0}. \quad (2.2)$$

In der Abbildung 2.1 sind die Verzerrungsarten als Folge einer Belastung dargestellt. Im folgenden wird der Einfachheit halber von Längsverzerrung (Dehnung, Stauchung) und

Gleitung gesprochen. Die Normalspannung wird bestimmt durch die auf eine Ausgangsfläche A_0 wirkende Kraft F :

$$\sigma = \frac{F}{A_0}. \quad (2.3)$$

Die Schubspannung ist der Quotient von Tangentialkraft T und Grundfläche A_0 :

$$\tau = \frac{T}{A_0}. \quad (2.4)$$

Der Zusammenhang zwischen den Spannungs- und Verzerrungs-Größen wird durch die Ma-

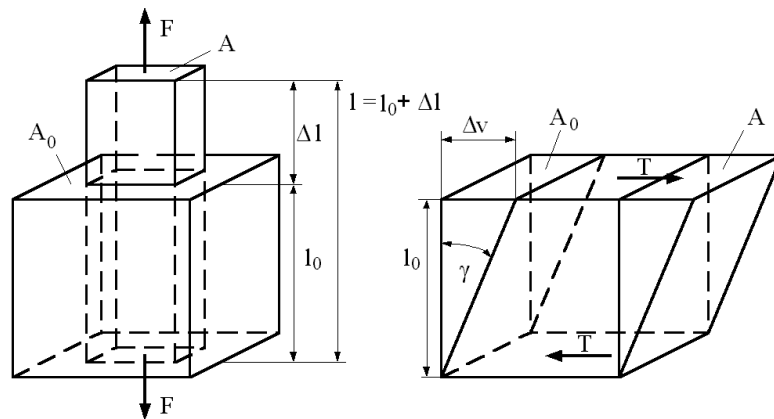


Abbildung 2.1: Längsverzerrung ε und Gleitung γ eines Körpers der Länge l_0 und des Querschnitts A_0

terialgleichung bestimmt. Diese läßt sich allgemein in matrizieller Form schreiben als

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}. \quad (2.5)$$

Die Matrix $[C]$ wird als Stoffmatrix bezeichnet, die in dieser Darstellung einer Steifigkeitsmatrix entspricht. Für den einfachsten Fall der Materialgleichung, für eindimensionale lineare Isotropie, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\sigma = E\varepsilon \quad E \text{ ist der Elastizitätsmodul oder YOUNGSche Modul,} \quad (2.6)$$

$$\tau = G\gamma \quad G \text{ ist der Schub- oder Gleitmodul.} \quad (2.7)$$

Isotropie bezeichnet ein richtungsunabhängiges Materialverhalten. Hierbei reduzieren sich die Matrizen zu Skalaren und das Gleichungssystem verringert sich auf zwei Gleichungen. Zwischen dem Elastizitätsmodul E und dem Gleitmodul G des isotropen Körpers existiert der Zusammenhang:

$$E = 2(1 + \nu)G. \quad (2.8)$$

Bei der Belastung eines Körpers mit der Normalkraft F tritt neben der Längsverzerrung ε in Kraftlängsrichtung noch eine Querverzerrung ε_q senkrecht zur Krafrichtung auf. Wirkt

auf einen isotropen Körper nach Abbildung 2.2 die Zugspannung σ_x , so erfährt der Körper eine Dehnung ε_x in Belastungsrichtung und eine Stauchung ε_q bzw. ε_y orthogonal hierzu:

$$\varepsilon_q = \frac{b - b_0}{b_0} = \frac{(b_0 + \Delta b) - b_0}{b_0} = \frac{-\Delta b}{b_0}. \quad (2.9)$$

Der Zusammenhang zwischen beiden Verzerrungsgrößen wird mit Hilfe der POISSON- bzw. Querdehnungszahl

$$\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_x} \quad (2.10)$$

beschrieben. Die Normalverzerrung in x -Richtung ergibt sich aus einer Belastung in x -Richtung

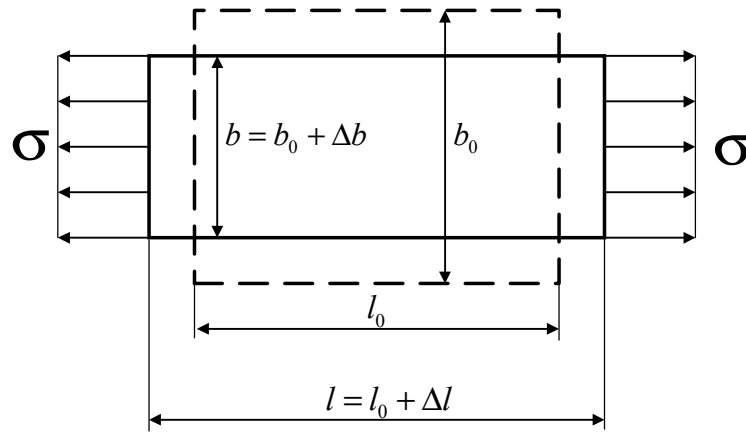


Abbildung 2.2: Isotroper Probenkörper unter einachsiger Belastung

und einer möglichen weiteren Belastung in y -Richtung. Dieser Zusammenhang kann mit Hilfe der Gleichungen (2.6) beschrieben werden durch

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.11)$$

und mit (2.10) durch

$$\varepsilon_x = -\nu \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E}. \quad (2.12)$$

Für isotropes Material ergeben sich damit zwei unabhängige Materialkonstanten; der Elastizitätsmodul E bzw. der Gleitmodul G und die Querkontraktionszahl ν (s. Gl. (2.8)). Das HOOKESche Gesetz lautet für den zweidimensionalen Fall

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \quad (2.13)$$

Berücksichtigt man die Verzerrungen im dreidimensionalen Fall unter mechanischer Belastung, so lautet das HOOKESche Gesetz für die lineare isotrope Elastizität

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}, \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Die Gleichung (2.14) kann matriziell geschrieben werden als

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{2.15}$$

bzw.

$$\{\varepsilon\} = [E]^{-1}\{\sigma\} = [S]\{\sigma\} \tag{2.16}$$

Für die Spannungen und Verzerrungen sind in der Literatur verschiedene Schreibweisen gebräuchlich:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}. \tag{2.17}$$

Die Abbildung 2.3 zeigt die Wirkungsrichtung der positiv definierten einzelnen Spannungskomponenten für den dreidimensionalen Fall, wie sie in Gleichung (2.17) dargestellt sind. Für die Verzerrungsgrößen finden folgende Schreibweisen Anwendung:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}. \tag{2.18}$$

2.1.2 Kinematische Beziehungen

Bei der allgemeinen Belastung eines Körpers treten, wie oben besprochen, Verzerrungsgrößen auf, die die Punkte einer gedachten Linie des unbelasteten Körpers nicht nur in den Abständen zueinander sondern auch in ihrer Lage zur Ausgangsposition verändert. Der Körper erfährt somit nicht nur eine Verzerrung ε , sondern auch eine Verschiebung u seiner einzelnen Partikel. Hierbei sind Verschiebungsanteile enthalten, die nicht Spannungen

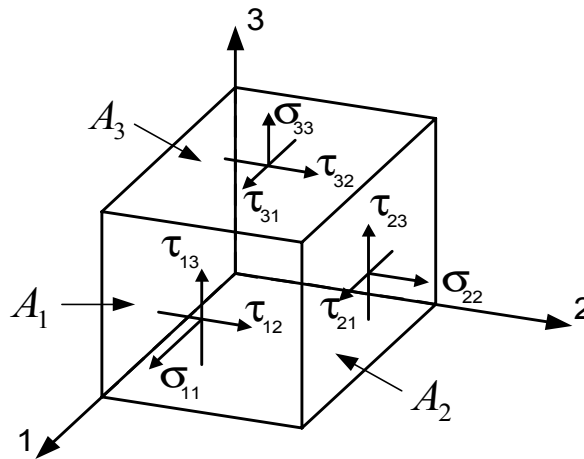


Abbildung 2.3: Spannungen an einem infinitesimalen Würfel mit den Seitenlängen dx , dy und dz .

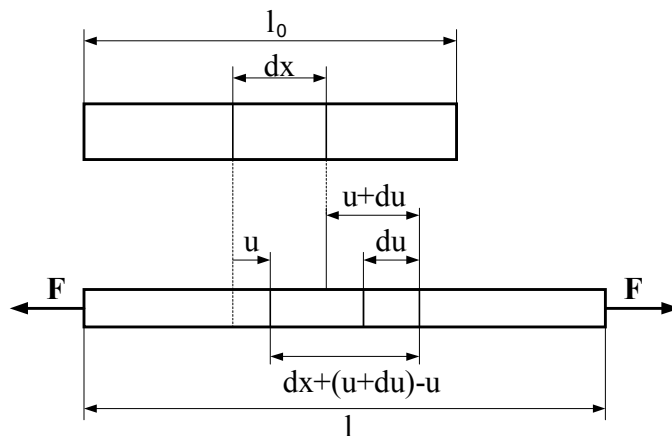


Abbildung 2.4: Dehnung eines Stabes unter der Zuglast F

erzeugen; die sogenannten Starrkörperverschiebungen. Der Zusammenhang zwischen Verzerrung und Verschiebung läßt sich mit Hilfe der kinematischen Beziehungen herstellen; den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen. Die Abbildung 2.4 zeigt einen Stab, der mit der Kraft F belastet wird. Unter der Last wird ein infinitesimal kleines Stück dx des Stabes um die Größe du gelängt. Aus der Betrachtung der einzelnen Verschiebungspunkte läßt sich die neue Länge $d\bar{x}$ ablesen:

$$d\bar{x} = dx + (u + du) - u = dx + du . \tag{2.19}$$

Somit kann die Dehnung über die Verschiebung unter Berücksichtigung der Gleichung (2.1) notiert werden als

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{d\bar{x} - dx}{dx} = \frac{dx + du - dx}{dx} = \frac{du}{dx} . \tag{2.20}$$

Die Dehnungen lassen sich für die drei Richtungen x , y , z schreiben als

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.21)$$

Die obigen Gleichungen gelten analog für Stauchungen. Die Abbildung 2.5 zeigt die Gleitungsbeziehungen in der Ingenieur- und Tensorschreibweise. Analog zur Gleichung (2.21) können

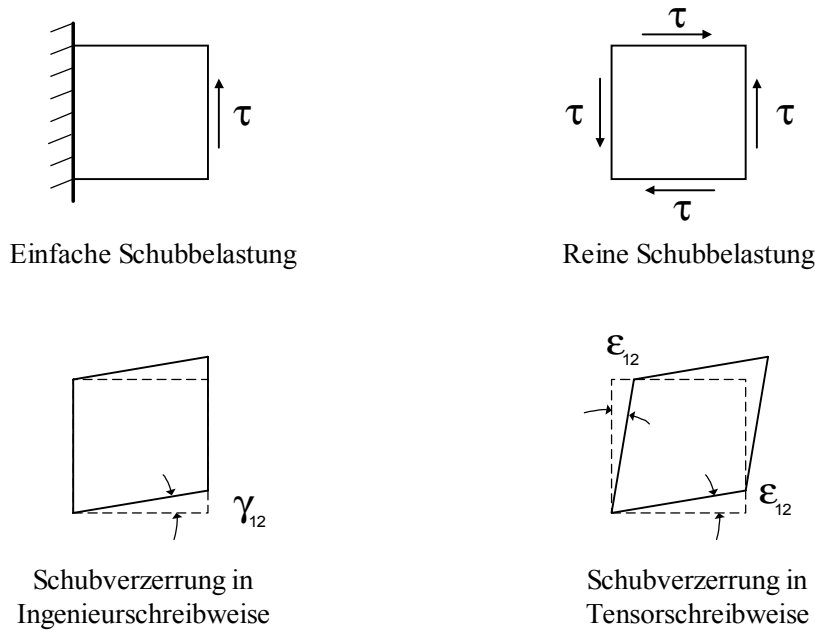


Abbildung 2.5: Schubverzerrungen in Ingenieur- und Tensorschreibweise

die Gleitungen dargestellt werden als

$$\varepsilon_4 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_5 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_6 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.22)$$

Unter Beachtung der Gleichung (2.18) lassen sich die Gleichungen (2.21) und (2.22) auch in tensorieller Schreibweise zusammenfassen:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i). \quad (2.23)$$

2.1.3 Lokale Bewegungsgleichung

Für den dynamischen Fall lassen sich die erweiterten Gleichgewichtsbeziehungen ausgehend vom Newtonschen Grundgesetz

$$F = ma \quad (2.24)$$

herleiten (EMMERLING [17], FRISCHBIER [26]). Voraussetzung ist die Existenz eines homogenen, anisotropen Kontinuums mit makroskopisch gleichen Eigenschaften. Die Abbildung 2.3 zeigt ein aus dem Kontinuum herausgeschnittenes infinitesimales Volumenelement der Dichte

ρ . Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.17) und (2.18) kann das Kräftegleichgewicht mit Hilfe der Gleichung (2.24) gebildet werden. Ausgehend von

$$\Sigma F_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.25)$$

folgt für die x_1 -Richtungen:

$$\frac{\partial \sigma_1}{A_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{A_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{A_3} - \rho dV \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{21}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{31}}{\partial x \partial y} = \rho (dx dy dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.28)$$

Analog folgen die lokalen Bewegungsgleichungen für die x_2 - und x_3 -Richtungen:

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.30)$$

In tensorieller Schreibweise lassen sich die Gleichungen (2.28, 2.29) und (2.30) unter Berücksichtigung von Gleichung (2.17) zusammenfassen zu

$$\partial_j \sigma_{ji} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.31)$$

2.2 Materialsymmetrien

Viele Werkstoffe besitzen ein richtungsabhängiges Materialverhalten, bei denen eine Symmetrie der Materialkennwerte bezüglich einer Achse oder einer Ebene feststellbar ist. In diesem Unterkapitel wird das Materialverhalten für anisotrope, monotrope, orthotrope, transversalisotrope und isotrope Werkstoffe hergeleitet (ALTENBACH et al. [3], EMMERLING [17], GEBBEKEN [31], GROSS et al. [36], JONES [46], REDDY et al. [86]).

2.2.1 Anisotropie

Das allgemeine HOOKEsche Gesetz nach Gleichung (2.5) stellt die dreidimensionale Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für ein allgemeines Material dar:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}.$$

Deren Inversion liefert:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}. \quad (2.32)$$

Die Matrix $[S]$ ist eine Inverse der Stoffmatrix $[C]$ und wird als Nachgiebigkeitsmatrix bezeichnet. Zwischen den Steifigkeitsmatrizen und den Nachgiebigkeitsmatrizen besteht somit der Zusammenhang

$$[C] = [S]^{-1}. \quad (2.33)$$

Für den dreiachsigen Zugversuch läßt sich Gleichung (2.5) in tensorieller Form schreiben als

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, 6). \quad (2.34)$$

Der Spannungstensor σ_{ij} und der Verzerrungstensor ε_{ij} sind Tensoren 2. Stufe mit jeweils 9 Komponenten und der Elastizitätstensor C_{ijkl} ein Tensor 4. Stufe mit 81 Komponenten. Aufgrund der Symmetrie von σ_{ij} und ε_{ij} reduzieren sich die Spannungs- und Verzerrungstensoren zu Tensoren 1. Stufe mit 6 Komponenten wie sie in den Gleichungen (2.17) und (2.18) dargestellt sind. Auch der Elastizitätstensor verringert sich durch die Symmetrieeigenschaft $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$ zu einer (3×3) -Matrix mit 36 Komponenten. Somit folgt aus der Gleichung (2.34):

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (i, j = 1, \dots, 6). \quad (2.35)$$

Bei anisotropen Materialien zeigt sich für jede Betrachtungsrichtung ein unterschiedliches Werkstoffverhalten, so daß alle 36 Komponenten der Steifigkeitsmatrix $[C]$ und der Nachgiebigkeitsmatrix $[S]$ von Null verschieden sind. Es existieren 21 unabhängige Materialkennwerte. Für die Steifigkeitsmatrix kann man somit schreiben

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Für die Nachgiebigkeitsmatrix läßt sich dann schreiben

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} = [C]^{-1}. \quad (2.37)$$

Existiert für das anisotrope Material ein elastisches Potential bzw. eine Verzerrungsenergie-dichtefunktion, so kann die inkrementelle Spannungsarbeit für ein inkrementelles Volumenelement beschrieben werden mit

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i \quad (2.38)$$

Hierbei ergibt sich die elastische Arbeit der Spannung σ_i auf dem Weg der inkrementellen Verzerrung ε_i . Die Gesamtarbeit an einem Volumenelement kann durch Integration der spezifischen Arbeit dW erhalten werden

$$W = \int \sigma_i d\varepsilon_i. \quad (2.39)$$

Mit der Gleichung (2.35) folgt aus (2.39)

$$W = \int C_{ij} \varepsilon_i d\varepsilon_j = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j. \quad (2.40)$$

Die partielle Differentiation von Gleichung (2.40) nach den Verzerrungen $\partial\varepsilon_i$ führt auf das allgemeine HOOKEsche Gesetz nach der Gleichung (2.35)

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j. \quad (2.41)$$

Nochmalige partielle Differentiation liefert den Stofftensor bzw. Steifigkeitsmatrix

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij}. \quad (2.42)$$

Geht man analog dem obigen Vorgehen von der Gleichung

$$dW = C_{ji} \varepsilon_j d\varepsilon_i \quad (2.43)$$

aus, führt die zweifache partielle Differentiation der Integration von Gleichung (2.43) auf die Form

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji}. \quad (2.44)$$

Da die Differentiationsreihenfolge unabhängig ist [31], muß gelten

$$C_{ij} = C_{ji}. \quad (2.45)$$

Die Steifigkeitsmatrix $[C]$ ist somit symmetrisch und besitzt folglich nur 21 unabhängige Konstanten. Sie läßt sich dann schreiben in der Form

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Für die Nachgiebigkeitsmatrix folgt

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

2.2.2 Monotropie

Monotropes bzw. monoklines Materialverhalten ist dadurch charakterisiert, daß eine Symmetrieebene existiert, an der eine Spiegelung aller Kennwerte zu dieser Ebene erfolgt. Die Steifigkeitsmatrix $[C_{mono}]$ und somit auch die Nachgiebigkeitsmatrix $[S_{mono}]$ besitzen 20, $[C_{ij}]$ bzw. $[S_{ij}]$ ungleich Null mit 13 unabhängigen Kennwerten. Monotropes Materialverhalten tritt bei unidirektionalen Faserverbunden auf, wenn keine Koordinatenachse mit der Faserrichtung zusammenfällt. Die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen für monoklines Material schreiben sich in Abhängigkeit ihrer Symmetrieebenen.

$(x_2 - x_3)$ -Ebene, Isotropieebene $x_1 = 0$:

$$[C_{mono}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & sym. & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$[S_{mono}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & 0 \\ & & S_{33} & S_{34} & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & sym. & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$(x_3 - x_1)$ -Ebene, Isotropieebene $x_2 = 0$:

$$[C_{mono}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ & & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & C_{46} \\ & & sym. & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$[S_{mono}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & S_{15} & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & S_{25} & 0 \\ & & S_{33} & 0 & S_{35} & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & S_{46} \\ & & sym. & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$(x_1 - x_2)$ -Ebene, Isotropieebene $x_3 = 0$:

$$[C_{mono}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & sym. & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$[S_{mono}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ & & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$[S_{mono}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{61}}{E_6} \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{62}}{E_6} \\ & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\nu_{63}}{E_6} \\ & & & \frac{1}{E_4} & \frac{\nu_{54}}{E_5} & 0 \\ & & & & \frac{1}{E_5} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{E_6} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

2.2.3 Orthotropie

Im Fall der Orthotropie können im Material zwei bzw. drei zueinander orthogonale Symmetrieebenen gefunden werden, zu denen symmetrische Punkte gleiche Eigenschaften besitzen. Die Steifigkeitsmatrix $[C_{ortho}]$ und die Nachgiebigkeitsmatrix $[S_{ortho}]$ besitzen 12 von Null verschiedene Einträge mit 9 unabhängigen Kennwerten. Die Steifigkeitsmatrix für orthotropes Material schreibt sich

$$[C_{ortho}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

mit

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{(1 - \nu_{23} \nu_{32}) E_1}{\Delta}, \quad C_{12} = \frac{(\nu_{12} - \nu_{13} \nu_{32}) E_2}{\Delta}, \quad C_{13} = \frac{(\nu_{13} - \nu_{12} \nu_{23}) E_3}{\Delta} \\ C_{22} &= \frac{(1 - \nu_{21} \nu_{13}) E_2}{\Delta}, \quad C_{23} = \frac{(\nu_{23} - \nu_{21} \nu_{13}) E_3}{\Delta}, \quad C_{33} = \frac{(1 - \nu_{21} \nu_{12}) E_3}{\Delta} \\ C_{44} &= G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12} \\ \Delta &= 1 - \nu_{21} \nu_{12} - \nu_{32} \nu_{23} - \nu_{13} \nu_{31} - 2 \nu_{21} \nu_{13} \nu_{32} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Für die Nachgiebigkeitsmatrix folgt

$$[S_{ortho}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

bzw.

$$[S_{ortho}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{E_4} = \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{E_5} = \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{E_6} = \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

hierbei sind

E_1, E_2, E_3 die E-Moduli in der 1-, 2-, 3-Richtung,
 $\nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{12}$ die Querkontraktionszahlen und
 G_{23}, G_{31}, G_{12} die Gleitmoduli in der 2-3-, 3-1-, 1-2-Ebene.

Die Querkontraktionszahl ist hierbei definiert als

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.59)$$

Mit der Maxwell-Betti-Beziehung

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (2.60)$$

kann die Steifigkeitsmatrix $[S]$ auch in der Form

$$[S_{ortho}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

geschrieben werden.

2.2.4 Transversalisotropie

Transversalisotropes Materialverhalten ist dadurch gekennzeichnet, daß eine Zentralsymmetrie bezüglich einer Achse existiert und die Steifigkeitsmatrix $[C_{tiso}]$ und die Nachgiebigkeitsmatrix $[S_{tiso}]$ 12 von Null verschiedene Einträge besitzen mit 5 verschiedenen Kennwerten. Für die Steifigkeitsmatrix kann man allgemein schreiben

$$[C_{tiso}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix stellt sich dar in der allgemeinen Form als

$$[C_{tiso}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Transversalisotropes Materialverhalten liegt beispielsweise bei unidirektionalen Faserverbunden vor, wenn eine Koordinatenachse in Faserlängsrichtung zeigt. Senkrecht zur Faser kann dann das Werkstoffverhalten als quasiisotrop angesehen werden. Abhängig von der Symmetrieebene ergeben sich für die C_{ij} , S_{ij} und E_i folgende Zusammenhänge:

$(x_2 - x_3)$ -Ebene, Isotropieebene $x_1 = 0$:

$$C_{22} = C_{33}, \quad C_{12} = C_{13}, \quad C_{55} = C_{66}, \quad C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \quad (2.64)$$

$$S_{22} = S_{33}, \quad S_{12} = S_{13}, \quad S_{55} = S_{66}, \quad S_{44} = 2(S_{22} - S_{23}) \quad (2.65)$$

$$E_1, \quad E_2 = E_3, \quad G_{13} = G_{12}, \quad \nu_{12} = \nu_{13}, \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (2.66)$$

$$[C_{tiso}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$[C_{tiso}] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_{23}^2)E_1}{\Delta} & \frac{(\nu_{21}-\nu_{23})E_2}{\Delta} & \frac{(\nu_{21}-\nu_{23})E_2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})E_2}{\Delta} & \frac{(\nu_{23}-\nu_{21}\nu_{12})E_2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})E_2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-\nu_{23}-2\nu_{21}\nu_{12})E_2}{2\Delta} & 0 & 0 \\ & & & & G_{12} & 0 \\ & & & & & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\Delta = (1 + \nu_{23})(1 - \nu_{23} - 2 \nu_{21} \nu_{12}) \quad (2.69)$$

$$[S_{tiso}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & S_{66} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$[S_{tiso}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$(x_3 - x_1)$ -Ebene, Isotropieebene $x_2 = 0$:

$$C_{11} = C_{33}, \quad C_{12} = C_{23}, \quad C_{44} = C_{66}, \quad C_{55} = \frac{1}{2}(C_{33} - C_{13}) \quad (2.72)$$

$$S_{11} = S_{33}, \quad S_{12} = S_{23}, \quad S_{44} = S_{66}, \quad S_{55} = 2(S_{33} - S_{13}) \quad (2.73)$$

$$E_1 = E_3, \quad E_2, \quad G_{23} = G_{12}, \quad \nu_{12} = \nu_{23}, \quad G_{13} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{13})} \quad (2.74)$$

$$[C_{tiso}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{66} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{13}) & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$[S_{tiso}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{66} & 0 & 0 \\ & & & & 2(S_{11} - S_{13}) & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$(x_1 - x_2)$ -Ebene, Isotropieebene $x_3 = 0$:

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{23} = C_{13}, \quad C_{44} = C_{55}, \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \quad (2.77)$$

$$S_{11} = S_{22}, \quad S_{23} = S_{13}, \quad S_{44} = S_{55}, \quad S_{66} = 2(S_{11} - S_{12}) \quad (2.78)$$

$$E_1 = E_2, \quad E_3, \quad G_{23} = G_{13}, \quad \nu_{13} = \nu_{23}, \quad G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})} \quad (2.79)$$

$$[C_{tiso}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & sym. & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$[S_{tiso}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & sym. & & S_{44} & 0 \\ & & & & & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

2.2.5 Isotropie

Isotrope Materialien zeigen zu allen Ebenen und zu allen Achsen symmetrisches Materialverhalten. Die Steifigkeitsmatrix $[C_{iso}]$ und die Nachgiebigkeitsmatrix $[S_{iso}]$ zeichnen sich durch 12 von Null verschiedene Einträge mit 2 unabhängigen Materialkennwerten aus: E, ν . Die Steifigkeitsmatrix lässt sich schreiben als

$$[C_{iso}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ & & sym. & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

bzw.

$$[C_{iso}] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & G = \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ & & sym. & & & G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ & & & & & G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Für die Nachgiebigkeitsmatrix folgt somit

$$[S_{iso}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ & & sym. & & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ & & & & & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

bzw.

$$[S_{iso}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

sym.

Kapitel 3

Betrachtungen ausgewählter Plattentheorien

Eine Platte ist ein ebenes Flächentragwerk, das nur senkrecht zur Mittelfläche beansprucht wird [2, 18, 28, 30, 37, 38, 101, 104, 111]. Hierbei verformt sich die im Ausgangszustand ebene Platte, für die angenommen wird, daß ihre seitlichen Abmessungen a und b groß gegenüber der Plattendicke h sind. Zur Beschreibung der Zustandsgrößen der Platte wird das Plat-

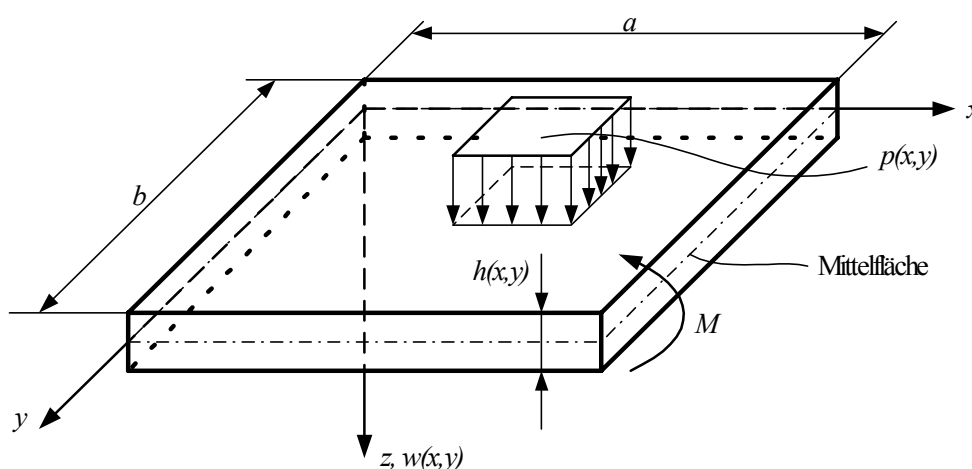


Abbildung 3.1: Rechteckplatte

tenkontinuum auf seine Mittelfläche reduziert. Abhängig von dem Seiten-Dicken-Verhältnis der Platte, der Größe der Durchbiegung und der Berücksichtigung von Schubverformungen ist die Auswahl der zu verwendenden Theorie zu treffen. Die KIRCHHOFFSche Plattentheorie beschreibt dünne Platten mit kleiner Durchbiegung ohne Berücksichtigung der Schubverformung. Die Erweiterung dieser Theorie mit Einbeziehung der Schubverformung wurde von REISSNER und MINDLIN vorgenommen, die die Berechnung dicker Platten mit kleinen Durchbiegungen ermöglicht. Für dünne Platten mit großen Verformungen ist der nichtlineare Membranzustand der Platte nicht mehr zu vernachlässigen. Eine geeignete Theorie, die diese Nichtlinearität berücksichtigt, ist die Beschreibung nach KÁRMÁN [82, 104].

3.1 KIRCHHOFFSche Plattentheorie

3.1.1 Annahmen

Für die Herleitungen der Plattengleichungen nach der klassischen bzw. KIRCHHOFFSchen Plattentheorie sind folgende Annahmen zu treffen:

- Belastungen werden nur orthogonal zur Plattenmittelfläche bzw. als Randmomente eingepreßt.
- Die Plattendicke h wird als konstant und klein gegenüber den Seitenabmessungen a und b betrachtet: $h \ll a, b$. (Leichtbau: $h \leq \frac{a}{50}, \frac{b}{50}$; Stahlbau: $h \leq \frac{a}{20}, \frac{b}{20}$; Massivbau: $h \leq \frac{a}{5}, \frac{b}{5}$)
- Die Verformung $w(x, y)$ der belasteten Platte ist klein gegenüber der Plattendicke h : $w \leq 0, 2h$. Aus dieser Annahme folgt, daß das Gleichgewicht am unverformten Plattenelement gebildet werden darf. Die Herleitung liefert damit eine Theorie 1. Ordnung.
- Die Normal-Verzerrungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ und die Gleitungen γ_{xy} der Plattenmittelfläche sind aufgrund der Definition einer Platte: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$.
- Das Material wird als homogen, isotrop und linear elastisch angenommen; es gilt das HOOKEsche-Materialgesetz.
- Die Unabhängigkeit der Materialkonstanten von der Wahl des Koordinatensystems wird gefordert (Prinzip der Objektivität).
- Punkte auf einer Normalen zur Plattenmittelebene liegen auch im belasteten Zustand der Platte auf einer Normalen zur verformten Plattenmittelfläche (schubstarr: $Gh \rightarrow \infty$). Eine solche Annahme wird als Normalenhypothese bezeichnet, die KIRCHHOFF analog zur BERNOULLISchen Hypothese formuliert.
- Äquidistante Punkte auf einer Normalen zur Plattenmittelfläche befinden sich auch im belasteten Zustand auf der Normalen zur Mittelebene im gleichen Abstand zueinander. Die Plattendicke ändert sich im Widerspruch zur Materialgleichung nicht:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.1)$$

- Die Spannung σ_z verläuft linear über die Plattendicke und nimmt Werte zwischen $p(x, y)$ an der belasteten Oberfläche und Null an der unbelasteten Oberfläche an. Die Größe der Spannung σ_z sei klein gegenüber den Spannungen σ_x und σ_y und wird im Weiteren vernachlässigt: $\sigma_z = 0$.
- Durch die oben getroffenen Annahmen wird für die KIRCHHOFFSche Plattentheorie ein ebener Spannungszustand angenommen:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z), \quad (3.2)$$

$$\sigma_y = \sigma_y(x, y, z), \quad (3.3)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xy}(x, y, z), \quad (3.4)$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0. \quad (3.5)$$

Die zur Gleichung (3.5) gehörenden Verzerrungen sind Null:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0. \quad (3.6)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß die in Gleichung (3.5) getroffenen Annahmen nicht besagen, daß die angegebenen Spannungen bei der belasteten Platte nicht auftreten. Der ebene Spannungszustand läßt lediglich die Berechnung dieser Spannungen nicht zu.

3.1.2 Grundgleichungen der KIRCHHOFF-Platte

Die Grundgleichungen der schubstarrten Platte sollen anhand eines ebenen Flächentragwerkes, wie es in der Abbildung 3.1 dargestellt ist, hergeleitet werden.

Schnittgrößen

Die x - y -Ebene des eingeführten kartesischen Koordinatensystems liegt in der Plattenmittelfläche (Schwerpunktsfläche), so daß die Plattenoberflächen bei $z = \pm h/2$ liegen. Zur Herleitung der Gleichungen wird gedanklich ein differentiell kleiner Quader mit der Dicke h aus der Platte herausgeschnitten. An den positiven Schnittufern werden, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, die Spannungen positiv eingetragen, die jeweils im Abstand z von der Mittelebene wirken. Durch Integration über die Plattendicke werden die Spannungsergebnisse, die Plattenschnittgrößen, in der Dimension „Kraft pro Einheitslänge“ bzw. „Moment pro Einheitslänge“ ermittelt. Unter der oben getroffenen Annahme, daß in der Plattenebene keine Lasten angreifen - das wäre dann der Scheibenzustand - verschwinden die zu den Spannungen σ_x , σ_y , τ_{xy} und τ_{yx} gehörenden resultierenden Schnittgrößen. Diese Spannungen rufen lediglich Momente hervor. Demgegenüber sind die Resultierenden der Schubspannungen τ_{yz} und τ_{xz} Schnittkräfte, die als Querkräfte bezeichnet werden. Durch Integration der Span-

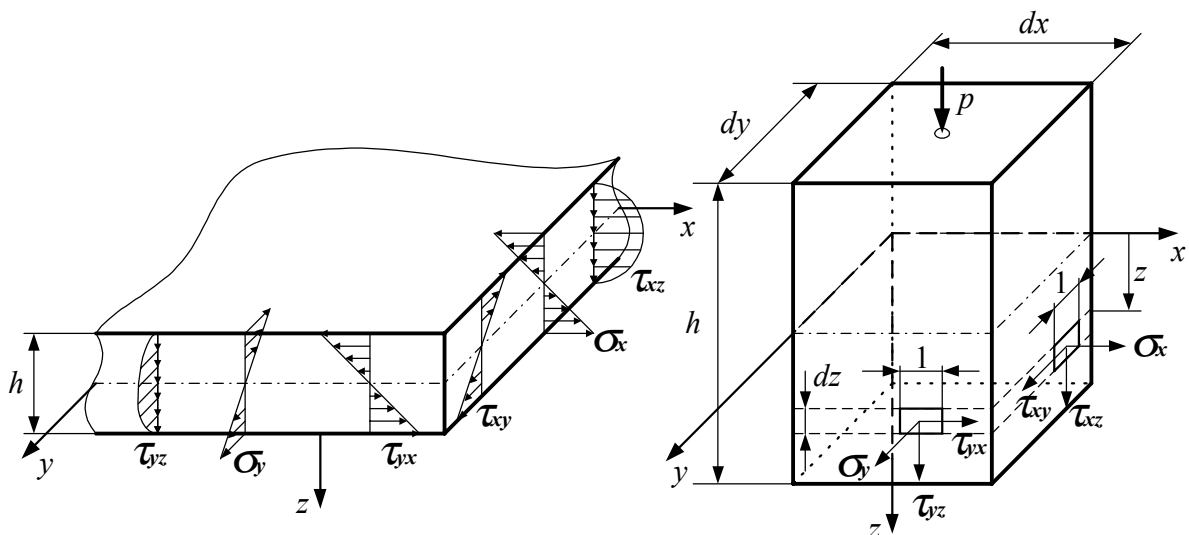


Abbildung 3.2: Links: Spannungsverläufe über die Plattendicke h am positiven Plattenschnittufer. Rechts: Spannungsergebnisse (Schnittgrößen) am inkrementellen Plattenelement.

nungen folgt für die Querkräfte mit der Einheit $\left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}\right]$

$$q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = \tau_{xz,max} \frac{2}{3} h, \quad q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz = \tau_{yz,max} \frac{2}{3} h, \quad (3.7)$$

für die Biegemomente mit der Einheit $\left[\frac{\text{Kraft} \cdot \text{wahreLänge}}{\text{Einheitslänge}}\right]$

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = \sigma_{x,max} \frac{h^2}{6}, \quad m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = \sigma_{y,max} \frac{h^2}{6} \quad (3.8)$$

und ebenso für die Torsionsmomente mit der Einheit $\left[\frac{\text{Kraft} \cdot \text{wahreLänge}}{\text{Einheitslänge}}\right]$ unter der Annahme $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = \tau_{xy,max} \frac{h^2}{6}. \quad (3.9)$$

Der Kleinbuchstabe für die Querkräfte und Biegemomente zeigt an, daß die Schnittgrößen bei Flächenträgern auf die Einheitslänge bezogen werden. Die Indizierung der Momente gibt hierbei nicht die Drehachse sondern die Spannungen wieder, aus denen sie gebildet werden. Die Abbildung 3.3 zeigt die Lasten und Schnittgrößen einer Platte mit den lateralen Abmessungen dx und dy . Die Orientierung der abgebildeten, positiven Kräfte und Momente richtet sich dabei nach den Angaben aus den Gleichungen (3.7)-(3.9).

Gleichgewichtsbedingungen

Durch Bildung des Kräftegleichgewichtes in z -Richtung (s. Abb. 3.3) erhält man

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p. \quad (3.10)$$

Das Momentengleichgewicht um die x -Achse liefert bei Vernachlässigung der kleinen Größen dritter Ordnung

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = q_y. \quad (3.11)$$

Die Bildung des Momentengleichgewichtes um die y -Achse liefert in gleicher Weise den Zusammenhang

$$\frac{\partial m_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} = q_x. \quad (3.12)$$

Die Gleichungen (3.10), (3.11) und (3.12) werden als die Plattengleichgewichtsbedingungen bezeichnet. Die Differentiation der Gleichung (3.11) nach y , der Gleichung (3.12) nach x und das Einsetzen in die Gleichung (3.10) liefert unter der Annahme $m_{xy} = m_{yx}$ die Momentengleichung der Platte,

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p, \quad (3.13)$$

in der die Querkräfte q_x und q_y eliminiert sind.

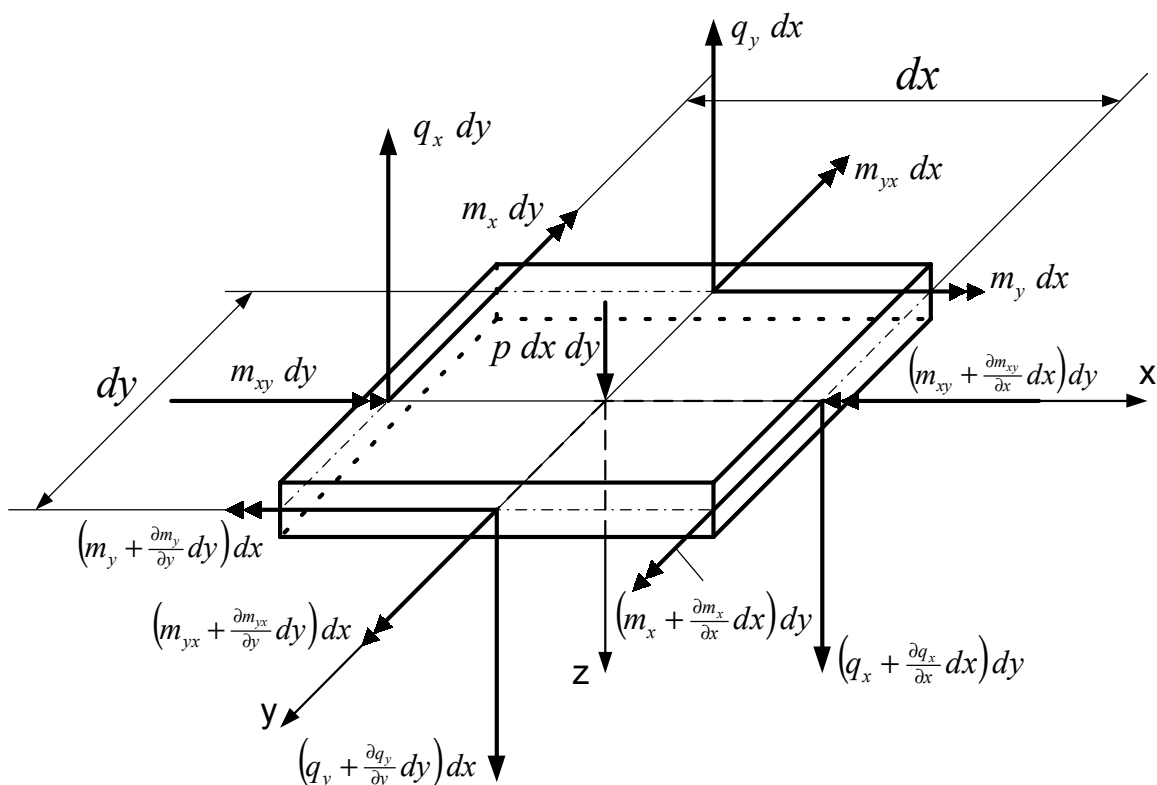


Abbildung 3.3: Plattenschnittgrößen

Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen

Aufgrund der zweifach innerlich statischen Unbestimmtheit der Platte (Für die fünf Plattenschnittgrößen m_x , m_y , m_{xy} , q_x und q_y stehen nur drei Bestimmungsgleichungen (3.10)-(3.12) zur Verfügung.) können bei gegebener Last p aus den Gleichgewichtsbeziehungen alleine nicht die Schnittgrößen bestimmt werden. Hierfür sind zusätzliche Gleichungen erforderlich. Sie werden durch Berücksichtigung der Verformungen erhalten. Die Abbildung 3.4 zeigt zwei Schnitte durch die verformte und unverformte Platte. Die Normale, auf der sich der Punkt P befindet, steht sowohl im unbelasteten als auch im belasteten Zustand senkrecht auf der Mittelfläche. Durch die Neigung der Normalen zum Urzustand, bedingt durch die Verschiebung der Mittelebene, wird der Winkel ψ_i eingeschlossen. Der Index i kennzeichnet hierbei die Verschiebungsrichtung und nicht die Drehachse. Durch die beschriebene Plattendurchbiegung und unter der Annahme kleiner Verschiebungen erfährt der Punkt P die Verschiebungen

$$u(x, y, z) = z\psi_x(x, y) \quad \text{und} \quad v(x, y, z) = z\psi_y(x, y). \quad (3.14)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (3.14) werden die kinematischen Beziehungen analog zu den Gleichungen (2.21) und (2.22) notiert als

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, & \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}$$

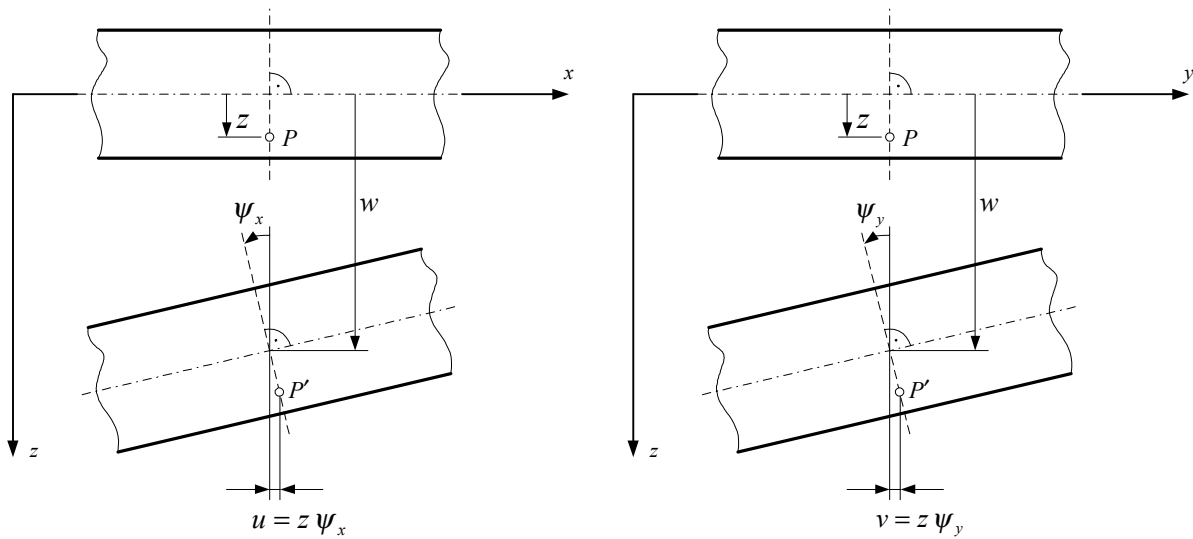


Abbildung 3.4: Plattenverformungen

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Zur Herleitung des Zusammenhangs zwischen den kinematischen Beziehungen aus der Gleichung (3.15) und den Schnittgrößen der Platte ist die Hinzuziehung der getroffenen KIRCHHOFFSchen Annahmen (Kapitel 3.1.1) erforderlich:

- Die Belastung $p(x, y)$ greift nur an der Plattenoberfläche an der Stelle $z = -h/2$ an (s. a. Abb. 3.2). Dadurch nimmt die Spannung σ_z linear Werte zwischen $\sigma_z(x, y, -h/2) = -p(x, y)$ und $\sigma_z(x, y, +h/2) = 0$ an. Analog ist eine Lasteinprägung auch bei $z = +h/2$ möglich und führt für diesen Fall zu einem entsprechenden Spannungsverlauf.
- Im Vergleich zu den Biegespannungen σ_x und σ_y ist im Rahmen der Biegetheorie die Spannung σ_z als sehr viel kleiner zu betrachten:

$$|\sigma_z| \ll |\sigma_x|, |\sigma_y|. \quad (3.16)$$

Die Spannung σ_z in Plattendickenrichtung kann somit vernachlässigt werden:

$$|\sigma_z| = 0. \quad (3.17)$$

Anmerkung: In praktischen Ausführungen kann eine Platte sehr wohl lokal bis zur Fließgrenze ($\sigma_z = \sigma_F$) beansprucht werden. Dann sind gesonderte Nachweise erforderlich (lokale Vergleichsspannung, Durchstanzen etc.)

- Für die isotrope Platte sind die Annahmen des ebenen Spannungszustandes anwendbar:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) , \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} , \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} , \\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx} .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Hierbei sind, wie in Kapitel 2.1.1 eingeführt, E der Elastizitätsmodul, G der Schubmodul und ν die Querkontraktionszahl.

Die getroffene Annahme, $\sigma_z = \varepsilon_z = 0$, ist widersprüchlich und führt bei Beachtung der Gleichung (2.14) zu der unbrauchbaren Aussage $\sigma_x = -\sigma_y$. Dennoch zeigen auf dieser Annahme basierende Theorien eine gute Übereinstimmung mit den realen Versuchsergebnissen dünner Platten. Durch Einsetzen der Gleichungen (3.15) in die Gleichungen (3.18) des ebenen Spannungszustandes isotroper Platten erhält man

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial\psi_y}{\partial y} \right) z , \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial\psi_x}{\partial x} \right) z , \\
\tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x} \right) z , \\
\tau_{yz} &= G \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) , \\
\tau_{zx} &= G \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Man erkennt, daß die Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} lineare Funktionen der Variablen z sind und jeweils an den Oberflächen der Platte ihre Maximal- bzw. Minimalwerte sowie in der Bezugsebene den Wert Null annehmen. Die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} werden nach der Gleichung (3.19) als konstant beschrieben, was im Widerspruch zur Realität steht. Da an den Plattenoberflächen keine Belastungen in x - bzw. y -Richtung wirken, müssen an den Orten $z = \pm h/2$ die Schubspannungen verschwinden. Das Einsetzen der Gleichung (3.19) in die Gleichungen (3.7)-(3.9) liefert das Elastizitätsgesetz für die Schnittgrößen der isotropen Platte:

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z = K \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial\psi_y}{\partial y} \right) . \tag{3.20}$$

Hierbei wird der Vorfaktor

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.21}$$

als die Plattensteifigkeit bezeichnet. Analog zur Gleichung (3.20) und unter Berücksichtigung des Faktors K in der Gleichung (3.21) erhält man das Elastizitätsgesetz für die restlichen Plattenschnittgrößen:

$$m_y = K \left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial\psi_x}{\partial x} \right) , \tag{3.22}$$

$$m_{xy} = m_{yx} = \frac{1-\nu}{2} K \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \quad (3.23)$$

$$q_x = Gh_s \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (3.24)$$

$$q_y = Gh_s \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (3.25)$$

Die in den Gleichungen (3.24) und (3.25) hergeleiteten Zusammenhänge für die Querkräfte q_x und q_y enthalten das Produkt Gh_s . Der hier eingeführte Parameter $h_s < h$ wird als die Schubdicke der Platte bezeichnet. Die Schubdicke h_s stellt einen Korrekturfaktor dar, um die bereits oben erwähnte, ungleichmäßige Schubverteilung von τ_{xz} und τ_{yz} über die Dicke der Platte zu berücksichtigen. Das Produkt Gh_s wird als die Schubsteifigkeit der isotropen, schubweichen Platte bezeichnet. Eine wesentliche Annahme in Kapitel 3.1.1 zur Herleitung der KIRCHHOFFSchen Theorie war die Forderung der Schubstarrheit der Platte. Die Schubsteifigkeit wird somit als sehr groß angenommen,

$$Gh_s \rightarrow \infty, \quad (3.26)$$

so daß unter der Annahme endlicher Querkräfte q_x und q_y aus den Gleichungen (3.15), (3.24) und (3.25) folgt:

$$\gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad (3.27)$$

$$\gamma_{yz} = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.28)$$

Die Zwischenergebnisse (3.27) und (3.28) liefern durch Einsetzen in die Gleichungen (3.20), (3.22) und (3.23) die Elastizitätsgesetze für die Berechnung der Momente:

$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.29)$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.30)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -K (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.31)$$

Mit der Momentengleichung (3.13) der Platte und den Zusammenhängen (3.29) bis (3.31) stehen nun vier Gleichungen für die Ermittlung der drei Schnittmomente m_x , m_y , $m_{xy} = m_{yx}$ und die Durchbiegung w zur Verfügung. Durch Einsetzen der Gleichungen (3.29) bis (3.31) in die Gleichung (3.13) erhält man

$$K \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p. \quad (3.32)$$

Mit der Kurzschreibweise des Delta- bzw. LAPLACE-Operators

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.33)$$

kann die Gleichung (3.32) auch geschrieben werden als

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{K}. \quad (3.34)$$

Die Gleichungen (3.32), (3.34) werden als die *KIRCHHOFFsche Plattendifferentialgleichung* bezeichnet. Die auf diesem Wege hergeleitete Plattentheorie liefert allerdings kein eigenes Elastizitätsgesetz für die Querkräfte q_x und q_y . Aus den Gleichgewichtsbedingungen (3.11) und (3.12) können mit Hilfe der Gleichungen (3.29)-(3.31) die Zusammenhänge zwischen der Durchbiegung w und den Querkräften q_x und q_y in LAPLACE-Operator-Schreibweise angegeben werden:

$$q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \quad q_y = -K \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w). \quad (3.35)$$

Mit den Zusammenhängen der Gleichungen (3.27) und (3.28) lassen sich die Spannungen der Platte in Abhängigkeit von der Biegefläche $w(x, y)$ angeben:

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z, \quad (3.36)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z, \quad (3.37)$$

$$\tau_{xy} = -2G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) z = -\frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) z. \quad (3.38)$$

Auf diese Weise sind alle Kraftgrößen auf die Durchbiegungsfläche $w = w(x, y)$ zurückgeführt worden.

3.1.3 Plattenspannungen in Abhängigkeit der Schnittgrößen

Um die Spannungen der KIRCHHOFFschen Platte in Abhängigkeit von den Schnittgrößen darzustellen, ist es erforderlich, die Ergebnisse der Gleichungen (3.29)-(3.31) unter Berücksichtigung der Beziehung (3.21) in die Gleichungen (3.36)-(3.38) einzusetzen:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{m_x}{K} z = \frac{12}{h^3} m_x z \quad (3.39)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{m_y}{K} z = \frac{12}{h^3} m_y z \quad (3.40)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{m_{xy}}{K} z = \frac{12}{h^3} m_{xy} z. \quad (3.41)$$

Die in den vorangegangenen Unterkapiteln hergeleiteten Zusammenhänge der KIRCHHOFFschen Plattentheorie lassen eine direkte Ermittlung der Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} sowie der Spannung σ_z nicht zu. Um dennoch den Verlauf der durch die Querkräfte hervorgerufenen Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} sowie näherungsweise die zunächst zu Null angenommene Spannung σ_z bestimmen zu können, werden die Gleichgewichtsbedingungen an einem Volumenelement betrachtet (Abb. 3.2, rechts) [101]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \quad (3.44)$$

Die Kräfte $\{K\}^T = \{X, Y, Z\}$ sind die je Volumeneinheit eingepprägten äußerer Kräfte. Auf die Herleitung dieser Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik (3.42)-(3.44) wird an dieser Stelle verzichtet (s. z. B. [36]). Unter Vernachlässigung des Platteneigengewichts und des Verschwindens der auf das Volumenelement $dV = dx dy dz$ eingepprägten äußerer Kräfte ($X = Y = Z = 0$) folgt unter Berücksichtigung der Zusammenhänge (3.36)-(3.38) aus den Gleichungen (3.42), (3.43):

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w). \quad (3.45)$$

Durch Integration bezüglich z erhält man aus den Gleichungen (3.45):

$$\tau_{zx} = \int \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) dz = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) [z^2 + C_1(x, y)] \quad (3.46)$$

$$\tau_{zy} = \int \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) dz = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) [z^2 + C_2(x, y)] \quad (3.47)$$

Die Integrationskonstanten $C_1(x, y)$ und $C_2(x, y)$ werden durch die Forderung bestimmt, daß an den Plattenoberflächen $z = \pm h/2$ die Schubspannungen τ_{zx} und τ_{zy} verschwinden:

$$C_1(x, y) = C_2(x, y) = -\frac{h^2}{8}. \quad (3.48)$$

Somit folgt für die Schubspannungen τ_{zx} und τ_{zy} unter Hinzuziehung der Plattensteifigkeit K (3.21) und den Gleichungen (3.35):

$$\tau_{zx} = -\frac{3K}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \quad (3.49)$$

$$= \frac{3q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad (3.50)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{3K}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) \quad (3.51)$$

$$= \frac{3q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]. \quad (3.52)$$

Durch Umformen der Gleichung (3.44) folgt mit (3.49), (3.51) und Integration über die Plattendicke h der Zusammenhang:

$$\sigma_z = \frac{3K}{2h} \left[z - \frac{4z^3}{3h^2} + C_3(x, y) \right] \Delta \Delta w. \quad (3.53)$$

Mit der Voraussetzung, daß am unteren Plattenrand $z = h/2$ die Spannung σ_z verschwindet, folgt für die Integrationskonstante $C_3(x, y)$ aus der Gleichung (3.53):

$$C_3(x, y) = -\frac{h}{3}, \quad (3.54)$$

so daß für den Verlauf der Spannung σ_z geschrieben werden kann als

$$\sigma_z = -K \left[1 - 3 \left(\frac{z}{h} \right) + 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \Delta \Delta w. \quad (3.55)$$

Unter Hinzuziehung des Zusammenhangs (3.32) folgt aus der Gleichung (3.55):

$$\sigma_z = -\frac{p}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{z}{h} \right) + 4 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]. \quad (3.56)$$

Für $z = -h/2$ läßt sich aus (3.56) die korrekte Angabe

$$\sigma_z \left(x, y, z = -\frac{h}{2} \right) = -p(x, y) \quad (3.57)$$

ableiten; an der Plattenoberseite nimmt die Spannung σ_z den Wert der eingepprägten Last an.

3.1.4 Randbedingungen der KIRCHHOFF-Platte

Die KIRCHHOFFsche Plattengleichung (3.32), (3.34) ist eine inhomogene Bipotentialgleichung bzw. eine lineare, inhomogene, partielle Differentialgleichung 4. Ordnung. Für die Lösungsfunktion der Plattendifferentialgleichung ist es erforderlich, acht Integrationskonstanten zu finden. Somit müssen für die schubstarre Platte an jedem Rand jeweils zwei Randbedingungen formuliert werden. Da an jedem Rand drei Schnittgrößen vorliegen (das Biegemoment m_x bzw. m_y , das Torsionsmoment $m_{xy} = m_{yx}$ und die Querkraft q_x bzw. q_y), wären folglich für die Lösungsfunktion der Plattendifferentialgleichung 12 Integrationskonstanten erforderlich.

Einführung von Ersatzquerkräften

Das oben beschriebene Problem wird nach einem Vorschlag von THOMSON und TAIT (1876) dadurch umgangen, daß das Torsionsmoment m_{xy} durch die stetige Verteilung von Kräftepaaren ersetzt wird. Nach dem Saint-Vénantschen Prinzip klingt dieser Spannungszustand in einem eng begrenzten Bereich ab. Die Abbildung 3.5 zeigt am Beispiel des Randes $y = b$ die Reduktion der Torsionsmomente $m_{xy} dx$ durch stetig verteilte Kräftepaare m_{xy} .

An den Grenzen zweier benachbarter Randelemente mit der Breite dx verschwinden die Kräfte m_{yx} . Lediglich der Zuwachs $dm_{yx} = \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} dx$ bleibt bestehen. Die Summe der auf dx bezogenen Querkraft q_y und der „Torsionskräfte“ m_{yx} wird zu einer Ersatzquerkraft \bar{q}_y zusammengefaßt. Für den Rand $y = b$ kann die Ersatzquerkraft formuliert werden als

$$\bar{q}_y(x, b) = q_y(x, b) + \frac{\partial m_{yx}(x, b)}{\partial x} \quad (3.58)$$

bzw. unter Beachtung der Gleichungen (3.31) und (3.35) als

$$\bar{q}_y(x, b) = -K \left[\frac{\partial^3 w(x, b)}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, b)}{\partial x^2 \partial y} \right]. \quad (3.59)$$

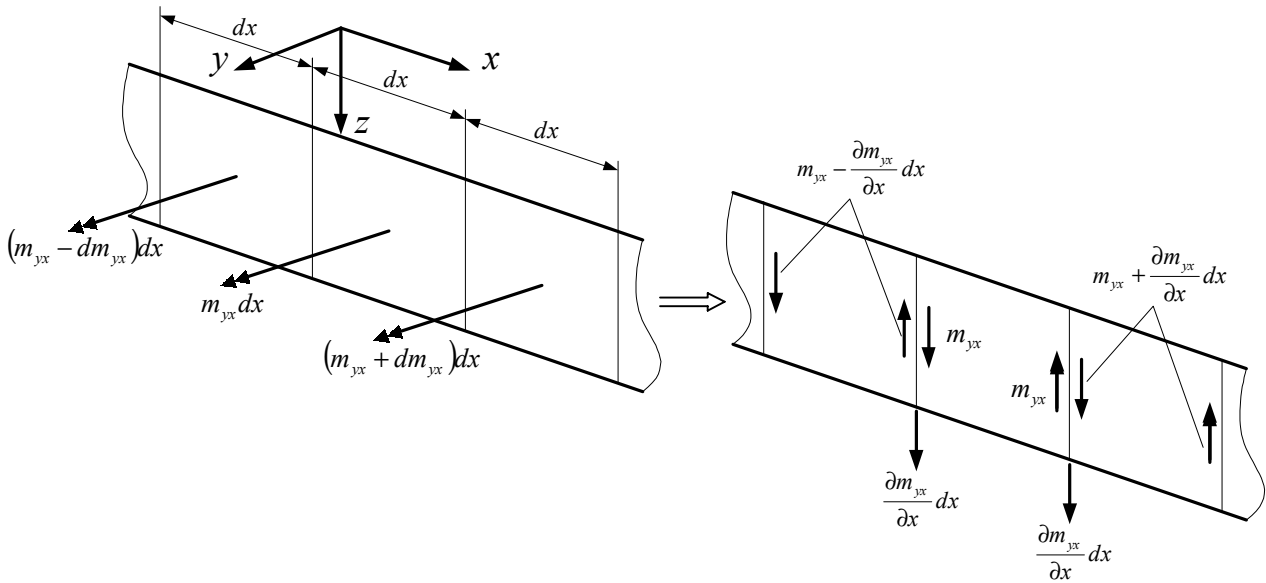


Abbildung 3.5: Ersatz der Torsionsmomente durch statisch äquivalente, stetig verteilte Kräftepaare

Analog kann für den Rand $x = a$ die Ersatzquerkraft

$$\bar{q}_x(a, y) = q_x(a, y) + \frac{\partial m_{xy}(a, y)}{\partial y} = -K \left[\frac{\partial^3 w(a, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(a, y)}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (3.60)$$

angegeben werden.

Besonderheiten an den Plattenecken

Bei der oben beschriebenen Einführung von Ersatzkräften tritt an den Plattenecken eine Besonderheit auf. Durch die Aufteilung der Torsionsmomente $m_{xy} dy$ bzw. $m_{yx} dx$ in Kräftepaare verbleiben an den rechtwinkligen Plattenecken zwei Einzelkräfte m_{xy} und m_{yx} . Die Kräfte addieren sich dort zur Gesamtkraft

$$F_E = m_{xy} + m_{yx} \quad (3.61)$$

woraus mit dem Zusammenhang

$$m_{xy} = m_{yx} \quad (3.62)$$

die Eckkraft mit der Größe

$$F_E = 2m_{xy} \quad (3.63)$$

folgt.

- Da an freien Ecken keine äußeren Kräfte wirken, muß an dieser Stelle die Eckkraft F_E verschwinden:

$$F_E = m_{xy} + m_{yx} = 0. \quad (3.64)$$

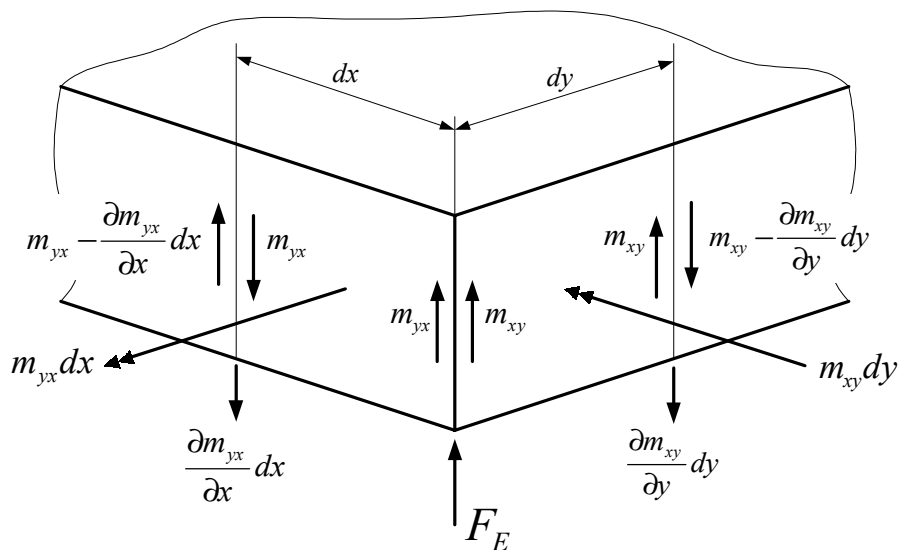


Abbildung 3.6: Besonderheit an den Plattenecken: Eckkraft F_E

- Ist die Plattenecke zugfest-gelenkig gelagert, so kann das Lager die Kraft F_E aufnehmen. Die Eckkraft bedingt dadurch eine Veränderung der Auflagerreaktionen. Ein positives Torsionsmoment $m_{xy} = m_{yx} > 0$ verursacht dabei eine Zugkraft auf das Lager mit dem Bestreben, die Plattenecke von der Lagerung abzuheben.
- Sind die zu einer Plattenecke gehörenden Plattenränder eingespannt, verschwinden die Torsionsmomente an diesen Rändern und damit die Kraft an der Plattenecke:

$$F_E = m_{xy} = m_{yx} = 0. \tag{3.65}$$

3.1.5 Gelenkig gelagerte Rechteckplatte - Lösung nach NAVIER

Eine allseitig zugfest-gelenkig gelagerte Rechteckplatte ist in einem rechteckigen Bereich mit den Seitenlängen a_0 und b_0 und den Mittelpunktskoordinaten x_0 und y_0 durch eine beliebige Last $p(x, y)$ belastet (Abb. 3.7). Die Seitenkanten der belasteten Fläche verlaufen parallel zu den Kanten der Platte. Gesucht werden sowohl die Biegefläche $w(x, y)$ als auch die resultierenden Belastungen der Platte. Die an den Plattenrändern zu fordernden Bedingungen

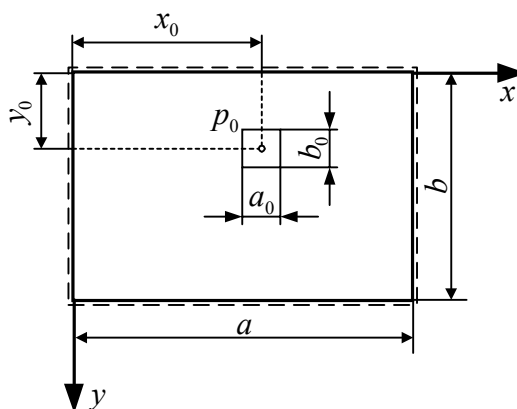


Abbildung 3.7: Zugfest-gelenkig gelagerte Rechteckplatte mit Rechtecklast p_0 .

$$w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0 \tag{3.66}$$

$$\Delta w(0, y) = \Delta w(a, y) = \Delta w(x, 0) = \Delta w(x, b) = 0 \tag{3.67}$$

werden als die NAVIERSchen Randbedingungen bezeichnet [18, 101, 104]. Für die Biegefläche erfüllt der FOURIERDoppelreihenansatz

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.68)$$

die Randbedingungen des Problems. Analog dem Ansatz (3.68) wird die Flächenlast $p(x, y)$ in einer FOURIERDoppelreihe entwickelt:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.69)$$

Zur Berechnung der FOURIERkoeffizienten p_{mn} werden beide Seiten der Gleichung (3.69) mit den orthogonalen Funktionen $\sin \frac{\tilde{m}\pi x}{a}$ und $\sin \frac{\tilde{n}\pi y}{b}$ multipliziert und über den gesamten Plattenbereich integriert:

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b p(x, y) \sin \frac{\tilde{m}\pi x}{a} \sin \frac{\tilde{n}\pi y}{b} dx dy = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \int_{x=0}^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\tilde{m}\pi x}{a} dx \int_{y=0}^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{\tilde{n}\pi y}{b} dy. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Bei Berücksichtigung der Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_{\xi=0}^c \sin \frac{m\pi\xi}{c} \sin \frac{\tilde{m}\pi\xi}{c} d\xi = 0 \quad \text{für } m \neq \tilde{m} \quad (3.71)$$

und

$$\int_{\xi=0}^c \sin \frac{m\pi\xi}{c} \sin \frac{\tilde{m}\pi\xi}{c} d\xi = \frac{c}{2} \quad \text{für } m = \tilde{m} \quad (3.72)$$

folgt für die Gleichung (3.70) der Zusammenhang

$$\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b p(x, y) \sin \frac{\tilde{m}\pi x}{a} \sin \frac{\tilde{n}\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} p_{\tilde{m}\tilde{n}}, \quad (3.73)$$

woraus sich durch Umformen die Koeffizienten $p_{\tilde{m}\tilde{n}}$ bzw. nach Umbenennung der Indizes die Koeffizienten p_{mn} bestimmen lassen:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (3.74)$$

Die zur Beschreibung der Biegefläche $w(x, y)$ noch unbekanntenen Koeffizienten w_{mn} werden aus der KIRCHHOFFSchen Plattendifferentialgleichung $\Delta\Delta w = p/K$ (Gl. (3.34)) gewonnen. Mit

$$K \Delta\Delta w = K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \pi^4 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = p(x, y) \quad (3.75)$$

erhält man durch Koeffizientenvergleich mit der Gleichung (3.69)

$$w_{mn} = \frac{1}{K\pi^4} \frac{p_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (3.76)$$

und somit

$$w(x, y) = \frac{1}{K\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.77)$$

Platte mit konstanter Rechtecklast p_0

Wird die Platte analog zur Abbildung 3.7 mit einer konstanten Rechtecklast p_0 belastet, so lassen sich die FOURIERkoeffizienten p_{mn} unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p_0 && x_0 - \frac{a_0}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{a_0}{2} \\ p(x, y) &= p_0 && \text{für } y_0 - \frac{b_0}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{b_0}{2} \\ p(x, y) &= 0 && \text{den Restbereich} \end{aligned} \quad (3.78)$$

mit der Gleichung (3.74) bestimmen:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4p_0}{ab} \int_{x=x_0-\frac{a_0}{2}}^{x_0+\frac{a_0}{2}} \int_{y=y_0-\frac{b_0}{2}}^{y_0+\frac{b_0}{2}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{16p_0}{mn\pi^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x_0\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}\frac{a_0}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y_0\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\frac{b_0}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

mit $m, n = 1, 3, 5, \dots$. So folgt für die Biegefläche aus der Gleichung (3.77) mit dem Zusammenhang (3.79)

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{K\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{m\pi a_0}{2a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{n\pi b_0}{2b}}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.80)$$

Platte mit Einzellast P im Punkt (x_0, y_0)

Für die Berechnung der Biegefläche $w(x, y)$ bei Belastung durch eine Einzelkraft P im Punkt (x_0, y_0) können die Koeffizienten p_{mn} aus dem Grenzübergang aus Gleichung (3.79) erhalten werden. Hierzu wird für die Kraft P

$$P = p_0 a_0 b_0 \quad (3.81)$$

gesetzt. Aus der Gleichung (3.79) folgt unter Beachtung von Gleichung (3.81)

$$p_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \frac{\sin \frac{m\pi a_0}{2a}}{\frac{m\pi a_0}{2a}} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \frac{\sin \frac{n\pi b_0}{2b}}{\frac{n\pi b_0}{2b}}. \quad (3.82)$$

Anschließend wird der Grenzübergang $a_0 \rightarrow 0$ und $b_0 \rightarrow 0$ mit Hilfe der L'HOSPITALSchen Regel [81] durchgeführt. Mit

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{m\pi a_0}{2a}}{\frac{m\pi a_0}{2a}} = \lim_{a_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi a_0}{2a} \cos \frac{m\pi a_0}{2a}}{\frac{\pi a_0}{2a}} = \lim_{a_0 \rightarrow 0} \cos \frac{m\pi a_0}{2a} = 1 \quad (3.83)$$

und

$$\lim_{b_0 \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\pi b_0}{2b}}{\frac{n\pi b_0}{2b}} = \lim_{b_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi b_0}{2b} \cos \frac{n\pi b_0}{2b}}{\frac{\pi b_0}{2b}} = \lim_{b_0 \rightarrow 0} \cos \frac{n\pi b_0}{2b} = 1 \quad (3.84)$$

folgt für die Gleichung (3.82) somit

$$\lim_{\substack{a_0 \rightarrow 0 \\ b_0 \rightarrow 0}} p_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \quad (3.85)$$

und somit für die Biegefläche $w(x, y)$ aus der Gleichung (3.77)

$$w(x, y) = \frac{4P}{abK\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (3.86)$$

Ermittlung der Schnittlasten

Läßt sich für den untersuchten Belastungs- und Lagerungsfall der Platte ein Biegeflächenverlauf angeben, so können die Momente, Querkräfte und Spannungen in Abhängigkeit des Ortes mit Hilfe der Gleichungen (3.29)-(3.31) und (3.35)-(3.38) angegeben werden. Die Qualität der Belastungsverläufe ist dabei abhängig von der Ordnung der gefundenen Lösung.

3.1.6 Fest eingespannte Rechteckplatte - RITZ-Ansatz

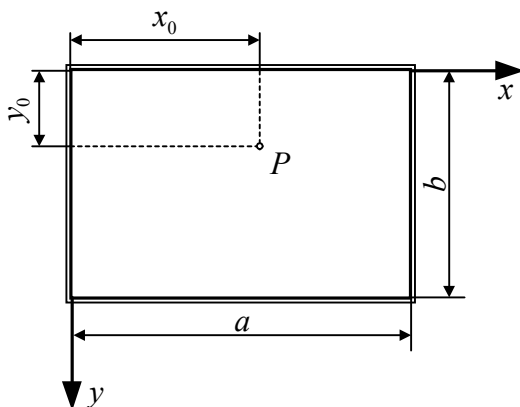


Abbildung 3.8: Fest eingespannte Rechteckplatte mit Einzellast P .

Für eine allseitig fest eingespannte Rechteckplatte mit einer an der Stelle $x = x_0$ und $y = y_0$ angreifenden Einzellast P (Abb. 3.8) sollen der Biegeflächenverlauf $w(x, y)$ und die daraus resultierenden Plattenbelastungen ermittelt werden. Die Lösung des Problems muß den Randbedingungen der allseitig fest eingespannten Rechteckplatte genügen. Für diesen Fall läßt sich keine strenge Lösung des Plattenproblems mit Hilfe einer Reihenentwicklung analog der Gleichung (3.68) angeben, die die geforderten Randbedingungen erfüllt. Um dennoch eine analytische Lösung der fest eingespannten Rechteckplatte zu entwickeln, ist die Anwendung eines Näherungsverfahrens erforderlich.

Hier eignet sich das Verfahren von RITZ, das als ein allgemeines Variationsproblem der Elastizitätstheorie das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials formuliert [2, 5, 18, 78, 82, 101, 104]. Existiert ein Variationsproblem des elastischen Potentials

$$\Pi = W_f - W_a, \quad (3.87)$$

erfüllen alle geometrisch zulässigen Verschiebungen, die das Gesamtpotential minimieren, auch die Gleichgewichtsbeziehungen des Problems. Voraussetzung für die Existenz eines Variationsproblems ist die Darstellbarkeit des elastischen Potentials Π in Abhängigkeit von den unabhängigen Konstanten, der Verschiebungsfunktion $w(x, y)$ und deren Ableitungen als Integralausdruck. Verschiebungsfunktionen, die diese geometrischen Randbedingungen erfüllen, werden als Vergleichsfunktionen bezeichnet. Eine Minimierung des Gesamtpotentials bedeutet, daß die Variation des elastischen Potentials Null wird:

$$\delta\Pi = \delta(W_f - W_a) = 0. \quad (3.88)$$

Das elastische Potential Π in Gleichung (3.87) setzt sich aus der Differenz der Formänderungsarbeit W_f und der Endwertarbeit der äußeren Belastung W_a zusammen. Im Fall des in der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie angenommenen ebenen Spannungszustandes läßt sich nach TIMOSHENKO et al. [103] die Formänderungsarbeit schreiben als

$$W_f = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy}) dV. \quad (3.89)$$

Wegen der Schubstarrheit der Platte,

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad (3.90)$$

gehen die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} nicht in die Gleichung für die Formänderungsarbeit ein. Mit der Forderung

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (3.91)$$

fließt auch kein Energieanteil von σ_{zz} in die Gleichung (3.89) ein. Unter Berücksichtigung des HOOKEschen Gesetzes für den ebenen Spannungszustand (Gl. (3.18)) folgt aus der Gleichung (3.89) durch Substitution der Spannungen durch die Verzerrungen der Zusammenhang

$$W_f = \frac{1}{2} \int_V \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + 2\nu\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) dV. \quad (3.92)$$

Ersetzt man die Verzerrungen durch die Ableitung der Biegefläche (Gl. (3.36)-(3.38)) und integriert über die Plattendicke h , so erhält man aus der Gleichung (3.92) unter Beachtung des Zusammenhangs (3.21)

$$\begin{aligned} W_f &= \frac{1}{2} \int_A K \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A K \left[(\Delta w)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dA. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Im betrachteten Fall der Rechteckplatte mit konstanter Plattensteifigkeit K ist eine weitere Vereinfachung der Gleichung (3.93) möglich. Durch partielle Integration von

$$\int_A \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} dy - \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \quad (3.94)$$

folgt aus der Gleichung (3.93)

$$W_f = \frac{1}{2} \int_A K [(\Delta w)^2] dA + K(1 - \nu) \left[\oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} dy \right]. \quad (3.95)$$

Für die Randbedingungen der festen Einspannung verschwinden die Randintegrale, so daß sich der Ausdruck für die Formänderungsarbeit weiter vereinfachen läßt zu:

$$W_f = \frac{1}{2} \int_A K [(\Delta w)^2] dA. \quad (3.96)$$

Als die Endwertarbeit der äußeren Belastung W_a versteht man die Arbeit der äußeren Belastung, die bei voller Belastungsgröße bis zur Endverschiebung geleistet wird. Bei der Betrachtung von normal zur Oberfläche angreifenden Flächenbelastung $p(x, y)$ und Einzellast $P_i(x, y)$ folgt

$$W_a = \int_A p w dA + \sum_{i=1}^m P_i w_i. \quad (3.97)$$

Statt der unbekanntten Verschiebung w wird bei dem Verfahren von RITZ eine Vergleichsfunktion \tilde{w} als Doppelreihenansatz der Form

$$w(x, y) \approx \tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ij} X_i^w(x) Y_j^w(y) \quad (3.98)$$

eingeführt. Hierbei sind $X_i^w(x)$ Funktionsansätze in Abhängigkeit der Koordinate x und $Y_j^w(y)$ von y abhängende Ansätze, die lediglich die wesentlichen Randbedingungen erfüllen müssen. Bezüglich der Durchbiegung w sind dies die geometrischen Randbedingungen (w und $w_{,x}$ bzw. $w_{,y}$). Die unbekanntten Koeffizienten a_{ij} werden durch das Minimum des elastischen Potentials bestimmt:

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{\partial \Pi}{\partial a_{ij}} \delta a_{ij} = \frac{\partial (W_f - W_a)}{\partial a_{ij}} \delta a_{ij} = 0. \quad (3.99)$$

Im Fall der nicht trivialen Lösung

$$\delta a_{ij} \neq 0 \quad (3.100)$$

erfordert die Minimierung des elastischen Potentials das Verschwinden der ersten Ableitung des elastischen Potentials nach den Koeffizienten a_{ij} :

$$\frac{\partial (W_f - W_a)}{\partial a_{ij}} = 0. \quad (3.101)$$

Im folgenden sollen beispielhaft zwei Vergleichsfunktionen betrachtet werden, die die geometrischen Randbedingungen des Problems erfüllen [18, 21]:

$$\begin{aligned} X_i^{w_a}(x) &= \left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^i, \\ Y_j^{w_a}(y) &= \left[\left(\frac{y}{b} \right)^4 - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right]^j, \end{aligned} \quad (3.102)$$

und

$$\begin{aligned} X_i^{w_b}(x) &= \left[1 - \cos\left(\frac{2i\pi x}{a}\right) \right], \\ Y_j^{w_b}(y) &= \left[1 - \cos\left(\frac{2j\pi y}{b}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Die Bestimmung des Koeffizienten a_{ij} für beliebig angreifende Einzellasten folgt nach Gleichung (3.101) unter Beachtung der Gleichungen (3.96) und (3.97) aus dem Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_{kl}} \left\{ \frac{1}{2} \int_A K (\Delta \tilde{w})^2 dA - \sum_{p=1}^r P_p \tilde{w}_p \right\} &= 0, \\ \int_A K \Delta \tilde{w} \frac{\partial \Delta \tilde{w}}{\partial a_{kl}} dA - \sum_{p=1}^r P_p \frac{\partial \tilde{w}_p}{\partial a_{kl}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Nach Einsetzen der allgemeinen Formulierung der Ansatzfunktion \tilde{w} aus der Gleichung (3.98) folgt dann für den Zusammenhang (3.104)

$$\begin{aligned} K \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ij} \left[\int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b Y_j^w Y_l^w dy + \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_j^w \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy + \right. \\ \left. + \int_{x=0}^a X_i^w \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} Y_l^w dy + \int_{x=0}^a X_i^w X_k^w dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy \right] - \\ - \sum_{p=1}^r P_p X_k^w(x_p) Y_l^w(y_p) = 0. \end{aligned} \quad (3.105)$$

bzw.

$$K \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M Z_{ijkl} a_{ij} = \sum_{p=1}^r P_p X_k^w(x_p) Y_l^w(y_p). \quad (3.106)$$

Die Koeffizienten Z_{ijkl} bestimmen sich aus dem Zusammenhang

$$\begin{aligned} Z_{ijkl} &= \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b Y_j^w Y_l^w dy + \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_j^w \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy + \\ &+ \int_{x=0}^a X_i^w \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} Y_l^w dy + \int_{x=0}^a X_i^w X_k^w dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Matriziell kann die Gleichung (3.106) weiter vereinfacht werden zu

$$[Z_{ijkl}] \{a_{ij}\} = \{P_{pkl}\}, \quad (3.108)$$

so daß sich die gesuchten Koeffizienten a_{ij} des RITZ-Ansatzes durch Umstellen und Lösen der Gleichung (3.108) ermitteln lassen:

$$\{a_{ij}\} = [Z_{ijkl}]^{-1} \{P_{pkl}\} . \quad (3.109)$$

3.2 Die schwach gekrümmte KIRCHHOFF-Platte

Die im Kapitel 3.1 abgeleitete Plattentheorie kann auch als ein Sonderfall der allgemeinen Schalentheorie gewertet werden. Läßt man beispielsweise bei einer Kugel- oder Zylinderschale den Radius gegen unendlich gehen ($r \rightarrow \infty$), so erhält man die Beschreibung der ebenen Platte. Es zeigt sich, daß schon eine geringe Wölbung ausreicht, um einen Spannungszustand mit typischem Schalencharakter zu erhalten [20, 23, 24, 104]. Eingeprägte senkrechte Lasten werden mit abnehmendem Radius nicht mehr ausschließlich über Querkräfte q und Momente m sondern über Membrankräfte n abgetragen. Die sich aus der Flachheit ergebenden Vereinfachungen der Schalentheorie ermöglichen es, mit geringerem Berechnungsaufwand als bei der allgemeinen Theorie der Schalen Fragestellungen schwach gekrümmter Strukturen zu untersuchen. Ein solches Tragwerk wird als schwach gekrümmte Platte bzw. als flache Schale bezeichnet.

Analog zur Plattentheorie wird die Geometrie der flachen Schale durch den Verlauf der Mittelfläche in einem kartesischen Koordinatensystem hinreichend genau beschrieben. Für die schwach gekrümmte Platte wird dabei die Annahme getroffen, daß die Krümmungen der Mittelfläche klein bezüglich der x - y -Ebene sind:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \ll 1. \quad (3.110)$$

Schnittgrößen

Aufgrund der getroffenen Annahme habe ein infinitesimal kleines Schalenelement in der Abbildung 3.9 die Seitenlängen dx und dy . An den Elementseiten lassen sich die Querkräfte

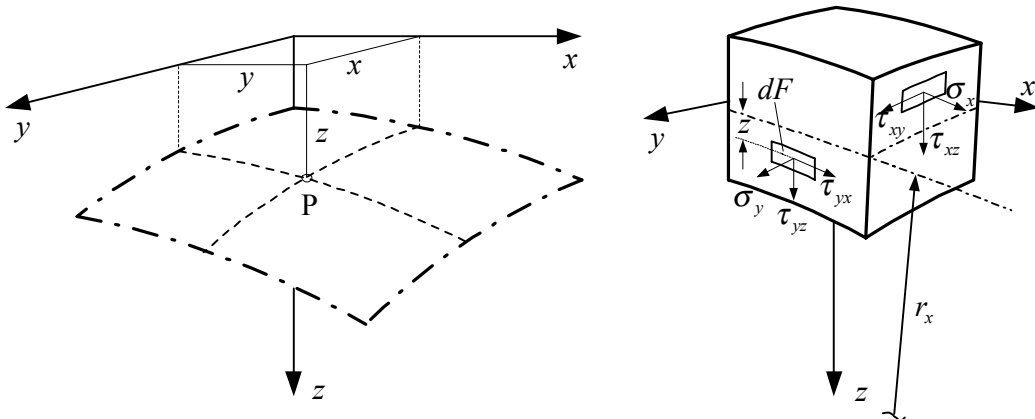


Abbildung 3.9: Links: Beschreibung der Schalenmittelfläche als Funktion $z(x, y)$ im kartesischen Koordinatensystem. Rechts: Spannungen am infinitesimalen Schalenelement.

$$q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad \text{und} \quad q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (3.111)$$

in der Einheit $\left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Einheitslänge}}\right]$ antragen (Abb. 3.10). Die an der Mittelfläche wirkenden Biege-

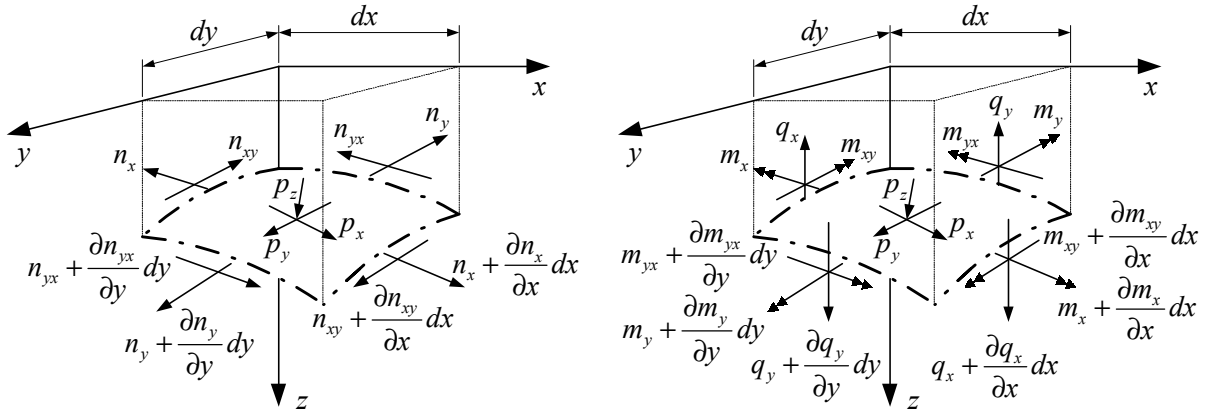


Abbildung 3.10: Infinitesimaler Ausschnitt der Schalenmittelfläche mit eingepägten äußeren Lasten. Links: Scheibenschnittgrößen. Rechts: Plattenschnittgrößen.

momente

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad \text{sowie} \quad m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (3.112)$$

und Torsionsmomente

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad \text{und} \quad m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (3.113)$$

haben die Einheit $\left[\frac{\text{Kraft} \cdot \text{wahre Länge}}{\text{Einheitslänge}}\right]$. Die schiefwinkligen Schnittkräfte

$$n_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad n_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz, \quad (3.114)$$

$$n_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad \text{und} \quad n_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (3.115)$$

in den Größen $\left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Einheitslänge}}\right]$ sind in diesem Fall von gewöhnlichen Normal- und Schubkräften nicht unterscheidbar. Im Fall der Kugelschale gilt für die die Geometrie beschreibenden Radien $r_x = r_y = r$. Im Fall der ebenen Platte ($r_x \rightarrow \infty, r_y \rightarrow \infty$) gehen die Gleichungen (3.111)-(3.113) in die Plattenbeziehungen (3.7)-(3.9) über.

Gleichgewichtsbedingungen

Dem Schalenelement werden, wie in der Abbildung 3.10 dargestellt, die äußeren Lasten p_x , p_y und p_z eingepreßt. Anders als bei ebenen Scheiben und Platten liefern bei den flachen Schalen orthogonal zur Mittelfläche angreifende Kräfte auch in der Mittelfläche wirkende Beanspruchungen. Umgekehrt gehen in der Schalenmittelfläche wirkende Kräfte in die Gleichgewichtsbetrachtungen in senkrechter Richtung mit ein. Die Abbildung 3.11 zeigt exemplarisch die Beiträge der Kräfte $n_x dx$ und deren Zuwächse in x -Richtung. So fließt bei der Annahme

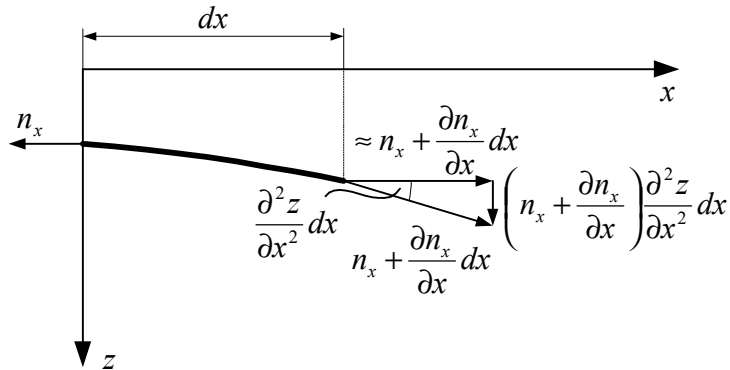


Abbildung 3.11: Krümmungsabhängigkeit der Belastungskomponenten.

einer schwachen Krümmung,

$$\varphi \approx \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{und} \quad r_x \approx r_y, \quad (3.116)$$

der Anteil $n_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy$ mit in die Gleichgewichtsbetrachtungen in z -Richtung ein. Durch die Krümmung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ist die schiefwinklige Kraft $n_x dy$ mit dem Faktor $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx$ in der Aufstellung des Gleichgewichts in z -Richtung zu berücksichtigen. Analoges gilt für alle Schnittgrößen des Schalenelementes, so daß sich nach Streichen der allen Gliedern gemeinsamen Fläche $dx dy$ die Gleichgewichtsbeziehungen in den drei Raumrichtungen angeben lassen zu:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} - q_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - q_y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p_x = 0, \quad (3.117)$$

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} - q_x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - q_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + p_y = 0 \quad (3.118)$$

und

$$n_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 n_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z = 0. \quad (3.119)$$

Das Aufstellen der Momentengleichgewichte liefert analog zur Plattentheorie die Zusammenhänge

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = q_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = q_y. \quad (3.120)$$

Zur weiteren Vereinfachung der Gleichung (3.119) sind die Größenordnungen der Einzelglieder in den Gleichungen (3.117) und (3.118) abzuschätzen. Hierzu wird eine Länge l gewählt, so daß gilt:

$$l \frac{\partial q_x}{\partial x} \approx q_x \quad \text{und} \quad l \frac{\partial n_x}{\partial x} \approx n_x. \quad (3.121)$$

Unter einer ähnlichen geometrischen Betrachtung wie in der Abbildung 3.11 kann dann der Zusammenhang

$$n_x l \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \approx q_x \quad (3.122)$$

formuliert werden. Die getroffene Annahme (3.110) läßt sich erweitern zu

$$\left(l \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 \ll 1, \quad (3.123)$$

so daß die Beziehung

$$n_x^2 \approx \left(l \frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} \right)^2 \gg \left(n_x l \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 \approx q_x^2 \gg \left(q_x l \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 \quad (3.124)$$

gefolgert werden kann. Die linke Seite der Gleichung (3.124) ist auch ohne die Quadrate um zwei Stufen größer als die rechte, so daß weiter der Zusammenhang

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} \gg q_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (3.125)$$

abgeleitet werden kann. Damit vereinfachen sich die Gleichungen (3.117) und (3.118) zu

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + p_x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + p_y = 0 \quad (3.126)$$

Die Einführung der AIRYSchen Spannungsfunktion Φ , den Beziehungen

$$n_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \int p_x dx, \quad n_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \int p_y dy, \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (3.127)$$

genügen. Somit läßt sich die Gleichung (3.119) mit den Zusammenhängen (3.126)-(3.127) schreiben als:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p_z + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int p_x dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int p_y dy. \quad (3.128)$$

3.2.1 Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen

Zur Herleitung der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen der schwach gekrümmten KIRCHHOFF-Platte werden zunächst die kinematischen Beziehungen einer Normalen $A_0 A = \zeta$ eines Schalenelementes betrachtet (s. a. Abb. 3.12). Der Punkt A_0 kennzeichnet eine beliebige Position auf der Schalenmittelfläche. Der Punkt A befindet sich innerhalb der Schalendicke mit dem Abstand $0 < \zeta < h/2$ zur Mittelfläche der Schale und bildet mit dem Punkt A_0 eine Normale zur Schalenmittelfläche. Durch die Schalenkrümmung

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (3.129)$$

schließt die Tangente im Punkt A_0 mit der x -Achse den Winkel $\frac{\partial z}{\partial x}$ ein. Analog läßt sich für einen Schnitt $x = const.$ der Winkel $\frac{\partial z}{\partial y}$ angeben. u , v und w kennzeichnen die Verschiebungen in der Schalenmittelfläche bzw. senkrecht dazu (s. Abb. 3.13). Die Verschiebungen im

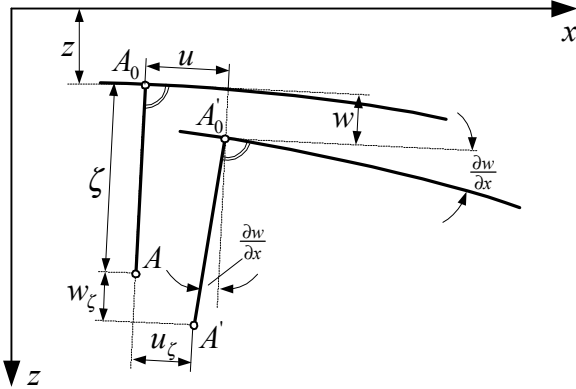


Abbildung 3.12: Kinematische Beziehungen des Schalenelements beim Schnitt $y = const..$

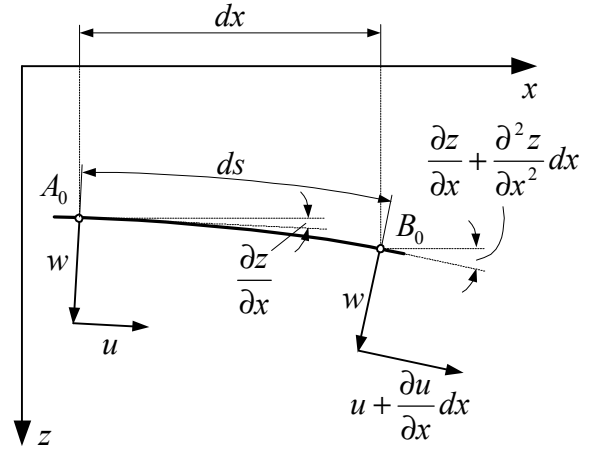


Abbildung 3.13: Linienelement mit den Endpunkten A_0, B_0 auf der Schalenmittelfläche beim Schnitt $y = const..$

Abstand ζ zur Mittelfläche und parallel zu u, v und w werden mit u_ζ, v_ζ und w_ζ bezeichnet (s. Abb. 3.14). Nach den Verschiebungen u und w des Punktes A in der Abbildung 3.12 besitzt das Linienelement A_0A die neuen Endpunkte A'_0A' . Die Tangenten durch die Punkte A_0 und A'_0 schließen zusammen den Winkel $\frac{\partial w}{\partial x}$ ein. Durch die gegenseitige Annäherung der Normalen A_0A und A'_0A' kann für die Verschiebungen des Punktes A für kleine Winkel,

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad \text{und} \quad \cos \alpha \approx 1, \quad (3.130)$$

die Beziehung

$$u_\zeta = u - \frac{\partial w}{\partial x} \zeta \quad \text{bzw. analog} \quad v_\zeta = v - \frac{\partial w}{\partial y} \zeta \quad (3.131)$$

angegeben werden. Die Abbildung 3.13 zeigt das Linienelement AB im Abstand ζ zur Mittelfläche. Aufgrund der Flachheit der Schale kann die Länge des Linienelementes mit $ds \approx dx$ angenommen werden. Durch die Verschiedenheit der Verschiebungen in den Punkten A und B erfährt das Linienelement die Verlängerung $\frac{\partial u_\zeta}{\partial x}$. Die radiale Verschiebung w_ζ führt aus Gründen der gegenseitigen Annäherung der Normalen A_0A und B_0B zu einem negativen Anteil $-\frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial x^2}$ bei der Längsdehnung des Linienelementes AB . Somit kann für die Dehnung der Zusammenhang

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_\zeta}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial x^2} \quad (3.132a)$$

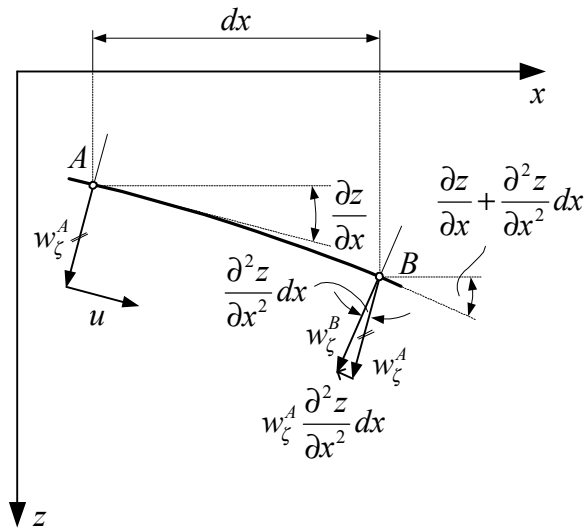
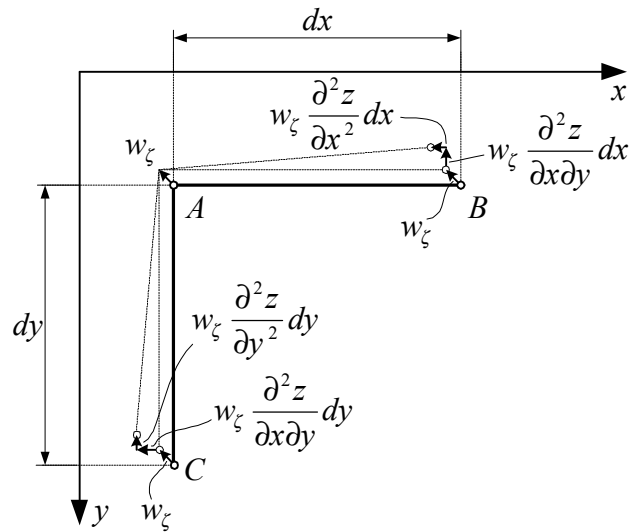
bzw. in analoger Weise

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial y^2} \quad (3.132b)$$

formuliert werden. Bedingt durch die Verdrillung

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (3.133)$$

der Schalenmittelfläche ist die Radialverschiebung w_ζ^B an der Stelle B zur Verschiebung w_ζ^A des Punktes A nicht nur um den Betrag $w_\zeta \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial x^2} dx$ in x -Richtung geneigt, sondern auch um


 Abbildung 3.14: Verzerrungen des Linienelementes AB .

 Abbildung 3.15: Schubverzerrungen der Linienelemente AB und AC .

$w_\zeta \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial x \partial y} dy$ in y -Richtung. Ein analoges Verhalten kann für den Punkt C formuliert werden, der mit dem Punkt A ein zu dem Linienelement AB orthogonales Linienelement AC bildet (s. Abb. 3.15). Bei der Betrachtung der Schubverzerrung γ_{xy} liefert somit auch die Radialverschiebung w_ζ einen winkelvergrößernden Anteil zu der aus dem ebenen Verzerrungszustand bekannten Komponente $\frac{\partial u_\zeta}{\partial y} + \frac{\partial v_\zeta}{\partial x}$. Die Schubverzerrung läßt sich im Fall der flachen Schale mit

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial y} + \frac{\partial v_\zeta}{\partial x} - 2w_\zeta \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial x \partial y} \quad (3.134)$$

angeben. Mit den kinematischen Beziehungen der schwach gekrümmten Platte bzw. der flachen Schale (3.132a), (3.132b), (3.134) folgt mit den Gleichungen (3.131) für die Verzerrungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \zeta - w \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (3.135a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \zeta - w \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (3.135b)$$

und

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \zeta - 2w \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \quad (3.135c)$$

3.2.2 Materialgesetz

Ausgehend von einem linear-elastischen Materialverhalten und einer isotropen Materialsymmetrie der flachen Schale können die Zusammenhänge zwischen den Spannungen und Verzerrungen über das HOOKEsche Gesetz der Gleichung (3.18a)-(3.18c) hergestellt werden. Unter der vereinfachenden Annahme sehr dünner Schalen und einem großen Krümmungsradius r geht das Glied z/r in den Gleichungen (3.111)-(3.115) gegen Null. Mit Hilfe des HOOKEschen Gesetzes, den Definitionsgleichungen (3.112)-(3.115) der Schalenmomente und

-spannungen und den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen der Gleichungen (3.135a)-(3.135c) folgt nach der Integration über die Schalendicke h das Elastizitätsgesetz der schwach gekrümmten Platte zu

$$n_x = D \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) w \right], \quad (3.136a)$$

$$n_y = D \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) w \right], \quad (3.136b)$$

$$n_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} w \right] \quad (3.136c)$$

mit der Dehnsteifigkeit $D = \frac{E h}{1-\nu^2}$,

$$m_x = -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (3.136d)$$

$$m_y = -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad (3.136e)$$

$$m_{xy} = -K (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.136f)$$

mit der Biegesteifigkeit $K = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$

3.2.3 Schwach gekrümmte Platte über rechteckigem Grundriß

Die Zusammenhänge (3.120), (3.127) und (3.128) können auf zwei Differentialgleichungen vierter Ordnung mit den Unbekannten $\Phi(x, y)$ und $w(x, y)$ reduziert werden (s. a. FLÜGGE [24] und SCHNELL et al. [98]):

$$K \Delta \Delta w(x, y) - \kappa_x \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} - \kappa_y \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = p(x, y), \quad (3.137a)$$

$$\Delta \Delta \Phi(x, y) + D(1-\nu) \left(\kappa_x \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \kappa_y \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (3.137b)$$

Mit der Einführung einer zunächst noch unbekanntes Hilfsfunktion $\psi(x, y)$ und der Ansätze

$$w(x, y) = \Delta \Delta \psi(x, y) \quad (3.138a)$$

und $\Phi(x, y) = -D(1-\nu^2) \left[\kappa_x \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} + \kappa_y \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} \right]. \quad (3.138b)$

kann das Problem in eine partielle Differentialgleichung achter Ordnung überführt werden:

$$\Delta \Delta \Delta \Delta \psi(x, y) + \frac{D(1-\nu^2)}{K} \left[\kappa_x^2 \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial y^4} + 2 \kappa_x \kappa_y \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \kappa_y^2 \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^4} \right] = \frac{p}{K}. \quad (3.139)$$

Die unbekanntes Hilfsfunktion $\psi(x, y)$ kann für die gelenkige Lagerung analog dem Vorgehen in Kapitel 3.1.5 in einer FOURIER-Doppelreihe entwickelt werden:

$$\psi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right). \quad (3.140)$$

Der Ansatz (3.140) erfüllt die NAVIERSchen Randbedingungen (3.141) der frei drehbar gelagerten, schwach gekrümmten Platte, z. B. für den Rand $x = const.$:

$$w = v = m_x = n_x = 0, \quad (3.141)$$

Ebenso wird die Vertikallast $p(x, y)$ in einer FOURIER-Doppelreihe entwickelt,

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (3.142)$$

deren FOURIER-Koeffizienten für die Einzellast bereits in dem Kapitel 3.1.5 mit

$$p_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \quad (3.143)$$

bestimmt worden sind. Durch Einsetzen der Doppelreihenansätze (3.140) für die Hilfsfunktion $\psi(x, y)$ und (3.142) für die Last $p(x, y)$ in die partielle Differentialgleichung (3.139) und anschließenden Koeffizientenvergleich erhält man den FOURIER-Koeffizienten für die Hilfsfunktion $\psi(x, y)$:

$$\psi_{mn} = \frac{p_{mn}}{K \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^4 + E h \left[\kappa_y \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \kappa_x \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2}. \quad (3.144)$$

Damit ist es nun möglich mit der Gleichung (3.138a) die Durchbiegung $w(x, y)$ der Plattenmittelfläche zu berechnen,

$$w(x, y) = \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial y^4}, \quad (3.145a)$$

so daß sich nach Einsetzen der Hilfsfunktion (3.140) mit den Gleichungen (3.142) bis (3.144) der Zusammenhang

$$w(x, y) = \frac{4P}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{K \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^4 + E h \left[\kappa_y \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \kappa_x \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.145b)$$

für die Biegefläche ergibt. Mit der nun bekannten Spannungsfunktion $\Phi(x, y)$ aus der Gleichung (3.138b) können die Schnittkräfte bestimmt werden:

$$n_x = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2} = -Eh \left[\kappa_x \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial y^4} + \kappa_y \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right], \quad (3.146a)$$

$$n_y = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2} = -Eh \left[\kappa_x \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \kappa_y \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^4} \right], \quad (3.146b)$$

$$n_{xy} = -\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y} = Eh \left[\kappa_x \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x \partial y^3} + \kappa_y \frac{\partial^4 \psi(x, y)}{\partial x^3 \partial y} \right]. \quad (3.146c)$$

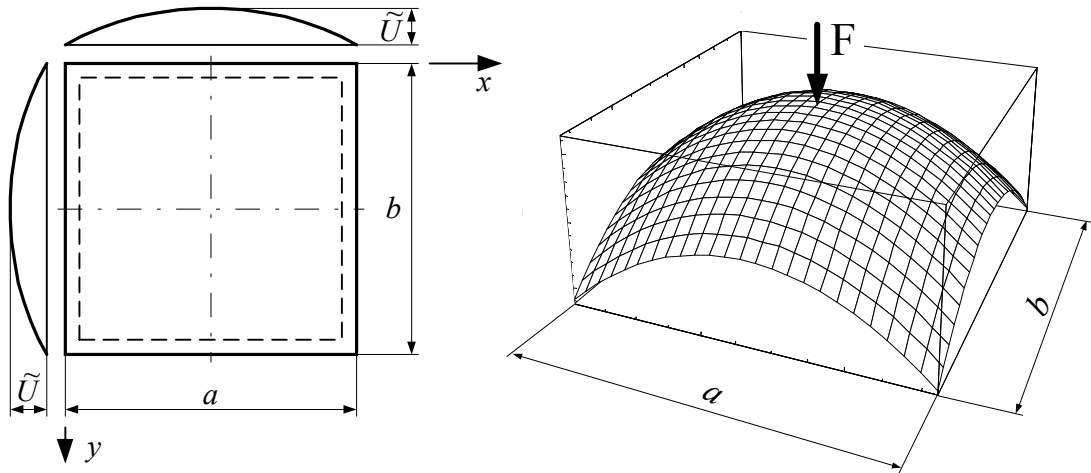


Abbildung 3.16: Kugelschale über quadratischem Grundriß.

Beispielberechnung

Als Beispielberechnung wird eine allseitig gelenkig gelagerte, schwach gekrümmte Platte über quadratischem Grund betrachtet. Der Grundriß sei $a = b = 50\text{mm}$ und die Platte habe eine Überhöhung von jeweils $\tilde{U} = \pm 0,6\text{mm} / \pm 1,2\text{mm} / \pm 1,8\text{mm}$ (s. Abb. 3.2.3, links; s. a. Kap. 6.1.3). Die Dicke der Platte betrage $h = 4\text{mm}$. Das Material weise eine Steifigkeit von $E = 70\text{GPa}$ mit einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0,3$ auf. Belastet wird die schwach gekrümmte Platte durch eine zentral angreifende Vertikallast F (Abb. 3.2.3, rechts). Hinreichende Konvergenz der Lösungen mittels der FOURIER-Doppelreihenansätze (3.145b) kann dabei mit der Ansatzordnung $M = 11$ nachgewiesen werden (s. a. Kap. 4.5.3). Im Sonderfall der schwach gekrümmten Platte über quadratischem Grundriß ($a = b$) läßt sich dann die Plattenmittelfläche mit

$$z(x, y) = \frac{1}{2R} \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 \right] - \tilde{U} \quad (3.147)$$

beschreiben. Somit bestimmen sich die Krümmungen mit der Gleichung (3.129) zu

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \kappa_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{R}. \quad (3.148)$$

Die Abbildung 3.17 zeigt die relative Steifigkeit als Quotienten der relativen Maximaldurchbiegung w_{max}^{ebPl}/F der ebenen Platte und der relativen maximalen Durchbiegung w_{max}/F der schwach gekrümmten Platte in Abhängigkeit von der Überhöhung \tilde{U} . Desweiteren ist in der Abbildung 3.17 die maximale relative Membranspannung $\sigma_{x,max}^{mem}/F = N_{x,max}/(hF)$ der schwach gekrümmten Platte bezogen auf die maximale relative Biegespannung $\sigma_{x,max}^B/F$ der ebenen Platte über der Überhöhung aufgetragen. Bei der Berechnung der schwach gekrümmten Platte mit einer Doppel-FOURIER-Reihe (3.145b) erfüllen die gewählten Ansatzfunktionen (3.140) und (3.142) die geforderten NAVIERSchen Randbedingungen. Die Berechnungen zeigen, daß die Plattenkrümmungen einen wesentlichen Einfluß auf die Steifigkeit der schwach gekrümmten Platte und die Schnittlasten besitzen. So sinkt bei gleicher Vertikallast F mit zunehmender Überhöhung \tilde{U} die Durchbiegung $w(x, y)$. Das heißt, daß die Krümmung der Platte die Steifigkeit erhöht. Die Darstellung der relativen Durchbiegung

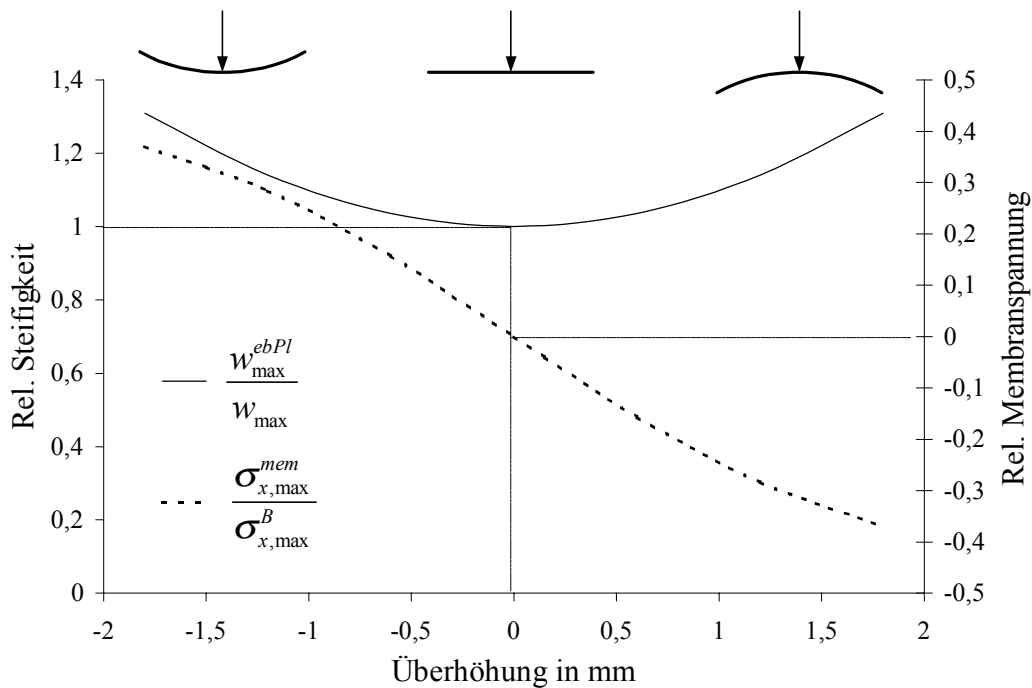


Abbildung 3.17: Geometrieabhängigkeit der relativen Steifigkeit und der relativen Membranspannung der schwach gekrümmten Platte.

über der Überhöhung zeigt dabei einen symmetrischen Verlauf, so daß die Orientierung der Krümmung keinen Einfluß auf die Gesamtsteifigkeit besitzt. Wie bereits im Kapitel 3.2 diskutiert, werden mit zunehmender Überhöhung die eingepprägten Vertikallasten nicht mehr ausschließlich über Querkräfte und -momente sondern auch über Membrankräfte abgetragen. In der Abbildung 3.17 wird deutlich, daß mit der Krümmung der Platte auch die Membranspannungen ansteigen. Der Kurvenverlauf der relativen Membranspannung über der Überhöhung ist antisymmetrisch. Konkav belastete Platten erzeugen Druckspannungen und konkav belastete Zugspannungen. Bezüglich der hier betrachteten Membrankraft besitzt die Krümmungsorientierung der Platte eine wesentliche Bedeutung.

3.3 Erweiterte KIRCHHOFFSCHE Theorie für orthotrope Platten

Die im Kapitel 3.1 hergeleitete KIRCHHOFFSCHE Plattentheorie beschränkt sich auf Platten mit homogenen, isotropen Materialeigenschaften. Für den Fall einer Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften ist die Plattentheorie in Kapitel 3.1 nicht ausreichend. Generell wird zwischen einer werkstoffabhängigen Anisotropie, wie sie beispielsweise in einer Einzelschicht eines Mehrschichtverbundes auftritt, und einer konstruktiven Anisotropie, wie sie in einem Laminat vorliegt, unterschieden. In diesem Kapitel soll die allgemeine KIRCHHOFFSCHE Plattentheorie für den Sonderfall der Orthotropie erweitert werden. Das Material soll hierzu als makroskopisch homogen betrachtet werden.

3.3.1 Annahmen der orthotropen KIRCHHOFF-Platte

Analog den Aufzählungen in Kapitel 3.1.1 gelten für die orthotrope KIRCHHOFF-Platte die Annahmen der allgemeinen KIRCHHOFFschen Plattentheorie. Diese Grundannahmen der isotropen Platte sind für den Fall der Orthotropie zu ergänzen [3]:

- Das Material wird als makroskopisch homogen und orthotrop betrachtet. Das heißt, sind die lokalen Störungen der Isotropie (z. B. Übergang von Faser und Matrix) genügend klein, so können die Unstetigkeiten „verschmiert“ werden.
- Die Materialeigenschaften werden als konstant über die Plattendicke und in den zwei orthogonalen Richtungen betrachtet.

3.3.2 Grundgleichungen der orthotropen KIRCHHOFF-Platte

Ausgehend von den Annahmen der orthotropen Platte in Kapitel 3.3.1 und unter Berücksichtigung der analogen Voraussetzungen der allgemeinen KIRCHHOFFschen Plattentheorie, wie sie in Kapitel 3.1 getroffen worden sind, behalten alle Grundgleichungen, mit Ausnahme des Stoffgesetzes, ihre Gültigkeit bei. Somit können die Plattenschnittgrößen (3.7)-(3.9), die Gleichgewichtsbedingungen (3.10), (3.13) sowie die Verzerrungs-Verformungs-Beziehung (3.15) für die weitere Herleitung übernommen werden [82]. Das HOOKEsche Gesetz ist nun zu erweitern für linear elastisches, orthotropes Material. Fallen die x - und y -Achse mit den Orthotropierichtungen des Materials zusammen, so ist der Elastizitätsmodul E_x für die x -Richtung und E_y für die y -Richtung zu definieren. Die Querkontraktionszahl für die Querverzerrung in y -Richtung infolge einer Spannung in x -Richtung wird als ν_{xy} bezeichnet. Die POISSON-Zahl ν_{yx} beschreibt folglich die Verformungsantwort des Materials in x -Richtung aufgrund einer Belastung in y -Richtung [32, 104]. Somit ergeben sich für die orthotrope Platte die Zusammenhänge

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{yx} \frac{\sigma_y}{E_y}, \quad (3.149a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x}, \quad (3.149b)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}, \quad (3.149c)$$

wobei gilt:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (3.150)$$

Durch Umstellen der Gleichungen (3.149a)-(3.149c) lassen sich die Zusammenhänge nach den Spannungen auflösen:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} (\varepsilon_x + \nu_{yx}\varepsilon_y), \quad (3.151)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} (\varepsilon_y + \nu_{xy}\varepsilon_x), \quad (3.152)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G_{xy}\gamma_{xy}. \quad (3.153)$$

Mit den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen analog den Gleichungen (3.15) folgt aus den Gleichungen (3.151)-(3.153)

$$\sigma_x = -\frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z, \quad (3.154)$$

$$\sigma_y = -\frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z, \quad (3.155)$$

$$\tau_{xy} = -2G_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) z. \quad (3.156)$$

Da die weitere Gültigkeit der Plattenschnittgrößen der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie gefordert wurde, folgt durch Einsetzen der Gleichungen (3.154)-(3.156) in die Gleichungen (3.8)-(3.9)

$$m_x = -\frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.157)$$

$$m_y = -\frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.158)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -\frac{G_{xy} h^3}{6} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (3.159)$$

Mit Einführung der Plattensteifigkeiten

$$K_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad (3.160)$$

und

$$K_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad (3.161)$$

folgt aus (3.157) und (3.158)

$$m_x = -K_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.162)$$

und

$$m_y = -K_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (3.163)$$

Die Konstanten K_x , K_y , ν_{xy} und ν_{yx} sind dabei nach dem Reziprozitätssatz von MAXWELL-BETTI [101]

$$\frac{E_x}{\nu_{xy}} = \frac{E_y}{\nu_{yx}} \quad (3.164)$$

verknüpft durch die Beziehung

$$\frac{K_x}{\nu_{xy}} = \frac{K_y}{\nu_{yx}}. \quad (3.165)$$

Da die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} aufgrund der Gleichgewichtsbedingungen (Satz von der Gleichheit zugeordneter Schubspannungen) gleich sind, ist dieser Zusammenhang auch

für die Drillmomente m_{xy} und m_{yx} zu fordern [32]. Für die isotrope Platte gilt nach der Gleichung (3.31) der Zusammenhang

$$m_{xy} = m_{yx} = -K(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.166)$$

Mit der Gleichung (3.150) kann weiter auch eine Abhängigkeit der Plattensteifigkeiten K_x und K_y von den Materialeigenschaften beider Hauptrichtungen gefolgert werden. Die Mittelwerte $\sqrt{K_x K_y}$ der Steifigkeiten und $\sqrt{\nu_{xy} \nu_{yx}}$ der Querverzerrungen liefern damit eine gute Näherung für den orthotropen Fall. Somit folgt aus (3.166)

$$m_{xy} = m_{yx} = -\sqrt{K_x K_y} \left(1 - \sqrt{\nu_{xy} \nu_{yx}}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.167)$$

für das Drillmoment der orthotropen Platte. Mit Einführung der Drillsteifigkeit

$$2C = \sqrt{K_x K_y} \left(1 - \sqrt{\nu_{xy} \nu_{yx}}\right) \quad (3.168)$$

folgt aus (3.167) für das Drillmoment

$$m_{xy} = m_{yx} = -2C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.169)$$

und mit der Gleichung (3.159)

$$2C = 2G_{xy} \frac{h^3}{12}. \quad (3.170)$$

Die Drillsteifigkeit $2C$ kann entweder mit der Gleichung (3.168) aus den Materialkennwerten der orthotropen Platte berechnet oder aus dem Schubmodul G_{xy} ermittelt werden. Für die Querkräfte q_x und q_y folgt aus den Gleichungen (3.35) mit (3.162), (3.163) und (3.169):

$$q_x = -K_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (K_x \nu_{yx} + 2C) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \quad (3.171)$$

$$q_y = -K_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (K_y \nu_{xy} + 2C) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}. \quad (3.172)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für die Querkräfte der Gleichungen (3.171) und (3.172) in die Gleichgewichtsbedingungen (3.10) folgt die Plattendifferentialgleichung der orthotropen Platte

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (3.173)$$

mit

$$2H = K_x \nu_{yx} + K_y \nu_{xy} + 4C. \quad (3.174)$$

Im Sonderfall der Isotropie

$$K_x = K_y = K, \quad (3.175)$$

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu \quad (3.176)$$

geht die Plattendifferentialgleichung der orthotropen Platte (3.173) in die Differentialgleichung der isotropen Platte (3.32) über.

3.3.3 Plattenspannungen der orthotropen KIRCHHOFF-Platte

Die Plattenspannungen in Abhängigkeit der Schnittgrößen der erweiterten KIRCHHOFFSchen Plattentheorie für orthotrope Platten lassen sich analog zu den Gleichungen (3.39)-(3.41) angeben. Ähnlich der KIRCHHOFF-Platte können die Spannungen in Dickenrichtung nicht direkt angegeben werden - sie sind wieder aus den lokalen Bewegungsgleichungen (3.42)-(3.44) herzuleiten:

$$\begin{aligned}\sigma_z(x, y, z) &= - \left[C_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2C_{12} + 4C_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \left(\frac{z^3}{6} - \frac{h^2}{8} z + \frac{h^3}{24} \right), \\ \tau_{zy}(x, y, z) &= \left[(C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right), \\ \tau_{zx}(x, y, z) &= \left[C_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right).\end{aligned}\quad (3.177)$$

Die C_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) sind dabei die Koeffizienten der orthotropen Steifigkeitsmatrix $[C]$ aus der linear-elastischen Kontinuumsmechanik (2.55).

3.3.4 Randbedingungen der orthotropen KIRCHHOFF-Platte

Für die Randbedingungen der orthotropen KIRCHHOFF-Platte gelten die gleichen Überlegungen wie in Kapitel 3.1.4 für die isotrope KIRCHHOFF-Platte. Die Plattengleichung der orthotropen Platte (3.173) ist wiederum eine Differentialgleichung vierter Ordnung mit acht Integrationskonstanten. Pro Rand können nur zwei Randbedingungen formuliert werden, so daß erneut Ersatzquerkräfte wie in den Gleichungen (3.58)-(3.60) eingeführt werden müssen [32, 82]. So folgt unter Berücksichtigung der Zusammenhänge (3.171) und (3.172) für die Ersatzquerkräfte

$$\bar{q}_x = -K_x \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{4C}{K_x} + \nu_{yx} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \quad (3.178)$$

und

$$\bar{q}_y = -K_y \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\frac{4C}{K_y} + \nu_{xy} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \quad (3.179)$$

Kapitel 4

Grundgleichungen anisotroper Laminatplatten

Im Kapitel 3 wurde bei der ebenen Platte davon ausgegangen, daß der Scheiben- und Plattenzustand voneinander entkoppelt sind. Während bei der Scheibe die Kräfte in der Ebene des Flächentragwerkes wirken, greifen bei der Platte die Lasten ausschließlich quer zur Mittelebene an [2, 28, 30, 32]. Die auftretenden Schnittlasten sind drei Scheibenschnittgrößen und fünf Plattenschnittgrößen, die im Fall der hergeleiteten isotropen und orthotropen KIRCHHOFF-Platte voneinander unabhängig sind. Bei der Betrachtung von mehrschichtigen Laminaten ist diese Annahme nicht uneingeschränkt übertragbar. Im nachfolgenden Abschnitt soll in die Berechnung von Schichtverbunden mit Hilfe der Laminattheorie eingeführt werden.

4.1 Monotrope Einzelschicht

Die kleinste Einheit eines Laminates ist die Einzelschicht (ES), deren Materialkennwerte sich aus dem Werkstoffverhalten der Einzelkomponenten berechnen lassen. Die mikromechanische Betrachtung der Eigenschaften der Einzelkomponenten des Verbundes zur Ermittlung der effektiven Gesamteigenschaften der unidirektionalen (UD) beziehungsweise parallelfaserverstärkten Einzelschicht (P-ES) wird als Homogenisierung bezeichnet. Für dieses Vorgehen sind zahlreiche Vorschläge für die Mischungsregeln entworfen worden [28, 58, 83]. In der Praxis ist die Materialeigenschaftsermittlung der Einzelfaser sehr schwierig bzw. unmöglich, so daß im allgemeinen das Werkstoffverhalten der Einzelschicht ermittelt wird. Aus diesem Grund wird auf eine Betrachtung der Mikromechanik im folgenden verzichtet. Die Werkstoffeigenschaften der Einzelkomponenten des Verbundes sind dabei so zu kombinieren, daß für den geforderten Einsatzbereich eine möglichst vorteilhafte Gesamteigenschaft entsteht. Dieser Vorteil kann unter anderem in einer besonderen Richtungsabhängigkeit der Werkstoffeigenschaften, besonders guter spezifischer Materialkennwerte oder der Thermostabilität für einen bestimmten Anwendungsbereich, etc. bestehen. Die Materialeigenschaften der unidirektionalen Einzelschicht werden in Faserlängsrichtung durch die Eigenschaften der Faser und senkrecht hierzu durch die Matrixeigenschaften dominiert. Wird das lokale Koordinatensystem so gewählt, daß die Bezugsachsen mit den Mate-

rialhauptachsen zusammenfallen, weist die Steifigkeitsmatrix der Einzelschicht eine transversalisotrope Materialsymmetrie auf. Oftmals ist die Wahl eines Koordinatensystems sinnvoll, bei dem die Richtungen der Bezugsachsen in der Schichtebene nicht gleich mit denen der Stoffhauptachsen der Einzelschicht sind, so daß man von einer monotropen Materialsymmetrie spricht. Für den verallgemeinerten ebenen Spannungszustand (ESZ) gilt analog dem Vorgehen im Kapitel 3 die Annahme

$$\sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{33} = 0. \quad (4.1)$$

Aus den Monotropiebedingungen bei Symmetrie bezüglich der (1,2)-Ebene folgt für die Nachgiebigkeiten

$$S_{14} = S_{15} = S_{24} = S_{25} = S_{34} = S_{35} = S_{46} = S_{56} = 0. \quad (4.2)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß für die Koeffizienten der Nachgiebigkeits- bzw. der Steifigkeitsmatrizen unterschiedliche Indizierungen in der Literatur angewendet werden. Hier ist durchgängig die sogenannte Ingenieurschreibweise gewählt worden, so daß sich der Spannungsvektor $\{\sigma\}$ schreibt als

$$\{\sigma\}^T = \left\{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{23} \quad \tau_{31} \quad \tau_{12} \right\} \quad (4.3)$$

und der Verzerrungsvektor sich in der Form

$$\{\varepsilon\}^T = \left\{ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31} \quad \gamma_{12} \right\} \quad (4.4)$$

darstellt. Somit reduziert sich das Stoffgesetz der monotropen Einzelschicht zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{11} \sigma_{11} + S_{12} \sigma_{22} + S_{16} \tau_{12}, \\ \varepsilon_{22} &= S_{12} \sigma_{11} + S_{22} \sigma_{22} + S_{26} \tau_{12}, \\ \varepsilon_{33} &= S_{13} \sigma_{11} + S_{23} \sigma_{22} + S_{36} \tau_{12}, \\ \gamma_{23} &= 0, \\ \gamma_{31} &= 0, \\ \gamma_{12} &= S_{16} \sigma_{11} + S_{26} \sigma_{22} + S_{66} \tau_{12}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Verzerrung ε_{33} in Dickenrichtung der Schicht ist hierbei keine unabhängige Größe. Sie kann aus den Gleichungen (4.1) und (4.5) mit

$$\sigma_{33} = C_{13} \varepsilon_{11} + C_{23} \varepsilon_{22} + C_{33} \varepsilon_{33} + C_{36} \gamma_{12} = 0 \quad (4.6)$$

abgeleitet werden:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{C_{33}} (C_{13} \varepsilon_{11} + C_{23} \varepsilon_{22} + C_{36} \gamma_{12}). \quad (4.7)$$

Unter Berücksichtigung der abhängigen Verzerrung ε_{33} läßt sich die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung ermitteln:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \varepsilon_{11} + \left(C_{12} - \frac{C_{13} C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_{22} + \left(C_{16} - \frac{C_{13} C_{36}}{C_{33}} \right) \gamma_{12}, \\ \sigma_{22} &= \left(C_{12} - \frac{C_{23} C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_{11} + \left(C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \right) \varepsilon_{22} + \left(C_{26} - \frac{C_{23} C_{36}}{C_{33}} \right) \gamma_{12}, \\ \tau_{12} &= \left(C_{16} - \frac{C_{36} C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_{11} + \left(C_{26} - \frac{C_{36} C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_{22} + \left(C_{66} - \frac{C_{36}^2}{C_{33}} \right) \gamma_{12}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Durch Einführung der reduzierten Steifigkeit [46]

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3} C_{j3}}{C_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6, \quad (4.9)$$

kann die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung in Gleichung (4.8) vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= Q_{11} \varepsilon_{11} + Q_{12} \varepsilon_{22} + Q_{16} \gamma_{12}, \\ \sigma_{22} &= Q_{12} \varepsilon_{11} + Q_{22} \varepsilon_{22} + Q_{26} \gamma_{12}, \\ \tau_{12} &= Q_{16} \varepsilon_{11} + Q_{26} \varepsilon_{22} + Q_{66} \gamma_{12}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Unter der getroffenen Annahme des ebenen Spannungszustandes lassen sich für den Fall, daß die Achsen des betrachteten lokalen Koordinatensystems mit den Stoffhauptachsen zusammenfallen, aus (4.9) die reduzierten Koeffizienten direkt angeben:

$$Q_{ii} = \frac{E_{ii}}{1 - \nu_{ij} \nu_{ji}}, \quad i, j = 1, 2, \quad (4.11)$$

$$Q_{ij} = \frac{\nu_{ij} E_{jj}}{1 - \nu_{ij} \nu_{ji}}, \quad i, j = 1, 2, \quad (4.12)$$

$$Q_{66} = G_{12}. \quad (4.13)$$

Für die Nachgiebigkeiten folgt dann weiter:

$$S_{ii} = \frac{1}{E_{ii}}, \quad i, j = 1, 2, \quad (4.14)$$

$$S_{ij} = -\frac{\nu_{ji}}{E_{jj}}, \quad i, j = 1, 2, \quad (4.15)$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \quad (4.16)$$

4.1.1 Schnittgrößen der monotropen Einzelschicht

Betrachtet man die Schnittgrößen am differentiellen Element der monotropen Einzelschicht im faserorientierten x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem, so läßt sich der aus dem Scheibenzustand resultierende Schnittkraftvektor $\{n\}^T = \{n_{11}, n_{22}, n_{12}\}$ angeben als [28]:

$$\{n\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\} dx_3. \quad (4.17)$$

Unter der Annahme einer konstanten Spannungsverteilung $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}\}$ über die Schichtdicke h des reinen Scheibenspannungszustandes folgt aus der Gleichung (4.17) weiter:

$$\{n\} = \{\sigma\} h. \quad (4.18)$$

Mit der Bezeichnung

$$\varepsilon_0(x_1, x_2) = \varepsilon(x_1, x_2, x_3 = 0) \quad (4.19)$$

der Mittelflächenverzerrungen der Einzelschicht und unter Einbeziehung der über die Schichtdicke h konstanten, reduzierten Steifigkeit $[Q]$ läßt sich für die Gleichung (4.10) der Zusammenhang

$$\{n\} = [Q] \varepsilon_0 h = [A] \varepsilon_0 \quad (4.20)$$

schreiben. Hierbei stellt

$$[A] = [Q] h \quad (4.21)$$

die Scheibensteifigkeit und

$$\{\varepsilon_0\}^T = \{\varepsilon_{11}^\circ, \varepsilon_{22}^\circ, \gamma_{12}^\circ\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\} \quad (4.22)$$

die ebene Verzerrung der Mittelfläche dar. Analog der Betrachtung des differentiellen isotropen Plattenelementes (Abb. 3.2) führt man für über die Elementdicke veränderliche Spannungen die Schnittkräfte

$$\{m\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\} x_3 dx_3 \quad (4.23)$$

mit

$$\{m\}^T = \{m_{11}, m_{22}, m_{12}\} \quad (4.24)$$

ein. Dabei treten Krümmungen κ_{11}, κ_{22} und Verdrillungen κ_{12} mit

$$\{\kappa\}^T = \{\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} \quad (4.25)$$

der Schnittfläche auf. Für die über die Plattendicke h linearen Verzerrungen $\{\varepsilon\}$ läßt sich schreiben:

$$\{\varepsilon(x_1, x_2, x_3)\} = \{\kappa\} x_3. \quad (4.26)$$

Mit den Gleichungen (4.23)-(4.26) folgt weiter der Zusammenhang

$$\{m\} = [Q] \{\kappa\} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3^3 dx_3 = [Q] \{\kappa\} \frac{h^3}{12} = [D] \{\kappa\}. \quad (4.27)$$

Hierbei kennzeichnet $[D]$ die Plattensteifigkeit der Einzelschicht:

$$[D] = [Q] \frac{h^3}{12}. \quad (4.28)$$

Erfährt die monotrope Einzelschicht gleichzeitig Belastungen des Scheiben- und Plattenzustandes, so superponieren sich die Scheiben- und Plattenverzerrungen zur Gesamtverzerrung

$$\{\varepsilon(x_1, x_2, x_3)\} = \{\varepsilon_0(x_1, x_2)\} + \{\kappa(x_1, x_2)\} x_3. \quad (4.29)$$

4.1.2 Spannungsberechnung der monotropen Einzelschicht

Für den Spannungsvektor $\{\sigma\}$ folgt mit der Gleichung (4.29) unter Beachtung des Zusammenhangs (4.10)

$$\{\sigma(x_1, x_2, x_3)\} = [Q] \{\varepsilon_0(x_1, x_2)\} + [Q] \{\kappa(x_1, x_2)\} x_3. \quad (4.30)$$

Die Schnittgrößen in den Gleichungen (4.17) und (4.23) können somit in Hypermatrixschreibweise notiert werden als

$$\begin{Bmatrix} \{n\} \\ \{m\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix}. \quad (4.31)$$

Für den Fall der Kopplung der Platten- und Scheibenzustände wird durch die Koppelsteifigkeitsmatrix $[B]$ der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und Verzerrungen hergestellt:

$$\begin{Bmatrix} \{n\} \\ \{m\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix}. \quad (4.32)$$

Ähnlich der KIRCHHOFF-Platte für isotrope Materialien enthält die Beschreibung der monotropen Einzelschicht keine direkten Informationen über die Spannungen in Dickenrichtung der Schicht; sie sind wieder aus den lokalen Bewegungsgleichungen herzuleiten. Aus der Gleichung (3.42) folgt zunächst

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} = -\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2}. \quad (4.33)$$

Aus (4.30) läßt sich mit (4.22) und (4.25) der Zusammenhang

$$\sigma_{11} = \left[Q_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} + Q_{12} \frac{\partial v}{\partial x_2} + Q_{16} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] - \left[Q_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + Q_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2Q_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] x_3 \quad (4.34)$$

angeben. Analog zu der Gleichung (3.38) folgt aus (4.30) weiter

$$\tau_{21} = \left[Q_{61} \frac{\partial u}{\partial x_1} + Q_{62} \frac{\partial v}{\partial x_2} + Q_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] - \left[Q_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + Q_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2Q_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] x_3. \quad (4.35)$$

Unter der Annahme einer symmetrischen reduzierten Steifigkeitsmatrix $[Q]$ folgt durch Einsetzen der Gleichungen (4.34) und (4.35) in (4.33) der Ausdruck für die Schubspannung in 3-1-Richtung:

$$\begin{aligned} \tau_{31}(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{x_3} \left\{ - \left[Q_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2Q_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + Q_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + Q_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (Q_{12} + Q_{16}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Q_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right] + \left[Q_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + 3Q_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (Q_{12} + 2Q_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + Q_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right] \bar{x}_3 \right\} d\bar{x}_3 \\ &= - \left[Q_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2Q_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + Q_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + Q_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (Q_{12} + Q_{16}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + Q_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right] \times \\ &\quad \times \left(x_3 + \frac{h}{2} \right) + \left[Q_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + 3Q_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (Q_{12} + 2Q_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + Q_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right] \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aus (3.43) erhält man durch Umstellen der Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} = -\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}. \quad (4.37)$$

Aus der Gleichung (4.30) mit (4.22) und (4.25) folgt:

$$\sigma_{22} = \left[Q_{21} \frac{\partial u}{\partial x_1} + Q_{22} \frac{\partial v}{\partial x_2} + Q_{26} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1} \right) \right] - \left[Q_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + Q_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2Q_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] x_3. \quad (4.38)$$

Mit (4.35) und (4.38) kann die Gleichung (4.37) unter der Annahme einer symmetrischen reduzierten Steifigkeitsmatrix $[Q]$ geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \tau_{32}(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{x_3} \left\{ - \left[Q_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (Q_{12} + Q_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + Q_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + Q_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2Q_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Q_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right] + \left[Q_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (Q_{12} + 2Q_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 3Q_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + Q_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right] \bar{x}_3 \right\} d\bar{x}_3 \\ &= - \left[Q_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (Q_{12} + Q_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + Q_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + Q_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2Q_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + Q_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right] \times \\ &\quad \times \left(x_3 + \frac{h}{2} \right) + \left[Q_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (Q_{12} + 2Q_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 3Q_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + Q_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \right] \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Aus der lokalen Bewegungsgleichung (3.44) kann wiederum der Zusammenhang

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} \quad (4.40)$$

formuliert werden. Mit den Herleitungen (4.36) und (4.39) folgt nach Einsetzen:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{x_3} \left\{ \left[Q_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + 3Q_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (Q_{12} + 2Q_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + Q_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + Q_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (Q_{12} + 2Q_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 3Q_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x_1 \partial x_2^2} + Q_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^3} \right] \left(x_3 + \frac{h}{2} \right) - \left[Q_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \right. \\ &\quad \left. + 4Q_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2Q_{16} + 4Q_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4Q_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} + Q_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \right] \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \right\} d\bar{x}_3 \\ &= \left[Q_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + 3Q_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + (Q_{12} + 2Q_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + Q_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + Q_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^3} + \right. \\ &\quad \left. + (Q_{12} + 2Q_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 3Q_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x_1 \partial x_2^2} + Q_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^3} \right] \left(\frac{x_3^2}{2} + \frac{h}{2} x_3 + \frac{h^2}{8} \right) - \left[Q_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \right. \\ &\quad \left. + 4Q_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2Q_{16} + 4Q_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4Q_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} + Q_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \right] \left(\frac{x_3^3}{6} - \frac{h^2}{8} x_3 - \frac{h^3}{24} \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

4.2 Klassische Laminattheorie (CLT)

Die Klassische Laminattheorie (CLT - Classical Laminate Theory) bildet, ausgehend von der Theorie der monotropen Einzelschicht (Kap. 4.1), die Grundlage für die Analyse von Schichtverbunden. Voraussetzungen für die Zulässigkeit der Berechnung eines Laminates mit der Klassischen Laminattheorie sind:

- Die Einzelschicht kann als quasihomogen mit konstanter, reduzierter Steifigkeit $\{Q\}_k$ betrachtet werden.
- Für die Einzelschichten wird der ebene Spannungszustand angenommen.
- Alle Schichten sind ideal miteinander verbunden.
- Für den Schichtverbund gelten die KIRCHHOFFSchen Hypothesen, das heißt
 - alle Verschiebungen sind klein im Vergleich zur Laminatdicke h ,
 - die Verbunddicke h bleibt näherungsweise konstant,
 - der Verbund wird als schubstarr betrachtet: die Schubverzerrungen γ_{13} und γ_{23} werden zu Null angenommen, dabei bleibt die Senkrechte zur Laminatmittelfläche auch bei Belastung orthogonal und eben.

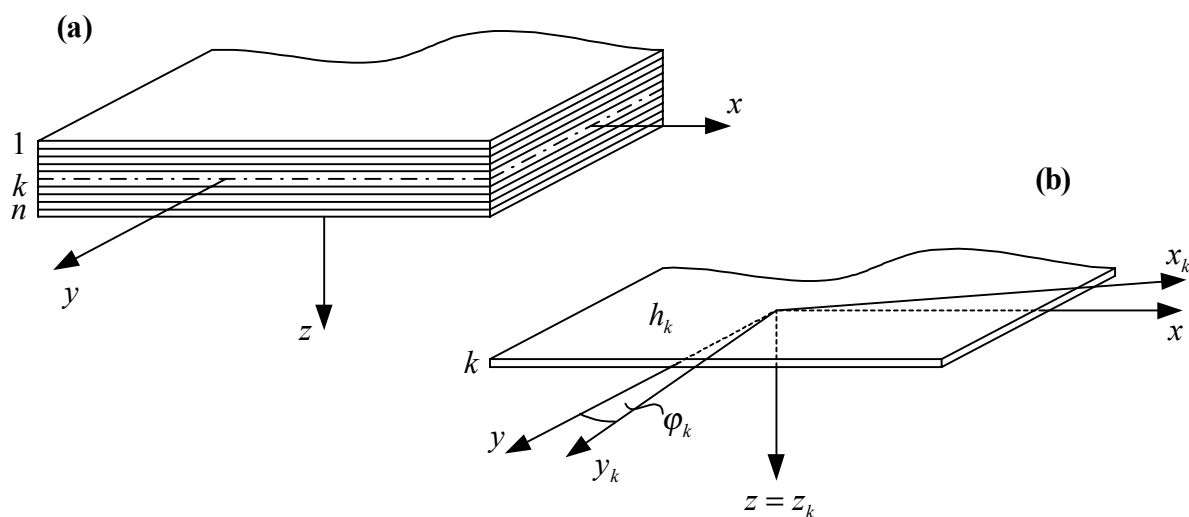


Abbildung 4.1: Schichtverbund: (a) globales Koordinatensystem x - y - z , (b) lokales Schichtkoordinatensystem x_k - y_k - z_k der k -ten Schicht.

Für den verallgemeinerten Schichtaufbau nach Abbildung 4.1 (a) wird die Dicke der k -ten Einzelschicht definiert als

$$h_k = z_k - z_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.42)$$

Für die Laminatdicke h folgt aus der Gleichung (4.42)

$$h = \sum_{k=1}^n h_k \quad (4.43)$$

mit dem Abstand z_k der Unterseite der k -ten Einzelschicht von der Mittelfläche (Abb. 4.2):

$$z_k = \frac{h}{2} - \sum_{i=1}^k h_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (4.44)$$

Der Abstand \bar{z}_k der Mittelfläche der k -ten Einzelschicht von der Laminatmittelfläche wird beschrieben mit

$$\bar{z}_k = \frac{1}{2} (z_{k-1} + z_k), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4.45)$$

Analog zur Gleichung (4.32) läßt sich die Laminatsteifigkeit des Gesamtverbundes angeben.

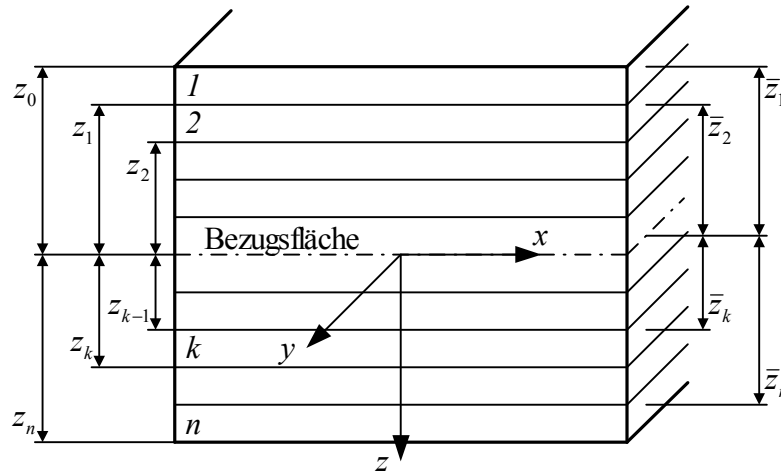


Abbildung 4.2: Aufbau eines n-lagigen Schichtverbundes.

Die Elemente der Gesamtsteifigkeitsmatrix des Laminates für die Scheibensteifigkeiten A_{ij} , die Plattensteifigkeiten D_{ij} und die Koppelsteifigkeiten B_{ij} , mit $i, j = 1, 2, 6$, folgen aus den Gleichungen (4.17), (4.23) und (4.30):

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} h_k, \quad (4.46a)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} h_k \bar{z}_k, \quad (4.46b)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(\bar{z}_k^2 + \frac{h_k^2}{12} \right) h_k. \quad (4.46c)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß die hier definierte Lagenabfolge sich an der in der Literatur üblichen Definition orientiert. Somit wird der ersten Laminatschicht der kleinste und der n -ten Schicht der größte z -Wert zugeordnet. Die Legevorschriften in der Fertigung bezeichnen dem gegenüber die Reihenfolge der Schichtnumerierung nach der DIN

EN 7000-11 [73] entgegen der z-Achsenrichtung (s. Abb. 6.3), so daß die jeweils getroffene Bezeichnungsdefinition zu beachten ist. Die hier angegebenen Steifigkeiten \overline{Q}_{ij} sind die globalen Steifigkeiten der Einzelschicht, die sich durch Transformation aus den lokalen Steifigkeiten Q_{ij} ermitteln lassen (s. Anhang A). Mit Hilfe der Gleichungen (4.46a)-(4.46c) kann der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verzerrungen des Schichtverbundes analog zur Gleichung (4.32) in Hypermatrixform angegeben werden:

$$\begin{Bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{xy} \\ m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (4.47)$$

Löst man die Gesamtsteifigkeitsmatrix (4.47) nach den Verzerrungen auf, so ergibt sich durch Inversion der Steifigkeitsmatrix die Nachgiebigkeitsmatrix des Gesamtverbundes in Hypermatrixform:

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon_0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{n\} \\ \{m\} \end{Bmatrix}. \quad (4.48)$$

Hierbei lassen sich die Untermatrizen $[a]$, $[b]$, $[c]$, $[d]$ nach [3, 58] durch Inversion ermitteln:

$$[a] = [A]^{-1} - [A]^{-1} [B] \left([D] - [B] [A]^{-1} [B] \right)^{-1} [B] [A]^{-1}, \quad (4.49a)$$

$$[b] = -[A]^{-1} [B] \left([D] - [B] [A]^{-1} [B] \right)^{-1}, \quad (4.49b)$$

$$[c] = [b]^T = - \left([D] - [B] [A]^{-1} [B] \right)^{-1} [B] [A]^{-1}, \quad (4.49c)$$

$$[d] = \left([D] - [B] [A]^{-1} [B] \right)^{-1}. \quad (4.49d)$$

Mit dem Zusammenhang (4.48) können nun die Spannungen und Verzerrungen der k -ten Einzelschicht berechnet werden:

$$\{\overline{\sigma}\}_k = [\overline{Q}]_k \{\overline{\varepsilon}\}_k, \quad (4.50a)$$

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k [T_\varepsilon] \{\overline{\varepsilon}\}_k = [Q]_k \{\varepsilon\}_k. \quad (4.50b)$$

Der Verzerrungsvektor $\{\overline{\varepsilon}\}$ für das Gesamtlaminat ist gleich dem Verzerrungsvektor der Einzelschichten des Verbundes, da für beide die gleiche kinematische Hypothese gilt. Die Verzerrungen setzen sich aus einem Scheibenanteil $\{\overline{\varepsilon}_0\}$ der Mittelfläche des Laminates und einem über die Gesamtdicke h linearen Anteil κ aus der Plattenkrümmung zusammen:

$$\{\overline{\varepsilon}\} = \{\overline{\varepsilon}_0\} + z \{\overline{\kappa}\}. \quad (4.51)$$

Die Spannungen $[\overline{\sigma}]_k$ besitzen analog zu den Verzerrungen einen konstanten und einen linearen Anteil. Da die reduzierten Einzelschichtsteifigkeiten $[\overline{Q}]_k$ aber unterschiedlich sein können, sind die Spannungsverläufe an den Schichtgrenzen nicht zusammenhängend, sondern weisen Sprünge auf. Im Fall der Plattenbiegung mit kleinen Durchbiegungen w kann nach dem Vorschlag von ROHWER [90] näherungsweise eine reine Biegeform angenommen werden, so daß die Scheibenverzerrungen $\{\overline{\varepsilon}_0\}$ vernachlässigt werden können.

4.2.1 Berechnung der interlaminaren Spannungen

Die globalen Spannungen τ_{zx} , τ_{zy} und σ_{zz} verlaufen parabolisch über die Laminatdicke h . Lediglich die Größe der Spannungsverläufe ändert sich an den Schichtgrenzen bei unterschiedlichen reduzierten Steifigkeiten der Einzellagen. Analog zu den Gleichungen (4.36), (4.39) und (4.41) können die interlaminaren Spannungen des Schichtverbundes aus den lokalen Bewegungsgleichungen (2.31) abgeleitet und in den globalen Koordinaten angegeben werden [3, 93, 94]. Für eine beliebige Schicht m des Verbundes erhält man dann die Spannungen:

$$\begin{aligned}
\tau_{zx}^{(m)}(x, y, z) &= \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ - \left[\bar{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2\bar{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \bar{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\bar{Q}_{12}^{(k)} + \bar{Q}_{16}^{(k)} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[\bar{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3\bar{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \left(\bar{Q}_{12}^{(k)} + 2\bar{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] z \right\} dz \right\} \\
&\quad + \int_{z_{m-1}}^z \left\{ - \left[\bar{Q}_{11}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2\bar{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{66}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \bar{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\bar{Q}_{12}^{(m)} + \bar{Q}_{16}^{(m)} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[\bar{Q}_{11}^{(m)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3\bar{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \left(\bar{Q}_{12}^{(m)} + 2\bar{Q}_{66}^{(m)} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \bar{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] z \right\} dz \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ - \left[\bar{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2\bar{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \bar{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\bar{Q}_{12}^{(k)} + \bar{Q}_{16}^{(k)} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right] h_k + \right. \\
&\quad \left. + \left[\bar{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3\bar{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \left(\bar{Q}_{12}^{(k)} + 2\bar{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] h_k \bar{z}_k \right\} \\
&\quad + \left\{ - \left[\bar{Q}_{11}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2\bar{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{66}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \bar{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\bar{Q}_{12}^{(m)} + \bar{Q}_{16}^{(m)} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right] (z - z_{m-1}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[\bar{Q}_{11}^{(m)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3\bar{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \left(\bar{Q}_{12}^{(m)} + 2\bar{Q}_{66}^{(m)} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \bar{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \frac{z^2 - z_{m-1}^2}{2} \right\}, \\
&\text{für } z_{m-1} \leq z \leq z_m, \tag{4.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{zy}^{(m)}(x, y, z) &= \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ - \left[\bar{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \left(\bar{Q}_{12}^{(k)} + \bar{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \bar{Q}_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x \partial y} + \overline{Q}_{22}^{(k)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2} \Big] + \\
& + \left[\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + 2\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3\overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{22}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] z \Big\} dz \\
& + \int_{z_{m-1}}^z \left\{ - \left[\overline{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \left(\overline{Q}_{12}^{(m)} + \overline{Q}_{66}^{(m)} \right) \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x \partial y} + \overline{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \overline{Q}_{66}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\overline{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x \partial y} + \overline{Q}_{22}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \left[\overline{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\overline{Q}_{12}^{(m)} + 2\overline{Q}_{66}^{(m)} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3\overline{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{22}^{(m)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] z \right\} dz \\
= & \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ - \left[\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + \overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x \partial y} + \overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \overline{Q}_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x \partial y} + \overline{Q}_{22}^{(k)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2} \right] h_k + \right. \\
& \quad \left. + \left[\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + 2\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3\overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{22}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] h_k \overline{z}_k \right\} \\
& + \left\{ - \left[\overline{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \left(\overline{Q}_{12}^{(m)} + \overline{Q}_{66}^{(m)} \right) \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x \partial y} + \overline{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \overline{Q}_{66}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} + 2\overline{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \overline{Q}_{22}^{(m)} \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2} \right] (z - z_{m-1}) + \right. \\
& \quad \left. + \left[\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + 2\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3\overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{22}^{(k)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \frac{z^2 - z_{m-1}^2}{2} \right\}, \\
& \text{für } z_{m-1} \leq z \leq z_m, \tag{4.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(m)}(x, y, z) = & \\
= & \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left\{ \left[\overline{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^3} + 3\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^2 \partial y} + \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + 2\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial y^3} + \overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{v}}{\partial x^3} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + 2\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 \overline{v}}{\partial x^2 \partial y} + 3\overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{v}}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{22}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{v}}{\partial y^3} \right] (z - z_{k-1}) - \right. \\
& \quad \left. - \left[\overline{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \left(2\overline{Q}_{16}^{(k)} + 4\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \overline{Q}_{22}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \frac{z^2 - z_{k-1}^2}{2} \right\} dz \Big\} \\
& + \int_{z_{m-1}}^z \left\{ \left[\overline{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^3} + 3\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x^2 \partial y} + \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + 2\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial y^3} + \overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 \overline{v}}{\partial x^3} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\overline{Q}_{12}^{(m)} + 2\overline{Q}_{66}^{(m)} \right) \frac{\partial^3 \overline{v}}{\partial x^2 \partial y} + 3\overline{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^3 \overline{v}}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{22}^{(m)} \frac{\partial^3 \overline{v}}{\partial y^3} \right] (z - z_{m-1}) - \right. \\
& \quad \left. - \left[\overline{Q}_{11}^{(m)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\overline{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \left(2\overline{Q}_{16}^{(m)} + 4\overline{Q}_{66}^{(m)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\overline{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{Q}_{22}^{(m)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \left] \frac{z^2 - z_{m-1}^2}{2} \right\} dz \\
= & \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \left[\overline{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + 3\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial y} + \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + 2\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3} + \overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3} + \right. \right. \\
& + \left. \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + 2\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^2 \partial y} + 3\overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{22}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial y^3} \right] \frac{h_k^2}{2} - \\
& - \left[\overline{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \left(2\overline{Q}_{16}^{(k)} + 4\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \right. \\
& + \left. \overline{Q}_{22}^{(k)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \left(\frac{z_k^3}{6} - \frac{z_k z_{k-1}^2}{2} + \frac{z_{k-1}^3}{3} \right) \left. \right\} \\
& + \left\{ \left[\overline{Q}_{11}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^3} + 3\overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x^2 \partial y} + \left(\overline{Q}_{12}^{(k)} + 2\overline{Q}_{66}^{(k)} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3} + \overline{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3} + \right. \right. \\
& + \left. \left(\overline{Q}_{12}^{(m)} + 2\overline{Q}_{66}^{(m)} \right) \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^2 \partial y} + 3\overline{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x \partial y^2} + \overline{Q}_{22}^{(m)} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial y^3} \right] \frac{(z - z_{m-1})^2}{2} - \\
& - \left[\overline{Q}_{11}^{(m)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\overline{Q}_{16}^{(m)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \left(2\overline{Q}_{16}^{(m)} + 4\overline{Q}_{66}^{(m)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\overline{Q}_{26}^{(m)} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \right. \\
& + \left. \overline{Q}_{22}^{(m)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z_{m-1}^2}{2} z + \frac{z_{m-1}^3}{3} \right) \left. \right\}, \\
& \text{für } z_{m-1} \leq z \leq z_m. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Aus den hier aufgestellten Gleichungen für die Querschubspannungen und Spannungen in Dickenrichtung des Verbundes erkennt man, daß die Spannungen der Einzellen abhängig sind von den Beanspruchungen der benachbarten Schichten. Zur Berechnung der Querspannung einer beliebigen Einzellage summieren sich die Spannungen der Lagen zwischen der äußersten Laminatschicht und der zu betrachtenden Schicht auf. Somit verschwinden die Spannungen lediglich an nur einer Oberfläche des Gesamtverbundes. Die gewählten Integrale befriedigen damit nur eine Bedingung des Randwertproblems. Dennoch sind die mit dieser Theorie zu erzielenden Ergebnisse hinreichend genau und lassen eine befriedigende Berechnung der Spannungen in Plattendickenrichtung zu. Die in den Gleichungen (4.52-4.52) hergeleiteten Zusammenhänge zeigen, daß sich aus den Verschiebungen der Laminatmittelebene die gesuchten Querschubbeanspruchungen ermitteln lassen. Neben der Plattenbiegung w haben die Membranverschiebungen u und v Einfluß auf die Größe der interlaminaren Spannungen. Solche Membranverschiebung entstehen bei Scheibenbeanspruchungen und bei der Beanspruchung nicht ebener Flächentragwerke. Im Fall einer Krümmung des Laminates werden die transversalen Lasten nicht mehr ausschließlich über Quer- sondern auch über Membrankräfte abgetragen (Kap. 3.2), so daß die Geometrie einen wesentlichen Einfluß auf die Spannungsverteilung besitzt.

4.2.2 Variationsformulierung des elastischen Potentials einer symmetrischen, schubstarren Laminatplatte

Zur Berechnung des Biegeflächenverlaufes $w(x, y)$ läßt sich weder für die zugfest-gelenkige noch für die feste Einspannung eine Lösung auf der Basis eines Doppelfourierreihenansatzes

finden. Analog zu dem Vorgehen in Kapitel 3.1.6 ist hierzu für das RITZsche Verfahren die Variation des elastischen Potentials der Laminatplatte zu formulieren [2, 3, 5, 18, 78, 82, 87, 101, 104]. Existiert ein Variationsproblem des elastischen Potentials

$$\Pi = W_f - W_a, \quad (4.55)$$

erfüllen alle geometrisch zulässigen Verschiebungen, die das Gesamtpotential minimieren, auch die Gleichgewichtsbeziehungen des Problems. Das elastische Potential Π in Gleichung (4.55) setzt sich aus der Differenz der Formänderungsarbeit W_f und der Endwertarbeit der äußeren Belastung W_a zusammen. Voraussetzung für die Existenz eines Variationsproblems sind die Darstellbarkeit des elastischen Potentials Π in Abhängigkeit von den unabhängigen Konstanten, den Verschiebungsfunktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ und $w(x, y)$ und deren Ableitungen als Integralausdruck. Verschiebungsfunktionen, die diese geometrischen Randbedingungen erfüllen, werden als Vergleichsfunktionen bezeichnet. Eine Minimierung des Gesamtpotentials bedeutet, daß die Variation des elastischen Potentials verschwindet:

$$\delta\Pi = \delta(W_f - W_a) = 0. \quad (4.56)$$

Im Fall des in der Klassischen Laminattheorie angenommenen ebenen Spannungszustandes läßt sich für das RITZsche Verfahren die Formänderungsarbeit W_f der Laminatplatte formulieren [3, 87, 103] zu:

$$W_f = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy}) dV. \quad (4.57)$$

Mit der kinematischen Hypothese für den Schichtverbund [5, 28, 46, 58, 87],

$$\{\varepsilon(x, y, z)\} = \{\varepsilon_0(x, y)\} + \{\kappa(x, y)\} z \quad (4.58a)$$

mit den Scheibenverzerrungen

$$\{\varepsilon_0(x, y)\}^T = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (4.58b)$$

und den Krümmungen der Plattenmittelfläche

$$\{\kappa(x, y)\}^T = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right], \quad (4.58c)$$

lautet das Stoffgesetz

$$\{\bar{\sigma}\}_k = [\bar{Q}]_k (\{\bar{\varepsilon}_0\} + z \{\bar{\kappa}\}) \quad (4.59)$$

der monotropen Einzelschicht im globalen Koordinatensystem x - y - z . Für die Formänderungsarbeit des elastischen Potentials der Laminatplatte folgt durch Einsetzen der Gleichung (4.59) in die Gleichung (4.57) der Zusammenhang

$$\begin{aligned} W_f = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\left(\bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right) + \bar{Q}_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \right) + \bar{Q}_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \right) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right) + \left(\bar{Q}_{21}^{(k)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right) + \bar{Q}_{22}^{(k)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{Q}_{26}^{(k)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \right) \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \right) + \left(\bar{Q}_{61}^{(k)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right) + \bar{Q}_{62}^{(k)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \right) + \bar{Q}_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \right) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \right) \right] dz \right\} dA. \quad (4.60) \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (4.46a)-(4.46c) lassen sich die Summen der reduzierten Steifigkeiten in der Gleichung (4.60) als die Scheibensteifigkeiten A_{ij} , die Koppelsteifigkeiten B_{ij} und die Plattensteifigkeiten D_{ij} , mit $i, j = 1, 2, 6$, des Schichtverbundes identifizieren:

$$\begin{aligned}
W_f = & \frac{1}{2} \int_A \left[A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 A_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
& + 2 A_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 2 B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\
& - 2 B_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 2 B_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \\
& - 2 B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 B_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \\
& - 4 B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4 D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
& \left. + 4 D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Die noch unbekanntenen Verschiebungen u , v und w werden durch Doppelreihenansätze der Form

$$u(x, y) \approx \tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M u_{ij} X_i^u(x) Y_j^u(y), \tag{4.62a}$$

$$v(x, y) \approx \tilde{v}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M v_{ij} X_i^v(x) Y_j^v(y) \tag{4.62b}$$

$$\text{und } w(x, y) \approx \tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_{ij} X_i^w(x) Y_j^w(y) \tag{4.62c}$$

beschrieben. Die Wahl der Ansatzfunktionen X_i und Y_j richtet sich nach den Randbedingungen des zu berechnenden Plattenproblems. Die Minimierung des elastischen Potentials (4.56),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_{kl}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial w_{kl}} = 0, \tag{4.63}$$

liefert im nichttrivialen Fall $u_{ij} \neq 0$, $v_{ij} \neq 0$ und $w_{ij} \neq 0$ die fehlenden Koeffizienten der Ansatzfunktionen (4.62a)-(4.62c). Somit folgt nach partieller Differentiation für den Zusammenhang (4.61) weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_f}{\partial u_{kl}} = & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M u_{ij} \left[A_{11} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^u}{\partial x} \frac{\partial X_k^u}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^u Y_l^u dy + A_{16} \left(\int_{x=0}^a X_i^u \frac{\partial X_k^u}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^u}{\partial y} Y_l^u dy + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^u}{\partial x} X_k^u dx \int_{y=0}^b Y_j^u \frac{\partial Y_l^u}{\partial y} dy \right) + A_{66} \int_{x=0}^a X_i^v X_k^u dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^v}{\partial y} \frac{\partial Y_l^u}{\partial y} dy \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M v_{ij} \left[A_{12} \int_{x=0}^a X_i^v \frac{\partial X_k^u}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^v}{\partial y} Y_l^u dy + A_{16} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^v}{\partial x} \frac{\partial X_k^u}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^v Y_l^u dy + \right. \\
& + A_{26} \int_{x=0}^a X_i^v X_k^u dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^v}{\partial y} \frac{\partial Y_l^u}{\partial y} dy + A_{66} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^v}{\partial x} X_k^u dx \int_{y=0}^b Y_j^v \frac{\partial Y_l^u}{\partial y} dy \left. \right] - \\
& - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_{ij} \left[B_{11} \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} \frac{\partial X_k^u}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^w Y_l^u dy + B_{12} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} \frac{\partial X_k^u}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} Y_l^u dy + \right. \\
& + B_{16} \left(2 \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} \frac{\partial X_k^u}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} Y_l^u dy + \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} X_k^u dx \int_{y=0}^b Y_j^w \frac{\partial Y_l^u}{\partial y} dy \right) + \\
& \left. + B_{26} \int_{x=0}^a X_i^w X_k^u dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} \frac{\partial Y_l^u}{\partial y} dy + 2 B_{66} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} X_k^u dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} \frac{\partial Y_l^u}{\partial y} dy \right] \quad (4.64a)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W_f}{\partial v_{kl}} = \\
& = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M u_{ij} \left[A_{12} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^u}{\partial x} X_k^v dx \int_{y=0}^b Y_j^u \frac{\partial Y_l^v}{\partial y} dy + A_{16} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^u}{\partial x} \frac{\partial X_k^v}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^u Y_l^v dy + \right. \\
& + A_{26} \int_{x=0}^a X_i^u X_k^v dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^u}{\partial y} \frac{\partial Y_l^v}{\partial y} dy + A_{66} \int_{x=0}^a X_i^u \frac{\partial X_k^v}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^u}{\partial y} Y_l^v dy \left. \right] + \\
& + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M v_{ij} \left[A_{22} \int_{x=0}^a X_i^v X_k^v dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^v}{\partial y} \frac{\partial Y_l^v}{\partial y} dy + A_{26} \left(\int_{x=0}^a X_i^v \frac{\partial X_k^v}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^v}{\partial y} Y_l^v dy + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^v}{\partial x} X_k^v dx \int_{y=0}^b Y_j^v \frac{\partial Y_l^v}{\partial y} dy \right) + A_{66} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^v}{\partial x} \frac{\partial X_k^v}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^v Y_l^v dy \right] - \\
& - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_{ij} \left[B_{12} \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} X_k^v dx \int_{y=0}^b Y_j^w \frac{\partial Y_l^v}{\partial y} dy + B_{16} \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} \frac{\partial X_k^v}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^w Y_l^v dy + \right. \\
& + B_{22} \int_{x=0}^a X_i^w X_k^v dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} \frac{\partial Y_l^v}{\partial y} dy + B_{26} \left(2 \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} X_k^v dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} \frac{\partial Y_l^v}{\partial y} dy + \right. \\
& \left. \left. + \int_{x=0}^a X_i^w \frac{\partial X_k^v}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} Y_l^v dy \right) + 2 B_{66} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} \frac{\partial X_k^v}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} Y_l^v dy \right] \quad (4.64b)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial W_f}{\partial w_{kl}} = \\
& = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M u_{ij} \left[B_{11} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^u}{\partial x} \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b Y_j^u Y_l^w dy + B_{12} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^u}{\partial x} X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_j^u \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{16} \left(2 \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^u}{\partial x} \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^u \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy + \int_{x=0}^a X_i^u \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b Y_j^u Y_l^w dy \right) + \\
& + B_{26} \int_{x=0}^a X_i^u X_k^w dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^u}{\partial y} \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy + 2 B_{66} \int_{x=0}^a X_i^u \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^u}{\partial y} \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy - \\
& - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M v_{ij} \left[B_{12} \int_{x=0}^a X_i^v \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^v}{\partial y} Y_l^w dy + B_{16} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^v}{\partial x} \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b Y_j^v Y_l^w dy + \right. \\
& + B_{22} \int_{x=0}^a X_i^v X_k^w dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^v}{\partial y} \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy + B_{26} \left(2 \int_{x=0}^a X_i^v \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^v}{\partial y} \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy + \right. \\
& \left. \left. + \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^v}{\partial x} X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_j^v \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy \right) + 2 B_{66} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^v}{\partial x} \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^v \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy \right] + \\
& + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_{ij} \left[D_{11} \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b Y_j^w Y_l^w dy + D_{12} \left(\int_{x=0}^a X_i^w \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} Y_l^w dy + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_j^w \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy \right) + 2 D_{16} \left(\int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} \frac{\partial^2 X_k^w}{\partial x^2} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} Y_l^w dy + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{x=0}^a \frac{\partial^2 X_i^w}{\partial x^2} \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^w \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy \right) + D_{22} \int_{x=0}^a X_i^w X_k^w dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy + \right. \\
& \left. + 2 D_{26} \left(\int_{x=0}^a X_i^w \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial^2 Y_j^w}{\partial y^2} \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy + \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} X_k^w dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} \frac{\partial^2 Y_l^w}{\partial y^2} dy \right) + \right. \\
& \left. + 4 D_{66} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy \right]. \tag{4.64c}
\end{aligned}$$

Für das RITZsche Verfahren kann die Endwertarbeit der äußeren Belastungen W_a mit

$$W_a = - \int_A (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dA + \int_A p w dA + \sum_{p=1}^r P_p w_p. \tag{4.65}$$

angegeben werden. Wie SZABO in [101] am Beispiel des Stabknickens und der Plattenverformung für kleine Durchbiegungen w zeigt, setzen sich die Membranverzerrungen $\{\varepsilon_0\}$ der Plattenmittelfläche für die Scheibenbelastungen aus den Ableitungen der ebenen Verschiebungen u und v und einem Transversalanteil zusammen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \tag{4.66a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \tag{4.66b}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{4.66c}$$

Durch Einsetzen der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (4.66a)-(4.66c) in die Formulierung der Endwertarbeit der äußeren Lasten (4.65) folgt weiter:

$$W_A = \int_A \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dA - \quad (4.67)$$

$$- \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA + \int_A p w dA + \sum_{p=1}^r P_p w_p.$$

Nach den partiellen Ableitungen der Endwertarbeit der äußeren Lasten der Gleichung (4.67) folgen unter Beachtung der Ansätze (4.62a)-(4.62c) die Zusammenhänge:

$$\frac{\partial W_a}{\partial u_{kl}} = \left[N_x \int_{x=0}^a \frac{\partial X_k^u}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_l^u dy + N_{xy} \int_{x=0}^a X_k^u dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_l^u}{\partial y} dy \right], \quad (4.68a)$$

$$\frac{\partial W_a}{\partial v_{kl}} = \left[N_y \int_{x=0}^a X_k^v dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_l^v}{\partial y} dy + N_{xy} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_k^v}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_l^v dy \right], \quad (4.68b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_a}{\partial w_{kl}} = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_{ij} \left[N_x \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^w Y_l^w dy + N_y \int_{x=0}^a X_i^w X_k^w dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy + \right. \\ & \left. + 2N_{xy} \left(\int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_j^w \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy + \int_{x=0}^a X_i^w \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} Y_l^w dy \right) \right] + \\ & + p \int_{x=0}^a X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_l^w dy + \sum_{p=1}^r P_p X_k^w(x_p) Y_l^w(y_p) \end{aligned} \quad (4.68c)$$

Matriziell können nun die Gleichungen (4.64a) und (4.68a) als

$$\left[Z \langle u \rangle_{ijkl}^{\partial u_{kl}} \right] \{u_{ij}\} + \left[Z \langle v \rangle_{ijkl}^{\partial u_{kl}} \right] \{v_{ij}\} + \left[Z \langle w \rangle_{ijkl}^{\partial u_{kl}} \right] \{w_{ij}\} = \{N^{\partial u_{kl}}\}, \quad (4.69a)$$

die Zusammenhänge (4.64b) und (4.68b) als

$$\left[Z \langle u \rangle_{ijkl}^{\partial v_{kl}} \right] \{u_{ij}\} + \left[Z \langle v \rangle_{ijkl}^{\partial v_{kl}} \right] \{v_{ij}\} + \left[Z \langle w \rangle_{ijkl}^{\partial v_{kl}} \right] \{w_{ij}\} = \{N^{\partial v_{kl}}\} \quad (4.69b)$$

und die Zwischenergebnisse (4.64c) und (4.68c) als

$$\left[Z \langle u \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}} \right] \{u_{ij}\} + \left[Z \langle v \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}} \right] \{v_{ij}\} + \left(\left[Z \langle w \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}} \right] + \left[N \langle w \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}} \right] \right) \{w_{ij}\} = \{p^{\partial w_{kl}}\} + \{P_{pkl}\} \quad (4.69c)$$

bzw. in Hypermatrixschreibweise als

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[Z \langle u \rangle_{ijkl}^{\partial u_{kl}} \right] \quad \left[Z \langle v \rangle_{ijkl}^{\partial u_{kl}} \right] \quad \left[Z \langle w \rangle_{ijkl}^{\partial u_{kl}} \right] \\ \left[Z \langle u \rangle_{ijkl}^{\partial v_{kl}} \right] \quad \left[Z \langle v \rangle_{ijkl}^{\partial v_{kl}} \right] \quad \left[Z \langle w \rangle_{ijkl}^{\partial v_{kl}} \right] \\ \left[Z \langle u \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}} \right] \quad \left[Z \langle v \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}} \right] \quad \left[Z \langle w \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}} \right] + \left[N \langle w \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}} \right] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \{u_{ij}\} \\ \{v_{ij}\} \\ \{w_{ij}\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \{N^{\partial u_{kl}}\} \\ \{N^{\partial v_{kl}}\} \\ \{p^{\partial w_{kl}}\} + \{P_{pkl}\} \end{array} \right\} \quad (4.70a)$$

zusammengefaßt werden. Das Auflösen des Gleichungssystems (4.70a) nach den noch unbekanntenen Koeffizienten liefert den Zusammenhang

$$\begin{Bmatrix} \{u_{ij}\} \\ \{v_{ij}\} \\ \{w_{ij}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [Z\langle u \rangle_{ijkl}^{\partial u_{kl}}] & [Z\langle v \rangle_{ijkl}^{\partial u_{kl}}] & [Z\langle w \rangle_{ijkl}^{\partial u_{kl}}] \\ [Z\langle u \rangle_{ijkl}^{\partial v_{kl}}] & [Z\langle v \rangle_{ijkl}^{\partial v_{kl}}] & [Z\langle w \rangle_{ijkl}^{\partial v_{kl}}] \\ [Z\langle u \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}}] & [Z\langle v \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}}] & [Z\langle w \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}}] + [N\langle w \rangle_{ijkl}^{\partial w_{kl}}] \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{N^{\partial u_{kl}}\} \\ \{N^{\partial v_{kl}}\} \\ \{p^{\partial w_{kl}}\} + \{P_{pkl}\} \end{Bmatrix} \quad (4.70b)$$

als Bestimmungsgleichung für die Ansatzfunktionen (4.62a)-(4.62c).

4.2.3 Wahl der Ansatzfunktionen

Die Wahl geeigneter Ansatzfunktionen $X_i^w(x)$ und $Y_j^w(y)$ des Doppelreihenansatzes (3.98) für die Plattendurchbiegung w ist abhängig von den Randbedingungen des jeweils betrachteten Plattenproblems. Nachfolgend werden für den Fall der reinen Plattenbiegung einer allseitigen zugfest-gelenkigen Lagerung und einer allseitig festen Einspannung einer symmetrischen, schubstarrten Laminatplatte die Randbedingungen und die geeigneten Ansatzfunktionen diskutiert.

Zugfest-gelenkige Lagerung

Für die allseitige zugfest-gelenkige Plattenlagerung sind an den Rändern die Bedingungen

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = M_x(0, y) = M_x(a, y) &= 0, \\ w(x, 0) = w(x, b) = M_x(x, 0) = M_x(x, b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

zu erfüllen. ALTENBACH et al. schlagen in [2] als Ansatz die Eigenfunktion des an zwei Seiten zugfest-gelenkig gelagerten Balkens vor,

$$X_i^w(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right), \quad Y_j^w(y) = \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right), \quad (4.72)$$

die den geforderten Randbedingungen des Problems genügen.

Feste Einspannung

Bei der allseitigen festen Einspannung müssen die zu wählenden Ansatzfunktionen die Randbedingungen

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = \frac{\partial w(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial w(a, y)}{\partial x} &= 0, \\ w(x, 0) = w(x, b) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial w(x, b)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

erfüllen. In [18, 21] findet sich hierzu ein Cosinusansatz der Form

$$X_i^w(x) = \left[1 - \cos\left(\frac{2i\pi x}{a}\right)\right], \quad Y_j^w(y) = \left[1 - \cos\left(\frac{2j\pi y}{b}\right)\right]. \quad (4.74)$$

Die von ALTENBACH et al. [2], PETRY [78] und REDDY [87] vorgeschlagene Eigenfunktion des beidseitig fest eingespannten Balkens ist als eine weitere Möglichkeit zu nennen.

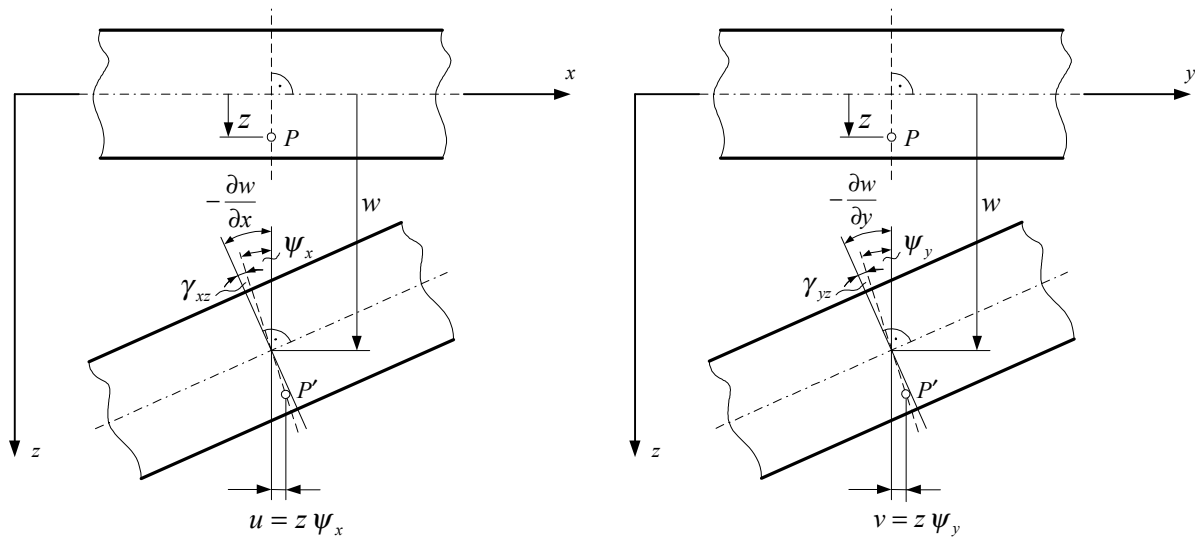


Abbildung 4.3: Biegeverformung einer schubweichen Platte.

4.3 Schubdeformationstheorie 1. Ordnung

Ausgangspunkt für die Herleitung der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (First Order Shear Deformation Theorie - FSDT) [2, 3, 5, 28, 87] sind die Verschiebungsansätze

$$u_x(x, y, z) = u(x, y) + z \psi_x(x, y), \quad (4.75a)$$

$$u_y(x, y, z) = v(x, y) + z \psi_y(x, y), \quad (4.75b)$$

$$u_z(x, y, z) = w(x, y). \quad (4.75c)$$

Wie in der Abbildung 4.3 dargestellt, wird die Annahme getroffen, daß eine gedachte Normale zur unverformten Mittelfläche nach der Biegeverformung eine Gerade bleibt. Eine Verzerrung in Dickenrichtung kann vernachlässigt werden. Im Unterschied zur Klassischen Laminattheorie hat die gedachte Linie nach der Plattendurchbiegung aber eine Neigung, die sowohl von der Biege- als auch von der Schubbeanspruchung abhängt. Aus dieser Hypothese folgt, daß $\psi_x(x, y)$ und $\psi_y(x, y)$ unabhängige Drehwinkel darstellen, die also nicht mehr allein von den partiellen Ableitungen der Durchbiegung $w(x, y)$ abhängen. Während die Klassische Laminattheorie zur Beschreibung der Plattenverformung auf die drei unabhängigen Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ und $w(x, y)$ aufbaut, sind bei der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung fünf unabhängige Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$, $\psi_x(x, y)$ und $\psi_y(x, y)$ zur Beschreibung des Deformationszustandes erforderlich. Die Verzerrungen der schubweichen Platten lauten ausgehend von den Verschiebungsansätzen (4.75a)-(4.75c):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (4.76)$$

Die Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} verlaufen unter Gültigkeit des HOOKEschen Gesetzes dabei linear über die Laminatdicke h , während die Schubspannungen τ_{yz} und τ_{xz} im Widerspruch zu den Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Element konstant über h sind. Die Berechnung der Querschubsteifigkeit aus den Materialkennwerten der Einzelschicht bereitet analog zur CLT ebenfalls Schwierigkeiten (s. a. ALTENBACH et al. [2]). Die Addition des Produkts aus den Querschubmoduli der Einzelschichten und der Einzelschichtdicken h_k zur Gesamtquerschubsteifigkeit

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n G_{ij}^{(k)} h_k, \quad i, j = 4, 5, \quad (4.77)$$

hier in lokaler Formulierung, liefert nur eine grobe Näherung, die die reale Steifigkeit überschätzt. Eine Genauigkeitsverbesserung der Querschubsteifigkeitswerte durch Schubkorrekturfaktoren ist daher erforderlich. Eine bessere Näherung wird erzielt, wenn man trotz der Spannungssprünge für τ_{yz} und τ_{xz} an den Schichtgrenzen wie bei einer Einzelschicht eine über die Laminatdicke stetige Funktion $f(z)$ als Gewichtsfunktion für die Verteilung der Querschubspannungen annimmt. Die Funktion

$$f(z) = \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \quad (4.78)$$

stellt eine solche parabolische Gewichtsfunktion dar. Dieser Ansatz führt auf die Übereinstimmung mit der REISSNERSchen Theorie für schubweiche Platten [104]. Ausgehend von der Konstitutivgleichung für die Querschubspannungen der k -ten Schicht

$$\begin{aligned}\tau_{yz}^{(k)} &= \bar{Q}_{44}^{(k)} \gamma_{yz} + \bar{Q}_{45}^{(k)} \gamma_{xz}, \\ \tau_{xz}^{(k)} &= \bar{Q}_{54}^{(k)} \gamma_{yz} + \bar{Q}_{55}^{(k)} \gamma_{xz}\end{aligned}\quad (4.79)$$

mit den im lokalen faserorientierten Koordinatensystem formulierten reduzierten Steifigkeiten

$$\bar{Q}_{ij} = \bar{C}_{ij}, \quad i, j = 4, 5 \quad (4.80)$$

erhält man die Querkraftschnittgrößen

$$\begin{aligned}Q_2 &= \sum_{k=1}^n \int_{h^k} \tau_{yz}^{(k)} dz \\ &= \frac{5}{4} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q}_{44}^{(k)} \gamma_{yz} \int_{h^k} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q}_{45}^{(k)} \gamma_{xz} \int_{h^k} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] dz \right] \right\}\end{aligned}\quad (4.81a)$$

und

$$\begin{aligned}Q_1 &= \sum_{k=1}^n \int_{h^k} \tau_{xz}^{(k)} dz \\ &= \frac{5}{4} \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q}_{54}^{(k)} \gamma_{yz} \int_{h^k} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q}_{55}^{(k)} \gamma_{xz} \int_{h^k} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] dz \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.81b)$$

Die Zusammenhänge (4.81a) und (4.81b) lassen sich dann mit den Gesamtquerschubsteifigkeiten (4.77) als Materialgleichungen für die Querkräfte Q_1 und Q_2 formulieren:

$$\begin{aligned} Q_2 &= A_{44}\gamma_{yz} + A_{45}\gamma_{xz}, \\ Q_1 &= A_{54}\gamma_{yz} + A_{55}\gamma_{xz}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Hieraus folgt die Näherungslösung für die Querschubsteifigkeiten A_{ij}

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left[(z_k - z_{k-1}) - \frac{4}{3h^2} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \\ &= \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left[h^k - \frac{4}{h^2} h^k \left(\frac{(h^k)^2}{12} + \overline{z}_k^2 \right) \right] \quad \text{mit } (i, j = 4, 5). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Für den Sonderfall einer isotropen Einzelschicht mit den reduzierten Steifigkeiten $Q_{44} = Q_{55} = G$ und $Q_{45} = 0$ folgt die aus der Plattentheorie nach REISSNER [2, 104] bekannte Aussage

$$\tilde{A}^s = \frac{5}{4} G \left[h - \frac{4h}{h^2} \left(\frac{h^2}{12} + 0 \right) \right] = \frac{5}{6} Gh. \quad (4.84)$$

Hierbei kann man wiederum als Schubkorrekturfaktor den Wert $K = 5/6$ und für die Schubsteifigkeit die Größe Gh identifizieren.

4.3.1 Variationsformulierung des elastischen Potentials einer symmetrischen, schubweichen Laminatplatte

Da zur Berechnung des Biegeflächenverlaufs $w(x, y)$ für die symmetrische, schubweiche Laminatplatte keine strenge analytische Lösung möglich ist, wird über das RITZsche Verfahren eine Näherungslösung des Problems hergeleitet. Hierzu wird das elastische Potential der symmetrischen, schubweichen Laminatplatte formuliert:

$$\Pi = W_f - W_a. \quad (4.85)$$

Als Endwertarbeit der äußeren Belastung W_a folgt für die normal zur Oberfläche angreifenden Flächenbelastungen $p(x, y)$ und Einzellasten $P_i(x, y)$ der Zusammenhang

$$W_a = \int_A p w dA + \sum_{i=1}^m P_i w_i. \quad (4.86)$$

Die Formänderungsarbeit W_f des elastischen Potentials kann unter Beachtung der Querschubverformung [2, 3, 5] formuliert werden als

$$W_f = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) dV. \quad (4.87)$$

Die reduzierten Steifigkeiten $Q_{ij}^{(k)}$ ($i, j=1, 2, 6$ und $4, 5$) sind schichtweise konstant, so daß sich für die Spannungen der k -ten Einzelschicht im globalen Koordinatensystem des Laminates

die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(k)} &= \bar{Q}_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)} + \bar{Q}_{16}^{(k)} \gamma_{xy}^{(k)}, \\
\sigma_{yy}^{(k)} &= \bar{Q}_{21}^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \gamma_{xy}^{(k)}, \\
\tau_{xy}^{(k)} &= \bar{Q}_{61}^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \bar{Q}_{62}^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)} + \bar{Q}_{66}^{(k)} \gamma_{xy}^{(k)}, \\
\tau_{yz}^{(k)} &= \bar{Q}_{44}^{(k)} \gamma_{yz}^{(k)} + \bar{Q}_{45}^{(k)} \gamma_{xz}^{(k)}, \\
\tau_{xz}^{(k)} &= \bar{Q}_{54}^{(k)} \gamma_{yz}^{(k)} + \bar{Q}_{55}^{(k)} \gamma_{xz}^{(k)}.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

ergeben. Mit den Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen (4.88) der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung ergibt sich für die Formänderungsarbeit (4.87) unter Berücksichtigung der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix [3, 28, 31]:

$$\begin{aligned}
W_f &= \frac{1}{2} \int_V \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\bar{Q}_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx}^2 + 2\bar{Q}_{12}^{(k)} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2\bar{Q}_{16}^{(k)} \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \varepsilon_{yy}^2 + 2\bar{Q}_{26}^{(k)} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{Q}_{66}^{(k)} \gamma_{xy}^2 + \bar{Q}_{44}^{(k)} \gamma_{yz}^2 + 2\bar{Q}_{45}^{(k)} \gamma_{yz} \gamma_{xz} + \bar{Q}_{55}^{(k)} \gamma_{xz}^2 \right] \right\} dV.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Unter der Annahme einer reinen Plattenbiegung folgt aus der Gleichung (4.89) mit dem Verzerrungs-Verschiebungs-Ansatz (4.76):

$$\begin{aligned}
W_f &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 z^2 + 2\bar{Q}_{12}^{(k)} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} z^2 + 2\bar{Q}_{16}^{(k)} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) z^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{Q}_{22}^{(k)} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 z^2 + 2\bar{Q}_{26}^{(k)} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) z^2 + \bar{Q}_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 z^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{Q}_{44}^{(k)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right)^2 + 2\bar{Q}_{45}^{(k)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) + \bar{Q}_{55}^{(k)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right)^2 \right] dz \right\} dA.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Mit den Definitionen der Scheibensteifigkeiten,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} h_k \quad (i, j = 1, 2, 6), \tag{4.91a}$$

der Koppelsteifigkeiten

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} h_k \bar{z}_k \quad (i, j = 1, 2, 6), \tag{4.91b}$$

und der Plattensteifigkeiten

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(\bar{z}_k^2 + \frac{h_k^2}{12} \right) h_k \quad (i, j = 1, 2, 6), \tag{4.91c}$$

eines schubstarren Gesamtverbundes nach der Klassischen Laminattheorie [28, 46, 58] und der Näherungslösung (4.83) für die Querschubsteifigkeiten A_{ij} ($i, j = 4, 5$) folgt dann aus der

Formänderungsarbeit (4.90):

$$\begin{aligned}
W_f = \frac{1}{2} \int_A \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 z^2 + 2D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + 2D_{16} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) z^2 + \right. \\
+ D_{22} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + 2D_{26} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 + \\
\left. + A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right)^2 + 2A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right)^2 \right\} dA. \quad (4.92)
\end{aligned}$$

Für die noch unbekanntenen Funktionen der Plattenbiegeverformung $w(x, y)$ und der Drehwinkel $\psi_x(x, y)$ und $\psi_y(x, y)$ lassen sich Ansätze in der Form

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ij} X_i^w Y_j^w, \quad (4.93a)$$

$$\tilde{\psi}_x(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M b_{ij} X_i^{\psi_x} Y_j^{\psi_x}, \quad (4.93b)$$

$$\tilde{\psi}_y(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M c_{ij} X_i^{\psi_y} Y_j^{\psi_y} \quad (4.93c)$$

angeben. Die Minimierung des elastischen Potentials (4.85),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_{kl}} = 0, \quad (4.94)$$

liefert im nichttrivialen Fall $a_{ij} \neq 0$, $b_{ij} \neq 0$ und $c_{ij} \neq 0$ die fehlenden Koeffizienten der Ansatzfunktionen (4.93a)-(4.93c). Mit der Forderung (4.94) folgt aus der Gleichung (4.92):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_f}{\partial a_{kl}} = & \\
= & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ij} \left\{ A_{44} \int_{x=0}^a X_i^w X_k^w dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy + A_{45} \left(\int_{x=0}^a X_i^w \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} Y_l^w dy + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_j^w \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy \right) + A_{55} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^w Y_l^w dy \right\} + \\
& + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M b_{ij} \left\{ A_{45} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_x} X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_x} \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy + A_{55} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_x} \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_x} Y_l^w dy \right\} + \\
& + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M c_{ij} \left\{ A_{44} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_y} X_k^w dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_y} \frac{\partial Y_l^w}{\partial y} dy + A_{45} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_y} \frac{\partial X_k^w}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_y} Y_l^w dy \right\}, \quad (4.95a)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_f}{\partial b_{kl}} = & \\
= & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ij} \left\{ A_{45} \int_{x=0}^a X_i^w X_k^{\psi_x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} Y_l^{\psi_x} dy + A_{55} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} X_k^{\psi_x} dx \int_{y=0}^b Y_j^w Y_l^{\psi_x} dy \right\} + \\
+ & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M b_{ij} \left\{ D_{11} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^{\psi_x}}{\partial x} \frac{\partial X_k^{\psi_x}}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_x} Y_l^{\psi_x} dy + D_{16} \left(\int_{x=0}^a X_i^{\psi_x} \frac{\partial X_k^{\psi_x}}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^{\psi_x}}{\partial y} Y_l^{\psi_x} dy + \right. \right. \\
+ & \left. \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^{\psi_x}}{\partial x} X_k^{\psi_x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_x} \frac{\partial Y_l^{\psi_x}}{\partial y} dy \right) + D_{66} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_x} X_k^{\psi_x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^{\psi_x}}{\partial y} \frac{\partial Y_l^{\psi_x}}{\partial y} dy + \\
+ & \left. A_{55} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_x} X_k^{\psi_x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_x} Y_l^{\psi_x} dy \right\} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M c_{ij} \left\{ D_{12} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_y} \frac{\partial X_k^{\psi_x}}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^{\psi_y}}{\partial y} Y_l^{\psi_x} dy + \right. \\
+ & D_{16} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^{\psi_y}}{\partial x} \frac{\partial X_k^{\psi_x}}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_y} Y_l^{\psi_x} dy + D_{26} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_y} X_k^{\psi_x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^{\psi_y}}{\partial y} \frac{\partial Y_l^{\psi_x}}{\partial y} dy + \\
+ & \left. D_{66} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^{\psi_y}}{\partial x} X_k^{\psi_x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_y} \frac{\partial Y_l^{\psi_x}}{\partial y} dy + A_{45} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_y} X_k^{\psi_x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_y} Y_l^{\psi_x} dy \right\} \quad (4.95b)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_f}{\partial c_{kl}} = & \\
= & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ij} \left\{ A_{44} \int_{x=0}^a X_i^w X_k^{\psi_y} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^w}{\partial y} Y_l^{\psi_y} dy + A_{45} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^w}{\partial x} X_k^{\psi_y} dx \int_{y=0}^b Y_j^w Y_l^{\psi_y} dy \right\} + \\
+ & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M b_{ij} \left\{ D_{12} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^{\psi_x}}{\partial x} X_k^{\psi_y} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_x} \frac{\partial Y_l^{\psi_y}}{\partial y} dy + D_{16} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^{\psi_x}}{\partial x} \frac{\partial X_k^{\psi_y}}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_x} Y_l^{\psi_y} dy + \right. \\
+ & D_{26} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_x} X_k^{\psi_y} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^{\psi_x}}{\partial y} \frac{\partial Y_l^{\psi_y}}{\partial y} dy + D_{66} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_x} \frac{\partial X_k^{\psi_y}}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^{\psi_x}}{\partial y} Y_l^{\psi_y} dy + \\
+ & \left. A_{45} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_x} X_k^{\psi_y} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_x} Y_l^{\psi_y} dy \right\} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M c_{ij} \left\{ D_{22} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_y} X_k^{\psi_y} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^{\psi_y}}{\partial y} \frac{\partial Y_l^{\psi_y}}{\partial y} dy + \right. \\
+ & D_{26} \left(\int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^{\psi_y}}{\partial x} X_k^{\psi_y} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_y} \frac{\partial Y_l^{\psi_y}}{\partial y} dy + \int_{x=0}^a X_i^{\psi_y} \frac{\partial X_k^{\psi_y}}{\partial x} dx \int_{y=0}^b \frac{\partial Y_j^{\psi_y}}{\partial y} Y_l^{\psi_y} dy \right) + \\
+ & \left. D_{66} \int_{x=0}^a \frac{\partial X_i^{\psi_y}}{\partial x} \frac{\partial X_k^{\psi_y}}{\partial x} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_y} Y_l^{\psi_y} dy + A_{44} \int_{x=0}^a X_i^{\psi_y} X_k^{\psi_y} dx \int_{y=0}^b Y_j^{\psi_y} Y_l^{\psi_y} dy \right\}. \quad (4.95c)
\end{aligned}$$

Matriziell kann der Zusammenhang (4.95a) als

$$[Z \langle a \rangle_{ijkl}^{\partial a_{kl}}] \{a_{ij}\} + [Z \langle b \rangle_{ijkl}^{\partial a_{kl}}] \{b_{ij}\} + [Z \langle c \rangle_{ijkl}^{\partial a_{kl}}] \{c_{ij}\} = \{P_{pkl}\} \quad (4.96a)$$

die Gleichung (4.95b) als

$$\left[Z \langle a \rangle_{ijkl}^{\partial b_{kl}} \right] \{a_{ij}\} + \left[Z \langle b \rangle_{ijkl}^{\partial b_{kl}} \right] \{b_{ij}\} + \left[Z \langle c \rangle_{ijkl}^{\partial b_{kl}} \right] \{c_{ij}\} = \{0\} \quad (4.96b)$$

und die Herleitung (4.95c) als

$$\left[Z \langle a \rangle_{ijkl}^{\partial c_{kl}} \right] \{a_{ij}\} + \left[Z \langle b \rangle_{ijkl}^{\partial c_{kl}} \right] \{b_{ij}\} + \left[Z \langle c \rangle_{ijkl}^{\partial c_{kl}} \right] \{c_{ij}\} = \{0\} \quad (4.96c)$$

bzw. in Hypermatrixschreibweise als

$$\begin{pmatrix} \left[Z \langle a \rangle_{ijkl}^{\partial a_{kl}} \right] & \left[Z \langle b \rangle_{ijkl}^{\partial a_{kl}} \right] & \left[Z \langle c \rangle_{ijkl}^{\partial a_{kl}} \right] \\ \left[Z \langle a \rangle_{ijkl}^{\partial b_{kl}} \right] & \left[Z \langle b \rangle_{ijkl}^{\partial b_{kl}} \right] & \left[Z \langle c \rangle_{ijkl}^{\partial b_{kl}} \right] \\ \left[Z \langle a \rangle_{ijkl}^{\partial c_{kl}} \right] & \left[Z \langle b \rangle_{ijkl}^{\partial c_{kl}} \right] & \left[Z \langle c \rangle_{ijkl}^{\partial c_{kl}} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{a_{ij}\} \\ \{b_{ij}\} \\ \{c_{ij}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{P_{pkl}\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{pmatrix} \quad (4.97a)$$

formuliert werden. Das Auflösen des Gleichungssystems (4.97a) nach den noch unbekanntenen Koeffizienten liefert den Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} \{a_{ij}\} \\ \{b_{ij}\} \\ \{c_{ij}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[Z \langle a \rangle_{ijkl}^{\partial a_{kl}} \right] & \left[Z \langle b \rangle_{ijkl}^{\partial a_{kl}} \right] & \left[Z \langle c \rangle_{ijkl}^{\partial a_{kl}} \right] \\ \left[Z \langle a \rangle_{ijkl}^{\partial b_{kl}} \right] & \left[Z \langle b \rangle_{ijkl}^{\partial b_{kl}} \right] & \left[Z \langle c \rangle_{ijkl}^{\partial b_{kl}} \right] \\ \left[Z \langle a \rangle_{ijkl}^{\partial c_{kl}} \right] & \left[Z \langle b \rangle_{ijkl}^{\partial c_{kl}} \right] & \left[Z \langle c \rangle_{ijkl}^{\partial c_{kl}} \right] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \{P_{pkl}\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{pmatrix} \quad (4.97b)$$

als Bestimmungsgleichung für die Ansatzfunktionen (4.93a)-(4.93c).

4.3.2 Wahl der Ansatzfunktionen

Statt der unbekanntenen Verschiebung $w(x, y)$ und der Drehwinkel $\Psi_x(x, y)$ und $\Psi_y(x, y)$ wird bei dem Verfahren von RITZ eine Vergleichsfunktion als Doppelreihenansatz der Form (4.93a)-(4.93c) eingeführt. Hierbei sind $X_i^w(x)$, $X_i^{\Psi_x}(x)$ und $X_i^{\Psi_y}(x)$ Funktionsansätze in Abhängigkeit der Koordinate x und $Y_j^w(y)$, $Y_j^{\Psi_x}(x)$ und $Y_j^{\Psi_y}(y)$ von y abhängende Ansätze, die lediglich die wesentlichen Randbedingungen des jeweiligen Plattenproblems erfüllen müssen. Nachfolgend werden für den Fall der allseitigen zugfest-gelenkigen Lagerung und der allseitig festen Einspannung einer symmetrischen, schubweichen Laminatplatte die Randbedingungen und geeigneten Ansatzfunktionen diskutiert.

Zugfest-gelenkige Lagerung

Für die allseitige zugfest-gelenkige Plattenlagerung sind an den Rändern die Bedingungen

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = M_x(0, y) = M_x(a, y) &= 0, \\ w(x, 0) = w(x, b) = M_x(x, 0) = M_x(x, b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

zu erfüllen. ALTENBACH et al. [2], PETRY [78] und REDDY [87] schlagen als Ansatz für die Biegeverformung $w(x, y)$ (4.93a) die Eigenfunktion des an zwei Seiten zugfest-gelenkig gelagerten Balkens,

$$X_i^w(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \quad \text{und} \quad Y_j^w(y) = \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right), \quad (4.99)$$

vor, die den geforderten Randbedingungen des Problems (4.98) genügen. Für die unabhängigen Drehwinkel ψ_x und ψ_y finden sich bei ASHTON et al. [5]

$$X_i^{\psi_x}(x) = \cos\left(\frac{i\pi x}{a}\right), \quad Y_j^{\psi_x}(y) = \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (4.100)$$

und

$$X_i^{\psi_y}(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right), \quad Y_j^{\psi_y}(y) = \cos\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (4.101)$$

als Vorschlag für geeignete Funktionsansätze.

Feste Einspannung

Bei der allseitigen festen Einspannung müssen die zu wählenden Ansatzfunktionen den Randbedingungen

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = \frac{\partial w(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial w(a, y)}{\partial x} &= 0, \\ w(x, 0) = w(x, b) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial w(x, b)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.102)$$

genügen. In Anlehnung an ESCHENAUER et al. [21] findet sich hierzu ein Cosinusansatz der Form

$$X_i^w(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2i\pi x}{a}\right) \right], \quad Y_j^w(y) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2j\pi y}{b}\right) \right]. \quad (4.103)$$

Für die unabhängigen Drehwinkel finden sich in der Literatur keine geeigneten Ansatzvorschläge. Deshalb werden die Funktionsansätze der Form

$$X_i^{\psi_x}(x) = \sin\left(\frac{2i\pi x}{a}\right), \quad Y_j^{\psi_x}(y) = \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (4.104)$$

und

$$X_i^{\psi_y}(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right), \quad Y_j^{\psi_y}(y) = \sin\left(\frac{2j\pi y}{b}\right) \quad (4.105)$$

gewählt, die den in (4.102) geforderten Randbedingungen genügen und hinreichend genaue Ergebnisse liefern.

4.4 Anwendung schubstarrer oder -weicher Theorien

In den Annahmen zur Herleitung der KIRCHHOFFSchen Plattengleichung (Kapitel 3.1) wurden bereits die Einsatzgrenzen einer schubstarrten Plattentheorie für isotrope Materialien angesprochen. Unter der Kenntnis schubweicher, geschichteter Flächentragwerke sollen an dieser Stelle die Auswahl der zur Beschreibung des Problems geeigneten Theorien diskutiert werden. Bei sehr dünnen, flächigen Bauteilen ist es möglich, die Freiheitsgrade zur Beschreibung der Plattenverformung auf der Grundlage der Normalenhypothese nach KIRCHHOFF zu reduzieren. Diese Hypothese, der auch im Zustand der Plattenbiegung unveränderlichen Orthogonalität einer Normalen zur unverformten Plattenmittelfläche bei Vernachlässigung

der Verzerrungen in Dickenrichtung, wurde in Kapitel 4.1 und 4.2 auf die Herleitung der Klassischen Laminattheorie (CLT) übertragen [2, 3, 28, 46, 58, 83, 87, 106]. So läßt sich für isotrope, dünne Platten,

$$\frac{\min(a, b)}{h} \geq 10 \quad (4.106)$$

und mitteldicke Platten mit

$$5 < \frac{\min(a, b)}{h} < 10 \quad (4.107)$$

bei kleinen Biegeverformungen

$$\frac{w}{h} < 0,2 \quad (4.108)$$

die schubstarre KIRCHHOFF-Theorie anwenden. Hierbei sind $\min(a, b)$ die Länge der kleinsten Plattenseite a bzw. b , h die Dicke der zu betrachtenden Rechteckplatte und w die Plattendurchbiegung. Zur Beschreibung dünner, isotroper Tragwerke mit großen Durchbiegungen,

$$0,2 \leq \frac{w}{h} \leq 5, \quad (4.109)$$

ist die Anwendung einer nichtlinearen Theorie, wie sie zum Beispiel von VON KÁRMÁN beschrieben wird [2, 18, 82, 104], erforderlich. Dicke isotrope Platten sind mit einer schubweichen Theorie zu berechnen, worauf an dieser Stelle nicht weiter eingegangen wird. Zur Biegeberechnung geschichteter Platten weist ROHWER in [91, 92, 93] darauf hin, daß bei Laminaten aufgrund des größeren Verhältnisses von E-Modul in Faserlängsrichtung E_{11} zum Schubmodul G_{12} in der Plattenebene für die Gültigkeit der KIRCHHOFF-Annahme größere Plattenschlankheiten $H = \frac{\min(a, b)}{h}$ erforderlich sind als bei isotropen ebenen Tragwerken. Als Richtwert für die Plattenschlankheitsgrenze für eine zulässige Anwendung einer schubstarrten Laminattheorie geben ROHWER und GEIER in [91] das Verhältnis

$$H = \frac{\min(a, b)}{h} > 20 \quad (4.110)$$

an. Bei den zu betrachtenden Impactversuchen (Kapitel 6.2) in Anlehnung an die Airbus-Norm AITM 1.0010 [59] und die DIN EN 6038 [72] wird eine rechteckige Laminatplatte mit den Abmessungen $150\text{mm} \times 100\text{mm}$ in den Einspannrahmen eingesetzt. Die Plattenaufnahme weist ein freies Stützfenster von $125\text{mm} \times 75\text{mm}$ auf, so daß sich für die Platten mit einer Dicke ca. 4mm ein Schlankheitsverhältnis von $\frac{\min(a, b)}{h} = 18,75$ ergibt. Folglich ist davon auszugehen, daß in diesem Fall die Anwendung einer schubweichen Laminattheorie zur Berechnung der Plattenbiegeverformung erforderlich wird. Eine geeignete Theorie zur Berechnung schubweicher Schichtverbunde ist die in Kapitel 4.3 hergeleitete Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (FSDT).

4.5 Vergleich schubstarrer und -weicher Theorien

Nun sollen am Beispiel einer Laminatplatte unter zentraler Einzelkraft P die Ergebnisse schubstarrer und schubweicher Schichtverbunde diskutiert werden. Die zu betrachtende Laminatplatte hat in Anlehnung an das in den Impactversuchen nach Norm [59, 72] vorliegende freie Auflagefenster die seitlichen Abmessungen $125\text{mm} \times 75\text{mm}$. Der verwendete quasiisotrope Lagenaufbau ist abweichend von der DIN EN 7000-11 [73] (Abb. 6.3) nach der

Definition der Schichtreihenfolge in [46, 87] und in der Abbildung 4.2 als $[[-45/0/ + 45/90]_4]_s$ anzugeben. Für das gewählte Prepregsystem HEXEL 8552/IM7 mit den Materialauslegungskennwerten bei Raumtemperatur [65] von

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= 155 \text{ GPa} && \text{Elastizitätsmodul parallel zur Faserlängsrichtung,} \\ E_{\perp} &= 10 \text{ GPa} && \text{Elastizitätsmodul senkrecht zur Faserlängsrichtung,} \\ G_{\parallel\perp} &= 4,5 \text{ GPa} && \text{Gleitmodul parallel/senkrecht zur Faserlängsrichtung,} \\ \nu_{\parallel\perp} &= 0,3 && \text{Querkontraktionszahl parallel/senkrecht zur Faserlängsrichtung,} \\ h_k &= 0,125 \text{ mm} && \text{Einzelschichtdicke} \end{aligned}$$

ergibt sich somit für die 32 Lagen des Schichtverbundes eine Plattendicke von ca. 4mm.

4.5.1 Schubstarre Laminatplatte

Nach der Klassischen Laminattheorie können aus den Gleichungen (4.46a)-(4.46c) für den oben genannten Schichtverbund die Gesamtsteifigkeiten angegeben werden. Bezüglich der Scheibenbelastung stellt sich der Verbund als transversalisotrop dar:

$$[A] = \begin{bmatrix} 260963 & 83034,4 & 0 \\ 83034,4 & 260963 & 0 \\ 0 & 0 & 88964,3 \end{bmatrix} \quad \text{in } \frac{N}{mm}. \quad (4.111)$$

Durch den symmetrischen und ausgewogenen Lagenaufbau verschwinden die Koppelsteifigkeiten,

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in } N. \quad (4.112)$$

Durch den quasiisotropen Laminataufbau zeigt der Verbund ein monotropes Materialverhalten der Plattensteifigkeiten:

$$[D] = \begin{bmatrix} 373263 & 119583 & -19370,3 \\ 119583 & 304897 & -19370,3 \\ -19370,3 & -19370,3 & 127490 \end{bmatrix} \quad \text{in } Nmm. \quad (4.113)$$

Das heißt, es besteht bei der Plattenbelastung eine Kopplung der Steifigkeiten zwischen Biegung und Torsion. Diese Eigenschaften der Plattensteifigkeiten verhindern eine Berechnung der Biegeverformung mit Hilfe einer Doppel-FOURIER-Reihe, wie sie z.B. bei ALTENBACH et al. [2, 3] oder bei TIMOSHENKO et al. [104] für die Biegeberechnung von allseitig zugfest-gelenkig gelagerten isotropen und orthotropen Platten vorgeschlagen wird. Auch die Beschreibung der Biegeverformung über eine Formulierung der lokalen Bewegungsgleichung, wie sie von REDDY [87] für orthotrope Verbunde vorgestellt wird, eignet sich bei diesem Lagenaufbau nicht, da beide Näherungsverfahren das Verschwinden der Biege-Torsions-Kopplungen fordern. Bei der Herleitung der Variationsformulierung mit dem Verfahren nach RITZ (Kap. 4.3.1) ist diese Einschränkung nicht gegeben.

4.5.2 Schubweiche Laminatplatte

Für die schubweiche Laminatplatte können die Ergebnisse der Klassischen Laminattheorie für die Scheibensteifigkeiten (4.111), Koppelsteifigkeiten (4.112) und Plattensteifigkeiten (4.113) übernommen werden. Ergänzend sind nun die Querschubsteifigkeiten nach der Gleichung (4.83) zu berücksichtigen. Unter den getroffenen vereinfachenden Annahmen

$$\begin{aligned}\nu_{23} &= \nu_{13} = 0,3, \\ \overline{Q}_{44}^{(k)} &= G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1 + \nu_{23})}, \\ \overline{Q}_{45}^{(k)} &= 0, \\ \overline{Q}_{55}^{(k)} &= G_{13} = G_{12}\end{aligned}\quad (4.114)$$

ergeben sich die Querschubsteifigkeiten des gewählten Laminates unter Berücksichtigung einer parabolischen Schubspannungsverteilung (4.78), (4.83) zu:

$$\begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13958,1 & 54,3 \\ 54,3 & 13862,4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \frac{N}{mm}.\quad (4.115)$$

4.5.3 Vergleich der Ergebnisse

Zur Untersuchung des Schubeinflusses auf die Biegeverformung rechteckiger Laminatplatten soll im folgenden die auf das Produkt aus Einzellast und Fläche $P \cdot a \cdot b$ bezogene Maximaldurchbiegung w_{max} über dem Schlankheitsverhältnis $H = \min(a, b)/h$ dargestellt werden. Hierbei sei $\min(a, b)$ die für die Biegung charakteristische, jeweils kürzere Plattenseite a bzw. b . Aufgrund der Symmetrie der gewählten Platte können zur schnelleren Konvergenz der Berechnungsergebnisse die Ansatzfunktionen für die zugfest-gelenkige Lagerung (4.99)-(4.101) so gewählt werden, daß nur die ungeraden Ansatzglieder betrachtet werden:

$$i \rightarrow (2i - 1), \quad j \rightarrow (2j - 1).\quad (4.116)$$

Der Lösungsansatz für das oben beschriebene Plattenproblem wurde mit dem Programmpaket *Mathematica 4.1* und *Mathematica 4.2* [108] programmiert und berechnet. Die Abbildung 4.4 zeigt exemplarisch für die zugfest-gelenkige und die feste Lagerung die Konvergenzbetrachtung an einer Laminatplatte mit den Seitenabmessungen $125mm \times 75mm \times 4mm$. Aus den Berechnungen wurden hinreichend konvergente Lösungen für Ansätze der Ordnung $i, j = 1, 2, \dots, 11$ gefunden. Die Abbildungen 4.5 und 4.6 zeigen die Berechnungsergebnisse für die schubweiche Laminatplatte mit parabolischer Schubspannungsverteilung ($FSDT K = Fkt$, s. a. Gl. (4.78), (4.83)), mit konstanter Spannungsverteilung ($FSDT K = 1$) und mit konstanter, reduzierter Spannungsverteilung ($FSDT K = 5/6$). Zum Vergleich sind die Lösungen schubstarrer Laminatplatten nach der Klassischen Laminattheorie (CLT) dargestellt. Die Diagramme zeigen jeweils ergänzend die Abweichungen der schubstarreren Theorie ohne Schubkorrekturfaktor ($FSDT K = 1$) bzw. der schubstarreren Theorie (CLT) von der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung mit einer über die Plattendicke parabolischen Schubspannungsverteilung ($FSDT K = Fkt$). Es ist erkennbar, daß mit abnehmender Plattenschlankheit der Einfluß der Schubsteifigkeit zunimmt. Ab einem Schlankheitsverhältnis von $H \leq 20$ bei der

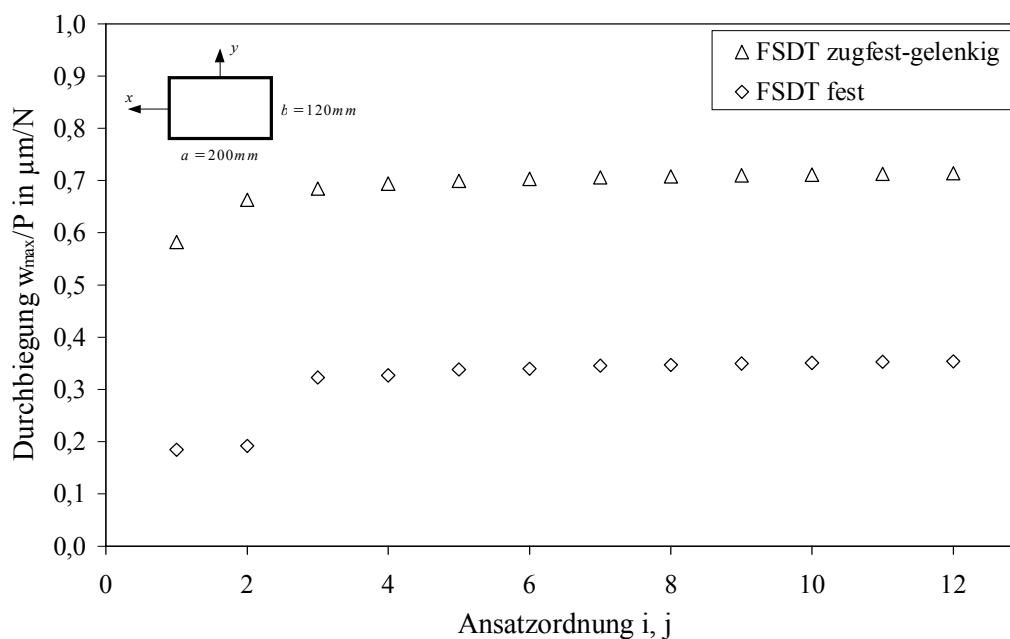


Abbildung 4.4: Konvergenzbetrachtung der schubweichen, zugfest-gelenkig gelagerten und fest eingespannten Laminatplatte mit den Abmessungen $200\text{mm} \times 120\text{mm} \times 4\text{mm}$.

zugfest-gelenkigen Lagerung und einem Verhältnis von $H \leq 30$ bei der festen Einspannung ist eine Berechnung der Plattenverformung unter Verwendung einer schubstarken Theorie nicht mehr gerechtfertigt, da die Verbundsteifigkeit in diesem Fall überschätzt wird. Die Abweichung der Berechnungsergebnisse der schubstarken Theorie von der schubweichen Plattentheorie wird in diesem Fall größer als 10%. Mit weiter abnehmender Plattenschlankheit wird es erforderlich, einen geeigneten Schubkorrekturfaktor einzuführen, um die Gesamtnachgiebigkeit des Laminates ausreichend zu berücksichtigen. Ab einem Verhältnis von $H \leq 5$ bei der zugfest-gelenkigen Lagerung und von $H \leq 8$ bei der festen Einspannung wird der Fehler bei Verwendung einer schubweichen Laminattheorie ohne Schubkorrekturfaktor ($FSDT K=1$) größer als 10%. Erkennbar ist weiter, daß zwischen der Einführung eines konstanten Korrekturfaktors $K=5/6$ und der parabolischen Gewichtung des Querschubes nach den Gleichungen (4.78) und (4.83) kein signifikanter Unterschied in den Berechnungsergebnisse deutlich wird.

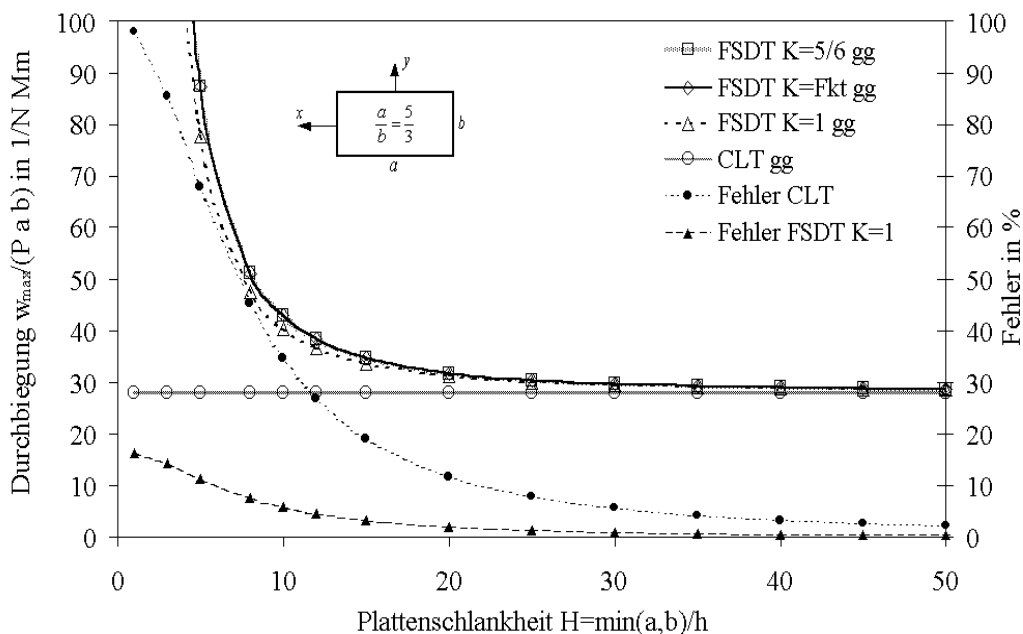


Abbildung 4.5: Darstellung der relativen Maximaldurchbiegung $w_{max}/(P \cdot a \cdot b)$ in $(N \cdot Mm)^{-1}$ über die Plattenschlankheit $\min(a,b)/h$ für die allseitig zugfest-gelenkig gelagerte Laminatplatte. CLT: schubstarr; FSDT: schubweich.

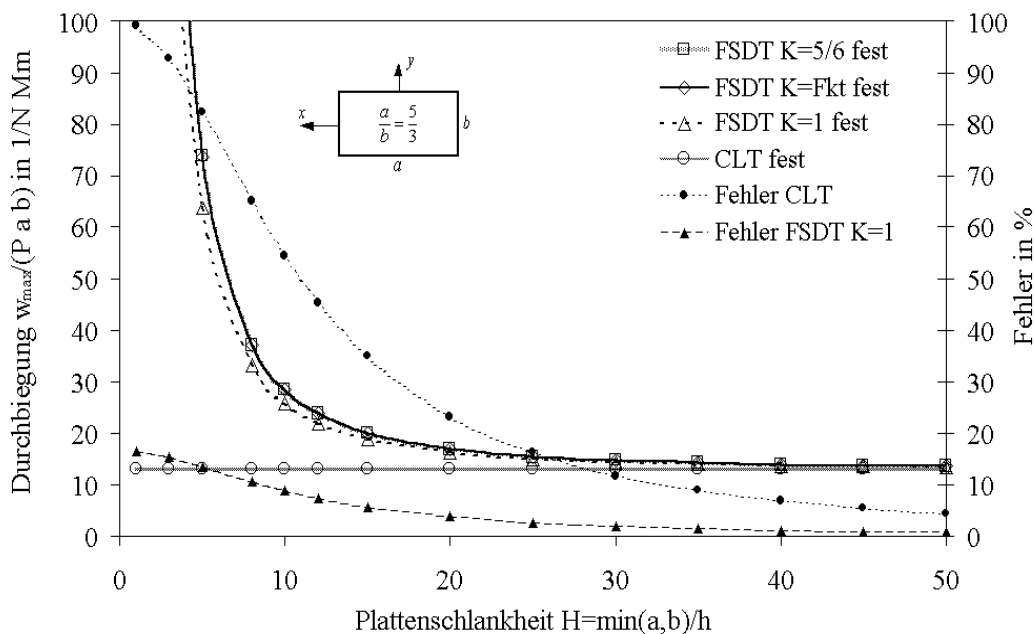


Abbildung 4.6: Darstellung der relativen Maximaldurchbiegung $w_{max}/(P \cdot a \cdot b)$ in $(N \cdot Mm)^{-1}$ über die Plattenschlankheit $\min(a,b)/h$ für die allseitig fest eingespannte Laminatplatte. CLT: schubstarr; FSDT: schubweich.

Kapitel 5

Transversale Stoßbelastung an Rechteckplatten

Nachfolgend soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, um näherungsweise die Maximalverformung der Platte bei einem Niedergeschwindigkeitsimpact abzuschätzen. Die gewählte Theorie beruht auf der Annahme, daß bei kleinen Impactgeschwindigkeiten die statische und dynamische Verformung als gleich angenommen werden kann. Dieses Berechnungsverfahren erlaubt aber keine Impactdauerberechnung.

5.1 Näherungsweise Berechnung der Plattenbiegung

Zur Ermittlung der Plattenbeanspruchungen während eines Niedergeschwindigkeitsimpact ist es erforderlich, die Maximaldurchbiegung der Platte zu kennen. Mit Hilfe der Extremalauslenkung und einer zu wählenden geeigneten Plattentheorie können die aus einem Stoßvorgang resultierenden Schnittkraftgrößen ermittelt werden.

SZABÓ [101] stellt einen Ansatz vor, der es ermöglicht, näherungsweise die extremale Durchsenkung der Plattenmitte beim Aufprall einer Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 zu bestimmen. Hierzu wird für die dynamische Verformung $w(x, y, t)$ der Plattenmittelebene während des Stoßvorganges die Ähnlichkeit der statischen Plattenverformung $w_s(x, y)$ unter der Einzellast P an der Stoßstelle 0 vorausgesetzt. Für die weitere Betrachtung ist eine Unterteilung des Impactvorgangs in vier Phasen erforderlich:

1. In der Zeit $t < t_0$ bewegt sich die Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 auf die ruhende, unbelastete Platte zu (Abb. 5.1).
2. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ berührt die Masse die Platte im Auftreffpunkt 0. In diesem Moment hat noch kein Impulsaustausch stattgefunden (Abb. 5.1). Der Impactor besitzt noch den Anfangsimpuls

$$I_{imp} = m_1 v_1 . \quad (5.1)$$

3. Der Zeitraum $t_0 < t \leq t'_0$ wird als Kompressionszeit von Impactor und Platte bezeichnet. In dieser Zeit beschleunigt die aufprallende Masse m_1 die Masse \bar{m} im Stoßpunkt

der Platte auf die gemeinsame Geschwindigkeit $u_0(t'_0)$ (Abb. 5.1). Vorausgesetzt wird, daß Platte und Impactor sich nicht mehr trennen, so daß der Stoßvorgang mit dem Ende der Kompressionszeit abgeschlossen ist.

4. Die vierte zu betrachtende Phase ist die Extremalauslenkung $w_{max}(x, y)$ der Platte (Abb. 5.1). Zu diesem Zeitpunkt verschwinden Geschwindigkeit und Impuls von Impactor und Platte:

$$v_{imp} = v_{pl} = u_0 = 0. \tag{5.2}$$

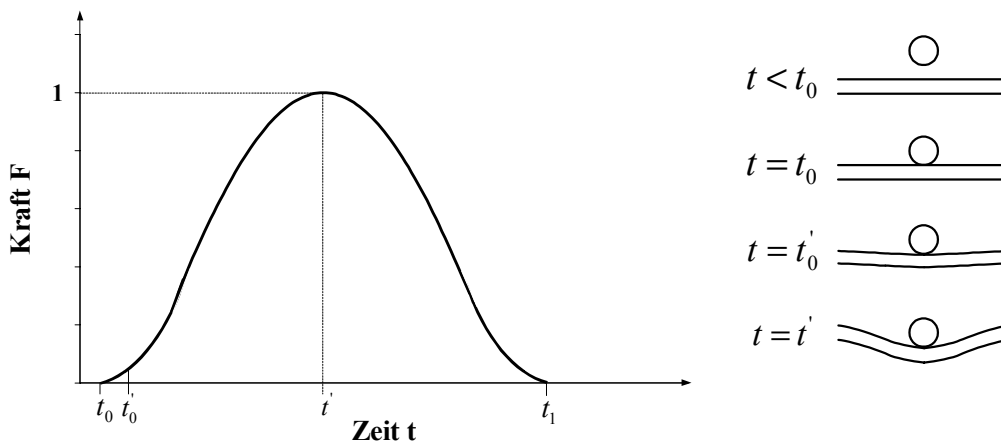


Abbildung 5.1: Stoßkraft-Zeit-Verlauf und Phasen des Impactvorgangs.

Für den statischen Fall kennzeichnet w_{s0} die Durchsenkung der Platte am Kraftangriffspunkt 0 unter der Einzellast F , wobei sich schreiben läßt:

$$w_s(x, y) = w_{s0} \frac{w_s(x, y)}{w_{s0}} = w_{s0} f(x, y) \tag{5.3}$$

mit

$$f(x, y) = \frac{w_s(x, y)}{w_{s0}}. \tag{5.4}$$

Hierbei ist $f(x, y)$ eine dimensionslose Funktion, die die Plattendurchsenkung bei einer Einheitsverschiebung des Kraftangriffspunktes 0 beschreibt. Die Gleichung (5.3) läßt sich auf den dynamischen Fall erweitern:

$$w(x, y, t) = w_0(t) \frac{w(x, y, t)}{w_0(t)} = w_0(t) \tilde{f}(x, y) \tag{5.5}$$

mit

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{w(x, y, t)}{w_0(t)}, \tag{5.6}$$

wobei $w_0(t)$ die Auslenkung der Platte zum Zeitpunkt t am Stoßpunkt 0 ist. Mit der obigen Voraussetzung der Ähnlichkeit von statischer und dynamischer Verformung gilt vereinfachend für die dimensionslosen Funktionen in den Gleichungen (5.3)-(5.6):

$$f(x, y) = \tilde{f}(x, y). \tag{5.7}$$

Die Ableitung der Durchsenkung $w(x, y, t)$ nach der Zeit t liefert die Geschwindigkeit $u(x, y, t)$ der Platte an der Stelle (x, y) zum Zeitpunkt t :

$$\frac{d}{dt}w(x, y, t) = \dot{w}(x, y, t) = u(x, y, t). \quad (5.8)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (5.5) und (5.7) folgt aus (5.8):

$$u(x, y, t) = \dot{w}_o(t) f(x, y) = u_0(t) f(x, y). \quad (5.9)$$

Hierbei kennzeichnet $u_0(t)$ die gemeinsame Geschwindigkeit von Impactor und Platte am Stoßpunkt 0 zum Zeitpunkt t . Aus dem Impulssatz wird die gemeinsame Geschwindigkeit von Impactormasse m_1 und Plattenmasse \bar{m} am Aufprallpunkt ermittelt:

$$(m_1 + \bar{m})u_0(t'_0) = m_1 v_1 \quad (5.10)$$

bzw.

$$u_0(t'_0) = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + \bar{m})}. \quad (5.11)$$

Das Produkt $\bar{m} u_0(t'_0)$ ist der Impuls, den die Platte in der Kompressionszeit erfährt. Dieser Impuls kann auch aufgefaßt werden als die Summe aller Elementarimpulse der einzelnen Plattenelemente in der Zeit $t_0 \leq t \leq t'_0$:

$$\bar{m} u_0(t'_0) = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dm u(x, y, t'_0). \quad (5.12)$$

Mit Einführung der dimensionslosen Längen

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (5.13)$$

folgt für die Beschreibung der inkremellen Plattenmasse

$$dm = \rho h dx dy = \rho h a b d\xi d\eta = m d\xi d\eta. \quad (5.14)$$

Hierbei ist ρ die Plattendichte und m die Masse der Platte. Somit folgt unter Berücksichtigung des Zusammenhangs

$$u(x, y, t'_0) = u_0(t'_0) f(x, y) \quad (5.15)$$

für die Gleichung (5.12):

$$\bar{m} u_0(t'_0) = m u_0(t'_0) \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^1 f(a\xi, b\eta) d\xi d\eta. \quad (5.16)$$

Hieraus folgt für die Vergleichsplattenmasse \bar{m} im Aufprallpunkt:

$$\bar{m} = m \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^1 f(a\xi, b\eta) d\xi d\eta = m\kappa' \quad (5.17)$$

mit

$$\kappa' = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^1 f(a\xi, b\eta) d\xi d\eta. \quad (5.18)$$

Bei bekannter Biegefläche $w_s(x, y)$ der Platte unter statischer Punktlast läßt sich mit der Gleichung (5.18) die Geschwindigkeit $u_0(t'_0)$ in Gleichung (5.11) bestimmen zu:

$$u_0(t'_0) = \frac{m_1}{(m_1 + m\kappa')} v_1. \quad (5.19)$$

Mit Hilfe der ermittelten Geschwindigkeit $u_0(t'_0)$ zum Ende der Kompressionszeit und unter Hinzuziehung der Energiezustände zur Zeit t'_0 (Lage 1, Abb. 5.2) sowie im Augenblick der maximalen Plattenauslenkung (Lage 2, Abb. 5.2) ist es möglich, die extremale Plattendurchsenkung $w_{0,max}$ am Stoßpunkt zu berechnen. Für die Energiebilanz in den Lagen 1 und 2

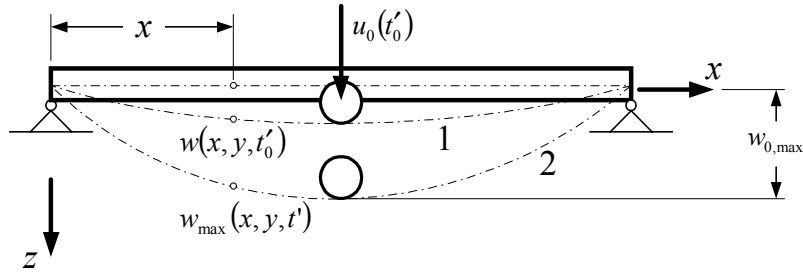


Abbildung 5.2: Plattendurchsenkung zum Zeitpunkt t'_0 und t' .

kann der Zusammenhang

$$\Pi(t'_0) + E_{kin,1} + E_{pot,1} = \Pi(t') + E_{kin,2} + E_{pot,2}, \quad (5.20)$$

formuliert werden. Hierbei stellen Π die Verformungsenergie der Platte, $E_{kin,i}$ und $E_{pot,i}$ die kinetische und potentielle Energie von Platte und Impactor in der Lage i dar. Da die Verformungsenergie $\Pi(t'_0)$ der Platte in der Lage 1 als Null angesehen werden kann, sowie die kinetische Energie $E_{kin,2}$ und die potentielle Energie $E_{pot,2}$ zum Zeitpunkt der maximalen Plattenauslenkung verschwinden, vereinfacht sich die Gleichung (5.20) zu

$$E_{kin,1} + E_{pot,1} = \Pi(t'). \quad (5.21)$$

Unter Berücksichtigung der Energiesätze folgt weiter aus Gleichung (5.21):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 u_0^2(t'_0) + \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dm u_0^2(x, y, t'_0) + m_1 g w_{0,max} + \\ + \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dm g w_{max}(x, y) = \frac{1}{2} c w_{0,max}^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Federkonstante c bezeichnet dabei mit der Auslenkung $w_{0,max}$ die Kraft, die erforderlich ist, eine Plattendurchsenkung am Stoßpunkt von $w_0 = 1$ zu erzeugen. Die Plattendurchbiegung zum Zeitpunkt $t = t'_0$ wird dabei als vernachlässigbar klein zur Maximalauslenkung angesehen. Führt man als weitere Parameter

$$\kappa'' = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^1 f^2(a\xi, b\eta) d\xi d\eta \quad (5.23)$$

ein und formuliert die Energieterme aus Gleichung (5.22) unter Berücksichtigung der Zusammenhänge (5.5, 5.9, 5.18) und (5.23) zu:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dm u_0^2(x, y, t'_0) &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dm u_0^2(t'_0) f^2(x, y) \\
&= \frac{1}{2} m u_0^2(t'_0) \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^1 f^2(a\xi, b\eta) d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2} m u_0^2(t'_0) \kappa''
\end{aligned} \tag{5.24}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dm g w_{max}(x, y) &= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dm g w_{0,max}(x, y) f(x, y) \\
&= m g w_{0,max} \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^1 f(a\xi, b\eta) d\xi d\eta \\
&= m g w_{0,max} \kappa''
\end{aligned} \tag{5.25}$$

folgt aus Gleichung (5.22)

$$\frac{1}{2} (m_1 + m \kappa'') u_0^2(t'_0) + (m_1 + m \kappa') g w_{0,max} = \frac{1}{2} c w_{0,max}^2. \tag{5.26}$$

Führt man für das Gewicht der Platte

$$G = m g \tag{5.27}$$

und für das Impactgewicht

$$G_1 = m_1 g \tag{5.28}$$

ein, so kann man mit der statischen Auslenkung

$$w_{s0} = \frac{m_1 g + \kappa' m g}{c} = \frac{G_1 + \kappa' G}{c} \tag{5.29}$$

mittels der Lösungsformel für dynamische Gleichungen 2. Grades die Maximaldurchsenkung des Aufprallpunktes 0 aus Gleichung (5.26) bestimmen:

$$w_{0,max} = w_{s0} + \sqrt{w_{s0}^2 + \frac{u_0^2(t'_0) (m_1 + \kappa'' m)}{c}}. \tag{5.30}$$

Mit der Gleichung (5.19) kann nun der vollständige Zusammenhang für die Maximaldurchbiegung am Stoßpunkt angegeben werden:

$$\begin{aligned}
w_{0,max} &= \left(w_{s0} + \sqrt{w_{s0}^2 + \frac{m_1^2}{(m_1 + \kappa' m)} v_1 \frac{(m_1 + \kappa'' m)}{c}} \right) \\
&= w_{s0} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{c v_1^2 G_1^2 (G_1 + \kappa'' G_2)}{g (G_1 + \kappa' G_2)^4}} \right].
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Hierbei sind lediglich die Beiwerte κ' und κ'' sowie die Federkonstante c in Abhängigkeit von der gewählten Plattentheorie und den jeweiligen Randbedingungen zu bestimmen.

5.1.1 Maximaldurchbiegung der Laminatplatte beim Impact

Die im Kapitel 5.1 hergeleiteten Zusammenhänge eignen sich zum Abschätzen der maximalen Plattendurchbiegung und der daraus resultierenden Plattenbeanspruchungen (s. a. Kap. 3.1.3, 3.2.2, 3.3.3, 4.1.2, 4.2, 4.3) bei einem Impactversuch. In Abhängigkeit von den Probekörpereigenschaften ist das Plattenmodell zu wählen. Im Kapitel 4.5 wurden die Ergebnisse der Berechnungen schubstarrer und -weicher Plattentheorien miteinander verglichen. Der dort betrachtete Laminataufbau und die Materialeigenschaften werden für die weiteren Berechnungen als gegeben angenommen. In Anlehnung an die durchgeführten Impactversuche wird dabei eine Plattendicke von $h=4,1\text{mm}$ betrachtet. Ausgehend von dem im Kapitel 6.2 beschriebenen Versuchsaufbau mit einem freien Auflagefenster von $125\text{mm} \times 75\text{mm}$ mit pneumatischer und fixierter Einspannung werden Laminatplatten mit einer seitlichen Abmessung von $125\text{mm} \times 75\text{mm}$ mit zugfest-gelenkiger Lagerung und fester Einspannung untersucht. Die Impactmasse m_{imp} wird analog zur Abbildung 6.10 variiert. Die Fallhöhe beträgt in Anlehnung an die experimentellen Untersuchungen $h_{imp}=0,306\text{m}$. Die Abbildung 5.3 zeigt vergleichend die maximalen Plattendurchbiegungen der durchgeführten Berechnungen und der Versuchsergebnisse in Abhängigkeit von der Impactenergie. In der Darstellung

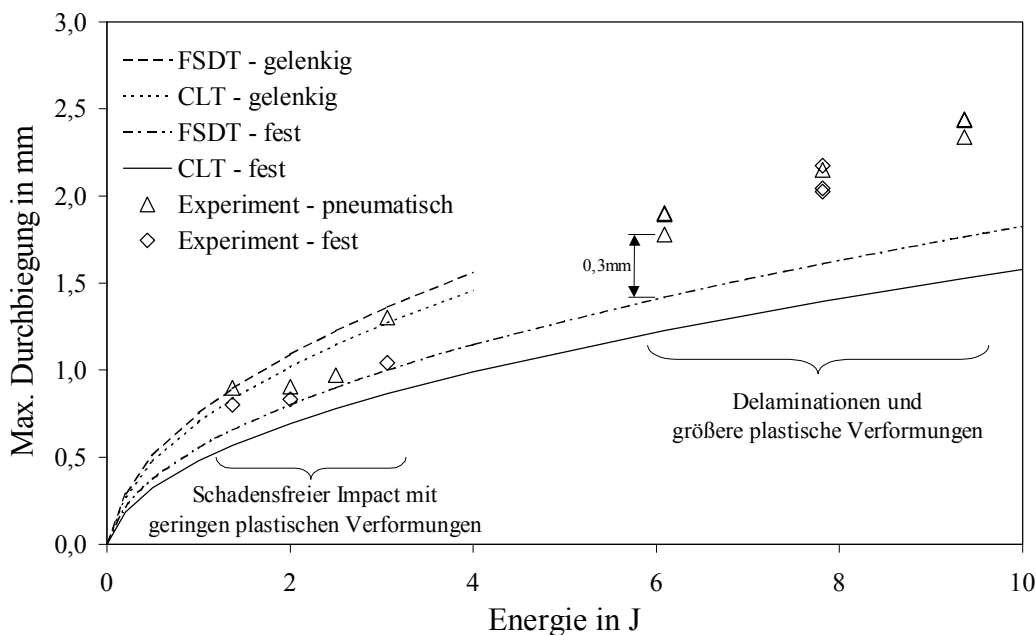


Abbildung 5.3: Maximale Plattendurchbiegung w_{max} versus Impactenergie E_{imp} .

der Ergebnisse aus den Experimenten können lediglich die während des Impacts gemessenen Wege des Impactschlittens angegeben werden. Unberücksichtigt bleibt eine Korrektur der Angaben, die durch elastisch-plastische Verformungen unter dem Impactdorn und einer Verringerung der Plattenbiegesteifigkeit durch entstehende Delaminationen zu größeren Wegen führen. Die in diesen Versuchen auftretenden plastischen Verformungen können abhängig von der Größe der Stoßkraft auf $w_{plast} \approx 0,1 - 0,4\text{mm}$ abgeschätzt werden (s. Abb. 5.3, 7.1, 7.2). Die elastischen Eindringtiefen wurden im Experiment nicht bestimmt. Bei Berücksichtigung der Eindringtiefen wird deutlich, daß sich die Einspannbedingungen des fixierten Impactprobekörpers als quasi-fest bezeichnen lassen. Zur deutlichen Differenzierung der

Randbedingungen werden in den Kapiteln 7.3 und 7.4 die pneumatische Einspannung als halb-gelenkig bezeichnet. Basierend auf den Ergebnissen des Kapitels 4.5.3 und den obigen Betrachtungen führt die Verwendung einer schubweichen Laminattheorie bei den vorliegenden Seiten-Dicken-Verhältnissen von $H = \frac{\min(a,b)}{h} = 18,29$ zu besseren Berechnungsergebnissen als bei einer schubstarken Theorie.

Kapitel 6

Experimentelle Einrichtungen, Versuchsdurchführung und Auswertung

In diesem Kapitel werden die Probenkörperherstellung und die Maßnahmen zu deren Qualitätssicherung, die verwendeten Versuchseinrichtungen und -verfahren sowie die analytischen Untersuchungsmethoden vorgestellt.

6.1 Probenkörperherstellung und -geometrie

Für die Aussagefähigkeit der experimentellen Ergebnisse waren das zur Probenkörperherstellung verwendete Prepregmaterial, dessen Zusammensetzung und mechanischen Eigenschaften, der verwendete Autoklavzyklus und die Geometrie der Impactproben von entscheidender Bedeutung.

6.1.1 Zusammensetzung und Kennzeichnung des Prepregsystems

Für die Untersuchungsreihen wurde das Prepreg HEXCEL 8552/IM7 der Firma HEXCEL COMPOSITES ausgewählt. Das hochvernetzende Prepregsystem mit relativ hohen Glasübergangstemperaturen und guten „hot-wet“-Eigenschaften wird beispielsweise als Strukturwerkstoff des Eurofighter Typhoon eingesetzt. Das verwendete Prepreg besteht aus den Kohlenstoffaserverovings IM7, die eingebettet in das Harz-Härter-Gemisch gewalzt und bei ca. 80°C vorvernetzt wird, um ein handhabbares Halbzeug zu erhalten. Das dann als Prepreg (engl.: **Pre-Impregnated**) bezeichnete Halbzeug [97, 110] wird für die Zwischenlagerung beidseitig mit einer Trägerfolie versehen und auf Rollen mit einer Breite von 75mm und einer Länge von ca. 240m bzw. 300m aufgerollt. Die Materialkennwerte nach Herstellerangaben der vernetzten Einzelschicht sind in der Tabelle 6.1 aufgeführt. Neben der Materialbezeichnung tragen die Prepregrollen eine sogenannte Chargen-Nummer. Der Begriff Charge bezieht sich dabei auf die während der Fertigung der Halbzeuge verwendeten diskontinuierlich hergestellten

Tabelle 6.1: Statische Materialkennwerte des unidirektionalen Prepregsystems HEXCEL 8552/IM7 nach Herstellerangaben [76] bei Normalklima [65].

		Materialkennwerte	Konstruktionswerte	Einheit
Longitudinal	Zugmodul	165	155	GPa
	Druckmodul	145	155	GPa
	Zugfestigkeit	2600	2400	MPa
	Druckfestigkeit	1500	1300	MPa
Transversal	Zugmodul	9,4	10	GPa
	Druckmodul	10,6	10	GPa
	Zugfestigkeit	60	50	MPa
	Druckfestigkeit	290	250	MPa
Schub in der Ebene	Schubmodul	4,5	4,5	GPa
	Schubfestigkeit	90	85	MPa
	Querkontraktionszahl	0,3	0,3	-
Interlaminare Festigkeit		117	109	MPa

Harzpastenansätze. In den Vorversuchen zeigte sich, daß zur Untersuchung des Geometrieinflusses bei den sehr sensitiven Impactversuchen auf die Verwendung einer einheitlichen Charge unter Beibehaltung gleicher Fertigungsbedingungen zu achten ist. Um den Effekt der langsam fortschreitenden Vernetzung des Harz-Härter-Gemisches im gelagerten Prepregsystem zu vermeiden, war eine rasche Fertigung einer Versuchsreihe innerhalb weniger Wochen erforderlich.

6.1.2 Verarbeitung des Prepregsystems

Die bei $-18^{\circ}C$ gelagerten Prepregrollen wurden vor der Verarbeitung bei Raumtemperatur aufgetaut und anschließend mit einer Schlagschere in Teilstücke unterschiedlicher Längen und Winkel zugeschnitten. Auf einem Vakuumschisch wurden die einzelnen Prepreglagen aufeinander geschichtet, so daß ein Gelege mit einer seitlichen Abmessung von $170mm \times 120mm$ entstand. Die Fixierung der Einzellagen zueinander entstand durch die nach der Entfernung der Trägerfolien vorliegenden Eigenklebrigkeit des Prepregs, die als „Tack“ bezeichnet wird. Durch die Orientierung der abzulegenden Einzelschichten wird der gewünschte Lagenaufbau erzielt. Nach jeder gelegten Schicht wurde dem Laminat durch das Anlegen von Vakuum die eingeschlossene Luft entfernt. Das Gelege wurde dann für die Vernetzung in einem definierten Druck-Temperatur-Profil in einer Laminatpresse ausgehärtet. Um die gewünschten Geometrien der Probenkörper zu erreichen, wurden entsprechend negativ geformte Grund- und Deckplatten zur Formgebung verwandt. Auf das fertig geschichtete Laminat wurde beidseitig ein Glasfasergewebe, das sogenannte Peelply, aufgebracht, um das überschüssige Harz aufzusaugen und zu binden. Dadurch wurde eine mögliche Verklebung der Werkzeuge und der Ansaugstutzen verhindert. Zur besseren Entformbarkeit des fertigen Laminates und als zusätzlicher Schutz der Werkzeuge gegen auslaufendes Harz wurde als äußere Verpackungsschicht eine PTFE-Folie (Polytetrafluorethylen - Teflon) eingelegt. Das Laminat mit Verpackung, Peelplay und PTFE-Folie, sowie die Grund- und Deckplatten wurden zur besseren Applizierung des Vakuums auf ein Kupfernetz gelegt und anschließend

mit einer 5mm dicken Vakuumfolie aus PTFE bedeckt. Die Vakuumfolie wurde seitlich abgedichtet, so daß unterhalb der Folie Vakuum und oberhalb der Folie Druck aufgebracht werden konnte. Die in dem oberen und unteren Rahmen der Laminatpresse integrierten Heizschlangen dienten der geregelten Aufbringung der Temperatur. Die Abbildung 6.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau der für die Probenkörperherstellung verwendeten Laminatpresse.

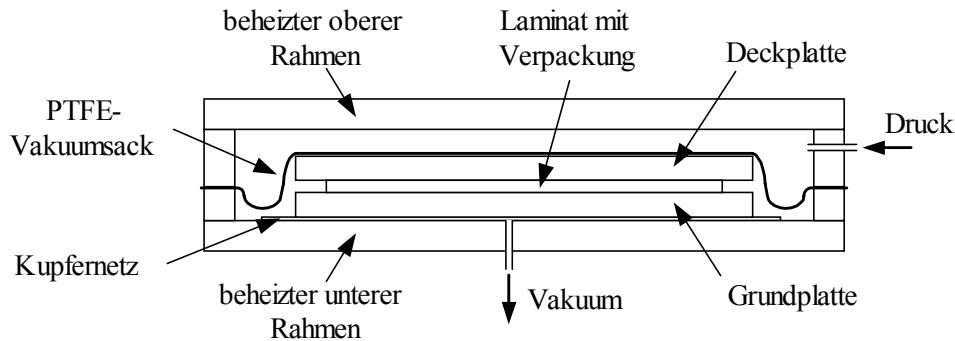


Abbildung 6.1: Prinzipskizze der verwendeten Laminatpresse.

Verwendeter Autoklavzyklus

Die Abbildung 6.2 zeigt den verwendeten Autoklavzyklus für das Harzsystem HEXCEL 8552 nach den Herstellerangaben [74]. Über den Vakuumstutzen wird zunächst ein Vakuum

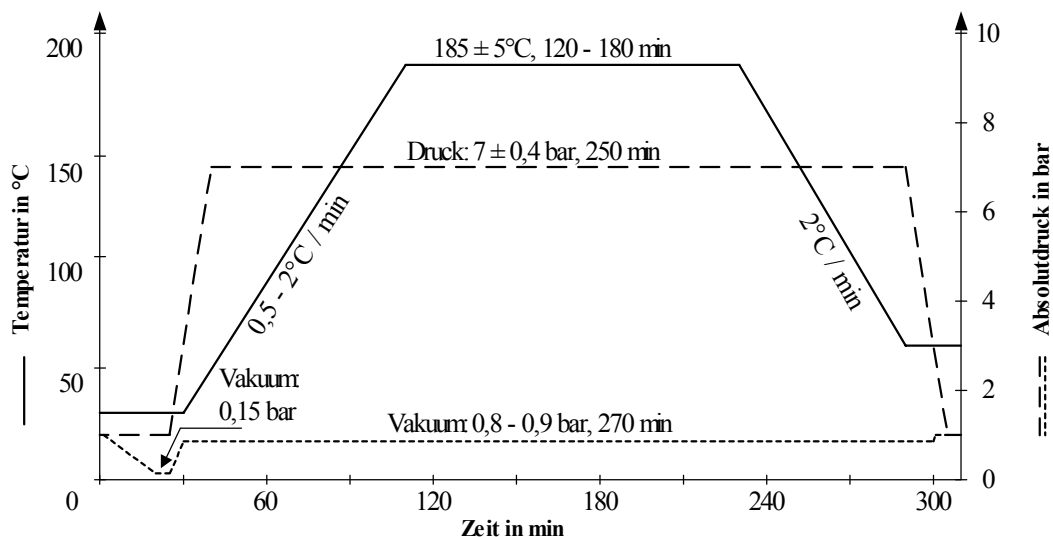


Abbildung 6.2: Verwendeter Autoklavzyklus für das Harzsystem HEXCEL 8552 [74].

von 150mbar(abs) angelegt. Das Vakuum dient der besseren Entgasung des Laminates während des Herstellungsprozesses. Über den Druckanschluß wird anschließend ein absoluter Druck von 7bar aufgebracht. Nach Erreichen des Solldrucks wird das Vakuum auf 800 – 900mbar(abs) reduziert und die Temperatur kontinuierlich mit 0,5 – 2°C/min auf

185°C erhöht. Während der Aufheizphase sinkt zunächst die Viskosität des Harz-Härter-Gemisches ab [75] und durch das angelegte Vakuum sowie den aufgebrachtten Druck beginnt das Gemisch die Fasern zu umfließen. Die Prozeßregelung muß dabei durch Vorversuche so eingestellt sein, daß ein übermäßiger Harzfluß bzw. ein ausbleibender Harzfluß vermieden wird. Ein zu großer Harzfluß führt zu einem zu großen Faservolumengehalt des fertigen Laminates mit zunehmend spröderen Materialeigenschaften. Wird der Harzfluß unterbunden, findet keine ausreichende Umspülung der Faser statt, so daß der Verbund inhomogen wird. Bereits in der Aufheizphase beginnt die Vernetzung von Harz und Härter, so daß nach dem anfänglichen Absinken der Matrixviskosität das Gemisch zunächst gelartig und dann fest wird. Am Ende der ca. zwei- bis dreistündigen Aushärtezeit bei 185°C wird zunächst die Temperatur mit 2°C/min und dann der Druck und das Vakuum auf Umgebungsbedingungen abgesenkt.

6.1.3 Probenkörpergeometrie

Für die Impactuntersuchungen in Anlehnung an die Airbus Industrie Test Method AITM 1.0010 [59], die Boing Specification BSS 7260 [61] und die DIN EN 6038 [72] wurden ebene und schwach gekrümmte Probenkörper gefertigt.

Ebene Probenkörper

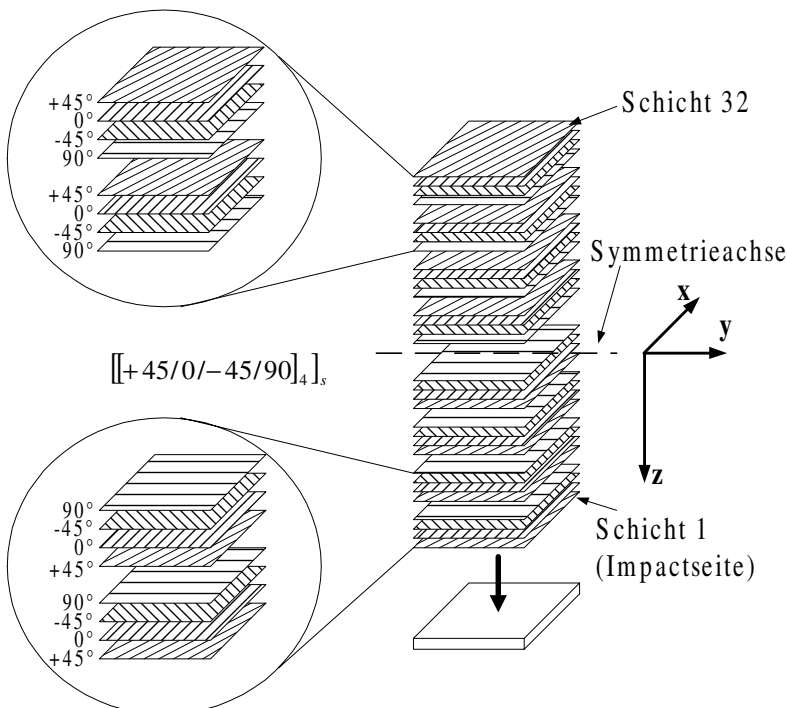


Abbildung 6.3: Prinzipskizze des verwendeten Lagenaufbaus $[[+45/0/-45/90]_4]_s$ gemäß DIN EN 7000-11 [73].

Die Herstellung der Probenkörper fand in Anlehnung an die Normen DIN EN 2565 [71] und DIN EN 7000-11 [73] statt. Die jeweils ca. 0,125mm dicken Prepreg-Lagen des Materials HEXCEL 8552/IM7 wurden zu einem 32-lagigen, ca. 4mm dicken Verbund mit dem quasiisotropen Lagenaufbau $[[+45/0/-45/90]_4]_s$ (Abbildung 6.3) laminiert. Die Laminat wurden dabei zunächst mit einer seitlichen Abmessung von ca. 170mm × 120mm gefertigt. Die Lagenfolge war so gewählt, daß die erste Schicht, in diesem Fall die +45°-Lage, auf die ebene Grundplatte abgelegt wurde. Die z-Achse verläuft dabei orthogonal zur Plattenmittel-

ebene und weist vom Betrachter weg. Das Laminieren der weiteren 31 Lagen erfolgte analog, so daß der ersten Schicht, der Impactseite, der größte z-Wert und der n-ten Schicht, der von der Stoßbelastung abgewandten Seite, der kleinste z-Wert zugeordnet wurde. Diese Definition der Schichtreihenfolge unterscheidet sich von der in der theoretischen Beschreibung eines Schichtverbundes üblichen Konvention der Schichtnumerierung (s. Abb. 4.2). Es ist somit zwischen einer theoretischen und einer fertigungstechnischen Beschreibung eines Schichtaufbaus zu unterscheiden. Die Aushärtung der Laminate erfolgte anschließend, wie Kapitel 6.1.2 beschrieben, unter einem definierten Druck-Temperatur-Profil in einem Plattenautoklaven.

Schwach gekrümmte Probenkörper

Die Herstellung der gekrümmten Probenkörper erfolgte analog zu den ebenen Platten. Die unterschiedlichen Krümmungen der Laminate wurden über in die Werkzeugplatten eingefräste Kugelsegmente unterschiedlicher Radien realisiert (Abbildung 6.4). Der Probenkörper-

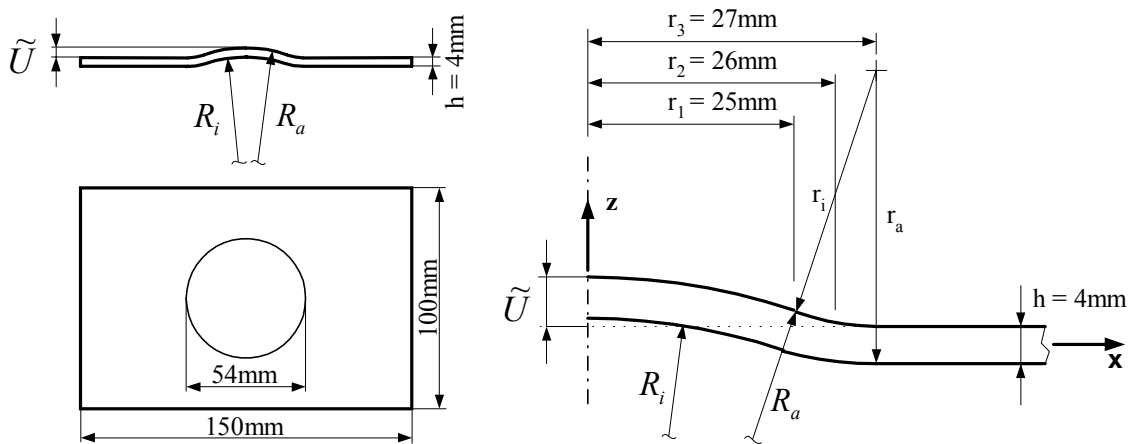


Abbildung 6.4: Geometrie der gekrümmten Probenkörper

geometrie können dabei ein äußerer Radius R_a und ein innerer Radius R_i zugeordnet werden. Die Differenz beider Radien entspricht der Plattendicke h :

$$R_a = R_i + h. \quad (6.1)$$

Der Punkt der größten Erhebung zur ebenen Plattenoberfläche wird als Überhöhung \tilde{U} bezeichnet und errechnet sich zu:

$$\tilde{U} = R_a - \sqrt{R_a^2 - r_2^2}. \quad (6.2)$$

Als wichtigster Parameter der Versuche ist die Größe bzw. Tiefe der Strukturkrümmung $\tilde{K} = 2/(R_a + R_i)$ der Probenkörper zu nennen. Der Übergangsbereich zwischen Kugelsegment und ebener Platte wurde so gestaltet, daß in einem Bereich $50\text{mm} \leq d \leq 54\text{mm}$ ein jeweils angepaßter Radius r_i bzw. r_a eingearbeitet wurde. Der Radius r_i läßt sich schreiben als:

$$r_i = \frac{r_3^2 + (R_a - \tilde{U})^2 - R_a^2}{2\tilde{U}}. \quad (6.3)$$

Die Verbindungen von dem Kugelsegment zum Übergangsradius und weiter zur ebenen Platte bilden dabei jeweils die Wendepunkte im Oberflächenverlauf und erfüllen somit die C^2 -Stetigkeit der Flächengeometrie mit minimaler Änderung der Faserorientierung. Alle ausgehärteten Probenkörper wurden zur Eingangsuntersuchung im Ultraschall-C-Scan-Verfahren (Kap. 6.3.1) geprüft. Der Zuschnitt der Probenkörper auf die Abmessungen $150\text{mm} \times 100\text{mm}$ erfolgte so, daß die größte Überhöhung in der Plattenmitte lag. Eine Kontrolle der Plattenebenheiten und der gefertigten Überhöhungen erfolgte an einer 3D-Koordinatenmeßanlage (Kap. 6.1.4). Da die erste Laminatlage die Impactseite darstellt, war trotz des quasiisotropen Lagenaufbaus eine Differenzierung in konkave und konvexe Impactprobenkörper erforderlich. In den Versuchen wurden Probenkörper mit Überhöhungen von $-1,8\text{mm} \leq \tilde{U} \leq 1,8\text{mm}$ untersucht. Eine negative Überhöhung ($\tilde{U} < 0$) kennzeichnet hierbei die konkav gewölbten Impactprobenkörper. Konvexe Platten sind durch positive Überhöhungsangaben ($\tilde{U} > 0$) kenntlich gemacht.

6.1.4 Untersuchungen zur Qualitätssicherung

Nachfolgend werden ausgewählte und angewandte Verfahren zur Qualitätssicherung der Impactprobenkörper vorgestellt. Das ebenfalls zur Sicherung der Qualität eingesetzte Ultraschallverfahren wird in Kapitel 6.3.1 und die Lichtmakroskopie in Kapitel 6.3.2 beschrieben.

3D-Koordinatenmeßgerät

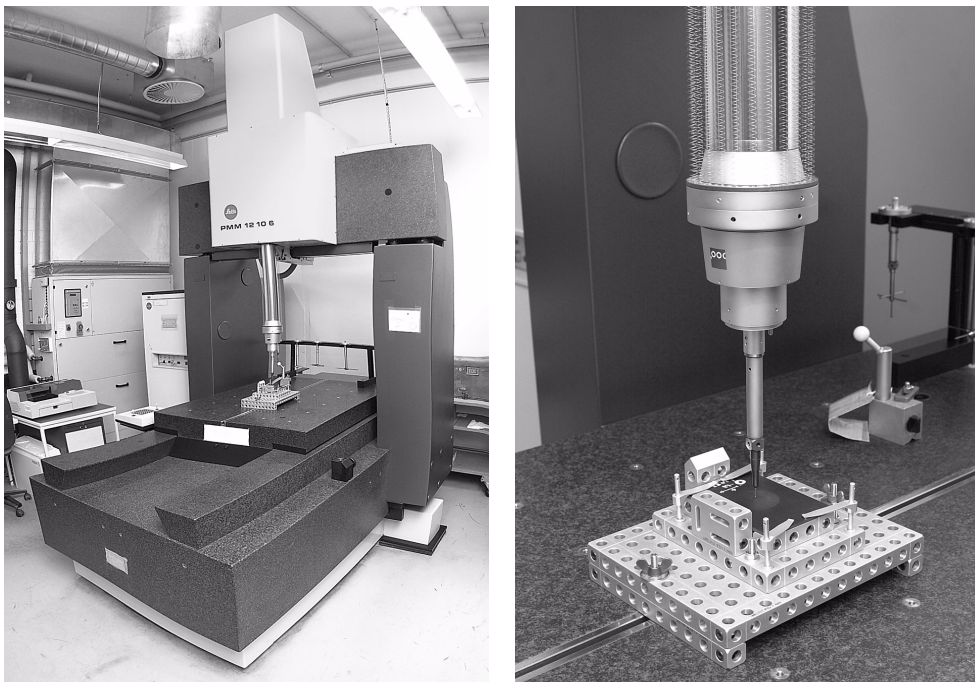


Abbildung 6.5: Links: 3D-Koordinatenmeßgerät LEITZ PMM 12106 in der Übersicht. Rechts: Meßtaster mit Einspannvorrichtung und Impactprobenkörper.

Für die geometrische Vermessung der Impactprobenkörper wurde das 3D-Koordinatenmeßgerät LEITZ PMM 12106 verwendet. Die Abbildung 6.5 zeigt das Koordinatenmeßgerät in der Übersicht (links) und den Meßtaster mit Einspannvorrichtung und Impactprobenkörper (rechts). Bei dem 3D-Koordinatenmeßgerät der Firma LEITZ handelt es sich um ein Präzisionsmehrkordinatenmeßgerät in stationärer Portalbauweise mit beweglichem, luftgelagertem Werkstücktisch aus Diabas mit einem Meßvolumen von $1200\text{mm}\times 1000\text{mm}\times 600\text{mm}$. Das Längenmeßsystem LEITZ LSG A20 besteht aus einem elektrooptischen Glasstab mit interferentieller Abtastung [19], die die höchste Genauigkeitsklasse von $1\mu\text{m}/100\text{mm}$ realisiert. Die Gesamtanlage befindet sich in einem klimatisierten Raum und ist schwingungsgedämpft gelagert. Zur Vermessung der Impactprobenkörper wird dieser, wie in der Abbildung 6.5 rechts dargestellt, in einer Einspannvorrichtung auf dem Werkstücktisch fixiert. Der Meßtaster fährt rechnergesteuert den Probenkörper mäandrierend ab und tastet dabei ein Meßgitter von 20×20 Punkten ab. Aus den Koordinaten der außerhalb des Kugelsegmentbereichs liegenden Oberflächenpunkte wird eine Referenzebene berechnet. Bezüglich dieser Bezugsebene erfolgt anschließend die Ermittlung der Überhöhung \tilde{U} der einlaminieren Geometrie, deren Position sowie Radius, Mittelpunkt und Genauigkeit der die Geometrie bildenden, gedachten Kugel (s. a. Kap. 6.1.3).

Bestimmung des Faservolumengehaltes

Die mechanischen Materialkennwerte des Laminates werden wesentlich durch das Verhältnis von Faser- und Matrixanteilen bestimmt. Von häufigem Interesse ist hierbei der Faservolumengehalt φ , der den Volumenanteil der Fasern am Laminatgesamtvolumen beschreibt. Im Rahmen der Qualitätskontrolle werden, wie in der Abbildung 6.6 dargestellt, aus ausgewählten Impactplatten nach dem erfolgten Schlagversuch drei Proben mit den seitlichen Abmessungen $20\text{mm}\times 10\text{mm}$ mit der Diamantsäge entnommen. Zur Bestimmung des Faser-

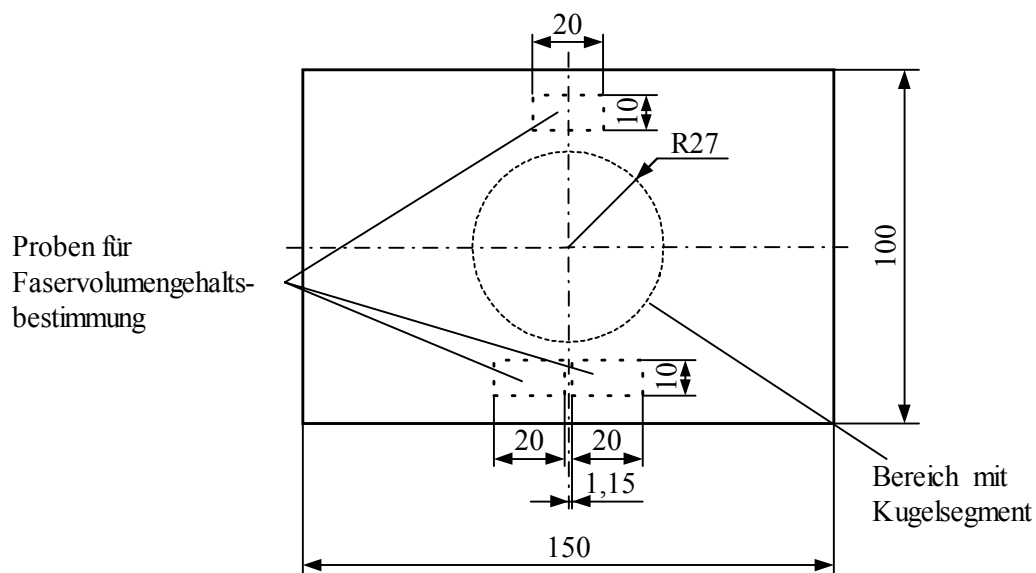


Abbildung 6.6: Probenentnahme für die Faservolumengehaltsbestimmung.

gehaltes nach der DIN EN 2564 [70] und DIN 29971 [64] werden zunächst die Dichten der

drei Zuschnitte nach der DIN 53479/A [67] bestimmt. Anschließend werden diese Probenzuschnitte in 96%-iger Schwefelsäure gekocht. Durch die Säure wird die Epoxidharzmatrix abgebaut und die Verstärkungsfasern bleiben nach dem Waschen und Trocknen übrig [13]. Über die ermittelte Fasermasse und mit Kenntnis der Faserdichte kann dann der Faservolumenanteil bestimmt werden.

Dynamische Differenzkalorimetrie (DSC)

Mit Hilfe der thermoanalytischen Untersuchungsmethode der DSC (Differential Scanning Calorimetrie - quantitative Wärmemengenmessung) können Aussagen über das thermische Reaktionsverhalten des Prepregsystems gewonnen werden [13, 89, 97, 110]. Bei der dynamischen Differenzkalorimetrie wird der Wärmefluß zwischen der Probe und einer Referenz in Abhängigkeit von der Temperatur und der Zeit gemessen. Die Untersuchungen wurden mit dem Thermoanalyse-Datensystem 2100 der Firma TA Instruments in Verbindung mit der DSC-Zelle 910 nach DIN 53765-B-10 [68] in einem offenen Aluminiumtiegel mit Einwaagemengen von 10–20mg durchgeführt. Die Aufheizgeschwindigkeit bei den dynamischen DSC-Untersuchungen betrug $10\text{K}/\text{min}$ in einem Temperaturbereich von -50°C bis $+300^\circ\text{C}$. Die Abbildung 6.7 zeigt beispielhaft das thermoanalytische Ergebnis einer Prepregprobe. Gemessen wurde hier eine Glasübergangstemperatur [66, 89] des noch ungehärteten Prepregs

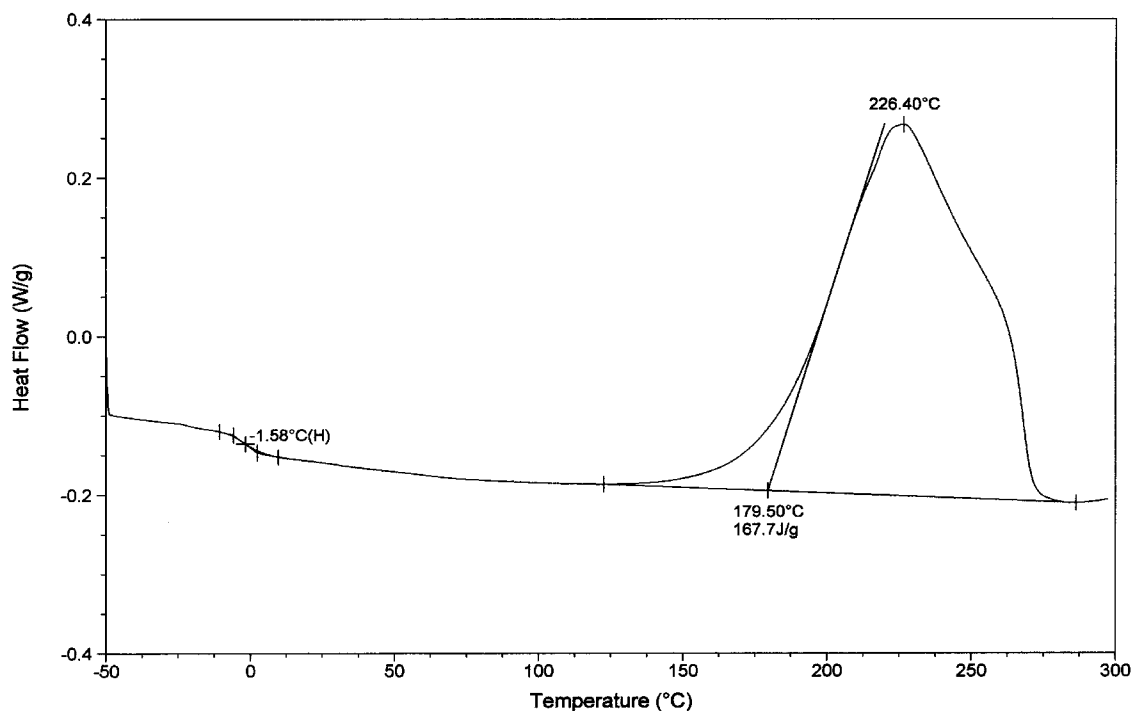


Abbildung 6.7: DSC-Untersuchung an einer Probe des Prepregsystems HEXCEL 8552/IM7.

von $T_{mg} = -1,58^\circ\text{C}$. Der thermische Peak lag bei $T_{pm} = 226,4^\circ\text{C}$ mit einer extrapolierten Anfangstemperatur von $T_{eim} = 179,5^\circ\text{C}$ mit einer Enthalpieänderung von $\Delta H_m = 167,7\text{J/g}$.

6.2 Instrumentierte Fallbolzenanlage

Die Impactversuche im Niedergeschwindigkeitsbereich wurden in Anlehnung an die Airbus Industrie Test Method AITM 1.0010 [59], die Boeing Specification BSS 7260 [61], DIN 65 561 [69] und die DIN EN 6038 [72] durchgeführt. Aufgrund der einlamierten Probenkörperkrümmung wurde auf den abschließenden Druckversuch verzichtet, da die Längsdrucksteifigkeiten unterschiedlicher Geometrien nicht vergleichbar sind. Die eingesetzte instrumentierte Fallbolzenanlage (Abb. 6.8, 6.9) besteht im wesentlichen aus den mechanischen

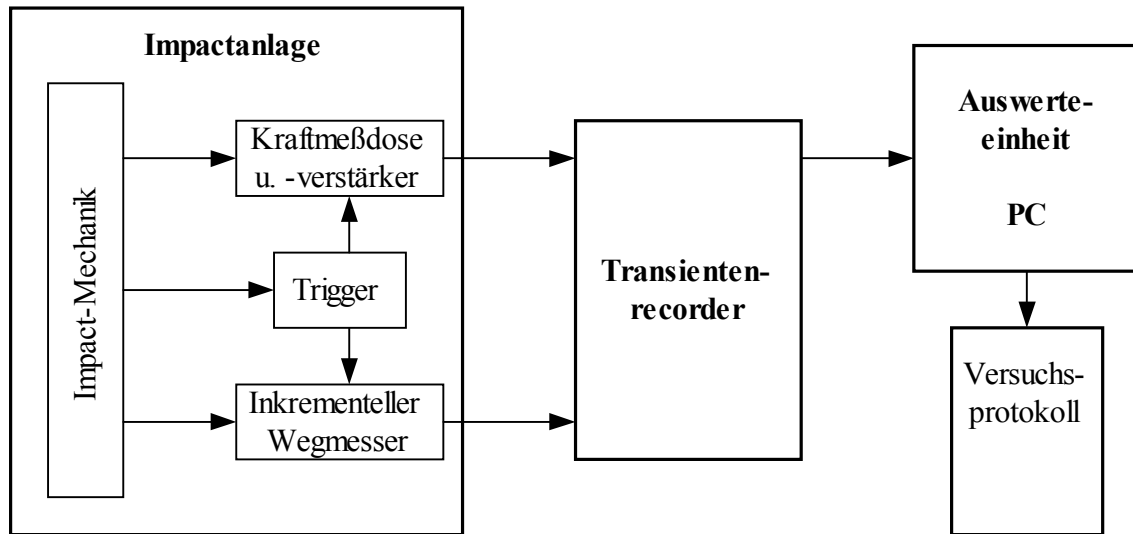


Abbildung 6.8: Prinzipaufbau der instrumentierten Impactanlage.

Komponenten Impactschlitten mit Impactdorn und integrierter Kraftmeßdose, dem inkrementellen Wegmeßsystem sowie der Aufnahmevorrichtung für die Impactprobenkörper. Der Impactschlitten setzt sich aus einem zylindrischen Zentralteil zur Aufnahme von Gewichten, der piezoelektrischen Kraftmeßdose und dem gehärteten Impactdorn mit einem Dornradius von 8mm zusammen. Die Probenkörperaufnahme erfolgt durch einen unteren und einen oberen Einspannrahmen mit einem freien Stützfenster von $125\text{mm} \times 75\text{mm}$. Somit ergibt sich für die Impactprobenkörper mit den seitlichen Abmessungen von $150\text{mm} \times 100\text{mm}$ eine umlaufende Auflagefläche mit einer Breite von $12,5\text{mm}$. Abweichend von der DIN 65 561 [69] wird die Laminatplatte nicht mit vier federnden Klemmen mit einer jeweiligen Einspannkraft von 750N fixiert. Statt dessen wird während des Impacts der obere Rahmen pneumatisch mit einer Kraft von ca. 1875N angepreßt. Diese Form der Einspannung wird zur Unterscheidung nachfolgend als „halb-gelenkig“ bezeichnet (s. a. Kap. 5.1.1). Nach dem Stoß schnellert der obere Einspannrahmen wieder in die Ausgangsposition zurück und fängt dabei den Impactschlitten, um somit einen Mehrfachstoß auf den Probekörper zu vermeiden. Vor dem Schlagvorgang wird der Impactschlitten auf eine voreingestellte Höhe verfahren und dort ausgelöst. Über einen Trigger werden das elektrisch verstärkte Kraftsignal und das Wegsignal in dem Transientenrecorder aufgezeichnet und zur weiteren Auswertung an einen PC weitergeleitet. In dem Versuchsprotokoll wird neben dem gemessenen Stoßkraft-Zeit- und Weg-Zeit-Verlauf auch der Energie-Zeit-Verlauf und die Impact-Einzelwerte, wie die Maximal- und Minimalangaben, sowie die Impact-Dauer dokumentiert. Die Impactenergie

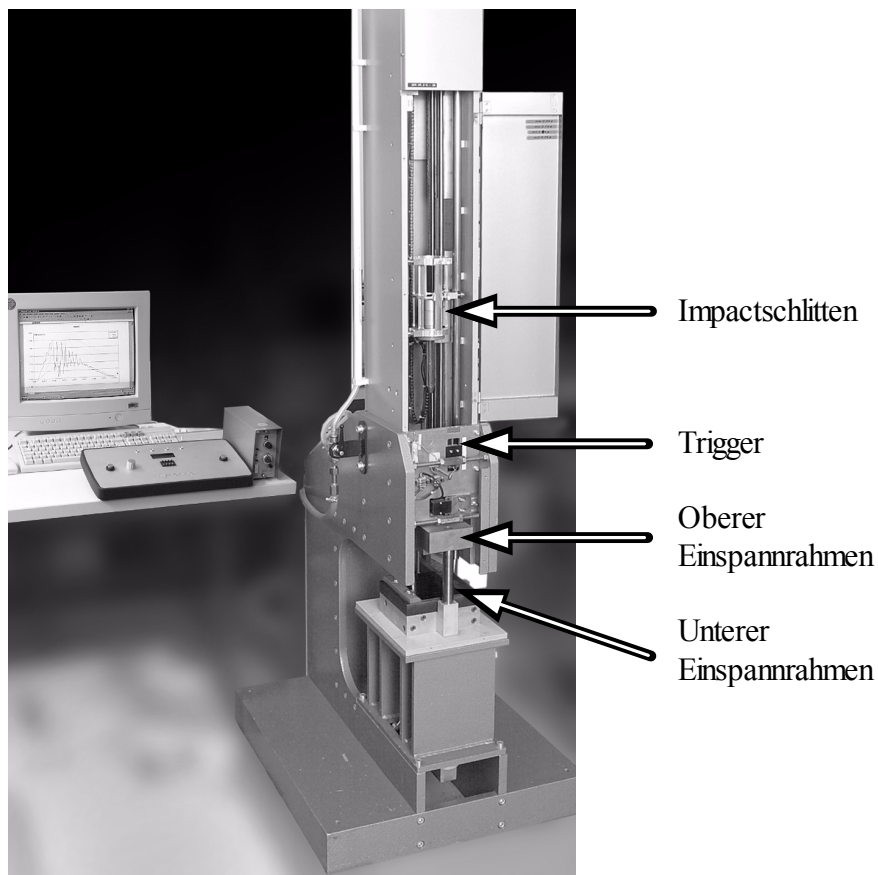


Abbildung 6.9: Instrumentierte Impactanlage mit Auswerteeinheit.

E_{imp} berechnet sich näherungsweise aus der potentiellen Energie E_{pot} des Impactschlittens:

$$E_{imp} \approx E_{pot} = m g h . \quad (6.4)$$

Unter Vernachlässigung der Reibung kann mit der Annahme der Gleichheit der potentiellen Energie im Auslösepunkt des Schlittens und der kinetischen Energie E_{kin} im Auftreffpunkt der Versuchsplatte,

$$E_{kin} \approx E_{pot} , \quad (6.5)$$

die Impactdorgeschwindigkeit am Stoßpunkt bestimmt werden:

$$v \approx \sqrt{2 g h} . \quad (6.6)$$

Um den Einfluß der Störungsausbreitung in der Laminatplatte in den durchgeführten Versuchsreihen vernachlässigen zu können, wurde die Impactenergie nur über die Änderung der Impactmasse gesteuert. Die Höhe des Schlittens vor der Auslösung des Impacts und damit die Schlaggeschwindigkeit wurden mit $h_{imp} = 306\text{mm}$ bzw. $v_{imp} = 2,452\text{m/s}$ konstant gehalten. Die Versuche wurden mit Probenkörpern mit einer Plattendicke von $h = 4,1\text{mm}$ durchgeführt, die mit einem Impact von $E_{imp} = 6,10\text{J}$, $E_{imp} = 7,82\text{J}$ bzw. $E_{imp} = 9,36\text{J}$ belastet worden sind. Die Impactparameter der einzelnen Versuchsreihen können der Abbildung 6.10 entnommen werden.

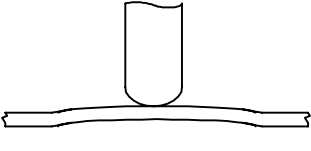
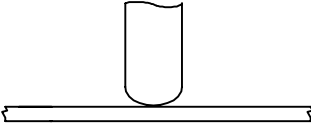
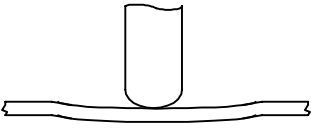
	$v_{imp} = 2,45 \frac{m}{s}$		
	$E_{imp} = 6,10J$	$E_{imp} = 7,82J$	$E_{imp} = 9,36J$
	$m_{imp} = 2,03kg$	$m_{imp} = 2,60kg$	$m_{imp} = 3,12kg$
konvex		$\tilde{U} = +1,8mm$	$\tilde{U} = +1,2mm$
		$\tilde{U} = +0,6mm$	
plan		$\tilde{U} = \pm 0,0mm$	
konkav		$\tilde{U} = -0,6mm$	$\tilde{U} = -1,2mm$
		$\tilde{U} = -1,8mm$	

Abbildung 6.10: Probenkörpergeometrie und Impactparameter der durchgeführten Stoßversuche.

Impactversuch mit quasi-fester Einspannung

Die Impactversuche mit quasi-fester Einspannung wurden in analoger Weise durchgeführt wie die in Kapitel 6.2 beschriebenen Schlagversuche. Abweichend von den Standardimpactversuchen wurde hier die Laminatplatte nicht mit mit Klemmen oder einem pneumatisch angepreßten Rahmen fixiert. Unter Beibehaltung der geometrischen Abmessungen des oberen und unteren Einspannrahmens wurde eine Prüfkörperaufnahme verwendet, die mittels Schraubverbindung eine quasi-feste Probenkörpereinspannung realisierte. Für diese Versuchsreihe wurden Probenkörper mit einer Impactenergie von $E_{imp} = 7,82J$ belastet und mit den Ergebnissen der halb-gelenkigen Einspannung verglichen.

6.3 Mikroskopische Untersuchungsmethoden

Zur Schadensdetektion kamen im Wesentlichen zwei mikroskopische Untersuchungsmethoden, die Ultraschallanalyse und die Lichtmikroskopie, zur Anwendung.

6.3.1 Ultraschallanalyse

Zur Qualitätssicherung der Impactprobenkörper und zur Ermittlung der Delaminationsflächen wurde die Ultraschallprüftechnik eingesetzt. Von dem Schadensbild lassen sich neben der lateralen Ausdehnung auch die Tiefenlage der Delaminationen bestimmen [41, 43, 57, 62, 63]. Über einen Sender, ein Piezokristall, werden die Ultraschallimpulse in den Probekörper eingeleitet. Zur besseren akustischen Ankopplung befindet sich der Probekörper in einem

Wasserbad, in dem die Abtastung mäanderförmig in einem Übertragungsbereich von 1MHz bis 100MHz mit 3dB -Abfall stattfindet. Bei dem angewandten Impuls-Echo-Verfahren werden einzelne Schallsignale ausgesendet und die an den Grenzflächen reflektierten Echoimpulse aufgenommen. Der Prüfkopf beinhaltet dabei die Sende- und Empfangseinheit. Über die Laufzeit des Signals kann bei bekannter Schallgeschwindigkeit die Fehlertiefe ermittelt werden. Das empfangene Ultraschallsignal besteht aus den Grenzflächenechos der Probekörperoberflächen, dem Bodenecho des Wasserbeckens (Glasplattenecho) und der im Material vorhandenen Ungängen¹. Zur Schädigungsbewertung wird die Dämpfung des Empfangssignals betrachtet. Bei der in dieser Analyse verwendeten Ultraschall-C-Scan-Methode (Amplitudenbild) wird die gemessene Intensität der Ultraschallsignale in Farbwerte bzw. Grauwerte konvertiert. Durch die farbliche Wiedergabe des Amplitudenabfalls des Ultraschallsignals wird eine bildgebende Darstellung der Probekörper ermöglicht. In der Abbildung 6.11 ist das Ultraschall-C-Bild eines ungeschädigten und eines geschädigten gekrümmten Probekörpers dargestellt. Durch die Laufzeitunterschiede der Ultraschallsignale erscheint der

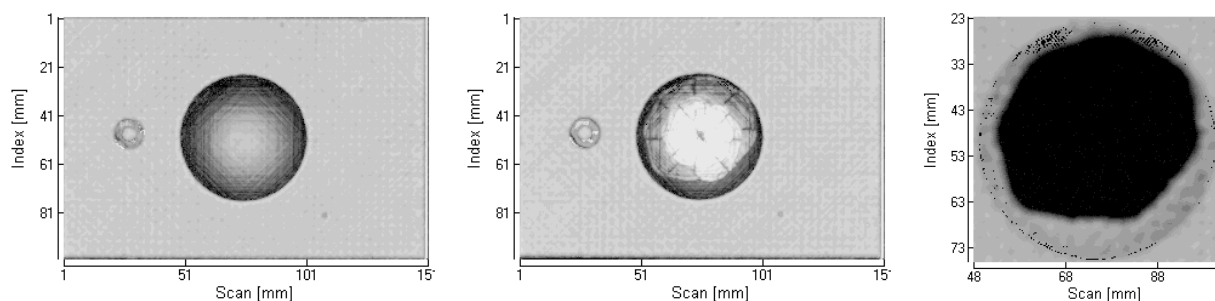


Abbildung 6.11: Ultraschall-C-Scan eines Impactprobekörpers mit einer Überhöhung von $\tilde{U} = +1,2\text{mm}$. Links: Eingangsbild vor Impact. Mitte: Rückwandecho nach Impact mit $9,1\text{J}$. Rechts: Glasplattenecho des Kugelsegmentbereichs nach Impact mit $9,1\text{J}$.

Bereich des Kugelsegmentes in der Mitte des Impactprobekörpers als schwarze Ringstruktur mit hellerem Zentrum (Abb. 6.11, links). Mit Hilfe der Auswertung des Rückwandechos kann die Schadensstruktur eines impactbelasteten Probekörpers dargestellt werden (Abb. 6.11, Mitte). Durch die Setzung von Laufzeitfiltern (Blenden) ist es möglich, das Rückwandecho zur Analyse von Delaminationen in den einzelnen Zwischenschichten zu verwenden (Abb. 7.4). In der Abbildung 6.11, rechts erscheint die schraubenförmige Delaminationsstruktur durch die Auswertung des Glasplattenechos in der Projektion des Schadens als schwarze Fläche. Die hier verwendete Gesamtprüfeinrichtung *HFUS 2000* ist modular aufgebaut und besteht aus einer digital einstellbaren Verstärkungseinheit, Hauptverstärker, Blenden-erzeuger, Spitzendetektor, Laufzeitmonitor und Rechnerinterface [44, 62]. In den drei zur Verfügung stehenden Blenden wird der gemessene Spitzenwert im Single-Shot-Verfahren in 1dB -Stufen digitalisiert. Hierbei steht ein maximaler Dynamikumfang von 63dB zur Verfügung. Die Ansteuerung des Manipulators mit einer maximalen Auflösung von $2\mu\text{m}$ des Ultraschallgerätes erfolgt rechnergestützt. Im Fall der hier untersuchten CFK-Prüfkörper diente ein breitbandiger 20MHz -Prüfkopf mit einer spektralen Bandbreite von $17,6\text{MHz}$ für den 6dB -Abfall vom Maximum der Prüfkopfübertragungsfunktion. Die relative Bandbreite beträgt dabei 117% . Der Einsatz dieses Prüfkopfes erlaubt bei breitbandiger, elektrischer

¹Als Ungänge werden in der Ultraschalltechnik Bereiche im Prüfkörper bezeichnet, die eine von der Umgebung gleichen Materials abweichende Schallcharakteristik aufweisen. Ursachen für solche Ungänge können z. B. Materialveränderungen, Grenzschichten wie Delaminationen oder Fremdeinschlüsse sein.

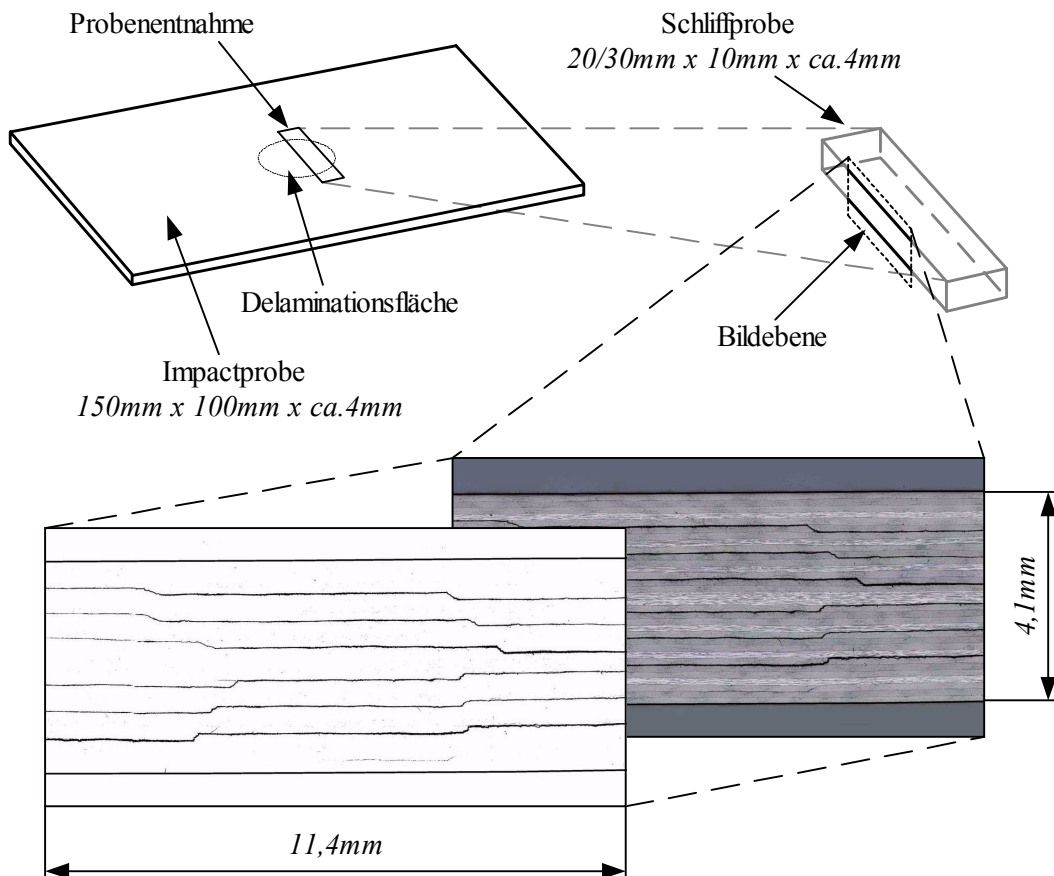


Abbildung 6.12: Schlifffprobenentnahme und Makroskopieaufnahme mit separater Darstellung der Bruchstruktur.

Anregung die Laufzeittrennung der 0,125mm dicken Einzellagen des Verbundes [41]. Die in diesem Verfahren ermittelte Schadensfläche ist die sich in der Projektion abbildende Delaminationsfläche A_{del} der geschädigten Probenkörper. Für die Impactprobenkörper, die für die lichtmakroskopische Untersuchung ausgewählt wurden, müssen mit entsprechenden Blendeneinstellungen die einzelnen Delaminationsflächen separat analysiert werden.

6.3.2 Lichtmakroskopische Untersuchungen

Zur Verifikation der im Ultraschallverfahren ermittelten Ausdehnung der Delaminationen und zur Analyse der Schadensstruktur über die Probenkörperdicke wurden lichtmakroskopische Untersuchungen an Schlifffproben im Auflichtverfahren durchgeführt [13, 97]. Die Probenkörper wurden hierzu an markierten Stellen zu 20mm×10mm bzw. 30mm×10mm großen Abschnitten mit einer wassergekühlten Diamantsäge ausgeschnitten (s. Abb. 6.12). Zur besseren Handhabung wurden die 20mm×10mm×4mm großen Probenabschnitte mit dem kalt aushärtenden Epoxidharz *Araldit D* und dem Härter *Hardener HY956* der Firma *Vantico* in einer zylindrischen Kunststoffform mit 40mm Innendurchmesser eingegossen. Hierzu wurde zunächst der Kunststoffzylinder zur besseren Entformbarkeit mit dem Sprühfett *A-Agent-Release SI* der Firma *Leco* eingefettet. Nach der ca. 9-stündigen Aushärtezeit wurde die

Probe entformt und auf der Rückseite mit einem Schleifpapier 120er Körnung plan geschliffen. Der Anschliff der zu makroskopierenden Seite erfolgte in der Schleifmaschine *Struers RotonForce-4* in 5-minütigen Arbeitsschritten unter Wasserspülung mit der Schleifscheibe *Alegro* der Firma *Struers* mit einer mittleren Körnung von $30\mu\text{m}$ und $15\mu\text{m}$. Anschließend wurden die Proben von Hand unter Wasserspülung auf Schleifpapier mit einer Körnung von 1200 und 4000 nachgeschliffen. Der Poliervorgang erfolgte wieder in der Schleifmaschine *Struers RotonForce-4* mit 150 Umdrehungen pro Minute und mit einer Probenanpreßkraft von 50N in 5-minütigen Arbeitsschritten unter Wasserspülung. Nach jedem Poliervorgang wurden die Proben eine Minute im Ultraschallwasserbad gereinigt, anschließend getrocknet und unter dem Auflichtmakroskop auf Riefen und Ausbrüche untersucht. Als Poliersystem wurden die Diamantpasten der Firma *Leco* und die Polierscheiben der Firma *Struers* verwendet. Die einzelnen Polierschritte erfolgten mit abnehmender Körnung unter Verwendung jeweils einer Diamantpastensorte pro Arbeitsgang. Es wurden dabei Diamantpasten mit einer mittleren Körnung von $15\mu\text{m}$, $6\mu\text{m}$, $3\mu\text{m}$, $1\mu\text{m}$ sowie Tonerde zur Oberflächenbehandlung eingesetzt. Die makroskopischen Untersuchungen im Hellfeld erfolgten mit dem *Wild Photomakroskop M400* im Auflichtverfahren. Hierbei wurden die Teilaufnahmen der Proben mit der Vergrößerung 12,5 unter Verwendung einer 2-fach Vorlinse und einem λ -Filter aufgenommen. Mit dem Programm *analySIS 3.1* erfolgte die anschließende Zusammensetzung der Einzelbilder. Aus der Gesamtaufnahme einer Schliffprobe wurde dann das Reißbild mit dem Bildbearbeitungsprogramm *Adobe Photoshop 5.5* herausgefiltert, das selektiv dargestellt zur weiteren Analyse der Schadensstruktur diente.

Kapitel 7

Ergebnisse der Untersuchungen

In diesem Kapitel wird das Schädigungsverhalten von gekrümmten Laminatprobenkörpern unter Schlagbeanspruchung untersucht. Hierzu werden die Schadensfläche, die Rißstruktur und der Schädigungsverlauf analysiert.

7.1 Ergebnisse des Niedergeschwindigkeitsimpacts

In der Abbildung 7.1 sind die Kurvenverläufe der Kraft F , des Weges w und der Energie E über die Zeit t bei einer Impactenergie von $E_{imp} = 3,00J$ und einer Schlagmasse von $m_{imp} = 1,02kg$ ohne aufgetretene Delaminationen in dem Probekörper dargestellt. Der Impactversuch kann generell als quasi weggesteuerter Versuch betrachtet werden, bei dem F eine gemessene Reaktionskraft ist. Zum Zeitpunkt t_0 der ersten Berührung $w(t_0)$ von Impactor und Probekörper baut sich die in der Kraftmeßdose (s. Kap. 6.2) gemessene Reaktionskraft bis zu einem Maximum F_{max} auf. Analog zum Kraft-Zeit-Verlauf nimmt der Weg des Impactschlittens nach dem Triggerpunkt im Achsenursprung bis zum Maximum w_{max} zu. Das Wegmaximum liegt dabei hinter dem Kraftmaximum. Diese Differenz der Maxima wird als Phasenverschiebung bezeichnet und ist charakteristisch für eine erzwungene und gedämpfte mechanische Schwingung (s. RAPP [85]). Nach ihren Maxima nehmen der Kraft-Zeit- und der Weg-Zeit-Verlauf quasi symmetrisch zu ihren Anstiegen ab. In diesem Bereich ist eine leichte Abflachung des Kraft-Zeit-Verlaufes im Vergleich zu der getrickelten symmetrischen Kurve in der Abbildung 7.1 erkennbar. Durch plastische Verformungen verringern sich die rückstellenden Kräfte aus der Plattenbiegeverformung. Der Impactschlitten erfährt dabei betraglich eine geringere Beschleunigung als zu Stoßbeginn, so daß die Kraft-Zeit-Kurve nach dem Maximum flacher als davor verläuft. Deutlich wird außerdem, daß der Weg-Zeit-Verlauf später die Zeitachse schneidet als die Kraft-Zeit-Kurve. Diese „Wegdifferenz“ w_{diff} resultiert aus der Phasenverschiebung und einer plastischen Verformung w_{plast} . Im Kontaktbereich von Impactdorn und Platte kommt es aufgrund der Belastung zu einer plastischen Vertiefung an der Laminatoberfläche. Diese Vertiefung w_{plast} ist oft nur wenige zehntel Millimeter tief und wird bei Eindringtiefen von $w_{plast} < 0,3mm$ als „kaum sichtbarer Schaden“, BVID (Barrelly Visible Impact Damage), bezeichnet (s. MORLO et al. [59, 57]). Nach dem Abheben des Impactdorns von der Platte verschwindet die Reaktionskraft, wobei jedoch der Weg des Impactschlittens aufgrund der plastischen Verformung unter der Dornspitze in diesem Moment noch nicht wieder den Punkt der ersten

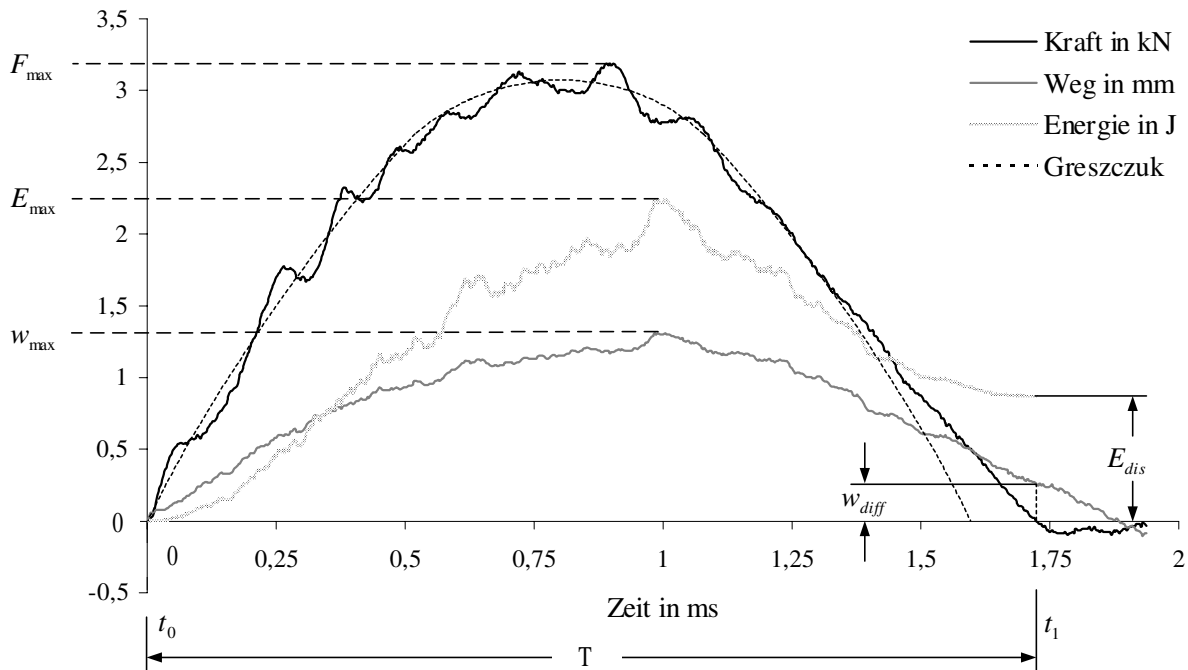


Abbildung 7.1: Kraft-Zeit-, Weg-Zeit- und Energie-Zeit-Diagramm eines planen Probekörpers mit $4,07\text{mm}$ Dicke während eines Impacts mit einer Impactenergie von $3,00\text{J}$ und einer Impactmasse von $1,02\text{kg}$ ohne aufgetretene Delaminationen, sowie Kraft-Zeit-Verlauf nach GRESZCZUK [35].

Berührung erreicht hat: $w(t_1) = w_{diff} \geq w(t_0)$. Zum Zeitpunkt t_1 nimmt die Kraft den Wert Null an. Die zeitliche Differenz des ersten und letzten Kontaktes von Impactor und Probekörper wird als Impactdauer $T = t_1 - t_0$ bezeichnet. Erkennbar ist, daß sich neben dem glockenförmigen Verlauf der Kontaktkraft bei einem Stoß auf einem halbunendlichen Körper (s. HERTZ [40]), wie sie beispielsweise bei GRESZCZUK [35] beschrieben wird, noch deutlich die 2. Eigenfrequenz der zur Schwingung angeregten Platte überlagert (s. RAPP [85]). Durch die Superposition der beiden ersten Platteneigenfrequenzen kommt es zu einer größeren Maximalkraft als sie aus einer vereinfachten Stoßberechnung nach GRESZCZUK herrühren würde. Nach einem kurzzeitigen Einschwingvorgang reduziert sich gegen Ende des Impacts durch Strukturdämpfung die Amplitude der 2. Eigenfrequenz der zur Transversalschwingung angeregten Platte. Die Amplitudengröße der Eigenschwingungen steigt dabei mit der Impactenergie an. Der Energie-Zeit-Verlauf stellt das Integral der Kraft-Weg-Kurve dar (s. ZHOU et al. [112]). Das Energiemaximum E_{max} wird zum gleichen Zeitpunkt wie das Wegmaximum erreicht. Dabei weist die Energie-Zeit-Kurve einen zunächst analogen Verlauf zur Weg-Zeit-Kurve auf. Zum Zeitpunkt t_1 geht die Energie allerdings nicht wieder auf Null zurück. Der verbleibende Energieanteil kennzeichnet die im System durch plastische Verformungen, Schwingung, Reibung etc. dissipierte Energie E_{dis} . Die dissipativen Vorgänge während des Impacts erklären auch den flacheren Kurvenabfall der Kraft und des Weges über die Zeit. Die Abbildung 7.2 zeigt die Kraft-Zeit-, Weg-Zeit- und Energie-Zeit-Verläufe eines Schlagversuches mit einer Impactmasse von $2,60\text{kg}$ und einer Energie von $7,82\text{J}$ auf einen planen Probekörper. Zunächst steigt wie in der Abbildung 7.1 die Kraft über der Zeit an. Bei der Schädigungskraft F_{vers} sinkt der Kurvenverlauf schlagartig wie bei einem weggesteuerten Versuch auf ein niedrigeres Niveau ab. Dieser Vorgang wiederholt sich zweimal.

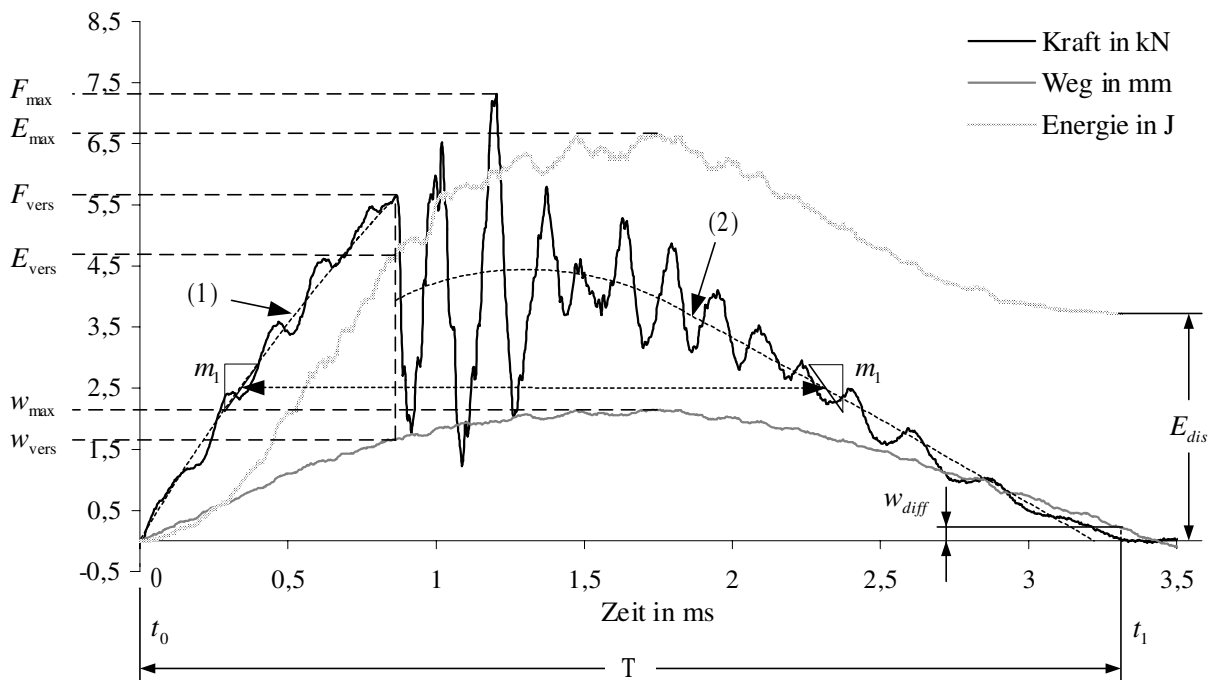


Abbildung 7.2: Kraft-Zeit-, Weg-Zeit- und Energie-Zeit-Diagramm eines planen Probekörpers mit $4,06\text{mm}$ Dicke während eines Impacts mit einer Impactenergie von $7,82\text{J}$ und einer Impactmasse von $2,60\text{kg}$ mit Probekörperschädigung. Gestrichelt ist der geglättete Kraft-Zeit-Verlauf vor (1) und nach (2) dem ersten Versagen eingezeichnet.

Die Kraft F_{vers} kennzeichnet den Zeitpunkt des ersten Versagens der Laminatplatte [112]. Es ist davon auszugehen, daß jeder Krafteinbruch das schrittweise Versagen des Verbundes markiert. Der fallende Impactschlitten leistet zunächst Verformungsarbeit an dem Probekörper, wobei der Schlitten in seiner Geschwindigkeit kontinuierlich abgebremst wird. Zum Zeitpunkt der Schädigung verringert sich schlagartig die Biegesteifigkeit des Probekörpers. Aufgrund der Massenträgheit des Impactors kann der Schlitten nicht sofort folgen, so daß wie bei einem weggesteuerten Versuchsablauf die Reaktionskraft fast senkrecht abfällt. Ein analoges Verhalten weggesteuerter Versuche wird von GEBBEKEN in [27] beschrieben. Nach dem Maximum nimmt die Kraft im Mittel mit einem deutlich flacheren Verlauf über die Zeit als beim Kraftanstieg ab. Die Steigung einer Tangente im Bereich des Kraftanstiegs vor dem ersten Versagen (Abb. 7.2, (1)) mit der Steigung m_1 ist zum Vergleich im Bereich nach dem Versagenseintritt (Abb. 7.2, (2)) eingetragen und verdeutlicht den hier flacheren Kurvenverlauf der Kraft. Durch die Probekörperschädigung verringert sich die Plattenbiegesteifigkeit, wodurch sowohl die Maximalkraft als auch die rückstellende Beschleunigung kleiner sind als mit einem Probekörper mit geringerer oder keiner Schädigung. Die Verläufe des Weges und der Energie über der Zeit sind qualitativ vergleichbar mit denen in Abbildung 7.1. Da in diesem Fall der dissipative Anteil auch die Schädigungsenergie enthält, wird jedoch zum Zeitpunkt t_1 ein deutlich größerer irreversibler Energieanteil erkennbar. Im Gegensatz zu einem Stoßversuch ohne aufgetretene Delaminationen zeigt der Probekörper nach den Zeitpunkten des Versagens noch deutliche Plattenschwingungen. Die durch den Schadenseintrag reduzierte Plattensteifigkeit des Impactprobekörpers führt zum Ende des Impactvorgangs zu größeren Schwingungsamplituden und kleineren Eigenfrequenzen als bei

ungeschädigten Probekörpern.

7.2 Ergebnisse der mikroskopischen Untersuchungen

Die im Rahmen der mikroskopischen Untersuchungen ermittelten Ergebnisse dienen der Bestimmung der Schadensgröße und der Schadensstruktur. Die Abbildung 7.3 zeigt exemplarisch den Schadensbereich von Probekörpern, die mit einer Impactenergie von $E_{imp} = 9,36J$ belastet worden sind. Dargestellt ist links, (a) und (d), ein Probekörper mit einer Überhöhung von $\tilde{U} = -1,2mm$. (b) und (e) zeigen einen planen und rechts, (c) und (f), einen Probekörper mit einer Überhöhung von $\tilde{U} = +1,2mm$. Die Aufnahmen wur-

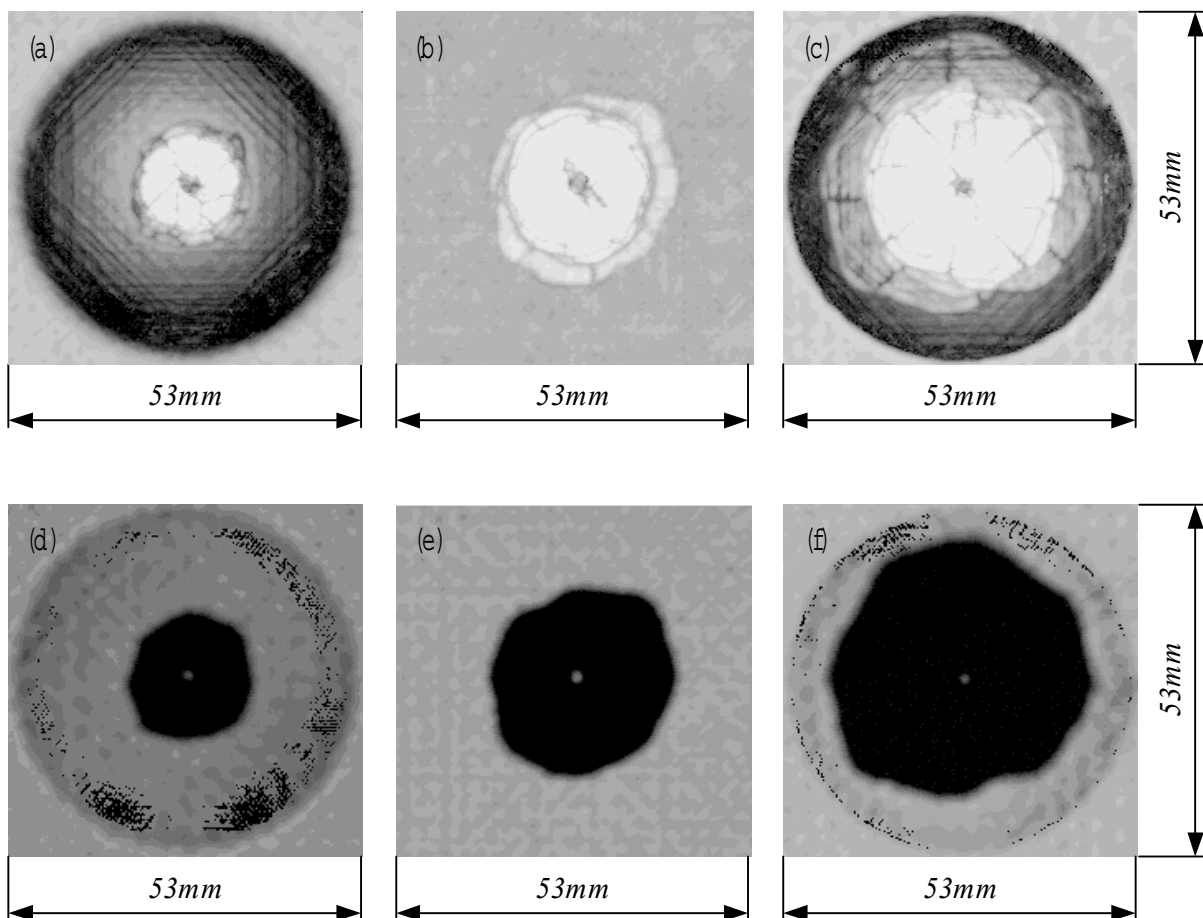


Abbildung 7.3: Ultraschall-C-Scan nach einem Impact mit $E_{imp} = 9,36J$; oben: Rückwandecho, unten: Glasplattenecho; links: $\tilde{U} = -1,2mm$; mitte: plan; rechts: $\tilde{U} = +1,2mm$.

den im Ultraschall-C-Scan-Verfahren erstellt. In der oberen Reihe erfolgte die Blendeneinstellung so, daß das Rückwandecho die Delaminationsstruktur wiedergibt. Die Ermittlung der Schadensprojektionsfläche \tilde{A}_{del} mit Hilfe des Glasplattenechos ist in der unteren Reihe dokumentiert. Die Ultraschallaufnahmen mit der Auswertung des Rückwandechos lassen die typische Delaminationsstruktur in Form einer „Wendeltreppe“ erkennen. Sowohl auf den Ultraschallbildern in der ersten als auch der zweiten Reihe kann man erkennen, daß im Bereich des Impactortes das Laminat keine Delaminationen erfahren hat. Im Rahmen

der Sichtprüfung konnte hier lediglich eine bleibende plastische Verformung erkannt werden. Die in den vorliegenden Experimenten ermittelten Vertiefungen mit $w_{plast} \leq 0,3mm$ sind als „kaum sichtbarer Schaden“, Barely Visible Impact Damage - BVID, einzustufen. Die Ultraschallmethode erlaubt, wie in Kapitel 6.3.1 beschrieben, die Analyse einzelner Laminatschichten, wobei hintereinander liegende Delaminationen durch die Abschattung der oberen Grenzschichten nicht erfasst werden können. Die Abbildung 7.4 zeigt, wie sich die wendel-

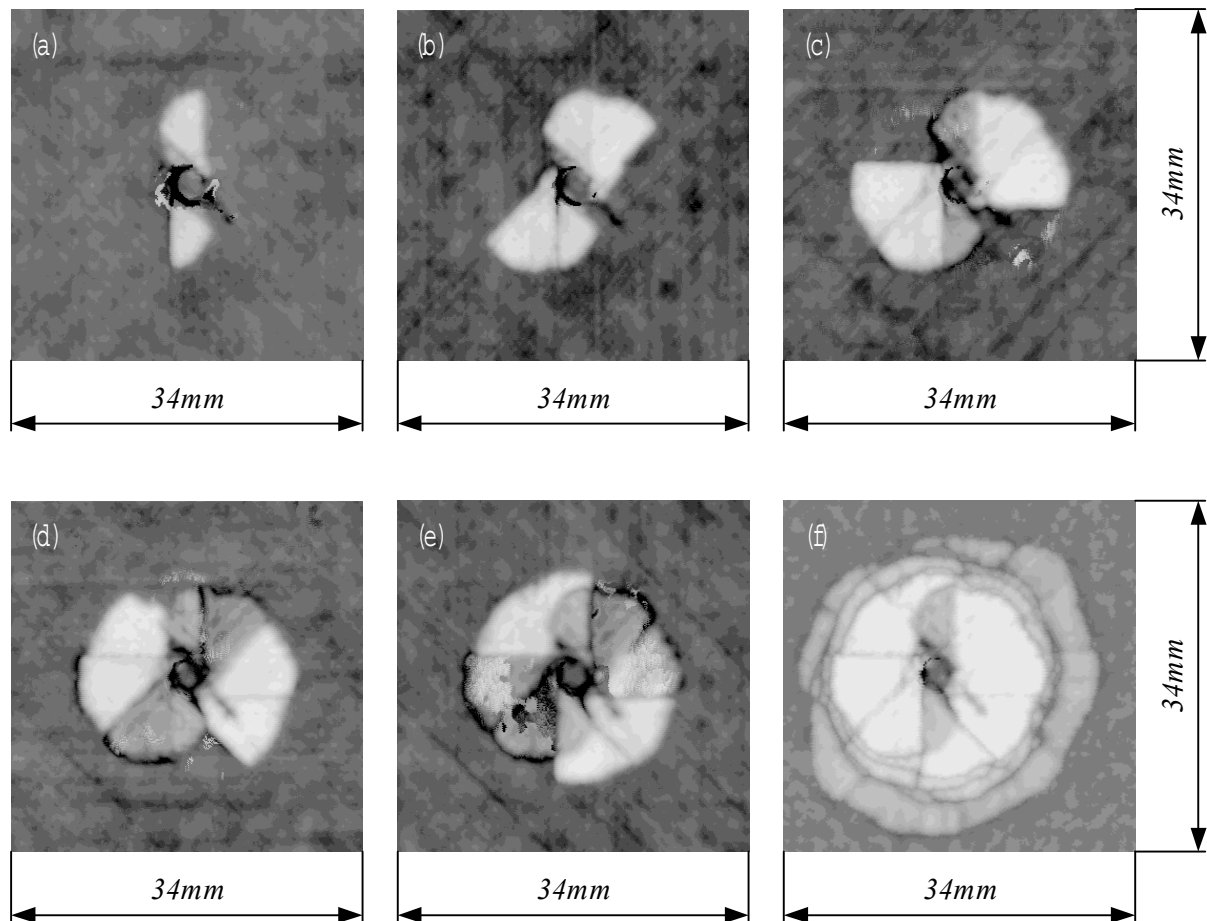


Abbildung 7.4: Ultraschall-C-Scan nach einem Impact mit $E_{imp} = 9,36J$. Schraubenförmige Delaminationsstrukturen zwischen den Laminatschichten (a) 3/4; (b) 3/4 und 4/5; (c) 3/4, 4/5 und 5/6; (d) 3 bis 8; (e) 3 bis 9; (f) 3 bis 29.

treppenförmige Delaminationsstruktur aus schraubenartigen Delaminationen zwischen zwei unterschiedlich orientierten Lagen zusammensetzt. Diese typische Schraubenstruktur bei einem quasiisotropen Lagenaufbau wird in der englischsprachigen Literatur auch als Peanut-Struktur bezeichnet. CLARK [11], GOSSE et al. [34], HEUTLING [41], HULL et al. [45], LIU [51] und SRINIVASAN et al. [100] diskutieren in ihren Arbeiten die Abhängigkeit der Delaminationsstruktur von dem gewählten Lagenaufbau. Die von den ringförmig um den Impactort durch Scherversagen entstehenden Risse und den davon ausgehenden Delaminationen können in der Abbildung 7.5 a) studiert werden. Die schraubenförmigen Delaminationen der einzelnen Zwischenschichten fügen sich aneinander. Zur näheren Analyse der Bruchstruktur und zur Verifikation der Ultraschallaufnahmen wurden von ausgewählten Proben Schliffpräparationen angefertigt und im Auflichtverfahren makroskopisch untersucht. Die Schnittstellen der hier dokumentierten Schliffe sind in der Abbildung 7.5 b) gekennzeichnet, wobei die einge-

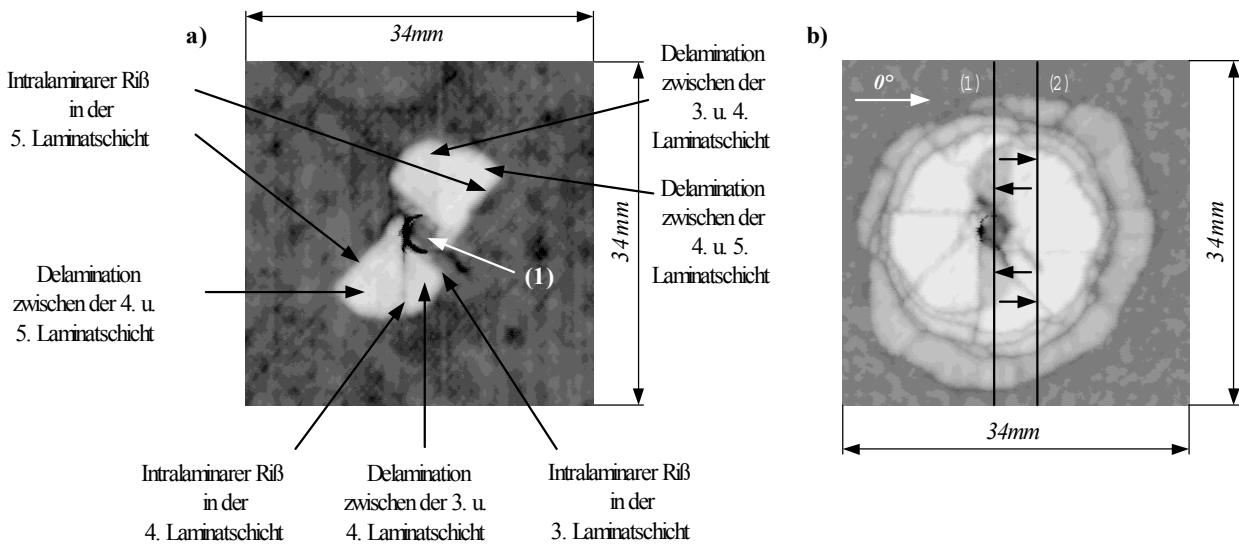


Abbildung 7.5: Ultraschall-C-Scan (Rückwandecho). a) Delaminationen und intralaminare Risse mit ungeschädigtem Zentralbereich (1). b) Delaminationsstrukturen eines planen Probekörpers nach einem Impact mit 9,36J mit Darstellung der Schnittlinien (1) und (2). Die Pfeile kennzeichnen die jeweilige Betrachtungsrichtung.

zeichneten Pfeile die jeweiligen Betrachtungsrichtungen bei der anschließenden Makroskopie kennzeichnen. Die schliffpräparierte Probe und der daraus gefilterte Rißverlauf eines planen Impactprobekörpers (s. Abb. 7.6), der mit einer Schlagenergie von $E_{imp} = 9,36J$ belastet worden ist, zeigt einen unzerstörten, zylindrischen Zentralbereich (s. Abb. 7.6 (1)), der den Impactort markiert. Links und rechts von dem delaminationsfreien Gebiet erkennt man kleine intralaminare Risse, die aufgrund von Scherversagen entstanden sind (s. Abb. 7.6 (2)). Von diesen intralaminaren Rissen verlaufen die Delaminationen stufenförmig, seitlich in das Laminat, wobei die Delaminationen einzelner Zwischenschichten durch intralaminare Risse verbunden sind. Die Ausläufer der Risse bilden in der Probe die Form eines Kegelsegmentes. Bei einem Schnitt außerhalb des Impactortes (s. Abb. 7.5 b), (2) und 7.7) zeigt sich bei dem hier untersuchten Lagenaufbau, daß die „Wendeltreppe“ vom Ort der Belastung betrachtet sich bis zur Symmetrieebene rechts reindreht und dann links herausdreht. In der Abbildung 7.7 rechts wird dies deutlich an der vom Ort des Impacts nach rechts und dann ab der Mitte nach links abgestuften Rißstruktur. Die Risse enden im Schliffbild an der zur Betrachtungsebene quer verlaufenden unidirektionalen Einzelschicht. Mehrere solcher Schliffpräparationen ermöglichen es, die Rißstruktur eines impactbelasteten Probekörpers zu untersuchen und Rückschlüsse auf das dreidimensionale Spannungsfeld zu ziehen (s. a. Kap. 8.3).

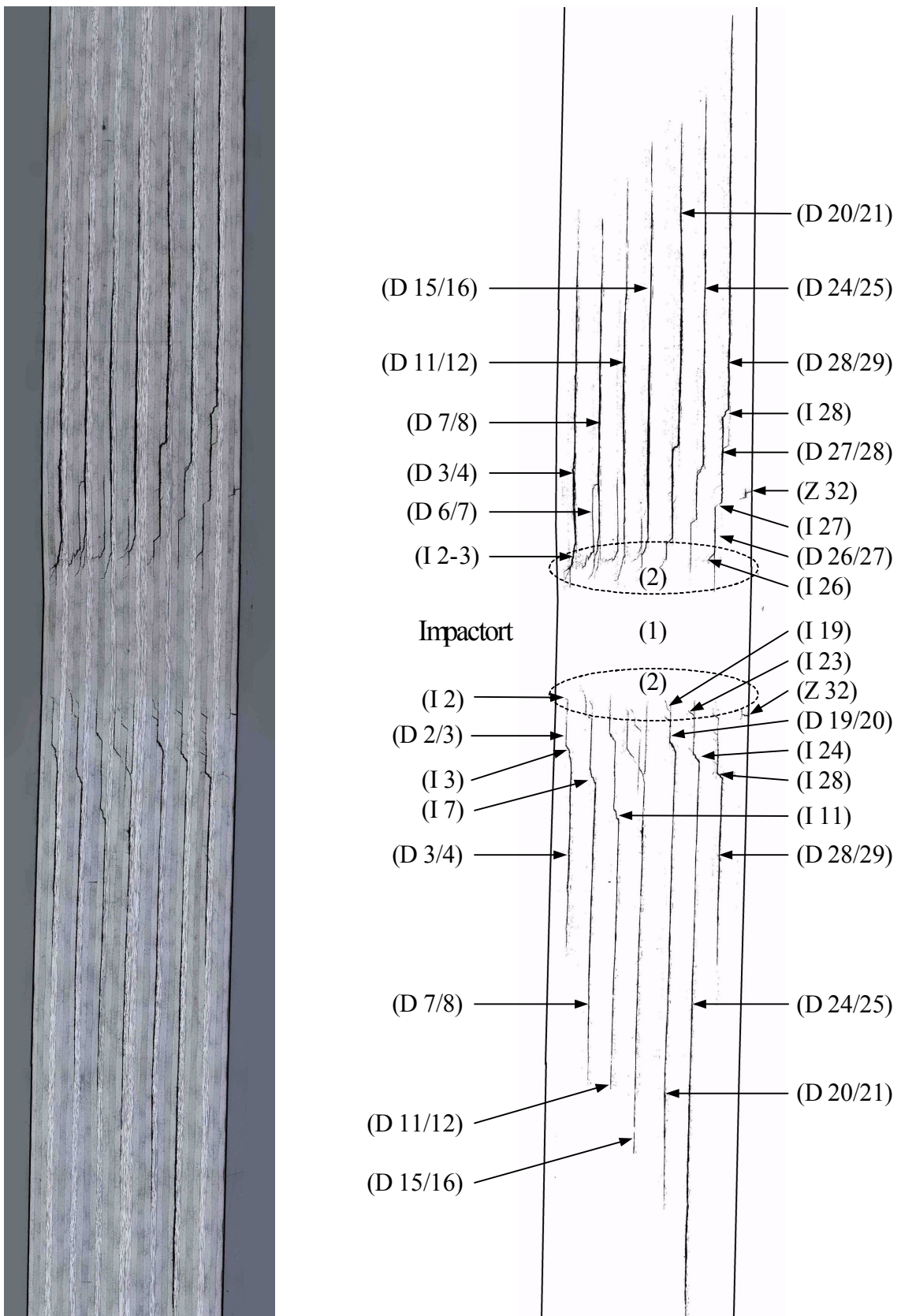


Abbildung 7.6: Schiffsprobe 27, $8\text{mm} \times 4, 1\text{mm}$ durch den Impactort (Abb. 7.5 b), Schnitt (1). Links: Makroskopiebild. Rechts: Reißverlauf. D 7/8: Delamination zwischen den Schichten 7 und 8. I 7: Intralaminarer Reiß in der Schicht 7. Z 32: Zugversagen in der Schicht 32.

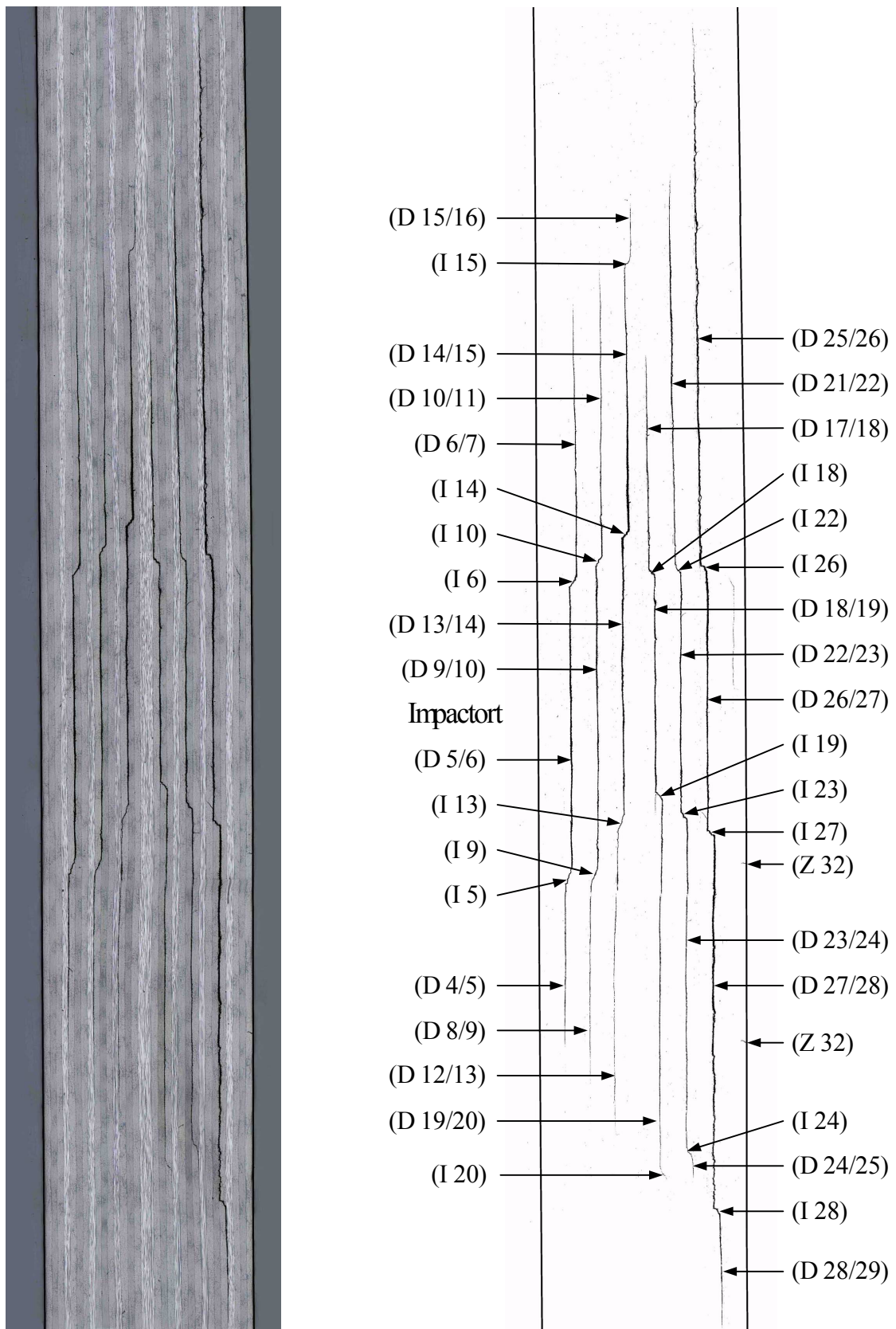


Abbildung 7.7: Schiffsprobe 26, $5\text{mm} \times 4,1\text{mm}$ seitlich des Impactortort (Abb. 7.5 b), Schnitt (2)). Links: Makroskopiebild. Rechts: Rißverlauf. D 7/8: Delamination zwischen den Schichten 7 und 8. I 7: Intralaminarer Riß in der Schicht 7. Z 32: Zugversagen in der Schicht 32.

7.3 Auswertung der Schadensprojektionsflächen

In der Abbildung 7.8 sind die im Ultraschallverfahren ermittelten Delaminationsflächen in der Projektion \tilde{A}_{del} in mm^2 über die Überhöhung \tilde{U} in mm der Impactprobenkörper aufgetragen. Es ist erkennbar, daß die Schadensprojektionsflächen einer Impactreihe gleicher

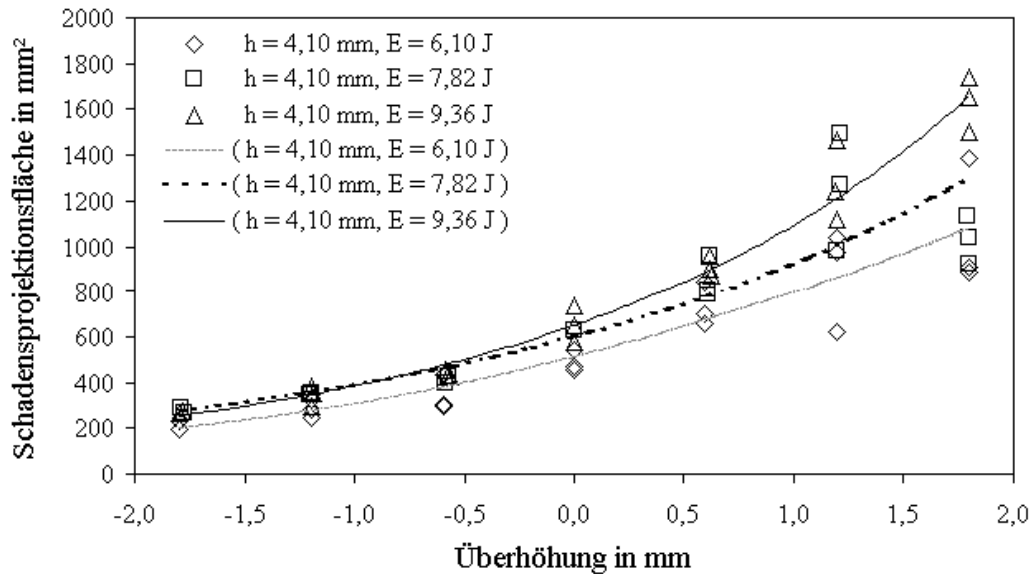


Abbildung 7.8: Schadensprojektionsfläche \tilde{A}_{del} über der Überhöhung \tilde{U} .

Energiestufe mit der Probenkörperüberhöhung ansteigt. Dabei nimmt die Steigung einer gedachten Regressionskurve mit der Impactenergie und die Streuung der Einzelwerte mit der Überhöhung zu. Probenkörper gleicher Krümmung zeigen mit der Erhöhung der Impactenergie größere Schadensprojektionsflächen. Die Abbildung 7.9 stellt vergleichend die

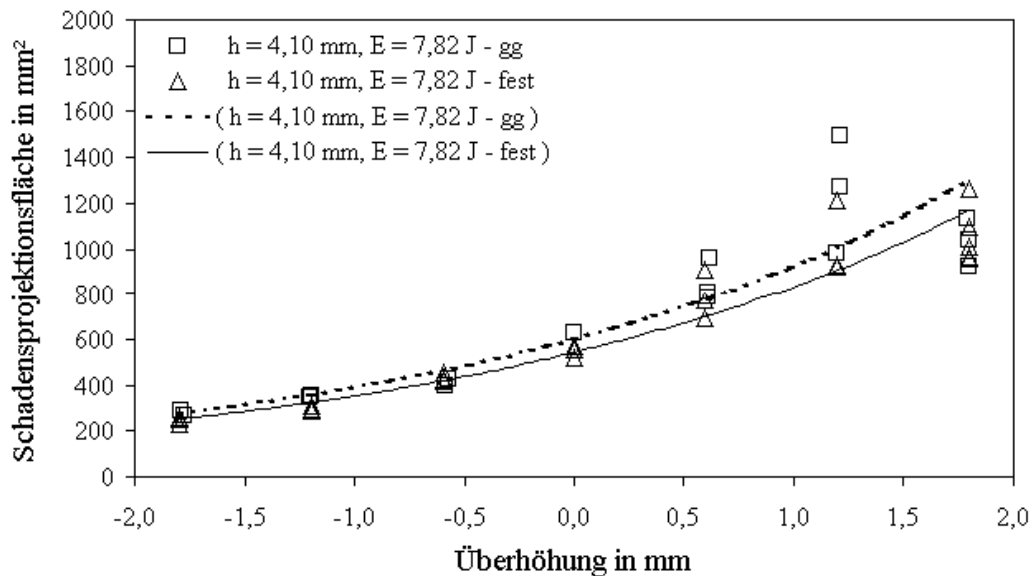


Abbildung 7.9: Schadensprojektionsfläche \tilde{A}_{del} über der Überhöhung \tilde{U} bei halb-gelenkiger und quasi-fester Einspannung.

Ergebnisse einer Impactbelastung von $E_{imp} = 7,82 \text{ J}$ bei halb-gelenkiger (gg) und quasi-fester (fest) Einspannung dar. Es zeigt sich, daß die Schädigung mit der Erhöhung der Impactenergie auch bei quasi-fester Einspannung ansteigt. Die Probenkörper zeigen sich aber insgesamt schadenstoleranter und der Verlauf der Regressionskurve ist weniger progressiv.

7.4 Untersuchungsergebnisse des Impactverhaltens

Die Darstellung der Schädigungskraft F_{vers} in kN über der Überhöhung \tilde{U} in mm in der Abbildung 7.10 läßt erkennen, daß die Schädigungskraft mit der Überhöhung abnimmt. Bei

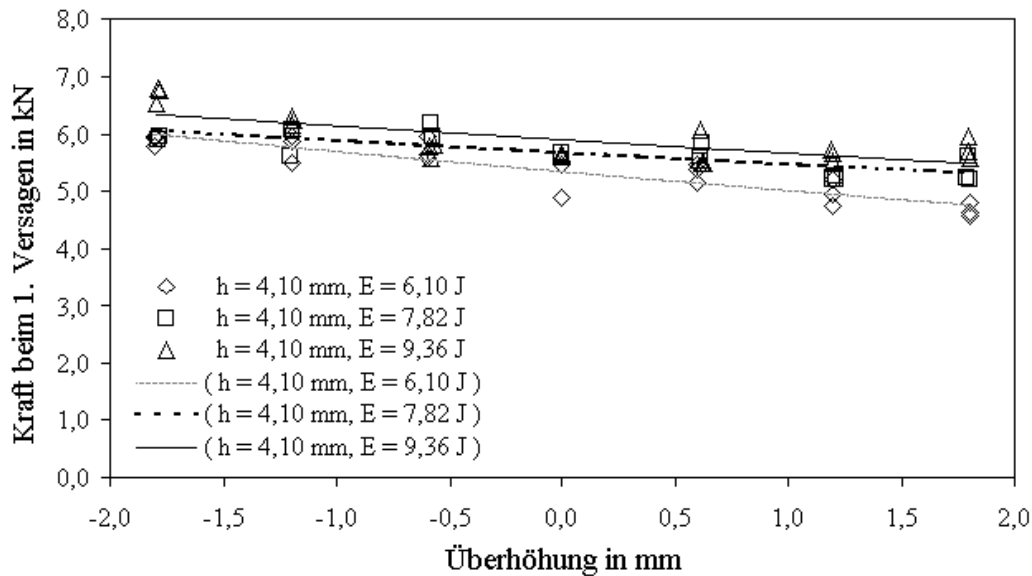


Abbildung 7.10: Schädigungskraft F_{vers} über der Überhöhung \tilde{U} .

Probenkörpern gleicher Geometrie steigt die Kraft beim ersten Versagen mit der Stoßenergie an. Der Vergleich der Schädigungskraft F_{vers} zwischen halb-gelenkiger und quasi-fester

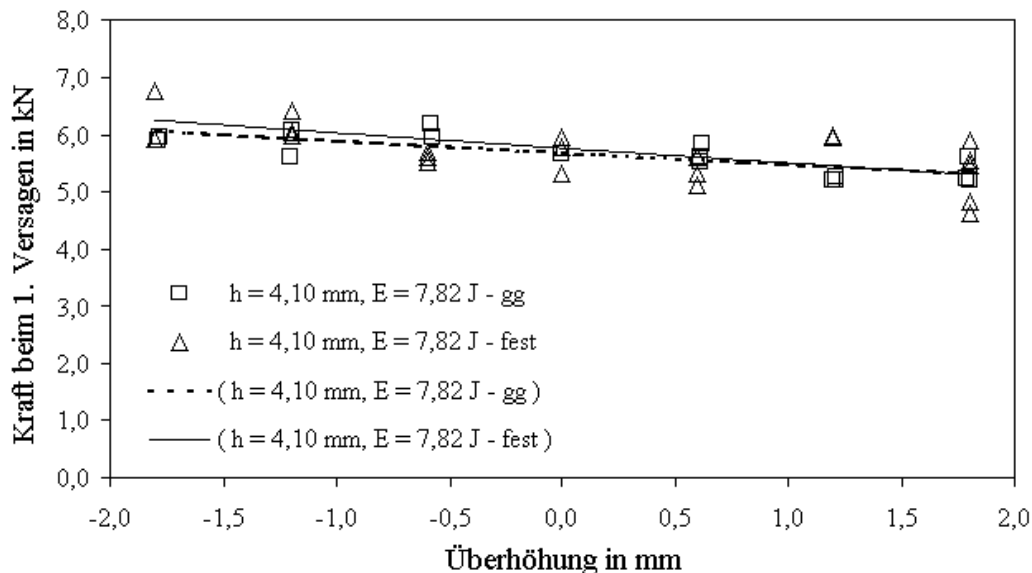
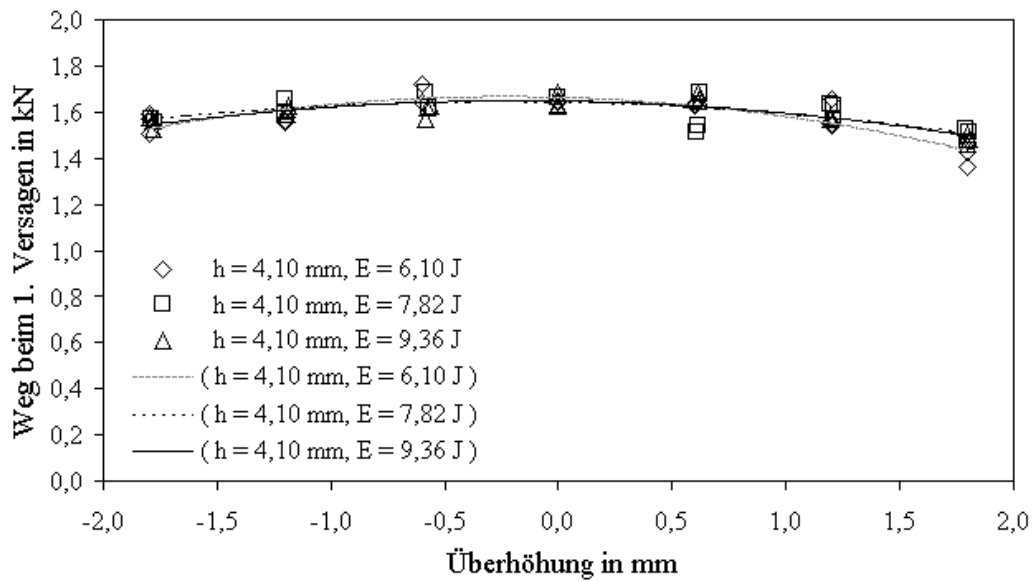
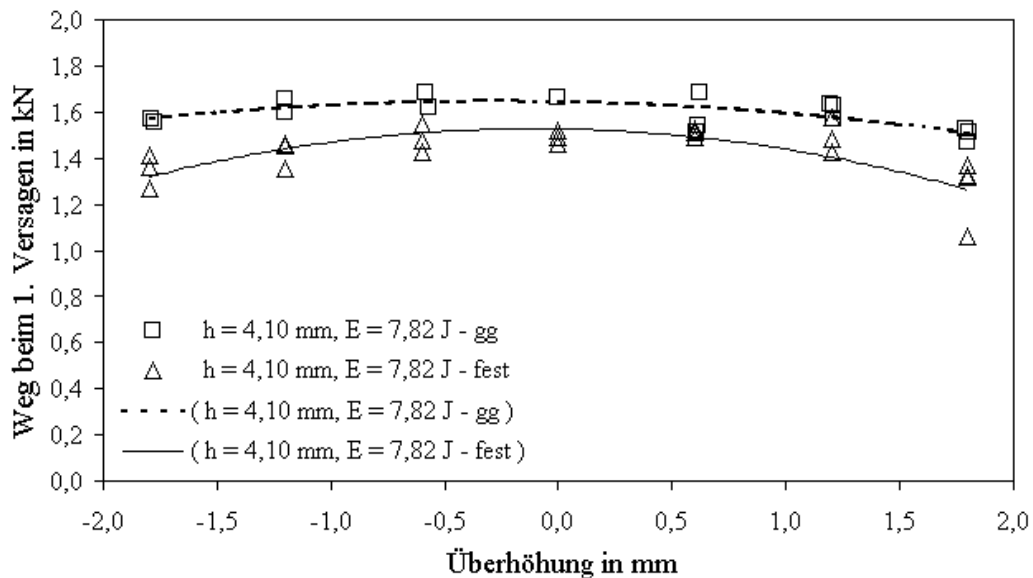


Abbildung 7.11: Schädigungskraft F_{vers} über der Überhöhung \tilde{U} bei halb-gelenkiger und quasi-fester Einspannung.

Einspannung in der Abbildung 7.11 zeigt keinen signifikanten Unterschied.

Abbildung 7.12: Schädigungsweg w_{vers} über der Überhöhung \tilde{U} .

Der Weg zum Zeitpunkt des ersten Versagens w_{vers} in mm ist in der Abbildung 7.12 über der Überhöhung \tilde{U} in mm aufgetragen. Eine Abhängigkeit des Schädigungsweges von der Impactenergie ist nicht erkennbar. Eine signifikante Abhängigkeit des Schädigungsweges von der Geometrie ist ebenfalls nicht gegeben, wenn auch der Weg bei dem ersten Versagen eines planen Probekörpers im Mittel etwas größer ist als bei einem konkav oder konvex geformten Impactprobekörper.

Abbildung 7.13: Schädigungsweg w_{vers} über der Überhöhung \tilde{U} bei halb-gelenkiger und quasi-fester Einspannung.

Die Abbildung 7.13 zeigt, daß der Versagensweg w_{vers} bei quasi-fester Einspannung kleiner ist als die der drei Verläufe in der Abbildung 7.12. Das erste Versagen der gekrümmten Probekörper tritt bei quasi-fester Einspannung noch früher ein.

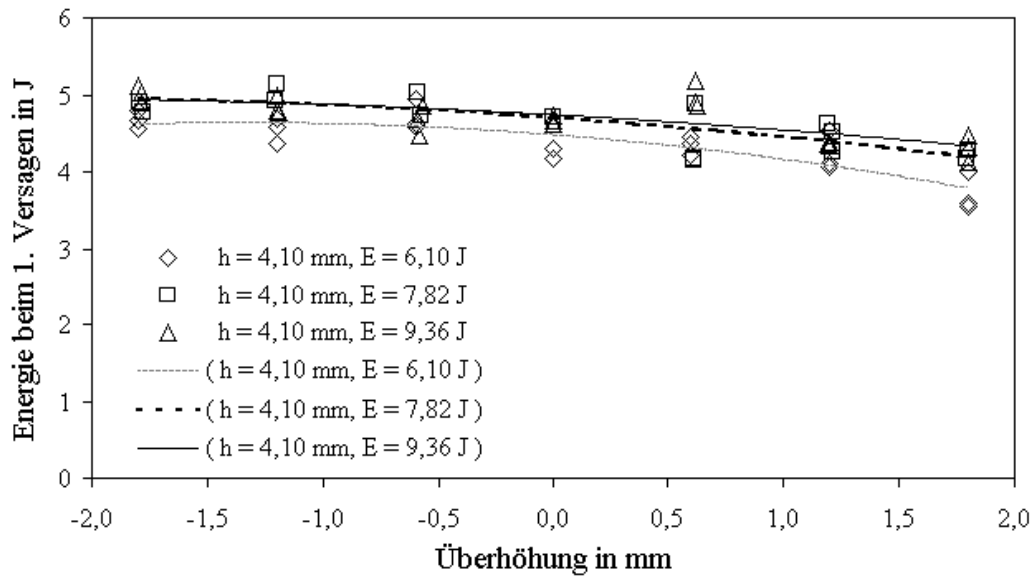


Abbildung 7.14: Schädigungsenergie E_{vers} über der Überhöhung \tilde{U} .

Die in der Abbildung 7.14 über der Überhöhung \tilde{U} in mm aufgetragene Schädigungsenergie E_{vers} in J als Integral der Schädigungskraft und des Schädigungsweges läßt keine klare Geometrieabhängigkeit erkennen.

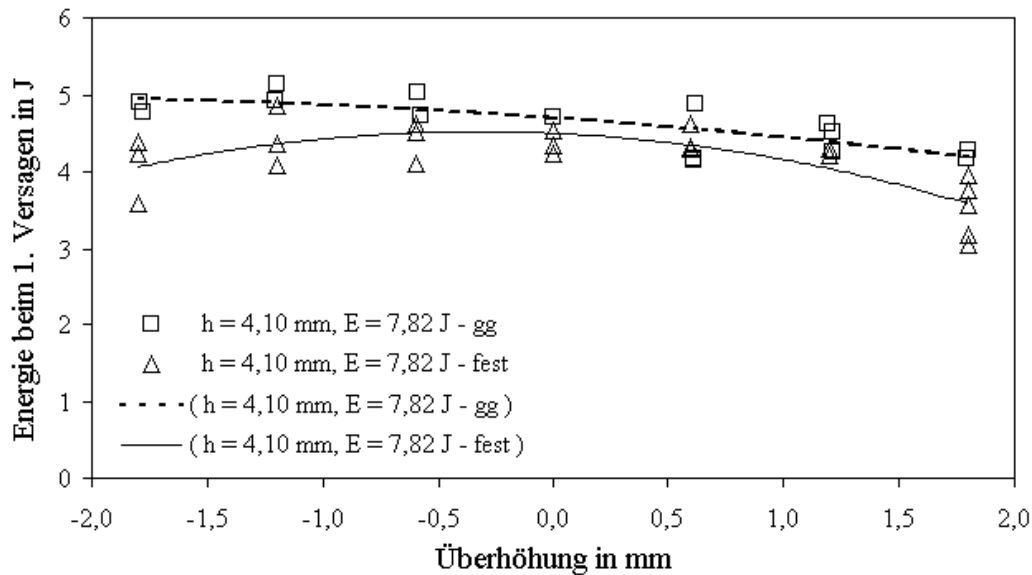
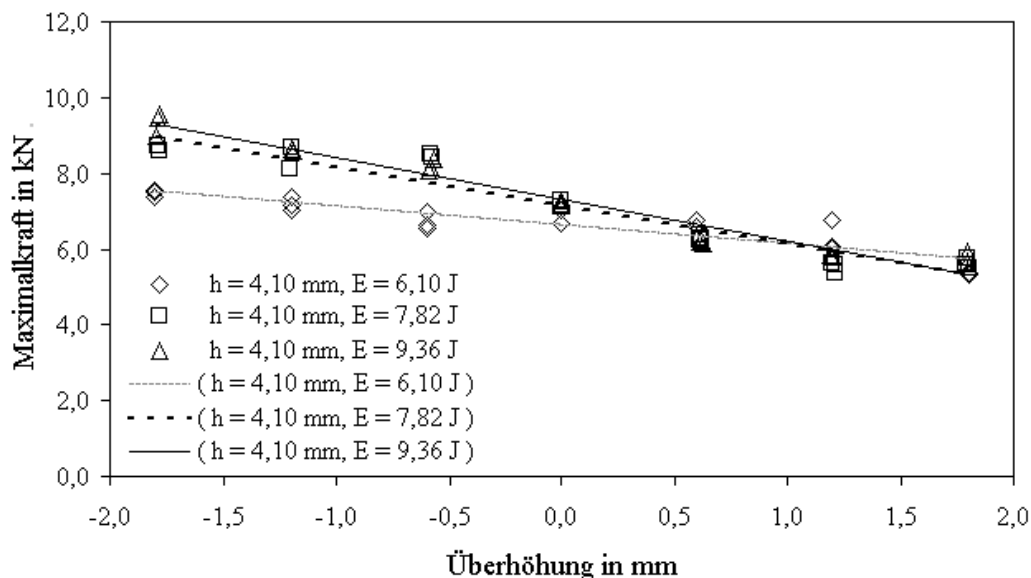
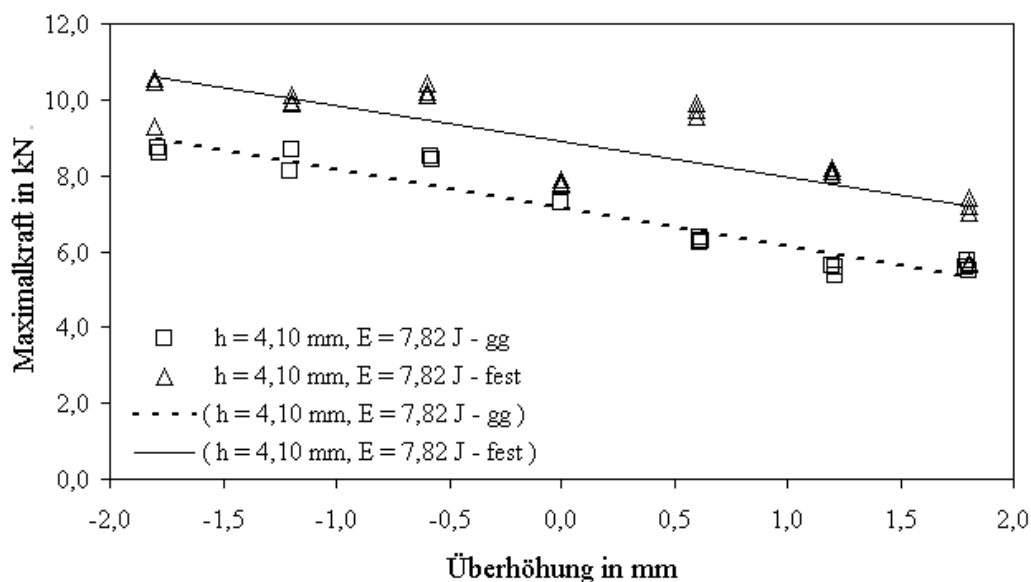


Abbildung 7.15: Schädigungsenergie E_{vers} über der Überhöhung \tilde{U} bei halb-gelenkiger und quasi-fester Einspannung.

Die Schädigungsenergie E_{vers} zeigt in der Abbildung 7.15 einen qualitativ ähnlichen Verlauf bei quasi-fester Einspannung wie in der Abbildung 7.13. Vergleichend ist der Verlauf der Schädigungsenergie über der Überhöhung bei quasi-fester Einspannung niedriger als bei halb-gelenkiger, wobei sich die Ergebnisse der planen Probekörper nicht signifikant voneinander unterscheiden.

Abbildung 7.16: Maximalkraft F_{max} über der Überhöhung \tilde{U} .

In der Abbildung 7.16 ist die Maximalkraft F_{max} in kN über der Überhöhung \tilde{U} in mm aufgetragen. Es ist erkennbar, daß die Maximalkraft mit der Überhöhung abnimmt. Außerdem steigt mit zunehmender Impactenergie die Maximalkraft leicht an.

Abbildung 7.17: Maximalkraft F_{max} über der Überhöhung \tilde{U} bei halb-gelenkiger und quasi-fester Einspannung.

Der in der Abbildung 7.17 gezeigte Verlauf der Maximalkraft über der Überhöhung bei quasi-fester Einspannung ist parallel aber im Mittel deutlich höher als bei halb-gelenkiger Randbedingung. Die Gesamtbiegesteifigkeit der Platte vergrößert sich bei quasi-fester Lagerung.

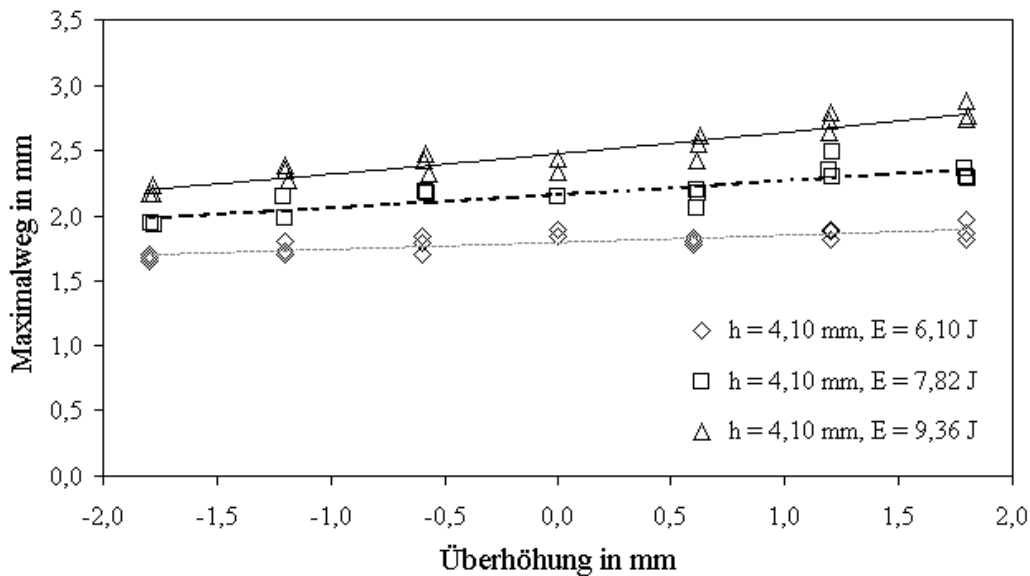


Abbildung 7.18: Maximalweg w_{max} über der Überhöhung \tilde{U} .

Der Maximalweg w_{max} in mm über der Überhöhung \tilde{U} in mm ist in der Abbildung 7.18 dargestellt. Der Maximalweg steigt mit der Überhöhung an. Mit gleicher Überhöhung zeigt sich mit der Vergrößerung der Impactenergie eine ansteigende Auslenkung des Probekörpers.

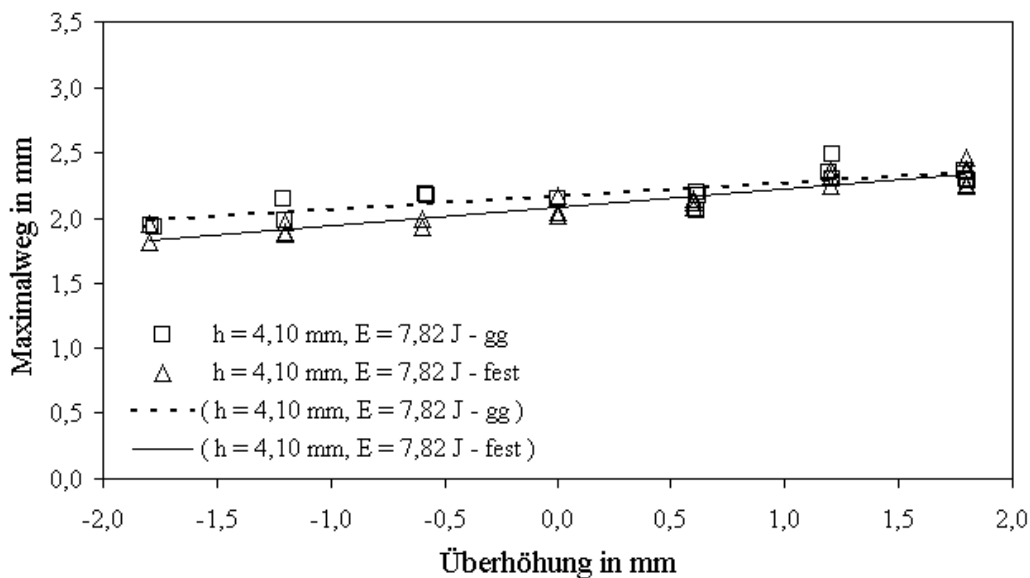
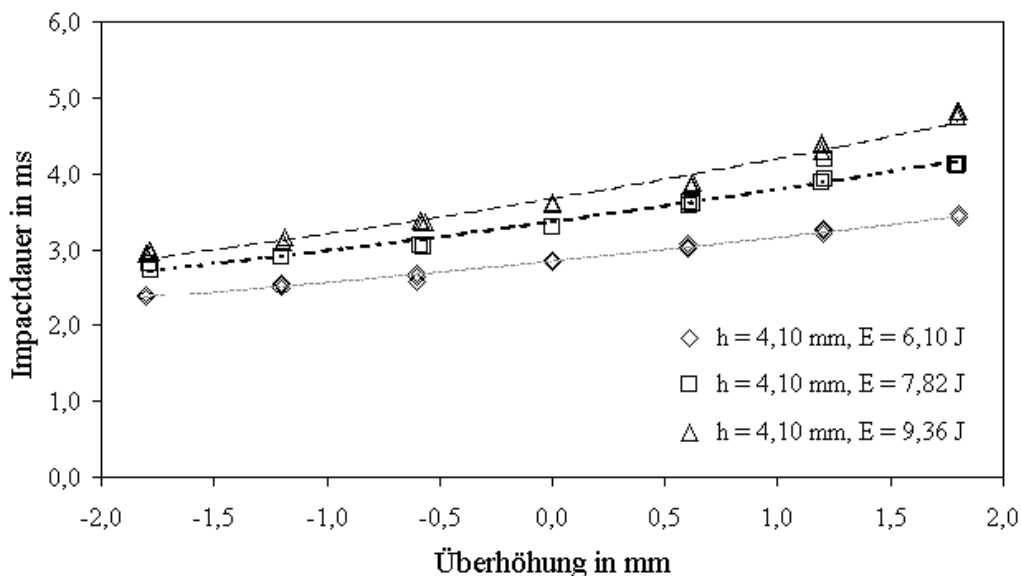
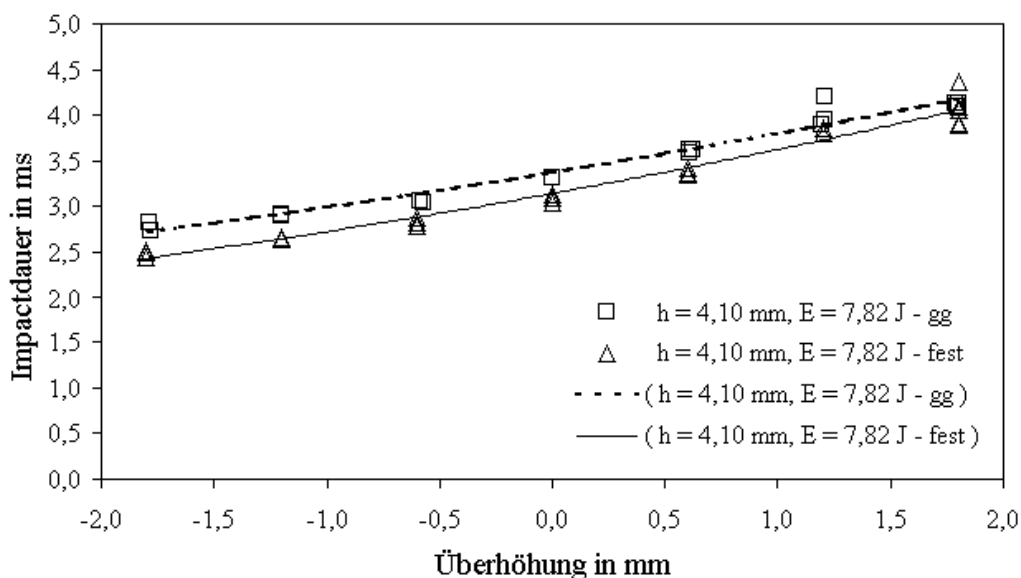


Abbildung 7.19: Maximalweg w_{max} über der Überhöhung \tilde{U} bei halb-gelenkiger und quasi-fester Einspannung.

Der Maximalweg-Überhöhungs-Verlauf bei quasi-fester Lagerung in der Abbildung 7.19 ist niedriger als die der halb-gelenkigen Einspannung. Lediglich die Ergebnisse der konvexen Probekörper zeigen keinen signifikanten Unterschied.

Abbildung 7.20: Impactdauer T über der Überhöhung \tilde{U} .

Die Dauer des Impacts steigt mit der Überhöhung an. Bei Probenkörpern gleicher Geometrie vergrößert sich mit der Erhöhung der Impactenergie die Stoßdauer.

Abbildung 7.21: Impactdauer T über der Überhöhung \tilde{U} bei halb-gelenkiger und quasi-fester Einspannung.

Die Impactdauer bei einer quasi-festen Einspannung verkürzt sich tendenziell. Wobei bei der Überhöhung von $\tilde{U} \geq +1,2\text{mm}$ kein wesentlicher Unterschied zwischen den Lagerungsarten deutlich wird.

Kapitel 8

Diskussion der Ergebnisse

Die Abhängigkeit der Schadenstoleranz faserverstärkter Kunststoffe von der Probenkörpergeometrie, den Randbedingungen und den Impactparametern soll in diesem Kapitel an den in den Experimenten und analytischen Betrachtungen gefundenen Ergebnissen diskutiert werden. Desweiteren wird an einem einfachen, achsensymmetrischen FE-Modell der Einfluß der Krümmung auf die Schnittlasten untersucht.

8.1 Einfluß der Probenkörpergeometrie auf die Schadensfläche

Die im Kapitel 7.3 dargestellten Ergebnisse der Schadensanalyse impactbelasteter, gekrümmter Probenkörper zeigen einen deutlichen Zusammenhang zwischen dem Impactschaden einerseits und der Probenkörpergeometrie sowie der Impactenergie andererseits. Wie bereits aus der Literatur bekannt [41, 53, 54, 57], steigt mit der Erhöhung der Impactenergie die Größe des Schadens an. Einen sehr viel deutlicheren und bisher nicht untersuchten Einfluß auf die Impactschädigung besitzt die Geometrie des Probekörpers. Mit zunehmender Konvexität nimmt die Größe der Schädigung zu. Hierbei sind die sich bei einer konvex belasteten Struktur ausbildenden Druckmembranspannungen und die sich erhöhenden interlaminaeren Spannungen in Kombination mit einer geringen Schadenstoleranz der faserverstärkten Kunststoffe gegen diese Beanspruchungen von wesentlicher Bedeutung (s. a. Kap. 1.2.3, 3.2.3, 8.7). Dieser Einfluß steigt dabei mit der Erhöhung der Schlagbeanspruchung an. Somit zeigt der Verlauf der Schädigungs-Überhöhungs-Kurve mit Vergrößerung der Impactenergie einen zunehmend progressiveren Verlauf. Nachfolgend werden mit Hinblick auf eine zielführende Problemlösung verschiedene Aspekte der Geometrieabhängigkeit des Impactverhaltens faserverstärkter Kunststoffe diskutiert.

8.2 Einfluß der Probenkörpergeometrie auf den Impactvorgang

In dem Kapitel 7.4 ist an ausgewählten Kennwerten des Impactverlaufs der Zusammenhang zwischen der Probenkörpergeometrie und dem Impactvorgang dargestellt worden. Durch dieses Vorgehen soll neben der bereits erfolgten Betrachtung der Schadensgröße die geometrieabhängige Änderung der relevanten Impactparameter untersucht und diskutiert werden. Die sich beim ersten Versagen einstellende Kraft F_{vers} und der Weg w_{vers} zeigen dabei keine signifikante Geometrieabhängigkeit. Im Mittel steigt die Versagenskraft mit der Impactenergie und fällt leicht mit der Überhöhung. Dieser schwach ausgeprägte Zusammenhang und die durchgeführten mikroskopischen Analysen lassen darauf schließen, daß die sich zentrisch um den Impactort und zylindrisch über die Probenkörperdicke ausbildende Scherbeanspruchung dominierend bei der Reißinitiierung ist. Der Zusammenhang zwischen Schädigungsweg und Überhöhung läßt erkennen, daß die zum ersten Versagen erforderlichen Beanspruchungen aufgrund der erhöhten Steifigkeit der gekrümmten Probenkörper eher erreicht werden als bei planen Impactprobenkörpern. Hierbei ist kein wesentlicher Unterschied zwischen jeweils konkaver und konvexer Krümmung erkennbar. Die Darstellung der Versagensenergie E_{vers} bestätigt den durch die Impactkraft dominierten Einfluß auf die Reißinitiierung. Die sich mit zunehmender Probenkörperüberhöhung deutlich verringernde Maximalkraft F_{max} läßt sich mit der zunehmenden Schädigung und der daraus sich verringernenden Plattenbiegesteifigkeit erklären. Die mit der Schädigung zunehmende Plattennachgiebigkeit vergrößert den Maximalweg w_{max} mit der Überhöhung. Der mit der Probenkörperüberhöhung sich vergrößernde Schaden und die daraus resultierende Abnahme der Plattensteifigkeit und Zunahme des Maximalweges führen zu einer Erhöhung der Impactdauer T . Es läßt sich somit zusammenfassen, daß die Krümmung der Impactprobenkörper keinen wesentlichen Einfluß auf die Reißinitiierung besitzt, aber die Reißausbreitung und den daraus resultierenden Schädigungsverlauf dominiert. Die Resistenz der faserverstärkten Kunststoffe auf Schubbelastungen ist gering. Die Ausbreitung der Delaminationen wird jedoch durch die Querschubbelastungen und Membrankräfte bestimmt. Diese Zusammenhänge lassen somit den Schluß zu, daß die sich mit der Geometrie unterschiedlich ausbildenden Querschub- und Membranbeanspruchungen im Innern des Probenkörpers das Schädigungsverhalten während des Impacts wesentlich beeinflussen.

8.3 Impact- und Probenkörpergeometrieabhängigkeit der Reißverläufe

Die Untersuchung der Reißverläufe gekrümmter Impactprobenkörper läßt Rückschlüsse auf die im Innern der Probenkörper wirkenden Beanspruchungen zu. Die Schliffbilder durch den Impactort zeigen, daß sich unterhalb des Impactdorns über die Probenkörperdicke ein zylindrischer schadensfreier Bereich ausbildet (Abb. 8.1). Das an dieser Stelle Nichtentstehen von Rissen kann durch einen unterhalb des Impactdorns auftretenden andersartigen Spannungszustand (keine Querschubspannungen im Bereich der Symmetrieachse) und der dort vorhandenen Druckspannungen σ_{zz} erklärt werden. Diese Druckspannungen σ_{zz} erlauben größere interlaminare Spannungen und Membranspannungen bis zum Versagen.

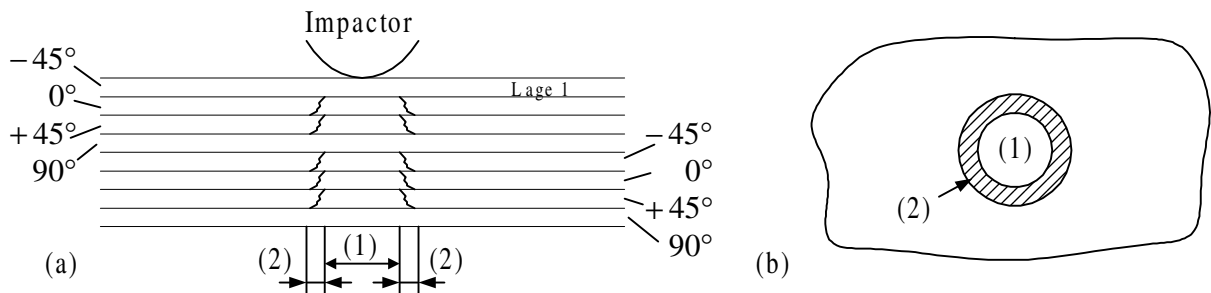


Abbildung 8.1: Unterhalb des Aufschlagpunktes bildet sich durch die Überlagerungen der transversalen Spannungen σ_{zz} ein zylindrischer, schadensfreier Bereich aus (1). Ringförmig um den Impactort und über die Plattendicke versagt das Laminat unter Scherung (2).

An diesen schadensfreien Bereich (Abb. 8.1, (1)) schließt sich konzentrisch ein Gebiet mit überwiegend intralaminaren Rissen an, die hier den Ort der Rißinitiierung aufgrund von Scherbeanspruchungen vermuten lassen. Ausgehend von diesen Rissen breiten sich die interlaminaren, flächigen Delaminationen seitlich in der Probe aus (Abb. 8.2). Der sich sys-

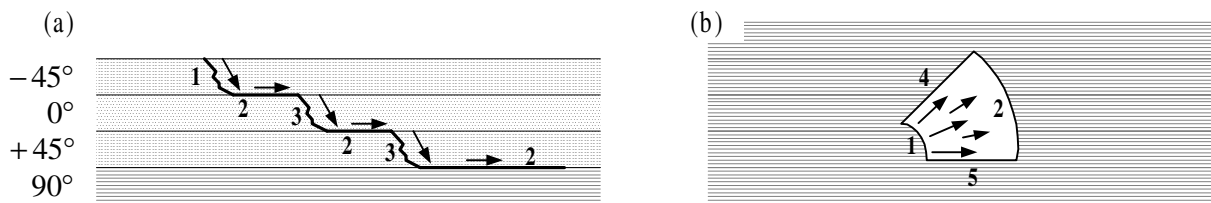


Abbildung 8.2: Ausgehend von den intralaminaren Rissen (1) um den Impactort breitet sich der Riß flächig als Delamination (2) zwischen zwei zueinander gedrehten Lagen aus. Die seitliche Ausbreitung der Delamination hängt dabei von der Größe der Querschub- und Membranspannungen ab. Der Rißwinkel bestimmt sich durch den Lagenaufbau. Schraubenförmige Delaminationen benachbarter Zwischenschichten werden dabei durch weitere intralaminare Risse (3) verbunden, die oberhalb (4) und unterhalb (5) der Delaminationsfläche verlaufen.

tematisch darstellende gestufte Rißverlauf ist auf den Schichtaufbau des Laminates zurückzuführen (Abb. 8.3). Die von der Probenkörpergeometrie unabhängige Bruchstruktur und von der Krümmung und somit von der Schadensgröße abhängende interlaminare Rißlänge läßt den Schluß zu, daß mit der Überhöhung des Impactprobenkörpers der Anteil der delaminationsbegünstigenden Schub- und Membrandruckbeanspruchungen ansteigt (s. a. Kap. 3.2, 8.7).

8.4 Berücksichtigung der Schubweichheit

Die schubstarrten Platten- und Laminattheorien erlauben die Berechnung des Verzerrungs- und Spannungszustandes ebener, dünner Flächentragwerke. Die Bezeichnung „dünn“ und damit die Annahme der Schubstarrheit sind aber gebunden an die relativen Abmessungen

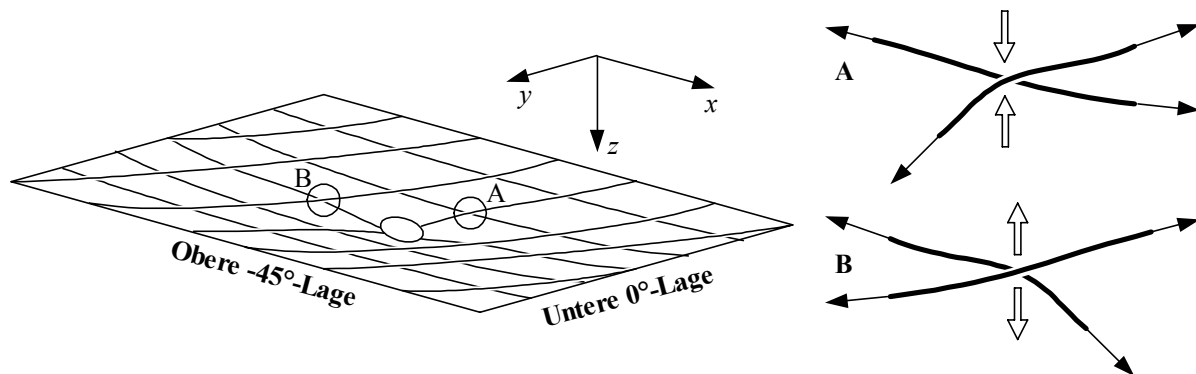


Abbildung 8.3: Delaminationsmodell zweier um 45° zueinander gedrehter Einzellagen. Die Bereiche A wirken rißhemmend. Die Punkte B begünstigen die Rißausbreitung.

der Platte und die Materialkennwerte. So erlauben isotrope Tragwerke eine kleinere Plattenschlankheit als anisotrope. Der große Steifigkeitsunterschied unidirektionaler FVK-Einzelschichten in Faserlängsrichtung und senkrecht dazu erfordern eine größere Plattenschlankheit H . Als Richtwert für die Verwendung einer schubstarreren Laminattheorie wird in der Literatur der Wert $H \geq 20$ angegeben [91]. Die im Kapitel 4.5 ausgeführten Berechnungen zeigen, daß bei der Festlegung der Gültigkeitsgrenzen einer schubstarreren Laminattheorie der Einfluß der Randbedingungen nicht vernachlässigbar ist. So erfordern fest eingespannte Laminatplatten ein größeres Seiten-Dicken-Verhältnis ($H \geq 30$) als zugfest-gelenkig gelagerte ($H \geq 20$). Bei relativ dicken Laminaten wird zusätzlich die Wahl eines geeigneten Schubkorrekturfaktors erforderlich. Ab Plattenschlankheiten von $H \geq 8$ bei fester Einspannung und von $H \geq 5$ bei zugfest-gelenkiger Lagerung ist der tatsächliche parabolische Querschubspannungsverlauf über die Laminatdicke zu berücksichtigen. Bei den ausgeführten Berechnungen (s. Abb. 4.5 u. 4.6) war ein Unterschied zwischen der Verwendung eines Korrekturfaktors mit konstantem Wert oder mit einer Gewichtsfunktion nicht feststellbar.

8.5 Einfluß von Scheiben- und Transversalbelastungen

Nachfolgend soll der Einfluß von Scheibenbelastungen auf das Impactverhalten von faserverstärkten Kunststoffen diskutiert werden. Die durch den Impact hervorgerufene Durchbiegung $w(x, y)$ der Laminatplatte führt, wie bereits in der Einleitung beschrieben, zu einem komplexen dreidimensionalen Spannungs-Verzerrungs-Zustand in dem Impactprobekörper. Die Klassische Laminattheorie stellt einen Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verzerrungen geschichteter, schubstarrer Verbunde her (s. Gl. (4.47)). Über ein zu wählendes Versagenskriterium können dann die Versagensgrenzen und Versagensmodi berechnet werden (s. z. B. PUCK [80]), die im Fall der Klassischen Laminattheorie aus dem ebenen Spannungszustand folgen. Belastungen wie die Querschubspannungen τ_{xz} , τ_{yz} und die transversale Spannung σ_{zz} lassen sich nur indirekt über die Formulierung der Gleichgewichtsbeziehungen des räumlichen Spannungszustandes bestimmen. Möchte man die bei einem Impact entstehenden Delaminationen abschätzen, ist die Betrachtung der transversalen Spannungsverläufe $\tau_{xz}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$ und $\sigma_{zz}(x, y, z)$ (Gl. (4.52)-(4.54)) erforderlich. Die für die Berechnun-

gen notwendige Kenntnis des Verschiebungsfeldes kann mit den Ansatzfunktionen (4.62a)-(4.62c) und der Bestimmungsgleichung (4.70b) für die noch unbekanntenen Koeffizienten der Ansatzfunktionen über die Variation des elastischen Potentials der schubstarrten Laminatplatte berechnet werden (s. a. Kap. 4.2.2 u. 4.5). Die Wahl eines zweidimensionalen Modells des Schichtverbundes zur Beschreibung eines dreidimensionalen Beanspruchungszustandes läßt zunächst nur eine begrenzte Darstellung der Realität zu. Dennoch können die Zusammenhänge im Kapitel 4 zur Problemlösung beitragen, wobei in den nachfolgend diskutierten Schlußfolgerungen stets die Begrenztheit des Modells bedacht werden muß.

Prägt man einer Laminatplatte mit einem symmetrischen Lagenaufbau ($B_{ij} = 0$) über die Mittelfläche konstant verteilte Scheibenlasten ein, so erfährt die Platte lediglich Verzerrungen und Spannungen in der Ebene (s. a. Gl. (4.51), (4.70a)). Die Ableitungen dieser konstanten Belastungen liefern keinen Beitrag zu den interlaminaren Spannungen τ_{xz} , τ_{yz} und σ_{zz} . Lediglich ein über die Mittelfläche verteiltes Scheibenbelastungsfeld 2. oder höherer Ordnung ruft, wie in den Gleichungen (4.52)-(4.54) erkennbar, interlaminare Spannungen hervor. Im Fall des Verschwindens der Koppelsteifigkeiten führt eine reine Biegeverformung der Platte zu Momenten und interlaminaren Spannungen. In den Gleichungen (4.52)-(4.54) ist erkennbar, daß der Verlauf der Biegeverformung $w(x, y)$ der Laminatmittelfläche dreifach differenziert in die Querschubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} und vierfach abgeleitet in die Berechnungen der transversalen Spannung σ_{zz} eingeht. Für eine punktförmige Transversallast sind größere Querschubspannungen zu erwarten als bei einer Rechtecklast, da im Vergleich zur Rechtecklast das Verschiebungsfeld $w(x, y)$ der Einzellast von höherer Ordnung ist.

Prägt man der symmetrischen Laminatplatte zunächst Scheibenbelastungen ein, z. B. eine äußere Druckspannung N_x , und erzwingt durch einen Impact eine Durchbiegung w , so liefern die Lasten aufgrund der vergrößerten Biegeverformung, wie aus den Gleichungen (4.65), (4.66a), (4.69a), (4.52)-(4.54) erkennbar ist, einen Beitrag zu den interlaminaren Spannungen. Die Formulierung der Endwertarbeit der äußeren Lasten (4.65) unter Beachtung der Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen (4.66a)-(4.66c) läßt erkennen, daß eine Drucklast ($N_x < 0$) die Durchbiegung und damit die interlaminaren Spannungen erhöht. Eine ebene Zuglast ($N_x > 0$) verringert dagegen die resultierenden interlaminaren Spannungen. In den Arbeiten von MORLO [56] findet sich eine experimentelle Bestätigung für diese Überlegungen. MORLO prägte Impactprobenkörpern Scheibendrucklasten ein. Die durch den anschließenden Impactversuch entstandenen und im Ultraschallverfahren ermittelten Delaminationsflächen wurden mit den Impactergebnissen ohne Scheibenbelastung verglichen. MORLO fand dabei heraus, daß mit steigender Scheibendrucklast die Größe der Delamination zu und damit die Impacttoleranz abnahm. Eine analoge Untersuchungsreihe unter seitlicher Zuglast wurde bisher nicht durchgeführt. In den Arbeiten von EHRlich et al. [14, 15, 16] und MAIER [53] konnte ein Geometrieinfluß schwach gekrümmter Platten auf die Impacttoleranz nachgewiesen werden. Untersuchungen zeigen, daß konvex geformte Probenkörper eine deutlich geringere Schadenstoleranz als plane Impactprobenkörper besitzen. Im Gegensatz dazu weisen konkave Geometrien eine erhöhte Impacttoleranz als plane Strukturen auf. Dabei zeigt sich, daß schon eine geringe Wölbung ausreicht, um einen Spannungszustand mit typischem Schalencharakter zu erhalten [20, 23, 24, 104]. Eingeprägte senkrechte Lasten werden mit abnehmendem Wölbungsradius nicht mehr ausschließlich über Querkräfte q und Momente m sondern über Membrankräfte n abgetragen. Die sich dabei durch einen Impact auf eine schwach gekrümmte Platte ausbildenden Verschiebungsfelder $u(x, y)$ und $v(x, y)$ sind von zweiter oder höherer Ordnung. Konvexe Strukturen erzeugen lokale Scheibendrucklasten und vergrößern somit die interlaminaren Spannungen während eines Impacts. Dagegen

bilden konkav gewölbte Probekörper lokale Scheibenzuglasten aus, die zu einer Verringerung der interlaminaren Spannungen führen.

8.6 Einfluß der Randbedingungen auf das Impactverhalten

Die Art der Lagerung beeinflusst die transversale Verformbarkeit der Platte. Bei gleichen Impactparametern ist die Biegung des zugfest-gelenkig gelagerten Probekörpers größer als die bei fester Einspannung. Wie in den vorangegangenen Kapiteln ausgeführt wurde, nimmt die Schadensgröße mit der Plattendurchbiegung zu. Die Versagensgröße hat dann wieder Einfluß auf den gesamten Impactverlauf. Die in dieser Arbeit vergleichend dargestellten Versuchsergebnisse einer halb-gelenkigen und einer quasi-festen Einspannbedingung sind in Teilen nicht signifikant verschieden. Dieses kann auf die Ähnlichkeit der gewählten Randbedingungen zurückgeführt werden. Dennoch läßt sich eine tendentielle Unterscheidung zwischen einer gelenkigen und einer festen Lagerungsart erkennen. Die experimentellen Ergebnisse stützen damit die oben diskutierten phänomenologischen Erkenntnisse der Impact- und Schädigungsmechanismen. Eine weitere Beeinflussung der schadensbestimmenden Plattenbiegeverformung läßt sich über die Größe des freien Stützfensters, den Auflagerabstand, erzielen. MORLO zeigt in [55], daß die Schadensprojektionsfläche mit der Größe des Stützfensters zunimmt.

8.7 Geometrieinfluß

Zur Untersuchung des Geometrieinflusses auf das Belastungsverhalten schwach gekrümmter Strukturen eignet sich die Analyse mit der Finiten-Elemente-Methode (FEM). Hierzu wurde das FE-Programm ANSYS 8.0 mit dem Acht-Knoten-Element PLANE82 verwendet. Aufgrund der Symmetrie des betrachteten Problems konnte die Geometrie (s. a. Abb. 6.4) auf ein achsensymmetrisches Modell reduziert werden. In der Abbildung 8.4 ist links die Problemstellung und rechts das gewählte Ersatzmodell dargestellt. Hierbei ist der Impactdorn als achsensymmetrische Halbkugel mit einem Radius von $r_K = 8\text{mm}$ diskretisiert worden. Die Knotenpunkte der Halbkugeloberseite sind gekoppelt und werden statisch mit der Last $F = 9\text{kN}$ belastet. Durch die Vernetzung der Probenkörperoberseite und der Halbkugelunterseite mit Kontaktelementen (TARGE169, CONTA172) wurde die Krafteinleitung realisiert. Die Materialeigenschaften des Dorns wurden vereinfacht als isotrop und die Lamineigenschaften des Probekörpers als quasiisotrop angenommen (Abb. 8.5).

8.7.1 Konvergenz

Die Aussagekraft eines FE-Modells ist abhängig von der erzielten numerischen Genauigkeit. Ein wichtiges Kriterium ist dabei die ausreichende Diskretisierung. Zur Konvergenzbetrachtung dienten zunächst fünf Modelle mit unterschiedlichem Vernetzungsgrad (s. a. Tab. 8.1). Die Auswertung der Simulationsergebnisse fand an den in der Abbildung 8.4 (b) dargestell-

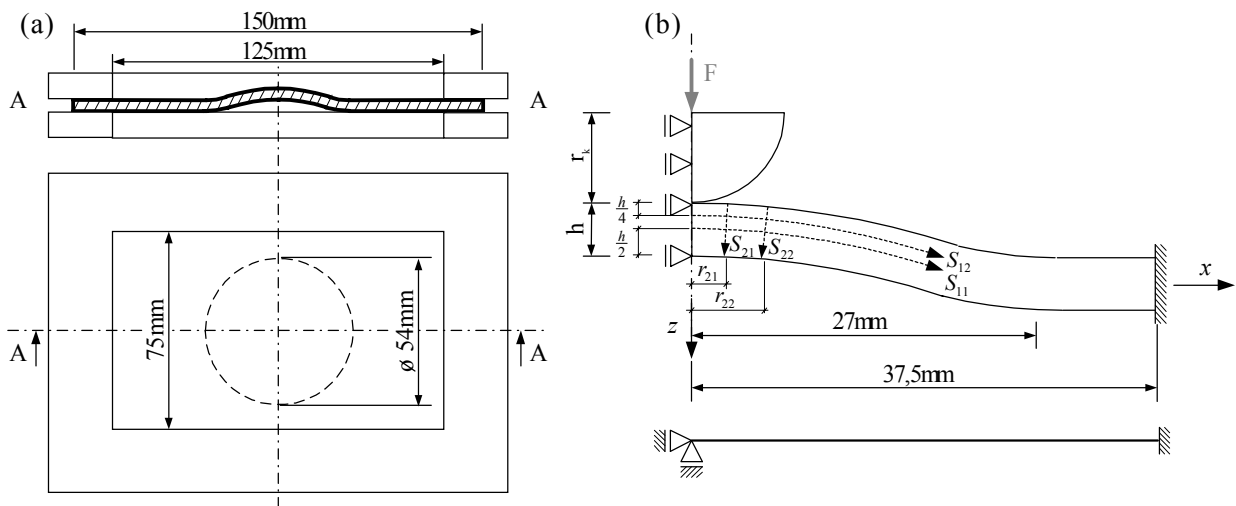
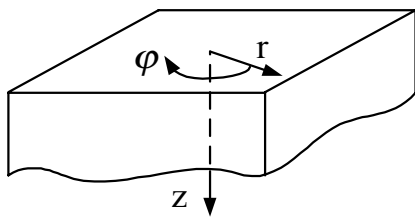


Abbildung 8.4: (a) Impactprobekörper 150mm × 100mm × 4mm und Einspannrahmen mit einem freien Stützfenster von 125mm × 75mm, (b) Achsensymmetrisches FE-Ersatzmodell mit Auswertepfaden S_{ij} .



<i>Probekörper mit „quasiisotropen“ Lagenaufbau</i>	$E_r = 70\text{GPa}$
	$E_z = 10\text{GPa}$
	$G_{rz} = 3846\text{MPa}$
	$G_{r\varphi} = 26,9\text{GPa}$
	$\nu_{rz} = 0,3$
<i>Dorn</i>	$E = 210\text{GPa}$
	$\nu = 0,3$

Abbildung 8.5: Koordinatensystem und Materialkennwerte des Laminat-Ersatzmodells.

ten Pfaden S_{ij} statt. Ausgehend von der Annahme, daß sich die Last F über Querkräfte q in der Struktur ausbreitet, kann an der Stelle r aus Gleichgewichtsgründen die Querkraft mit

$$q(r) = \frac{F}{2\pi r} \tag{8.1}$$

bestimmt werden (Abb. 8.6). Bei der Annahme einer über die Plattendicke h parabolischen

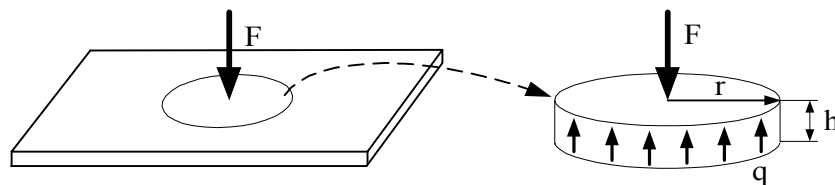


Abbildung 8.6: Übertragung der Kraft F durch Querkräfte q .

Verteilung der Querschubspannung τ_{rz} läßt sich der Spannungsverlauf schreiben als

$$\tau_{rz}(z) = \left[1 - \left(\frac{2}{h} \right)^2 z^2 \right] \frac{3q(r)}{2h} \tag{8.2}$$

Tabelle 8.1: FE-Modelle zur Konvergenzbetrachtung.

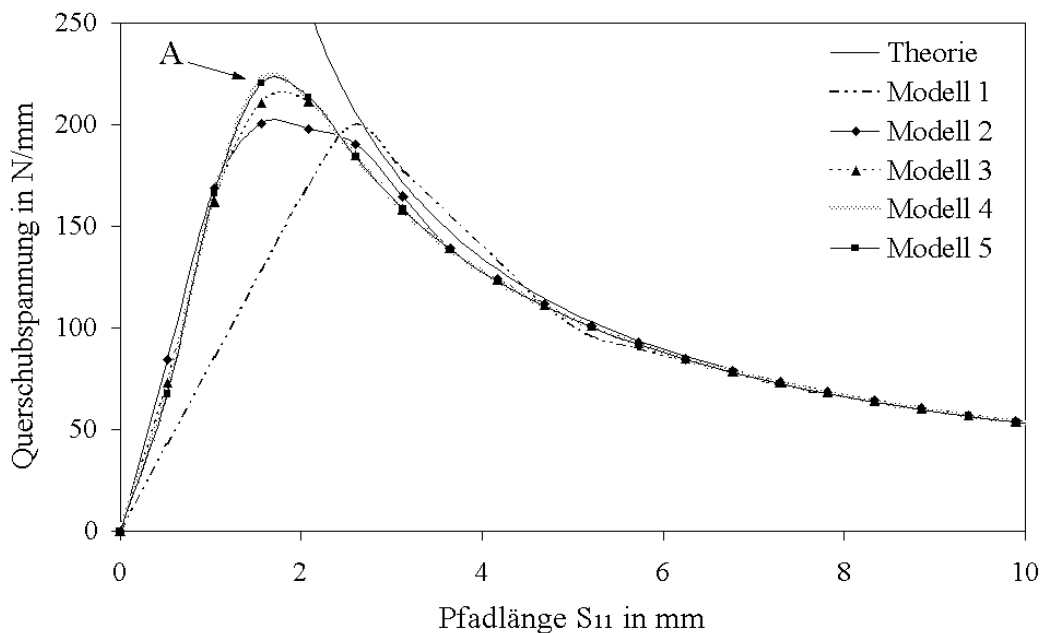
	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
Gesamtanzahl Elemente	298	340	721	2693	5921
Anzahl Elemente, Kugel	26	76	201	613	1241
Anzahl Elemente, Platte	272	264	520	2080	4680
Anzahl Elem., Platte, horizontal	17	33	65	130	195
Anzahl Elem., Platte, vertikal	16	8	8	16	24

$$\text{mit } -\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}.$$

Der in der Abbildung 8.7 betrachtete Maximalwert des Querschubes in der Plattenmittelfläche kann folglich mit

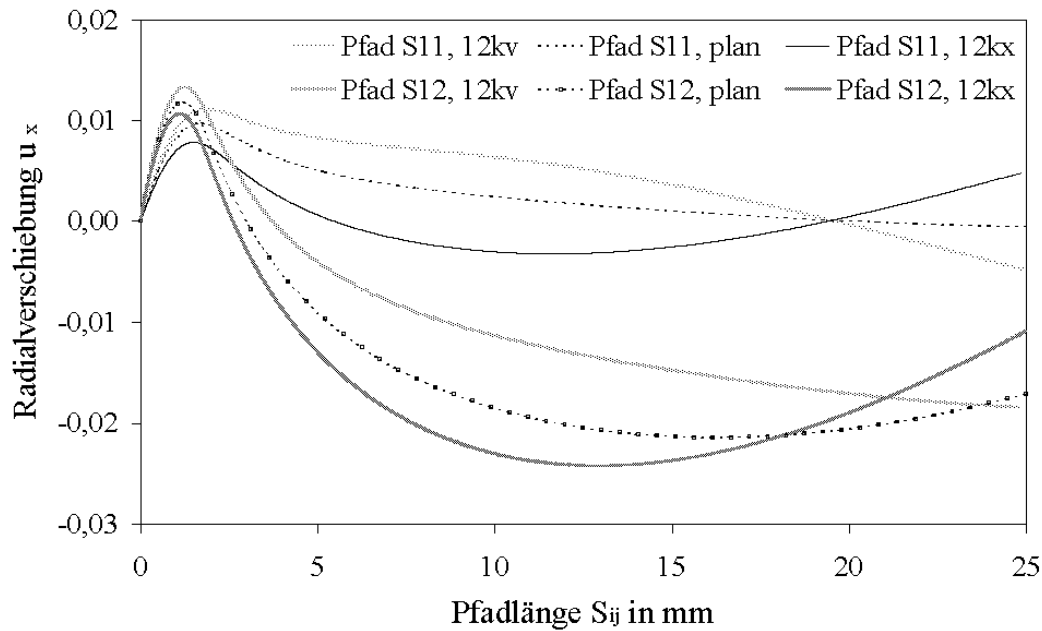
$$\tau_{rz,max}(r) = \left(\frac{3}{4\pi}\right) \frac{F}{hr} \quad (8.3)$$

angegeben werden. Die in dieser vereinfachten Überlegung getroffene Annahme einer Belastung durch eine Einzelkraft ergibt eine Singularität am Pol der schwach gekrümmten Platte. Für das FE-Modell wurde daher die Krafteinleitung über ein angepreßtes Kugelsegment gewählt. Hierdurch ergeben sich Unterschiede in der Plattenbelastung im Krafteinleitungsbereich, die im Bereich A zu den zu beobachtenden Abweichungen der Querschubverläufe führen. Für die Konvergenzbetrachtungen wurden die numerisch ermittelten Querschubspannungen in der Plattenmittelfläche mit den nach Gleichung (8.3) zu erwartenden Spannungen verglichen (Abb. 8.7). Die Betrachtung zeigt, daß das Modell 4 als ausreichend fein

Abbildung 8.7: Querschubverlauf in radialer Richtung über die Pfadlänge S_{11} .

diskretisiert angesehen werden kann. Die nachfolgend dargestellten numerischen Berechnungsergebnisse wurden mit diesem Modell erzeugt.

8.7.2 Berechnungsergebnisse

Abbildung 8.8: Verschiebungsverläufe u_x in radialer Richtung.

Die Geometrieabhängigkeit der Verschiebungen und Belastungen verdeutlichen die Abbildungen 8.8 und 8.9. Wie bereits im Kapitel 3.2 diskutiert, bilden sich bei einer konvex gekrümmten Platte Membrandruckspannungen aus. Im Fall der konkaven Krümmung sind dies Membranzugbeanspruchungen, die sich jeweils mit den Biegespannungen überlagern. Die Abbildung 8.10 zeigt zudem die mit der Pfadlänge S_{11} abnehmenden Querschubspannungen τ_{rz} über die Plattendicke h . Dargestellt sind die Berechnungsergebnisse an jeweils zwei Pfaden senkrecht zur Plattenmittelfläche im Abstand $r_{21} = 3,75\text{mm}$ und $r_{22} = 6,25\text{mm}$ vom Probenkörpermittelpunkt. Erkennbar ist, daß analog zu der Abbildung 8.7 und zu der Überlegung in der Abbildung 8.6 die Querschubbeanspruchungen jeweils gleicher Probenkörpergeometrien aufgrund der sich kreisförmig vergrößernden Belastungsfläche nach außen hin abnehmen. Der Vergleich der Querschubspannungsverläufe eines konkaven ($\tilde{U} = -1,2\text{mm}$), eines planen ($\tilde{U} = 0\text{mm}$) und eines konvexen ($\tilde{U} = +1,2\text{mm}$) Probekörpers verdeutlichen die sich geometrieabhängig unterschiedlich ausbildenden Querschubspannungen. Der Einfluß der Geometrie auf die Beanspruchungen und damit auf das Schädigungsverhalten wird deutlich, wenn ein Festigkeitskriterium auf die Berechnungsergebnisse angewendet wird. Mit dem Programm *Mathematica 4.1* wurden die numerisch berechneten Spannungen eingelesen und mit einem modifizierten TSAI-WU-/TSAI-HAHN-Kriterium [105, 106] gewichtet:

$$\tilde{F} \equiv F_1 \sigma_r + F_3 \sigma_z + F_{11} \sigma_r^2 + 2F_{13} \sigma_r \sigma_z + F_{33} \sigma_z^2 + F_{55} \tau_{rz}^2 = 1. \quad (8.4a)$$

Hierbei enthalten die Festigkeitskoeffizienten F_{ij} die einachsigen Bruchfestigkeiten der unidirektionalen Einzelschicht:

$$F_1 = \frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_d}, \quad F_3 = \frac{1}{Z_z} - \frac{1}{Z_d}, \quad (8.4b)$$

$$F_{11} = \frac{1}{R_z R_d}, \quad F_{33} = \frac{1}{Z_z Z_d}, \quad (8.4c)$$

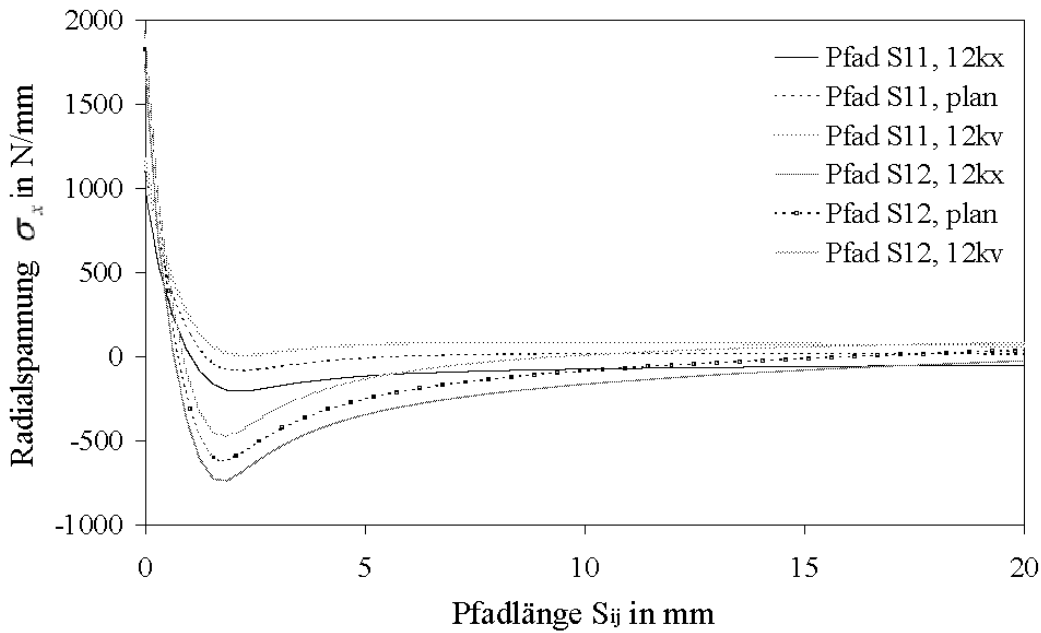


Abbildung 8.9: Radialspannungsverläufe σ_x .

$$F_{13} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{R_z R_d Z_z Z_d}}, \quad F_{55} = \frac{1}{S^2}, \quad (8.4d)$$

- mit $R_z = 2400MPa$ Zugfestigkeit in der Laminebene,
 $R_d = 1300MPa$ Druckfestigkeit in der Laminebene,
 $Z_z = 50MPa$ Zugfestigkeit senkrecht zur Laminebene,
 $Z_d = 250MPa$ Druckfestigkeit senkrecht zur Laminebene,
 $S = 109MPa$ Querschubfestigkeit.

Ein erstes Versagen wird angenommen, wenn der Ausdruck (8.4a) den Wert $\tilde{F} \geq 1$ annimmt. Eine Aussage über die Versagensform kann dabei nicht getroffen werden. Da mit diesem Kriterium kein Reißfortschritt berechnet werden kann, läßt sich nicht auf die entstehende absolute Schadensfläche schließen. Die Verhältnismäßigkeit der Belastungsgrößen lassen aber eine tendenzielle Abschätzung zu. So zeigen die Abbildungen 8.11 und 8.12, daß sich die Festigkeiten konvexer Platten im Vergleich zur ebenen Platte erhöhen. Dagegen verringert sich die Festigkeit konkaver Platten verglichen mit ebenen. Mit der Annahme einer kreisförmigen

Tabelle 8.2: Geometrie- und pfadabhängiger relativer Vergleich der Versagensflächen.

Kriterium für Bruch	Pfad	Geometrieabhängige rel. Versagensfläche		
		$\tilde{U} = -1, 2mm$	$\tilde{U} = 0mm$	$\tilde{U} = +1, 2mm$
$\tilde{F} = 1$	S_{11}	84%	100%	115%
	S_{12}	87%	100%	112%
$\tilde{F} = 0, 5$	S_{11}	79%	100%	120%
	S_{12}	80%	100%	123%

gen Versagensfläche ergeben sich bei unterschiedlichen Festigkeitswerten \tilde{F} abhängig von der

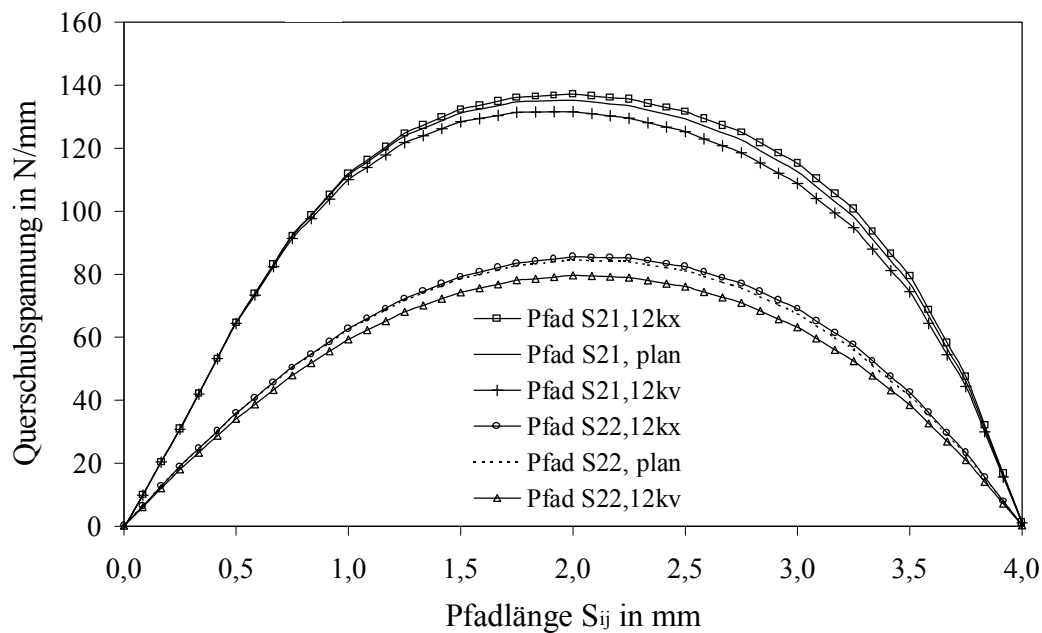
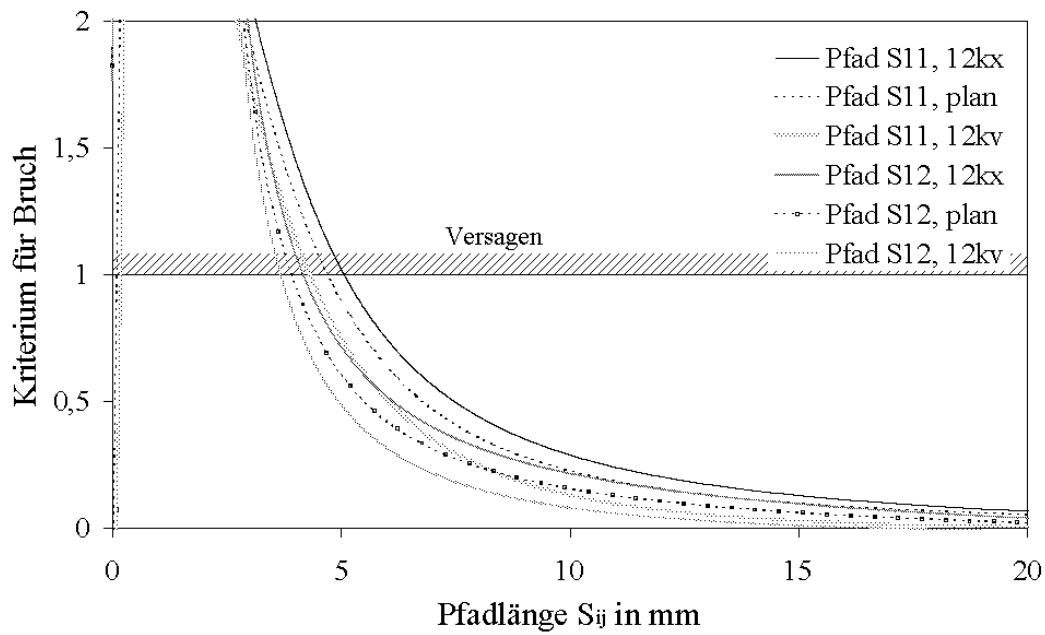
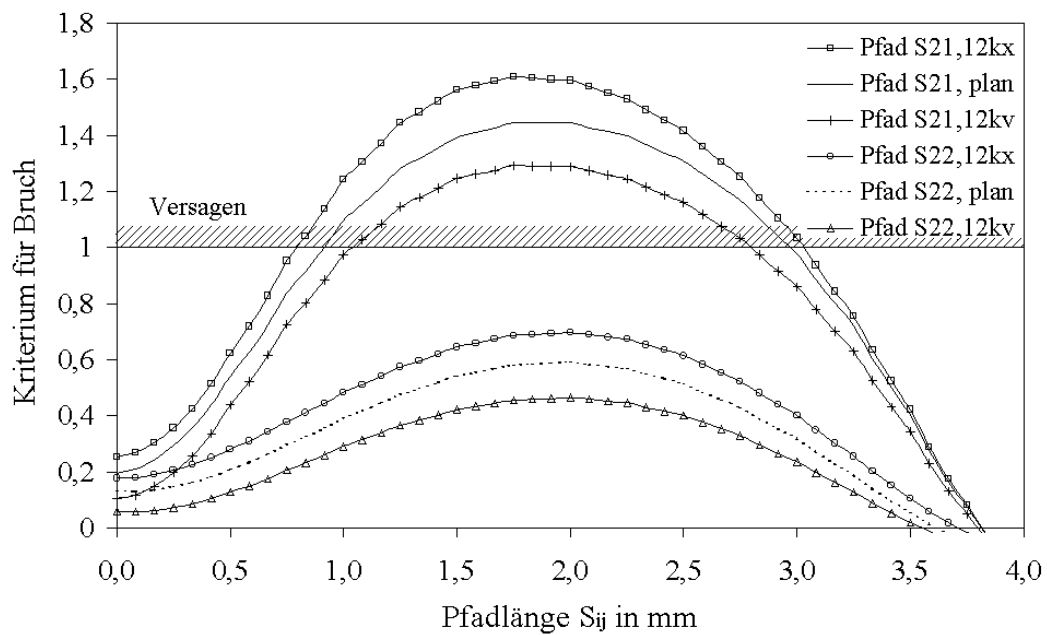


Abbildung 8.10: Querschubspannungsverläufe über die Probenkörperdicke.

Geometrie verschieden große Flächen (Tab. 8.2). Da das gewählte TSAI-WU-/TSAI-HAHN-Kriterium, wie bereits erwähnt, nicht zwischen den Versagensarten differenziert und auch keine Berechnung des Rißfortschritts erlaubt, ist davon auszugehen, daß nach der Rißinitiierung durch Spannungsumlagerungen auch Bereiche versagen, die einen Festigkeitswert kleiner Eins aufweisen. Durch den Vergleich der geometrieabhängigen Festigkeitswerte \tilde{F} läßt sich somit zumindest ein tendentielles Schädigungsverhalten vorhersagen. Die Berechnungsergebnisse zeigen die im Experiment beobachtete Tendenz, daß die Probenkörpergeometrie einen wesentlichen Einfluß auf die Art und Größe der Plattenbeanspruchung und damit auf das Schädigungsverhalten schwach gekrümmter Strukturen besitzt. So kann aber bereits mit einem einfachen Schädigungskriterium, wie das hier gewählte TSAI-WU-/TSAI-HAHN-Kriterium, dargestellt werden, daß bei einer konvex belasteten Platte die Schädigungsfläche im Vergleich zur ebenen Platte ansteigt. Demgegenüber wirken die konkav belasteten Probekörper im Vergleich zur ebenen Platte deutlich schadenstoleranter.

Abbildung 8.11: Festigkeitsverläufe in radialer Richtung über die Pfade S_{11} und S_{12} .Abbildung 8.12: Festigkeitsverläufe der Pfade S_{21} und S_{22} über die Probenkörperdicke.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Zur phänomenologischen Klärung des Geometrieinflusses schwach gekrümmter Strukturen auf das Impactverhalten faserverstärkter Kunststoffplatten wurde eine experimentell-analytische Vorgehensweise gewählt. Die Betrachtung bestehender Plattentheorien und die Formulierung neuer Lösungen diente der Beantwortung der Problemstellung. Ergänzend wurde an einem achsensymmetrischen, dreidimensionalen Finite-Element-Modell der dreidimensionale Spannungszustand betrachtet.

Der erste Teil der Arbeit zeigt einen Weg zur Berechnung isotroper und anisotroper Platten auf, wobei die Herleitung der ausgewählten Plattentheorien im Kapitel 3 und die analytische Beschreibung faserverstärkter Lamine im Kapitel 4 der Hinführung zur Problemlösung diente. Zur allgemeinen Analyse des Geometrieinflusses von schalenartigen Flächentragwerken auf das sich ausbildende Verzerrungs- und Spannungsfeld wurde die KIRCHHOFFSche Plattentheorie auf die Theorie schwach gekrümmter Platten bzw. flacher Schalen erweitert. Die Bedeutung der Querschubberücksichtigung bei Laminaten wurde eingehend untersucht. Für die Annahme einer quasi-statischen Beanspruchung, wie sie im Fall des Niedergeschwindigkeitsimpacts angenommen werden kann, wurde ausgehend von einer Idee nach SZABO [101] eine Möglichkeit skizziert, die Maximaldurchbiegung bei einer Schlagbeanspruchung abzuschätzen. Der vorgestellte Weg erlaubt dabei die Berücksichtigung unterschiedlicher Theorien, wie sie zuvor hergeleitet worden sind.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde der geometrische Einfluß schwach gekrümmter Probenkörper auf das Impactverhalten und die Schadenstoleranz untersucht. Hierzu wurden, ausgehend von dem Standardimpactversuch, in zunächst plane Probenkörper mit den seitlichen Abmessungen von $150\text{mm}\times 100\text{mm}\times 4\text{mm}$ und einem quasi-isotropen Lagenaufbau Kugelsegmente einlamiert. Sowohl plane als auch schwach gekrümmte Probenkörper wurden dann definierten Schlagbeanspruchungen in einer instrumentierten Fallbolzenanlage ausgesetzt. Die Ergebnisse der Impactversuche wurden ausgewertet und in Beziehung zur Krümmung der Plattenmittelfläche respektive zur Überhöhung gesetzt. Es zeigte sich, daß der Einfluß der Probenkörperkrümmung auf das Impact- und Schadensverhalten nicht zu vernachlässigen ist. Konkav belastete Probenkörper wiesen im Experiment eine sehr viel größere Schädigung auf als plane. Demgegenüber stellte sich der Impact auf konkave Probenkörper im Vergleich

zu planen als deutlich schadenstoleranter dar. Dieser Geometrieinfluß auf die Schadenstoleranz faserverstärkter Kunststoffe verstärkte sich mit der Erhöhung der Impactenergie. Vergleichend wurde der Einfluß der Lagerungsarten bei sonst gleichen Impactbedingungen untersucht. Die Art der Einspannung bestimmt die Verformbarkeit der Platte und damit den Impact- und Schädigungsverlauf. Fest eingespannte Probenkörper zeigten sich im Experiment tendentiell impacttoleranter als halb-gelenkig gelagerte.

Der dritte Teil der Arbeit diskutiert die analytischen und experimentellen Ergebnisse. Der Einfluß der Querschub- und Membranbeanspruchung auf das Impactverhalten faserverstärkter Kunststoffe wird als wesentlicher Faktor erkannt. Es zeigt sich, daß bei den hier verwendeten Probenkörperabmessungen und den vorliegenden Randbedingungen zur Berechnung der Plattenverformung und des Spannungszustands die Anwendung einer schubweichen Laminattheorie erforderlich ist. Zur phänomenologischen Klärung des Geometrieinflusses sind die hergeleiteten Zusammenhänge der schwach gekrümmten Platte und der Querschubspannungen aus der klassischen Laminattheorie ausreichend. Das sich bei einem Impact ausbildende dreidimensionale Spannungsfeld wird in Abhängigkeit von der Krümmung bzw. der Überhöhung des Probekörpers analysiert. Schon eine geringe Wölbung ist ausreichend, um einen Spannungszustand mit typischem Schalencharakter zu erreichen. Eingeprägte transversale Lasten werden dann nicht ausschließlich über Querkräfte und Momente sondern über Membrankräfte abgetragen. Die durch den Schalencharakter hervorgerufenen Membranbeanspruchungen beeinflussen den Anteil an Querschubspannungen. In Abhängigkeit von der Wölborientierung führen diese Membranbeanspruchungen zu einer Verbesserung oder Reduzierung der Schadenstoleranz. Es stellt sich heraus, daß konvexe Laminatstrukturen einen größeren Querschubanteil aufweisen als plane und konkave (s. Kap. 8.5, 8.7).

Der Einfluß der Probenkörpergeometrie auf das Schädigungsverhalten faserverstärkter Kunststoffe ist generell von großer Bedeutung, da die Untersuchung der Schadenstoleranz der Faserverbundwerkstoffe nach den geltenden Normen an planen Probenkörpern erfolgt. Reale Strukturen weisen aber überwiegend konvexe Geometrien auf. Somit ist die Übertragbarkeit der im Experiment ermittelten Impacttoleranz des Faserverbundwerkstoffs auf reale Strukturen nur eingeschränkt gültig. Die gewonnenen Erkenntnisse und Vorstellungen über die Geometrieabhängigkeit des Schädigungsverlaufs und der damit verbundenen Schädigungsgröße ermöglichen die Einschätzung der Schadenstoleranz faserverstärkter Kunststoffstrukturen bei baulichen Veränderungen, der Variation der Impactparameter oder der Randbedingungen.

Ausblick

Die vorliegende Arbeit zeigt und erklärt phänomenologisch den Einfluß unterschiedlicher Krümmungen auf den Impactverlauf und die Schadenstoleranz bei faserverstärkten Kunststoffplatten. Die gewonnenen Erkenntnisse sind in weiteren Forschungsarbeiten in geeignete Versagensmodelle zu integrieren. In analytischen Berechnungen oder bei der numerischen Simulation mit angepaßten Finite-Elemente-Codes ist die Eignung geeigneter Materialmodelle, die die für das Schädigungsverhalten von Laminaten wesentlichen Beanspruchungen in Dickenrichtung mit berücksichtigen, zu untersuchen. Die experimentellen Ergebnisse dieser Arbeit können dabei als Grundlage zur Modellverifikation herangezogen werden. Durch weitere Versuche ist zu klären, ob sich der Geometrieinfluß impactbelasteter Faserverbunde in eine einfache Formel fassen läßt, so daß sich die Impacttoleranz realer Strukturen über die Krümmung und die im Experiment an planen Probenkörpern ermittelten Kennwerte abschätzen läßt. Zum experimentellen Nachweis der Bedeutung von Membranlasten auf die Ausbildung von Querschubspannungen und damit auf die Ausprägung der Schadenstoleranz bei Schlagbeanspruchung sind ausführliche Untersuchungen durchzuführen. Generell ist zu prüfen, ob sich die gefundenen Zusammenhänge auf das Schädigungsverhalten faserverstärkter Kunststoffe bei Hochgeschwindigkeitsimpacts übertragen lassen.

Anhang A

Koordinatentransformation

Die Drehtransformationsmatrizen $[T_\sigma]$ bzw. $[T_\varepsilon]$ transformieren die Spannungen $\{\bar{\sigma}\}$ bzw. Verzerrungen $\{\bar{\varepsilon}\}$ des übergeordneten globalen Koordinatensystems in die Spannungen $\{\sigma\}$ bzw. Verzerrungen $\{\varepsilon\}$ des lokalen UD-Koordinatensystems der k -ten Schicht als mathematisch positive Drehung um die z -Achse.

Tabelle A.1: Transformationen der Spannungen und Verzerrungen.

lokales KS \leftarrow globales KS	globales KS \leftarrow lokales KS
$\{\sigma\} = [T_\sigma]\{\bar{\sigma}\}$	$\{\bar{\sigma}\} = [T_\sigma]^{-1}\{\sigma\}$
$\{\varepsilon\} = [T_\varepsilon]\{\bar{\varepsilon}\}$	$\{\bar{\varepsilon}\} = [T_\varepsilon]^{-1}\{\varepsilon\}$

Tabelle A.2: Transformationen der Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen.

lokales KS \leftarrow globales KS	globales KS \leftarrow lokales KS
$[C] = [T_\sigma][\bar{C}][T_\sigma]^T$	$[\bar{C}] = [T_\sigma]^T[C][T_\sigma]$
$[S] = [T_\varepsilon][\bar{S}][T_\varepsilon]^T$	$[\bar{S}] = [T_\varepsilon]^T[S][T_\varepsilon]$

Wobei allgemein gilt:

$$[T_\sigma]^T = [T_\varepsilon]^{-1}.$$

Transformationsmatrizen in zweidimensionaler Formulierung:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & -2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \sin(\varphi) & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$[T_\sigma]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & -2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \sin(\varphi) & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & -\cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ -2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$[T_\varepsilon]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & -\cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & -2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

Transformationsmatrizen in dreidimensionaler Formulierung:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -\cos(\varphi) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$[T_\sigma]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ \cos(\varphi) \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$[T_\varepsilon]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & \sin^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & -\cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & -2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}$$

Literaturverzeichnis

- [1] ADAMSON, M.J.: *Thermal Expansion and Swelling of Cured Epoxy Resins used in Graphite/Epoxy Composite Material*. Journal of Material Science, No. 15, pp. 1736-1745, 1980
- [2] ALTENBACH, H.; ALTENBACH, J.; NAUMENKO, K.: *Ebene Flächentragwerke. Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Springer-Verlag, Berlin (u.a.), 1998
- [3] ALTENBACH, H.; ALTENBACH, J.; RIKARDS, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke, Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Stuttgart, Halle/Magdeburg/Riga, 1996
- [4] ALTSTÄDT, V.; HEYM, M., EHRENSTEIN, G.W.; ORTH, F.: *Einfluß des Matrixtyps auf die statischen und dynamischen Eigenschaften von polymeren Hochleistungsverbundwerkstoffen - Teil 1*. Bundesministerium für Forschung und Technologie, Forschungsbericht 03M1010, Material- und Rohstoffforschung, 1990
- [5] ASHTON, J. E.; WHITNEY, J. M.: *Theory of Laminated Plates*. Technomic Publishing, Stamford, 1970
- [6] BARTOSCH, H.: *Verbesserung des Zwischenfaserbruchverhaltens von CFK-Laminaten bei praxisrelevanten Belastungen durch thermomechanische Behandlung*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 277, Düsseldorf: VDI, 1998; zugleich Dissertation, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, 1997
- [7] CANTWELL, W. J.; MORTON, J.: *Comparison of the low and high velocity impact response of CFRP*. Composites, Vol. 20, No. 6, pp. 545-551, 1989
- [8] CHOI, H. Y.; DOWNS, R. J.; CHANG, F.-K.: *A New Approach toward Understanding Damage Mechanisms and Mechanics of Laminated Composites Due to Low-Velocity Impact: Part I - Experiments*. Journal of Composite Materials, Vol. 25, pp. 992 - 1011, 1991
- [9] CHOI, H. Y.; WU, H.-Y. T.; CHANG, F.-K.: *A New Approach toward Understanding Damage Mechanisms and Mechanics of Laminated Composites Due to Low-Velocity Impact: Part II - Analysis*. Journal of Composite Materials, Vol. 25, pp. 1012 - 1038, 1991

- [10] CHRISTOFOROU, A. P.; SWANSON, S. R.: *Strength Loss in Composite Cylinders Under Impact*. Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 110/181, pp. 180-184, 1988
- [11] CLARK, G.: *Modelling of Impact Damage in Composite Laminates*. Composites, Vol. 20, pp. 209-214, 1989
- [12] DAVIES, G. A. O., ZHANG, X.; ZHOU, G.; WATSON, S.: *Numerical modelling of impact damage*. Composites, Vol. 25, No. 5, pp. 342-350, 1994
- [13] EHRENSTEIN, G. W.: *Kunststoff-Schadensanalyse: Methoden und Verfahren*. Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1992
- [14] EHRLICH, I.: *Gekrümmte Platten aus faserverstärktem Kunststoff (FVK) unter Impact-Belastung*. Vortrag am Institut für Mechanik, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, 2002
- [15] EHRLICH, I.: *Impactverhalten faserverstärkter Kunststoffe*. Vorträge beim Seminar *Einführung in die Technologie der Faserverbundwerkstoffe*. in Zusammenarbeit vom Wehrwissenschaftlichen Institut für Werk-, Explosiv- und Betriebsstoffe Erding (WIWEB), der Universität der Bundeswehr München und der MAN Technologie AG Augsburg, Erding, 2003 und 2004
- [16] EHRLICH, I.; WOLFRUM, J.; GEBBEKEN, N.: *Damage Behaviour of Curved Plates of Fibre-Reinforced Plastics*. Submitted to Composites Science and Technology, Elsevier-Verlag, 2004
- [17] EMMERLING, F. A.: *Höhere Technische Mechanik I*. Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Institut für Mechanik, 1994
- [18] EMMERLING, F. A.: *Ebene Flächentragwerke I-III*. Persönliche Mitteilung, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Institut für Mechanik, Neubiberg, 1996
- [19] ERNST, A.: *Digitale Längen und Winkelmeßtechnik: Positionsmeißsysteme für den Maschinenbau und die Elektronikindustrie*. HEIDENHAIN, 3. Auflage, Verlag Moderne Industrie, Landsberg/Lech, 1998
- [20] ESCHENAUER, H.; OLHOFF, N.; SCHNELL, W.: *Applied Structural Mechanics. Fundamentals of Elasticity, Load-bearing Structures, Structural Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997
- [21] ESCHENAUER, H.; SCHNELL, W.: *Elastizitätstheorie - Formel- und Aufgabensammlung*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1994
- [22] FAHLBUSCH, G.: *Leichtbau I*. HT 1997, Begleitmaterial zu den Vorlesungen, persönliche Mitteilung, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Institut für Leichtbau, Neubiberg, 1997
- [23] FLÜGGE, W.: *Stresses in Shells*. Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973

- [24] FLÜGGE, W.: *Statik und Dynamik der Schalen*. 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981
- [25] FRIEDRICH, K.: *Fractographic Analysis of Polymer Composites*. Application of Fracture Mechanics to Composite Materials, Elsevier Science Publishers B.V., 1989
- [26] FRISCHBIER, J.: *Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte*. Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mechanik, Institutsmitteilung Nr. 51, Dissertationsschrift, 1987
- [27] GEBBEKEN, N.: *Eine Fließgelenktheorie höherer Ordnung für räumliche Stabtragwerke. (Zugleich ein Beitrag zur historischen Entwicklung.)* Dissertation, Universität Hannover, Institut für Statik, Hannover, 1988
- [28] GEBBEKEN, N.: *Zur Untersuchung des linearen Tragverhaltens von Faserverbundkonstruktionen mittels numerischer Methoden*. Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik und Statik, Habilitationsschrift, Neubiberg, 1996
- [29] GEBBEKEN, N.; RUPPERT, M.: *Ein Beitrag zur Simulation von Baustrukturen unter hochdynamischer Kurzzeitbeanspruchungen*. Bauingenieur 11 (1999) 461-470
- [30] GEBBEKEN, N.: *Numerische Methoden - Finite Elemente für Platten*. Vorlesung, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Institut für Mechanik und Statik, Neubiberg, Wintersemester 2003
- [31] GEBBEKEN, N.: *Materialsymmetrien, Werkstoffgesetze*. Seminar *Einführung in die Technologie der Faserverbundwerkstoffe* vom 21.-23.10.2003 in Zusammenarbeit der Universität der Bundeswehr München, dem Wehrwissenschaftlichen Institut für Werk-, Explosiv- und Betriebsstoffe und der MAN-Technologie im Auftrag der Gesellschaft Pro Academia, Vortrag, Erding, 2003
- [32] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. 6. Auflage, Springer-Verlag, Wien, 1974
- [33] GOLOVOY, A.; OENE, H. VAN: *The Influence of Temperature on the Impact Behavior of Unidirectional Glass Fiber-Epoxy Composite*. Polymer Composites, Dearborn, Michigan, 1986
- [34] GOSSE, J. H.; MORI, P. B. Y.: *Impact Damage Characterization of Graphite/Epoxy Laminates*. 3rd ASC Conference on Composite Materials, Proceedings, pp. 344-353, Seattle, 1988
- [35] GRESZCZUK, L. B.: *Response of Isotropic and Composite Materials to Particle Impact*. *Foreign Object Impact Damage to Composites*, ASTM STP 568, American Society for Testing and Materials, 1975, pp. 183-211
- [36] GROSS, D.; HAUGER, W.; SCHNELL, W.: *Technische Mechanik 2, Elastostatik*. 2. Auflage, Springer Lehrbuch, Darmstadt, 1995
- [37] GROSS, D.; HAUGER, W.; SCHNELL, W.; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik 4, Hydromechanik, Elemente der Höheren Mathematik, Numerische Methoden*. 2. Auflage, Springer Lehrbuch, Darmstadt, 1995

- [38] HAKE, E.; MESKOURIS, K.: *Statik der Flächentragwerke*. Springer-Verlag, Aachen, 2001
- [39] HASHIN, Z.: *Failure criteria for unidirectional fiber composites*. Journal of Applied Mechanics, No. 47, pp 329-334, 1980
- [40] HERTZ, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 92, S. 156-171, 1882
- [41] HEUTLING, F.: *Mikrofraktographie an CFK-Werkstoffen als Instrument zur Charakterisierung von Materialeigenschaften und zur Interpretation von Versagensphänomenen*. Dissertation, Fortschritt-Berichte VDI, Düsseldorf, 2000
- [42] HIERMAIER, S.; RIEDEL, W.; HAYHURST, C.J.; CLEGG, R.A.; WENTZEL, C.M.: *Advanced Material Models for Hypervelocity Impact Simulations*. EMI-Report No. E 43/99, 1999
- [43] HILGER, W.: *Zerstörungsfreie Prüfung von Faserverbundwerkstoffen. Schwerpunkt: Bildgebende Ultraschallprüftechnik*. In *Entwurf, Berechnung und Fertigung von Leichtbaustrukturen aus Faserverbundwerkstoff*. Seminar der Carl-Cranz-Gesellschaft e.V., Braunschweig, 2000
- [44] HILGER, W.: *HFUS 2000 - Benutzerhandbuch, Hochauflösendes 120MHz-Ultraschall-Inspektionssystem für High-Tech-Werkstoffe*. Ingenieurbüro Dr. Hilger, Braunschweig, 2001
- [45] HULL, D.; YI BING SHI: *Damage mechanism characteriazation in composite damage tolerance investigations*. Composite Structures, Vol. 23, pp. 99-120, 1993
- [46] JONES, R. M.: *Mechanics of Composite Materials*. Second edition, Taylor & Francis, Blackburg, Virginia, 1998
- [47] JOSHI, S. P.; SUN, C. P.: *Impact Induced Fracture in a Laminated Composite*. Journal of Composite Materials, Vol. 19, pp. 51-66, 1985
- [48] KRÖBER, I.: *Auswirkungen von Impacts auf CFK-Strukturen*. DGLR-Bericht 91-018, Leichtbaustrukturen unter kurzzeitiger Beanspruchung (Impact, Crash), DGLR-Symposium, Bremen, 1991
- [49] LARSON, F.: *Damage Tolerance of a sticked carbon/epoxy Laminate*. Composites Part A, pp. 922-934, 1997
- [50] LEE, S. M.; ZAHUTA, P.: *Instrumented Impact and Static Indentation of Composites*. Journal of Composite Materials, Vol. 25, pp. 204-222, Anaheim, 1989
- [51] LIU, D.: *Impact-Induced Delamination - A View of Bending Stiffness Mismatching*. Journal of Composite Materials, Vol. 22, pp. 674-692, 1988
- [52] LIU, S.; KUTLU, Z.; CHANG, F. K.: *Matrix cracking and delamination in laminated composite beams subjected to a transverse concentrated line load*. Journal of Composite Materials, Vol. 27, No. 5, pp. 436-470, 1993

- [53] MAIER, G.: *Festigkeitssteigerung von ebenen Hochleistungsfaserverbund-Laminaten mit polymerer Matrix durch thermomechanische Behandlung*. Dissertation, Deutsche Hochschulschriften, Verlag Hänsel-Hohenhausen, Egelsbach, Frankfurt, Washington, 1994
- [54] MORLO, H.: *Dynamisches Verhalten von Verbundwerkstoffen*. Wehrwissenschaftliches Institut für Materialuntersuchungen (WIM) Erding in Zusammenarbeit mit dem Établissement Technique Central de l'Armément (ETCA) Paris im Auftrag des Bundesamtes für Wehrtechnik und Beschaffung (BWB) Koblenz, Erding/Paris/Koblenz, 1991
- [55] MORLO, H.: *Untersuchungen zum Impact-Verhalten von kohlenstoffverstärkten Kunststoffen*. DGLR-Bericht 91-04, Leichtbaustrukturen unter kurzzeitiger Beanspruchung (Impact, Crash), DGLR-Symposium, Bremen, 1991
- [56] MORLO, H.: *Impactverhalten von Verbundwerkstoffen unter dem Einfluß äußerer Spannungen*. Materialprüfung, 34. Jahrgang, Heft 3, S. 74-77, 1992
- [57] MORLO, H.; PAULISCH, D.: *Schadenstoleranz von CFK*. Materialprüfung 37, Carl Hanser Verlag, München, 1995, pp. 74-77
- [58] MOSER, K.: *Faser-Kunststoff-Verbund, Entwurfs- und Berechnungsgrundlagen*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1992
- [59] N. N.: *AITM 1.0010: Fiber Reinforced Plastics, Determination of compression strength after impact*. Airbus Industrie Test Method, Blagnac Cedex, France, 1994
- [60] N. N.: *Instrumented Impact Testing*. ASTM - American Society for Testing and Materials, STP 563, Tallahassee, 1974
- [61] N. N.: Boeing Specification BSS 7260
- [62] N. N.: *Schadensanalyse an Probekörper mit Schlagschaden durch bildgebende Ultraschallverfahren; A-, B-, C- und Bildverfahren*. Arbeitsanweisung Wehrwissenschaftliches Institut für Werk-, Explosiv- und Betriebsstoffe (WIWEB), Qualitätsmanagement-Handbuch, Erding, 1998
- [63] N. N.: *DGZfP-Richtlinie US 2: Bildgebende Ultraschallprüfung von Neuen Werkstoffen*. Deutsche Gesellschaft für Zerstörungsfreie Prüfung e.V., Unterausschuß Ultraschallprüfung Neuer Werkstoffe im Ausschuß für Ultraschallprüfung, Berlin, 1993
- [64] N. N.: *DIN 29 971: Luft- und Raumfahrt - Unidirektionalgelege-Prepreg aus Kohlenstoffasern und Epoxidharz. Technische Lieferbedingungen*. Normenausschuß Materialprüfung (NMP) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1991
- [65] N. N.: *DIN 50 014: Klimate und ihre technische Anwendung - Normalklima*. Normenausschuß Materialprüfung (NMP) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1985

- [66] N. N.: *DIN 51 005: Thermische Analyse (TA) - Begriffe*. Normenausschuß Materialprüfung (NMP) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1999
- [67] N. N.: *DIN 53 479: Prüfung von Kunststoffen und Elastomeren - Bestimmung der Dichte*. Normenausschuß Kunststoffe (FNK) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1976
- [68] N. N.: *DIN 53 765: Prüfung von Kunststoffen und Elastomeren - Thermische Analyse - Dynamische Differenzalorimetrie (DDK)*. Normenausschuß Kunststoffe (FNK) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1994
- [69] N. N.: *DIN 65 561: Luft- und Raumfahrt - Faserverstärkte Kunststoffe - Prüfung von multidirektionalen Laminaten - Bestimmung der Druckfestigkeit nach Schlagbeanspruchung*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1991
- [70] N. N.: *DIN EN 2564: Luft- und Raumfahrt - Kohlenstofffaser-Laminat - Bestimmung der Faser-, Harz- und Porenanteile*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1998
- [71] N. N.: *DIN EN 2565: Luft- und Raumfahrt - Herstellen von CFK-Prüflaminaten*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1993
- [72] N. N.: *DIN EN 6038: Luft- und Raumfahrt - Faserverstärkte Kunststoffe - Bestimmung der Restdruckfestigkeit nach Schlagbeanspruchung*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 1996
- [73] N. N.: *DIN EN 7000-11: Luft- und Raumfahrt - Nichtmetallische Werkstoffe - Regeln für die Abfassung und Gestaltung von Werkstoffnormen - Teil 11: Prepregs*. Normenstelle Luftfahrt (NL) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag, Berlin, 2000
- [74] N. N.: *Aushärtezyklus für Monolithbauteile, hergestellt aus HEXCEL 8552 Prepreg-Material*. Datenblatt der Fa. HEXCEL COMPOSITES, 2002
- [75] N. N.: *HexPly 8552 - Epoxy matrix - Product Data*. Datenblatt der Fa. HEXCEL COMPOSITES, FTA 072a, 2003
- [76] N. N.: *HexPly 8552/IM7 - Unidirectional Static Material Properties*. Materialdatenblatt der Fa. HEXCEL COMPOSITES, 2001
- [77] O'BRIEN, T. K.: *Analysis of local delaminations and their influence on composite laminate behavior*. Delamination and Debonding of Materials, ASTM-spezial Technical Publication 876, Philadelphia, 1985
- [78] PETRY, D.: *Theoretische, numerische und experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Beulverhalten von Rechteckplatten*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 277, Düsseldorf: VDI, 2002; zugleich Dissertation, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, 2002

- [79] PUCK, A: *Einführen in das Gestalten und Dimensionieren*. Beiheft zur Fachzeitschrift „Kunststoffberater“, 1969
- [80] PUCK, A: *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis*. Hanser-Verlag, München, Wien, 1996
- [81] RÅDE, L.; WESTERGREN, B.: *Springers mathematische Formeln*. Springer-Verlag, 2. Auflage, München, 1997
- [82] RAECKE, I.: *Flächentragwerke I/II*. Vorlesungsmanuskript, Otto-von-Guericke-Universität, Fakultät für Maschinenbau, Institut für Mechanik, Magdeburg, 2001
- [83] RAPP, H.: *Inhomogene Balken unter Temperatur-, Zug- und reiner Biegebeanspruchung*. Dissertation an der Technischen Universität München, 1988
- [84] RAPP, H.: *Faserverbundbauweise in Konstruktion und Berechnung*. Vorlesung, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Institut für Leichtbau, Neubiberg, Frühjahrstrimester 2002
- [85] RAPP, H.: *Strukturdynamik*. Vorlesung, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Institut für Leichtbau, Neubiberg, Wintertrimester 2003
- [86] REDDY, J. N.; OCHOA, O. O.: *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Kluwer Academic Publishers 1992, Dordrecht (u.a.), 1992
- [87] REDDY, J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theorie and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997
- [88] REISSNER, E.: *Finite Deflections of Sandwich Plates*. Journal of the Aeronautical Sciences 15, No. 7, pp. 435-440, 1948
- [89] RIEDEL, G.; TRAWIEL, P.: *Thermische Analyse zur Schadensaufklärung*. In 7. Hochschulpraktikum „Schadensanalyse an Kunststoffen“, Lehrstuhl für Kunststofftechnik, 2002
- [90] ROHWER, K.: *Improved transverse shear stiffness for layered finite elements*. Forschungsbericht 88-32, DFVLR Braunschweig, 1988
- [91] ROHWER, K.; GEIER, B.: *Querschubsteifigkeiten geschichteter Faserverbundstrukturen*. HSB: Handbuch für Strukturberechnung 37103-03, S. 1-7, Braunschweig, 1991
- [92] ROHWER, K.: *Computational Models for Laminated Composites*. Z. Flugwiss. Weltraumforschung 17, 1993, S. 323-330
- [93] ROHWER, K.: *Modelle und Methoden zur Berechnung von Laminaten aus unidirektionalen Faserverbunden*. Otto-von-Guericke-Universität, Fakultät für Maschinenbau, Habilitationsschrift, Magdeburg, 1996
- [94] ROHWER, K.: Persönliche Mitteilung, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., Institut für Strukturmechanik, Braunschweig, 2002

- [95] ROLFES, R.: *Schichtentheorie und deren Anwendung*. in *Entwurf, Berechnung und Fertigung von Leichtbaustrukturen aus Faserverbundwerkstoff*. Seminar der Carl-Cranz-Gesellschaft e.V., Braunschweig, 2000
- [96] RUSSEL, A.J.; STREET, K.N.: *Factors Affecting the interlaminar Fracture Energy of Graphite/Epoxy Laminates*. Hayashi, T.; Kawata, K., Umekawa, S.: *Process in Science and Engineering of Composites, ICCM-IV*, Tokyo, 1982
- [97] SCHEMME, M.: *Sicherung der Produktqualität bei der Herstellung und Verarbeitung von SMC-Werkstoffen*. Technisch-wissenschaftlicher Bericht, zugleich Dissertation, Lehrstuhl für Kunststofftechnik, Universität Erlangen–Nürnberg, 1997
- [98] SCHNELL, W.; ESCHENAUER, H.: *Elastizitätstheorie II - Schalen*. Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich, 1984
- [99] SPRINGER, G. S.: *Environmental Effects on Composite Materials*. Technomic Publishing Company, Inc., 1981
- [100] SRINIVASAN, K.; JACKSON, W. C.; SMITH, B. T.; HINKLEY, J. A.: *Characterisation of Damage Modes in Impacted Thermoset and Thermoplastic Composites*. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 11, pp. 1111-1126, 1992
- [101] SZABÓ, I.: *Höhere Technische Mechanik*. 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2001
- [102] TAN, T. M.; SUN, C. T.: *Use of Statical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates*. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52/7, pp. 6-12, 1985
- [103] TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. J.: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1951
- [104] TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S.: *Theory of Plates and Shells*. 2nd edition, McGraw-Hill, New York (u.a.), 1987
- [105] TSAI, S. W.; WU, E. M.: *A General Theory of Strength for Anisotropic Materials*. *Journal of Composite Materials*, Vol. 5, 1971
- [106] TSAI, S. W.; HAHN, H. T.: *Introduction to Composite Materials*. Dayton and St. Louis, 1980
- [107] TSAI, S. W.: *Composites Design, Think Composites*. Dayton, 1988
- [108] WOLFRAM, S.: *The Mathematica Book*. Mathematica Version 4, 4th Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1999
- [109] WILLIAMS, K. V.; VAZIRI, R.: *Application of a damage mechanics model for predicting the impact response of composite materials*. *Computers and Structures* 79, pp. 997-1011, 2000
- [110] WOLFRUM, J.: *Einfluß der Verarbeitung auf das Langzeitverhalten duroplastischer Hochleistungsverbundwerkstoffe*. Technisch-wissenschaftlicher Bericht, zugleich Dissertation, Lehrstuhl für Kunststofftechnik, Universität Erlangen–Nürnberg, 1999

- [111] ZASTRAU, B. W.; NEUBERG, C.; SCHLEBUSCH, R.: *Ebene Flächentragwerke*. Vorlesungsmanuskript, Technische Universität Dresden, Fakultät für Bauingenieurwesen, Institut für Baumechanik und Bauinformatik, Dresden, 1999

- [112] ZHOU, G.; GREAVES, L. J.: *Damage resistance and tolerance of thick laminated woven roving GFRP plates subjected to low-velocity impact*. in *Impact Behaviour of Fibre-Reinforced Composite Materials and Structures*. CRC Press, Boca Raton (USA), 2000