

Universität der Bundeswehr München

Fakultät für Elektrotechnik und

Informationstechnik

Institut für Meß- und Automatisierungstechnik

Professur für Regelungstechnik



**Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung und  
Entwicklung einer Workbench**

von

Ralf Geßlein

Universität der Bundeswehr München  
Fakultät für Elektrotechnik und  
Informationstechnik

Institut für Meß- und Automatisierungstechnik  
Professur für Regelungstechnik

**Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung und  
Entwicklung einer Workbench**

von  
Dipl.-Ing. Ralf Geßlein

Vollständiger Abdruck der von der  
Fakultät für Elektrotechnik der Universität der Bundeswehr München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieur  
(Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. K. Landes  
1. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. A. Böttiger  
2. Berichterstatter: Prof. Dr.rer.nat. K. Pilzweger

Die Dissertation wurde am 18.03.2002 bei der Universität der Bundeswehr  
eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
am 27.03.2002 angenommen.

Tag der Promotion: 28.06.2002

## Danksagung

Ich freue mich, anlässlich der Fertigstellung meiner Dissertation, den Menschen aufrichtig danken zu können, die mir die vorliegende Arbeit ermöglicht und mich nach besten Kräften unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Frau Prof. Dr.-Ing. Anneliese Böttiger, die mir als wissenschaftlichem Mitarbeiter am Institut für Meß- und Automatisierungstechnik (Professur für Regelungstechnik) der Universität der Bundeswehr München die Möglichkeit gab, diese Arbeit zu verfassen. Sie war für mich sowohl in fachlicher als auch menschlicher Hinsicht eine große Stütze und stets ein guter Ratgeber. Von ihrer Erfahrung und ihrer Menschlichkeit habe ich viel profitiert.

Beim Institutspersonal möchte ich mich für die gute Zusammenarbeit bedanken. So gab Herr Dr.-Ing. H. Harrer die Anregung zu diesem Thema und leistete wichtige Vorarbeiten. Den Technikern C. Kramer und W. Häuser danke ich für deren Unterstützung vor allem in organisatorischen Belangen. Bei Herrn C. Kramer bedanke ich mich darüber hinaus für seine wertvollen technischen Ratschläge und Hilfestellungen bei diversen Problemen. Für mich wichtigster Ansprechpartner neben Frau Prof. Dr.-Ing. Anneliese Böttiger war Irene Moser. Mit ihrem geradlinigen und offenen Naturell stand sie mir stets in allen Situationen mit Rat und Tat zur Seite. Darüber hinaus hat sie meiner Arbeit in puncto Layout den „letzten Schliff“ verliehen.

Ebenso herzlich möchte ich mich bei meinen Diplomanden, Mario Haim [31], Carsten Jakob [34], Thorsten Platz [49], Lars Reckling [50], Gerd Schnell [51], Christoph Stamm [53] und Rico Thetmeyer [54] für ihre tatkräftige Unterstützung und ihr riesiges Engagement bedanken. Sie haben neben ihrer hervorragenden wissenschaftlichen Arbeit den Institutsalltag in einer belebenden Art und Weise geprägt und waren mir eine große moralische Stütze.

Herrn Prof. Dr.rer.nat. K. Pilzwegger danke ich für die Übernahme des Korreferats und das große Interesse, welches er meiner Arbeit entgegengebracht hat. Ihm verdanke ich wertvolle Hinweise. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Landes bedanke ich mich für das Angebot, im Promotionsverfahren den Vorsitz zu übernehmen. An dieser Stelle möchte ich es nicht versäumen, mich bei ihm dafür zu entschuldigen, daß ich seinem Institut stets die besten Diplomanden „weggeschnappt“ habe. Die Zusammensetzung des Prüfungsausschusses freut mich insbesondere deswegen, weil die genannten Personen langjährige Wegbegleiter meines akademischen Werdegangs sind.

Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern, die stets an mich geglaubt und mir Mut zugesprochen haben, wenn dies von Nöten war.

Zu guter letzt, aber dafür um so mehr, gebührt mein Dank meiner Lebensgefährtin Pamela, die mich in der teilweise nicht gerade einfachen Zeit großartig unterstützt hat. Für ihre Entbehrungen, ihr Vertrauen und das mir entgegengebrachte nicht zu übertreffende Maß an Verständnis danke ich ihr von ganzem Herzen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Verfahren zum Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung.....</b>	<b>5</b>
2.1	Reglerentwurf .....	6
2.1.1	Zustandsregelung nach Riccati.....	7
2.1.2	Zustandsbeobachter (Luenberger-Beobachter) .....	15
2.1.3	Beobachterregler .....	22
2.2	Modell- und Reglerreduktion.....	26
2.2.1	Modale Ordnungsreduktion.....	27
2.2.2	Balancierte Ordnungsreduktion.....	33
<b>3</b>	<b>Anwendung der Konzepte.....</b>	<b>41</b>
3.1	Simulationen am Triebwerksmodell .....	41
3.1.1	Entwicklungsgeschichte des Strahlantriebes und Stand der Technik .....	41
3.1.2	Modellbeschreibung und Streckenuntersuchung .....	47
3.1.3	Simulationen unterschiedlicher Regelungen.....	59
3.2	Simulationen am Rotormodell .....	92
3.2.1	Entwicklungsgeschichte des Hubschraubers und Stand der Technik .....	92
3.2.2	Modellbeschreibung und Streckenuntersuchung .....	96
3.2.3	Simulationen unterschiedlicher Regelungen.....	132
<b>4</b>	<b>Entwicklung einer Workbench für Ordnungsreduktion.....</b>	<b>155</b>
4.1	Zielsetzung.....	155
4.2	Bewertungskriterien.....	156
4.2.1	Bewertungskriterien im Zeitbereich.....	156
4.2.2	Bewertungskriterien im Frequenzbereich .....	158

4.3	Forderungen an die Workbench .....	159
4.3.1	Benchmarking ist Informationssammlung und –verarbeitung .....	159
4.3.2	Benchmarking ist Veränderung .....	160
4.3.3	Benchmarking ist Kommunikation .....	160
4.3.4	Meß-, Vergleichs- und Positionierungsaspekt .....	161
4.3.5	Lernaspekt .....	161
4.4	Aufbau der dynamischen Matlab-Workbench .....	161
4.5	Präsentation der Ergebnisse für ein einfaches Anwendungsbeispiel .....	165
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung .....</b>	<b>171</b>
	<b>Wichtige verwendete Symbole .....</b>	<b>173</b>
	Allgemein verwendete Symbole .....	173
	Symbole im Teil Triebwerk .....	176
	Symbole im Teil Rotormodell .....	179
	<b>Anhang .....</b>	<b>185</b>
	Daten des Triebwerks .....	185
	Daten des Rotormodells .....	191
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>195</b>



# 1 Einleitung

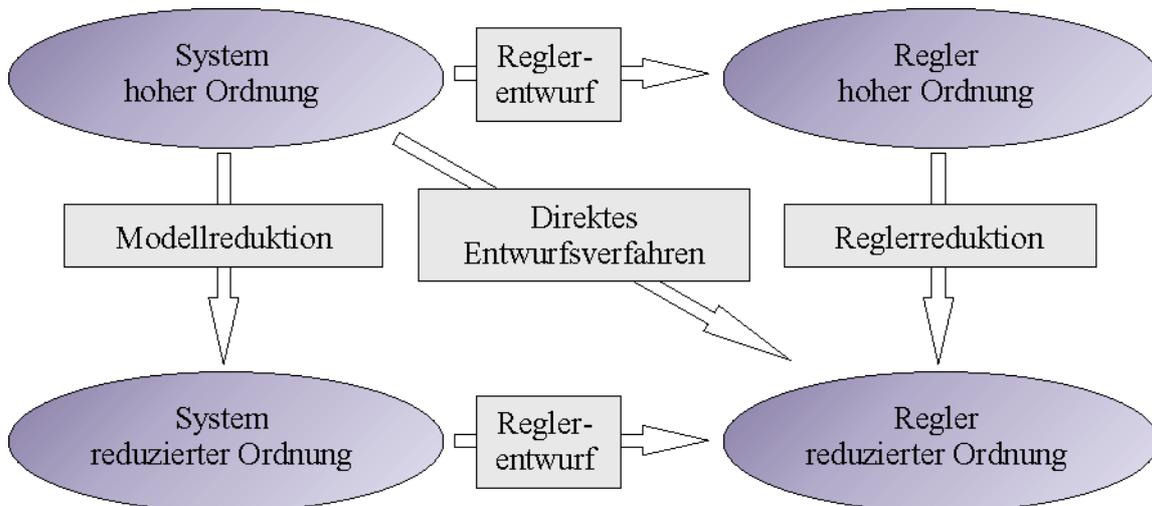
Der Entwurf von Regelungen für dynamische Systeme hoher Ordnung ist schon lange ein brisantes Forschungsthema. Der bislang übliche Weg war es, zunächst eine vereinfachte Beschreibung für den Prozeß zu finden, die die wesentlichen Eigenschaften zeigt. Das auf diese Weise erzeugte Modell hat somit eine geringere Ordnung als das Originalsystem. Die besagten wesentlichen Eigenschaften können je nach Einsatzziel variieren. Dabei ist es beispielsweise von großer Bedeutung, ob es um eine Dimensionierung geht (z.B. bei einem Triebwerk) oder ob die Effizienz verbessert werden soll. Für einen zu entwerfenden Regler ist die Dynamik mit seinen markantesten Eigenbewegungen wiederzugeben, d.h. die Reduktion erfolgt nach physikalischen Gesichtspunkten.

Erste Ansätze gab es schon um 1950, als man aus Sprungantworten oder Frequenzgängen drei Kennwerte ermittelte, um anhand von sogenannten Einstellregeln einen P-, PI- oder PID-Regler zu dimensionieren. Diese Verfahren waren sehr erfolgreich und führten im allgemeinen zu stabilen Regelkreisen.

Mit wachsenden Rechnerkapazitäten konnte man es sich leisten, die Prozesse immer detaillierter zu beschreiben und auch komplexere Regelungen zu entwerfen. Speziell für die sogenannte Zustandsregelung, die auf der dynamischen Beschreibung im Zeitbereich aufbaut, wurden viele Verfahren entwickelt (z.B. Regelung durch Polvorgabe oder optimale Regelung). Diese theoretisch so gut funktionierenden Regelungen sind in der Praxis oft nur mit großen Einschränkungen realisierbar. Zum einen stehen selten genügend Meß- und Stellgrößen zur Verfügung. Zum anderen müssen diese Regelungen, die in Digitalrechnern seriell bearbeitet werden, in Echtzeit ablaufen. Das bedeutet, daß der Regelalgorithmus innerhalb eines Tastschrittes, der nur einen Bruchteil der kleinsten zu berücksichtigenden Zeitkonstante oder Schwingungsdauer betragen darf, abgearbeitet werden muß.

Aus diesen Gründen ist das Problem der Modellreduktion zum Entwurf von Regelungen niedriger Ordnung weiterhin ein wichtiges aktuelles Forschungsthema. Bei den neueren Verfahren der Modellreduktion stehen die physikalischen Aspekte im Hintergrund. Es handelt sich eher um Algorithmen, die schematisch ablaufen. Nachdem Herr Dr.-Ing. H. Harrer in seiner Dissertation die Modellreduktion eingehend untersucht hat [32], liegt der Schwerpunkt dieser Arbeit im Bereich der Reglerreduktion. Bild 1.1 zeigt drei Wege, auf denen man von einem

System hoher Ordnung zu einem Regler niedriger Ordnung gelangt: zwei indirekte und ein direktes Verfahren. Das eine indirekte Verfahren reduziert die Ordnung des Prozesses, um dann den Regler zu entwerfen. Dieser Weg wurde bisher am intensivsten untersucht. Im zweiten indirekten Verfahren wird zuerst ein Regler hoher Ordnung entworfen und anschließend dessen Ordnung reduziert. Auch hierzu gibt es in der Literatur einige Vorschläge. Selbstverständlich ergibt sich damit auch die Frage nach dem direkten Weg. Dazu konnte nur ein Verfahren gefunden werden, die „Optimale Projektion“ [6]. Im Grunde genommen ist dieses Verfahren eine Kombination aus Modellreduktion und Reglerentwurf. Der in [6] entwickelte Algorithmus verlangt die parallele Lösung von vier Matrixgleichungen: zwei modifizierte Lyapunov-Gleichungen und zwei modifizierte, verkoppelte Riccati-Gleichungen, und ist stark interaktiv. Während bei den indirekten Verfahren Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und/oder Stabilität (Eigenwerte) in die Bewertung eingehen, wird bei der Optimalen Projektion eine idempotente Projektionsmatrix variiert. Wegen seiner Komplexität und der fehlenden ingenieurmäßigen Einsicht wird dieses Verfahren nicht weiter verfolgt.



**Bild 1.1:** Möglichkeiten zum Entwurf Regler reduzierter Ordnung

Den einzelnen Teilstrecken der indirekten Wege werden in dieser Arbeit Verfahren zugeordnet, durch deren Kombination schließlich ein Regler reduzierter Ordnung entworfen werden kann. Einige dieser Verfahren werden mathematisch detailliert beschrieben. Herauszuheben ist ein in dieser Arbeit vorgeschlagener, neuartiger Beobachterentwurf, welcher auf einer Dominanzanalyse der Eigenwerte der Regelung beruht und über ein Verfahren zur Polvorgabe automatisch die Beobachtermatrix geeignet festlegt. Die in Kapitel 2 vorgestellten Konzepte

---

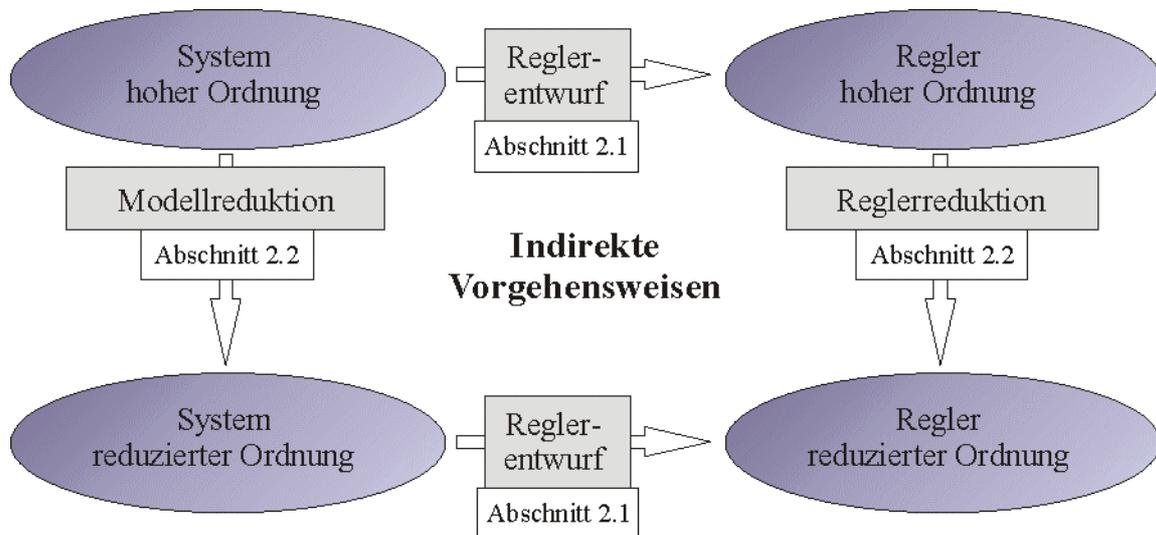
werden an einem Triebwerksmodell und dem Modell eines Rotorsystems angewendet. Dazu werden die genannten Modelle beschrieben und deren Verhalten ohne Regelung untersucht, ehe auf verschiedene Arten Regler reduzierter Ordnung entworfen sowie eingesetzt und die Ergebnisse diskutiert werden.

Da sich bei der Diskussion von Ergebnissen immer die Frage nach geeigneten Bewertungskriterien und deren Gewichtung aufdrängt, wird in dieser Arbeit ein Lösungsansatz vorgestellt, der auf dem Benchmark-Prinzip basiert. Nachdem die Ordnungsreduktion beim Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung zentralen Charakter besitzt, wurde für den Vergleich und die Bewertung unterschiedlicher Ordnungsreduktionsverfahren eine dynamische Workbench erstellt. Bei der prototypischen Realisierung dieser neuartigen Anwendung wurden die Forderungen an die Workbench direkt aus den charakteristischen Merkmalen des Benchmarking abgeleitet. Diese Thematik wurde bereits als Beitrag in der at-Automatisierungstechnik [28] veröffentlicht.



## 2 Verfahren zum Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung

Wie in Kapitel 1 erwähnt, geht es in dieser Arbeit vorrangig um die Reglerreduktion. Deshalb werden im ersten Abschnitt 2.1 Reglerentwurfsverfahren vorgestellt. Der zweite Abschnitt befaßt sich mit Reduktionsverfahren. Bild 2.1 illustriert den Inhalt dieses Kapitels. Als Entwurfskriterien werden ein quadratisches Funktional und die Eigenwerte eingesetzt. Ein Ziel ist, die Zahl der notwendigen interaktiven Eingriffe gering zu halten, oder gegebenenfalls einen automatisch ablaufenden Algorithmus zu erstellen.



**Bild 2.1:** Indirekte Vorgehensweisen zum Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung

In den folgenden Abschnitten wird der Stand der Technik hinsichtlich bestehender Verfahren dargestellt. Aufgrund der Struktur der verwendeten Modelle, liegt der Schwerpunkt dabei auf linearen Zeitbereichsverfahren. Darauf aufbauend wird die Theorie zu ausgewählten Methoden erläutert, was Grundlage für die vergleichende Simulation und die Interpretation von deren Ergebnissen in Kapitel 3 ist. Als Reglerentwurfsverfahren wurde neben einem über Polvorgabe entworfenen Zustandsregler auch auf einen vollständigen Riccati-Zustandsregler zurückgegriffen, der sich für linearisierte Mehrgrößensysteme in Zustandsraumdarstellung besonders gut eignet. Nicht zuletzt, weil dieser Reglerauslegung eine Optimierung zu Grunde liegt, welche die Vergleichbarkeit der Ergebnisse hinsichtlich Vertauschung der Aneinanderreihung von Reglerentwurf und Ordnungsreduktion gewährleistet. Aufgrund der zentralen Bedeutung des Riccati-Reglerentwurfs für diese Arbeit, ist ihm ein eigener Abschnitt (2.1.1) gewidmet. Im Unterschied zu anderen Verfahren zeichnet sich der Entwurf eines Riccati-Reglers durch seine äußerst geradlinige, jedoch keinesfalls triviale Vorgehensweise aus. Als

besonders schwierig scheint für die praktische Anwendung die Wahl geeigneter Gewichtungsmatrizen zur Festlegung eines Gütefunktional zu sein, was für die vergleichenden Untersuchungen dieser Arbeit jedoch eher eine untergeordnete Rolle spielt. Nachdem bei einem vollständigen Zustandsregler, alle Zustandsgrößen zurückgeführt werden müssen, es aber in der Realität meist nicht möglich ist alle Zustände auch zu messen, wird der Einsatz eines Zustandsbeobachters notwendig. Dieser rekonstruiert über ein Modell der Strecke auch die nichtmeßbaren Zustandsgrößen und kann ebenfalls über die Optimierung eines quadratischen Gütekriteriums, basierend auf der Theorie des Riccati-Reglers, festgelegt werden. Zum Einsatz kommt jedoch ein neuartiger Beobachterentwurf über Polvorgabe mit vorangehender Dominanzanalyse, der in Abschnitt 2.1.2 vorgestellt wird. Die entstandene Kombination aus Beobachter und Regler wird auch als Beobachterregler bezeichnet. Dabei handelt es sich um ein dynamisches System, welches durch geeignete Umformungen auf die von Regelstrecken in Zustandsraumdarstellung bekannte Struktur gebracht werden kann. Eben diese Darstellung ermöglicht schließlich die Reduktion des Reglers mit den gleichen Verfahren, wie sie auch zur Modellreduktion verwendet werden.

## 2.1 Reglerentwurf

Um einen Regler reduzieren zu können muß dieser zuvor entworfen werden. Dabei gibt es für den Reglerentwurf unzählige Ansätze und Verfahren, die in Frequenz- und Zeitbereichsverfahren untergliedert werden können. Beispiele für Frequenzbereichsverfahren sind das  $H_2$ - und das  $H_\infty$ -Verfahren ( $H$  = horizon). Bei beiden wird mit Hilfe einer Reglerübertragungsfunktion versucht, dem Störfrequenzgang einen bestimmten Verlauf aufzuzwingen. Nachdem die in Kapitel 3 hergeleiteten Modelle durch Zustandsdifferentialgleichungen beschrieben werden, wird auch beim Reglerentwurf auf ein für Mehrgrößensysteme geeignetes Zeitbereichsverfahren zurückgegriffen. Ein genereller Vorteil der Zustandsraummethodik ist der gewährte Einblick ins Systemverhalten. In diesem Zusammenhang ist vor allem die Kenntnis der physikalischen Systemzustände zu jedem beliebigen Zeitpunkt hervorzuheben. Anders als bei der Frequenzbereichsmethodik, wird eben nicht nur das Ein-/Ausgangverhalten betrachtet. Gerade bei Mehrgrößensystemen hat sich die Systembeschreibung im Zustandsraum durchgesetzt, für die es mittlerweile eine Vielzahl von effizienten Reglerentwurfsverfahren gibt. Als bekannte Vertreter der Zeitbereichsverfahren sind der Reglerentwurf durch Polvorgabe und der Entwurf einer Zustandsregelung nach

Riccati zu nennen. Beim ersteren werden die Eigenwerte des Kreises gezielt plaziert und daraus die Rückführmatrix bestimmt. Beim Riccati-Verfahren wird über die Vorgabe von Gewichtungsmatrizen ein quadratisches Gütekriterium optimiert und auf diese Weise die Rückführmatrix festgelegt.

Nachdem bei der Polvorgabe die gewünschten Eigenwerte vorgegeben werden und zudem eine bestehende Matlab-Funktion angewendet wird, kann an dieser Stelle auf eine genauere Beschreibung des Verfahrens verzichtet werden. Zum Einsatz kommt der für MIMO-Systeme geeignete *place*-Algorithmus, welcher in [35] näher beschrieben wird. Anders als bei der Polvorgabe, kann beim Entwurf eines Riccati-Reglers nur indirekt, nämlich über die Vorgabe geeigneter Gewichtungsmatrizen, Einfluß auf die Verschiebung der Eigenwerte genommen werden. Um diese Zusammenhänge zu verdeutlichen, wird im folgenden Abschnitt die vollständige Zustandsregelung am Beispiel des Riccati-Entwurfs näher beschrieben.

### 2.1.1 Zustandsregelung nach Riccati

In diesem Kapitel wird der Entwurf einer vollständigen Zustandsrückführung für deterministische Systeme beschrieben. Darüber hinaus werden Kriterien zur geeigneten Wahl der Gewichtungsmatrizen für die Optimierung des quadratischen Gütekriteriums vorgestellt, die für den Reglerentwurf nach Riccati in der Praxis entscheidend sind.

#### *Struktur einer Zustandsregelung*

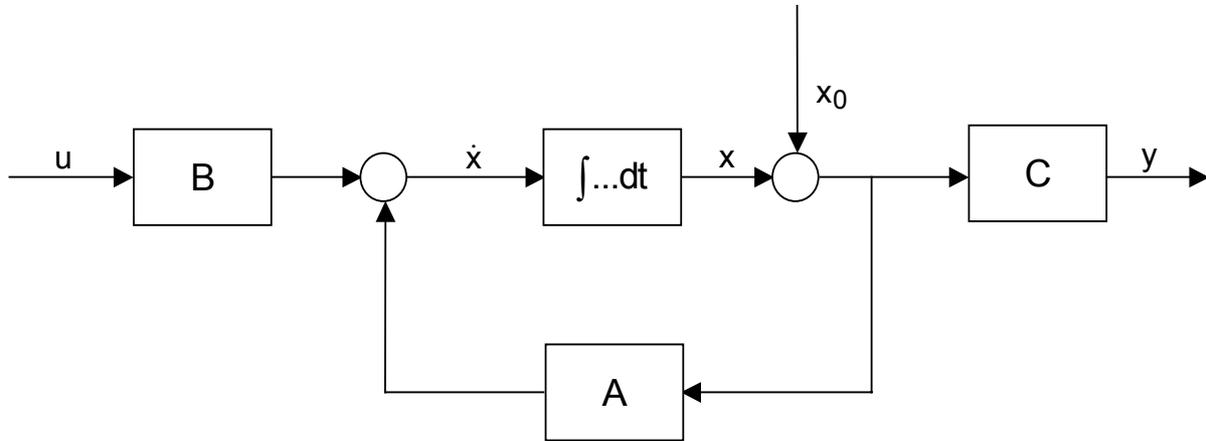
Für die Regelung im Zustandsraum wird hier von einer linearen und zeitinvarianten Strecke ausgegangen. Die Strecke ist gegeben durch:

$$\dot{x} = A x + B u, \quad (2.1)$$

$$y = C x \quad (2.2)$$

mit der Systemmatrix  $A$  ( $n, n$ ), der Eingangsmatrix  $B$  ( $n, p$ ), der Ausgangsmatrix bzw. Meßmatrix  $C$  ( $q, n$ ) und mit  $n$  als der Ordnung des Systems. Ein direkter Einfluß des Steuervektors  $u$  auf den Ausgang  $y$  wird an dieser Stelle nicht berücksichtigt, da er bei realen Systemen nicht auftritt. Dies gilt ebenso für die in Kapitel 3 hergeleiteten Modelle.

Bild 2.2 zeigt das Strukturbild einer Regelstrecke in Zustandsraum- bzw. Zustandsdarstellung mit den Gleichungen (2.1) und (2.2).



**Bild 2.2:** Strecke (System, Prozeß) in Zustandsdarstellung

Die von außen wirkende Anfangsstörung  $x(t_0) = x_0$  ist beliebig. Ziel einer zu entwerfenden Regelung könnte es sein, die Wirkung dieser Anfangsstörung zu beseitigen. Dies erfolgt bei der Zustandsregelung über die Rückführung des Zustandsvektors  $x(t)$ . Der allgemeine Ansatz für die Rückführung lautet:

$$u = -k(x(t), t) \quad (2.3)$$

Die Vektorfunktion  $k$  ist dabei beliebig. Wählt man ein lineares Rückführungsgesetz, so wird aus Gleichung (2.3)

$$u(t) = -K(t)x(t). \quad (2.4)$$

Wird darüber hinaus Zeitinvarianz gefordert, so gilt:

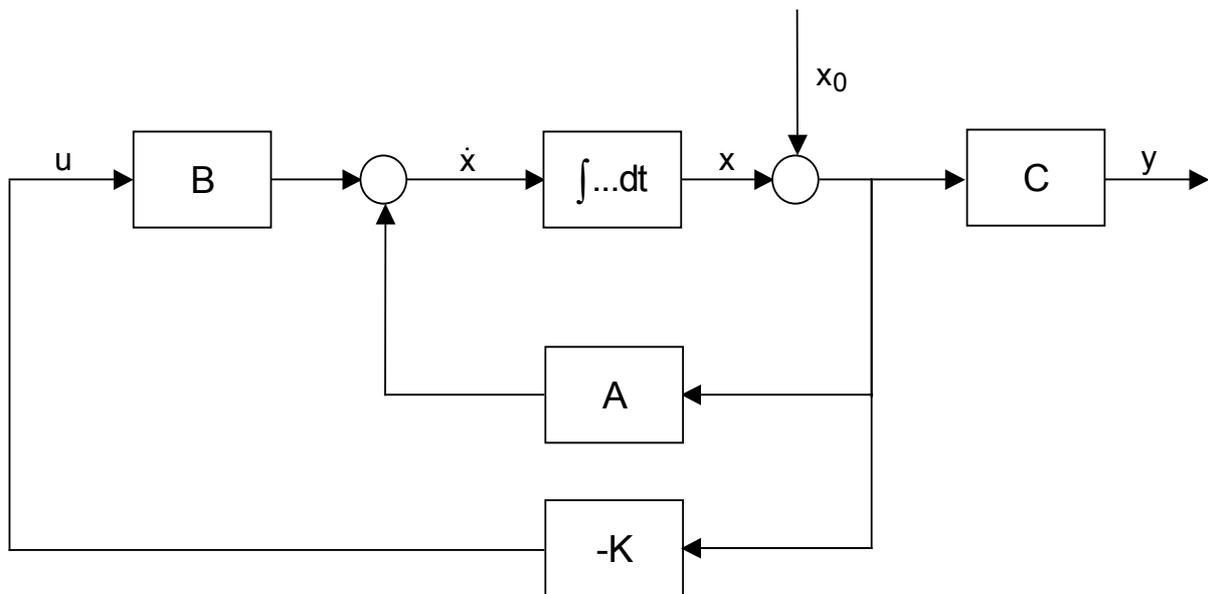
$$u(t) = -Kx(t). \quad (2.5)$$

Die  $K$ -Matrix ( $p, n$ ) ist dabei konstant. Das negative Vorzeichen in den Rückführungsgleichungen (2.3) bis (2.5) wurde von der klassischen Regelschleife übernommen. Die Zustandsrückführung (2.5) wird auch als vollständiger Zustandsregler oder nur als Regler bezeichnet.

Die Gleichungen (2.1) und (2.5) werden zusammengefaßt und man erhält:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (2.6)$$

Die Differentialgleichung der Zustandsregelung wird in Bild 2.3 dargestellt.



**Bild 2.3:** Blockschaltbild zur Zustandsregelung

Die charakteristischen Merkmale der entworfenen Reglerstruktur sind:

Bei der Zustandsregelung werden alle Zustandsgrößen zurückgeführt.

Bei der Zustandsregelung wird über die Rückführmatrix  $K$  das dynamische Verhalten des Regelkreises gezielt beeinflusst und die Stabilität gewährleistet. Dabei ist der Stellvektor  $u = -Kx$ .

Da es meistens nicht möglich ist, alle Zustandsvariablen meßtechnisch zu erfassen, ist es notwendig, aus den Meßgrößen des Systems den Zustandsvektor näherungsweise mit einem Luenberger-Beobachter zu rekonstruieren. Auf den Luenberger-Beobachter wird im Abschnitt 2.1.2 eingegangen.

Im folgenden wird die Reglermatrix  $K$  über die Minimierung eines quadratischen Gütemaßes bestimmt.

### ***Bestimmung der Reglermatrix $K$ über ein quadratisches Gütekriterium***

Gegeben sei das in Gleichung (2.1) beschriebene System. Der allgemeine Ansatz für die Rückführung wurde in den Gleichungen (2.3) bis (2.5) formuliert. Das rückgekoppelte System wird durch die Gleichung (2.6) beschrieben.

Die Komponenten der Matrix  $K$  charakterisieren den auszulegenden Regler. Im folgenden wird ein optimaler Reglerentwurf vorgestellt. Dazu wird ein Gütekriterium benötigt, das angibt, was unter „optimal“ zu verstehen ist und daher auch als Kosten-, Straf- bzw. Ziel-Funktion bezeichnet wird. Es lautet, Zeitinvarianz vorausgesetzt:

$$J(u) = G(x(t_e)) + \int_{t_0}^{t_e} L(x(t), u(t)) dt \quad (2.7)$$

In [9] findet sich ein Überblick über häufig verwendete Gütekriterien. Beim Entwurf eines Riccati-Reglers kommt das quadratische Gütekriterium zum Einsatz, mit den positiven Funktionen

$$G(x(t_e)) = \frac{1}{2} x^T(t_e) S x(t_e) \quad \text{und} \quad (2.8)$$

$$L(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \left( x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right).$$

Die Wahl der Gewichtungsmatrizen spielt bei diesem Reglerentwurf die entscheidende Rolle und ist stark problemspezifisch. Die symmetrischen Matrizen  $S$  und  $Q$  müssen positiv semi-definit und  $R$  symmetrisch und positiv definit sein. Der Steuervektor  $u$  und der Zustandsvektor  $x$  werden als unbeschränkt angenommen. Das Optimierungsziel muß innerhalb der Zeitdauer  $t_e - t_0$  erreicht sein.

Die Berechnung des optimalen Reglers kann auf unterschiedliche Weisen erfolgen. In den meisten Fällen wird jedoch die Variationsrechnung über die Hamilton-Gleichung angewendet:

$$(2.9)$$

Die Elemente von  $\psi^T$  sind zeitvariante Lagrange'sche Multiplikatoren.  $\psi$  wird auch als Co-Zustandsvektor bezeichnet.

Aus der Hamilton-Gleichung folgt die Steuerbedingung

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad (2.10)$$

die adjungierte Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\psi} \quad (2.11)$$

und die sogenannte Transversalitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x(t_e)} \left( \frac{1}{2} x^T(t_e) S x(t_e) \right) = -\psi(t_e). \quad (2.12)$$

Über die partiellen Ableitungen erhält man aus der Steuerbedingung (2.10)

$$u_{\text{opt}}(t) = R^{-1} B^T \psi(t). \quad (2.13)$$

Da  $R$  positiv definit gewählt wurde, existiert auch die Inverse von  $R$ .

Aus der adjungierten Gleichung (2.11) folgt

$$\dot{\psi} = Qx - A^T \psi. \quad (2.14)$$

Nach Ableitung von (2.12) lautet die Transversalitätsbedingung

$$\psi(t_e) = -S x(t_e) \quad (2.15)$$

Wird nun (2.13) in die Systemgleichung (2.1) eingesetzt, so ergibt sich mit (2.14) das kanonische Differentialgleichungssystem:

$$(2.16)$$

Mit

$$\dot{\psi} = -P(t)x, \quad (2.17)$$

wobei  $P$  eine noch unbekannte zeitabhängige  $(n, n)$ -Matrix ist, folgt aus (2.16)

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T Px \quad \text{und} \quad (2.18)$$

$$\dot{\psi} = Qx + A^T Px. \quad (2.19)$$

Durch Gleichsetzen von (2.19) und der Ableitung von (2.17) mit  $\dot{\psi} = -(P\dot{x} + \dot{P}x)$  erhält man

$$P\dot{x} + \dot{P}x + Qx + A^T Px = 0. \quad (2.20)$$

Multipliziert man die Gleichung (2.18) mit  $P$  von links und subtrahiert das Ergebnis von (2.20), so ergibt dies nach Umstellung:

$$\left( \dot{P} + Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P \right) x = 0. \quad (2.21)$$

Wird  $P$  nun so gewählt, daß der in der Klammer stehende Ausdruck zur Nullmatrix wird, dann ist (2.21) für jedes beliebige  $x$  gültig. Demnach gilt folgende Differentialgleichung:

$$-\dot{P} = Q + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P \quad (2.22)$$

mit der Randbedingung für  $t = t_e$  gemäß (2.15)

$$P(t_e) = S. \quad (2.23)$$

Dies ist die sogenannte Riccati-Differentialgleichung.

Durch Rückwärtsintegration der Gleichung (2.22), mit dem Startwert  $P(t_e) = S$ , läßt sich  $P(t)$  bestimmen.

Daraus ergibt sich für

$$(2.24)$$

eine zeitvariante Rückführung. Für  $t_e \rightarrow \infty$  muß die stationäre Lösung  $x(t_e) = 0$  werden und damit  $\dot{P} = 0$ .

Aus (2.22) erhält man die Riccati-Gleichung

$$P B R^{-1} B^T P - P A - A^T P = Q \quad (2.25)$$

zur Bestimmung der konstanten Matrix  $P$  bzw. der konstanten Rückführung  $K = R^{-1} B^T P$  (Riccati-Regler). Dadurch vereinfacht sich das quadratische Gütemaß auf die Form

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left[ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right] dt. \quad (2.26)$$

Die Minimierung des Gütemaßes liefert immer dann einen optimalen Regler (konstante Rückführungsmatrix  $K$ ), wenn der Güteindex bei beliebigem Anfangszustand  $x(t_0 = 0) = x_0$  trotz unendlich langer Problemdauer, also für das Zeitintervall  $[0, t_e]$  mit  $t_e = \infty$ , einen endlichen Wert annehmen kann [27].

Nun stellt sich die Frage nach einer geeigneten Wahl der Gewichtungsmatrizen  $Q$  und  $R$ . Kriterien zur Wahl der Gewichtungsmatrizen werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

### ***Kriterien zur Wahl der Gewichtungsmatrizen***

Die Wahl der Gewichtungsmatrizen ist sehr schwierig, weil es dafür keinen allgemeingültigen Ansatz gibt. Es gibt lediglich Ansätze, die auf Erfahrungswerten von Simulationen beruhen. Deshalb sind solche Ansätze oft sehr spezifisch und nicht allgemein gültig. Nachfolgend werden einige qualitative Eigenschaften aufgelistet, die helfen sollen, diese wichtigen Entwurfsparameter zu wählen.

Im allgemeinen werden die Gewichtungsmatrizen als Diagonalmatrizen gewählt entweder als Einheitsmatrizen bzw. deren Vielfache oder man besetzt die Diagonalelemente mit dem reziproken Quadrat des maximal zulässigen Wertes der entsprechenden Zustands- bzw. Stellgröße. Letzteres stellt auch den Ausgangspunkt für eine überschlägige Vorgehensweise nach [12] zur verbesserten Festlegung der Gewichtungsmatrizen dar. Die folgenden Schritte wurden aus [47] übernommen:

- (i) Die Systemmatrizen  $A$ ,  $B$  und die Problemspezifikationen bezüglich Einschwingzeiten, Überschwinger, Stell- und Zustandsgrößenbeschränkungen u.ä. werden festgehalten.
- (ii) Eine anfängliche Wahl der Gewichtungsmatrizen wird wie folgt getroffen

$$Q = \text{diag}\left(\frac{1}{\hat{x}_i^2}\right), \quad R = \text{diag}\left(\frac{1}{\hat{u}_i^2}\right),$$

wobei  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{u}_i$  geeignet normierte (z.B. maximal zulässige) Werte darstellen.

- (iii) Die zugehörigen Werte der Riccati-Matrix  $P$  und der Rückführmatrix  $K$  werden berechnet. Sodann wird das Regelkreisverhalten mittels Simulation anhand der graphischen Verläufe der Steuervariablen  $u(t)$  und der Zustandsvariablen  $x(t)$  visualisiert.
- (iv) Einem unbefriedigenden Verhalten bestimmter Systemvariablen wird durch gezielte Veränderung der entsprechenden Gewichtungsfaktoren und erneute Durchführung von (iii) entgegengewirkt.
- (v) Die Schritte (iii) und (iv) werden so oft durchlaufen, bis befriedigendes Verhalten im Sinne der Spezifikationen von (i) erzielt wird.

Weitere Hinweise zur Wahl der Gewichtungsmatrizen gibt [2]. Dazu wird die Matrixnorm  $\|X\| = \sqrt{\lambda_{\max}(X^T X)}$  mit  $\lambda_{\max}$  als dem größten Eigenwert des Matrizenprodukts  $X^T X$  eingeführt:

Über  $Q$  werden die Zustandsgrößen, d.h. die Abweichungen von der optimalen Trajektorie, gewichtet. Je größer  $\|Q\|$  im Vergleich zu  $\|R\|$  ist, desto größer werden die Elemente der Rückführmatrix  $K$  und damit die Stellgrößen. Folglich wird das System schneller.

Je größer  $\|R\|$  im Vergleich zu  $\|Q\|$  ist, desto kleiner werden die Elemente der Rückführmatrix  $K$  und um so langsamer wird das System, weil weniger Stellenergie aufgewendet wird.

Der Zustandsvektor enthält oft Variablen und deren zeitliche Ableitungen. Um die Überschwingungen zu reduzieren, können diese Ableitungen bestraft werden, indem man  $Q$  entsprechend wählt.

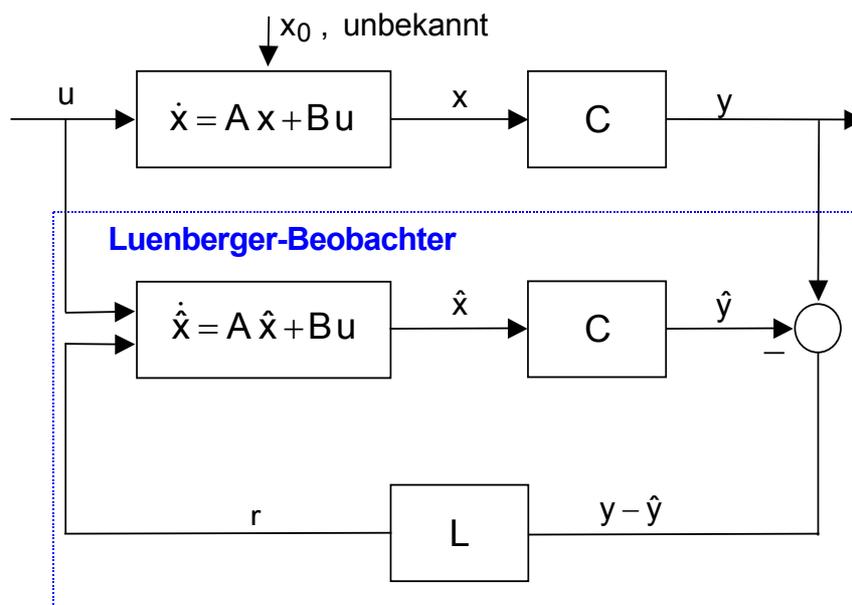
Im Hinblick auf den Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung und die vergleichende Simulation, wird  $R$  als Einheitsmatrix der Ordnung  $p$  festgelegt. Zudem wird  $Q$  über die Ausgangsgleichung der dem Reglerentwurf zugrunde liegenden Strecke definiert. Dabei wird Zeitinvarianz und die vollständige Beobachtbarkeit der Strecke vorausgesetzt, was für die Beispiele in Kapitel 3 zutrifft. Unter diesen Voraussetzungen kann jede symmetrische, positiv-semidefinite Matrix  $Q$  als Produkt einer Matrix  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  ( $p \geq \text{Rang}(Q)$ ), in unserem Fall ist  $C$  die Ausgangsmatrix des mit dem Reglerentwurf verknüpften Systems, und ihrer Transponierten  $C^T$  geschrieben werden,  $Q = C^T C$  [43]. Um weitere Variationen beim Reglerentwurf zu ermöglichen, wird zusätzlich der Faktor  $q$  eingeführt. Daraus ergibt sich  $Q = q C^T C$ .

### 2.1.2 Zustandsbeobachter (Luenberger-Beobachter)

In den vorherigen Abschnitten wurde beschrieben, wie man den Regler berechnen kann. Um einen vollständigen Zustandsregler zu realisieren, muß ihm der gesamte Zustandsvektor  $x(t)$  zugeführt werden. Da meist nicht alle Zustandsvariablen meßbar sind, ist aus den Meßgrößen der gesamte Zustandsvektor näherungsweise zu rekonstruieren. Für den Fall, daß aus den Meßgrößen wirklich alle Zustandsgrößen berechnet werden, spricht man von einem vollständigen Zustandsbeobachter, dem sogenannten Luenberger-Beobachter [44]. Voraussetzung ist, daß die Systemgleichungen (2.1) und (2.2) bekannt sind. Zur Regelung wird der geschätzte Zustandsvektor dem Modell entnommen, vgl. hierzu Bild 2.4.

**Bild 2.4:** Ansatz zur Rekonstruktion des Zustandsvektors

Wird der Steuervektor  $u(t)$  der Strecke und dem Streckenmodell zugeführt, dann liefert dies den gewünschten Zustandsvektor  $\hat{x}(t)$ . Der Zustandsvektor  $x(t)$  wird aber nicht nur vom Eingangsvektor  $u(t)$  bestimmt, sondern hängt noch vom Anfangszustand  $x(t_0) = x_0$  ab. Der Anfangszustand ist jedoch meist nicht bekannt, weshalb es unmöglich ist, am Streckenmodell den Anfangszustand  $x_0$  einzustellen. Dies ist neben der Modellunsicherheit auch der Grund, warum der geschätzte Zustand  $\hat{x}(t)$  des Streckenmodells vom wahren Zustand  $x(t)$  der Strecke verschieden sein wird. Um diesen Mißstand zu beheben, wird zunächst aus dem Schätzvektor  $\hat{x}$  der zugehörige Ausgangsvektor  $\hat{y} = C\hat{x}$  gebildet. Danach wird dieser mit dem Meßvektor  $y$  verglichen und die entstehende Differenz  $y - \hat{y}$  über den Matrixfaktor  $L$  zurückgeführt. Die Matrix  $L$  muß noch geeignet gewählt werden. So entsteht zunächst die Struktur von Bild 2.5.



**Bild 2.5:** Struktur des Luenberger-Beobachters

Dem Bild 2.5 können die Gleichungen für den Beobachter entnommen werden.

Faßt man diese Gleichungen zusammen, so erhält man:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly. \quad (2.27)$$

Nun soll die Matrix  $L$  so gewählt werden, daß der Schätzfehler  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  gegen Null strebt. Aus diesem Grund wird die Differentialgleichung für den Schätzfehler gebildet:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A\hat{x} - LC\hat{x} + Bu + Ly),$$

mit  $y = Cx$  folgt:

$$\dot{\tilde{x}} = Ax - A\hat{x} - LC(x - \hat{x}),$$

bzw.

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}. \quad (2.28)$$

Hierbei handelt es sich um eine homogene Differentialgleichung.  $\tilde{x}(t)$  strebt aus einem beliebigen Anfangszustand  $\tilde{x}(t_0)$  gegen Null, wenn die Eigenwerte  $\beta_1, \dots, \beta_n$  der Dynamikmatrix  $F = A - LC$  des Beobachters links der  $j$ -Achse liegen. Dabei muß  $L$  so gewählt werden, daß diese Bedingung erfüllt wird und die Eigenwerte von  $F$  links von denen des Regelkreises, d.h. für  $A - BK$  aus Gleichung (2.6), liegen. Denn  $F$  bestimmt das Abklingen des Beobachterfehlervektors, und der soll schneller abklingen als die Eigenbewegung des Regelkreises.

Zusammenfassend kann man nach [24] schreiben:

Für das System

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

lautet die Zustandsdifferentialgleichung des Luenberger-Beobachters:

$$(2.29)$$

Die Beobachtermatrix  $L$  ist hier so zu wählen, daß der Schätzfehler für  $t \rightarrow +\infty$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0.$$

Dazu müssen die Eigenwerte der Matrix  $F = A - LC$  links von denen des Regelkreises, d.h. für  $A - BK$  aus Gleichung (2.6), (bei Beobachtung einer Strecke ohne Regelung links von denen der Matrix  $A$ ) plaziert werden. Dies führt häufig zum Einsatz von Verfahren zur Polvorgabe, die jedoch eine manuelle Strukturvorgabe erfordern. Zur automatisierbaren Bestimmung der Beobachtermatrix  $L$  kann auch auf die Vorgehensweise zur Auslegung des Riccati-Reglers verwiesen werden. Der Vollständigkeit halber wird im folgenden der genaue Ablauf kurz dargestellt, weil er den in Kapitel 3 beschriebenen Simulationen zugrunde liegt.

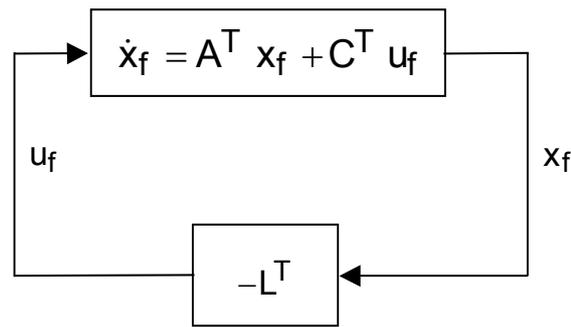
### ***Bestimmung der Beobachtermatrix $L$ über ein Quadratisches Gütekriterium***

Nach [24] lassen sich die Beobachterparameter über ein quadratisches Gütekriterium folgendermaßen bestimmen. Dabei ist es möglich, den Beobachterentwurf auf den Entwurf des Zustandsreglers zurückzuführen, indem man die Dynamikmatrix des Beobachters bzw. der Fehlerdifferentialgleichung transponiert und dann als Dynamikmatrix einer Zustandsregelung interpretiert. Das Transponieren der Matrizen ist notwendig, weil beim Beobachter die Anordnung der Matrizen im Vergleich zur normalen Zustandsregelung vertauscht ist.

Gehen wir daher von der Dynamikmatrix der Fehlerdifferentialgleichung zu ihrer Transponierten über, so erhalten wir die Gleichung

$$\dot{x}_f = (A^T - C^T L^T) x_f, \quad (2.30)$$

die das gleiche Stabilitätsverhalten und die gleiche Dynamik besitzt wie die ursprüngliche Fehlerdifferentialgleichung. Die neue Differentialgleichung aber läßt sich sofort als Beschreibung einer Zustandsregelung deuten, wie in Bild 2.6 dargestellt.



**Bild 2.6:** Regelung zur Fehlerdifferentialgleichung

Aus Bild 2.6 erhält man die Formeln

$$\dot{x}_f = A^T x_f + C^T u_f \quad \text{und} \quad (2.31)$$

$$u_f = -L^T x_f \quad (2.32)$$

woraus die Beziehung (2.30) resultiert.

In Analogie zur Nomenklatur der Zustandsregelung nach Gleichung (2.6) mit der Systemmatrix  $A^T$  (anstelle von  $A$ ), der Eingangsmatrix  $C^T$  (anstelle von  $B$ ) und der Reglermatrix  $L^T$  (anstelle von  $K$ ). Die Beobachtermatrix  $L$  kann damit wie ein Zustandsregler nach Riccati mit der entsprechenden Problematik des Gütekriteriums bestimmt werden.

### ***Bestimmung der Beobachtermatrix $L$ über Dominanzanalyse und Polvorgabe***

Neben dem Beobachterentwurf durch Optimierung eines quadratischen Gütekriteriums existiert auch die Möglichkeit, einen Beobachter über Polvorgabe zu entwerfen. Aufgrund des Separationstheorems ist es möglich, die Eigenwerte des Beobachters unabhängig von denen der Regelung festzulegen. Dabei ist darauf zu achten, daß die Eigenwerte von  $F = A - LC$  (Beobachter) links von denen der Regelung, d.h. für  $A - BK$  aus Gleichung (2.6) liegen. Diese Forderung kann jedoch unter bestimmten Voraussetzungen abgeschwächt werden. Für den Fall, daß einige Eigenwerte des Regelkreises einen sehr großen negativen Realteil haben und somit nur geringen Einfluß auf das Systemverhalten, ist es möglich, diese bei der Festlegung der Beobachtereigenwerte außer acht zu lassen. Verallgemeinert bedeutet dies, daß beim Beobachterentwurf nur die „dominanten“ Eigenwerte [26] des Regelkreises zu berücksichtigen sind.

Neben der Realteilbetrachtung sind aus dem Bereich der Modellreduktion auch andere Dominanzanalyseverfahren bekannt, vgl. Abschnitt 2.2.1 „Dominanzuntersuchung nach Litz“, die jedem Eigenwert einen Dominanzwert zuordnen. Bei der modalen Ordnungsreduktion dienen die Dominanzwerte zur Festlegung der Ordnung, auf die sinnvoll reduziert werden kann. Anhand dieser Werte erfolgt eine Neuordnung des modal transformierten Systems in ein dominantes und ein als nichtdominant eingestuftes Teilsystem, ehe nach Davison das nichtdominante Teilsystem einfach abgeschnitten wird (vgl. Abschnitt 2.2.1). Die Vorgehensweise ein System anhand einer Dominanzanalyse in zwei Teilsysteme zu zerlegen, von denen eines die dominanten Eigenwerte enthält, scheint ebensogut für den Beobachterentwurf anwendbar zu sein. Dieser Gedankentransfer ermöglicht eine objektive Reihung der Eigenwerte der Regelung entsprechend ihrer Dominanz und ist die Basis für einen neuartigen Beobachterentwurfsalgorithmus.

Folgende Schritte sind zur Bestimmung der Beobachtermatrix  $L$ , unter der Voraussetzung, daß die Eigenwerte der Regelung bekannt sind und negative Realteile haben, notwendig:

Bestimmung der Dominanz der Eigenwerte des geschlossenen Kreises, Gleichung (2.6), wahlweise über die Ermittlung der Kennwerte  $M_k$  bzw.  $\hat{M}_k$  für Struktur- bzw. Übertragungsdominanz nach Litz oder den Betrag des Realteils des jeweiligen Eigenwertes  $\lambda_k = \alpha_k + j \beta_k$ . Bei letzterem wird auf den Dominanzwert  $1/|\alpha_k|$  zurückgegriffen.

Absteigende Sortierung der Eigenwerte der Regelung entsprechend dem zugehörigen Dominanzwert. Daraus folgen die neu geordneten Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , wobei der Eigenwert  $\lambda_1$  der mit dem größten Dominanzwert ist.

Es folgt eine Schleife mit dem Laufparameter  $k$ , unter Zugrundelegung der Annahme, daß im ersten Durchlauf ( $k = 1$ ) nur der Eigenwert mit dem größten Dominanzwert ( $\lambda_k = \lambda_1$ ) dominant ist. Alle anderen werden als nicht dominant eingestuft. Handelt es sich bei  $\lambda_k$  um einen Eigenwert eines konjugiert komplexen Polpaares, so wird auch der zugehörige Eigenwert  $\lambda_{k+1} = \lambda_2$  (hat immer den gleichen Dominanzwert) berücksichtigt und  $k = 2$  gesetzt.

Über den letzten als dominant eingestuften Eigenwert  $\lambda_k$  erfolgt die Vorgabe der Beobachterpole. Hierfür wird auf die Matlab-Funktion *place* [35] zurückgegriffen, welche über die Vorgabe von  $A^T$ ,  $C^T$  und  $p$  die transponierte Beobachtermatrix  $L^T$  ermittelt, wobei  $p$  der Vektor

mit den gewünschten Beobachtereigenwerten ist. Die Festlegung von  $p$  erfolgt durch Subtraktion eines Verschiebungswertes  $v$  vom Realteil jedes Eigenwertes des Regelkreises  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Die Ermittlung des Verschiebungswertes  $v$  erfolgt durch Subtraktion des betragsmäßig kleinsten Realteils des Eigenwerts aus der Gruppe der Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vom Betrag des Realteils des Eigenwerts mit dem betragsmäßig größten Realteil aus der Gruppe der als dominant eingestuften Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Nachdem der *place*-Algorithmus eine Fehlertoleranz von zehn Prozent bezüglich der tatsächlichen Platzierung der vorgegebenen Eigenwerte zulässt, ist dies bei der Festlegung von  $p$  entsprechend zu berücksichtigen (Faktor 1,1 in Gleichung (2.33)). Der Vektor  $p$  wird folgendermaßen bestimmt:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 - v) \cdot 1,1 & + j\beta_1 \\ \vdots & \vdots \\ (\alpha_n - v) \cdot 1,1 & + j\beta_n \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

(\*) Ausführung der *place*-Funktion.

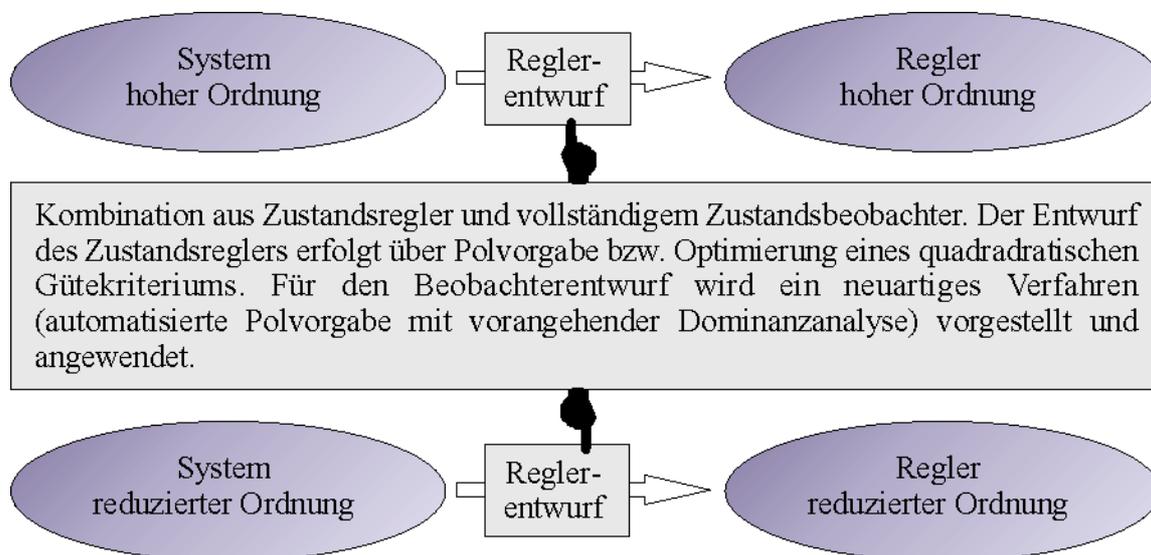
Überprüfung, ob die Dynamikmatrix  $A - BK - LC$  des Beobachterreglers, Gleichung (2.34), stabil ist:

- a) Bei Instabilität wird der Eigenwert mit dem größten Dominanzwert aus der Gruppe der nichtdominanten Eigenwerte der Gruppe der bisher als dominant angenommenen Eigenwerte hinzugefügt und  $k$  um eins erhöht (Sollte vor der Erhöhung bereits  $k = n$  sein, so endet die Routine hier und es erscheint eine Fehlermeldung). Der Verschiebungswert  $v$  wird neu berechnet und damit die Beobachterpole neu festgelegt. Sprung zu (\*).
- b) Bei Stabilität liegt ein erster Vorschlag für die anschließende Simulation vor. Jetzt erfolgt noch die Überprüfung, ob die 10%-Fehlertoleranzgrenze überschritten wurde. Ist dies der Fall, so ist in Analogie zu „a) Bei Instabilität“ zu verfahren, d.h. Sprung zu a). Wurde die Fehlertoleranzgrenze nicht überschritten, so wird geprüft, ob der geschlossene Regelkreis bestehend aus Zustandsraummodell und Beobachterregler stabil ist. Ist dies der Fall so endet die Routine mit einem erfolgreichen Ergebnis. Ist dies nicht der Fall, so erfolgt ein Sprung zu a).

Der Routine sind als Eingangsparameter das Zustandsraummodell (ss-Object) der Strecke und die Reglermatrix  $K$  zu übergeben sowie die Vorgabe des gewünschten Verfahrens zur Dominanzanalyse. Ausgegeben werden die Beobachtermatrix  $L$ , das Zustandsraummodell des Beobachterreglers und die Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte. Die zu beachtenden Eigenwerte werden grundsätzlich automatisch ermittelt. Es ist aber auch möglich, der Routine einen Startwert für die Anzahl der zu berücksichtigenden Eigenwerte vorzugeben. Auf diese Weise können auch Beobachter entworfen werden, die mehr als die zwingend erforderlichen Eigenwerte berücksichtigen.

### 2.1.3 Beobachterregler

Setzt man nun den Zustandsbeobachter und den Zustandsregler zusammen, so ergibt diese Kombination ein dynamisches Regelungssystem, welches auch als Beobachterregler bezeichnet wird. Der Beobachterregler rekonstruiert aus den Meßgrößen der Strecke deren Zustandsgrößen und nutzt diese für eine vollständige Zustandsregelung [38]. Bild 2.7 zeigt die Einordnung dieses Reglers ins Gesamtkonzept.

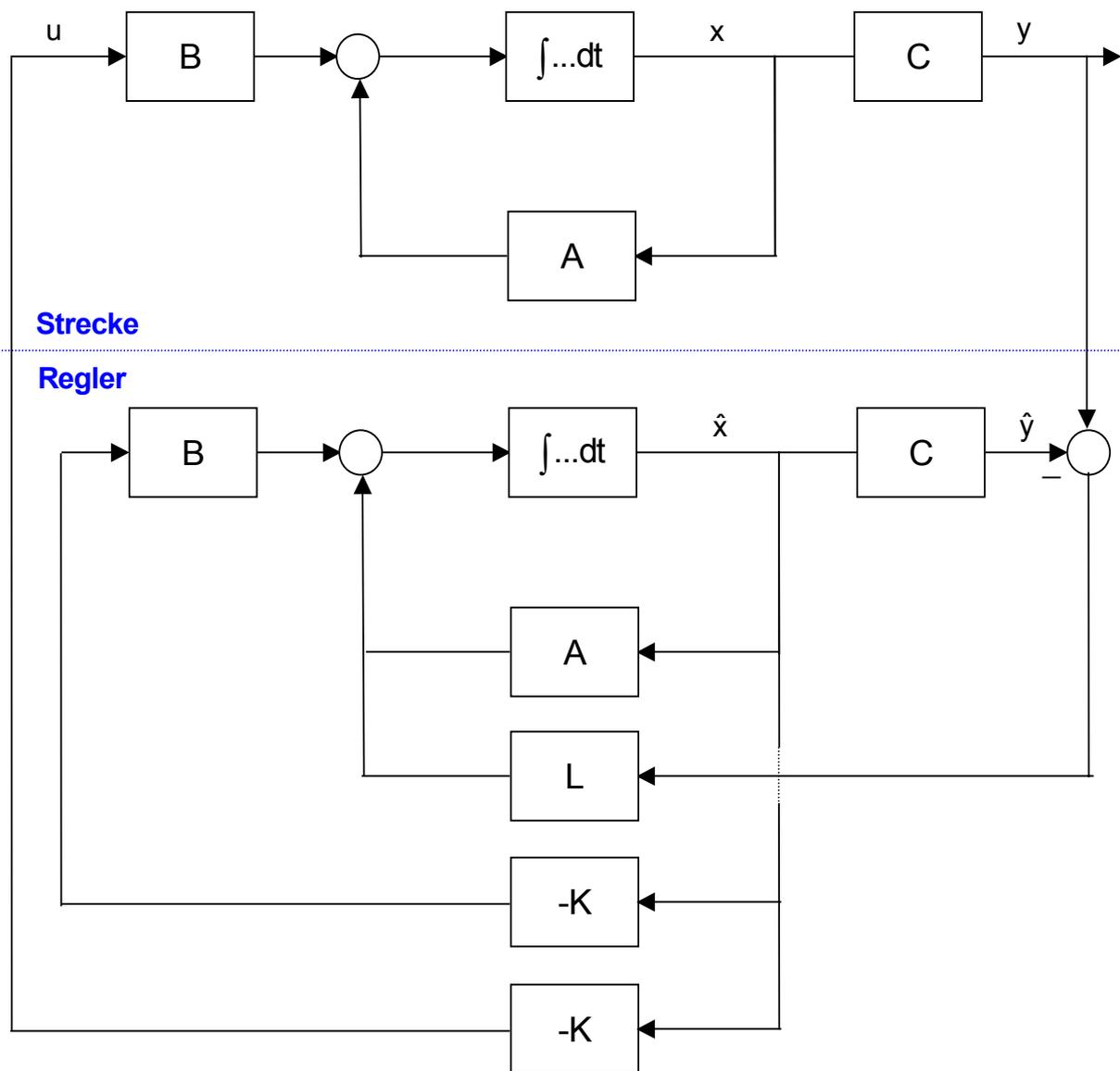


**Bild 2.7:** Beobachterregler im Gesamtkonzept

Durch geeignete Umformungen ist es möglich, den Beobachterregler auf die bekannte Struktur einer Regelstrecke in Zustandsraumdarstellung zurückzuführen [50]. Diese Vorgehensweise erweist sich als äußerst sinnvoll, weil zur Reglerreduktion auf bekannte Modellreduk-

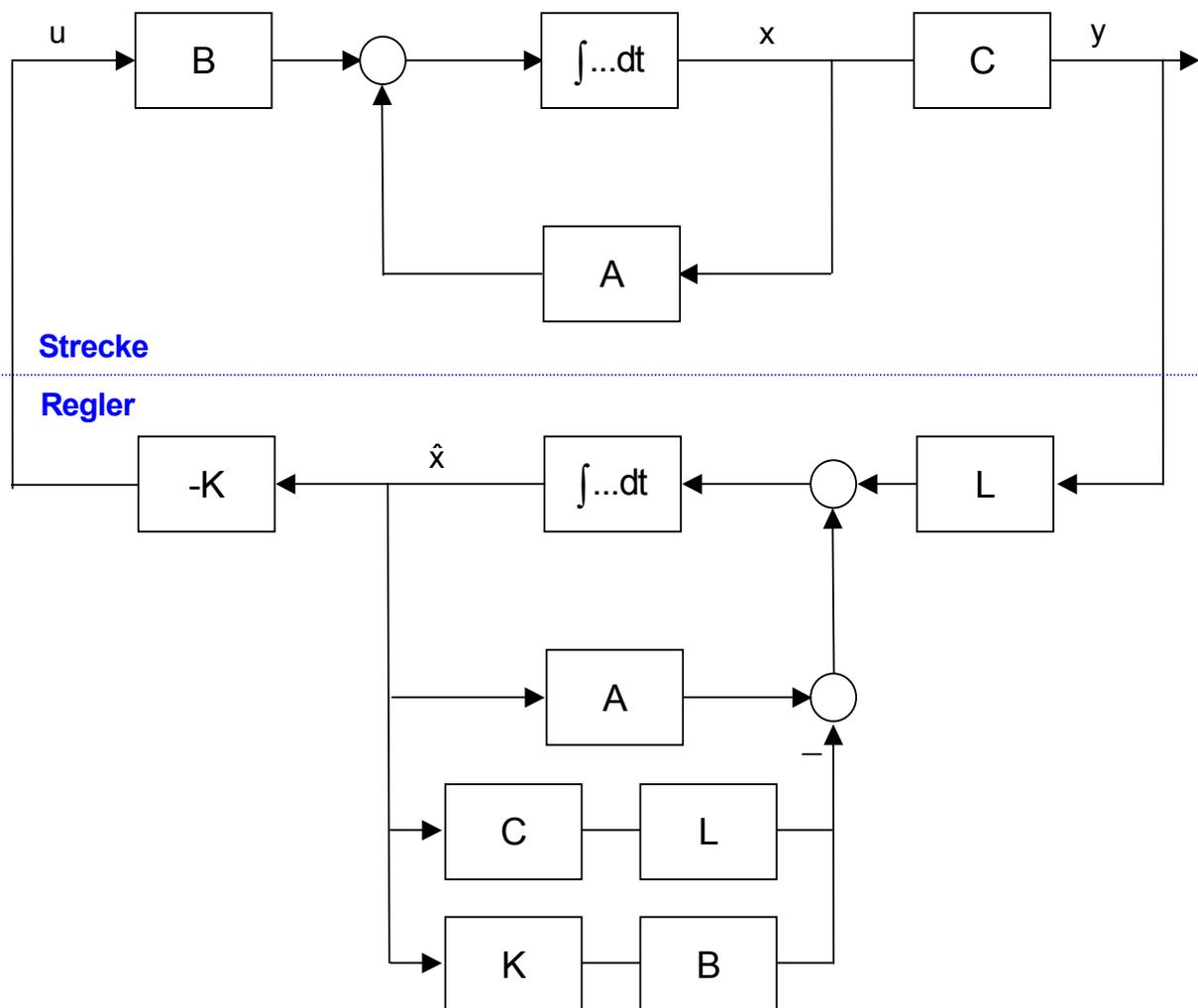
tionsverfahren zurückgegriffen werden kann. Auf diese Weise wird zudem, wie bereits erwähnt, die Vergleichbarkeit der Ergebnisse hinsichtlich der beiden indirekten Wege zum Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung sichergestellt. Denn der Beobachterregler kann sowohl am Modell hoher als auch am Modell reduzierter Ordnung entworfen werden, und es können sowohl zur Modellreduktion als auch zur Reglerreduktion die selben Verfahren verwendet werden.

Im folgenden werden die notwendigen Schritte zur Umformung auf die gewünschte Form anhand von Blockschaltbildern erläutert, Bild 2.8. Dargestellt sind die Strecke sowie der Regler, bestehend aus vollständigem Zustandsbeobachter und vollständigem Zustandsregler. Die Strecke selbst bleibt von den Umformungen unberührt.



**Bild 2.8:** Wirkungsplan des geschlossenen Kreises

Nachdem für den Beobachterregler der Meßvektor  $y(t)$  das Eingangssignal sein soll und der Strecke  $u(t)$  als Eingangssignal zur Verfügung zu stellen ist, was dem Ausgangssignal des Beobachterreglers entspricht, wird der Wirkungsplan wie folgt umgezeichnet.

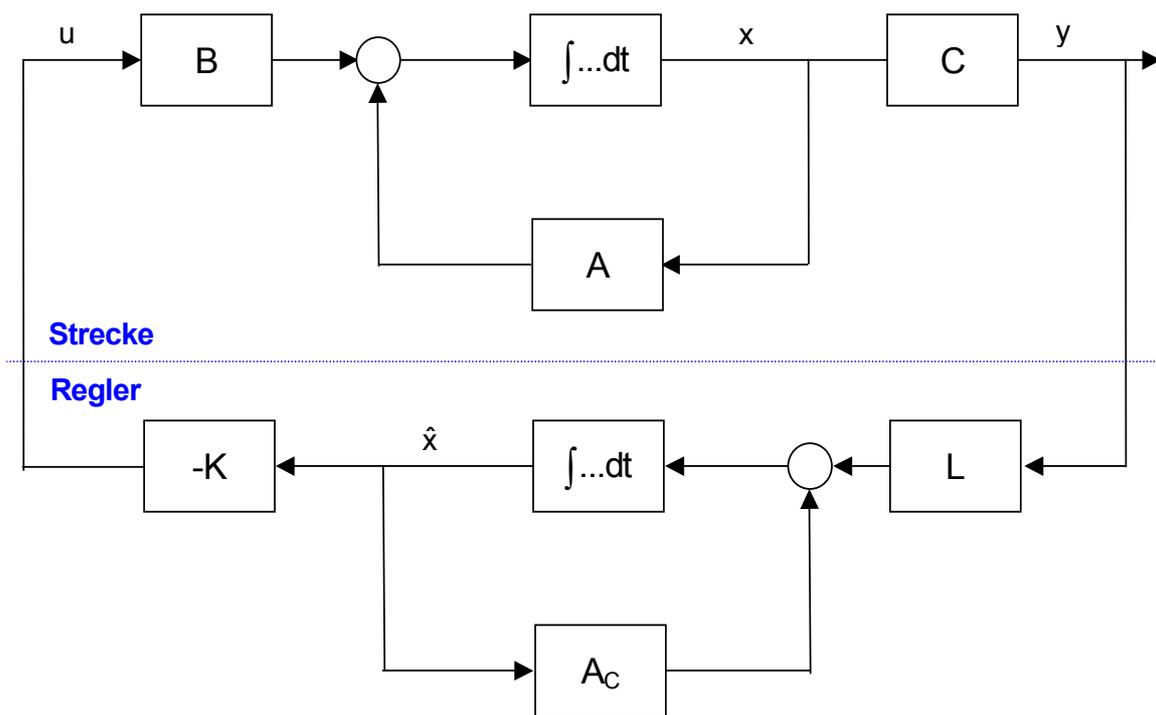


**Bild 2.9:** Umgezeichneter Wirkungsplan des geschlossenen Kreises

Die Rückführung zum Integrator des Regelungssystems aus Bild 2.9 kann noch weiter vereinfacht werden. Mit der Beziehung

$$A_C = A - L C - B K \quad (2.34)$$

ist es möglich, den dynamischen Beobachterregler, bestehend aus Zustandsbeobachter und Zustandsregler, auf die bekannte Struktur einer Regelstrecke in Zustandsraumdarstellung zu bringen. Das Ergebnis dieses Schrittes ist in Bild 2.10 dargestellt.



**Bild 2.10:** Wirkungsplan des geschlossenen Regelkreises mit Beobachterregler

Dabei ist  $L$  die Eingangsmatrix,  $A_c$  die Systemmatrix und  $K$  die Ausgangsmatrix des Beobachterreglers. Der große Vorteil des in diese Form gebrachten Reglers ist es, daß er mit Hilfe gängiger Ordnungsreduktionsverfahren, wie sie auch zur Modellreduktion verwendet werden, reduziert werden kann.

## 2.2 Modell- und Reglerreduktion

Zur Ordnungsreduktion von linearen Systemen gibt es viele verschiedene Verfahren, die man in Zeit- und Frequenzbereichsverfahren gliedern kann. Nachdem in Kapitel 3 die Modelle in Zustandsraumdarstellung vorliegen, werden für die Anwendung nur Ordnungsreduktionsverfahren aus dem Zeitbereich ausgewählt. Die lassen sich wiederum in physikalisch und mathematisch orientierte Verfahren unterteilen. Aus jeder dieser Gruppen wurde ein Verfahren ausgewählt, welches in den folgenden Abschnitten näher beschrieben und im Kapitel 2.1 angewendet wird. Das modale Ordnungsreduktionsverfahren von Davison wird der physikalischen Gruppe zugeordnet. Bei ihm stehen Eigenwertbetrachtungen im Vordergrund. Den Bereich der mathematisch ausgerichteten Verfahren repräsentiert ein auf dem bekannten Moore-Algorithmus basierendes balanciertes Ordnungsreduktionsverfahren. Eine umfassende Übersicht über weitere Ordnungsreduktionsverfahren findet sich in [33].

Die Reglerreduktion kann grundsätzlich mit den selben Verfahren durchgeführt werden, wie sie auch zur Modellreduktion herangezogen werden. Dies wird durch die bereits gezeigte Strukturäquivalenz von Regelstrecke und Beobachterregler ermöglicht. Anstelle der Begriffe „Regler- bzw. Modellreduktionsverfahren“ wird daher im folgenden allgemein von „Ordnungsreduktionsverfahren“ gesprochen. Nachfolgend werden die Grundzüge der modalen und balancierten Ordnungsreduktion behandelt und die dort übliche Nomenklatur verwendet. Dabei steht  $B$  für die Eingangsmatrix,  $A$  für die Systemmatrix und  $C$  für die Ausgangsmatrix des linearen zeitinvarianten dynamischen Systems (Strecke bzw. Beobachterregler).

Bei den Literaturrecherchen zu diesem Thema zeigte sich, daß nicht alle Autoren unter dem Begriff „Reglerreduktion“ (engl.: „Controller Reduction“) auch dasselbe verstehen. So zählen einige den Weg über die Modellreduktion zum Regler reduzierter Ordnung auch unter die Rubrik Reglerreduktion. Dies widerspricht jedoch dem Verständnis dieser Arbeit, denn hier wird nur die Reduktion eines bereits entworfenen Reglers hoher Ordnung als Reglerreduktion bezeichnet.

### 2.2.1 Modale Ordnungsreduktion

Die Transformation der Zustandsdifferentialgleichung (2.1) auf Modalform (2.36) ist die Basis aller modalen Ordnungsreduktionsverfahren. So wird durch die Transformation über die Modalmatrix  $V$  mit

$$x = Vz \tag{2.35}$$

aus der Zustandsdifferentialgleichung (2.1)

$$\dot{z} = A^* z + B^* u \tag{2.36}$$

und aus der Ausgangsgleichung (2.2)

$$\tag{2.37}$$

Die Spalten der Modalmatrix  $V$  sind mit den Eigenvektoren von  $A$  besetzt.

Hierbei gibt sich für das auf Jordansche Normalform transformierte System:

$$A^* = V^{-1} A V \quad (2.38)$$

$$B^* = V^{-1} B \quad (2.39)$$

$$C^* = C V \quad (2.40)$$

Für den Fall, daß ein System nur einfache Eigenwerte besitzt - diese Eigenschaft weisen die in Kapitel 3 beschriebenen Systeme auf -, ist  $A^*$  eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonale mit den Eigenwerten des Systems besetzt ist.

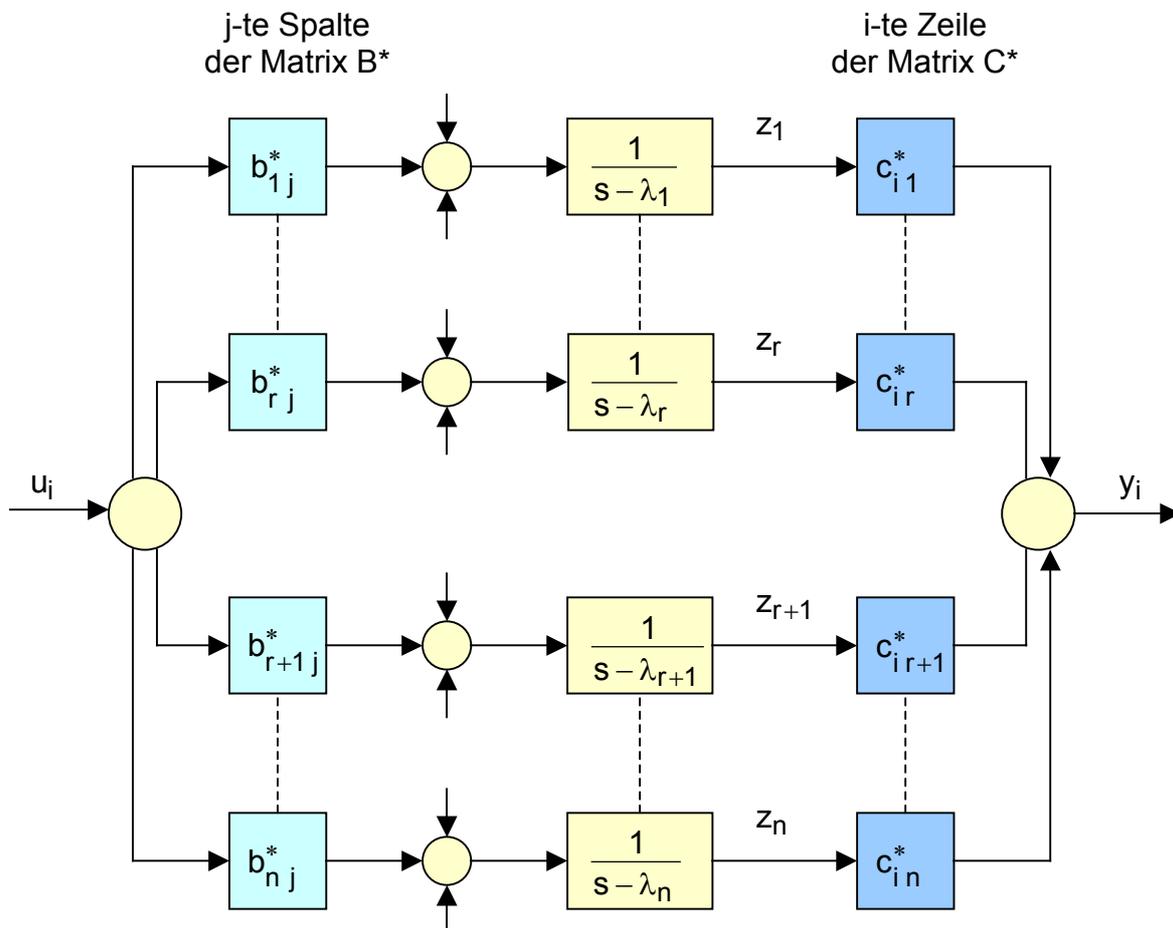
In einem nächsten Schritt stellt sich die Frage, welche Eigenwerte des Ausgangssystems vernachlässigt werden können, ohne dabei die Systemeigenschaften gravierend zu verändern. An dieser Stelle kommt die Dominanzanalyse ins Spiel, welche den Einfluß eines Eigenwertes auf das Gesamtsystemverhalten bewertet. Hierzu wird im folgenden ein Ansatz von Litz vorgestellt, der auch den Simulationen in Kapitel 3 zugrunde liegt. Natürlich gibt es auch andere Lösungsmethoden [17]; [41]; [42], über die es möglich ist, die Gleichung (2.36) in einen dominanten und einen nichtdominanten Teil zu zerlegen.

### ***Dominanzuntersuchung nach Litz***

Erste Arbeiten von Davison und Chidambara [13]; [14]; [15]; [17]; [18] verstanden unter dem Begriff Dominanz die Entfernung eines stabilen Eigenwertes von der imaginären Achse ( $|\operatorname{Re}(\lambda)|$ ). Nachdem nahe an der Imaginärachse liegende Eigenwerte das Systemverhalten stärker beeinflussen als weiter von ihr entfernte, wurde in einem ersten Ansatz das Dominanzmaß einzig über dieses Kriterium festgelegt. Darauf basierende Reduktionen auf die Systemordnung  $r$  lieferten jedoch nicht immer akzeptable Resultate, was weitere Arbeiten auf dem Gebiet der Dominanzanalyse zur Folge hatte. In diesem Zusammenhang führte Litz ein Dominanzmaß  $q_{ikj}$  (2.41) ein, das die Ein- / Ausgangsmatrizen des Systems mitberücksichtigt und damit die Steuer- und Beobachtbarkeit:

$$(2.41)$$

Dieser Quotient bezieht den Einfluß eines Eigenwertes  $\lambda_k$  auf den jeweiligen Übertragungspfad. Der  $i,j$ -te Übertragungspfad ist dabei derjenige, der vom  $j$ -ten Eingang zum  $i$ -ten Ausgang führt, vgl. Bild 2.11.



**Bild 2.11:** Signalübertragungsstruktur des modal transformierten Systems

Der Betrag von  $q_{ikj}$  aus (2.41) wird um so kleiner, je weiter der jeweilige Eigenwert  $\lambda_k$  links von der imaginären Achse liegt. Diese Tendenz entspricht der ursprünglichen Dominanzdefinition von Davison und Chidambara [13]; [14]; [15]; [17]; [18] wurde jedoch um den Einfluß der Ein- / Ausgangsmatrizen erweitert.

Die Werte  $b_{kj}^*$  und  $c_{ik}^*$  stellen für sich alleine keine Maßzahl für Steuer- bzw. Beobachtbarkeit dar. Erst die Multiplikation von  $C^*$  mit  $B^*$  (2.42) eliminiert den Einfluß Transformationsmatrix  $V$ .

$$C^* B^* = C V V^{-1} B = C B \quad (2.42)$$

Das Produkt von  $C^*$  und  $B^*$  ist somit von  $V$  unabhängig und daher als Maß für die Steuer- und Beobachtbarkeit des jeweiligen Übertragungspfades interpretierbar. Im weiteren wird  $q_{ikj}$  normiert (2.44), wobei  $\mu_i$  aus (2.43) als Normierungsfaktor dient und  $u_{j \max}$  der maximale Wert der Anregung ist. Der Endwert der Übergangsfunktion des  $i,j$ -ten Übertragungspfades wird dabei als  $y_{ij\infty}$  bezeichnet.

$$\mu_i = \max_{j=1,p} |y_{ij\infty} u_{j \max}| \quad (2.43)$$

Daraus ergibt sich folgende Definition für die Dominanz eines Eigenwertes  $\lambda_k$  bezogen auf einen Übertragungspfad  $i,j$ :

$$d_{ikj} = \frac{|q_{ikj} u_{j \max}|}{\mu_i} \quad (2.44)$$

Bildet man nun das Maximum über alle Pfade, so erhält man das Dominanzmaß  $M_k$  für den jeweiligen Eigenwert,

$$M_k = \max_{i=1,r} \left( \max_{j=1,p} d_{ikj} \right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.45)$$

Für die Summe aller Dominanzwerte  $d_{ikj}$  über alle Pfade  $i, j$  ergibt sich

$$S_k = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p d_{ikj}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.46)$$

Die dominanten Eigenwerte bedingen große Werte für  $M_k$  und  $S_k$ , was für gute Steuer- bzw. Beobachtbarkeit spricht. Deshalb bezeichnet man diese Dominanzmaße auch als Strukturdominanz.

Große Werte für  $M_k$  und  $S_k$  bedeuten nicht zwangsläufig auch eine starke Beeinflussung des Übertragungsverhaltens durch den jeweiligen Eigenwert. Aus diesem Grund wird ein neuer Dominanzwert eingeführt. Mit dessen Hilfe werden auch Pol-Nullstellen-Kompensationen berücksichtigt, was zur eigentlich wichtigen Größe für das Übertragungsverhalten macht.

$$\hat{d}_{ikj} = d_{ikj} A_{ij}(\lambda_k) \quad (2.47)$$

$A_{ij}(\lambda_k)$  ist der normierte Amplitudengang der Übertragungsfunktion  $G_{ij}$  des  $i,j$ -ten Übertragungspfades an der Stelle  $j|\lambda_k|$ .

$$A_{ij}(\lambda_k) = \frac{|G_{ij}(j|\lambda_k)|}{|G_{ij}(0)|} \quad (2.48)$$

Eigenwerte, die durch naheliegende Nullstellen kompensiert werden, haben keinen, oder nur einen kleinen Einfluß auf das Übertragungsverhalten, weshalb  $A_{ij}(\lambda_k)$  in solchen Fällen sehr klein oder gar Null ist.

Bildet man auch hier das Maximum und die Summe über alle Pfade, so erhält man die Dominanzmaße für die Übertragungsdominanz

$$\hat{M}_k = \max_{i=1,r} \left( \max_{j=1,p} \hat{d}_{ikj} \right), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.49)$$

und

$$\hat{S}_k = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \hat{d}_{ikj}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.50)$$

Auch hier gilt, je größer  $\hat{M}_k$  und  $\hat{S}_k$  desto dominanter ist der jeweilige Eigenwert bezüglich des Übertragungsverhaltens.

Mit Hilfe der Struktur- und Übertragungsdominanz von Litz ist es möglich, die Dominanz der Eigenwerte hinsichtlich ihrer Steuer- und Beobachtbarkeit und ihres Übertragungsverhaltens zu ermitteln. Anhand dieser Kriterien kann eine Aussage darüber getroffen werden, auf welche Ordnung  $r$  man das Originalsystem sinnvoll reduzieren kann, und welche Zustände unbedingt ins reduzierte System zu übernehmen sind. Hierfür wird das modaltransformierte System (2.36) in einen dominanten und einen nichtdominanten Teil zerlegt, wodurch das neu geordnete Differentialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & A_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^* \\ B_2^* \end{bmatrix} u \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^* & C_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

durch Transformation mit

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

entsteht. Nach Davison [17] wird nur der dominante Teil (Index 1) in das reduzierte Modell übernommen [24]; der andere Teil (Index 2) wird einfach abgeschnitten.

Hieraus ergibt sich für das durch einfaches Abschneiden modal reduzierte System

$$\dot{z}_1 = A_1^* z_1 + B_1^* u \quad (2.53)$$

$$\tilde{y}_1 = C_1^* z_1 . \quad (2.54)$$

Das reduzierte Modell weicht sowohl dynamisch als auch stationär vom Originalsystem ab. Zur Beseitigung des stationären Fehlers gibt es diverse Verfahren, von denen im folgenden das Verfahren von Guth vorgestellt wird. Es beruht auf einer Modifikation der Ein- und Ausgangsmatrix des durch Abschneiden reduzierten Systems und ist sowohl für die modale als auch die balancierte Ordnungsreduktion einsetzbar. Eine Zusammenstellung weiterer Verfahren findet sich in [32].

### ***Stationär genaue Ordnungsreduktion nach Guth***

Ursprünglich wurde das Verfahren von Guth zur stationär genauen Ordnungsreduktion balancierter Zustandsraummodelle vorgeschlagen [29]. Es kann jedoch auch zur Verbesserung der vorgestellten modalen Ordnungsreduktion angewendet werden. Durch Transformation auf Modalform bzw. balancierte Zustandsraumdarstellung und anschließender Eliminierung der für die Systemdynamik vernachlässigbaren transformierten Zustände, gehen Informationen über die stationären Endwerte der Zustands- und Ausgangsgrößen des Originalsystems verloren. Dies hat ein stationär ungenaues reduziertes System zur Folge. An dieser Stelle setzt

das Verfahren von Guth an. Über eine Modifikation der Ein- und Ausgangsmatrix des durch Abschneiden reduzierten Systems werden die in den eliminierten Zuständen steckenden Informationen hinsichtlich der stationären Endwerte in das reduzierte System überführt. Das Verfahren von Guth stößt an seine Grenzen, wenn die Anzahl der Systemeingänge größer ist, als die Ordnung des reduzierten Systems [22]. Im folgenden wird die schrittweise Vorgehensweise zur Anpassung der Ein- und Ausgangsmatrix des reduzierten Systems anhand der Nomenklatur der modalen Ordnungsreduktion vorgestellt.

Zunächst ist ausgehend vom transformierten System, Gl. (2.36), die Erweiterungsmatrix  $L$  zu berechnen, welche die Informationen der stationären Endwerte aller transformierten Zustandsgrößen enthält,

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = -A^{*-1} B^*. \quad (2.55)$$

Dabei hat  $L$  die Ordnung  $n$ ,  $L_1$  die Ordnung  $r$  (auf die reduziert werden soll) und  $L_2$  die Ordnung  $n - r$ .

Die Systemmatrizen des nach Guth reduzierten Systems ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} A_G &= A_1^* \\ B_G &= -A_1^* \cdot L_1 \\ C_G &= C_1^* + C_2^* \cdot L_2 \cdot L_1^{-1} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die Berechnung der modifizierten Ausgangsmatrix  $C_G$  erfolgt mit der Pseudoinversen  $L_1^{-1}$ . Der Index G steht für das nach Guth stationär genau reduzierte System. Die Matrizen  $A_1^*$ ,  $C_1^*$  und  $C_2^*$  stehen für die jeweiligen Untersysteme aus Gleichung (2.51).

## 2.2.2 Balancierte Ordnungsreduktion

Die balancierte Ordnungsreduktion geht auf Moore [45] zurück und verwendet eine balancierte Zustandsraumdarstellung. Diese liegt vor, wenn eine Diagonalmatrix  $\Sigma = P = Q$  existiert, welche folgende Lyapunov-Gleichungen bezüglich Steuer- und Beobachtbarkeit gleichzeitig erfüllt:

$$A P + P A^T = -B B^T \quad (2.57)$$

$$A^T Q + Q A = -C^T C \quad (2.58)$$

Nach Moore gibt es immer dann eine Lösung, wenn die Systemmatrix  $A$  stabil und das System minimal realisiert ist.

Die Matrix  $\Sigma$  wird auch als Gramsche des Systems bezeichnet und enthält auf der Hauptdiagonalen die Singulärwerte (Maßzahlen für die Steuer- und Beobachtbarkeit des Systems). Für den Fall, daß eine Matrix  $\Sigma$  gefunden wird, die sowohl Gleichung (2.57) als auch (2.58) genügt, ist jeder einzelne Zustand im System gleich gut steuer- wie beobachtbar. Die Diagonalelemente von  $\Sigma$  dienen als Maßzahlen zur Festlegung der Ordnung, auf die reduziert werden soll. Dabei stehen niedrige Maßzahlen für schlecht steuer- und beobachtbare Zustände und können bei der Reduktion wegfallen.

Nach [1] stellt die Bedingung der minimalen Realisation keine Einschränkung dar, weil man jedes System generell in vier Untersysteme zerlegen kann, von denen eines auf jeden Fall minimal realisiert ist. Die Unterteilung geschieht nach folgenden Systemeigenschaften:

1. Das System ist beobachtbar und steuerbar.
2. Das System ist beobachtbar aber nicht steuerbar.
3. Das System ist steuerbar aber nicht beobachtbar.
4. Das System ist weder steuerbar noch beobachtbar.

Ist ein System vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar, so spricht man von einem minimal realisierten System. Das bedeutet, daß die Ordnung des Systems minimal ist.

Die Begriffe der vollständigen Steuerbarkeit und vollständigen Beobachtbarkeit lassen sich wie folgt definieren:

Unter vollständig steuerbar versteht man, daß der Vektor der Zustandsgrößen  $x(t)$  mit Hilfe einer geeigneten Eingangsfunktion  $u(t)$  in endlicher Zeit, von seinem Anfangszustand  $x(t_0)$

ausgehend, in einen beliebigen Zustand  $x(t_1)$ , wobei  $t_1 > t_0$ , überführt werden kann. Dann gilt für die Steuerbarkeitsmatrix  $P$ :  $\text{Rang}(P) = n$ .

Ein System ist vollständig beobachtbar, wenn man über die Messung des Ausgangsvektors  $y(t)$  den Anfangszustand  $x(t_0)$  bestimmen kann. Dann gilt für die Beobachtbarkeitsmatrix  $Q$ :  $\text{Rang}(Q) = n$ .

Ein Spezialfall der minimalen Realisierung ist die balancierte Zustandsraumdarstellung, bei der jeder Zustand des balancierten Systems gleich gut steuer- wie beobachtbar ist. Auf die balancierte Zustandsraumdarstellung kommt man über eine Ähnlichkeitstransformation mit

$$x = T \tilde{x}. \quad (2.59)$$

Der Algorithmus von Moore [45] führt erst über ein transformiertes Zwischensystem zur endgültigen Transformationsmatrix  $T$ , mit der man das Originalsystem in eine balancierte Zustandsdarstellung überführt. [32] beschreibt diese Vorgehensweise wie folgt:

Über die Ähnlichkeitstransformation

$$x(t) = T \tilde{x}(t)$$

ergibt sich das balancierte System zu:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t) \\ y(t) &= \tilde{C} \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (2.60)$$

mit den modifizierten System-, Eingangs- und Ausgangsmatrizen

Zur Bestimmung der Transformationsmatrix  $T$  wird zuerst die Steuerbarkeitsmatrix  $P$  herangezogen. Sie läßt sich aus der Lyapunovgleichung (2.57) bestimmen. Aus der Trans-

formation von  $P$  auf reelle Diagonalform ihrer Singulärwerte ( $P = V_C \Sigma_C U_C^T$ ) erhält man die notwendigen Matrizen zur Bildung der Transformationsmatrix  $T_1$ .

Allgemeingültiger Einschub nach [11] Seite 266:

Als Singulärwerte einer reellen Matrix  $\Lambda$  vom Typ  $(m, n)$  mit dem Rang  $r$  bezeichnet man die positiven Wurzeln  $d_v = \sqrt{\lambda_v}$  ( $v = 1, 2, \dots, r$ ) aus den Eigenwerten  $\lambda_v$  der Matrix  $\Lambda^T \Lambda$ . Die zugehörigen Eigenvektoren  $u_v$  von  $\Lambda^T \Lambda$  heißen Rechtssingulärvektoren von  $\Lambda$ , die zugehörigen  $v_v$  von  $\Lambda \Lambda^T$  Linkssingulärvektoren. Dabei besitzt die Matrix  $\Lambda^T \Lambda$  dieselben  $r$  von Null verschiedenen Eigenwerte  $\lambda_v$  wie die Matrix  $\Lambda \Lambda^T$ .

Es gilt: Die Matrix  $\Lambda$  besitzt  $r$  positive Singulärwerte. Darüber hinaus existieren zum Singulärwert Null  $n - r$  orthonormierte Rechtssingulärvektoren  $u_v$  ( $v = r+1, \dots, n$ ) und  $m - r$  orthonormierte Linkssingulärvektoren  $v_v$  ( $v = r+1, \dots, m$ ). Die Vektoren  $u_v$  und  $v_v$  können zu den orthogonalen Matrizen  $U = (u_1, \dots, u_n)$  und  $V = (v_1, \dots, v_m)$  zusammengefaßt werden.

Die Darstellung  $\Lambda = V \hat{\Lambda} U^T$  mit

$$\hat{\Lambda} = \left( \begin{array}{cccc|ccc} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & & & \\ 0 & \dots & & 0 & d_r & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \text{ Zeilen} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ m-r \text{ Zeilen} \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{r \text{ Spalten}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n-r \text{ Spalten}}$$

heißt Singulärwertzerlegung der Matrix  $\Lambda$ . Die Matrix  $\hat{\Lambda}$  ist wie die Matrix  $\Lambda$  vom Typ  $(m, n)$  mit dem Rang  $r$  und enthält bis auf die ersten  $r$  Diagonalelemente nur Nullen.

Durch die Transformation  $\Lambda \rightarrow V \hat{\Lambda} U^T$ , mit der Matrix  $T_1 = U^T$  erhält man das transformierte, aber noch nicht balancierte Zwischensystem

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{2.61}$$

$\Sigma_C$  ist die Matrix der singulären Werte und  $V_C$  die Eigenvektormatrix. Der Index C steht für „controllable“. Bei diesem Zwischensystem ist die Steuerbarkeitsmatrix  $\hat{P}$  gleich der Einheitsmatrix. Nach Bestimmung der Beobachtermatrix  $\hat{Q}$  und deren Zerlegung über  $\hat{Q} = \hat{V}\hat{\Sigma}\hat{U}^T$  stehen die benötigten Matrizen zur Erzeugung einer weiteren Transformationsmatrix  $\hat{T}_2 = \hat{V}\hat{\Sigma}^{-1/4}$  zur Verfügung. Die Transformation über

$$\hat{x}(t) = \hat{T}_2 \tilde{x}(t)\tag{2.62}$$

liefert das balancierte System (2.60).

Die Matrizen des balancierten Systems sind:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \hat{T}_2^{-1}\hat{T}_1^{-1}A\hat{T}_1\hat{T}_2 \\ \tilde{B} &= \hat{T}_2^{-1}\hat{T}_1^{-1}B \\ \tilde{C} &= C\hat{T}_1\hat{T}_2\end{aligned}\tag{2.63}$$

Die Transformationsmatrix ergibt sich demnach zu:

$$T = \hat{T}_1\hat{T}_2 = V_C\Sigma_C\hat{V}\hat{\Sigma}^{-1/4}\tag{2.64}$$

Wie gezeigt führt der Algorithmus von Moore erst über ein Zwischensystem zur Lösung. Aus Gründen der Vereinfachung wird daher gerne auf das verbesserte Verfahren von Laub zurückgegriffen, welches direkt zum Ziel führt. Nach Laub [39]; [40] kann die Transformationsmatrix T wie folgt bestimmt werden:

- Bestimme P aus Gleichung (2.57).
- Zerlege P, so daß gilt  $P = L_C L_C^T$  (Cholesky).
- Bestimme Q aus Gleichung (2.58).
- Bestimme U über eine Singulärwertzerlegung von  $U^T (L_C^T Q L_C) U = \Sigma^2$ .
- Erzeuge T über  $T = L_C U \Sigma^{-1/2}$ .

Nach der Transformation auf die balancierte Zustandsraumdarstellung folgt die Reduktion durch einfaches Abschneiden. Bei der Ordnungsreduktion versucht man, wie schon erwähnt, die schlecht steuer- und beobachtbaren Zustände abzuschneiden, davon ausgehend, daß diese nur geringfügig Einfluß auf das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems haben.

Yousuff und Skelton präsentieren in [58] einen Algorithmus zur Reduktion der Systemordnung, der auf dem von Moore basiert. Der schrittweise Ablauf dieser Reduktion wird im folgenden dargestellt und ist unter dem Namen BCRA (Balanced Controller Reduction Algorithm) bekannt. Er eliminiert die nicht steuer- und beobachtbaren Zustände des Beobachterreglers hoher Ordnung (wenn solche existieren) und führt nach der unten angegebenen Vorgehensweise eine Reduktion auf die gewünschte Systemordnung durch, indem er die vergleichsweise schlecht steuer- und beobachtbaren Zustände abschneidet. In der vorliegenden Form können mit dem BCRA sowohl stabile Regelstrecken als auch für stabile Regelstrecken entworfene Beobachterregler reduziert werden. Bei der Beschreibung werden Hinweise auf gängige Matlab-Befehle gegeben, welche die Implementierung in eine Matlab-funktion erleichtern.

#### 1. Schritt:

Die Eigenwerte der Systemmatrix  $A$  (beim Beobachterregler:  $A_C$ ) des zu reduzierenden Systems müssen folgende Bedingungen erfüllen:

- a) Die Summe der Eigenwerte muß ungleich Null sein
- b) Die steuer- und beobachtbaren Eigenwerte sind asymptotisch stabil und führen zu einer Lösung der Lyapunov Gleichungen hinsichtlich Steuer- und Beobachtbarkeit

(2.65)

mit den Matrizen  $P$  (Steuerbarkeitsmatrix) und  $Q$  (Beobachtbarkeitsmatrix).

Dabei ist  $B$  die Eingangsmatrix (beim Beobachterregler:  $L$ ) und  $C$  die Ausgangsmatrix (beim Beobachterregler:  $K$ ) des Systems hoher Ordnung.

## 2. Schritt:

Jetzt werden die einzelnen Werte der Steuerbarkeitsmatrix über die sogenannte „singular value decomposition“ (SVD) ermittelt.

Dabei wird die Steuerbarkeitsmatrix  $P$  durch folgende Formel beschrieben:

$$P = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11}^T \\ U_{12}^T \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Über die „SVD“-Funktion in Matlab erhält man die zur Berechnung des reduzierten Systems (3. Schritt) benötigten Untermatrizen, für die gilt:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \text{diag}\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1r_1}\} \\ U_{11} &\in \mathfrak{R}^{n \times r_1} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Über Bildung einer neuen Steuerbarkeitsmatrix  $\tilde{P}$  und erneuter Anwendung des SVD-Verfahrens

$$\tilde{P} = \Sigma_1^{1/2} U_{11}^T Q U_{11} \Sigma_1^{1/2} = \begin{bmatrix} U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{21}^T \\ U_{22}^T \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

erhält man die für den 3. Schritt noch fehlenden Untermatrizen, wobei folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \text{diag}\{\sigma_{21}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{2r^*}\} \text{ mit } \sigma_{2,i} \geq \sigma_{2,i+1} \\ U_{21} &\in \mathfrak{R}^{r_1 \times r^*} \end{aligned} \quad (2.69)$$

## 3. Schritt:

Die Matrizen des reduzierten Systems (bzw. Beobachterreglers) der Ordnung  $r$  in der Form

$$(2.70)$$

werden über die Gleichungen (2.71) berechnet. Die im Anhang abgedruckte Matlab-Funktion bestimmt über Vorgabe der Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  des Systems hoher Ordnung und der Ordnung  $r$ , auf die reduziert werden soll, die Matrizen des reduzierten Systems

$$\begin{aligned} A_r &= \Sigma_r^{1/4} U_r^T \Sigma_1^{-1/2} U_{11}^T A U_{11} \Sigma_1^{1/2} U_r \Sigma_r^{-1/4} \\ B_r &= \Sigma_r^{1/4} U_r^T \Sigma_1^{-1/2} U_{11}^T B \\ C_r &= C U_{11} \Sigma_1^{1/2} U_r \Sigma_r^{-1/4} \end{aligned} \quad (2.71)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Sigma_r &= \text{diag}\{\sigma_{21}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{2r}\} \text{ mit } r \leq r^* \leq \eta \\ U_{21} &= [U_r \quad \bar{U}_r], \quad U_{21} \in \mathfrak{R}^{\eta \times r^*} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Weitere Einzelheiten sowie Beweise und Einschränkungen sind der Originalliteratur zu entnehmen. Die Vorstellung des Reduktionsalgorithmus an dieser Stelle dient in erster Linie zum Verständnis der in Kapitel 3 folgenden Anwendung der Konzepte. Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle noch darauf verwiesen, daß der vorgestellte Algorithmus über eine Modifikation auch einen für instabile Regelstrecken entworfenen Beobachterregler reduzieren kann. Die notwendigen Schritte hierfür sind ebenfalls in [58] beschrieben.

## **3 Anwendung der Konzepte**

Die Anwendung der Konzepte erfolgt an zwei unterschiedlichen Modellen. Dabei handelt es sich um ein Einwellen-Einstrom-Strahltriebwerk und ein Rotorsystem. Über die physikalische Beschreibung der nichtlinearen Zusammenhänge mit anschließender Linearisierung, gelangt man zu den linearisierten zeitinvarianten Zustandsraummodellen beider Systeme, welche den Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen hinsichtlich der Systemdynamik darstellen.

An die Streckenuntersuchungen schließt sich der Entwurf reduzierter Beobachterregler an. Die Theorie für die unterschiedlichen Vorgehensweisen, wurde bereits in Kapitel 2 ausführlich behandelt. Jedem Entwurf folgt eine Simulation mit Diskussion der Ergebnisse. Dabei wird sich zeigen, welcher Weg für die konkrete Anwendung am besten geeignet ist.

### **3.1 Simulationen am Triebwerksmodell**

Zunächst werden die Entwicklungsgeschichte und der Stand der Technik des Strahltriebwerks dargestellt. Dem schließt sich die Modellbeschreibung eines Einwellen-Einstrom-Strahltriebwerks an, die in einem linearisierten zeitinvarianten Zustandsraummodell 13. Ordnung mündet. Dabei wird das zugrundeliegende Modell um weitere Eingangsgrößen erweitert und die Meßgrößen der Praxis angeglichen. Darauf aufbauend folgen Simulation und Analyse des Streckenverhaltens, ehe die Reglerkonzepte am praktischen Beispiel angewendet werden.

#### **3.1.1 Entwicklungsgeschichte des Strahltriebwerkes und Stand der Technik**

Die Geschichte des Strahltriebwerkes [10] beginnt Ende des 19. Jahrhunderts. Gemäß [21] gründeten Charles E. L. Brown und Walter Boveri am 2. Oktober 1891 die BBC-Companie in Baden (Schweiz). Sie konstruierten den ersten High Speed AC Generator. Dabei handelte es sich um eine Weiterentwicklung des bereits 1866 von Werner von Siemens erfundenen Dynamos. In den Folgejahren galt das Augenmerk der Schweizer der Konzeption von Kühlern mit neuartigen Lufträdern. Dies hatte große Auswirkungen auf die Entwicklung von Verdichtern und somit wesentlichen Einfluß auf die Geschichte der Strahltriebwerke. Parallel zu den Schweizern patentierte der französische Ingenieur René Lorin im Jahr 1908 ein Strahltriebwerk basierend auf einer Kolbenmaschine. Fünf Jahre später ließ er sich weitergehende Entwicklungen zum Strahltriebwerk, den man heute eher als Staustrahlantrieb bezeichnen

würde, patentieren. Bei der Verbrennung entsteht Heißgas, welches sich auf Grund der Wärmezufuhr um das vier- bis fünffache ausdehnt. Durch die Begrenzung des Verbrennungsraumes führt die Volumenzunahme des Gases zu einer axialen Beschleunigung, welche das Gas nach hinten durch eine Düse ausströmen läßt. Um zu verhindern, daß das Heißgas auf dem Gaspfad nicht nach vorn entweicht, muß eine permanente Luftzufuhr mit ausreichend kinetischer Energie sichergestellt werden. Ein solches Triebwerk konnte zur damaligen Zeit allerdings nicht gefertigt werden, weil die dazu notwendigen wärmebeständigen Materialien nicht verfügbar waren.

In den Folgejahren bis 1935 lag die Priorität auf der Weiterentwicklung der Verdichter, was zu den ersten axialen Verdichterkonzepten führte. Anfang der 20er Jahre hatten die Strahlantriebe ein Gesamtdruckverhältnis  $\pi = 4$ , einen Gesamtwirkungsgrad  $\eta \approx 6\%$  und hielten einer Turbinentemperatur von  $T = 1000 \text{ K}$  stand.

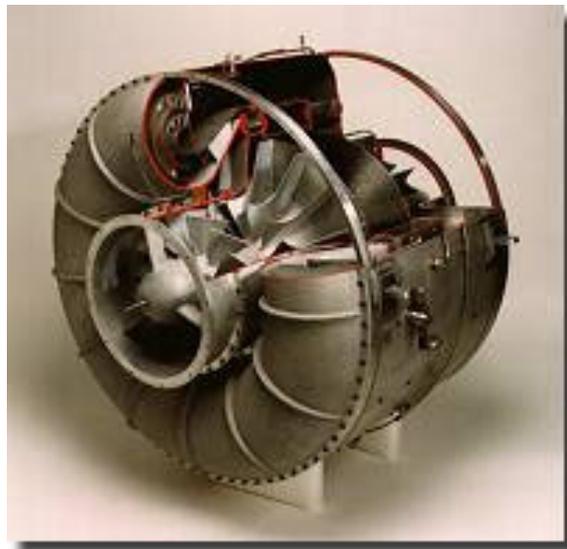
Während die Schweizer im Jahre 1926 bereits einen vierstufigen Axialverdichter entwickelten, war der Wissensstand über Strahlantriebe in den anderen europäischen Nationen nicht sehr hoch. In England war es zunächst nur A. A. Griffith, der sich in einem Aufsatz mit dem Thema Gasturbinen in Luftfahrzeugen beschäftigte. 1929 entwickelten die Engländer einen Axialverdichter mit einem Durchmesser  $d = 10 \text{ cm}$ , einem Wirkungsgrad  $\eta_V = 88,3 \%$  und einem Druckverhältnis  $\pi_V = 1,16$ .

Am 16. Januar 1930 war es dann der Brite Frank Whittle, dem das Patent, eine Gasturbine zur Erzeugung eines energiereichen Antriebstrahls zu nutzen, zugesprochen wurde. Der Entwurf sah einen zweistufigen Axialverdichter mit einem nachfolgenden einstufigen Radialverdichter vor, die von einer zweistufigen Axialturbine angetrieben wurden. Whittle stellte dieses Konzept einem Experten-Komitee vor. Das Komitee entgegnete dem Briten, daß dieses Triebwerkskonzept für Langstreckenflüge ungeeignet sei. In den Folgejahren war Frank Whittle mit seinem nachgeschalteten Radialkonzept Einzelkämpfer auf diesem Gebiet. Ihm fehlten jedoch die finanziellen Mittel, um seine Entwicklung schnell voran zutreiben.

Den nächsten Meilenstein in der Entwicklung der Strahlantriebe setzen wiederum die Schweizer. In den Jahren 1931/32 konstruierten sie eine Turbogruppe, die dem Antrieb vorgeschaltet war. Durch den Turbo wird die Luft unter Druck in die Brennkammer geleitet, was zu einem höheren Wärmeübergang führt. Die Funktion der Turbogruppe erforderte einen

Startermotor. Die Schweizer Entwickler erkannten in ihm Generatoreigenschaften. Das Gesamtkonzept hatte dadurch sehr viel Ähnlichkeit mit einer Gasturbine.

In Deutschland gelang es erstmals dem damaligen Physikstudenten Hans-Joachim Pabst von Ohain zusammen mit dem Kraftfahrzeugmechaniker Max Hahn 1935 in Göttingen ein einfaches Modell einer Gasturbine zu bauen. Das Patent hierzu wurde 1935 beantragt und 1937 unter dem Titel „Verfahren und Apparat zur Herstellung von Luftströmungen zum Antrieb von Flugzeugen“ erteilt. Aufgrund intensiver Förderung und Unterstützung durch die Heinkel-Flugzeugwerke konnte eine weiterentwickelte Gasturbine des Typs He S-3 (Bild 3.1) bereits 1937 als funktionierendes Triebwerk einen erfolgreichen Testlauf verbuchen.



**Bild 3.1:** Die Gasturbine He S-3 (Hans-Joachim Pabst von Ohain, 1937)

Bereits zwei Jahre später hatte das von der Firma Heinkel konzipierte erste Strahlflugzeug der Welt, die He 178 (Bild 3.2), am 27. August 1939 in Rostock seinen Erstflug [46].



**Bild 3.2:** Die He 178, das erste Strahlflugzeug der Welt

Wiederum zwei Jahre später war das Whittle-Patent von 1930 so weit ausgereift, daß es am 15. Mai 1941 zum Erstflug eines Strahlflugzeuges mit Whittle-Triebwerk kam. Dem Entwickler selbst wurde jedoch schnell klar, daß er ein Triebwerk mit verbessertem Vortriebswirkungsgrad konzipieren müsse. Er setzte dem bisherigen Turbojet einfach im hinteren Bereich einen Fan auf und entwickelte somit einen Antrieb, den man heute als Turbofan bezeichnet. Mit dieser Neuerung erreichte er, daß ein größerer Luftanteil um das Kerntriebwerk herumgeführt wird. Trotz kleiner Austrittsgeschwindigkeiten aus dem Kerntriebwerk wird dennoch ein großer Schub erzeugt und somit ein besserer Vortriebswirkungsgrad erreicht. Zu diesem Bypasstriebwerkspatent erarbeitete der Brite sich noch weitere Strahltriebwerkspatente, unter anderem im Jahr 1947 das für einen Turbopropantrieb. Whittle gehört damit zu den Personen, die die Geschichte der Strahlantriebe wesentlich prägten.

Die Entwicklungsgeschichte der Triebwerke erfuhr in der Folgezeit einen großen Aufschwung. Dabei wurde die Weiterentwicklung vor allem durch die permanente Forderung der Militärs nach leistungsfähigeren Triebwerken vorangetrieben. Heute gibt es eine Vielzahl diverser Triebwerkstypen, die sich nach [10] in zwei Kategorien unterteilen lassen:

- Turbostrahltriebwerke
- Wellenleistungstriebwerke

Turbostrahltriebwerke erzeugen ihren Schub ausschließlich durch die aero-thermodynamische Beschleunigung des sie durchströmenden Gases. Im Gegensatz dazu läßt sich der Schub bei Wellenleistungstriebwerken nicht genau ermitteln, weil er z.B. von der Wahl des Propellers abhängt. Die an die Welle abgegebene Leistung ist jedoch spezifizierbar. Wellenleistungstriebwerke werden hauptsächlich zur Energiegewinnung, als Propellerturbinentriebwerke und Hubschraubertriebwerke eingesetzt.

Beide Triebwerksgruppen lassen sich des weiteren anhand ihrer Wellenzahl kategorisieren:

- Einwellentriebwerke
- Mehrwellentriebwerke (Zwei- oder Dreiwellentriebwerke)

Eine Welle ist dadurch gekennzeichnet, daß sie sowohl eine Verdichter- als auch eine Turbinenbeschaufelung trägt [30]. Die ein- und mehrwelligen Turbostrahltriebwerke können zudem in

- Einstromtriebwerke und
- Zweistromtriebwerke

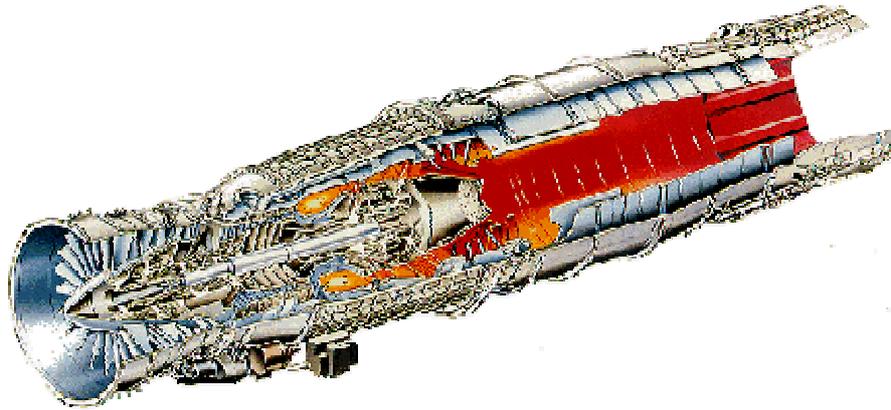
unterschieden werden.

Einstromtriebwerke nennt man auch Einkreis- oder Turbojettriebwerke. Dabei wird die angesaugte Luft auf einem Weg durch das Kerntriebwerk geleitet. Zweistromtriebwerke werden auch als Zweikreis-, Bläser-, Bypass- oder Turbofantriebwerke bezeichnet. Bei diesem Triebwerkstyp wird der Fan von einer hinter dem Kerntriebwerk liegenden mehrstufigen Niederdruckturbinen angetrieben. Ein großer Teil der vom Triebwerk angesaugten Luftmasse wird am Kerntriebwerk vorbei beschleunigt.

Die vom Militär geforderten Leistungsdaten werden erst durch den Einsatz von Nachbrennern erreicht. Sie bewirken eine Schubsteigerung von bis zu 70%. Aufgrund des stark erhöhten Brennstoffverbrauchs kann der Einsatz nur in zeitlich begrenzten Extremsituationen, wie z.B. beim Beschleunigen auf Überschall, erfolgen. Der Nachbrenner ist deshalb in der zivilen Nutzung nicht erforderlich. Er wird primär bei Kampfflugzeugen eingesetzt.

Eines der derzeit aktuellsten Triebwerke ist das EJ200 des Eurofighters, welches in Bild 3.3 nach [60] schematisch dargestellt ist.

Das EJ200 ist ein Mehrwellenturbofantriebwerk mit Nachbrenner. Dieses Zweiwellentriebwerk besitzt 3 Verdichterstufen und 5 Kompressorstufen sowie je eine Turbinenstufe mit Monokristallschaufeln pro Welle und einen Verdampfer-Brenner. Geregelt werden die Abläufe in den Triebwerken über volldigitale mit der Flugsteuerung gekoppelte Triebwerks-



**Bild 3.3:** Schemazeichnung des EJ200

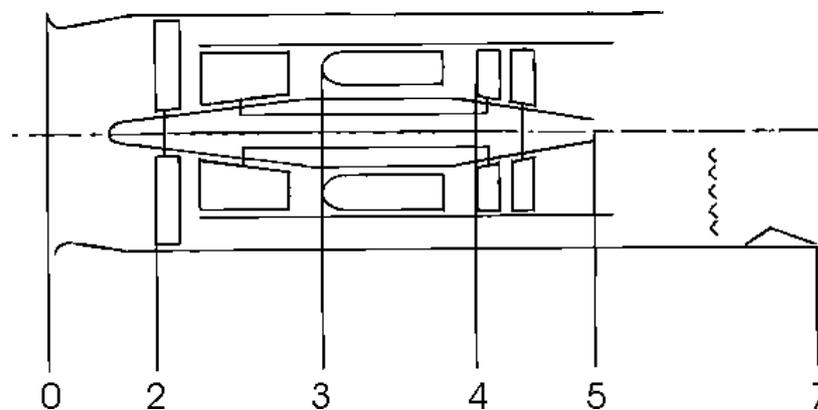
regler (FADEC = full authority digital engine control). Als Stellgrößen werden hierbei Brennstoffmassenströme (Brennkammer und Nachbrenner), Düsenverstellung, Handling Bleed und Leitschaufelverstellung genutzt [36]. Die Schubkraft des Triebwerks beträgt ohne Nachverbrennung (trocken) 6.118 kg (60 kN), mit Nachbrenner werden Werte bis 9.178 kg (90 kN) erreicht. Der Treibstoffverbrauch liegt mit Trockenschub bei maximal 166 Liter/Minute, mit Nachbrennereinsatz bei maximal 530 Liter/Minute. Weitere technische Daten sind in Tabelle 3.1 aufgeführt [52].

max. Standschub/Nachbrenner	90 kN
max. Standschub trocken	60 kN
Masse	990 kg
Länge	4,00 m
Durchmesser	0,74 m
Luftdurchsatz	75-77 kg/s
Nebenstromverhältnis	0,4
Konfiguration (Verdichter/Turbinenstufen)	3+5/1+1+Nachbrenner
Eingebaut in	Eurofighter

**Tabelle 3.1:** Technische Daten des EJ200

### 3.1.2 Modellbeschreibung und Streckenuntersuchung

In diesem Abschnitt werden die allgemeinen physikalischen Grundlagen des idealen und realen Gasturbinenprozesses erläutert und darauf aufbauend das Funktionsprinzip der einzelnen Triebwerkskomponenten erklärt. Die Modellbildung für das ausgewählte Einwellen-Einstrom-Strahltriebwerk basiert auf dem Energie-, Impuls- und Kontinuitätssatz. Ausgehend von den Systemgleichungen, welche in [32] näher beschrieben sind, und der Linearisierung an einem Arbeitspunkt erhält man ein linearisiertes Zustandsraummodell 13. Ordnung (Systemmatrizen siehe Anhang). Dieses beschreibt mit je einer Gleichung für Druck, Temperatur und Massenstrom, den Gasaufstau in den einzelnen Komponenten (Verdichter, Brennkammer, Turbine und Schubdüse). Neben den besagten 12 Gleichungen existiert noch eine weitere Gleichung für die Drehzahl. Zum besseren Verständnis wird die Wirkungsweise der einzelnen Triebwerkskomponenten erklärt. Bild 3.4 zeigt den schematischen Aufbau eines Strahltriebwerks. Die Ebenenangaben entsprechen dabei den Indizes der im Anhang abgedruckten Zustandsgrößen und stehen für die entsprechende Stelle im Triebwerk.



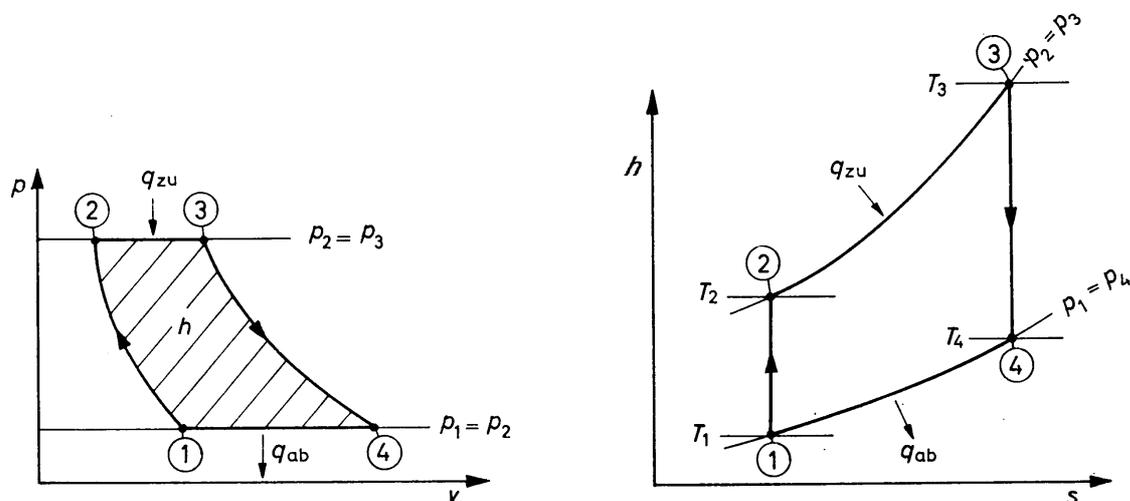
**Bild 3.4:** Schematischer Aufbau eines Triebwerks [32]

In [32] wurde als einzige Eingangsgröße der Massenbrennstoffstrom berücksichtigt, was für die Untersuchungen verschiedener Modellreduktionsverfahren ausreichend war. Nachdem in dieser Arbeit Regelungen untersucht werden sollen, erscheint es sinnvoll, das System um eine weitere Stellgröße und eine Störgröße zu erweitern. Bei neueren Triebwerken wird häufig neben dem Brennstoffmassenstrom auch die Düsenaustrittsfläche als zusätzliche Stellgröße verwendet [4]; [54]; [56]. Die entsprechende Erweiterung des Modells wird bei der Beschreibung der Schubdüse vorgestellt. Bezüglich der Störgröße wird der Einfluß von plötzlich aus dem Verdichter austretender Leckluft modelliert und simuliert. Der Simulation liegt

die Annahme zu Grunde, daß sich der stationäre Wert des Bleedluft-Massenstroms, welcher beispielsweise für zellenseitige Zwecke oder zur Schaufelkühlung verwendet wird, schlagartig um zehn Prozent erhöht. Zu solch einem Verhalten kann es beispielsweise durch ein Leck im Luftkanal kommen. Regelgröße des Modells ist die Drehzahl. Diese wird bei allen gängigen Triebwerken gemessen und wird daher auch für den Reglerentwurf als vorhandene Meßgröße angenommen. Als weitere Meßgrößen stehen der Druck am Verdichteraustritt und die Temperatur am Turbinenaustritt zur Verfügung. Die Auswahl der Meßgrößen stützt sich auf [19]; [30]; [54]; [56] und ändert die Ausgangsmatrix C des linearisierten Zustandsraummodells von [32] entsprechend.

### Physikalische Grundlagen

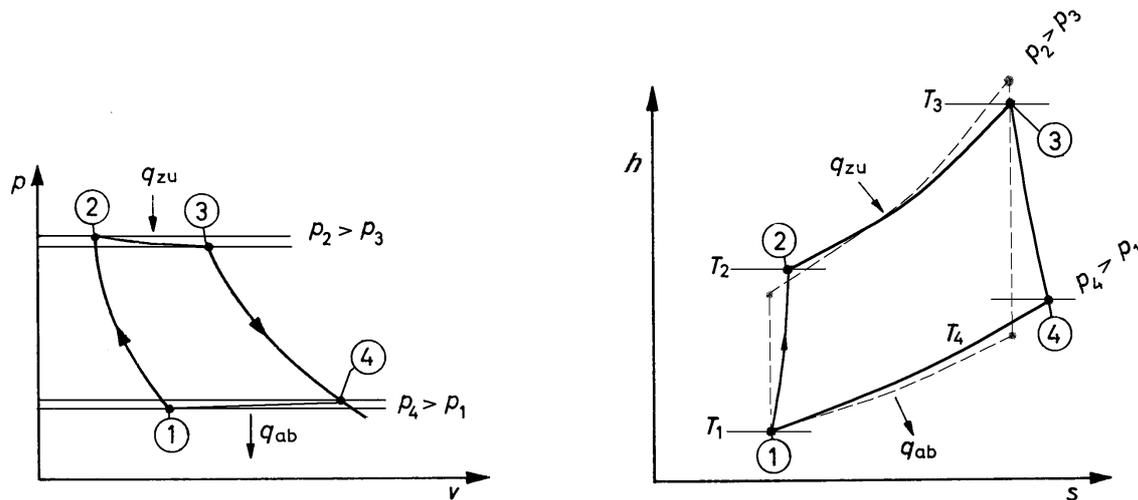
Ausgehend vom thermodynamischen Kreisprozeß einer Gasturbine werden die zur Modellbildung notwendigen Grundgleichungen hergeleitet.



**Bild 3.5:** Druck-Volumen-Diagramm  $p(v)$  und Enthalpie-Entropie-Diagramm  $h(s)$  eines idealen Gasturbinenprozesses [20]

In Bild 3.5 ist ein idealer Kreisprozeß einer Gasturbine dargestellt. Das Arbeitsmedium wird im ersten Schritt ( 1-2 ) adiabatisch verdichtet, d.h. sein Volumen  $V$  nimmt unter gleichzeitiger Druckzunahme  $p$  ab. Die Entropie  $s$  bleibt bei diesem Vorgang konstant, d.h. es findet ein reversibler Prozeß statt. Im zweiten Schritt ( 2-3 ) findet eine isobare Wärmezufuhr ( $q_{zu}$ )

statt. Darauf folgt in Schritt drei ( 3-4 ) die isentrope Entspannung des erhitzten Arbeitsmediums, ehe im letzten Schritt durch isobare Wärmeabfuhr ( $q_{ab}$ ) wieder der Ausgangszustand erreicht wird.



**Bild 3.6:** Druck-Volumen-Diagramm  $p(v)$  und Entropie-Enthalpie-Diagramm  $h(s)$  eines realen Gasturbinenprozesses

Im realen Gasturbinenprozeß (Bild 3.6) sind gegenüber dem idealen Prozeß Verluste zu erkennen. Im ersten Prozeßschritt werden diese vor allem durch Verwirbelungen und Undichtigkeiten (Druckverlust) hervorgerufen. Die Zustandsänderung ( 1-2 ) verläuft daher nicht mehr isentrop. Im zweiten Prozeßschritt ( 2-3 ) wird deutlich, daß im Gegensatz zum idealen Prozeß ein Druckverlust auftritt und die Wärmezufuhr somit nicht mehr isobar erfolgt. Auch die Expansion ( 3-4 ) erfolgt nicht verlustfrei. Hier treten, ähnlich wie beim Verdichten vor allem Undichtigkeits- und Wirbelverluste auf. Im letzten Schritt ( 4-1 ) wird das Arbeitsmedium noch weiter entspannt und wieder auf Umgebungsbedingung gebracht. Zu den bisher genannten Verlusten kommen in allen Prozeßschritten noch Verluste bedingt durch Wärmeübergänge an den Triebwerksteilen hinzu.

Im Unterschied zum Kolbenmotor laufen die einzelnen Prozeßschritte bei der Gasturbine nicht nacheinander, sondern gleichzeitig ab, wodurch sich ein kontinuierlicher Energieumsatz ergibt. Gasturbinen zeichnen sich gegenüber anderen Verbrennungskraftmaschinen durch einen vibrationsärmeren Lauf und ein höheres Nutzleistungs-/Eigengewichtsverhältnis aus.

Die allgemeine Herleitung der Systemgleichungen für das Triebwerk erfolgt unter Annahme einer eindimensionalen Betrachtungsweise über

$$\text{Energiesatz} \quad \int_{x_E}^{x_A} A \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( c_v T_S + \frac{w^2}{2} \right) \right] dx = c_p \left[ \dot{m}_E (T_t)_E - \dot{m}_A (T_t)_A \right], \quad (3.1)$$

$$\text{Impulssatz} \quad \int_{x_E}^{x_A} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} dx = A \left[ (P_t)_E - (P_t)_A \right] \quad \text{und} \quad (3.2)$$

$$\text{Kontinuitätssatz} \quad \int_{x_E}^{x_A} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \dot{m}_E - \dot{m}_A. \quad (3.3)$$

Dabei ist  $A$  die Fläche,  $\dot{m}$  der Massenstrom,  $\rho$  die Dichte,  $w$  die Strömungsgeschwindigkeit,  $T$  die Temperatur,  $P$  der Druck,  $c_v$  die Wärmekapazität bei konstantem Volumen und  $c_p$  die Wärmekapazität bei konstantem Druck. Die Indizes  $E$  und  $A$  kennzeichnen die Ein- bzw. Austrittsebene. Ein Verzeichnis aller verwendeten Symbole befindet sich im Anhang.

Aus Energie-, Impuls-, und Kontinuitätssatz wird in [32] ein Satz von Grundgleichungen für den Gasaufstau in den einzelnen Triebwerkskomponenten entwickelt, welcher Ausgangspunkt bei der Herleitung der Gleichungen für das System war. Für jedes Teilsystem wird je eine Gleichung für den Massenstrom  $\dot{m}$  (3.4), den Totaldruck  $P_t$  (3.5) und die Totaltemperatur  $T_t$  (3.6) sowie eine Gleichung für Drehzahl (Energiespeicherung im Rotor) (3.7) aufgestellt. Somit entsteht ein Differentialgleichungssystem 13. Ordnung.

$$\text{Massenstrom:} \quad \frac{d\dot{m}}{dt} = \frac{AK_3}{\Delta x} (\pi P_{t,E} - P_{t,A}) \quad (3.4)$$

$$\text{Druck:} \quad \frac{dP_t}{dt} = \frac{RK_2}{V c_v} (\dot{m}_E c_{p,E} T_{t,E} - \dot{m}_A c_{p,A} T_{t,A} + P_W) \quad (3.5)$$

$$\text{Temperatur:} \quad (3.6)$$

$$\text{Rotordrehzahl:} \quad (3.7)$$

In Gleichung (3.4) für den Massenstrom steht für die Länge der betrachteten Komponente  $\Delta x = x_A - x_E$ . Der Vorfaktor  $K_3$  ist im wesentlichen eine Funktion der Machzahl  $Ma$ . Die exakte Beziehung lautet:

$$K_3 = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{-\kappa}{\kappa - 1}} = 1 - \frac{\kappa}{2} Ma^2 + \frac{\kappa(2\kappa - 1)}{8} Ma^4 - \dots + \dots \quad (3.8)$$

Für kleine Fluggeschwindigkeiten ( $Ma < 0,5$ ) kann die Reihenentwicklung nach dem quadratischen Term abgebrochen werden. Bei der Modellbildung in [32] wurde die Fluggeschwindigkeit nicht als Eingangsgröße vorgesehen und somit am Arbeitspunkt  $K_3 = 1$  gesetzt.

Die Beziehung für den Vorfaktor  $K_2$  in der Gleichung (3.5) für den Druck  $P_t$  lautet:

$$K_2 = \frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}}{\frac{1}{2} Ma^2 \kappa (\kappa - 1) + 1} \quad (3.9)$$

Im Unterschallbereich und somit auch im Standfall (Arbeitspunkt) kann für  $K_2$  in guter Näherung immer der Wert 1 gesetzt werden.

Die Formel für  $K_1$  aus Gleichung (3.6) lautet

$$K_1 = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}, \quad (3.10)$$

wobei für  $K_1$  im vorliegenden Fall ebenfalls 1 gesetzt werden kann.

Im folgenden werden die einzelnen Triebwerkskomponenten erläutert. Die zugehörigen Systemgleichungen und Weiterführendes zur Modellbildung kann [32] entnommen werden. Die Erweiterung des Modells hinsichtlich Bleed- und Leckluft wird beim Verdichter behandelt. Die physikalische Beschreibung für die variable Düsenaustrittsfläche findet sich bei den Ausführungen zur Schubdüse. Die daraus resultierenden, im Vergleich zum Ursprungsmodell veränderten Matrizen des linearisierten Zustandsraummodells, befinden sich im Anhang

dieser Arbeit. Auf ihnen basieren die Streckenuntersuchungen hinsichtlich der Systemdynamik.

### ***Triebwerkseinlauf***

Der Triebwerkseinlauf versorgt den Verdichter mit dem zur Aufrechterhaltung des thermodynamischen Kreisprozesses notwendigen Luftmassenstrom. Er soll unabhängig von der Fluggeschwindigkeit eine möglichst gleichbleibende Anströmgeschwindigkeit für den Verdichter liefern. Dazu muß er je nach Betriebsfall in der Lage sein, den einströmenden Luftmassenstrom zu verzögern oder zu beschleunigen. In ihm selbst findet zwar kein Energieumsatz statt, er ist aber trotzdem für den Wirkungsgrad des Gesamttriebwerkes ein wichtiger Einflußfaktor, der bei der Konstruktion des Triebwerkes selbst, wie auch des Gesamtsystems Flugzeug berücksichtigt werden muß. Bei dem vorliegenden Modell wurden die Einlaufkomponente als verlustlos angenommen, d.h. die Eintrittsbedingungen in den Verdichter entsprechen den Umgebungsbedingungen.

### ***Verdichter***

Im Verdichter wird die einströmende Luft mit Hilfe von ein- oder mehrstufigen Axial- oder Radialverdichterstufen annähernd adiabatisch komprimiert, d.h. das Luftvolumen reduziert und die Dichte erhöht. Dabei findet die gewünschte Druckerhöhung unter Zunahme der Temperatur des durchströmenden Arbeitsmediums statt. Die einströmende Luft wird durch die sich mit hoher Geschwindigkeit drehenden Luftschaufeln stark beschleunigt und die kinetische Energie der Luft anschließend in potentielle Energie umgewandelt. Das Verdichterdrukverhältnis  $\pi_V = P_{t3} / P_{t2}$  kennzeichnet den Grad der Komprimierung, den die einströmende Luft erfährt. Typische Werte sind z.B. 3 bis 8 für einstufige Radialverdichter und 1,2 bis 1,6 für einstufige Axialverdichterstufen. Aufgrund des geringen erreichbaren Druckverhältnisses für eine einzelne Verdichterstufe werden Axialverdichter in aller Regel mehrstufig ausgeführt. Während sich Radialverdichter für Triebwerke mit einem Luftdurchsatz bis etwa 60 kg/s eignen, können mehrstufige Axialverdichter für weitaus höhere Luftmassenströme konzipiert werden. Der Verdichtewirkungsgrad eines Axialverdichters ist außerdem bei höheren Luftdurchsätzen größer als der eines Radialverdichters.

Um den Einfluß der Bleed- bzw. Leckluft physikalisch zu fassen, müssen die aus [32] bekannten Gleichungen für den Verdichterdruck und die –temperatur bezüglich des Bleedluftmassenstroms  $\dot{m}_{bl}$  wie folgt angepaßt werden:

$$\frac{d}{dt} P_3 = \frac{RK_2}{V_v c_v} (\dot{m}_2 c_{p2} T_2 - \dot{m}_3 c_{p3} T_3 + \frac{1}{\eta_v} \dot{m}_2 \Delta h_v - \dot{m}_{bl} c_{p3} T_3) \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} T_3 = \frac{T_3}{P_3} \left[ \frac{d}{dt} P_3 - \frac{K_1 R T_3}{V_v} (\dot{m}_2 - \dot{m}_3 - \dot{m}_{bl}) \right] \quad (3.12)$$

Durch die Verdichterluftentnahme wird dem Prozeß Energie entzogen, was letztendlich einen Abfall der Drehzahl zur Folge hat. Dieser Effekt kann z.B. durch plötzlich austretende Leckluft hervorgerufen werden und dient als Störgröße für die spätere Regelung.

Die zur Verdichtung des Arbeitsmediums notwendige Arbeit muß von der Turbine aufgebracht werden. Da die vom Verdichter aufgezehrte Turbinenenergie nicht als Nutzarbeit zur Verfügung steht, wird bei der Konstruktion Wert auf einen möglichst hohen Verdichtereffizienzgrad gelegt.

### ***Brennkammer***

In der Brennkammer wird das Arbeitsmedium annähernd isobar erwärmt, indem in die durchströmende Luft ein meist flüssiger Brennstoff eingespritzt und entzündet wird. Dabei nimmt der Wirkungsgrad des Gesamtsystems mit steigender Brennkammertemperatur zu. Allerdings sind durch Materialeigenschaften hier Grenzen gesetzt. Je nach Bauart unterscheidet man zwischen Einzel- und Ringbrennkammer. Eine weitere kennzeichnende Größe für das Betriebsverhalten einer Brennkammer ist der Ausbrandgrad. Er beschreibt, welche Menge des eingespritzten Treibstoffes auch tatsächlich während der Verweildauer des zündfähigen Gemisches in der Brennkammer umgesetzt wird.

Eine Stellgröße des Modells ist der Brennstoffmassenstrom  $\dot{m}_2$ , dessen Einfluß in [32] beschrieben wird.

### ***Turbine***

In der Turbine werden die heißen Verbrennungsgase adiabatisch entspannt. Dem Arbeitsmedium wird hier die zum Antrieb des Rotors notwendige Arbeit entzogen. Die restliche Energie, die nicht zum Antrieb von Verdichter und Hilfsaggregaten sowie zur Deckung von Verlusten benötigt wird, dient zur Erzeugung eines Nutzmomentes oder des Schubes. Das durchströmende Gas kühlt dabei ab und verliert an Druck, während sein Volumen sich gleichzeitig vergrößert. Im Prinzip funktioniert die Turbine in umgekehrter Weise zum Verdichter. Die im Arbeitsmedium gespeicherte Energie wird in ihr wieder in kinetische Energie umgewandelt. Grundsätzlich ist die Turbine daher auch als axiale und radiale Ausführung denkbar, jedoch bleibt in der Praxis der Einsatz von Turbinen mit radialer Durchströmung auf kleine Nutzleistungen beschränkt.

### ***Schubdüse***

In der Schubdüse wird der austretende Gasstrahl weiter entspannt und auf annähernd Umgebungsbedingungen gebracht. Das von der Turbine zur Verfügung stehende Gasvolumen wird hier in eine Austrittsgeschwindigkeit und damit in Vortrieb umgewandelt. Im Verlauf der Durchströmung der Schubdüse nimmt der Druck des Arbeitsmediums stetig ab, während seine Geschwindigkeit ansteigt.

Als weitere Stellgröße des Triebwerks steht die Schubdüsenaustrittsfläche  $A_7$  zur Verfügung. Eine Änderung dieser Größe wirkt sich auf den Massenstrom  $\dot{m}_7$  nach [3] wie folgt aus:

$$\dot{m}_7 = \frac{c_7 P_{s7} A_7}{R T_{s7}} \quad (3.13)$$

Dies muß bei der Linearisierung der Gleichungen entsprechend berücksichtigt werden.

### ***Linearisiertes Zustandsraummodell***

Aus den erweiterten linearisierten Gleichungen und den bekannten Arbeitspunktdaten (siehe Anhang) von [32] ergeben sich die im Anhang abgedruckten Matrizen A, B, C und D des linearisierten zeitinvarianten Zustandsraummodells 13. Ordnung

$$\dot{x} = A x + B u, \quad (3.14)$$

$$y = C x \quad (3.15)$$

mit den Stellgrößen Massenbrennstoffstrom  $u_1 = \dot{m}_{br}$  und Schubdüsenaustrittsfläche  $u_2 = A_7$  sowie der Störgröße Bleedluft / Leckluft  $u_3 = \dot{m}_{bl}$ . Als Meßgrößen stehen zur Verfügung der Druck am Verdichteraustritt  $y_1 = P_3$ , die Temperatur am Turbinenaustritt  $y_2 = T_5$  und die Drehzahl  $y_3 = n$ . Die Definition der Zustandsgrößen befindet sich im Anhang.

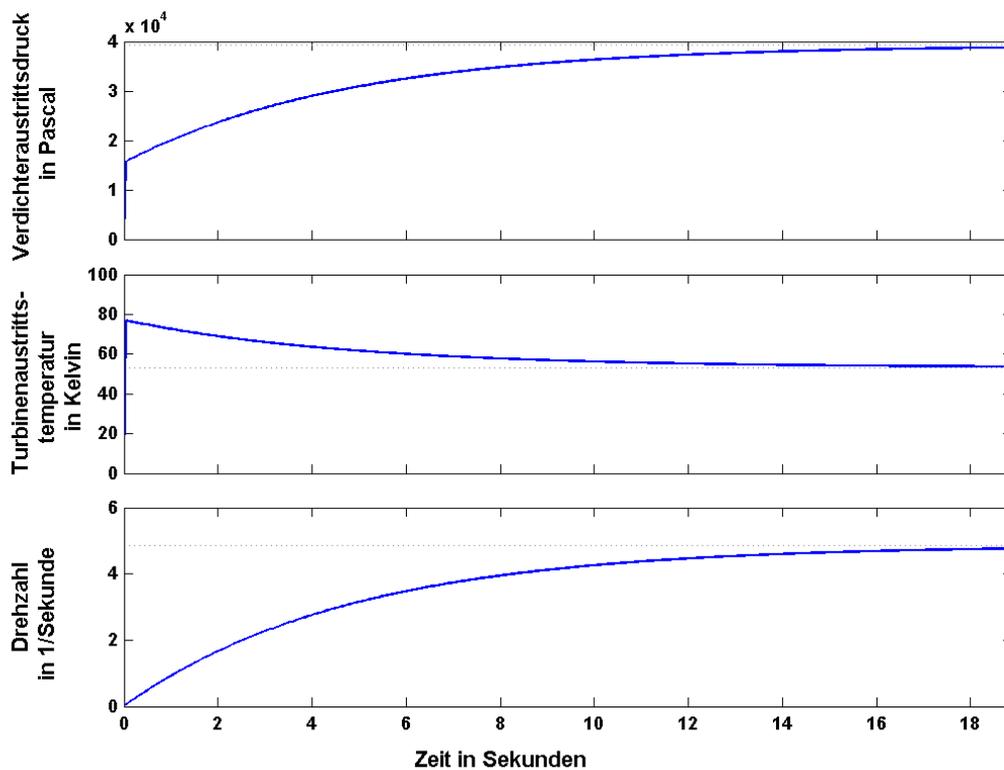
### ***Streckenuntersuchung***

Für die Streckenuntersuchung werden Analysemethoden aus dem Zeitbereich eingesetzt. Anhand der in Tabelle 3.2 abgedruckten Eigenwerte des am Arbeitspunkt linearisierten Zustandsraummodells und dessen Struktur (vgl. Systemmatrizen im Anhang) zeigt sich, daß es sich beim Triebwerk um ein steifes System handelt.

Realteil	Imaginärteil
-0,2090	0
-119,0056	-10,3347
-119,0056	10,3347
-333,0593	0
-359,3387	-1537,0026
-359,3387	1537,0026
-572,0159	-2488,6793
-572,0159	2488,6793
-698,4012	0
-1297,7964	-231,2353
-1297,7964	231,2353
-1334,7808	0
-134814,32	0

**Tabelle 3.2:** Eigenwerte der Strecke (A)

Die Untersuchungen hinsichtlich des Steuer- und Störverhaltens erfolgen anhand von Sprungantworten ausgehend vom Arbeitspunkt. Dabei werden jeweils die Auswirkungen auf die Ausgangsgrößen bei Erhöhung der jeweiligen Eingangsgröße um 10 Prozent aufgenommen.

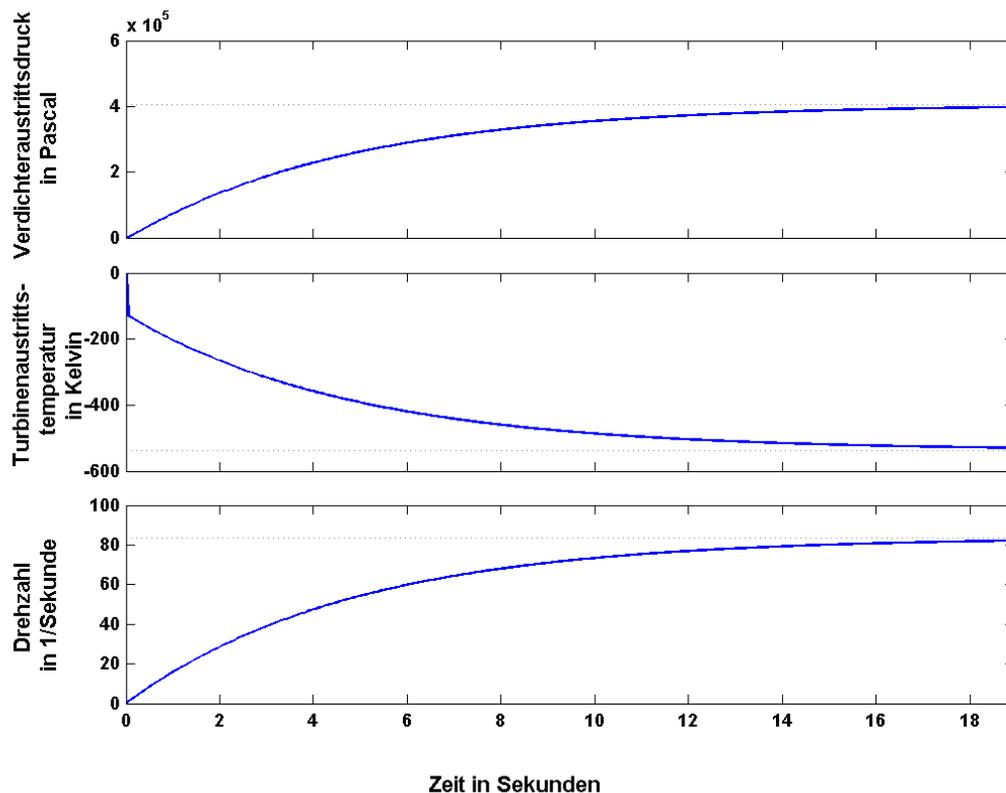


**Bild 3.7:** Sprungantworten bei der Erhöhung des Massenbrennstoffstroms um 10%

Bild 3.7 zeigt die Auswirkungen auf die Meßgrößen Verdichteraustrittsdruck  $P_3$ , Turbinenaustrittstemperatur  $T_5$  und Drehzahl  $n$  bei einer Erhöhung des Massenbrennstoffstromes um 10 Prozent. Wie zu erwarten, steigt die Drehzahl an, was auch der Sinn einer erhöhten Brennstoffzufuhr ist. Dies hat jedoch eine Erhöhung von Verdichteraustrittsdruck und Turbinenaustrittstemperatur zur Folge. Mit Hilfe der Turbinenaustrittstemperatur kann man unter der Annahme, daß die Temperaturdifferenz der in der Turbine umgesetzten Energie entspricht, die auf einem höheren Temperaturniveau liegende und für den Betrieb äußerst wichtige Turbineneintrittstemperatur berechnen [30]. Die Turbineneintrittstemperatur darf aufgrund der begrenzten Turbinenmaterialfestigkeit nicht zu hoch werden [10]. Überhöhte Temperaturen führen zur Zerstörung der Turbinenbeschaufelung. Um dem entgegenzuwirken, werden bei neueren Triebwerken die Schaufeln gekühlt. Ein weiterer interessanter Aspekt ist die Auswirkung der Turbineneintrittstemperatur auf die Wartungskosten. Nach [5] liegen die Wartungsmaterialkosten für ein modernes ausgereiftes Turbofantriebwerk bei einer Turbineneintrittstemperatur von 1600 K und einer Flugzykluslänge von 1,2 Stunden pro Flug bei 70 US Dollar pro Flugstunde. Für eine Flugzykluslänge von 3 Stunden müßten dagegen nur

38 US Dollar veranschlagt werden. Wird die Turbineneintrittstemperatur nun um 100 K erhöht, so steigen die materialbedingten Wartungskosten des Triebwerks um 28 Prozent.

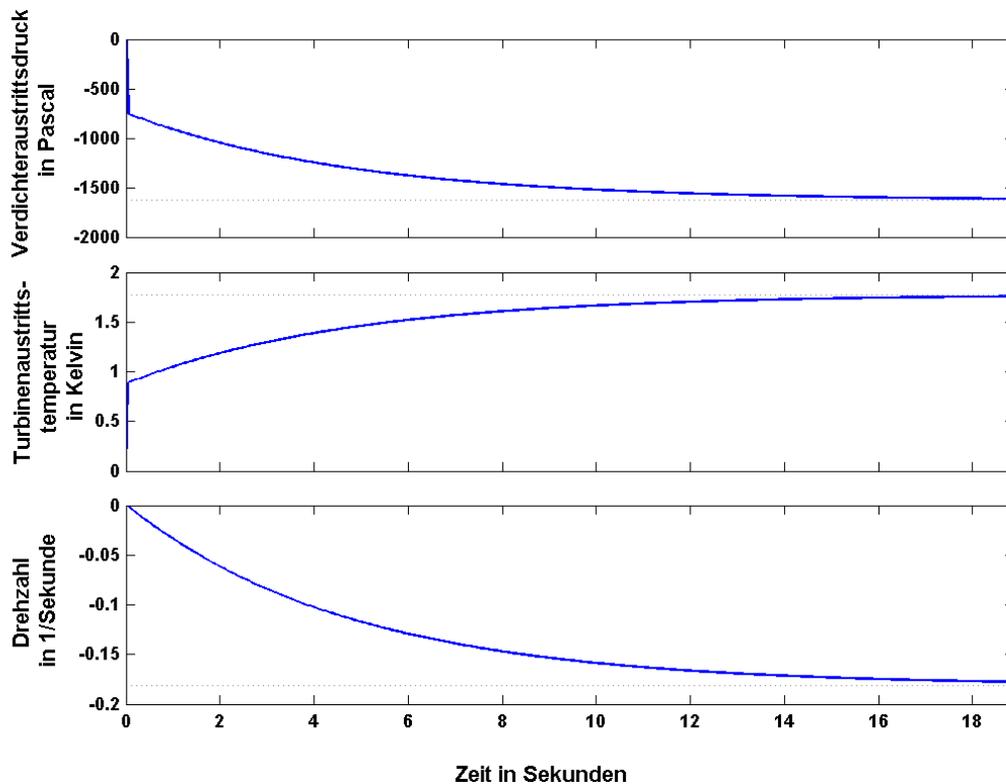
In Bild 3.8 sind die Systemantworten bei einer Vergrößerung der Düsenaustrittsfläche um 10 Prozent dargestellt.



**Bild 3.8:** Sprungantworten bei der Vergrößerung der Düsenaustrittsfläche um 10%

Die Vergrößerung der Düsenaustrittsfläche führt zu einem Anwachsen des Entspannungsgrades in der Turbine [25], was bei konstantem Massenbrennstoffstrom eine Verringerung der Turbinenaustrittstemperatur und einen Anstieg der Drehzahl zur Folge hat. Bei diesem Vorgang steigt auch der Verdichteraustrittsdruck.

In Bild 3.9 sind die Auswirkungen eines Störsprungs auf die Meßgrößen festgehalten.



**Bild 3.9:** Sprungantworten bei einer Erhöhung der Bleed- bzw. Leckluft um 10%

Die plötzliche Erhöhung der Bleed- bzw. Leckluft um 10 Prozent hat einen Abfall des Verdichteraustrittsdrucks zur Folge. Des weiteren sind ein Anstieg der Turbinenaustrittstemperatur und ein Abfall der Drehzahl zu erkennen.

Bei allen Diagrammen fällt auf, daß es im System eine äußerst dominante Zeitkonstante ( $-1/\lambda_{\text{dom}} = -1/-0,21 = 4,76$ ) gibt. Diese Erkenntnis wird auch durch die Ergebnisse der durchgeführten Dominanzanalyse in Abschnitt 3.1.3 untermauert und ist für die Ordnungsreduktion von entscheidender Bedeutung.

### 3.1.3 Simulationen unterschiedlicher Regelungen

Nachfolgend sollen Verfahren und Wege zum Entwurf von Beobachterreglern reduzierter Ordnung angewendet und die Simulationsergebnisse analysiert werden. Dazu wird basierend auf dem mathematischen Modell des MIMO-Systems Triebwerk über Polvorgabe eine Regelung entworfen und mit dem in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen neuartigen Verfahren die Beobachtermatrix festgelegt. Im Anschluß daran wird mittels Ordnungsreduktion der Beobachterregler reduzierter Ordnung erzeugt und auf das Originalsystem angewendet. Zunächst werden Eigenwerte und Impulsantworten unterschiedlicher Beobachterregler miteinander verglichen. Im Anschluß daran werden in gleicher Weise die resultierenden Gesamtsysteme, bestehend aus dem Originalsystem (Regelstrecke) und Beobachterregler verschiedener Ordnungen in der Rückführung, gegenübergestellt. In den folgenden Abschnitten werden die beiden indirekten Wege getrennt voneinander behandelt. Dabei werden jeweils die über verschiedene Verfahren eines Weges gewonnenen Simulationsergebnisse miteinander verglichen. Dem schließt sich ein Vergleich der beiden Wege an.

#### *Über Reglerreduktion zum Regler reduzierter Ordnung (Weg 1)*

Der Weg 1 vom System hoher Ordnung führt über den Beobachterregler hoher Ordnung, der für weitere Untersuchungen auf Weg 1 als Referenz dient und der anschließenden Reglerreduktion zum Beobachterregler reduzierter Ordnung.

Für das Verhalten im Zeitbereich sind die Eigenwerte mit kleinem Realteil ausschlaggebend. Daher wird sowohl beim Regler- und Beobachterentwurf als auch bei der modalen Reglerreduktion der Realteil als Dominanzkriterium ausgewählt. Mit Hilfe der Polvorgabe wird am Originalsystem eine Zustandsregelung entworfen, die den dominanten Pol der Regelstrecke von  $-0,2$  auf  $-0,4$ ,  $-0,6$ ,  $-0,8$  oder  $-1,0$  verschiebt. Die Tabelle 3.3 ist eine Zusammenfassung der Tabelle 3.4 und der Tabelle 3.5. Sie gibt Auskunft darüber, wie viele Regler reduzierter Ordnung über ein bestimmtes Verfahren entworfen werden können, die ein stabiles Gesamtsystem liefern. So gibt es beim Triebwerksmodell 13. Ordnung für jedes Reduktionsverfahren in Verbindung mit einer gewünschten Eigenwertverschiebung maximal 12 mögliche Regler reduzierter Ordnung. Der Tabelle 3.4 ist zu entnehmen, daß für die gewünschte Eigenwertverschiebung des dominanten Eigenwerts der Strecke nach  $-0,8$  über die balancierte Regler-

reduktion nach Guth, bis auf den Regler 1. Ordnung, alle zu einem stabilen geschlossenen Regelkreis führen. So gibt es für die angesprochene Kombination 11 von 12 Lösungen, also 91,6 Prozent, die ein stabiles Gesamtsystem liefern.

Die beste Vergleichsmöglichkeit hinsichtlich der Reglerreduktion bietet eine Verschiebung des dominanten Pols der Strecke nach  $-0,8$ . Sie ist zudem als regelungstechnisch sinnvoll zu bewerten, weil das Systemverhalten mit Regelung ca. vier mal so schnell wie das ohne Regelung ist und somit die Eigenbewegung schneller abklingt. Alle Ergebnisse der Simulationen hinsichtlich ihrer Stabilität sind in Tabelle 3.4 und Tabelle 3.5 abgedruckt.

Reduktionsart	Neue Eigenwerte des Regelkreises			
	-0,4	-0,6	-0,8	-1,0
balancierte Ordnungsreduktion durch Abschneiden	50,0%	41,6%	83,3%	58,3%
balancierte Ordnungsreduktion nach Guth	66,6%	66,6%	91,6%	83,3%
modale Ordnungsreduktion durch Abschneiden	8,3%	8,3%	25,0%	16,6%
modale Ordnungsreduktion nach Guth	66,6%	58,3%	66,6%	50,0%

**Tabelle 3.3:** Anzahl der stabilen Gesamtsysteme bei vorgegebenen neuen Eigenwerten und verschiedenen Reduktionsarten in Prozent

Reduktionsart	Ordnung	Neue Eigenwerte			
		-0,4	-0,6	-0,8	-1
balancierte Ordnungsreduktion durch Abschneiden	12	s	s	s	s
	11	s	s	s	s
	10	s	s	s	s
	9	s	kl	s	s
	8	i	i	s	s
	7	i	i	s	i
	6	kl	s	s	s
	5	i	i	s	s
	4	s	i	s	i
	3	i	i	i	i
	2	i	s	s	i
	1	s	i	i	i
balancierte Ordnungsreduktion nach Guth	12	s	s	s	s
	11	s	s	s	s
	10	s	s	s	s
	9	s	s	s	s
	8	s	s	s	s
	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	s	s	s	s
	4	i	i	s	s
	3	i	i	s	s
	2	i	i	s	i
	1	i	i	i	i

Legende: s = stabil i = instabil kk = konj.-komplexe Eigenwerte  
kl = Eigenwerte kleiner als die der Strecke

**Tabelle 3.4:** Mögliche Reduktionsgrade bei den verschiedenen Reduktionsverfahren der balancierten Ordnungsreduktion

Reduktionsart	Ordnung	Neue Eigenwerte			
		-0,4	-0,6	-0,8	-1
modale Ordnungsreduktion durch Abschneiden	12	s	s	s	s
	11	i	i	i	kk
	10	kk	kk	kk	i
	9	i	i	kl	kk
	8	i	i	kl	s
	7	i	i	kl	i
	6	i	i	kk	kk
	5	kk	kk	s	i
	4	i	i	s	i
	3	i	i	i	kk
	2	kk	kk	kk	kl
	1	i	i	i	kk
modale Ordnungsreduktion nach Guth	12	s	s	s	s
	11	s	i	s	kk
	10	kk	kk	kk	s
	9	s	s	s	kk
	8	s	s	s	s
	7	s	s	s	s
	6	s	s	kk	kk
	5	kk	kk	s	s
	4	s	s	s	s
	3	s	s	s	kk
	2	kk	kk	kk	i
	1	i	i	i	kk

Legende: s = stabil i = instabil kk = konj.-komplexe Eigenwerte  
kl = Eigenwerte kleiner als die der Strecke

**Tabelle 3.5:** Mögliche Reduktionsgrade bei den verschiedenen Reduktionsverfahren der modalen Ordnungsreduktion

Alle anderen Pole der Strecke werden beim Reglerentwurf nicht verschoben. Für die getroffenen Annahmen ergeben sich die in Tabelle 3.6 aufgelisteten Eigenwerte der Strecke (A) links und des Regelkreises (A-BK) rechts.

Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,2090	0	-0,8	0
-119,0056	-10,3347	-119,0056	-10,3347
-119,0056	10,3347	-119,0056	10,3347
-333,0593	0	-333,0593	0
-359,3387	-1537,0026	-359,3387	-1537,0026
-359,3387	1537,0026	-359,3387	1537,0026
-572,0159	-2488,6793	-572,0159	-2488,6793
-572,0159	2488,6793	-572,0159	2488,6793
-698,4012	0	-698,4012	0
-1297,7964	-231,2353	-1297,7964	-231,2353
-1297,7964	231,2353	-1297,7964	231,2353
-1334,7808	0	-1334,7808	0
-134814,32	0	-134814,32	0

**Tabelle 3.6:** Eigenwerte des Strecke (A) und der Regelung (A-BK)

Der in Abschnitt 2.1.2 beschriebene neuartige Beobachterentwurf plaziert die Eigenwerte des Beobachters (A-LC) (siehe Tabelle 3.7) links von den dominanten Eigenwerten der Regelung.

Realteil	Imaginärteil
-768,2413	0
-898,2676	-10,3347
-898,2676	10,3347
-1133,7267	0
-1162,6339	-1537,0026
-1162,6339	1537,0026
-1396,5789	-2488,6793
-1396,5789	2488,6793
-1535,6027	0
-2194,9375	-231,2353
-2194,9375	231,2353
-2235,6202	0
-149063,11	0

**Tabelle 3.7:** Eigenwerte des Beobachters (A-LC)

Die beiden nach dem Separationstheorem unabhängig voneinander entworfenen Systeme, Regler und Beobachter, werden nun zum Beobachterregler zusammengefügt. Dieses System hat die in Tabelle 3.8 abgedruckten Eigenwerte (A-BK-LC).

Realteil	Imaginärteil
-366,0230	0
-416,8798	-1508,1118
-416,8798	1508,1118
-918,2343	0
-1171,0287	0
-1477,419	-2706,0663
-1477,419	2706,0663
-1603,9145	0
-1882,8297	0
-1950,7125	-1319,8504
-1950,7125	1319,8504
-3344,6588	0
-149065,02	0

**Tabelle 3.8:** Eigenwerte des Beobachterreglers (A-BK-LC)

Auf Weg 1 stellt der jetzt vorliegende Beobachterregler hoher Ordnung das System dar, welches reduziert werden soll. Für die Festlegung des Reduktionsgrades sind die Dominanzkennzahlen bei der modalen und die Singulärwerte bei der balancierten Ordnungsreduktion ausschlaggebend (siehe Tabelle 3.9). Anhand dieser kann festgelegt werden, auf welche Ordnung theoretisch sinnvoll reduziert werden kann.

Dominanzkennzahlen des Beobachterreglers	Singulärwerte des Beobachterreglers
0,002732069	0,04112871
0,002398773	0,037522413
0,002398773	0,006549101
0,001089047	0,001936998
0,00085395	0,001233894
0,000676856	0,000459804
0,000676856	0,000126197
0,000623475	$5,60026 \cdot 10^{-5}$
0,000531115	$1,43665 \cdot 10^{-5}$
0,000512633	$8,13913 \cdot 10^{-6}$
0,000512633	$3,94873 \cdot 10^{-6}$
0,000298984	$2,42066 \cdot 10^{-7}$
$6,70848 \cdot 10^{-6}$	$1,63288 \cdot 10^{-7}$

**Tabelle 3.9:** Kennzahlen zur Festlegung des Reduktionsgrades

Die Kennzahlen geben jedoch keine Auskunft darüber, ob der auf die festgelegte Ordnung reduzierte Beobachterregler ein stabiles Gesamtsystem liefert. Diese Information kann für das Triebwerk und die unterschiedlichen Reduktionsgrade über verschiedene Verfahren der Tabelle 3.4 und der Tabelle 3.5 entnommen werden.

### ***Balancierte Ordnungsreduktion***

Bei der Analyse der Singulärwerte aus Tabelle 3.9, wird nach großen Sprüngen zwischen den einzelnen Werten gesucht, um den Reduktionsgrad festlegen zu können. Die betragsmäßig größten Kennzahlen stehen für die wichtigen Systemanteile. Aus Tabelle 3.9 geht für die balancierte Reglerreduktion hervor, daß es sinnvoll ist, auf 2., 5. oder 7. Ordnung zu reduzieren. Tabelle 3.4 und Tabelle 3.5 kann entnommen werden, daß nicht alle der über die verschiedenen Reduktionsverfahren auf 7. bzw. 2. Ordnung reduzierten Beobachterregler ein stabiles Gesamtsystem, bestehend aus Strecke und Beobachterregler reduzierter Ordnung in der Rückführung, erzeugen. Sie kommen für eine Regelung daher nicht in Frage. Eine Reduktion auf 5. Ordnung bietet sich an, da auch dort ein Sprung bei den Singulärwerten erkennbar ist und die Mehrheit der erzeugten Beobachterregler reduzierter Ordnung ein stabiles Gesamtsystem liefern. Sie werden daher im Folgenden näher untersucht.

Bei einem Vergleich der Eigenwerte in Tabelle 3.10 dient der Beobachterregler hoher Ordnung als Referenz. An ihm messen sich die über balancierte Reduktion durch einfaches Abschneiden oder nach Guth reduzierten Beobachterregler 5. Ordnung.

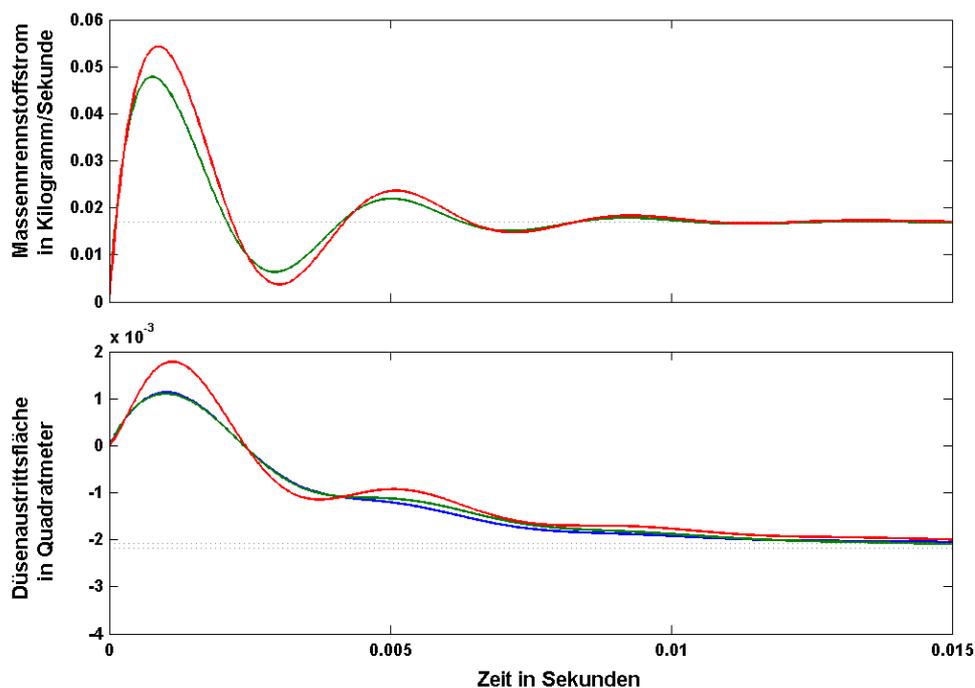
EIGENWERTE BEOBACHTERREGLER					
13. Ordnung (Referenz)		5. Ordnung über balancierte Ordnungsreduktion			
		durch Abschneiden		nach Guth	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-366,0230	0	-260,1582	0	-260,1582	0
-416,8798	-1508,1118	-407,3779	-1503,5986	-407,3779	-1503,5986
-416,8798	1508,1118	-407,3779	1503,5986	-407,3779	1503,5986
-918,2343	0	-2559,7943	-2067,7511	-2559,7943	-2067,7511
-1171,0287	0	-2559,7943	2067,7511	-2559,7943	2067,7511
-1477,419	-2706,0663				
-1477,419	2706,0663				
-1603,9145	0				
-1882,8297	0				
-1950,7125	-1319,8504				
-1950,7125	1319,8504				
-3344,6588	0				
-149065,02	0				

**Tabelle 3.10:** Eigenwerte des Referenzbeobachterregler hoher Ordnung und der auf 5. Ordnung reduzierten Beobachterregler über balancierte Reglerreduktion durch Abschneiden oder nach Guth

Im Gegensatz zur modalen Ordnungsreduktion werden bei der balancierten Ordnungsreduktion die dominanten Eigenwerte nicht direkt ins reduzierte System überführt. Es kommt zu einer Verschiebung der Eigenwerte, wobei die Eigenwerte des durch Abschneiden und des über Guth korrigierten Systems gleich sind. Dies ist verständlich, da durch die Korrektur des stationären Fehlers nach Guth nur die Ein- und Ausgangsmatrix des Systems verändert werden. Die Systemmatrix, welche die Informationen bezüglich der Eigenwerte enthält, bleibt gleich.

Bei näherer Betrachtung der Sprungantworten (vgl. Bild 3.10) der drei Systeme zeigt sich, daß die Unterschiede, die durch die Reduktion von 13. Ordnung auf 5. Ordnung auftreten

minimal sind. Lediglich der über den stationären Ausgleich nach Guth reduzierte Beobachterregler (rot) schwingt etwas mehr, als die Referenz. Das beruht auf der Tatsache, daß bei diesem reduzierten Beobachterregler die stationäre Genauigkeit auf Kosten der Dynamik erzwungen wird. Vergleicht man die Sprungantworten der verschiedenen Beobachterregler miteinander, erkennt man, daß der nach Guth reduzierte Beobachterregler den gleichen Endwert erreicht, wie die Referenz. Nachdem die Eingangsgrößen des Beobachterreglers die Ausgangsgrößen der Strecke sind, erklärt sich die Anregung des Beobachterreglers über die Drehzahl (vgl. Bild 3.10). Da die Strecke drei Ausgänge hat, besitzt der Beobachterregler demzufolge drei Eingänge. Für weitere Untersuchungen wird die Drehzahl als entscheidende Ausgangsgröße näher betrachtet. Die zwei Ausgänge des Beobachterreglers sind die Eingänge der Strecke. Dies sind Massenbrennstoffstrom und Düsenaustrittsfläche.



**Bild 3.10:** Sprungantworten der Beobachterregler bei einem Sprung auf die Drehzahl (blau = Referenz, grün = durch Abschneiden, rot = nach Guth)

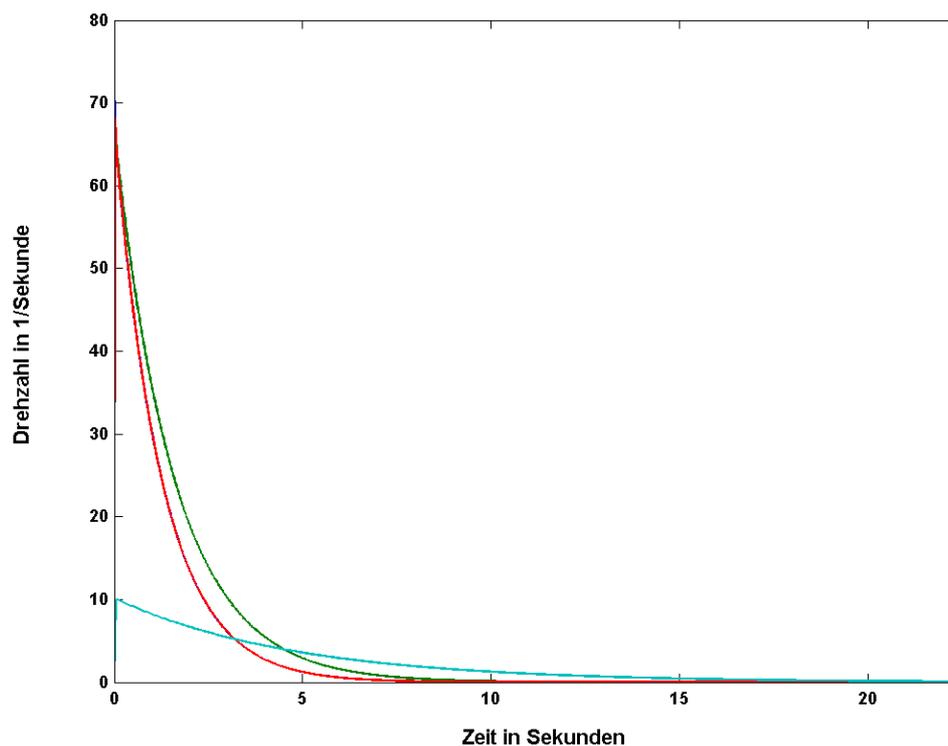
In welchem Ausmaß die Regelung das Systemverhalten verbessert, erkennt man an den Eigenwerten des Gesamtsystems (siehe Tabelle 3.11). Vorgabe ist, daß der Regler den kleinsten Eigenwert der Strecke von  $-0,209$  nach  $-0,8$  verschieben soll. Der Beobachter liefert dem Regler hierfür lediglich die dafür benötigten Zustände. Es fällt auf, daß der betragsmäßig kleinste Eigenwert des Gesamtsystems, mit dem balanciert durch Abschneiden reduzierten

Beobachterregler in der Rückführung, nicht wie gewünscht bei  $-0,8$  sondern bei ca.  $-0,65$  liegt. Ursache dafür ist, daß das durch einfaches Abschneiden balanciert reduzierte System stationär ungenau ist. Durch das Abschneiden geht die in der Ein- (L) und Ausgangsmatrix (K) abgelegten Informationen bezüglich des stationären Endwertes verloren. Die nach Guth korrigierten Matrizen K und L beseitigen den stationären Fehler und ermöglichen die Verschiebung der Eigenwert an die vorgegebene Stelle. Erst bei den betragsmäßig großen Eigenwerten tritt auch beim Verfahren nach Guth eine geringfügige Verschiebung der Eigenwerte durch die Reglerreduktion auf. Auch die Reduktion auf sehr kleine Ordnungen führt zu Problemen, da z.B. bei einer Reduktion des Beobachterregler von 13. auf 2. Ordnung der Algorithmus von Guth nicht mehr bei allen Ein-Ausgangs-Kombinationen den stationären Fehler beseitigen kann. Grund dafür ist, daß die Anzahl der Eingänge des Systems die Ordnung, auf die reduziert werden soll, übersteigt.

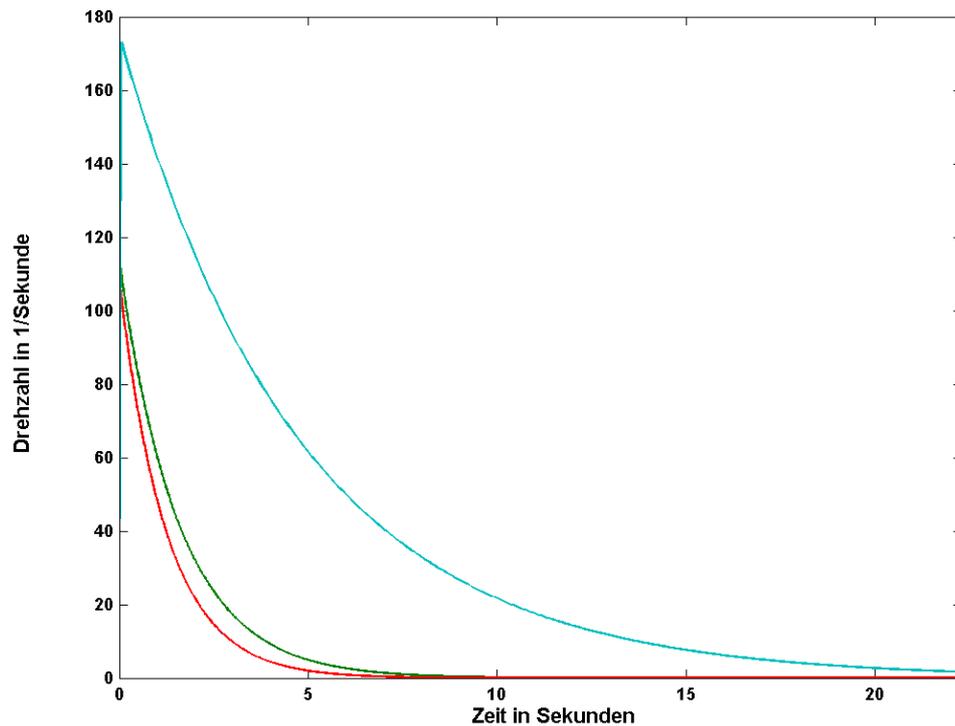
EIGENWERTE GESAMTSYSTEM MIT BEOBACHTERREGLER					
13. Ordnung (Referenzsystem)		5. Ordnung über balancierte Ordnungsreduktion			
Realteil	Imaginärteil	durch Abschneiden		nach Guth	
		Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,8	0	-0,6272924	0	-0,7998555	0
-119,00567	-10,334781	-126,91359	-8,3042085	-119,62941	-10,657397
-119,00567	10,3347813	-126,91359	8,30420846	-119,62941	10,6573972
-333,05938	0	-207,79952	-525,7006	-267,15518	0
-359,33871	-1537,0026	-207,79952	525,700598	-411,4116	0
-359,33871	1537,00265	-263,20937	0	-450,80293	-1640,0893
-572,0159	-2488,6793	-327,43267	-1463,7488	-450,80293	1640,08926
-572,0159	2488,67928	-327,43267	1463,7488	-539,79384	-2433,8393
-698,40124	0	-485,30074	-2476,0914	-539,79384	2433,83928
-768,24137	0	-485,30074	2476,09142	-557,21847	-1324,5974
-898,26761	-10,334781	-649,24822	0	-557,21847	1324,59735
-898,26761	10,3347814	-731,33959	-1695,4468	-627,39102	-172,46975
-1133,7267	0	-731,33959	1695,44675	-627,39102	172,469745
-1162,6339	-1537,0026	-1332,9749	0	-1333,5811	0
-1162,6339	1537,00265	-1716,3385	0	-1696,7051	0
-1297,7964	-231,23532	-2769,6405	-2137,976	-2479,3446	-2087,8561
-1297,7964	231,235321	-2769,6405	2137,97603	-2479,3446	2087,85615
-1334,7808	0	-134812,33	0	-134813,57	0
-1396,5789	-2488,6793				
-1396,5789	2488,67928				
-1535,6027	0				
-2194,9375	-231,23532				
-2194,9375	231,235321				
-2235,6202	0				
-134814,32	0				
-149063,11	0				

**Tabelle 3.11:** Eigenwerte des Gesamtsystems bestehen aus der Originalsystem im Vorwärtszweig und dem jeweiligen Beobachterregler in der Rückführung

Anhand der Impulsantworten der Drehzahl aus Bild 3.11 bei denen der Verlauf bei einer Anregung einzelnen Gesamtsysteme durch einen Impuls auf den Massenbrennstoffstrom aufgetragen ist, wird ersichtlich, wie die verschiedenen Beobachterregler zu einem schnelleren Abklingen der Eigenbewegung im Vergleich zur Strecke beitragen. Diesen Sachverhalt zeigt eine Anregung durch einen Impuls auf die Düsenaustrittsfläche (siehe Bild 3.12). Die Impulsantworten des Referenzgesamtsystems stimmen mit den Impulsantworten des Gesamtsystems, bestehend aus der Strecke und dem über balancierte Ordnungsreduktion nach Guth reduzierten Beobachterregler, überein. Dies wird auch anhand der Eigenwerte der beiden Gesamtsysteme deutlich. So sind die Pole, die hinsichtlich der Eigenbewegung dieser Systeme dominant sind, gleich. Das Gesamtsystem mit dem durch Abschneiden reduzierten Beobachterregler weicht dynamisch von den anderen ab, was wie bereits angesprochen aus den Eigenwerten des Gesamtsystems abgeleitet werden kann.



**Bild 3.11:** Impulsantworten der Gesamtsysteme (Ausgangsgröße ist die Drehzahl) im Vergleich mit der entsprechenden Impulsantwort der Strecke bei einer Anregung durch den Massenbrennstoffstrom (blau = Referenz, grün = durch Abschneiden, rot = nach Guth, hellblau = Strecke)



**Bild 3.12:** Impulsantworten der Gesamtsysteme im Vergleich mit der Strecke anhand der Drehzahl bei einer Anregung durch die Düsenaustrittsfläche (blau = Referenz, grün = durch Abschneiden, rot = nach Guth, hellblau = Strecke)

### *Modale Ordnungsreduktion*

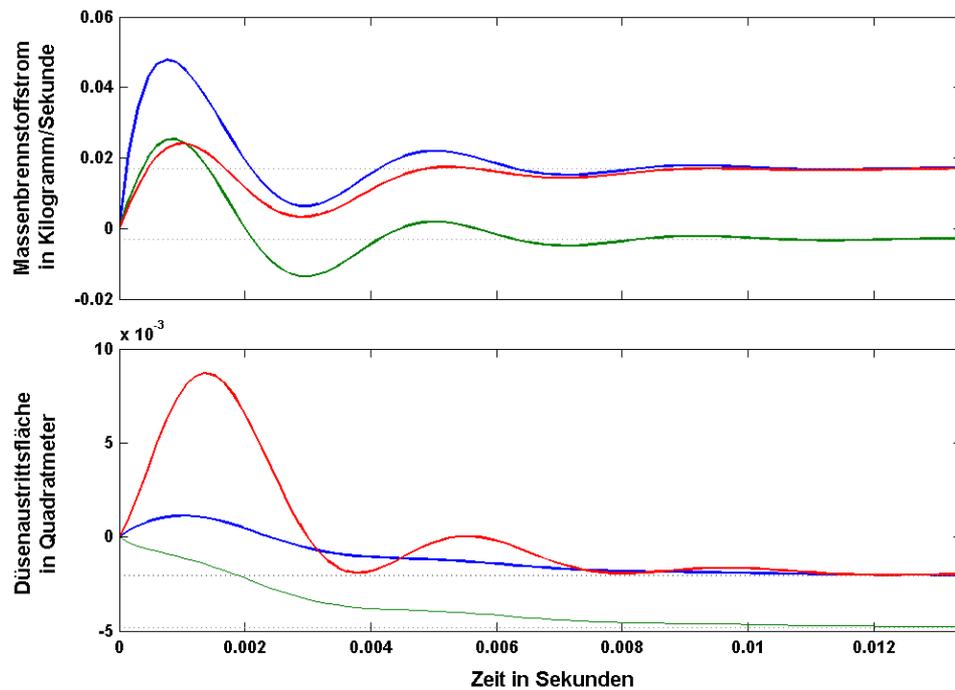
Bei der Reduktion des Beobachterreglers hoher Ordnung über Verfahren der modalen Ordnungsreduktion, wird der Reduktionsgrad in erster Linie anhand der Sprünge zwischen den Dominanzkennzahlen festgelegt (vgl. Tabelle 3.9). Aus den Dominanzkennzahlen ergibt sich, daß eine Reduktion auf 3., 5. bzw. 11. Ordnung sinnvoll erscheint. Aus Tabelle 3.4 und der Tabelle 3.5 geht allerdings hervor, daß eine Reduktion auf 2. bzw. 11. Ordnung in einigen Fällen nicht möglich ist. Daher werden die weiteren Untersuchungen mit dem reduzierten Beobachterregler 5. Ordnung durchgeführt. Weil für die Reglerreduktion auf die Realteil-dominanz zurückgegriffen wird, werden die Eigenwerte mit dem betragsmäßig kleinsten Realteil direkt ins reduzierte System übernommen (vgl. Tabelle 3.12).

EIGENWERTE BEOBACHTERREGLER					
13. Ordnung (Referenz)		5. Ordnung über modale Ordnungsreduktion			
		durch Abschneiden		nach Guth	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-366,023	0	-366,023	0	-366,023	0
-416,8798	-1508,112	-416,8798	-1508,112	-416,8798	-1508,112
-416,8798	1508,112	-416,8798	1508,112	-416,8798	1508,112
-918,2344	0	-918,2344	0	-918,2344	0
-1171,029	0	-1171,029	0	-1171,029	0
-1477,419	-2706,066				
-1477,419	2706,066				
-1603,915	0				
-1882,83	0				
-1950,713	-1319,85				
-1950,713	1319,85				
-3344,659	0				
-149065	0				

**Tabelle 3.12:** Eigenwerte des Referenzbeobachterregler hoher Ordnung und der auf 5.Ordnung reduzierten Beobachterregler über modale Reglerreduktion durch Abschneiden bzw. nach Guth

Die Eigenwerte des durch einfaches Abschneiden und des nach Guth reduzierten Beobachterreglers sind identisch, da wie bei der balancierten Ordnungsreduktion der stationäre Ausgleich durch eine Änderung der Ein- und Ausgangsmatrix erreicht wird. Wie in Bild 3.13 zu erkennen ist, geht die stationäre Genauigkeit jedoch zu Lasten der Dynamik. Die eigentliche Aufgabe des Reglers ist es, das Systemverhalten der Strecke zu verbessern, d.h. im vorliegenden Fall das Gesamtsystem schneller zu machen, damit die Eigenbewegung schneller abklingt. Vergleicht man nun die Eigenwerte des Referenzgesamtsystems mit den Gesamtsystemen reduzierter Ordnung (siehe Tabelle 3.13), so fällt erneut auf, daß der Beobachterregler, der durch einfaches Abschneiden modal reduziert wurde nicht in der Lage ist den dominanten Eigenwert der Strecke nach  $-0,8$  zu verschieben. Das Referenzgesamtsystem besteht dabei aus der Strecke und dem Beobachterregler hoher Ordnung in der Rückführung. Bei den Gesamtsystemen reduzierter Ordnung werden die modal reduzierten Beobachterregler anstelle des Referenzbeobachterreglers eingesetzt. Für die Anwendung am Triebwerksmodell liefert eine Reduktion durch einfaches Abschneiden auf Weg 1 keine zufriedenstellenden

Ergebnisse. Daher wird beim späteren Vergleich der zwei Wege auf den Beobachterregler, der durch einfaches Abschneiden reduziert wurde, nicht näher eingegangen.

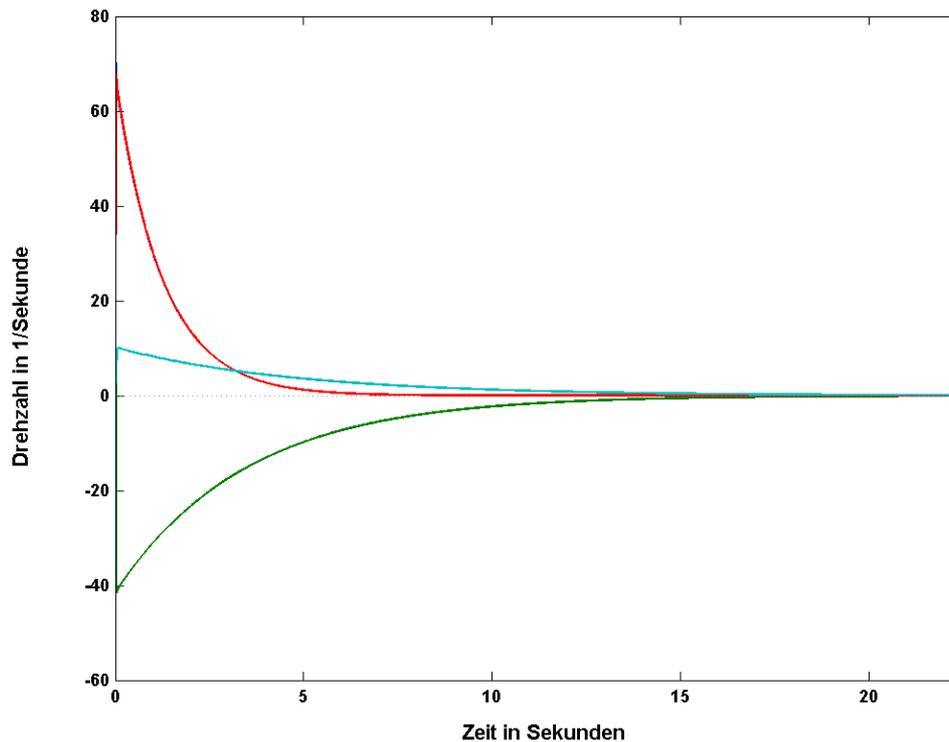


**Bild 3.13:** Sprungantworten der Beobachterregler bei einem Sprung auf die Drehzahl (blau = Referenz, grün = durch Abschneiden, rot = nach Guth)

EIGENWERTE GESAMTSYSTEM MIT BEOBACHTERREGLER					
13. Ordnung (Referenz)		5. Ordnung über modale Ordnungsreduktion			
		durch Abschneiden		nach Guth	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,8	0	-0,2899	0	-0,8023	0
-119,0056	-10,3347	-121,0024	-38,5712	-117,0054	-9,0846
-119,0056	10,3347	-121,0024	38,5712	-117,0054	9,0846
-333,0593	0	-124,6197	0	-164,6891	-1703,5784
-359,3387	-1537,0026	-211,3006	-1609,7604	-164,6891	1703,5784
-359,3387	1537,0026	-211,3006	1609,7604	-202,2957	-105,7401
-572,0159	-2488,6793	-331,2227	0	-202,2957	105,7401
-572,0159	2488,6793	-591,1679	-2492,1792	-439,5236	-1581,4998
-698,4012	0	-591,1679	2492,1792	-439,5236	1581,4998
-768,2413	0	-649,0026	-1493,1915	-722,3045	-2427,9159
-898,2676	-10,3347	-649,0026	1493,1915	-722,3045	2427,9159
-898,2676	10,3347	-727,7582	0	-756,6924	0
-1133,7267	0	-965,2570	0	-1084,520	0
-1162,6339	-1537,0026	-1065,7246	0	-1126,911	0
-1162,6339	1537,0026	-1169,366	0	-1172,8464	0
-1297,7964	-231,2353	-1327,3957	0	-1326,471	0
-1297,7964	231,2353	-1495,4626	0	-1592,096	0
-1334,7808	0	-134814,08	0	-134814,15	0
-1396,5789	-2488,6793				
-1396,5789	2488,6793				
-1535,6027	0				
-2194,9375	-231,2353				
-2194,9375	231,2353				
-2235,6202	0				
-134814,32	0				
-149063,11	0				

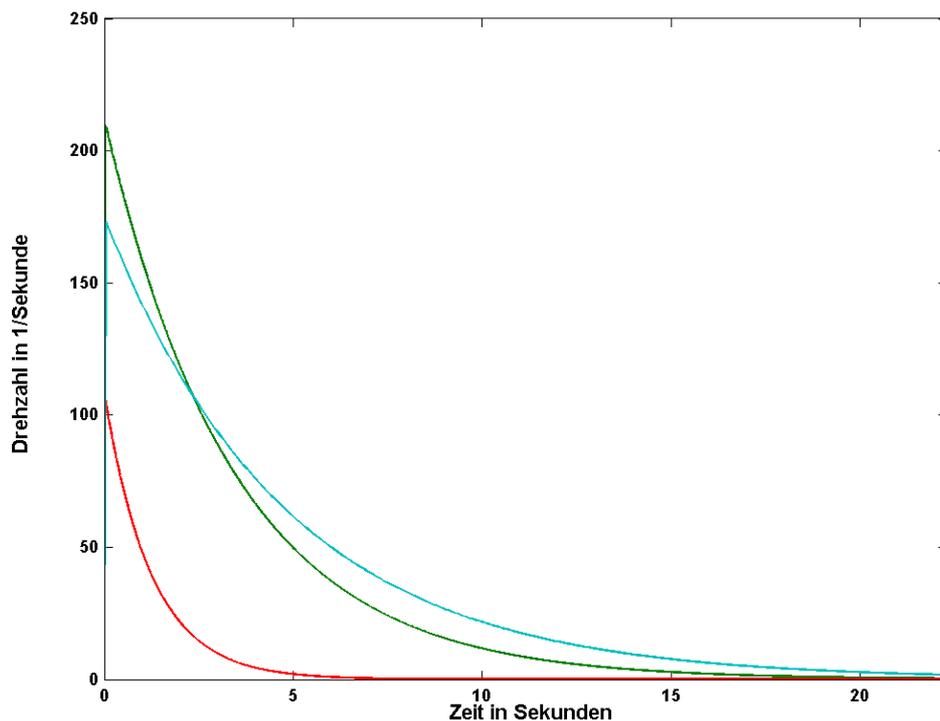
**Tabelle 3.13:** Eigenwerte des Gesamtsystems bestehend aus dem Originalsystem im Vorwärtszweig und dem jeweiligen Beobachterregler in der Rückführung

Bei näherer Betrachtung der Impulsantworten der Gesamtsysteme (siehe Bild 3.14 und Bild 3.15) erkennt man, daß das Gesamtsystem mit dem Beobachterregler reduzierter Ordnung, der über einfaches Abschneiden reduziert wurde, wie bereits erläutert nicht wesentlich schneller ist, als die Strecke ohne Regelung. Der dominante Pol der Strecke wurde lediglich nach  $-0,29$  verschoben, was aus besagtem Grund kein akzeptables Ergebnis ist.



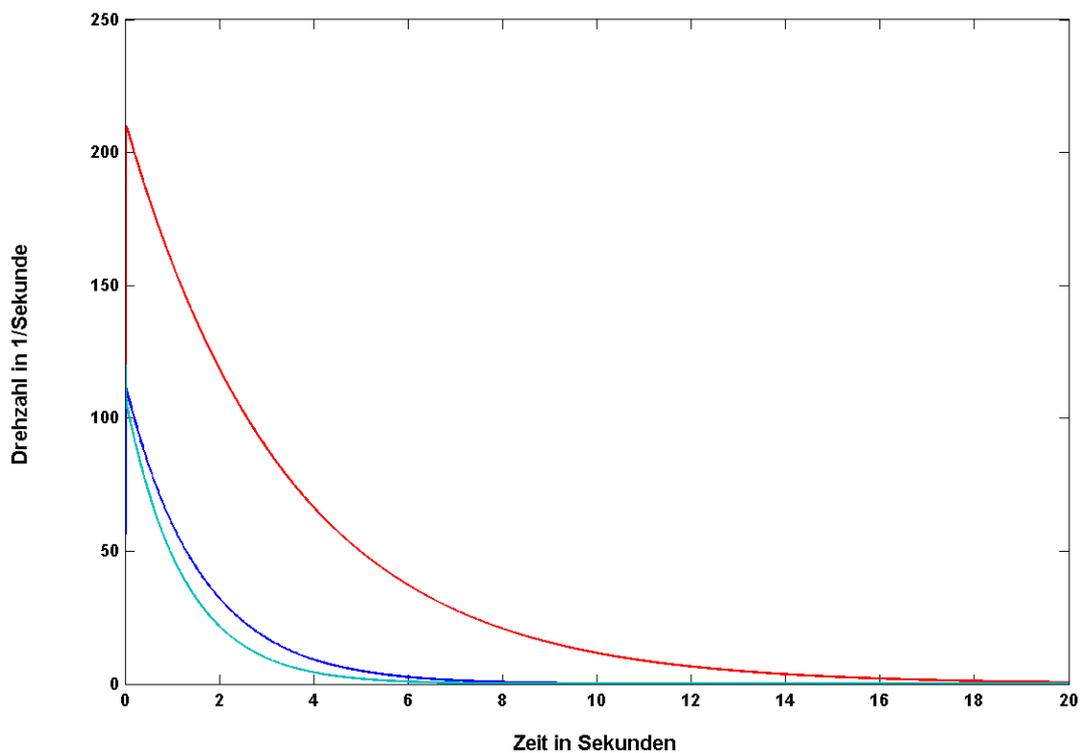
**Bild 3.14:** Impulsantworten der Gesamtsysteme im Vergleich mit der Strecke anhand der Drehzahl bei einer Anregung durch den Massenbrennstoffstrom (blau = Referenz, grün = durch Abschneiden, rot = nach Guth, hellblau = Strecke)

Bei einer Anregung über den Massenbrennstoffstrom (Bild 3.14) bzw. über die Düsenaustrittsfläche (Bild 3.15) ist der Verlauf der Drehzahl des Gesamtsystems mit dem nach Guth reduzierten Beobachterregler in der Rückführung deckungsgleich mit dem des Referenzgesamtsystems. Diese Ergebnisse unterstreichen die Leistungsfähigkeit des auf diese Weise entworfenen Reglers reduzierter Ordnung.



**Bild 3.15:** Impulsantworten der Gesamtsysteme im Vergleich mit der Strecke anhand der Drehzahl bei einer Anregung durch die Düsenaustrittsfläche (blau = Referenz, grün = durch Abschneiden, rot = nach Guth, hellblau = Strecke)

Ein Vergleich des Gesamtsystemverhaltens mit dem auf Weg 1 balanciert reduzierten Beobachterreglern (vgl. Bild 3.16) zeigt, daß der nach Guth balanciert reduzierte Regler genau so gut ist wie der nach Guth und modal reduzierte Regler. Der über die balancierte Reglerreduktion durch Abschneiden erzeugte Beobachterregler ist deutlich besser, als der über modale Reduktion durch Abschneiden generierte, kommt aber verglichen mit dem Referenzbeobachterregler nicht an die nach Guth reduzierten Regler heran.



**Bild 3.16:** Impulsantworten der verschiedenen Gesamtsysteme mit den Beobachterreglern 5. Ordnung bei einer Anregung durch die Düsenaustrittsfläche (blau = balanciert Abschneiden, grün = balanciert Guth, rot = modal Abschneiden, hellblau = modal Guth)

### *Über Modellreduktion zum Regler reduzierter Ordnung (Weg 2)*

In diesem Abschnitt wird Weg 2 näher untersucht. Er führt vom System hoher Ordnung über Modellreduktion und anschließendem Regler- und Beobachterentwurf zum Beobachterregler reduzierter Ordnung. Wie bei Weg 1 wird der Realteil als Dominanzkriterium für die modale Ordnungsreduktion sowie den Regler- und Beobachterentwurf eingesetzt. Der durch Polvorgabe entworfene Regler soll den dominanten Pol der Strecke wie zuvor nach  $-0,8$  verschieben, da dort gemäß Tabelle 3.14 die meisten stabilen Lösungen für das Gesamtsystem zu erzielen sind. Alle Kombinationen, die auf Weg 2 ein stabiles Gesamtsystem liefern, sind in Tabelle 3.16 und Tabelle 3.17 abgedruckt. Ausschlaggebend für die Festlegung des Reduktionsgrades bei der Modellreduktion auf Weg 2 sind die Dominanz- und Singulärwerte der Strecke (siehe Tabelle 3.15).

Reduktionsart	Neue Eigenwerte des Regelkreises			
	-0,4	-0,6	-0,8	-1,0
balancierte Ordnungsreduktion durch Abschneiden	50,0%	50,0%	58,3%	58,3%
balancierte Ordnungsreduktion nach Guth	66,6%	75,0%	83,3%	75,0%
modale Ordnungsreduktion durch Abschneiden	41,6%	33,3%	50,0%	41,6%
modale Ordnungsreduktion nach Guth	33,3%	33,3%	41,6%	41,6%

**Tabelle 3.14:** Anzahl der stabilen Gesamtsysteme bei Verschiebung des dominanten Eigenwerten und unterschiedlichen Reduktionsverfahren

Dominanzkennzahlen	Singulärwerte
4,783858575	2050361,397
0,008402961	109947,2452
0,008402961	47605,63108
0,003002468	25620,2953
0,00278289	12136,73014
0,00278289	1140,278861
0,001748203	809,3037136
0,001748203	543,2823187
0,001431842	89,5202657
0,000770537	41,73282418
0,000770537	8,594959948
0,000749187	0,304161371
$7,41761 \cdot 10^{-6}$	0,061903777

**Tabelle 3.15:** Kennzahlen für die Festlegung des Reduktionsgrades

Die Sprünge zwischen den Singulärwerten sprechen für eine Reduktion auf 1., 2., 5. oder 7. Ordnung. Wie aus Tabelle 3.16 und Tabelle 3.17 hervorgeht, ist eine Reduktion auf 5. Ordnung nicht immer möglich, weshalb die Strecke balanciert auf 7. Ordnung reduziert wird.

Reduktionsart	Ordnung	Neue Eigenwerte			
		-0,4	-0,6	-0,8	-1
balancierte Ordnungsreduktion durch Abschneiden	12	s	s	s	s
	11	s	s	s	s
	10	kl	s	s	s
	9	s	kl	s	s
	8	i	i	i	s
	7	s	s	s	i
	6	i	i	i	i
	5	i	i	i	i
	4	i	i	i	i
	3	i	i	i	i
balancierte Ordnungsreduktion nach Guth	12	s	s	s	s
	11	s	s	s	s
	10	s	s	s	s
	9	s	s	s	s
	8	kl	s	s	s
	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	kl	i	s	i
	4	i	i	i	i
	3	i	i	i	i
2	s	s	s	s	
1	s	s	s	s	

Legende: s = stabil i = instabil kk = konj.-komplexe Eigenwerte  
kl = Eigenwerte kleiner als die der Strecke

**Tabelle 3.16:** Mögliche Reduktionsgrade bei den verschiedenen Reduktionsverfahren der balancierten Ordnungsreduktion

Reduktionsart	Ordnung	Neue Eigenwerte			
		-0,4	-0,6	-0,8	-1
modale Ordnungsreduktion nach Guth	12	s	s	s	s
	11	s	s	s	s
	10	kk	kk	kk	kk
	9	s	s	s	s
	8	i	i	s	s
	7	kk	kk	kk	kk
	6	i	i	i	i
	5	kk	kk	kk	kk
	4	s	i	s	i
	3	i	i	i	i
	2	kk	kk	kk	kk
1	s	s	s	s	
modale Ordnungsreduktion nach Guth	12	s	s	s	s
	11	s	s	s	s
	10	kk	kk	kk	kk
	9	i	kl	kl	s
	8	i	kl	s	kl
	7	kk	kk	kk	kk
	6	i	i	i	i
	5	kk	kk	kk	kk
	4	i	i	i	kl
	3	s	s	s	s
	2	kk	kk	kk	kk
1	s	s	s	s	

Legende: s = stabil i = instabil kk = konj.-komplexe Eigenwerte  
kl = Eigenwerte kleiner als die der Strecke

**Tabelle 3.17:** Mögliche Reduktionsgrade bei den verschiedenen Reduktionsverfahren der modalen Ordnungsreduktion

Eine Reduktion auf 1. Ordnung ist zwar prinzipiell möglich, allerdings stößt dabei der Algorithmus von Guth an seine Grenzen. Zudem gehen bei einer Reduktion auf 1. Ordnung, wie auch bei einer Reduktion auf 2. Ordnung, zu viele Informationen über das Systemverhalten verloren. Sie scheiden daher für die weitere Betrachtung aus. Der am reduzierten Modell 7.

Ordnung entworfene Beobachterregler kann nicht einfach mit dem Referenzbeobachterregler von Weg 1 verglichen werden. Grund dafür ist die dem Beobachterreglerentwurf vorrangige Transformation auf balancierte Zustandsraumdarstellung. Der Beobachterentwurf liefert nämlich für verschiedenartige Systeme unterschiedliche Ergebnisse, was wiederum an dem implementierten Algorithmus liegt.

So werden beim Beobachterentwurf für das balanciert transformierte System die Eigenwerte weiter links plaziert, als bei dem modal transformierten System (siehe Tabelle 3.18).

EIGENWERTE REFERENZBEOBACHTERREGLER			
Referenzbeobachterregler für balancierte Ordnungsreduktion		Referenzbeobachterregler für modale Ordnungsreduktion	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-122,5350	0	-1,1645	0
-204,3559	-186,9429	-89,0095	0
-204,3559	186,9429	-111,4719	0
-531,3970	-1577,651	-372,1536	-1520,555
-531,3970	1577,6510	-372,1536	1520,555
-708,5584	0	-457,9644	0
-760,9337	-2438,2756	-658,8094	-2525,5719
-760,9337	2438,2755	-658,8094	2525,5719
-921,0248	0	-725,0456	0
-1373,1732	-378,8327	-1200,8601	0
-1373,1732	378,8327	-1389,492	0
-1838,7563	0	-1733,4191	0
-148425,78	0	-148295,68	0

**Tabelle 3.18:** Eigenwerte der Referenzsysteme für balanciert oder modal reduzierte Beobachterregler

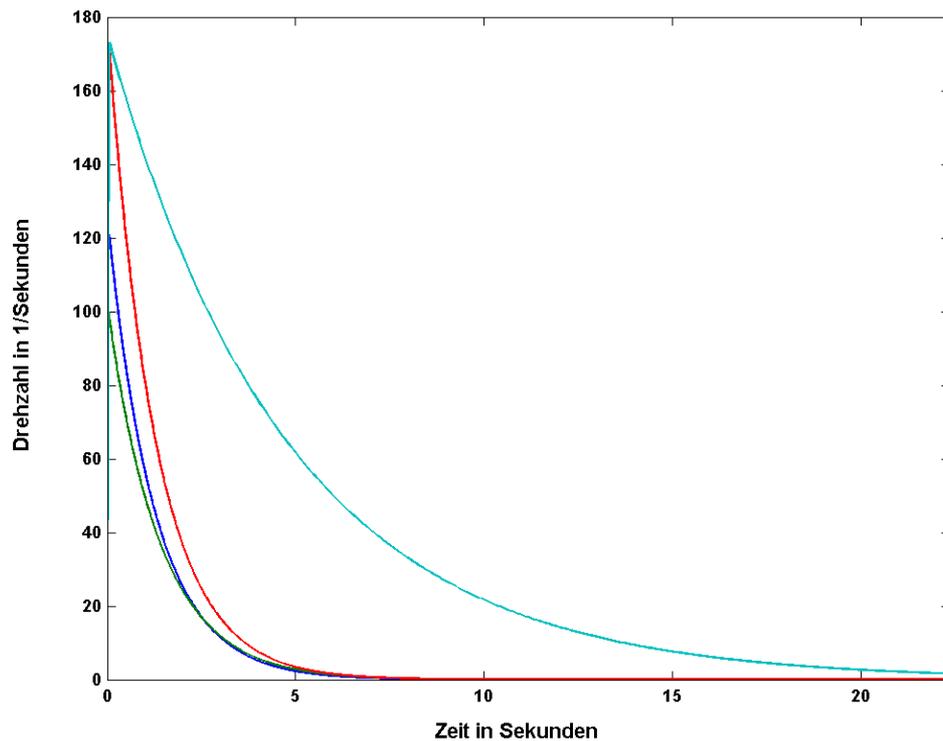
Diese Unterschiede sind auf den neuartigen Beobachterentwurf zurückzuführen, bei dem die neuen Eigenwerte des Beobachters stets weiter nach links verschoben werden, bis der Beobachterregler selbst und das Gesamtsystem, bestehend aus Strecke im Vorwärtszweig und Beobachterregler in der Rückführung, stabil sind. Aufgrund der Transformation ist die Anzahl der benötigten Iterationsschritte verschieden, was vor allem durch den *place*-Algorithmus hervorgerufen wird. Für die Gesamtsysteme mit den über balancierte Modellreduktion

entworfenen reduzierten Beobachterreglern 7. Ordnung ergeben sich die in Tabelle 3.19 abgedruckten Eigenwerte.

EIGENWERTE GESAMTSYSTEM MIT BEOBACHTERREGLER					
13. Ordnung (Referenz)		7. Ordnung über balancierte Ordnungsreduktion			
		durch Abschneiden		nach Guth	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,8	0	-0,7177	0	-0,7891	0
-119,0056	-10,3347	-119,9839	0	-112,3203	-12,8670
-119,0056	10,3347	-137,9358	-8,7540	-112,3203	12,8670
-130,9062	0	-137,9358	8,7540	-200,7247	0
-260,9324	-10,3347	-297,5453	0	-304,7142	-48,4703
-260,9324	10,3347	-319,2505	-1521,6332	-304,7142	48,4703
-333,0593	0	-319,2505	1521,6332	-383,1506	-1494,2616
-359,3387	-1537,0026	-340,9904	0	-383,1506	1494,2616
-359,3387	1537,0026	-519,0281	-2407,3461	-522,8179	-1681,7101
-496,3915	0	-519,0281	2407,3461	-522,8179	1681,7101
-525,2988	-1537,0026	-613,6848	-211,7883	-612,3501	-2488,1083
-525,2988	1537,0026	-613,6848	211,7883	-612,3501	2488,1083
-572,0159	-2488,6793	-738,6204	-1455,1982	-627,7605	-48,3289
-572,0159	2488,6793	-738,6204	1455,1982	-627,7605	48,3289
-698,4012	0	-1100,3318	-1678,2639	-1043,7425	-1340,5012
-759,2437	-2488,6793	-1100,3318	1678,2639	-1043,7425	1340,5012
-759,2437	2488,6793	-1212,0148	-262,2026	-1313,7839	-223,8661
-898,2676	0	-1212,0148	262,2026	-1313,7839	223,8661
-1297,7964	-231,2353	-1336,7155	0	-1334,8918	0
-1297,7964	231,2353	-134814,32	0	-134814,32	0
-1334,7808	0				
-1557,6023	-231,2353				
-1557,6023	231,2353				
-1598,2851	0				
-134814,32	0				
-148425,77	0				

**Tabelle 3.19:** Gesamtsysteme bestehend aus Strecke und dem jeweiligen über balancierte Modellreduktion erzeugten Beobachterregler in der Rückführung

Anhand der Eigenwerte ist erkennbar, daß der nach Guth verbesserte Beobachterregler reduzierter Ordnung nahezu die gleichen dominanten Gesamtsystemeigenwerte liefert, wie der Referenzbeobachterregler. Demzufolge werden sich ähnliche Impulsantworten ergeben (siehe Bild 3.17). Aber auch der durch einfaches Abschneiden reduzierte Beobachterregler erzeugt eine vergleichbare Dynamik hinsichtlich des Gesamtsystemverhaltens.



**Bild 3.17:** Impulsantworten der Gesamtsysteme im Vergleich mit der Strecke anhand der Drehzahl bei einer Anregung durch die Düsenaustrittsfläche (blau = Referenz, grün = durch Abschneiden, rot = nach Guth, hellblau = Strecke)

Bei dem über modale Modellreduktion entworfenen Beobachterregler reduzierter Ordnung würden sich die Ordnungszahlen 1, 3 und 9 anbieten (vgl. Tabelle 3.15). Diese sind aber auf Grund zu weniger stabiler Lösungen nicht geeignet (vgl. Tabelle 3.16 und Tabelle 3.17). Daher wird auf 8. Ordnung reduziert. Für die Gesamtsysteme mit Beobachterregler 8. Ordnung ergeben sich die in Tabelle 3.20 abgedruckten Eigenwerte.

EIGENWERTE GESAMTSYSTEM MIT BEOBACHTERREGLER					
13. Ordnung (Referenz)		8. Ordnung über modale Ordnungsreduktion			
Realteil	Imaginärteil	durch Abschneiden		nach Guth	
		Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,8	0	-0,3241	0	-0,2752	0
-0,88	0	-13,9657	0	-2,5514	0
-119,0056	-10,3347	-118,8369	-9,9976	-118,6855	0
-119,0056	10,3347	-118,8369	9,9976	-119,3165	-10,3134
-130,9062	-10,3347	-136,5569	-17,2764	-119,3165	10,3134
-130,9062	10,3347	-136,5569	17,2764	-141,7804	0
-333,0593	0	-330,6816	0	-354,7247	-22,3340
-359,3387	-1537,0026	-346,9206	0	-354,7247	22,3340
-359,3387	1537,0026	-359,2316	-1537,3567	-358,6009	-1539,0634
-366,3653	0	-359,2316	1537,3567	-358,6009	1539,0634
-395,2725	-1537,0026	-400,5256	-1539,3897	-389,5132	-1528,3511
-395,2725	1537,0026	-400,5256	1539,3897	-389,5132	1528,3511
-572,0159	-2488,6793	-571,9930	-2488,6773	-572,0189	-2488,6838
-572,0159	2488,6793	-571,9930	2488,6773	-572,0189	2488,6838
-629,2174	-2488,6793	-625,5583	-2502,0276	-639,6418	-2508,3942
-629,2174	2488,6793	-625,5583	2502,0276	-639,6418	2508,3942
-698,4012	0	-699,4989	0	-695,2106	0
-768,2413	0	-1294,933	-233,4705	-1290,1755	-217,0398
-1297,7964	-231,2353	-1294,933	233,4705	-1290,1755	217,0398
-1297,7964	231,2353	-1334,7578	0	-1334,9572	0
-1334,7808	0	-134814,29	0	-134814,27	0
-1427,5761	-231,2353				
-1427,5761	231,2353				
-1468,2589	0				
-134814,32	0				
-148295,75	0				

**Tabelle 3.20:** Gesamtsysteme bestehend aus Strecke und dem jeweiligen über Modellreduktion erzeugten Beobachterregler in der Rückführung

Das Ziel, durch den Beobachterregler reduzierter Ordnung, den dominanten Eigenwert nach  $-0,8$  zu verschieben, wurde mittels des Beobachterreglerentwurfs mit vorangehender modaler Modellreduktion nicht erreicht.

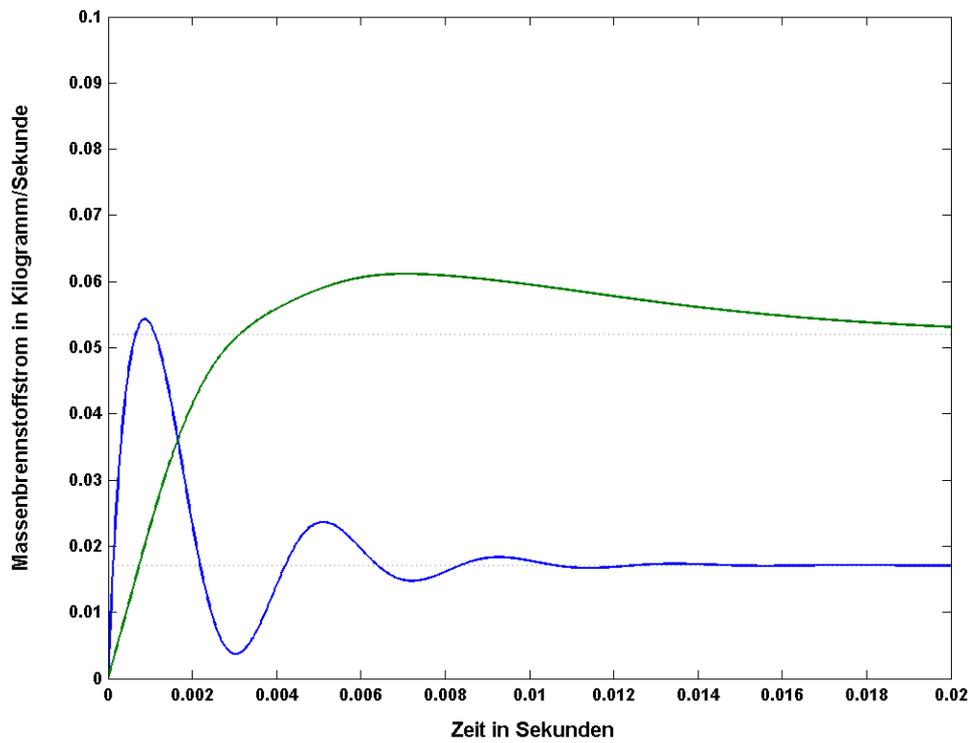
### *Vergleich von Weg 1 mit Weg 2*

Um eine Aussage über die verschiedenen Wege treffen zu können, werden nachfolgend exemplarisch einzelne Beobachterregler reduzierter Ordnung und die daraus resultierenden Gesamtsysteme miteinander verglichen. Den Vergleichssystemen liegen unterschiedliche Wege, aber gleiche Reduktionsverfahren zu Grunde. Da die Referenzsysteme der einzelnen Wege verschieden sind, werden die Gesamtsysteme einander gegenübergestellt. Dazu werden lediglich Beobachterregler reduzierter Ordnung herangezogen, die über das Verfahren nach Guth verbessert wurden. Für die balancierten Verfahren wird der Vergleich anhand der auf 5. und 3. Ordnung reduzierten Beobachterregler durchgeführt. Die Eigenwerte der über die verschiedenen Wege entworfenen Beobachterregler weichen wesentlich voneinander ab (siehe Tabelle 3.21). Dies ist unter anderem auf die Transformation zurückzuführen, die bei Weg 2 vor der Reduktion durchgeführt wird. Die Anzahl der Iterationsschritte beim Beobachterentwurf ist daher verschieden.

EIGENWERTE BEOBACHTERREGLER			
5. Ordnung über balancierte Ordnungsreduktion über Weg 1		5. Ordnung über balancierte Ordnungsreduktion über Weg 2	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-260,1582	0	-214,9162	-113,0976
-407,3779	-1503,5986	-214,9162	113,0976
-407,3779	1503,5985	-563,1076	0
-2559,7943	-2067,7511	-634,1347	-1521,286
-2559,7943	2067,7511	-634,1347	1521,286

**Tabelle 3.21:** Beobachterregler 5.Ordnung über Weg 1 und Weg 2 entworfen

Die Unterschiede hinsichtlich der dominanten Eigenwerte spiegeln sich auch in den Sprungantworten (siehe Bild 3.18) wider.



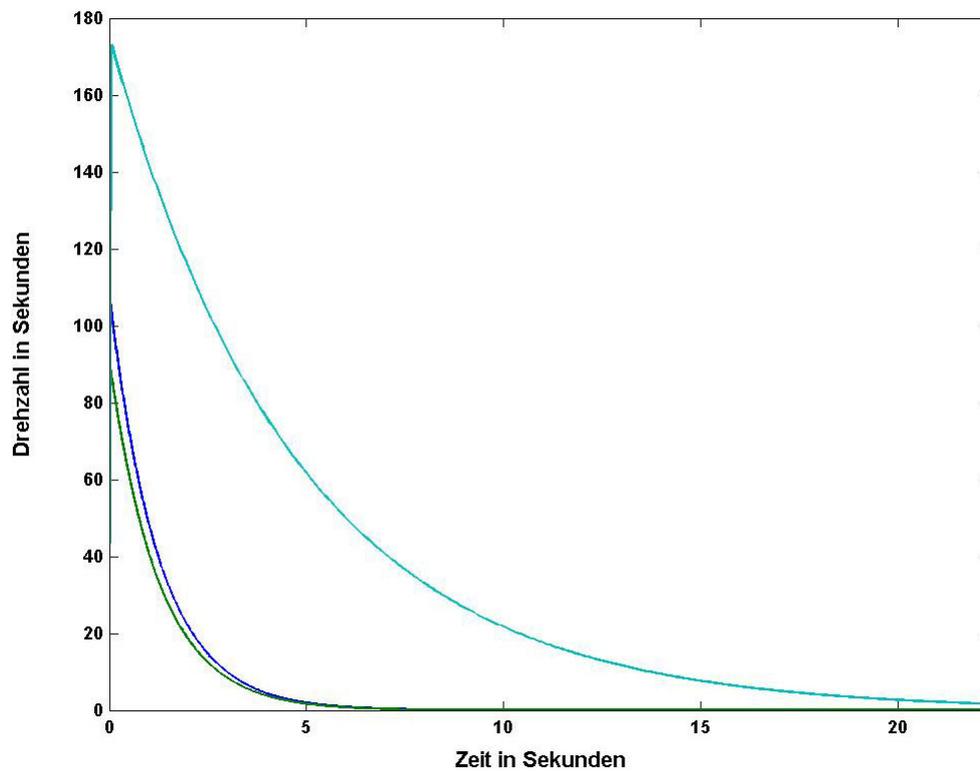
**Bild 3.18:** Sprungantwort des Massenbrennstoffstrom der Beobachterregler 5. Ordnung, erzeugt auf Weg 1 (blau) und Weg 2 (grün), bei einer Anregung durch die Drehzahl

Der dominante Eigenwert der entsprechenden Gesamtsysteme ist nahezu gleich (siehe Tabelle 3.22).

EIGENWERTE GESAMTSYSTEM MIT BEOBACHTERREGLER			
5. Ordnung über balancierte Ordnungsreduktion über Weg 1		5. Ordnung über balancierte Ordnungsreduktion über Weg 2	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,7998	0	-0,7967	0
-119,6294	-10,6573	-105,5250	-80,3483
-119,6294	10,6573	-105,5250	80,3483
-267,1551	0	-118,5548	0
-411,4116	0	-243,3882	-1627,3023
-450,8029	-1640,0893	-243,3882	1627,3023
-450,8029	1640,0893	-292,2694	0
-539,7938	-2433,8393	-387,9944	-1572,7939
-539,7938	2433,8393	-387,9944	1572,7939
-557,2184	-1324,5974	-411,5292	0
-557,2184	1324,5974	-505,5206	0
-627,3910	-172,4697	-736,5870	0
-627,3910	172,4697	-751,7292	-2503,6975
-1333,5811	0	-751,7292	2503,6975
-1696,7051	0	-1305,2032	0
-2479,3446	-2087,8561	-1330,4241	0
-2479,3446	2087,8561	-1645,8041	0
-134813,57	0	-134814,33	0

**Tabelle 3.22:** Eigenwerte der Gesamtsysteme mit den über verschiedene Wege entworfenen Beobachterreglern 5. Ordnung

Daher werden sich die Impulsantworten dieser Systeme (siehe Bild 3.19) kaum unterscheiden. Die Vorgabe den dominanten Pol nach  $-0,8$  zu verschieben wurde auf beiden Wegen erfüllt.



**Bild 3.19:** Impulsantworten der unterschiedlichen Gesamtsysteme, bestehend aus den verschiedenen Beobachterreglern (blau = Weg 1, grün = Weg 2) und der Strecke (hellblau), bei einer Anregung über die Düsenaustrittsfläche

Nachfolgend sollen die reduzierten Beobachterregler 3. Ordnung und deren Gesamtsysteme (siehe Tabelle 3.23) miteinander verglichen werden. Dabei handelt es sich um die Beobachterregler, die über Weg 1 und Weg 2 durch modale Ordnungsreduktion nach Guth erzeugt wurden sowie den ebenfalls nach Guth, aber über balancierte Ordnungsreduktion auf Weg 1 entworfenen. Über Weg 2 liefert der Beobachterregler 3. Ordnung, dem die balancierte Modellreduktion nach Guth vorausgeht, kein stabiles Gesamtsystem. Er scheidet daher für die weiteren Untersuchungen aus.

EIGENWERTE GESAMTSYSTEM MIT BEOBACHTERREGLER 3. ORDNUNG					
über modale Ordnungsreduktion über				über balancierte Ordnungsreduktion über Weg 1	
Weg 1		Weg 2			
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,8003	0	-0,8003	0	-0,8041	0
-119,6436	-31,7759	-0,8798	0	-121,6351	-11,4292
-119,6436	31,7759	-100,2091	0	-121,6351	11,4292
-122,0202	0	-119,0104	-10,3375	-190,6046	0
-148,2753	-2101,9624	-119,0104	10,3375	-326,4853	-1681,767
-148,2753	2101,9624	-171,2916	0	-326,4853	1681,767
-316,1076	-1552,0862	-339,5760	0	-390,6975	-1161,5493
-316,1076	1552,0862	-359,0957	-1535,2384	-390,6975	1161,5493
-387,8122	0	-359,0957	1535,2384	-505,5293	-2530,2477
-687,0123	0	-571,8246	-2486,9491	-505,5293	2530,2477
-910,5993	-2104,7214	-571,8246	2486,9491	-707,5123	0
-910,5993	2104,7214	-698,8869	0	-1328,7547	0
-1332,992	0	-1289,8021	-229,5037	-1359,8723	0
-1371,2481	-338,5919	-1289,8021	229,5037	-1858,3454	0
-1371,2481	338,5919	-1334,9411	0	-3224,8156	0
-134814,48	0	-134814,31	0	-134814,27	0

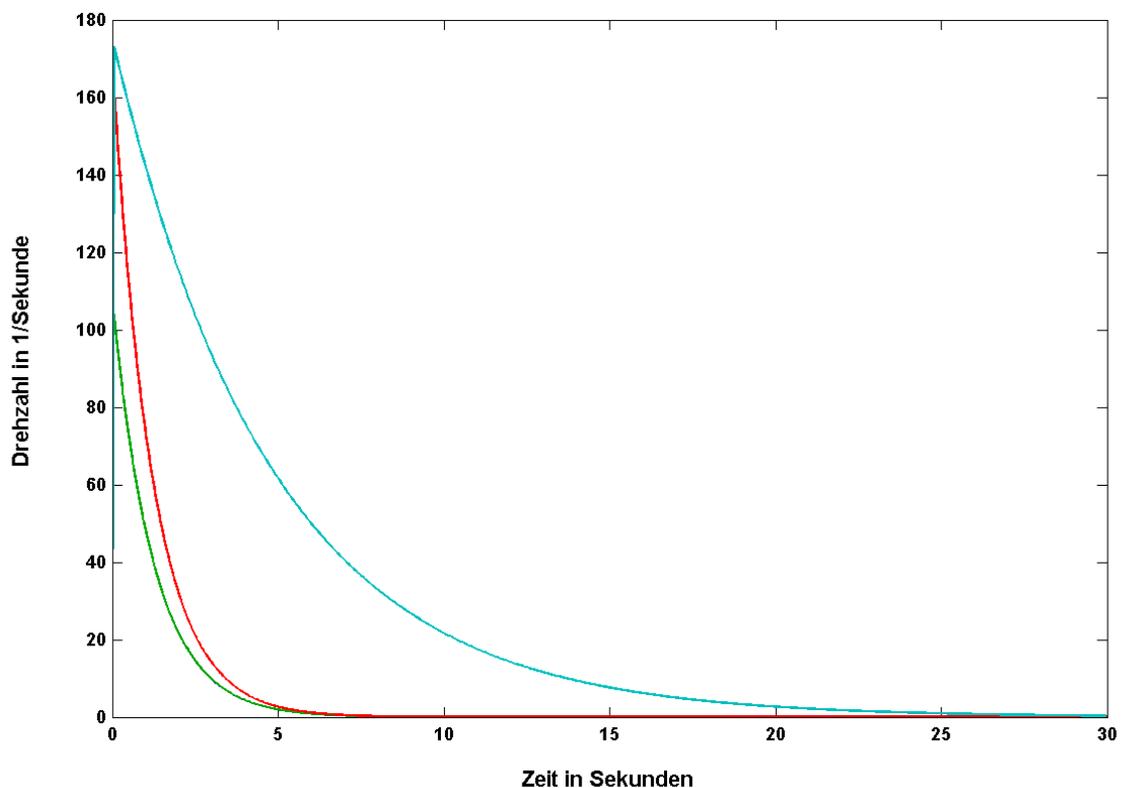
**Tabelle 3.23:** Eigenwerte der Gesamtsysteme mit den Beobachterreglern 3. Ordnung

Alle drei Beobachterregler 3. Ordnung erfüllen die Vorgabe, den dominanten Eigenwert nach  $-0,8$  zu verschieben.

Der Vergleich der Gesamtsysteme mit den Beobachterreglern 3. Ordnung ergibt, daß die in der Tabelle 3.23 an zweiter und dritter Stelle stehenden Eigenwerte der verschiedenen Systeme unterschiedlich sind. Dies ist wiederum auf den Beobachterentwurf und den darin implementierten *place*-Algorithmus sowie die unterschiedliche Anzahl der durchlaufenen Schleifen (vgl. Seite 20) zurückzuführen. Auf Weg 2 wird lediglich ein Schritt benötigt, damit der Beobachterregler die geforderten Stabilitätskriterien erfüllt. Auf Weg 1 müssen mehrere Durchläufe erfolgen, was zu weiter links liegenden Eigenwerten führt.

Vergleicht man nun die Impulsantworten der auf verschiedenen Wegen generierten Gesamtsysteme, so erkennt man am Beispiel der durch modale Ordnungsreduktion auf 3. Ordnung

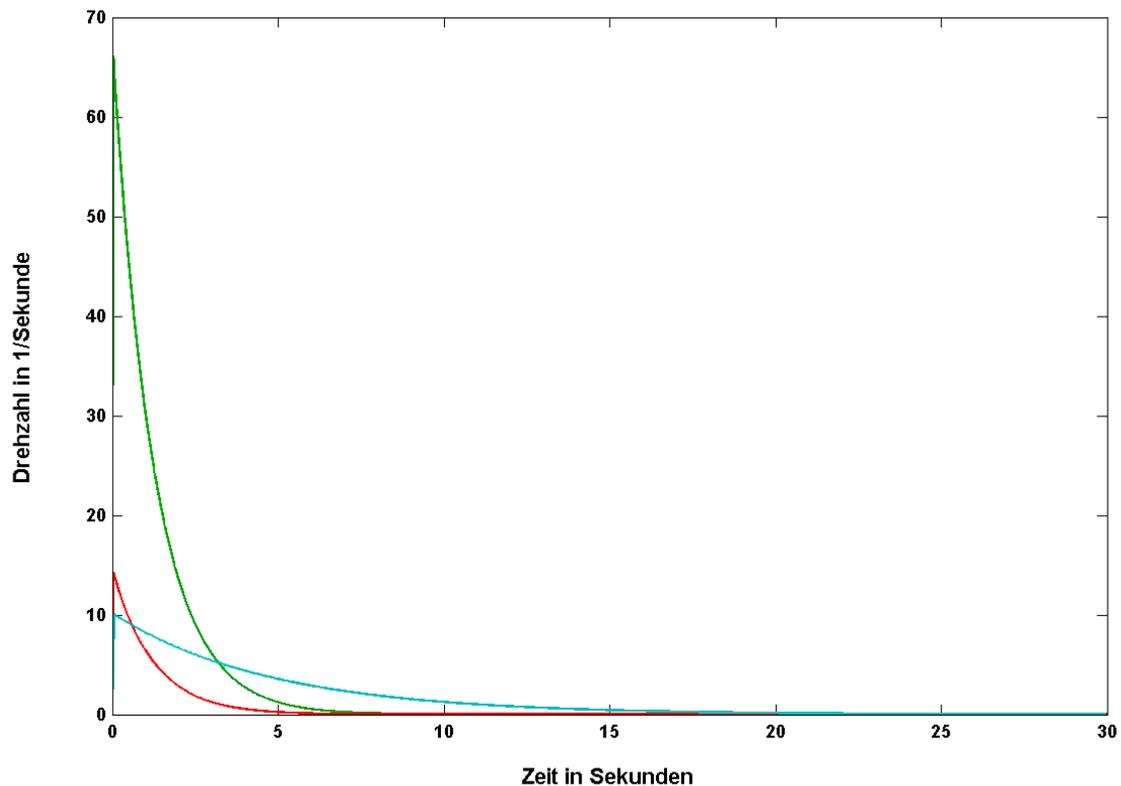
reduzierten Beobachterregler, daß deren Impulsantworten unterschiedlich sind (siehe Bild 3.20, Bild 3.21). Bei einem Impuls auf die Düsenaustrittsfläche klingt die Eigenbewegung des Gesamtsystems mit dem Beobachterregler, der über Weg 1 erzeugt wurde, schneller ab, als das Gesamtsystem mit dem Beobachterregler, der über Weg 2 entworfen wurde. Bei einer impulsförmigen Anregung durch den Massenbrennstoffstrom ist hingegen das Gesamtsystem mit dem Beobachterregler, der über Weg 2 entworfen wurde, schneller.



**Bild 3.20:** Impulsantwort der Gesamtsysteme mit Beobachterregler (blau = balanciert über Weg 1, grün = modal über Weg 1, rot = modal über Weg 2, hellblau = Strecke) bei einer Anregung über die Düsenaustrittsfläche

Die Impulsantworten der Gesamtsysteme, mit den auf Weg 1 über modale Reglerreduktion und balancierte Reglerreduktion entworfenen Beobachterreglern sind deckungsgleich. Dies ist auch aus den dominanten Eigenwerten ersichtlich (vgl. Tabelle 3.23). Sie sind nahezu gleich. So führt Weg 1 zu einer verbesserten Dynamik hinsichtlich der Drehzahl bei einem Impuls auf die Düsenaustrittsfläche (siehe Bild 3.20), wohingegen der über Weg 2 entworfene

Beobachterregler die Eigenbewegung des Gesamtsystems bezüglich der Drehzahl bei einer impulsförmigen Anregung des Massenbrennstoffstrom schneller abklingen läßt (siehe Bild 3.21).



**Bild 3.21:** Impulsantwort der Gesamtsysteme mit Beobachterregler (blau = balanciert über Weg 1, grün = modal über Weg 1, rot = modal über Weg 2, hellblau = Strecke) bei einer Anregung über den Massenbrennstoffstrom

Generell kann für die am Triebwerksmodell durchgeführten Untersuchungen festgestellt werden, daß die Vorgabe einer bestimmten Ordnung meist unmittelbar den Weg festlegt. So liefert Weg 1 für einige reduzierte Beobachterregler instabile Lösungen des Gesamtsystems (siehe Tabelle 3.4 und der Tabelle 3.5), wohingegen Weg 2 bei gleicher Ordnung eine stabile Lösung liefert (siehe Tabelle 3.15). Dies ist zum einen vom System und zum anderen vom angewendeten Reduktionsverfahren abhängig. Wie aus dem Vergleich der Gesamtsysteme mit den auf 3. Ordnung reduzierten Beobachterreglern hervorgeht, kann für die gleiche Ausgangsgröße, bei Anregung über verschiedene Eingänge, einmal Weg 1 und das andere Mal Weg 2 besser geeignet sein. Daher ist keine pauschale Aussage darüber möglich, welcher

Weg bessere Ergebnisse liefert. Es fällt allerdings auf, daß die nach Guth reduzierten Beobachterregler sehr häufig die Entwurfsvorgaben erfüllen, die Verfahren durch einfaches Abschneiden hingegen nicht die gewünschten Resultate erzielen. Daher bietet es sich an, für das Triebwerk, wenn möglich das Verfahren nach Guth anzuwenden. Außer bei Reduktion auf sehr kleine Ordnungen, ist der Beobachterregler reduzierter Ordnung infolge dessen fast immer in der Lage, den dominanten Eigenwert der Strecke durch die Regelung an die gewünschte Position zu verschieben. Damit ist der Einsatz eines Beobachterreglers reduzierter Ordnung gerechtfertigt und als sinnvoll anzusehen.

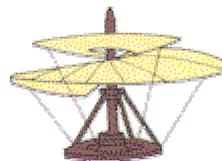
## **3.2 Simulationen am Rotormodell**

Zunächst werden die Entwicklungsgeschichte und der Stand der Technik von Hubschraubern dargestellt. Dem schließt sich die Modellbildung eines vereinfachten Hubschrauberlabormodells an, die in einem nichtlinearen mathematischen Modell mündet. Durch Linearisierung an drei unterschiedlichen Arbeitspunkten werden die entsprechenden Systemmatrizen des linearisierten zeitinvarianten Zustandsraummodells 8. Ordnung bestimmt. Anhand der Systemmatrizen eines Arbeitspunktes werden die Konzepte zum Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung umgesetzt und die Simulationsergebnisse miteinander verglichen. Exemplarisch wird für einen am linearisierten Modell entworfenen Regler reduzierter Ordnung dessen Anwendbarkeit am nichtlinearen Modell gezeigt.

### **3.2.1 Entwicklungsgeschichte des Hubschraubers und Stand der Technik**

Die Geschichte des Hubschraubers [7]; [16] reicht vom Jahre 2000 v. Chr. bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts. Bis heute ist es nicht möglich, eine genaue Aussage darüber zu treffen, zu welcher Zeit und an welchem Ort der Hubschrauber erfunden wurde. Der erste Hinweis auf die grundlegende Idee stammt von einem Chinesen, der vor etwa 2500 Jahren den ersten „Spielzeug-Hubschrauber“ erdachte. Dieser bestand aus einem runden Stock mit Hühnerfedern an den Enden. Diese Erfindung wurde durch die Handflächen oder mittels einer Schnur zum Rotieren und somit zum Fliegen gebracht.

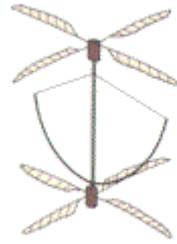
Der griechische Mathematiker und Physiker Archimedes (287-212 v. Chr.) stellte die Behauptung auf, dass jeder in Flüssigkeit oder Gas getauchte Körper entsprechend seines spezifischen Gewichts einen Auftrieb erfährt. Das „Universalgenie“ Leonardo da Vinci, der sich lange Zeit seines Lebens mit dem Vogelflug beschäftigte, kombinierte ungefähr 1700 Jahre später das Prinzip der archimedischen Schraube mit dem Gesetz vom Auftrieb. Angelehnt an die damalige Technik zur Wasserbeförderung in hochgelegene Orte entwickelte er ein innovatives Konzept. Der Entwurf der sogenannten Leonardo-da-Vinci-Spirale (Bild 3.22) wurde nie gebaut. Zur Beschreibung seiner Konstruktion gebrauchte er erstmals den Wortstamm des heutigen Begriffs „Helikopter“. Dieser hat seinen Ursprung im Griechischen und kommt von „helix“ = spiralförmig und „pteron“ = Flügel.



**Bild 3.22:** Die Leonardo-da-Vinci-Spirale

Der Franzose Jean Pascal Paucton entwarf ca. 250 Jahre nach dem Spiralschraubenmodell von Leonardo da Vinci ein „Muskelkraft-Flugzeug“, bei dem je eine Luftschraube für den Auftrieb und für den Vorwärtsflug vorgesehen war. Zur gleichen Zeit baute der Russe Michail Lomonossow den ersten funktionstüchtigen, von Federwerken angetriebenen Hubschrauber. Sein Hubschrauber mit koaxialem Rotorkonzept diente zum Transport von meteorologischen Instrumenten in verschiedene Höhen. Um die Tragfähigkeit seiner Konstruktion zu überprüfen, fertigte er eine Art Flaschenzuganlage mit Gewichten an.

Im Jahr 1784 führten die Franzosen Launoy und Bienvenu ein Hubschraubermodell vor, welches erstmalig die Drehmomentkompensation berücksichtigte. Dieser Drehflügler wurde in Anlehnung an die ersten Modelle der Chinesen gebaut. Im Unterschied zu seinen Vorgängermodellen wurde er mit zwei gegenläufigen Rotoren betrieben und diente als Denkankstoß für den Wissenschaftler George Cayley (Bild 3.23). Nach einigen Experimenten konstruierte Cayley ein für den Schwebeflug geeignetes Koaxial-Hubschrauber-Modell und legte damit den Grundstein für die spätere Senkrechtstarttechnik.



**Bild 3.23:** Koaxialhubschrauber-Modell aus Korken und Hühnerfedern von George Cayley

In der Folgezeit wurden diese Luftfahrzeuge durch mehrere Ingenieure weiterentwickelt. Der Forschungsschwerpunkt lag zur damaligen Zeit in der Antriebstechnik. So wurden die ersten Modelle zunächst mit menschlicher Muskelkraft und später mit der von Pferden betrieben. Beide Ansätze waren nicht erfolgreich. Ein weiterer Versuch einen Hubschrauber abheben zu lassen, wurde mit einem Uhrwerk unternommen. Die Auftriebskraft war dabei jedoch so gering, dass keine Flughöhen von mehr als sechs Metern erreicht werden konnten. Erst im Jahr 1842 versuchte der Engländer W. H. Phillips, zugleich Erfinder des Feuerlöschers, eine Flugmaschine durch eine Dampfmaschine mit Kraftstoff-Luftgemisch anzutreiben. Das Modell „Rasensprenger“ mit Blattspitzenantrieb war zwar flugfähig, zerschellte aber aufgrund der Nichtsteuerbarkeit am Boden. Der Gedanke, ein Fluggerät mit Dampfkraft anzutreiben, war der Ansporn für viele Erfinder. Es galt diese Antriebsart zu perfektionieren. Das Problem war jedoch, einen Motor zu entwickeln, der im Verhältnis zu seinem Gewicht die erforderliche Leistung erbringen würde. In der Folgezeit wurde versucht, den gewünschten Auftrieb mit Elektromotoren sicherzustellen, was aber nicht den erhofften Erfolg brachte. Kurz nach der Jahrhundertwende entwickelten die Franzosen Louis und Jacques Bréguet 1908 den mit zwei 55-PS-Renault-Benzinmotoren tatsächlich flugfähigen Drehflügler „Gyroplane Nr. 2“. Er hatte zwei kippbare Rotoren von je 7,85 m Durchmesser sowie starre Flügel mit einer Gesamtfläche von über 50 m<sup>2</sup>, welche die Rotoren im Vorwärtsflug entlasten sollten.

Bis zum Anfang des 2. Weltkrieges arbeiteten viele Erfinder an der Weiterentwicklung der Fluggeräte hinsichtlich der Leistungssteigerung der Motoren und der Verbesserung der Rotoren. Weitere Entwicklungsschwerpunkte lagen im Bereich der Steuerung, der Flugstabilität und des Drehmomentenausgleichs. In diesem Zusammenhang sind neben den Bréguet-Brüdern die Russen Igor Sikorsky und Boris N. Juriew zu nennen, welche den ersten Hubschrauber mit Haupt- und Heckrotor konstruierten. Während des Krieges stagnierten die Entwicklungen, um dann in den frühen fünfziger Jahren einen rasanten Aufschwung zu

erfahren. Die erste in Lizenzfertigung gebaute Hubschraubergeneration wurde von den bei der Firma Sikorsky Aircraft Corporation aufgelegten Hubschrauberserien mit Haupt- und Heckrotor geprägt.

Der nächste Meilenstein in der Hubschraubergeschichte war die Konstruktion von Drehflüglern mit Turbinenantrieb. Der Vorteil von Turbinen-Triebwerken gegenüber Kolbenmotoren ist bei Hubschraubern in erster Linie in der Gewichtsersparnis zu sehen. Aufgrund des sehr günstigen Leistungsverhältnisses in Kilogramm pro Pferdestärke (kg/PS), des geringeren Raumbedarfs und des Wegfalls der bei Kolbenmotoren erforderlichen Motorkühlung ist ein Hubschrauber mit Turbinen wesentlich leichter als einer mit Kolbenmotor. 1961 ging mit der „Alouette II“ der erste Turbinenhubschrauber in Serienfertigung. Diese Technik motivierte andere Herstellerfirmen, ihre Modelle weiterzuentwickeln. Unterstützt wurde diese Entwicklung durch zahlreiche Fertigungsanfragen von militärischer und ziviler Seite. Hervorzuheben sind hier die Bell UH-1 D, die unter anderem von der U.S. Army im Vietnam-Krieg geflogen wurde, sowie die Sikorsky CH-53 G und die MBB BO 105 (Bild 3.24). Die CH-53 wird beispielsweise bei den deutschen Heeresfliegern als Transporthubschrauber eingesetzt. Die BO 105 dient bei der Bundeswehr als Panzerabwehr- und Verbindungshubschrauber.

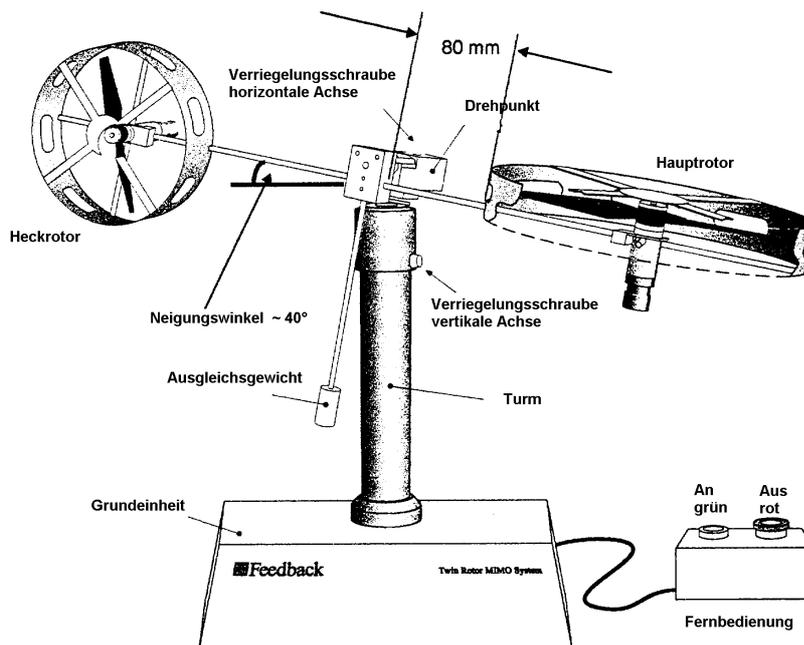


**Bild 3.24:** Sikorsky CH-53 G (o.), MMB BO 105 (u. l.) und Bell UH-1 D (u. r.) [59]

Die modernen Hubschrauber haben inzwischen eine derart hohe Perfektion erreicht, daß sie für spezielle Aufgabengebiete nicht mehr wegzudenken sind und gegenüber Tragflüglern klare Vorteile aufweisen.

### 3.2.2 Modellbeschreibung und Streckenuntersuchung

Basierend auf grundlegenden mechanischen Gesetzen und den daraus resultierenden Differentialgleichungen, kann ein Helikopter als nichtlineares dynamisches Mehrgrößensystem beschrieben werden. Das in Bild 3.25 dargestellte Twin-Rotor-MIMO-System ist ein vereinfachtes Hubschraubermodell. Ziel der Modellbildung ist es, das auf physikalischen Effekten beruhende Systemverhalten der Anlage möglichst genau in ein mathematisches Modell zu überführen. Dabei können schon bei der Modellbildung gewisse Einflüsse vernachlässigt werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von physikalischen Vereinfachungen, die eine Reduktion der Modellordnung zur Folge haben. Bei der Modellbildung in dieser Arbeit wurde darauf geachtet, ein möglichst detailliertes Modell zu erzeugen, auf das im weiteren verschiedene Ordnungsreduktionsverfahren angewendet werden können.



**Bild 3.25:** Twin-Rotor-MIMO-System (Hubschraubersystem) [23]

Die Modellbeschreibung beginnt zunächst mit der Erläuterung der physikalischen Grundlagen des Systems [16]. Es werden Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen einem realen Helikopter und dem vorliegenden Laborsystem (Bild 3.25) aufgezeigt. Dabei bietet es sich an, die zwei Teilsysteme Hauptrotor (Index  $m$  = mainrotor bzw.  $v$  = vertikale Rotationsebene) und Heckrotor (Index  $t$  = tailrotor bzw.  $h$  = horizontale Rotationsebene) vorerst getrennt von einander zu betrachten. Diese Zerlegung erleichtert das Verständnis für die spätere Betrachtung des verkoppelten Gesamtsystems.

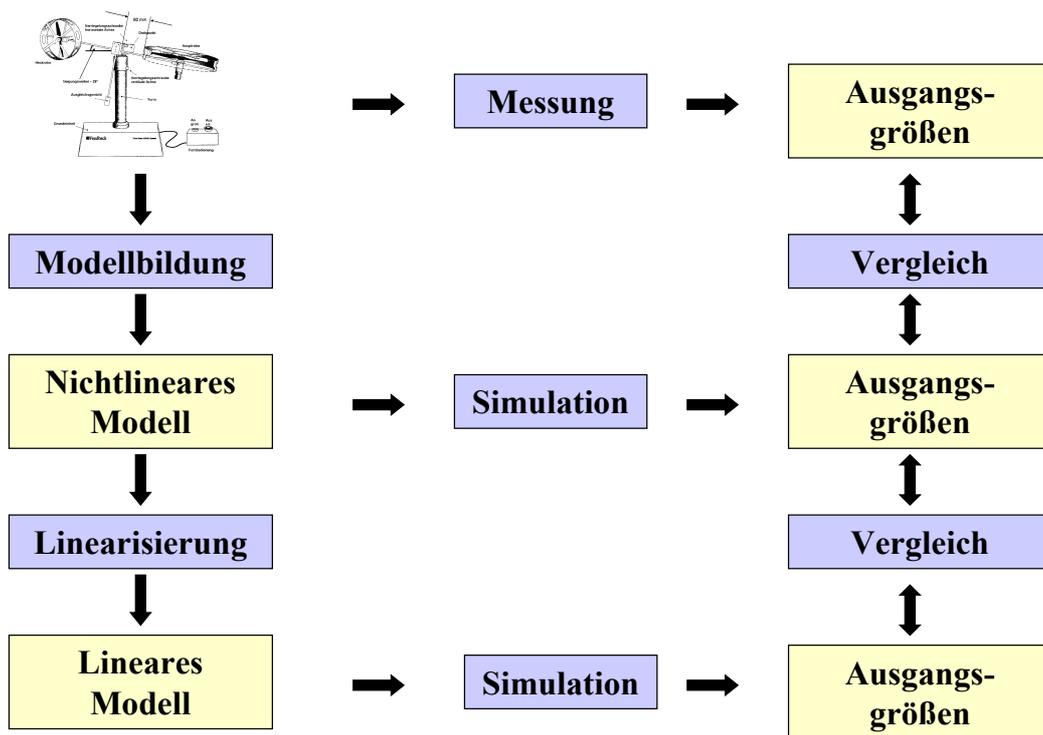
Das Laborsystem läßt sich wie folgt charakterisieren:

An den beiden Enden eines Metallstabs, im weiteren Verlauf als Schwenkarm bezeichnet, sind zwei Rotoren angebracht. Diese werden jeweils durch Gleichstrommotoren angetrieben. Eine Aufhängung gestattet es der Anordnung, Rotationsbewegungen in allen Raumrichtungen auszuführen. Mit einem am Aufhängungspunkt des Schwenkarmes angebrachten Gegengewicht ist es möglich, einen Gleichgewichtszustand des Rotorsystems festzulegen. Das System ist so ausbalanciert, daß der Hauptrotor bei abgeschalteten Motoren um ca.  $40^\circ$  nach unten geneigt ist.

Bei einem realen Helikopter wird der aerodynamische Vor- bzw. Auftrieb durch die Variation des Rotoranstellwinkels bzw. des Anstellwinkels der Rotorblätter beeinflusst. Das Laborsystem ist so konstruiert, daß der Anstellwinkel nicht verändert werden kann. Dieser Punkt stellt daher den wesentlichen Unterschied zu einem realen Helikopter dar. Die aerodynamische Kraft wird beim betrachteten Modell ausschließlich durch Veränderung der Rotorgeschwindigkeit beeinflusst. Demzufolge dienen die Motorspannungen als einzige Stellgrößen. Eine Spannungsänderung am Gleichstrommotor bewirkt eine Veränderung der Rotorgeschwindigkeit, welche dann eine Positionsänderung des Schwenkarmes zur Folge hat. Hierbei ist außerdem zu beachten, daß die Kraft-Spannungs-Kennlinien beider Rotoren streng genommen nicht punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verlaufen. Einer Vorzeichenänderung der Spannung an einem der Rotoren entspricht daher keine zahlenmäßig gleiche Kraftwirkung in entgegengesetzter Richtung.

Bei der Laboranordnung sind der vertikale und der horizontale Positionswinkel Zustandsgrößen des Systems. Sie geben die Position des Schwenkarmes im Raum an. Weitere zur Systembeschreibung herangezogene Zustandsgrößen sind die Winkelgeschwindigkeiten um die horizontale und vertikale Achse des Aufhängungspunktes, die Rotordrehzahlen des Haupt- und des Heckrotors sowie die speisenden Ströme der beiden Gleichstrommotoren.

Bei der Entwicklung des mathematischen Modells werden gewisse Vereinfachungen vorausgesetzt: Zunächst wird angenommen, daß sich die Dynamik der Rotorteilsysteme mit Differentialgleichungen erster Ordnung beschreiben läßt. Die aus der Strömungstheorie bekannten Vereinfachungen für die Rotoren werden bei der Modellbildung verwendet, wobei die zu berücksichtigende Reibung des Systems dem zähflüssigen Typ zugeordnet wird. Beide Betrachtungsweisen sind für die Untersuchungen dieser Arbeit ausreichend realitätsnah. Darüber hinaus wird die zuvor genannte Asymmetrie der Kraft-Spannungs-Kennlinien beider Rotoren nicht berücksichtigt und die konstruktionstechnisch bedingten mechanischen Anschlägen vernachlässigt. Die Einflüsse der Zuleitungs- und Meßkabel wurden durch einen linearen Ansatz berücksichtigt. Alle Annahmen sind insofern angemessen, weil das entworfene Modell nach der Linearisierung in der Umgebung von Arbeitspunkten untersucht wird und eine detaillierte Beschreibung keine erwähnenswerte Verbesserung bewirkt. Bild 3.26 veranschaulicht die Vorgehensweise bei Modellbildung und Ermittlung der physikalischen Parameter.



**Bild 3.26:** Gewählte Vorgehensweise zur Modellbildung

Von der linearisierten Zustandsraumdarstellung des Modells ausgehend, erfolgt in Abschnitt 3.2.3 die Anwendung der in Kapitel 2 beschriebenen Konzepte.

### ***Physikalische Grundlagen***

Im folgenden werden die physikalischen Effekte der einzelnen Komponenten des Rotor-systems mathematisch beschrieben.

#### ***Gleichstrommotoren***

Die Rotoren des Labormodells werden durch zwei Gleichstrommotoren identischer Bauart angetrieben. Ein solcher Gleichstrommotor kann durch ein einfaches Gleichstromersatzschaltbild beschrieben werden. Für den Stromkreis dieser Ersatzschaltung, bestehend aus der speisenden Spannung  $u$ , dem Strom im Ankerkreis  $i$ , der Ankerinduktivität  $L$ , dem Ankerwiderstand  $R$  und der Ankerrückwirkungsspannung  $u_q$ , liefert die Maschengleichung nach Kirchhoff

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_q = u. \quad (3.16)$$

Die Ankerrückwirkungsspannung  $u_q$  ist proportional der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Motorwelle und somit auch proportional der Winkelgeschwindigkeit des Rotors, da er starr an die Welle gekoppelt ist. Man setzt für  $u_q = k_m \omega$ , wobei  $k_m$  eine charakteristische Motor-konstante für die magnetischen Kenngrößen des Motors ist. Sie ist gemeinsam mit dem Strom  $i$  für die Bildung des Drehmoments  $M_M$  gemäß (3.17) verantwortlich. Sättigungs- und Hystereseeffekte werden vernachlässigt.

$$M_{Mm/t} = k_m i_{m/t} \quad (3.17)$$

Die Umformung von Gleichung (3.16) ergibt folgende Differentialgleichung für den Strom im Ankerkreis:

$$(3.18)$$

Die Indizes m/t bzw. v/h stehen für main/tail (Haupt-/Heckrotor) bzw. für vertikal/horizontal.

### ***Elektromechanische Kopplung***

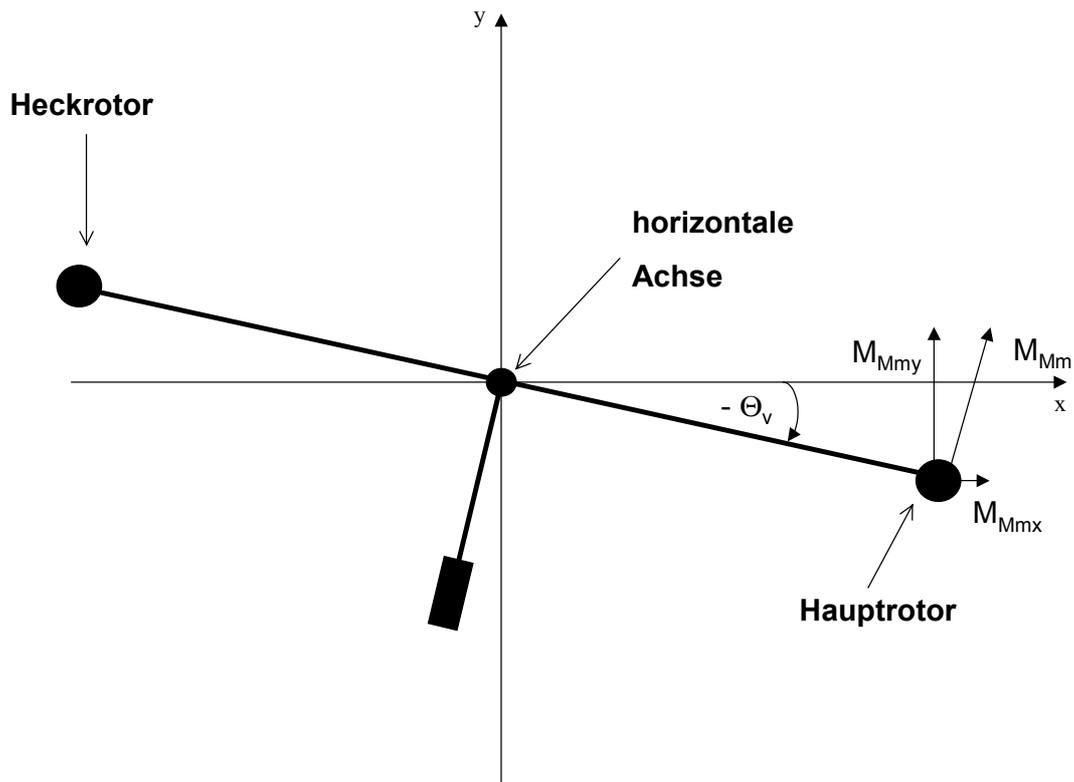
Gemäß dem dritten Newtonschen Axiom besitzt jede Kraft  $F$  eine gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Gegenkraft  $F'$ . Da die Gleichstrommotoren wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben durch den Ankerstrom ein treibendes Moment  $M_M$  entwickeln, wirken auf den drehbar gelagerten Schwenkarm die entsprechenden Gegenmomente  $M_{MGt}$  und  $M_{MGm}$ . Sie lauten nach dem oben geschilderten Prinzip *actio = reactio*

$$M_{MGt} = -k_m i_t \quad (3.19)$$

und

$$M_{MGm} = k_m i_m \cos \Theta_v \quad (3.20)$$

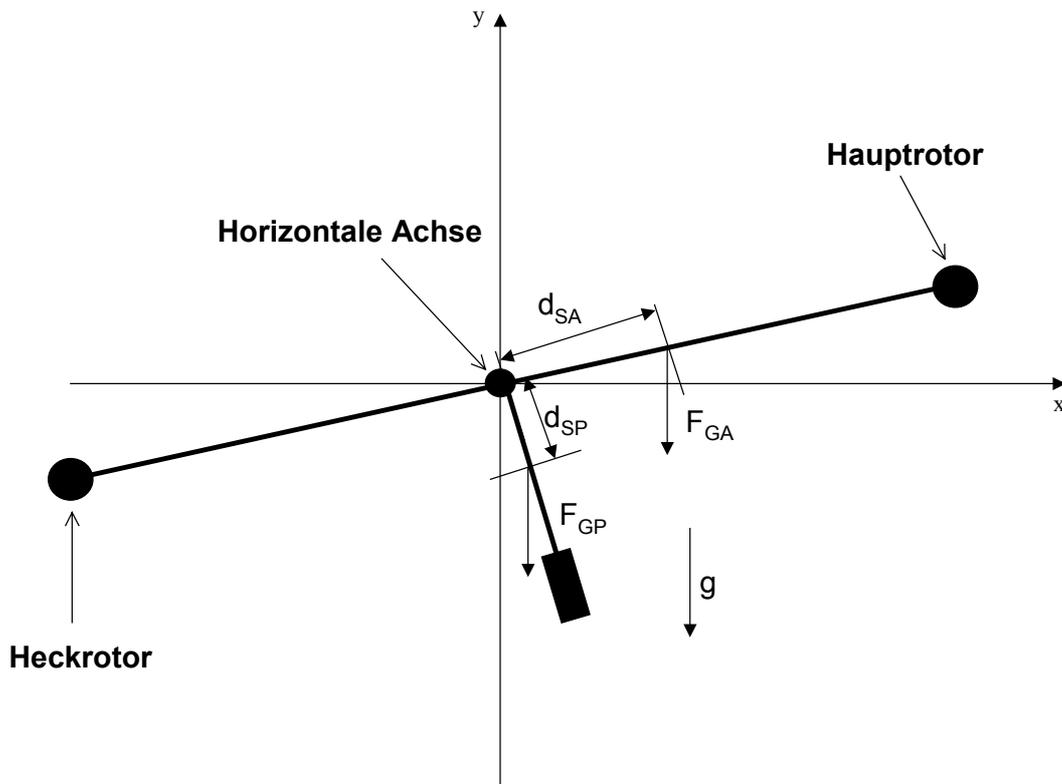
Für die Bewegungen um die horizontale und die vertikale Achse ist beim Moment  $M_{MGm}$  allerdings zu beachten, daß dieses zusätzlich noch eine Abhängigkeit vom Winkel  $\Theta_v$  aufweist (3.20), da es nach Bild 3.27 stets senkrecht zur Rotationsebene des Hauptrotors steht.



**Bild 3.27:** Aufteilung des Reaktionsmoments des Hauptrotors aufgrund elektromechanischer Kopplung

### *Gewichtskräfte*

Unter der Gewichtskraft eines Körpers versteht man die auf ihn wirkende Schwerkraft als Folge der Gravitation. Da diese Kraft stets senkrecht zur Erdoberfläche wirkt, erzeugt das aus ihr resultierende Moment ausschließlich Drehungen um die horizontale Achse; es beeinflusst also nur den Winkel  $\Theta_v$ . Die Massen der Rotoren von Aufhängung und Pendel inklusive Gegengewicht können zur Vereinfachung als Punktmasse im jeweiligen Schwerpunkt nach Bild 3.28 zusammengefasst werden.



**Bild 3.28:** Vereinfachte Darstellung der wirksamen Gewichtsmomente

Die durch die Masse  $m_p$  des Pendels und die Masse des Schwenkarmes  $m_A$  hervorgerufenen Momente  $M_{GvP}$  und  $M_{GvA}$  berechnen sich gemäß Bild 3.28 zu

$$M_{Gv} = M_{GvP} + M_{GvA} = -g(m_p d_{SP} \sin \Theta_v + m_A d_{SA} \cos \Theta_v), \quad (3.21)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung und  $d_{SA}$  bzw.  $d_{SP}$  den Schwerpunktsabstand des Schwenkarmes bzw. des Pendels zur Drehachse bezeichnen.

### ***Aerodynamischer Auftrieb***

Im Gegensatz zu Flugzeugen entsteht der aerodynamische Auftrieb bei Hubschraubern nicht durch eine translatorische, sondern durch eine rotatorische Erzeugung einer Druckdifferenz an den Rotorblättern. Zu diesem Effekt addiert sich der Einfluß durch das dritte Newtonsche Axiom. Da der Luftstrom abgelenkt wird, erzeugt er einen entgegengesetzten Bewegungsimpuls am ablenkenden Objekt. Beides zusammen ergibt den Gesamtauftrieb. Die Rotorfläche, die Dichte des umgebenden Mediums und die Rotationsgeschwindigkeit des Rotors

sind die entscheidenden Einflußgrößen, die zur Bildung der Auftriebskraft beitragen. Die ursprünglich asymmetrische Kraft-Drehzahl-Kennlinie beider Rotoren läßt sich vereinfacht durch folgende Beziehungen annähern:

$$F_{AV/h} = k_{AV/h} \operatorname{sgn}(\omega_{m/t}) \omega_{m/t}^2 \quad (3.22)$$

Diese Annäherung liefert zufriedenstellende Ergebnisse, da die Dichteänderungen der umgebenden Luft und der Bodeneffekt eine genauere physikalische Modellierung unnötig machen. Bei bekanntem Gewichtsmoment müssen die Rotoren zur Einhaltung einer stationären Lage ausschließlich das Gesamtgegenmoment  $M_{Gv}$  der Schwerkraft nach Bild 3.28 kompensieren. Die Auftriebskonstanten  $k_{Ah}$  und  $k_{Av}$  werden durch die Aufnahme einer stationären Kennlinie ermittelt.

Als Resultat dieser Überlegungen ergeben sich für die Bewegungen um die beiden Drehachsen die Momente  $M_{Ah}$  und  $M_{Av}$ . Es gilt

$$M_{Ah} = F_{Ah} l_t = k_{Ah} \operatorname{sign}(\omega_t) \omega_t^2 l_t \cos \Theta_v \quad (3.23)$$

bzw.

$$M_{Av} = F_{Av} l_m = k_{Av} \operatorname{sign}(\omega_m) \omega_m^2 l_m \quad (3.24)$$

### ***Trägheitsmomente***

Das Trägheitsmoment  $I$  ist ein Maß für den Widerstand, den ein Körper einer Änderung seiner Drehbewegung gemäß

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (3.25)$$

entgegensetzt, wobei  $m_i$  die Teilmassen und  $r_i$  ihre Abstände zum Referenzpunkt sind. Das Trägheitsmoment hängt von der Massenverteilung des Körpers relativ zu seiner Drehachse ab. Für den Fall eines Körpers mit kontinuierlicher Massenverteilung kann die Summe in der Gleichung (3.25) für das Trägheitsmoment durch ein Integral ersetzt werden. Die Beziehung lautet dann

$$I = \int r^2 dm, \quad (3.26)$$

wobei  $r$  hier der Abstand des infinitesimalen Massenelementes  $dm$  von der Drehachse ist. Unter der Annahme symmetrischer Körper können die bekannten vereinfachten Formeln (siehe z.B. [37] oder [55]) zur Berechnung der Trägheitsmomente homogener Körper verwendet werden.

Zusätzlich wird bei der Modellbildung der Satz von Steiner benötigt. Er stellt die Beziehung zwischen einem Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch den Massenschwerpunkt und einer dazu im Abstand  $h$  parallelen Achse her. Bei bekanntem Trägheitsmoment  $I_s$  der Drehung um den Massenschwerpunkt lautet die Gleichung für das Trägheitsmoment  $I$  für die Rotation um die parallel verschobene Achse

$$I = I_s + m_{\text{ges}} \cdot h^2, \quad (3.27)$$

wobei  $m_{\text{ges}}$  für die Gesamtmasse des Körpers steht.

### ***Reibung***

Die im System auftretenden Reibungseffekte lassen sich in Lager- und Luftreibung unterteilen. Die Reibung, die in den Lagern der Aufhängung des Systems entsteht, wird als viskose Reibung angenommen. Die Größe des durch sie verursachten Moments  $M_R$  ist also proportional zur Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ .

$$M_{Rv/h} = -k_{v/h} \Omega_{v/h} \quad (3.28)$$

Ebenso wie die zuvor beschriebene Reibung im Aufhängungspunkt wird die Lagerreibung in den Gleichstrommotoren als viskos angesetzt. Die Reibmomente  $M_{Rm}$  und  $M_{Rt}$  lauten in Analogie zu (3.28) wie folgt:

$$(3.29)$$

Das Moment der Luftreibung  $M_L$  wird bei aerodynamischen Vorgängen üblicherweise als quadratische Abhängigkeit von der Rotorgeschwindigkeit  $\omega$  angenommen. Die an der Rotorfläche vorbeiströmende Luft erzeugt ein zur Strömungsrichtung paralleles Drehmoment in

entgegengesetzter Richtung. Dieses Gegenmoment ist abhängig von der Rotorfläche, der Art des Rotors und der Dichte des Mediums. Am jeweiligen Rotor wirkt demnach das Moment

$$M_{Lm/t} = -k_{Lm/t} \operatorname{sgn}(\omega_{m/t}) \omega_{m/t}^2 \quad (3.30)$$

### ***Propeller***

Durch das Anlegen einer Gleichspannung an die Klemmen des Gleichstrommotors bildet dieser in Abhängigkeit vom Ankerstrom ein Drehmoment aus. Hierdurch wird der Propeller eines Systems in Rotation versetzt. Die Drehbewegung eines Propellers läßt sich durch eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben. Die einzelnen Summanden, die zusammen das Beschleunigungsmoment ergeben, stammen aus der Lagerreibung  $M_R$ , der Luftreibung  $M_L$  und dem Motorantriebsmoment  $M_M$  (3.17).

$$I_{m/tr} \frac{d\omega_{m/t}}{dt} = M_{Rm/t} + M_{Lm/t} + M_{Mm/t} = -k_{Rm/t} \omega_{m/t} + k_m i_{m/t} - k_{Lm/t} \operatorname{sgn}(\omega_{m/t}) \omega_{m/t}^2 \quad (3.31)$$

Dabei ergeben sich die Trägheitsmomente  $I_{mr}$  und  $I_{tr}$  (3.32) aus der Summe der Trägheitsmomente des Propellers  $I_p$  und des Motorankers  $I_{MA}$ , da beide Bauteile starr gekoppelt sind.

$$I_{m/tr} = I_{Pm/t} + I_{MAm/t} \quad (3.32)$$

Die massive Erhöhung des Trägheitsmoments durch die Kopplung des Motors mit dem Propeller und der nichtlineare Einfluß der Luftreibung ändern das P-T<sub>1</sub>-Glied des Motors in Bezug auf die Vergrößerung der Zeitkonstante und den wesentlich geringeren Endwert der Winkelgeschwindigkeit. Haupt- und Heckrotor verhalten sich in dieser Hinsicht trotz identischer Gleichstrommotoren unterschiedlich, da die Propeller nicht baugleich sind.

### ***Torsion***

Ein sehr schwer zu erfassender Effekt des Modells ist die Torsion der Energie- und Meßleitungen. Durch mechanische Eingriffe konnte dieser Einfluß minimiert werden. Dennoch ist ein wirksames Moment  $M_{Th}$  vorhanden, das mit dem Winkel  $\Theta_h$  und der Torsionskonstante  $k_T$  durch die lineare Beziehung

$$M_{Th} = -k_T \Theta_h \quad (3.33)$$

nachgebildet wird. Auch wenn der Torsionseffekt nicht vollständig durch eine lineare Beziehung beschrieben werden kann, ist das Ergebnis zumindest stationär hinreichend genau. Eine weitergehende Modellierung ist vor allem deswegen nicht möglich, weil durch ungewollte und unbewußte äußere Eingriffe dieser Einfluß stark verändert werden kann.

### ***Trägheitskräfte***

Da es sich bei den betrachteten Bewegungen um Drehungen handelt, sind neben der Newtonschen Trägheitskraft noch die Trägheitskräfte der Rotation zu beachten. Wesentliche Einflüsse auf das Twin-Rotor-MIMO-System haben dabei die Zentrifugal- und die Coriolis-Kraft.

Die zur Zentripetalkraft (Trägheitskraft) gehörende Gegenkraft wird als Zentrifugalkraft  $F_Z$  (Fliehkraft) bezeichnet. Bei der Bewegung auf einer Kreisbahn wirkt die Zentrifugalkraft stets zusätzlich zur Gewichtskraft des Körpers radial nach außen. Sie berechnet sich für einen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$  rotierenden Massenpunkt der Masse  $m$  zu

$$F_Z = m\omega^2 r. \quad (3.34)$$

Im betrachteten System wird daraus die Gleichung für das resultierende Moment  $M_{Zv}$  um die horizontale Achse

$$M_{Zv} = \Omega_h^2 (\cos \Theta_v d_{SP}^2 m_P - \sin \Theta_v d_{SA}^2 m_A) \quad (3.35)$$

abgeleitet, wobei die Bedeutung der Parameter  $d_{SP}$  und  $d_{SA}$  in Bild 3.28 abgebildet sind.

Bewegt sich in einem rotierenden Bezugssystem ein Körper radial nach innen oder außen, so ändert sich seine Bahngeschwindigkeit. Er erfährt somit eine Tangentialbeschleunigung, deren Ursache die Coriolis-Kraft  $F_C$  ist. Eine Berücksichtigung dieser Scheinkraft, deren Größe durch (3.36) mit der Masse  $m$  des Körpers und der Radialgeschwindigkeit  $v$  bestimmt ist, bleibt daher unerlässlich.  $\omega$  stellt die Winkelgeschwindigkeit des betrachteten rotierenden Systems dar.

$$F_C = 2 m v \omega \quad (3.36)$$

Übertragen auf das Hubschraubermodell bedeutet dies ein weiteres Moment  $M_C$  um die horizontale Achse. Es gilt

$$M_C = 2 \Omega_h \Omega_v \cos \Theta_v \sin \Theta_v (d_{SA}^2 m_A - d_{SP}^2 m_P). \quad (3.37)$$

### ***Drehimpulsänderung der Rotoren***

Unter dem Drehimpuls  $j$  eines rotierenden Körpers versteht man das Produkt aus seinem Trägheitsmoment  $I$  und seiner Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Eine Änderung des Drehimpulses kann bei konstantem Trägheitsmoment nur durch eine Winkelgeschwindigkeitsänderung erfolgen und hat ein Drehmoments  $M_D$  zur Folge. Aus

$$j = I \omega \quad (3.38)$$

läßt sich somit unmittelbar

$$M_D = \frac{dj}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \quad (3.39)$$

herleiten. Eine Drehimpulsänderung des Hauptrotors ergibt somit zwei wirksame Drehmomentkomponenten  $M_{Dvm}$  und  $M_{Dhm}$  (3.40) jeweils um die horizontale und vertikale Drehachse des Modells.

$$M_{Dv/hm} = -I_{mr} \omega_m \Omega_{v/h} \sin \Theta_v \quad (3.40)$$

### ***Vertikales Teilsystem (Hauptrotorteilsystem)***

Das vertikale Teilsystem des Hubschraubermodells kann durch vier Zustandsgrößen beschrieben werden. Neben der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_v$  ( $v$  = vertikal) und dem Positionswinkel  $\Theta_v$  des Schwenkarmes, sind dies die Rotordrehzahl des Hauptrotors  $\omega_m$  und der speisende Motorstrom  $i_m$ . In diesem Abschnitt werden die Zustandsdifferentialgleichungen des vertikalen Teilsystems hergeleitet bzw. die bereits in früheren Abschnitten aufgeführten Gleichungen in einen globalen Zusammenhang gestellt. Hierbei ist zu beachten, daß nur die physikalischen Effekte berücksichtigt werden, die ausschließlich im vertikalen Teilsystem

von Bedeutung sind. Die mathematischen Ausdrücke, welche die Verkopplung zum anderen Teilsystem beschreiben, bleiben zunächst unberücksichtigt.

Bei der Analyse der Rotation des Schwenkarmes in der vertikalen Ebene, also bei einer Drehbewegung um die horizontale Achse des Systems, kann die Rotation mit einer Pendelbewegung verglichen werden. Dabei ist das Auftriebsmoment durch den Hauptrotor zu berücksichtigen.

Die Drehbewegung gehorcht dem zweiten Newtonschen Axiom für Drehbewegungen gemäß

$$M_v = I_v \frac{d\Omega_v}{dt} = I_v \frac{d^2 \Theta_v}{dt^2}. \quad (3.41)$$

$M_v$  steht für das Gesamtdrehmoment als Produkt von Trägheitsmoment ( $I_v$ ) und Winkelbeschleunigung und ist jeweils die Summe der Einzelträgheitsmomente bzw. -drehmomente in Bezug auf die vertikale Rotationsebene.

Das Gesamtdrehmoment  $M_v$  setzt sich aus drei Teilkomponenten zusammen. Eine Komponente ist das Moment  $M_{Gv}$  gemäß (3.21), welches die Momente beschreibt, die aufgrund der Gravitationskräfte auf den Schwenkarm wirken. Weiterhin kommen das Drehmoment  $M_{Av}$  (3.24) für den aerodynamischen Auftrieb und  $M_{Rv}$  (3.28) für die zu berücksichtigende Lagerreibung hinzu. Faßt man diese Komponenten in der allgemeinen Gleichung (3.41) zusammen, ergibt sich

$$\begin{aligned} I_v \frac{d\Omega_v}{dt} &= M_{Gv} + M_{Av} + M_{Rv} \\ &= -g(m_A d_{SA} \cos \Theta_v + m_P d_{SP} \sin \Theta_v) + F_{Av}(\omega_m) l_m - k_v \Omega_v. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dabei ist  $\Omega_v$  die Winkelgeschwindigkeit des Schwenkarmes um die vertikale Achse:

$$\Omega_v = \dot{\Theta}_v. \quad (3.43)$$

Die Beschreibung des vertikalen Teilsystems wird durch die Gleichungen (3.44) bzw. (3.45) vervollständigt.

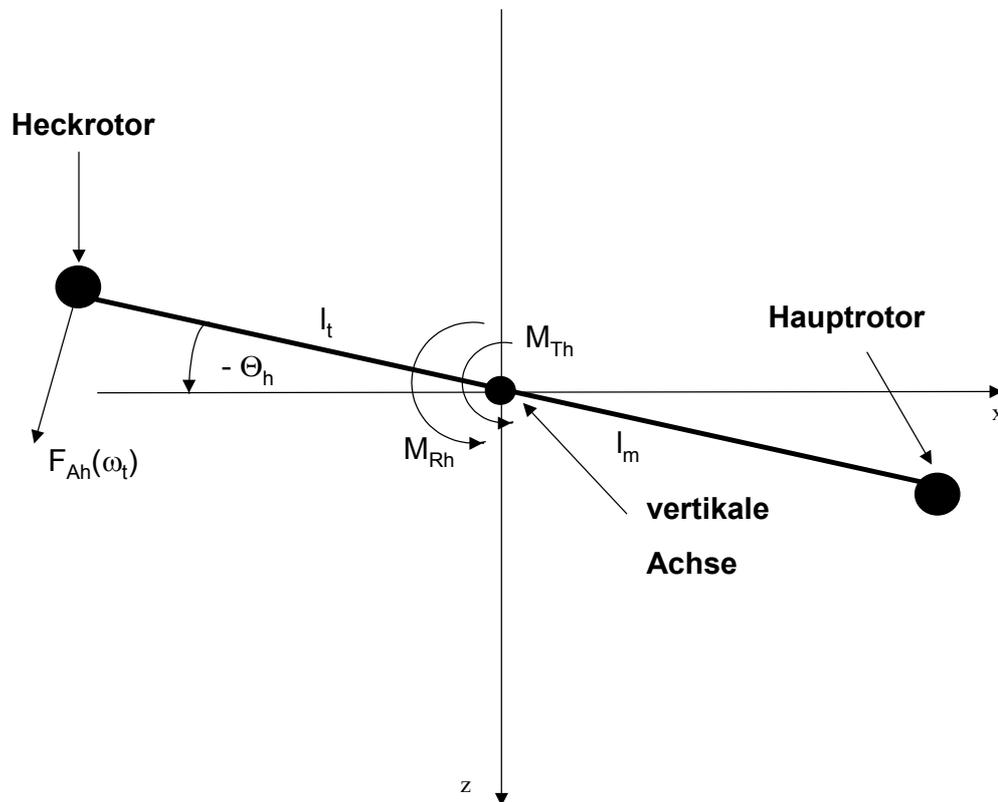
$$\begin{aligned}
 I_{mr} \frac{d\omega_m}{dt} &= M_{Rm} + M_{Lm} + M_{Mm} \\
 &= -k_{Rm} \omega_m + k_m i_m - k_{Lm} \text{sign}(\omega_m) \omega_m^2
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

$$\frac{di_m}{dt} = \frac{1}{L} (-Ri_m - k_m \omega_m + u_v)
 \tag{3.45}$$

Die Differentialgleichung (3.44) beschreibt die Bewegung des Propellers. Sie wurde bereits im Abschnitt Propeller hergeleitet. Formel (3.45) entspricht Gleichung (3.18) und gilt für das Verhalten des Ankerstroms im Motor.

### ***Horizontales Teilsystem (Heckrotorteilsystem)***

Analog zu den Bewegungen des Helikoptermodells in der vertikalen Ebene kann die Rotation in der horizontalen Ebene beschrieben werden. Zur Illustration ist das System in Bild 3.29 schematisch dargestellt. Die Dynamik des Heckrotorteilsystems wird auch hier durch die Verknüpfung der vier Zustandsgrößen  $\Theta$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  und  $i$  ausgedrückt. Wie im vorangegangenen Abschnitt sind sie durch vier Differentialgleichungen festgelegt. Die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und der Positionswinkel  $\Theta$  des Schwenkarmes sind durch den Index h für horizontales Teilsystem, die Rotordrehzahl  $\omega$  und der speisende Strom  $i$  des Gleichstrommotors mit dem Index t gekennzeichnet. Die Vorgehensweise zur Aufstellung der vier Differentialgleichung ist identisch zu der im vorangegangenen Abschnitt. Es wird an dieser Stelle deshalb auf eine erneute ausführliche Beschreibung verzichtet.



**Bild 3.29:** Schematische Darstellung der horizontalen Rotationsebene (Draufsicht)

Die existierenden Drehmomente lassen sich gemäß Newton für die Drehbewegung um die vertikale Achse herleiten.

$$M_h = I_h \frac{d\Omega_h}{dt} = I_h \frac{d^2\Theta_h}{dt^2} \quad (3.46)$$

Setzt man die entsprechenden Teildrehmomente in diese Gleichung ein, erhält man:

$$(3.47)$$

Das Formelzeichen  $I_h$  steht hier für die Summe der Trägheitsmomente der horizontalen Rotationsebene.

Die horizontale Winkelgeschwindigkeit ist

$$\Omega_h = \frac{d\Theta_h}{dt}. \quad (3.48)$$

Das Differentialgleichungssystem des Heckrotors wird vervollständigt durch die Propellergleichung (3.31) und die Maschengleichung (3.18) des Ankerstromkreises.

$$\begin{aligned} I_{tr} \frac{d\omega_t}{dt} &= M_{Rt} + M_{Lt} + M_{Mt} \\ &= -k_{Rt} \omega_t + k_m i_t - k_{Lt} \text{sign}(\omega_t) \omega_t^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\frac{di_t}{dt} = \frac{1}{L} (-Ri_t - k_m \omega_t + u_t) \quad (3.50)$$

### ***Verkoppeltes nichtlineares System***

Auf den vorangehenden Seiten werden die Teilsysteme völlig entkoppelt voneinander betrachtet. Bei der Modellbeschreibung des Gesamtsystems, sind die existierenden Verkoppelungen zwischen der Rotation um die horizontale und die vertikale Achse zu berücksichtigen. Die zuvor für die Teilsysteme hergeleiteten Differentialgleichungen behalten ihre Gültigkeit, sie müssen allerdings, durch zusätzliche Momente der Zentrifugal- und Coriolis-Kraft sowie dem Moment aus der Impulserhaltung erweitert werden. Somit ergibt sich für das Gesamtsystem folgender Satz von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} I_h \frac{d\Omega_h}{dt} &= M_{Ah} + M_{MGm} + M_{Dvm} + M_C + M_T + M_{Rh} \\ &= -\text{sign}(\omega_t) \omega_t^2 k_{At} \cos \Theta_v l_t + k_m i_m \cos \Theta_v - I_{mr} \omega_m \Omega_v \sin \Theta_v \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$+ 2\Omega_h \Omega_v \cos \Theta_v \sin \Theta_v (d_{SA}^2 m_A - d_{SP}^2 m_P) - k_T \Theta_h - k_h \Omega_h \quad (3.52)$$

$$(3.53)$$

$$\begin{aligned}
I_v \frac{d\Omega_v}{dt} &= M_{Av} + M_{MGt} + M_{Dvt} + M_{Zv} + M_{Gv} + M_{Rv} \\
&= \text{sign}(\omega_m) \omega_m^2 k_{Am} l_m - k_m i_t - I_{mr} \omega_m \Omega_h \sin \Theta_v \\
&\quad - \Omega_h^2 \cos \Theta_v \sin \Theta_v (d_{SA}^2 m_A - d_{SP}^2 m_P) \\
&\quad - g (d_{SA} m_A \cos \Theta_v + d_{SP} m_P \sin \Theta_v) - k_v \Omega_v
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\frac{d\Theta_v}{dt} = \Omega_v \tag{3.55}$$

$$I_{mr} \frac{d\omega_m}{dt} = M_{Rm} + M_{Lm} + M_{Mm} = -k_{Rm} \omega_m + k_m i_m - k_{Lm} \text{sign}(\omega_m) \omega_m^2 \tag{3.56}$$

$$\frac{di_t}{dt} = \frac{1}{L} (-R i_t - k_m \omega_t + u_h) \tag{3.57}$$

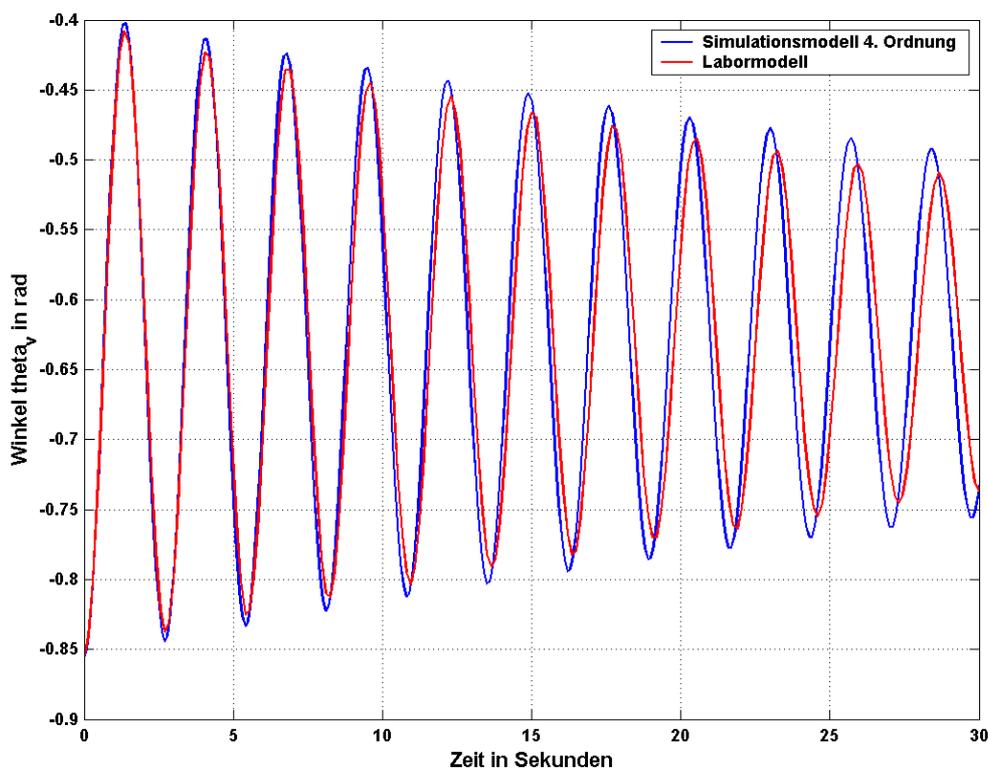
$$\frac{di_m}{dt} = \frac{1}{L} (-R i_m - k_m \omega_m + u_v) \tag{3.58}$$

Somit ergeben sich folgende Zustandgrößen für das System 8. Ordnung:  $x_1 = \Omega_h$  (Winkelgeschwindigkeit in der horizontalen Rotationsebene),  $x_2 = \Theta_h$  (Azimutwinkel),  $x_3 = \omega_t$  (Drehzahl des Heckrotors),  $x_4 = \Omega_v$  (Winkelgeschwindigkeit in der vertikalen Rotationsebene),  $x_5 = \Theta_v$  (Nickwinkel),  $x_6 = \omega_m$  (Drehzahl des Hauptrotors),  $x_7 = i_t$  (Ankerstrom im Gleichstrommotor des Heckrotors) und  $x_8 = i_m$  (Ankerstrom im Gleichstrommotor des Hauptrotors). Von diesen acht Zustandsgrößen sind die beiden Positionswinkel  $\Theta_h$  und  $\Theta_v$  sowie die Rotordrehzahlen  $\omega_t$  und  $\omega_m$  meßbar und stehen als Ausgangsgrößen  $y_1$  bis  $y_4$  zur Verfügung. Die Stellgrößen sind  $u_1 = u_h$  (Spannung des Gleichstrommotors am Heckrotor) und  $u_2 = u_v$  (Spannung des Gleichstrommotors am Hauptrotor).

### **Modellvalidierung**

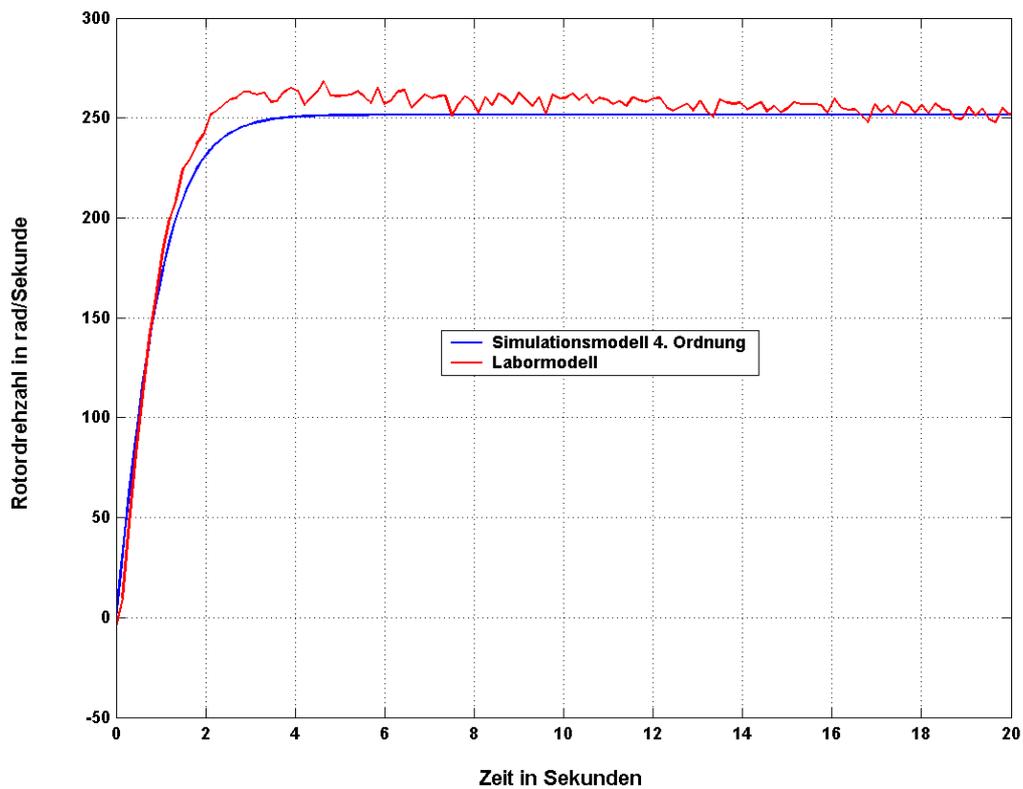
Um die Gültigkeit der aufgestellten Differentialgleichungen für das Labormodell (Anlage) nachzuweisen, werden charakteristische Eigenschaften des Systems in verschiedenen Versuchen überprüft. Dazu werden zunächst wiederum die Teilsysteme und am Ende dieses Abschnitts das Gesamtsystem betrachtet.

Wie in Abschnitt Vertikales Teilsystem (Hauptrotorteilsystem) bereits erwähnt kann das vertikale Teilsystem für sich betrachtet mit dem dynamischen Verhalten eines physikalischen Pendels verglichen werden. Dies läßt als Schlußfolgerung zu, daß es sinnvoll ist, zunächst einen Ausschwingversuch durchzuführen. Bei Auslenkung des Systems aus der Ruhelage, die bei  $\Theta_{v,0} = -0,63 = -36^\circ$  liegt, führt das System nach dem Loslassen eine freie, exponentiell gedämpfte Schwingung aus. Bild 3.30 zeigt die exzellente Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit denen des Versuchs.



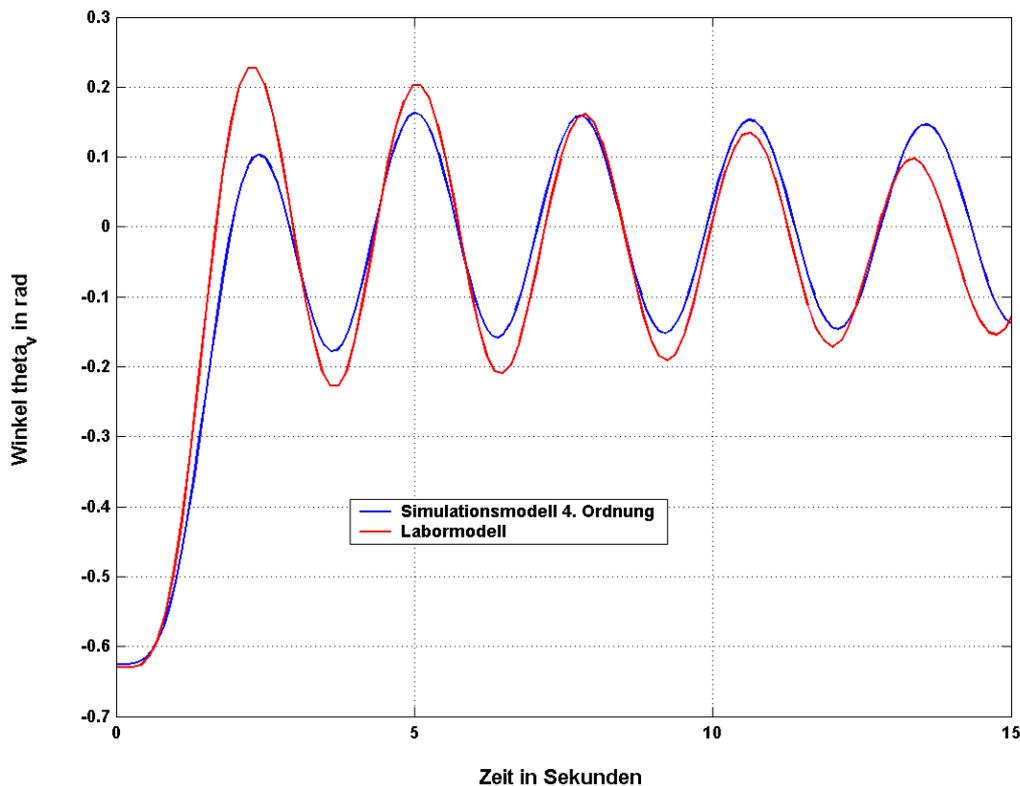
**Bild 3.30:** Ausschwingversuch des vertikalen Teilsystems

Nach der Simulation des Ausschwingverhaltens wird das Systemverhalten auf eine Anregung untersucht. Hierzu wird auf den Hauptrotor ein Spannungssprung von  $u_v = 20$  V gegeben und die Rotordrehzahl aufgenommen. Die vergleichende Messung in Bild 3.31 zeigt, daß das Verhalten des Rotors gut nachgebildet wird.



**Bild 3.31:** Vergleich der Hauptrotorsprungantworten des realen Systems und der Simulation für einen Steuersprung von  $u_v = 0 \text{ V}$  auf  $u_v = 20 \text{ V}$

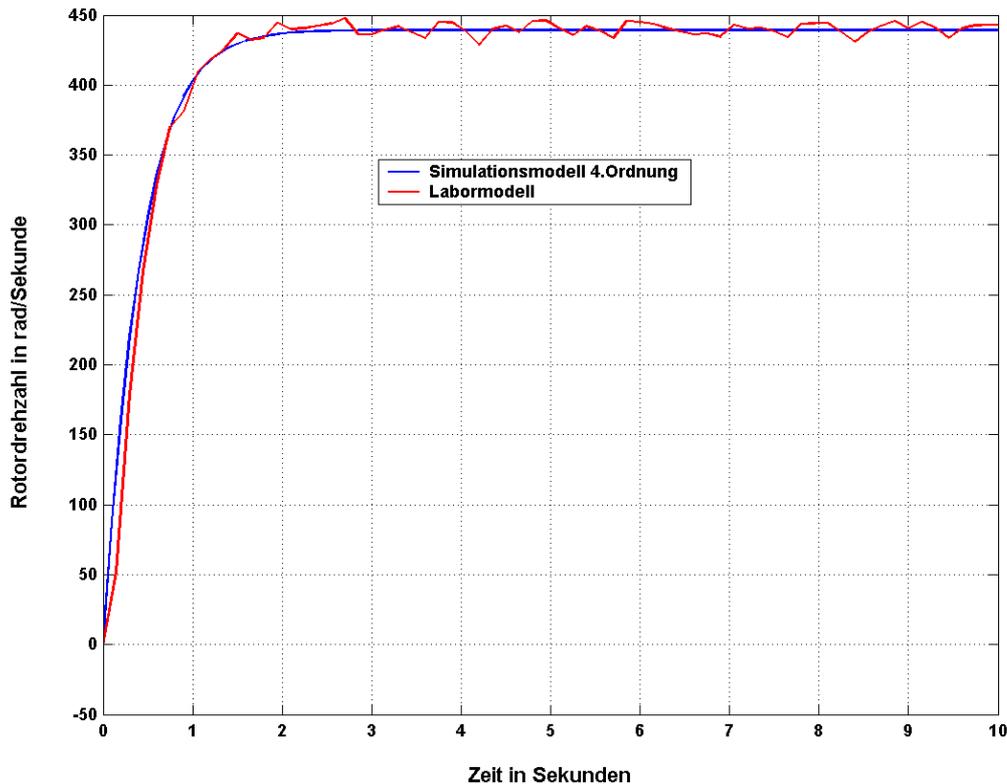
Die Auswirkungen auf den Nickwinkel  $\Theta_v$  für einen Hauptrotorsteuersprung sind in Bild 3.32 festgehalten.



**Bild 3.32:** Steuersprungantwort des vertikalen Systems von  $u_v = 0 \text{ V}$  auf  $u_v = 14,6 \text{ V}$

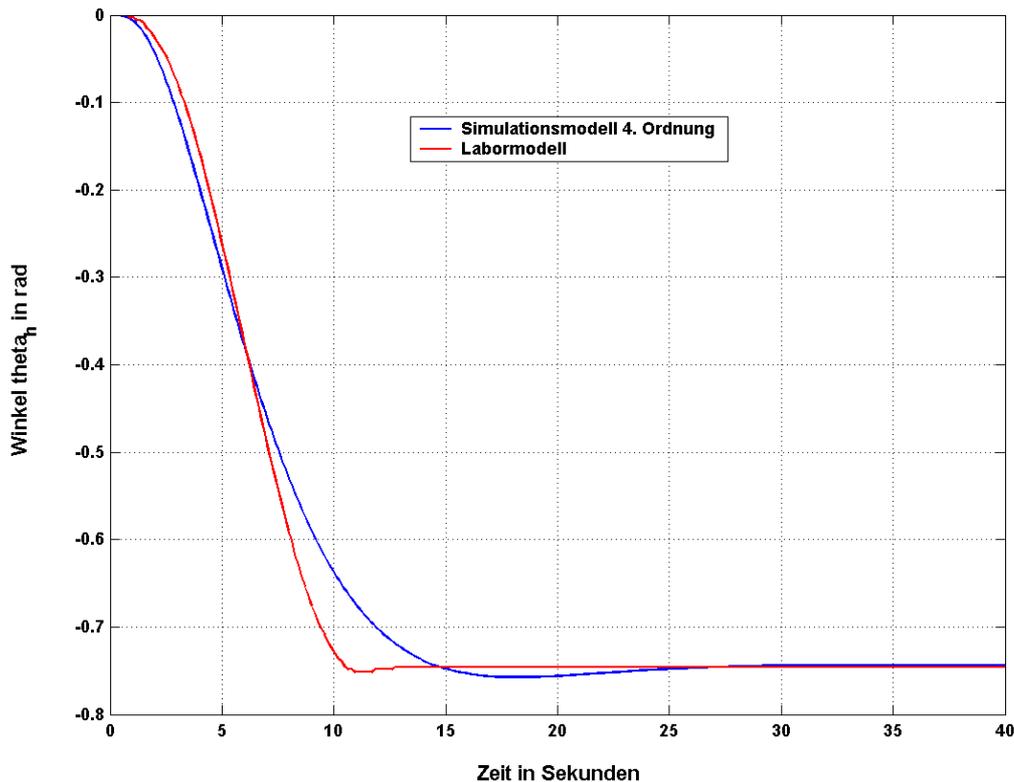
Die Sprungantworten in Bild 3.32 zeigen leichte Abweichungen vor allem für Zeiten  $t < 10$  Sekunden. Der wesentliche Unterschied ist beim Aufschwingen festzustellen und kann zum Teil auf die in Bild 3.31 ersichtliche Abweichung der Rotordrehzahl im gleichen zeitlichen Bereich zurückgeführt werden, da das reale P-T<sub>2</sub>-Propellerverhalten durch ein P-T<sub>1</sub>-Verhalten angenähert wurde. Zusammenfassend läßt sich jedoch sagen, daß das dynamische Verhalten des vertikalen Teilsystems in der Simulation zufriedenstellend dem des realen Modells entspricht. Zudem ist das entkoppelte vertikale Simulationsmodell stationär genau.

Zur Validierung des horizontalen Teilsystems werden bis auf den Ausschwingversuch die gleichen Untersuchungen durchgeführt. Der Ausschwingversuch entfällt, weil sich das Heckrotorteilsystem nicht wie ein Pendel verhält. Die Reaktion der Rotorgeschwindigkeit auf eine sprungförmige Anregung des Heckrotors ist in Bild 3.33 zu sehen. Der Vergleich der Sprungantworten zeigt eine gute Übereinstimmung.



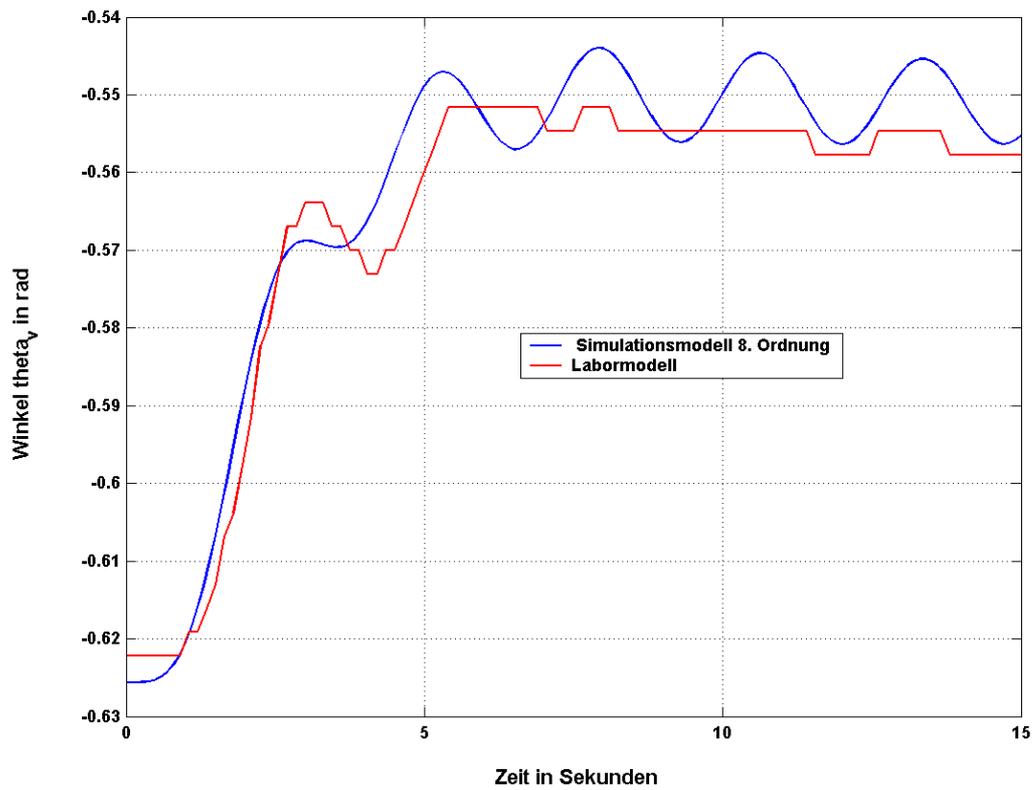
**Bild 3.33:** Vergleich der Heckrotorsprungantworten des realen Systems und der Simulation von  $u_h = 0 \text{ V}$  auf  $u_h = 13 \text{ V}$

Wie in den vorhergehenden Abschnitten bezüglich des Torsionseffekts der Zuleitungen bereits erwähnt, kann dieses Phänomen durch den gewählten Ansatz nicht im gesamten Auslenkungsbereich des Winkels  $\Theta_h$  exakt beschrieben werden. In einem Bereich, der für die Linearisierung des Systems an den gewählten Arbeitspunkten als sinnvoll erachtet werden kann, wird die in Bild 3.34 dargestellte Übereinstimmung des Azimutwinkels  $\Theta_h$  von Labor- und Simulationsmodell erreicht.

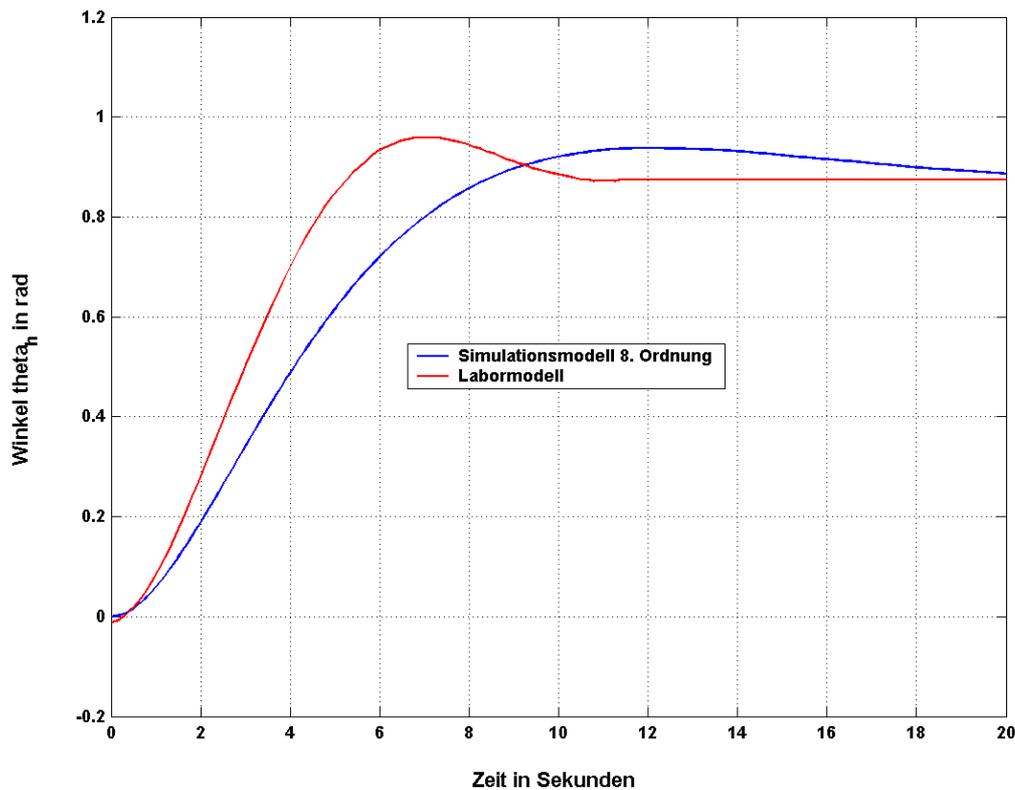


**Bild 3.34:** Sprungantwort des horizontalen Systems von  $u_h = 0$  V auf  $u_h = 2,25$  V

Nachdem die mathematische Beschreibung der beiden entkoppelten Teilsysteme realitätsnahe Ergebnisse liefert, folgt nun die Überprüfung des verkoppelten Gesamtsystems. In Bild 3.35 und Bild 3.36 sind die Reaktionen der beiden Zustandsgrößen  $\Theta_v$  und  $\Theta_h$  auf einen Sprung des Hauptrotors von 0 auf 3 V in Simulation und Realität dargestellt. Aus den Verläufen der beiden Zustandsgrößen sind wieder die bereits beschriebenen leichten Abweichungen der Simulation vom tatsächlichen Verlauf erkennbar. Als Erklärung für die Abweichungen sei hier nochmals auf die Problematik hinsichtlich Torsion, Berechnung der Trägheitsmomente über symmetrische Körper und die Vereinfachung der Auftriebs-Drehzahl-Kennlinie verwiesen. Die kleinen Auslenkungen des Winkels  $\Theta_v$  und die grobe Auflösung des Winkelsensors führen zu einem treppenförmigen Verlauf (Bild 3.35). Die Sprunghöhe wird so niedrig gehalten, damit die linearen Zusammenhänge Gültigkeit besitzen.



**Bild 3.35:** Verlauf der Drehung in der vertikalen Rotationsebene ( $\Theta_v$ ) des verkoppelten Systems für einen Sprung auf den Hauptrotor von  $u_v = 0$  V auf  $u_v = 3$  V



**Bild 3.36:** Verlauf der Drehung in der horizontalen Rotationsebene ( $\Theta_h$ ) des verkoppelten Systems für einen Sprung auf den Hauptrotor von  $u_v = 0$  V auf  $u_v = 3$  V

Damit ist die Validierung des nichtlinearen verkoppelten Gesamtsystems erfolgreich abgeschlossen, d.h. das mathematische Modell beschreibt das Rotorsystem hinreichend genau.

Für die Untersuchungen der in Kapitel 2 beschriebenen Konzepte ist die Überführung des nichtlinearen mathematischen Modells in ein linearisiertes Zustandsraummodell notwendig.

### *Linearisiertes Zustandsraummodell*

Ein nichtlineares, zeitinvariantes System n-ter Ordnung wird durch folgende zwei Vektorgleichungen vollständig beschrieben:

$$(3.59)$$

$$(3.60)$$

Demnach lassen sich auch die Gleichungen (3.51) bis (3.58) als Vektordifferentialgleichung in der Form (3.59) darstellen. Gleichung (3.60) gibt an, welche Zustandsgrößen als Ausgangsgrößen zur Verfügung stehen. Um die in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren auf das TRMS-Hubschraubermodell anwenden zu können, ist es notwendig, ausgehend von der nichtlinearen Darstellung ein linearisiertes Zustandsraummodell herzuleiten. Dazu wird das nichtlineare System unter der Voraussetzung, daß  $f(x, u)$  und  $g(x)$  stetig differenzierbar sind, um einen Arbeitspunkt  $(x_{AP}, u_{AP})$  linearisiert.

Durch partielle Ableitung der nichtlinearen Gleichungen (3.59) und (3.60) erhält man die lineare Zustandsraumdarstellung:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \quad (3.61)$$

$$\Delta y = C \Delta x, \quad (3.62)$$

mit

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{AP}, u_{AP}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_{AP}, u_{AP}} \quad (3.63)$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_{AP}, u_{AP}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{x_{AP}, u_{AP}} \quad (3.64)$$

und

$$C = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{AP}} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1} & \frac{\partial g_q}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\mathbf{x}_{AP}} \quad (3.65)$$

Die Ordnungen der Jacobi-Matrizen A, B und C sind für das System 8. Ordnung mit  $n = 8$ ,  $p = 2$  und  $q = 8$  festgelegt. Die sich aus der Linearisierung ergebenden Systemmatrizen für ausgewählte Arbeitspunkte sind im Anhang abgedruckt.

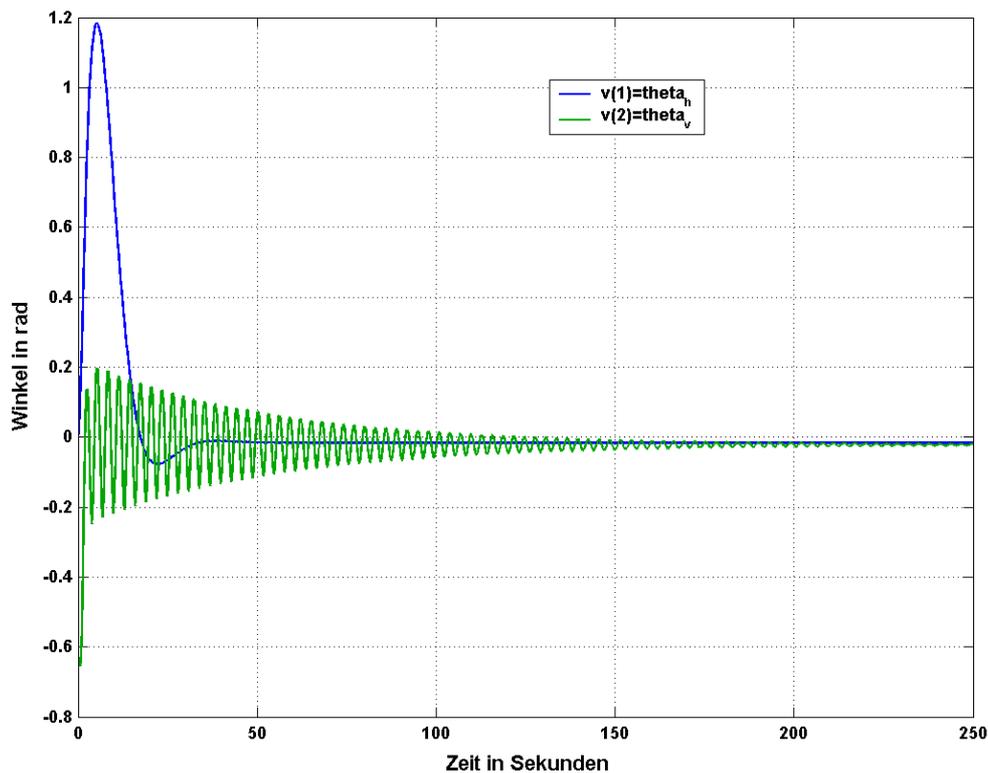
### ***Streckenuntersuchung***

Das vorliegende mathematische Modell 8. Ordnung kann durch Vernachlässigung der elektrischen Zeitkonstante der Motoren physikalisch auf 6. Ordnung reduziert werden. Diese häufig praktizierte Vorgehensweise ist möglich, weil die elektrische Motorzeitkonstante wesentlich kleiner als die mechanische Motorzeitkonstante ist.

Die folgende Systemanalyse beinhaltet drei Aspekte: den Vergleich zwischen nichtlinearem und linearem Modell, den Vergleich zwischen dem linearisierten Modell 8. Ordnung und dem physikalisch vereinfachten linearisierten Modell 6. Ordnung sowie die Untersuchung des linearisierten Modells 8. Ordnung an drei verschiedenen Arbeitspunkten.

## a) Vergleich zwischen nichtlinearem und linearem Modell

In Bild 3.37 ist das Einschwingverhalten des nichtlinearen Systems 8. Ordnung aus der Ruhelage ( $\Theta_v = -0,6256$ ,  $\Theta_h = 0$ ) auf einen markanten Arbeitspunkt zu sehen.

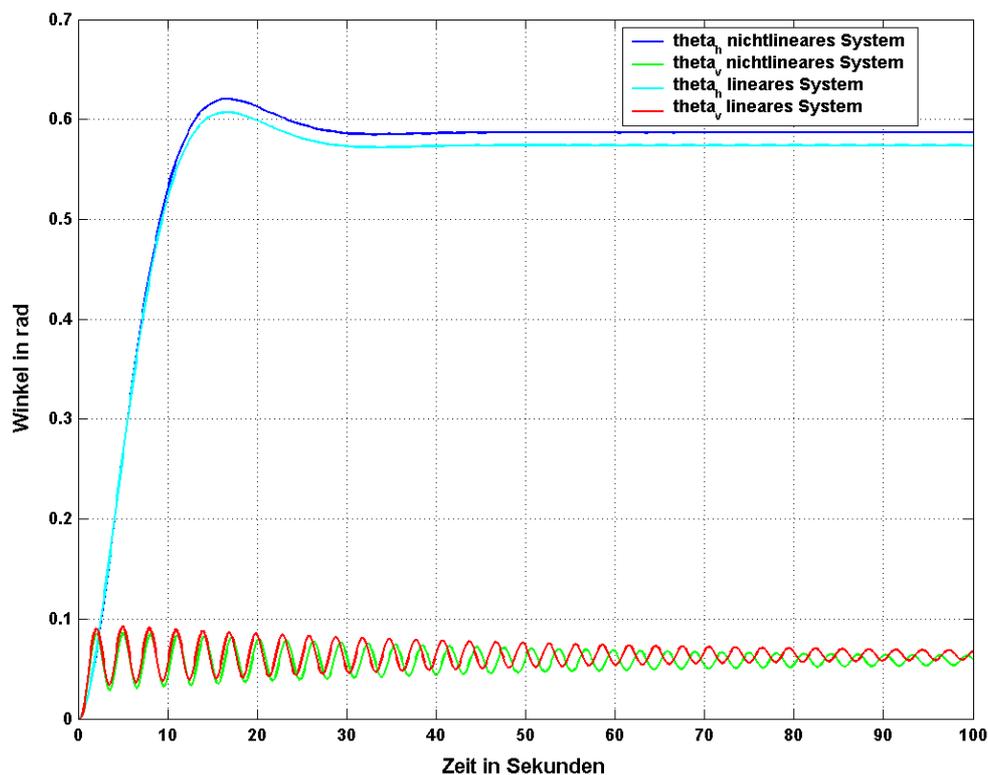


**Bild 3.37:** Einschwingen des nichtlinearen Modells aus der Ruhelage auf den Arbeitspunkt bei  $u_v = 14,6$  V und  $u_h = 7$  V

Als Arbeitspunkt wird die vertikale Nullage gewählt, das heißt, daß beide Positionswinkel den Wert Null annehmen. Dieser Arbeitspunkt wurde gewählt, weil sich hier zum einen der Torsionseffekt nicht stark auswirkt und zum anderen diese Lage am Labormodell optisch gut erkennbar ist. Die Endwerte der Positionswinkel liegen allerdings nicht exakt bei Null ( $\Theta_v = -0,0201$ ,  $\Theta_h = -0,0166$ ), da die Bestimmung der Motorspannungen zur Erlangung dieser Position durch Iteration erfolgte. Auf eine präzisere Ermittlung wurde aufgrund des hohen Aufwands verzichtet. Sie würde keine wesentliche Veränderung des Einschwing- und Systemverhaltens hervorrufen.

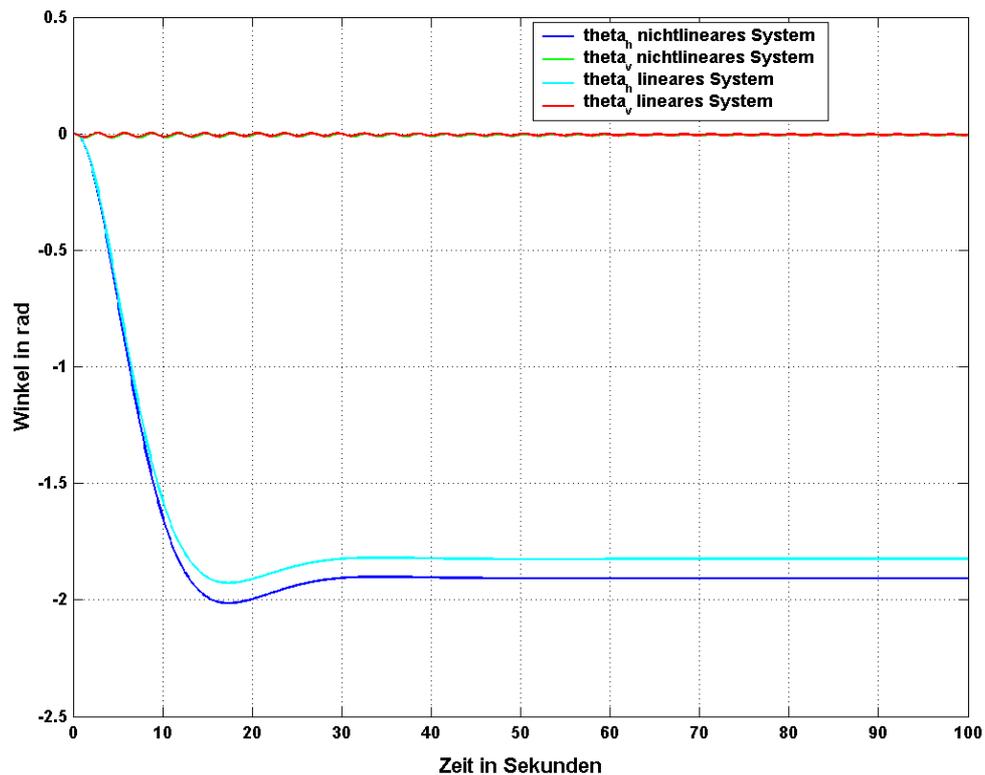
In den folgenden Bildern (Bild 3.38 bis Bild 3.42) sind Sprungantworten des Systems bei unterschiedlichen Sprunghöhen zu sehen. Die Sprünge erfolgen ausgehend vom oben

definierten Arbeitspunkt. Man sieht deutlich, daß die Linearisierung des Systems bei den Sprüngen in Bild 3.38 und Bild 3.39 das Verhalten des nichtlinearen Systems sehr gut nachbildet. Mit zunehmender Sprunghöhe wird die Abweichung von nichtlinearem und linearem System größer.



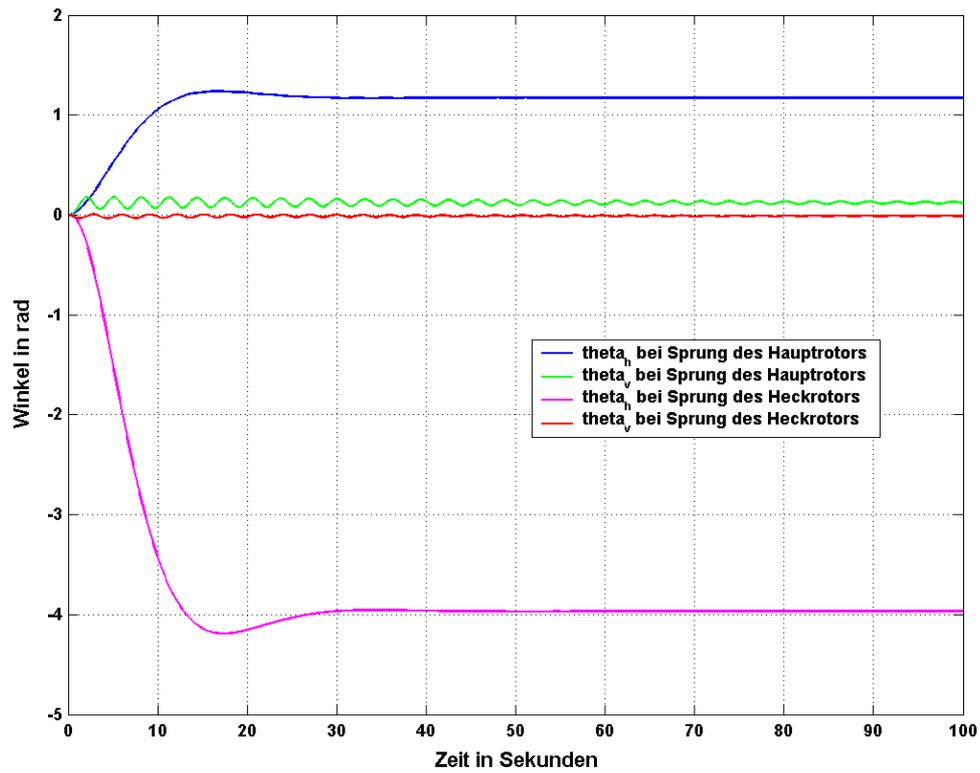
**Bild 3.38:** Vergleich zwischen nichtlinearem und linearisiertem Modell bei einem Sprung von  $u_v = 14,6 \text{ V}$  auf  $u_v = 15,6 \text{ V}$

Anhand Bild 3.38 und Bild 3.39 können die zu erwartenden Werte der Positionswinkel des linearen Modells bestimmt werden. Beide Winkel weichen stationär um weniger als fünf Prozent bezogen auf den Endwert voneinander ab.

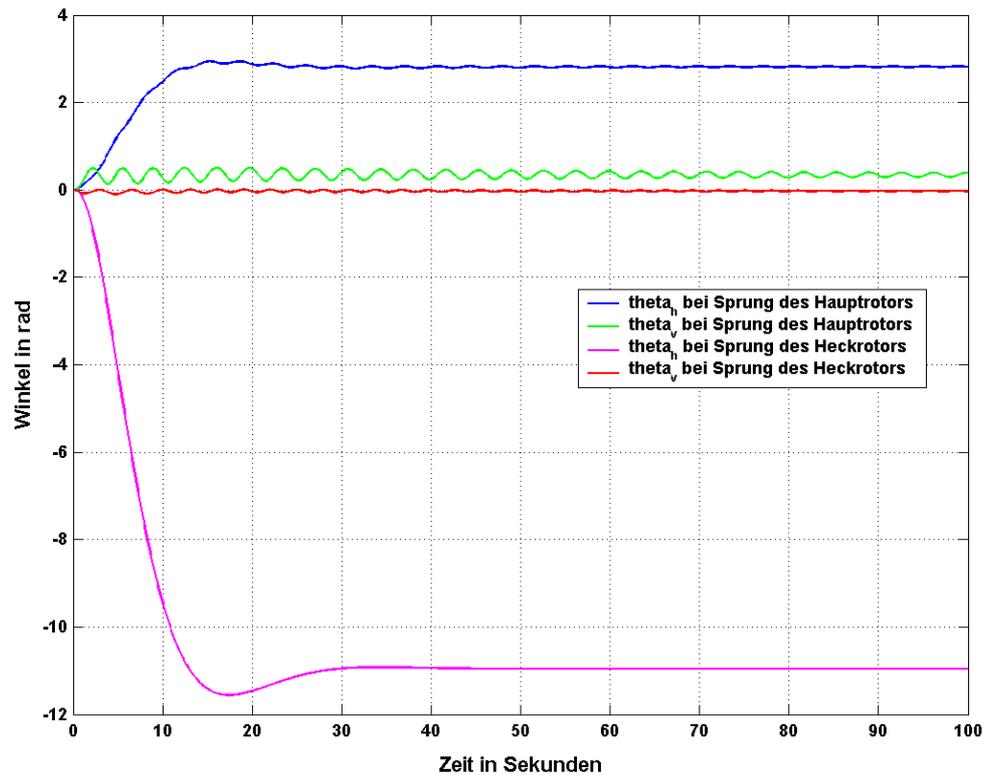


**Bild 3.39:** Vergleich zwischen nichtlinearem und linearisiertem Modell bei einem Sprung von  $u_h = 7 \text{ V}$  auf  $u_h = 8 \text{ V}$

Bei Verdopplung der Sprunghöhe in Bild 3.40 wird mehr als die doppelte Zunahme des Winkels  $\Theta_h$  erzielt. Beträgt die Abweichung dieses Winkels bei einer Sprunghöhe von zwei Volt nur ungefähr zehn Prozent, so wächst sie bei einer Sprunghöhe von fünf Volt auf ca. 19 Prozent an (vgl. Bild 3.41). Diese Tatsache ist auch beim Winkel  $\Theta_v$  zu beobachten, jedoch ist hier die Zunahme des Winkels im linearisierten System größer als im nichtlinearen.

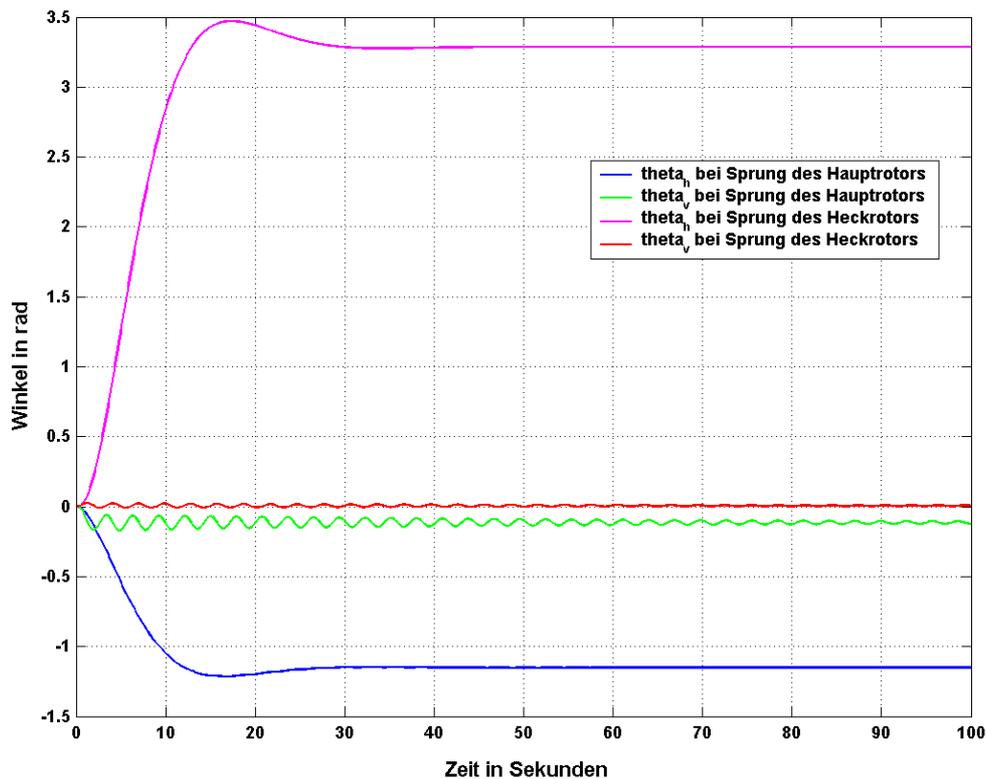


**Bild 3.40:** Sprungantworten des nichtlinearen Modells bei einem Sprung von jeweils 2 V auf einen der Rotoren



**Bild 3.41:** Sprungantworten des nichtlinearen Modells bei einem Sprung von jeweils 5 V auf einen der Rotoren

Vermindert man die Motorspannung beispielsweise um zwei Volt, so wirkt sich die Nichtlinearität des Systems auf die gleiche Weise aus. Dieses Verhalten ist in Bild 3.42 abgebildet.



**Bild 3.42:** Sprungantworten des nichtlinearen Modells bei einem Sprung von jeweils -2 V auf einen der Rotoren

Als Fazit dieser Untersuchungsreihe bleibt festzuhalten, daß die Linearisierung als hinreichend genau angesehen werden kann.

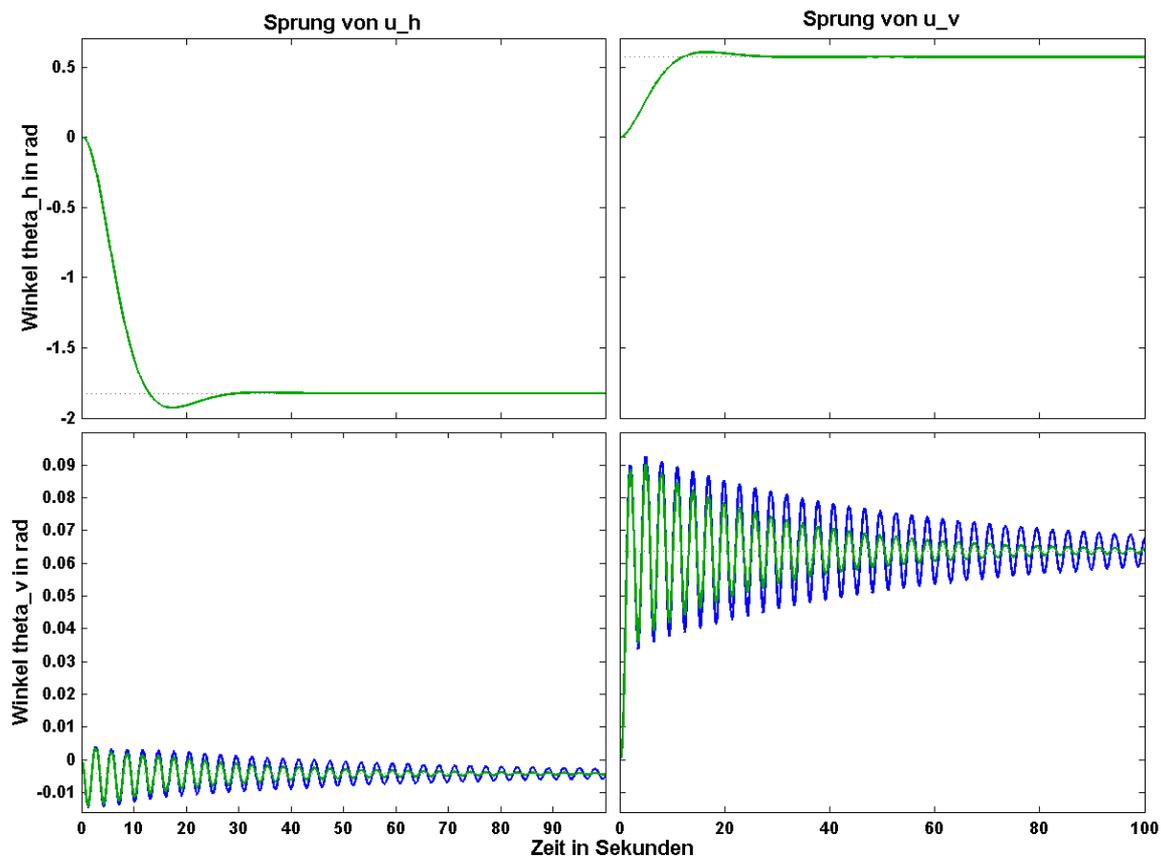
b) Vergleich zwischen dem linearisierten Modell 8. Ordnung und dem physikalisch vereinfachten linearisierten Modell 6. Ordnung

In diesem Abschnitt wird das linearisierte Modell 8. Ordnung mit dem durch Vernachlässigung der elektrischen Zeitkonstanten physikalisch reduzierten linearisierten Modell 6. Ordnung am Arbeitspunkt AP1 aus Abschnitt a) verglichen. Während die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  sowie  $\lambda_5$  und  $\lambda_6$  für beide Systeme übereinstimmen, weicht der Realteil von  $\lambda_{3,4}$  um den Faktor 2 ab (vgl. Tabelle 3.24). Der Doppelpol  $\lambda_{7,8}$  des Systems 8. Ordnung ist der negative Kehrwert der elektrischen Zeitkonstanten. Er hat keinen sichtbaren Einfluß auf die Systemdynamik, was die Vernachlässigung dieses physikalischen Effekts rechtfertigt.

Modell 6. Ordnung	Modell 8. Ordnung
$\lambda_1 = -1,6997*10^{-1}+j1,8592*10^{-1}$	$\lambda_1 = -1,6997*10^{-1}+j1,8592*10^{-1}$
$\lambda_2 = -1,6997*10^{-1}-j1,8592*10^{-1}$	$\lambda_2 = -1,6997*10^{-1}-j1,8592*10^{-1}$
$\lambda_3 = -3,7864*10^{-2}+j2,1096$	$\lambda_3 = -1,8924*10^{-2}+j2,1099$
$\lambda_4 = -3,7864*10^{-2}-j2,1096$	$\lambda_4 = -1,8924*10^{-2}-j2,1099$
$\lambda_5 = -2,2735$	$\lambda_5 = -2,2770$
$\lambda_6 = -1,1888$	$\lambda_6 = -1,1891$
	$\lambda_7 = -1,0179*10^3$
	$\lambda_8 = -1,0192*10^3$

**Tabelle 3.24:** Eigenwerte der linearisierten Modelle 6. und 8. Ordnung am AP1

Als Fazit bleibt somit festzuhalten, daß die Systeme stationär übereinstimmen, Bild 3.43. In der Dynamik tritt aufgrund der unterschiedlichen Realteile der Pole  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  eine sichtbare Differenz in der Amplitude und Dauer der Schwingung des Nickwinkels  $\Theta_v$  auf. Dieser Effekt ist auf den Dämpfungsgrad  $d$  des konjugiert komplexen Polpaares  $\lambda_{3,4}$  zurückzuführen. Dieser beträgt 0,009 für das Modell 8. Ordnung und 0,017 für das 6. Ordnung. Die Frequenz beider Systeme ist identisch, da die Imaginärteile von  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  gleich sind. Der Verlauf des Azimutwinkels  $\Theta_h$  ist bei beiden Systemen gleich.



**Bild 3.43:** Vergleich der Modelle 6. Ordnung (grün) und 8. Ordnung (blau)

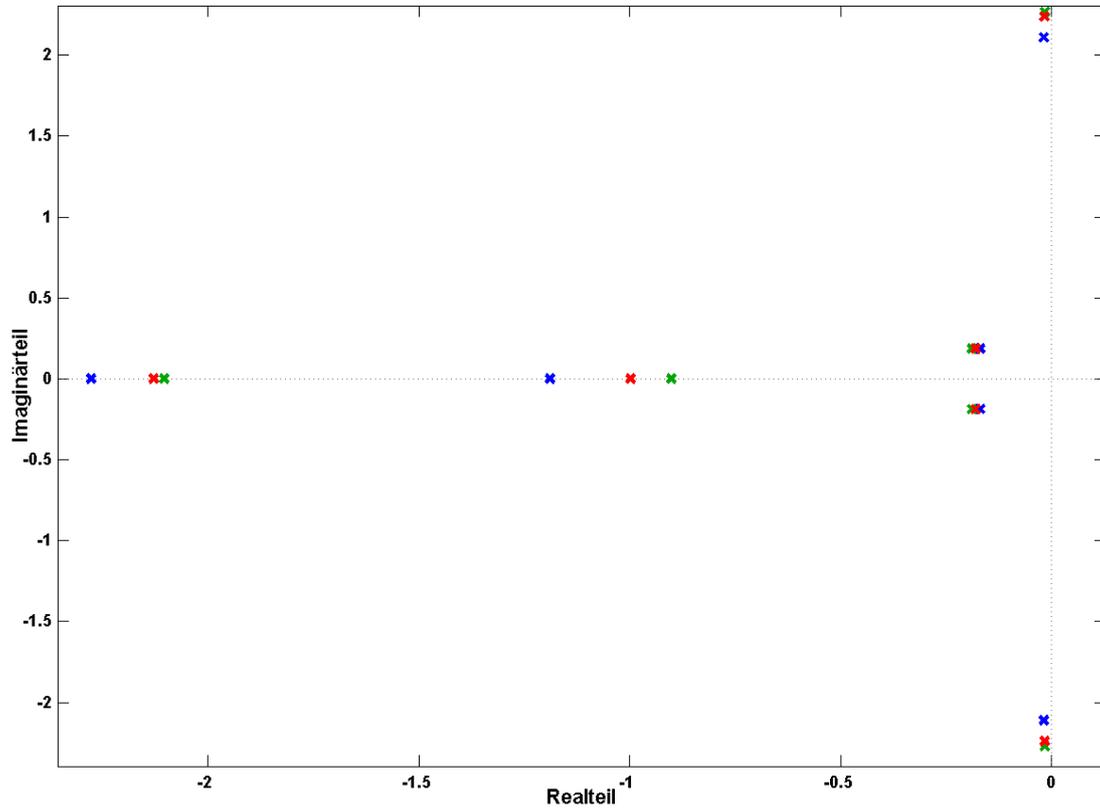
c) Untersuchung des linearisierten Modells an drei verschiedenen Arbeitspunkten

Im folgenden wird das Systemverhalten an drei ausgewählten Arbeitspunkten untersucht, um charakteristische Unterschiede zu ermitteln. Die Arbeitspunkte sind in Tabelle 3.25 aufgeführt. Die sich ergebenden Matrizen A, B und C befinden sich im Anhang. Außer dem Arbeitspunkt AP1 wurden zwei Arbeitspunkte AP2 und AP3 untersucht, die stärker im nicht-linearen Bereich liegen, d.h. in einem Bereich in dem sich die Torsion der Messkabel stärker auswirkt.

Arbeitspunkt AP1	Arbeitspunkt AP2	Arbeitspunkt AP3
$\Theta_h = -0,0166$ rad	$\Theta_h = -0,0065$ rad	$\Theta_h = 0,6093$ rad
$\Theta_v = -0,0201$ rad	$\Theta_v = -0,3548$ rad	$\Theta_v = -0,2594$ rad

**Tabelle 3.25:** Positionswinkel der Arbeitspunkte AP1, AP2 und AP3

In Bild 3.44 sind die Pole für diese drei Arbeitspunkte abgebildet. Ihre Zahlenwerte sind zusätzlich in Tabelle 3.26 aufgeführt. Zur besseren Visualisierung werden die vernachlässigbaren Pole der Gleichstrommotoren ausgeblendet.

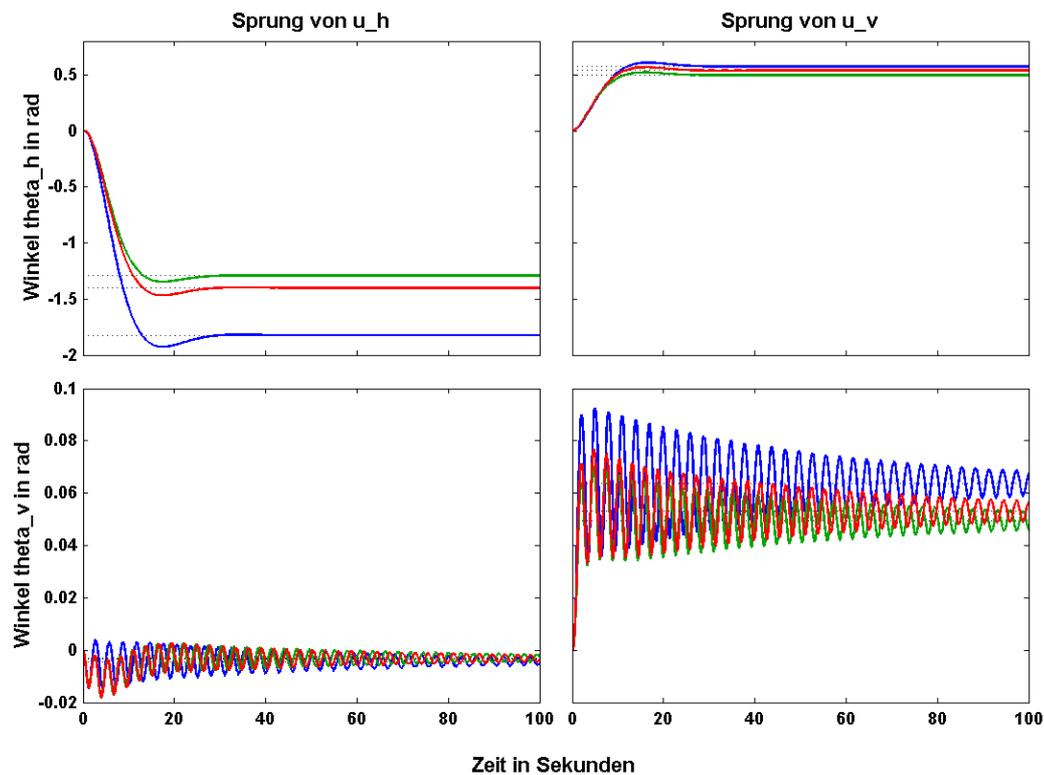


**Bild 3.44:** Polstellendiagramm zum Vergleich der Arbeitspunkte AP1 (blau), AP2 (grün) und AP3 (rot)

Arbeitspunkt AP1	Arbeitspunkt AP2	Arbeitspunkt AP3
$\lambda_1 = (-1,6997+j1,8592)*10^{-1}$	$\lambda_1 = (-1,8895+j1,8662)*10^{-1}$	$\lambda_1 = (-1,7993+j1,8678)*10^{-1}$
$\lambda_2 = (-1,699-j1,8592)*10^{-1}$	$\lambda_2 = (-1,8895-j1,8662)*10^{-1}$	$\lambda_2 = (-1,7993-j1,8678)*10^{-1}$
$\lambda_3 = -1,8924*10^{-2}+j2,1110$	$\lambda_3 = -1,6717*10^{-2}+j2,2710$	$\lambda_3 = -1,7678*10^{-2}+j2,2392$
$\lambda_4 = -1,8924*10^{-2}-j2,1110$	$\lambda_4 = -1,6717*10^{-2}-j2,2710$	$\lambda_4 = -1,7678*10^{-2}-j2,2392$
$\lambda_5 = -2,2770$	$\lambda_5 = -2,1026$	$\lambda_5 = -2,1281$
$\lambda_6 = -1,1891$	$\lambda_6 = -9,0143*10^{-1}$	$\lambda_6 = -9,9765*10^{-1}$
$\lambda_7 = -1,0179*10^3$	$\lambda_7 = -1,0179*10^3$	$\lambda_7 = -1,0179*10^3$
$\lambda_8 = -1,0192*10^3$	$\lambda_8 = -1,0192*10^3$	$\lambda_8 = -1,0192*10^3$

**Tabelle 3.26:** Eigenwerte des Systems an den Arbeitspunkten AP1, AP2 und AP3

Die Sprungantworten, Bild 3.45, entsprechen dynamisch den berechneten Eigenwerten. Die stationären Abweichungen bestätigen die Nichtlinearität des Originalsystems.



**Bild 3.45:** Vergleich der Sprungantworten an den Arbeitspunkten AP1 (blau), AP2 (grün) und AP3 (rot) bei einer Sprunghöhe von  $\Delta u_h = 1 \text{ V}$  bzw.  $\Delta u_v = 1 \text{ V}$

### 3.2.3 Simulationen unterschiedlicher Regelungen

In diesem Abschnitt werden die zuvor beschriebenen Verfahren und Wege zum Entwurf eines Beobachterreglers reduzierter Ordnung am linearen Modell des Twin-Rotor-MIMO-Systems angewendet und miteinander verglichen. Der Reglerentwurf erfolgt über die Optimierung eines quadratischen Gütekriteriums (vgl. Abschnitt 2.1.1) und beinhaltet als einzigen freien Entwurfsparameter den Faktor  $q$ , der das Verhältnis der Gewichtungsmatrizen  $Q$  zu  $R$  festlegt. Den so entworfenen Riccati-Zustandsregler, kombiniert mit dem über das automatisierte Beobachterentwurfsverfahren bestimmten Zustandsbeobachter, bezeichnet man als Beobachterregler. Gemeinsames Ziel der auf unterschiedliche Arten generierten Beobachterregler reduzierter Ordnung ist es, daß das Gesamtsystem schneller ist als die Strecke (Original-

system). Der Begriff Gesamtsystem steht im folgenden für den geschlossenen Regelkreis, bestehend aus Originalsystem 8. Ordnung im Vorwärtszweig und einem Beobachterregler  $r$ -ter Ordnung in der Rückführung. Bei den nachfolgenden Versuchsreihen steht vor allem die Dynamik im Vordergrund, weshalb die Untersuchungen hauptsächlich auf Eigenwertbetrachtungen beruhen.

Für die Präsentation und Auswertung der Ergebnisse werden die beiden indirekten Wege zunächst getrennt voneinander behandelt.

### ***Über Reglerreduktion zum Regler reduzierter Ordnung (Weg 1)***

Weg 1 vom System hoher Ordnung zum Beobachterregler reduzierter Ordnung führt über den Entwurf eines Beobachterreglers hoher Ordnung und anschließender Reglerreduktion zum Regler reduzierter Ordnung. Der Beobachterregler hoher Ordnung ist für die Untersuchungen hinsichtlich Reglerreduktion das Referenzsystem.

Für das Systemverhalten im Zeitbereich sind hauptsächlich die Eigenwerte mit kleinem Realteil ausschlaggebend. Um die Dynamik zu verbessern, müssen die dominanten Eigenwerte der Strecke durch den Riccati-Zustandsregler (Rückführmatrix  $K$ ) nach links verschoben werden. Über den Faktor  $q$ , der die Gewichtungsmatrizen  $Q$  und  $R$  beim Reglerentwurf in Beziehung setzt, kann dabei Einfluß auf die Lage der Eigenwerte der Regelung ( $A-BK$ ) genommen werden. Eine Erhöhung von  $q$  wirkt sich verschärfend auf die Bestrafung von Abweichungen hinsichtlich der Zustandsgrößen aus. Dies geht jedoch mit einem erhöhten Stellaufwand einher, weshalb der in unserem Fall einzige Entwurfparameter mit Bedacht zu wählen ist. Zur Festlegung auf einen geeigneten Wert, werden zunächst Simulationen mit verschiedenen Faktoren ( $q = 1, 10, 100$  und  $1000$ ) zur Bestimmung und Analyse der Eigenwerte der Regelung durchgeführt. Tabelle 3.27 zeigt die Eigenwerte der Strecke und die Eigenwerte der Regelung für die Faktoren  $q = 1$  und  $q = 10$ .

Eigenwerte der Strecke (A)		Eigenwerte der Regelung (A-BK)			
Realteil	Imaginärteil	q = 1		q = 10	
		Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,0189	-2,1099	-0,0395	-2,1105	-0,1105	-2,1164
-0,0189	2,1099	-0,0395	2,1105	-0,1105	2,1164
-0,1700	-0,1859	-0,2552	-0,2680	-0,4314	-0,4491
-0,1700	0,1859	-0,2552	0,2680	-0,4314	0,4491
-1,1891	0	-1,1903	0	-1,2005	0
-2,2770	0	-2,2775	0	-2,2822	0
-1017,8642	0	-1017,8642	0	-1017,8642	0
-1019,1839	0	-1019,1839	0	-1019,1839	0

**Tabelle 3.27:** Eigenwerte der Strecke (A) und der Regelung (A-BK)  
für  $q = 1$  und  $q = 10$

Betrachtet man den am nächsten an der Imaginärachse liegenden Eigenwerte der Strecke und mit dem der beiden Regelungen, so bleibt festzuhalten, daß die Regelung über  $q = 1$  den Realteil des Eigenwertes der Strecke annähernd verdoppelt. Bei der über  $q = 10$  entworfenen Regelung erfolgt sogar eine Versechsfachung. Diese Verschiebung fordert jedoch einen vergleichsweise großen Stellaufwand. Deshalb wird nur der Fall  $q = 1$  weiter verfolgt. Dies gilt aus Gründen der Vergleichbarkeit für Weg 1 und Weg 2. Die Ergebnisse für die Faktoren  $q = 100$  und  $q = 1000$  in den entsprechenden Tabellen dienen lediglich theoretischen Überlegungen.

Ein weiterer Entwurfparameter auf dem Weg zum Regler reduzierter Ordnung ist die Dominanzart, auf dem der Beobachterentwurf und die modale Ordnungsreduktion basieren. Den folgenden Untersuchungen am Rotorsystem wird die Übertragungsdominanz zugrunde gelegt, da sie hauptsächlich auf das Ein-/Ausgangsverhalten von Systemen abzielt und bereits die Untersuchungen am Triebwerk anhand der Realteildominanz durchgeführt wurden.

Unter Berücksichtigung dieser Vorgaben plazierte der automatisierte Beobachterentwurf die Eigenwerte des Beobachters (siehe Tabelle 3.28) links von den dominanten Eigenwerten der Regelung und liefert ein stabiles Gesamtsystem.

Realteil	Imaginärteil
-0,0434	-2,1105
-0,0434	2,1105
-0,2807	-0,2680
-0,2807	0,2680
-1,3093	0
-2,5052	0
-1119,6506	0
-1121,1023	0

**Tabelle 3.28:** Eigenwerte des Beobachters hoher Ordnung (A-LC)

Die beiden nach dem Separationstheorem unabhängig voneinander entworfenen Systeme Regelung und Beobachter werden jetzt zum Beobachterregler zusammengeführt. Tabelle 3.29 zeigt die Eigenwerte des daraus resultierenden Beobachterreglers hoher Ordnung (A-BK-LC).

Realteil	Imaginärteil
-0,0874	-2,1284
-0,0874	2,1284
-0,3306	-0,2482
-0,3306	0,2482
-1,3383	0
-2,5016	0
-1119,6506	0
-1121,1023	0

**Tabelle 3.29:** Eigenwerte des Beobachterreglers hoher Ordnung (A-BK-LC)

Der vorliegende Beobachterregler 8. Ordnung wird auf Weg 1 über verschiedene Ordnungsreduktionsverfahren reduziert. Für die Festlegung des Reduktionsgrades sind bei der balancierten Ordnungsreduktion die Singulärwerte und bei der modalen Ordnungsreduktion die Kennzahlen bezüglich Übertragungsdominanz ausschlaggebend. Anhand dieser Werte kann festgelegt werden, auf welche Ordnung sinnvoll reduziert werden kann. Tabelle 3.30 zeigt die Singulärwerte des Beobachterreglers sowie die angesprochenen Dominanzkennzahlen.

Singulärwerte	Dominanzkennzahlen
7,607840786	22,45987712
7,382607946	22,45987712
3,161560624	1,166492626
1,296080696	1,166492626
0,019521947	0,362516284
0,012233439	0,021277089
$9,20934 \cdot 10^{-5}$	$1,47418 \cdot 10^{-6}$
$6,83008 \cdot 10^{-5}$	$1,58088 \cdot 10^{-8}$

**Tabelle 3.30:** Kennzahlen zur Festlegung des Reduktionsgrades

Reduktionsart	Ordnung	Faktor q =			
		1	10	100	1000
balancierte Ordnungsreduktion durch Abschneiden	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	s	s	s	s
	4	s	s	s	s
	3	i	s	s	s
	2	i	i	s	s
	1	i	i	i	i
balancierte Ordnungsreduktion nach Guth	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	s	s	s	s
	4	s	s	s	s
	3	i	i	s	s
	2	i	i	s	i
	1	s	i	s	i
modale Ordnungsreduktion durch Abschneiden	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	s	s	kk	i
	4	s	s	i	i
	3	kk	kk	kk	kk
	2	s	s	i	i
	1	kk	kk	kk	kk
modale Ordnungsreduktion nach Guth	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	s	s	kk	s
	4	s	s	s	s
	3	kk	kk	kk	kk
	2	i	i	s	i
	1	kk	kk	kk	kk

Legende: s = stabil i = instabil kk = konj.-komplexe Eigenwerte

**Tabelle 3.31:** Mögliche Reduktionsgrade bei verschiedenen Reduktionsverfahren

### ***Balancierte Ordnungsreduktion***

Bei der Analyse der Kennzahlen aus Tabelle 3.30 wird nach größeren Lücken zwischen den einzelnen Singulärwerten gesucht. Betragsmäßig große Kennzahlen stehen für wichtige Systemteile und sind ins reduzierte System zu überführen. Aus Tabelle 3.30 geht für die balancierte Ordnungsreduktion hervor, daß eine Reduktion auf 2., 4. oder 6. Ordnung sinnvoll ist. Tabelle 3.31 zeigt aber auch, daß eine Reduktion auf zweite Ordnung trotz Lücke bei den Singulärwerten nicht sinnvoll ist, da der reduzierte Beobachterregler zu einem instabilen Gesamtsystem führen würde.

Anhand der Tabelle 3.31 kann geprüft werden, welche Kombinationen überhaupt zu einem stabilen Gesamtsystem führen. Eine Aussage darüber, wie gut das Ergebnis beim Einsatz eines das Gesamtsystem stabilisierenden Beobachterreglers reduzierter Ordnung ist, kann dieser Tabelle nicht entnommen werden. Eine prozentuale Auswertung bzgl. der ein stabiles Gesamtsystem liefernden Kombinationen zeigt Tabelle 3.32.

Reduktionsart	Faktor $q =$			
	1	10	100	1000
balancierte Ordnungsreduktion durch Abschneiden	57,1%	71,4%	85,7%	85,7%
balancierte Ordnungsreduktion nach Guth	71,4%	57,1%	100%	71,4%
modale Ordnungsreduktion durch Abschneiden	71,4%	71,4%	28,6%	28,6%
modale Ordnungsreduktion nach Guth	57,1%	57,1%	57,1%	57,1%

**Tabelle 3.32:** Anzahl der stabilen Lösungen in Prozent des geschlossenen Kreises bei Übertragungsdominanz

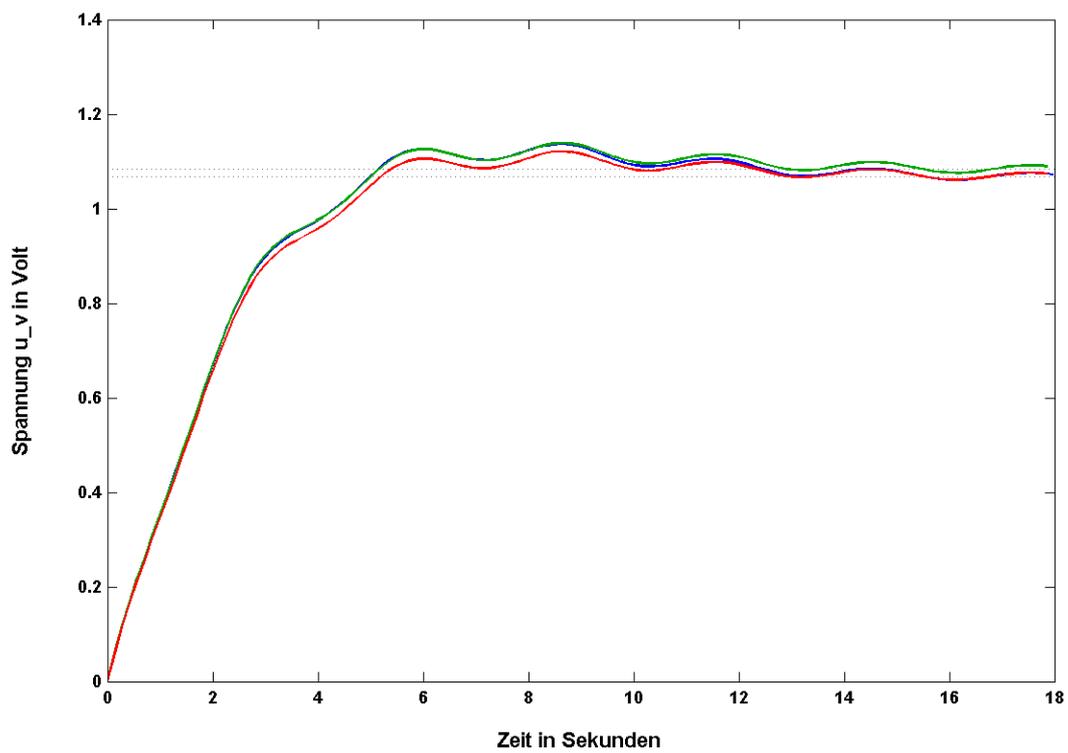
Eine Reduktion auf vierte Ordnung ist einer Reduktion auf sechste Ordnung vorzuziehen, da natürlich immer versucht werden muß, die Ordnung soweit als möglich zu reduzieren. Auch hinsichtlich der angestrebten Vergleiche der balancierten mit der modalen Ordnungsreduktion

läßt die Reduktion auf vierte Ordnung sinnvoll erscheinen. Dies stützt sich auf die in der Tabelle 3.30 gezeigten Dominanzkennzahlen, anhand derer der Reduktionsgrad bei der modalen Ordnungsreduktion festgelegt wird.

EIGENWERTE BEOBACHTERREGLER					
8. Ordnung (Referenz)		4. Ordnung über balancierte Ordnungsreduktion			
		durch Abschneiden		nach Guth	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,0874	-2,1284	-0,0877	-2,1286	-0,0877	-2,1286
-0,0874	2,1284	-0,0877	2,1286	-0,0877	2,1286
-0,3306	-0,2482	-0,3572	-0,2385	-0,3572	-0,2385
-0,3306	0,2482	-0,3572	0,2385	-0,3572	0,2385
-1,3383	0				
-2,5016	0				
-1119,6506	0				
-1121,1023	0				

**Tabelle 3.33:** Eigenwerte des Beobachterreglers hoher Ordnung (Referenz) und der auf 4. Ordnung reduzierten Beobachterregler über balancierte Ordnungsreduktion durch Abschneiden oder nach Guth

Tabelle 3.33 zeigt einen Vergleich der Eigenwerte des Beobachterreglers hoher Ordnung (Referenzsystem) mit den balanciert reduzierten Beobachterreglern 4. Ordnung. Die Reduktion der Beobachterregler erfolgte einmal durch einfaches Abschneiden des nichtdominanten Systemanteils und zum anderen über das Verfahren von Guth, welches ein stationär genaues reduziertes System liefert. Die Eigenwerte der über die beiden Verfahren reduzierten Beobachterregler sind identisch. Dies leuchtet ein, weil das Verfahren von Guth im Vergleich zur Reduktion durch einfaches Abschneiden lediglich die Ein- und Ausgangsmatrix verändert. Die Verschiebung der Eigenwerte der balanciert reduzierten Beobachterregler im Vergleich zum Referenzsystem liegt darin begründet, daß bei der balancierten Ordnungsreduktion die dominanten Eigenwerte nicht direkt reduzierte System übernommen werden.



**Bild 3.46:** Sprungantworten der Beobachterregler (Referenz (blau), durch Abschneiden (grün), über Guth (rot)) bei einem Sprung auf den Winkel  $\Theta_v$

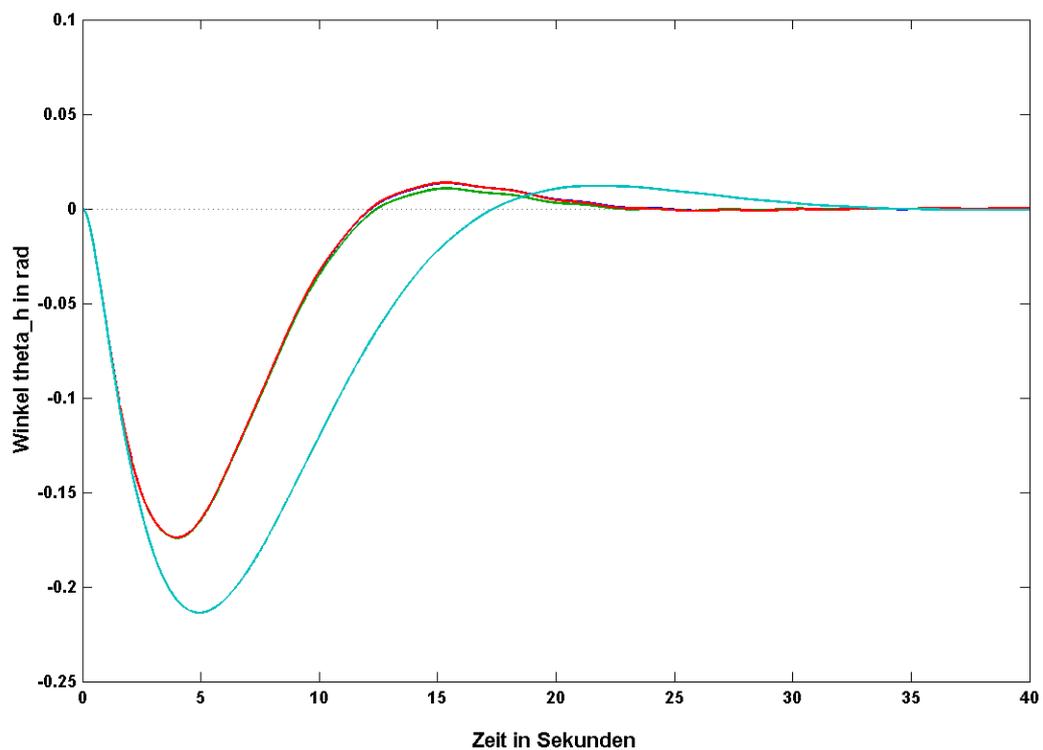
Bild 3.46 zeigt, daß bei einer Reduktion von 8. auf 4. Ordnung kaum Unterschiede zu erkennen sind. Lediglich der über Abschneiden auf 4. Ordnung reduzierte Beobachterregler (grün) weicht stationär um etwa zwei Prozent vom Referenzsystem ab.

EIGENWERTE GESAMTSYSTEM MIT BEOBACHTERREGLER					
8. Ordnung (Referenzsystem)		4. Ordnung über balancierte Ordnungsreduktion			
Realteil	Imaginärteil	durch Abschneiden		nach Guth	
		Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,0395	-2,1105	-0,0356	-2,1157	-0,0356	-2,1079
-0,0395	2,1105	-0,0356	2,1157	-0,0356	2,1079
-0,0434	-2,1105	-0,0474	-2,1053	-0,0478	-2,1127
-0,0434	2,1105	-0,0474	2,1053	-0,0478	2,1127
-0,2552	-0,2680	-0,2400	-0,3082	-0,2325	-0,2830
-0,2552	0,2680	-0,2400	0,3082	-0,2325	0,2830
-0,2807	-0,2680	-0,3295	-0,1873	-0,3352	-0,2359
-0,2807	0,2680	-0,3295	0,1873	-0,3352	0,2359
-1,1903	0	-1,1487	0	-1,1514	0
-1,3093	0	-2,2799	0	-2,2802	0
-2,2775	0	-1017,8642	0	-1017,8642	0
-2,5052	0	-1019,1839	0	-1019,1839	0
-1017,8642	0				
-1019,1839	0				
-1119,6506	0				
-1121,1023	0				

**Tabelle 3.34:** Eigenwerte des Gesamtsystems, bestehend aus dem Originalsystem im Vorwärtszweig und dem jeweiligen Beobachterregler in der Rückführung

Die Tabelle 3.34 zeigt, inwiefern die unterschiedlichen Beobachterregler die Lage der Eigenwerte des Gesamtsystems beeinflussen. Man sieht, daß die Eigenwerte des Gesamtsystems mit Beobachterregler hoher Ordnung sich von den Eigenwerten der Gesamtsysteme mit den über die verschiedenen Verfahren balanciert reduzierten Beobachterreglern 4. Ordnung unterscheiden. Dies liegt darin begründet, daß wie schon erwähnt bei der balancierten Ordnungsreduktion eine Verschiebung der Eigenwerte stattfindet.

Das Bild 3.47 zeigt die Impulsantworten des Winkels  $\Theta_h$  der beschriebenen Gesamtsysteme und der Regelstrecke bei einer Anregung durch die Spannung  $u_h$ . Es wird deutlich, daß auf eine impulsförmige Anregung, alle Beobachterregler das Gesamtsystem zu einem schnellerem Abklingen im Vergleich zur Strecke bewegen.



**Bild 3.47:** Impulsantworten der Gesamtsysteme (Referenz (blau), nach Abschneiden (grün), nach Guth (rot)) mit der Strecke (hellblau) anhand des Winkels  $\Theta_h$  bei einer Anregung durch die Spannung  $u_h$

Die dominante Zeitkonstante der in Bild 3.47 dargestellten Gesamtsysteme mit Beobachterregler ist ca. ein Drittel kleiner als die dominante Zeitkonstante der Strecke. Anfangsamplitude und Einschwingzeit sind gegenüber der Regelstrecke auf ca. 75 Prozent reduziert.

### ***Modale Ordnungsreduktion***

Bei der modalen Ordnungsreduktion wird ein sinnvoller Reduktionsgrad ebenfalls über Kennwerte aus Tabelle 3.30 bestimmt. Dazu wird bei den Dominanzkennzahlen wie bei den Singulärwerten nach größeren Lücken zwischen den einzelnen Werten gesucht. Aus den Kennzahlen für die Übertragungsdominanz ergibt sich, daß auch für die modale Reglerreduktion eine Reduktion auf 2., 4. und 6. Ordnung sinnvoll ist. Die Reduktion auf 2. Ordnung scheidet für die folgenden Vergleiche aus, da der nach Guth modal auf 2. Ordnung reduzierte Beobachterregler das Gesamtsystem instabil werden läßt (vgl. hierzu Tabelle 3.31). Eine Reduktion auf 4. Ordnung führt sowohl durch einfaches Abschneiden, als auch über das Verfahren nach Guth zu einem das Gesamtsystem stabilisierenden Beobachterregler.

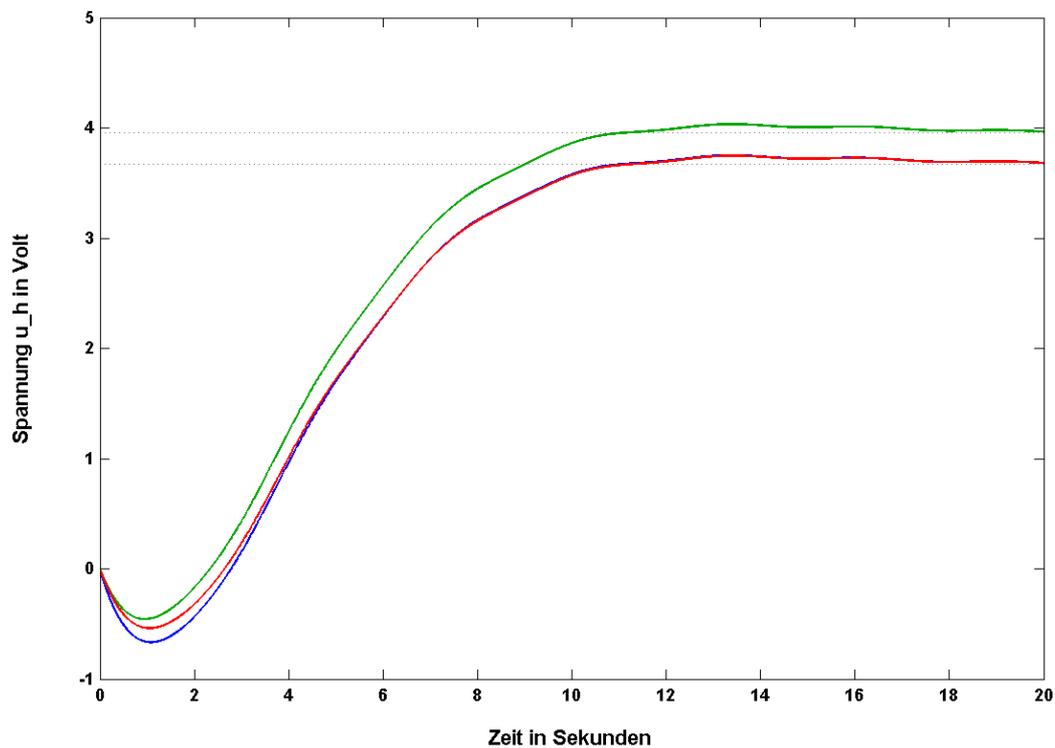
Ein wesentlicher Unterschied zwischen der modalen und der balancierten Ordnungsreduktion ist, daß bei der modalen Ordnungsreduktion die dominanten Eigenwerte direkt ins reduzierte System übernommen werden. Es kommt daher bei der Reduktion zu keiner Eigenwertverschiebung, vgl. Tabelle 3.35.

EIGENWERTE BEOBACHTERREGLER					
8. Ordnung (Referenz)		4.Ordnung über modale Ordnungsreduktion			
		durch Abschneiden		nach Guth	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,0874	-2,1284	-0,0874	-2,1284	-0,0874	-2,1284
-0,0874	2,1284	-0,0874	2,1284	-0,0874	2,1284
-0,3306	-0,2482	-0,3306	-0,2482	-0,3306	-0,2482
-0,3306	0,2482	-0,3306	0,2482	-0,3306	0,2482
-1,3383	0				
-2,5016	0				
-1119,6506	0				
-1121,1023	0				

**Tabelle 3.35:** Eigenwerte des Beobachterreglers hoher Ordnung (Referenz) und der auf 4. Ordnung reduzierten Beobachterregler über modale Ordnungsreduktion durch Abschneiden oder nach Guth

Die Eigenwerte der beiden modal reduzierten Beobachterregler sind wieder identisch, da wie bei der balancierten Ordnungsreduktion der stationäre Ausgleich nach Guth nur durch eine Änderung der Ein- und Ausgangsmatrix erreicht wird. Die für die Eigenwerte maßgebliche Systemmatrix ist bei beiden Verfahren gleich.

Bild 3.48 zeigt, daß die nach Guth erzwungene stationäre Genauigkeit des Beobachterreglers zu Lasten der dynamischen Nachbildung im Anfangsverhalten geht. Der über einfaches Abschneiden modal reduzierte Beobachterregler ist wie erwartet stationär ungenau.



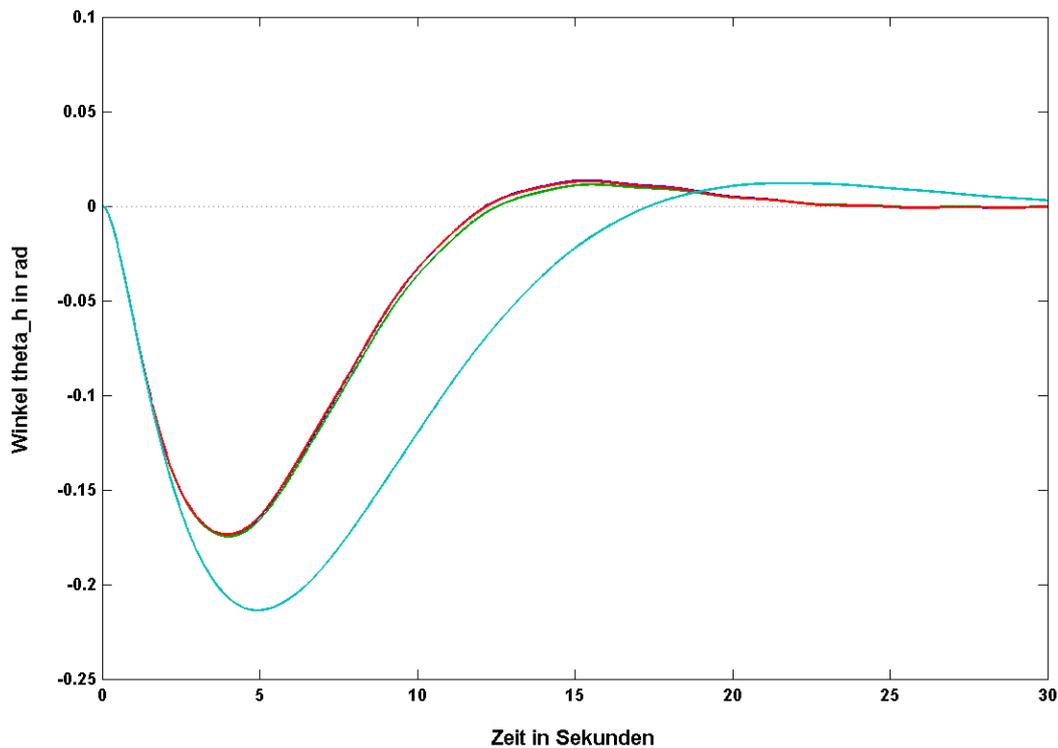
**Bild 3.48:** Sprungantworten der Beobachterregler (Referenz (blau), durch Abschneiden (grün), über Guth (rot)) bei einem Sprung auf den Winkel  $\Theta_v$

Die Auswirkungen der über die unterschiedlichen Verfahren modal reduzierten Beobachterregler für das Gesamtsystemverhalten kann anhand der Tabelle 3.36 diskutiert werden. Sie zeigt die Eigenwerte der zugehörigen Gesamtsysteme. Es fällt auf, daß die Eigenwerte des Gesamtsystems mit dem durch einfaches Abschneiden modal reduzierten Beobachterreglers etwas näher an den Eigenwerten des Referenzsystems liegen als die des Gesamtsystems mit dem über Guth reduzierten Beobachterregler in der Rückführung. Welche Auswirkungen diese Abweichungen auf das Übertragungsverhalten haben, zeigen die Impulsantworten in Bild 3.49.

EIGENWERTE GESAMTSYSTEM MIT BEOBACHTERREGLER					
8. Ordnung (Referenzsystem)		4. Ordnung über modale Ordnungsreduktion			
		durch Abschneiden		nach Guth	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,0395	-2,1105	-0,0391	-2,1204	-0,0378	-2,1197
-0,0395	2,1105	-0,0391	2,1204	-0,0378	2,1197
-0,0434	-2,1105	-0,0452	-2,0996	-0,0462	-2,0999
-0,0434	2,1105	-0,0452	2,0996	-0,0462	2,0999
-0,2552	-0,2680	-0,2610	-0,2935	-0,2571	-0,2780
-0,2552	0,2680	-0,2610	0,2935	-0,2571	0,2780
-0,2807	-0,2680	-0,2780	-0,2303	-0,2815	-0,2568
-0,2807	0,2680	-0,2780	0,2303	-0,2815	0,2568
-1,1903	0	-1,1553	0	-1,1559	0
-1,3093	0	-2,2780	0	-2,2788	0
-2,2775	0	-1017,8642	0	-1017,8642	0
-2,5052	0	-1019,1839	0	-1019,1839	0
-1017,8642	0				
-1019,1839	0				
-1119,6506	0				
-1121,1023	0				

**Tabelle 3.36:** Eigenwerte des Gesamtsystems, bestehend aus dem Originalsystem im Vorwärtszweig und dem jeweiligen Beobachterregler in der Rückführung

Bei den Impulsantworten der Gesamtsysteme, mit den über die modalen Verfahren reduzierten Beobachterreglern in der Rückführung, können kaum Unterschiede zum Referenzsystem festgestellt werden. Auch im Vergleich zu Bild 3.47 ergeben sich nur geringe Abweichungen bezüglich der modalen bzw. balancierten Reglerreduktion.



**Bild 3.49:** Impulsantworten der Gesamtsysteme (Referenz (blau), nach Abschneiden (grün), nach Guth (rot)) mit der Strecke (hellblau) anhand des Winkels  $\Theta_h$  bei einer Anregung durch die Spannung  $u_h$

An dieser Stelle kann festgestellt werden, daß die über Weg 1 erzeugten Beobachterregler 4. Ordnung die Systemdynamik wie gewünscht verbessern.

### *Über Modellreduktion zum Regler reduzierter Ordnung (Weg 2)*

Auf Weg 2 wird im Gegensatz zu Weg 1 zunächst die Strecke reduziert, um vom System hoher Ordnung zum Beobachterregler reduzierter Ordnung zu gelangen. Für jedes der über verschiedene Verfahren reduzierten Systeme wird ein Beobachterregler entworfen. Wie bei Weg 1 wird für die Regelung der Faktor  $q = 1$  und als Dominanzkriterium für die modale Modellreduktion sowie den Beobachterentwurf die Übertragungsdominanz ausgewählt. Die Tabelle 3.37 zeigt die prozentuale Anzahl der stabilen Lösungen des geschlossenen Kreises (Gesamtsystem), d.h. Regelstrecke im Vorwärtszweig und reduzierter Beobachterregler in der Rückführung, für verschiedene Faktoren  $q$  und Reduktionsverfahren.

Reduktionsart	Faktor q =			
	1	10	100	1000
balancierte Ordnungsreduktion durch Abschneiden	100%	100%	85,7%	57,1%
balancierte Ordnungsreduktion nach Guth	85,7%	100%	57,1%	57,1%
modale Ordnungsreduktion durch Abschneiden	71,4%	71,4%	57,1%	57,1%
modale Ordnungsreduktion nach Guth	57,1%	42,9%	57,1%	42,9%

**Tabelle 3.37:** Anzahl der stabilen Lösungen in Prozent des geschlossenen Kreises bei Übertragungsdominanz

Aus der Tabelle 3.37 wird ersichtlich, daß die Wahl des Faktors  $q = 1$  sinnvoll ist, da bei allen anderen Faktoren ein nicht so hoher Prozentsatz an stabilen Lösungen existiert und zudem weitaus größere Stellsignale notwendig wären.

Im Gegensatz zu Weg 1 sind bei Weg 2 die Singulärwerte und die Dominanzkennzahlen der Strecke ausschlaggebend für die Wahl des Reduktionsgrades. Dies beruht auf der Tatsache, daß auf Weg 2 zunächst die Strecke reduziert wird (Modellreduktion) und dann der Beobachterregler entworfen wird.

Singulärwerte	Dominanzkennzahlen
1,365630915	9,345580512
0,92286315	9,345580512
0,914778414	0,97580902
0,416322379	0,797054896
0,023918017	0,537130304
0,006925737	0,537130304
$2,87479 \cdot 10^{-8}$	$8,8027 \cdot 10^{-12}$
$2,28505 \cdot 10^{-8}$	$1,28611 \cdot 10^{-15}$

**Tabelle 3.38:** Kennzahlen zur Festlegung des Reduktionsgrades

Anhand der in Tabelle 3.38 gezeigten Kennzahlen, könnte auf unterschiedliche Ordnungen reduziert werden. Die Reduktion auf 4. Ordnung ist jedoch sowohl für die balancierte als auch die modale Ordnungsreduktion sinnvoll und wird aus Gründen der Vergleichbarkeit der Reduktion auf eine andere Systemordnung vorgezogen. Der Tabelle 3.39 kann entnommen werden, daß bis auf die modale Ordnungsreduktion nach Guth alle Verfahren ein stabiles Gesamtsystem liefern. Die modale Ordnungsreduktion nach Guth scheidet daher für weitere Vergleiche aus.

Reduktionsart	Ordnung	Faktor q =			
		1	10	100	1000
balancierte Ordnungsreduktion durch Abschneiden	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	s	s	s	s
	4	s	s	s	s
	3	s	s	s	i
	2	s	s	i	i
	1	s	s	s	i
balancierte Ordnungsreduktion nach Guth	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	s	s	s	s
	4	s	s	s	s
	3	i	s	i	i
	2	s	s	i	i
	1	s	s	i	i
modale Ordnungsreduktion durch Abschneiden	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	s	s	s	s
	4	s	s	s	s
	3	kk	kk	kk	kk
	2	s	s	i	i
	1	kk	kk	kk	kk
modale Ordnungsreduktion nach Guth	7	s	s	s	s
	6	s	s	s	s
	5	s	s	s	s
	4	i	i	s	i
	3	kk	kk	kk	kk
	2	s	i	i	i
	1	kk	kk	kk	kk

Legende: s = stabil i = instabil kk = konj.-komplexe Eigenwerte

**Tabelle 3.39:** Mögliche Reduktionsgrade bei verschiedenen Reduktionsverfahren

Da auf Weg 2 die Reduktion der Strecke eine balancierte bzw. modale Transformation voraussetzt, ist es sinnvoll, zunächst die Eigenwerte der Referenzbeobachterregler hoher Ordnung für das balanciert bzw. modal transformierte System miteinander zu vergleichen. In den Vergleich eingeschlossen werden sollte der Referenzbeobachterregler von Weg 1, dessen Eigenwerte der Tabelle 3.33 entnommen werden können und dem keine Transformation vorausgeht. Man erkennt, daß sich alle drei Referenzbeobachterregler in ihren Eigenwerten geringfügig unterscheiden. Die Differenzen entstehen durch die balancierte bzw. modale Transformation und den anschließenden Einsatz des *place*-Algorithmus beim Beobachterentwurf.

REFERENZBEOBACHTERREGLER			
für balanciert reduzierte Systeme		für modal reduzierte Systeme	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,0641	-2,1115	-0,0595	-2,1120
-0,0641	2,1115	-0,0595	2,1120
-0,3643	-0,3666	-0,3762	-0,3558
-0,3643	0,3666	-0,3762	0,3558
-1,3102	0	-1,2914	0
-2,5090	0	-2,5132	0
-1119,6506	0	-1119,6506	0
-1121,1023	0	-1121,1023	0

**Tabelle 3.40:** Eigenwerte der Referenzbeobachterregler für balanciert oder modal reduzierte Beobachterregler

Vergleicht man nun die Eigenwerte der beiden Referenzgesamtsysteme von Weg 2 (Tabelle 3.41), mit den Eigenwerten des Referenzgesamtsystems von Weg 1 (siehe Tabelle 3.34), so wird ersichtlich, daß die Eigenwerte der Gesamtsysteme nahezu gleich sind. Unterschiede zwischen den Eigenwerten können erst in der siebten Nachkommastelle ( $10^{-7}$ ) festgestellt werden.

EIGENWERTE REFERENZSYSTEM, D. H. MIT BEOBACHTERREGLER 8. ORDNUNG				
balanciert			modal	
Realteil	Imaginärteil		Realteil	Imaginärteil
-0,0395	-2,1105		-0,0395	-2,1105
-0,0395	2,1105		-0,0395	2,1105
-0,0434	-2,1105		-0,0434	-2,1105
-0,0434	2,1105		-0,0434	2,1105
-0,2552	-0,2680		-0,2552	-0,2680
-0,2552	0,2680		-0,2552	0,2680
-0,2807	-0,2680		-0,2807	-0,2680
-0,2807	0,2680		-0,2807	0,2680
-1,1903	0		-1,1903	0
-1,3093	0		-1,3093	0
-2,2775	0		-2,2775	0
-2,5052	0		-2,5052	0
-1017,8642	0		-1017,8642	0
-1019,1839	0		-1019,1839	0
-1119,6506	0		-1119,6506	0
-1121,1023	0		-1121,1023	0

**Tabelle 3.41:** Eigenwerte der Referenzgesamtsysteme für Weg 2

Die Tabelle 3.42 zeigt die Eigenwerte der drei stabilen Gesamtsysteme von Weg 2 mit den unterschiedlichen Beobachterreglern 4. Ordnung in der Rückführung. Die modale Ordnungsreduktion liefert nur mit dem Verfahren durch einfaches Abschneiden eine stabile Lösung des geschlossenen Kreises, weshalb ein Vergleich zwischen den beiden modalen Verfahren entfällt. Betrachtet man die Eigenwerte der Gesamtsysteme (Tabelle 3.42) mit den über balancierte bzw. modale Modellreduktion erzeugten Beobachterreglern in der Rückführung, so stellt man fest, daß die über modale Reduktion erhaltenen Eigenwerte den Eigenwerten der Referenzgesamtsysteme (Tabelle 3.41) sehr ähnlich sind. Die Eigenwerte der balancierten Verfahren sind ihnen gegenüber leicht verschoben. Die größte Verschiebung tritt bei den Eigenwerten des Gesamtsystems auf, denen die balancierte Modellreduktion nach Guth zugrunde liegt. Grund dafür ist, daß bei der Modellreduktion über das Verfahren nach Guth die stationäre Genauigkeit über eine Anpassung der Ein- und Ausgangsmatrix erreicht wird, was beim anschließenden Beobachterreglerentwurf Veränderungen gegenüber dem durch Abschneiden balanciert reduzierten System hervorruft.

EIGENWERTE GESAMTSYSTEM MIT BEOBACHTERREGLER 4. ORDNUNG					
über balancierte Ordnungsreduktion				über modale Ordnungsreduktion	
durch Abschneiden		nach Guth		durch Abschneiden	
Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil	Realteil	Imaginärteil
-0,0360	-2,1132	-0,0308	-2,1275	-0,0386	-2,1099
-0,0360	2,1132	-0,0308	2,1275	-0,0386	2,1099
-0,0472	-2,1054	-0,1595	-0,2602	-0,0443	-2,1101
-0,0472	2,1054	-0,1595	0,2602	-0,0443	2,1101
-0,2451	-0,3018	-0,2834	-2,1019	-0,2638	-0,2391
-0,2451	0,3018	-0,2834	2,1019	-0,2638	0,2391
-0,2767	-0,2244	-0,5437	-0,3301	-0,2660	-0,2936
-0,2767	0,2244	-0,5437	0,3301	-0,2660	0,2936
-1,2059	0	-1,3050	0	-1,2156	0
-2,2695	0	-2,3055	0	-2,2694	0
-1017,8642	0	-1017,8642	0	-1017,8642	0
-1019,1839	0	-1019,1839	0	-1019,1839	0

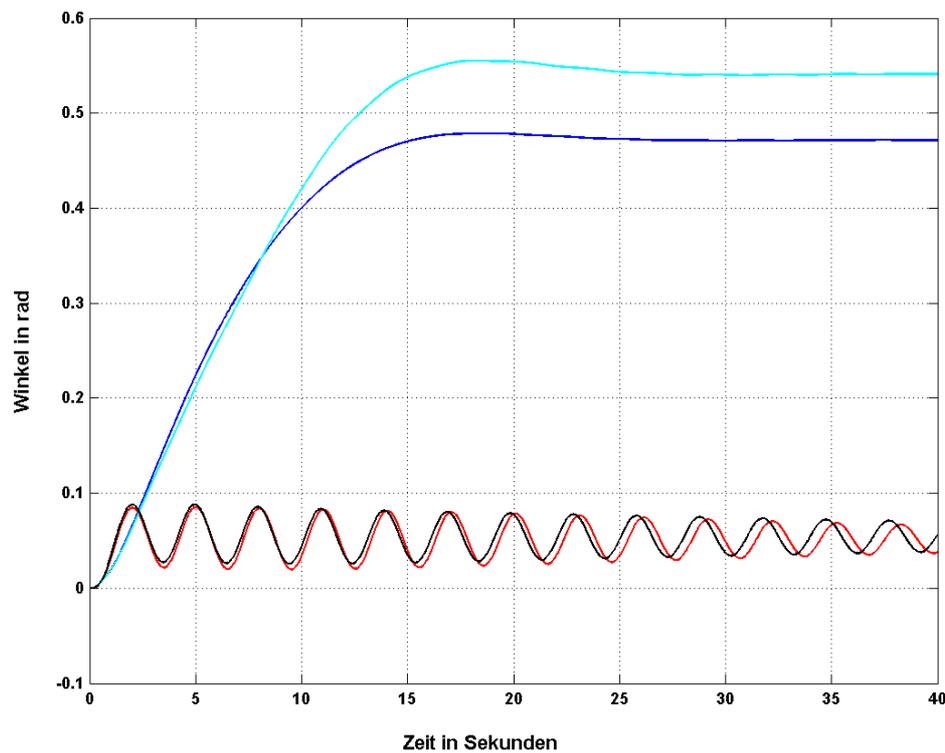
**Tabelle 3.42:** Eigenwerte des Gesamtsystems, bestehend aus dem Originalsystem im Vorwärtszweig und dem jeweiligen Beobachterregler in der Rückführung

### *Vergleich von Weg 1 mit Weg 2*

Vergleicht man nun die Eigenwerte der Gesamtsysteme mit den über balancierte Ordnungsreduktion durch einfaches Abschneiden auf Weg 1 und Weg 2 erzeugten Beobachterreglern 4. Ordnung (Tabelle 3.34 und Tabelle 3.42) in der Rückführung, sieht man, daß beide Wege fast gleiche Ergebnisse liefern. Damit stimmen auch die Eigenwerte des Gesamtsystems mit dem über balancierte Reglerreduktion nach Guth auf Weg 1 entworfenen Beobachterregler 4. Ordnung überein. Die Eigenwerte des entsprechenden Pendants von Weg 2 weichen von den bisher verglichenen ab. Dabei kann auf den bereits geschilderten Sachverhalt bezüglich Unterschiede beim Beobachterentwurf verwiesen werden. Bei der Betrachtung der Gesamtsystemeigenwerte, welche aus der Anwendung des modalen Verfahrens durch Abschneiden auf beiden Wegen resultieren (Tabelle 3.34 und Tabelle 3.42), ist keine nennenswerte Abweichung erkennbar. Eine Gegenüberstellung der Eigenwerte der modalen Ordnungsreduktion durch einfaches Abschneiden scheidet aufgrund der instabilen Lösung von Weg 2 aus.

Aus den vorangegangenen Überlegungen kann nicht abgeleitet werden, daß der eine Weg generell besser als der andere ist. Vielmehr wird die gewünschte Systemordnung des reduzierten Beobachterreglers die Wahl des entsprechenden Entwurfsweges vorgeben. Dabei kann für das Rotorsystem auf die in Tabelle 3.31 und Tabelle 3.39 abgedruckten Möglichkeiten verwiesen werden. Existieren für die gewählte Systemordnung mehrere stabile Lösungen bei unterschiedlichen Vorgehensweisen, so ist an dieser Stelle zu prüfen, welche Strategie im Hinblick auf die Entwurfsziele zu favorisieren ist. Ein detaillierterer Vergleich von Weg 1 mit Weg 2 ist aufgrund der bereits angesprochenen Problematik beim Beobachterentwurf auf Weg 2 an dieser Stelle nicht sinnvoll. Dies ist jedoch keinesfalls negativ zu bewerten, da beim Entwurf von Reglern reduzierter Ordnung nicht der Vergleich, sondern das Resultat und der betriebene Aufwand (Interaktivität) beim Entwurf im Vordergrund stehen. Wird dagegen ein durchgängiger Vergleich angestrebt, so könnte dies ein über die Optimierung eines quadratischen Gütefunktionalis entworfener Beobachter ermöglichen. Dabei ist eine hinsichtlich Vergleichbarkeit geeignete Wahl der Gewichtungsmatrizen unabdingbare Voraussetzung. Des weiteren ist darauf zu achten, daß bei sämtlichen Transformationen bzw. Reduktionen die Gewichtungsmatrizen entsprechend anzupassen sind.

Der Nachweis, daß die entworfenen Regler reduzierter Ordnung auch praktisch eingesetzt werden können, erfolgt über deren Anwendung am nichtlinearen mathematischen Modell des Rotorsystems. Hierzu wird exemplarisch der auf Weg 1 über balancierte Ordnungsreduktion entworfene, auf 4. Ordnung reduzierte Beobachterregler ausgewählt und die Simulationsergebnisse mit denen der Anwendung am linearen System verglichen (Bild 3.50).



**Bild 3.50:** Einsatz des entworfenen reduzierten Reglers am linearen und nichtlinearen Modell, hier Vergleich der Sprungantworten der Winkel  $\Theta_h$  (nichtlinear (blau), linear (hellblau)) und  $\Theta_v$  (nichtlinear (rot), linear (schwarz)) bei einem Spannungssprung von  $u_v = 14,6\text{V}$  auf  $u_v = 15,6\text{V}$

Hinsichtlich der Dynamik zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung bei Anwendung des reduzierten Reglers am linearen bzw. nichtlinearen Modell. Die stationäre Abweichung bezüglich des Winkels  $\Theta_h$  war zu erwarten und resultiert aus den bereits bei der Streckenuntersuchung des Rotorsystems festgestellten unterschiedlichen Endwerten von linearem und nichtlinearem Modell. Ziel der Zustandsregelung ist es, die Dynamik im Vergleich zur Strecke ohne Regelung zu verbessern. Wie gezeigt gelingt dies durch den Einsatz der unterschiedlichen Regler reduzierter Ordnung sehr gut.

Die Auswertung der Simulationsergebnisse erfolgte bislang vor allem qualitativ. Erste Ansätze quantitativer Bewertungen erfolgten anhand der Eigenwertbetrachtungen. Führt man diesen Gedanken konsequent weiter, so wünscht man sich quantitative Beurteilungsmöglichkeiten hinsichtlich der Leistungsfähigkeit der eingesetzten Verfahren. Nachdem die Ordnungsreduktion zentraler Bestandteil dieser Arbeit ist, wird daran ein neuartiger Ansatz vorgestellt, der das Gedankengut des Benchmarking durchgängig auf die systemtechnische Problemlösung überträgt. Ergebnis dieser Vorgehensweise ist eine prototypisch realisierte dynamische Workbench zum Vergleich von Ordnungsreduktionsverfahren.

## 4 Entwicklung einer Workbench für Ordnungsreduktion

Dieses Kapitel behandelt den Einsatz von Benchmarking in der Regelungstechnik [28]. Anhand der Ordnungsreduktion eines linearen zeitinvarianten Zustandsraummodells, werden Kriterien definiert und diskutiert, die eine quantitative Bewertung der Reduktionsgüte ermöglichen. Die Analyse, Auswertung und Datenarchivierung der gewonnenen Ergebnisse erfolgt über eine dynamische Matlab-Workbench, die über das World-Wide-Web der Allgemeinheit zur Verfügung steht. Ausgehend von dieser Idee und der prototypisch realisierten Matlab-Workbench werden Perspektiven entwickelt, die verschiedene Möglichkeiten für einen effizienten Einsatz des Benchmarking in der modernen Wissenschaft aufzeigen.

### 4.1 Zielsetzung

Benchmarking wird verwendet, um verschiedene Prozesse, hier Lösungsmöglichkeiten (Verfahren), miteinander zu vergleichen und deren Ergebnisse quantitativ bewerten zu können. Dafür sind ein Referenzsystem und geeignete Bewertungskriterien zu definieren. Die Entwicklung von Wissenschaft und Wirtschaft hat von der menschlichen Neugier und dem ständigen Streben nach Besserem profitiert. Diese menschlichen Eigenschaften liegen auch dem Benchmarking zugrunde. Mit dem Benchmarking sind die Begriffe „Informationssammlung und -verarbeitung“, „Veränderung“, „Kommunikation“ sowie der „Meß-, Vergleichs-, Positionierungs- und Lernaspekt“ untrennbar verbunden [48]. Viel zu oft wird der Begriff „Benchmarking“ jedoch auf den reinen „Vergleichsaspekt“ reduziert. Bei der späteren Anwendung soll gezielt der in den anderen Punkten steckende Mehrwert freigesetzt werden. Dazu wird herausgearbeitet, welche Forderungen sich aus diesen Aspekten für die praktische Umsetzung des Benchmarking ableiten lassen und wie diese bei der prototypischen Realisierung der Matlab-Workbench berücksichtigt wurden.

Nachdem bei der Ordnungsreduktion versucht wird, die Ordnung des Systems unter Beibehaltung der charakteristischen Eigenschaften zu reduzieren, ist das Originalsystem gleichzeitig das Referenzsystem. An ihm werden die über verschiedene Verfahren auf unterschiedliche Ordnung reduzierten Modelle gemessen. Zur Beurteilung der Reduktionsgüte sind geeignete Bewertungskriterien zu definieren, welche die Abweichungen zum Referenzsystem quantifizieren.

## 4.2 Bewertungskriterien

Ausgehend vom bereits beschriebenen Ziel der Ordnungsreduktion werden in diesem Abschnitt Kriterien definiert, die eine quantitative Bewertung der Reduktionsgüte ermöglichen. Dabei gibt es sicherlich unterschiedliche Ansichten darüber, welche Kriterien zur Beurteilung der Reduktionsgüte zu verwenden sind. Die im folgenden vorgeschlagenen sollen als Diskussionsgrundlage verstanden werden und dienen in erster Linie zu Demonstrationszwecken. Allen Bewertungskriterien gemein ist das Prinzip, eine Abweichung des reduzierten Systems vom Referenzsystem (Ausgangssystem) hinsichtlich einer bestimmten Eigenschaft zu erfassen und mit einer Maßzahl zu versehen. Die Auswertung kann sowohl über Matlab-Befehle als auch über ein Blockschaltbild in Simulink erfolgen. Bei den untenstehenden Kriterien wurde von beiden Möglichkeiten Gebrauch gemacht. In Summe ergeben sie, zu einer Matlab-Funktion zusammengefaßt, den in der Workbench abgelegten „Standard-Benchmark“.

Es versteht sich von selbst, daß es dem Nutzer der Workbench freisteht, im Hinblick auf seine Problemstellung eigene Kriterien zu definieren, diese evtl. mit bereits bestehenden zu einem neuen Benchmark zusammenzuführen und der Allgemeinheit zur Verfügung zu stellen. Dabei sind gewisse Konventionen zu beachten, die in der Workbench näher beschrieben sind.

### 4.2.1 Bewertungskriterien im Zeitbereich

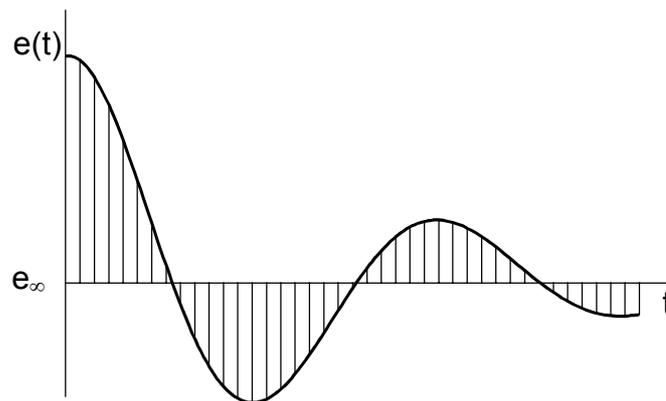
Bei den Bewertungskriterien im Zeitbereich werden sowohl das Referenzsystem als auch das Vergleichssystem mit dem selben Eingangssignal (z.B. Sprung, Rampe, Impuls) angeregt und die jeweiligen Systemantworten miteinander verglichen und ausgewertet. Die zugrunde liegende Simulationsdauer ist dabei abhängig vom Referenzsystem.

#### *Fehlerintegrale*

In Anlehnung an die aus der Regelungstheorie bekannten Fehlerintegrale, werden über eine vom Referenzsystem abhängige Integrationsdauer, Abweichungen der Systemantwort des reduzierten Systems zum Referenzsystem für unterschiedliche Eingangssignale ausgewertet.

Aus [8] kann entnommen werden, daß verschiedene Funktionen  $f_i[\cdot]$  mit den zugehörigen Integralen als sogenannte Regelflächen  $I_i = \int_0^{\infty} f_i(e_d(t)) dt$  vorgeschlagen werden.

Sie basieren auf der um den stationären Endwert bereinigten Regeldifferenz  $e_d(t)$ , so daß  $e_d(t \rightarrow \infty) = 0$  ist. Den exemplarischen Verlauf einer Regeldifferenz zeigt Bild 4.1.

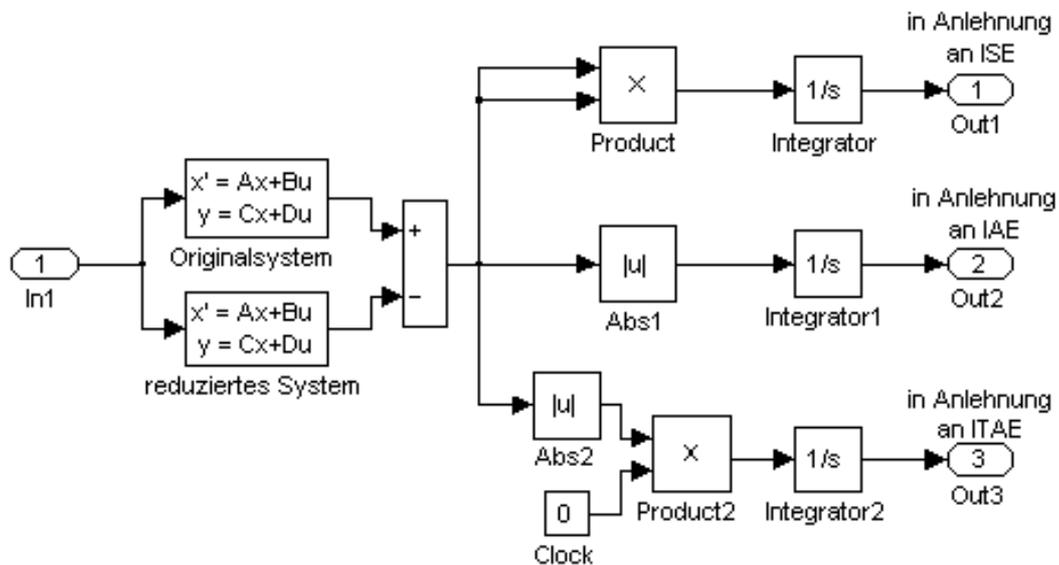


**Bild 4.1:** Zeitlicher Verlauf einer Regeldifferenz

Im folgenden werden die im übertragenen Sinne der Workbench zugrunde liegenden Regelflächen für  $e_d(t)$  definiert:

- a) Die **quadratische Regelfläche**  $I_1$  für  $f_1[e_d(t)] = e_d^2(t)$   
oder **ISE-Kriterium** (Integral of Squared Error)
- b) Die **Betragsfläche**  $I_2$  für  $f_2[e_d(t)] = |e_d(t)|$   
oder **IAE-Kriterium** (Integral of Absolute Error)
- c) Die **zeitgewichtete Betragsfläche**  $I_3$  für  $f_3[e_d(t)] = t |e_d(t)|$   
oder **ITAE-Kriterium** (Integral of Time-weighted Absolute Error)

Analog zu den sogenannten Regelflächen werden, wie bereits erwähnt, Integrale über die Abweichung der Systemantworten von Original- und reduziertem System gebildet. Zum besseren Verständnis, werden diese Kriterien in Simulink abgebildet. Das hierfür erzeugte Blockschaltbild ist in Bild 4.2 zu sehen.



**Bild 4.2:** Blockschaltbild zu den Fehlerintegralen

Dieses Simulink-Modell besitzt einen Eingang und drei Ausgänge. Über den Eingang wird die gewünschte Anregung (hier Sprung) sowohl auf das Referenzsystem als auch auf das reduzierte System gegeben. Danach erfolgt der Vergleich beider Ausgangssignale und die Auswertung über die drei Fehlerintegrale, deren Ergebnisse über die drei Ausgänge des Simulink-Modells ausgegeben werden. Eine Modellebene höher werden diese Ergebnisse zur Weiterverarbeitung im Matlab-Workspace abgelegt.

### ***Punktuelle Abweichungen***

Neben den eben beschriebenen Fehlerintegralen werden auch punktuelle Abweichungen betrachtet. Diese werden direkt auf der Matlab-Befehlsebene untersucht. Hierbei wird zu jeder Anregung die Abweichung der Anfangs- und Endwerte sowie die maximale und durchschnittliche Abweichung der Ausgangsgrößen beider Systeme berechnet.

## **4.2.2 Bewertungskriterien im Frequenzbereich**

Für Untersuchungen im Frequenzbereich bieten sich beispielsweise das Bodediagramm und das Pol-Nullstellen-Diagramm an. Nachdem in dieser Arbeit ausschließlich im Zeitbereich gearbeitet wird, werden die Bewertungskriterien im Frequenzbereich nur angerissen.

### ***Fehlerintegrale und punktuelle Abweichungen***

Bei der Auswertung des Bodediagramms kann auf die Bewertungskriterien im Zeitbereich verwiesen werden. Überträgt man deren Grundgedanken, so können in einem vorher am Referenzsystem festgelegten Frequenzbereich Abweichungen des Vergleichs- vom Referenzsystem hinsichtlich Amplituden- und Phasengang festgestellt werden.

### ***Absolute und relative Stabilitätsreserve***

Aus dem Pol-Nullstellendiagramm können über die Lage der Pole die absolute und relative Stabilitätsreserve eines Systems bestimmt werden. Durch die Ordnungsreduktion kommt es häufig zu Veränderungen dieser Größen. Abweichungen dieser Parameter, nach oben wie auch nach unten, führen im Vergleich zum Referenzsystem zu einer verfälschten Systemdynamik und gehen in die Bewertung ein.

## **4.3 Forderungen an die Workbench**

Wie bereits erwähnt, versteht man unter dem Begriff „Benchmarking“ mehr als nur „Vergleichen“. Aus den in Abschnitt 4.1 genannten Aspekten lassen sich Forderungen für die prototypische Realisierung der Workbench herleiten.

### **4.3.1 Benchmarking ist Informationssammlung und –verarbeitung**

Benchmarking lebt von den Informationen, welche im Laufe der Zeit in den Benchmarkprozeß einfließen oder durch ihn generiert werden. Beispiele für einfließende Informationen, bezogen auf die in diesem Kapitel beschriebene Anwendung, sind neue Modelle, Ordnungsreduktionsverfahren und Bewertungskriterien. Nachdem solche Informationen zur Verfügung gestellt sind, ist es Aufgabe der Workbench, diese in geeigneter Form zu sammeln und zu verarbeiten. Das Sammeln erfolgt über eine strukturierte Archivierung der Daten, vergleichbar mit einer Datenbank. Wenn Daten in der Workbench abgelegt wurden, stehen sie zur Verarbeitung bereit. So kann beispielsweise ein neues Verfahren zur Ordnungsreduktion an einem Modell getestet werden, welches schon vor längerer Zeit in die Workbench eingestellt wurde. Die Auswertung erfolgt über eine Auswahl von Bewertungskriterien, die in der Work-

bench zur Verfügung stehen. Die so gewonnenen Ergebnisse werden ebenfalls archiviert und zur Weiterverarbeitung, z.B. für Vergleichs- bzw. Dokumentationszwecke, bereitgestellt.

Alle in der Workbench abgelegten Informationen werden mit einem Zeitstempel versehen. Werden von einem Anwender Daten ins System eingestellt, so wird diesen Datensätzen zusätzlich eine Nutzerkennung (z.B. Email-Adresse) hinterlegt. Darüber hinaus gibt es eine Protokolldatei, die sogenannte History. In ihr werden alle relevanten Vorgänge über die gesamte Nutzungsdauer der Workbench gespeichert.

### **4.3.2 Benchmarking ist Veränderung**

Der Forderung nach Veränderung wird durch die Konzeption einer „dynamischen“ Workbench Rechnung getragen. Stellt ein Anwender der Workbench neue Informationen zur Verfügung, so wird die Oberfläche online aktualisiert, d.h. die betroffenen Menüs werden sofort angepaßt. Die Session muß also nicht erst beendet werden, bevor auf die neuen Daten zugegriffen werden kann. Zudem ist es möglich, nach Auswertung des gewünschten Kriterienkatalogs (Benchmark), eine anwendungsorientierte Gewichtung der einzelnen Kriterien vorzunehmen. Auf diese Weise kann ein bestehender Benchmark an eine spezielle Aufgabenstellungen angepaßt werden. Verzichtet man darauf, so wird standardmäßig jedes Kriterium mit einer Maximalpunktzahl von zehn Punkten versehen. Die einem Kriterium zugeschriebenen Punkte, werden über eine Punktekarte vergeben. Diese ist für jede Modell-Benchmark-Kombination vorher zu definieren. Über die Punktekarte erfolgt die Projektion der Ergebnisse der einzelnen Bewertungskriterien auf einen Wert zwischen null und zehn. Zehn Punkte entsprechen der Bestnote. Die Punktekarte wird über die Vorgabe des Ergebnisses jedes Kriteriums für die Wertung „neun Punkte“ definiert.

### **4.3.3 Benchmarking ist Kommunikation**

„Benchmarking ist Kommunikation“ und somit Informationsaustausch. Dies rechtfertigt die Workbench auf unterschiedliche Arten. Zum einen findet eine indirekte Kommunikation über das Internet statt, indem beispielsweise über die Workbench eigene Verfahren mit anderen verglichen werden können. Allein die Tatsache, daß es sich um eine netzwerkfähige Anwendung handelt, verdeutlicht den kommunikativen Ansatz, der bei der Konzeption verfolgt

wurde. Zum anderen ist anzunehmen, daß die Anwender der Workbench auch zu einem persönlichen Kontakt angeregt werden, was ein Beispiel für die direkte Kommunikation wäre. An dieser Stelle könnte man über die Einrichtung einer themenbezogenen Newsgroup oder eines Chatrooms nachdenken, wodurch die Kommunikation weiter gefördert würde.

#### **4.3.4 Meß-, Vergleichs- und Positionierungsaspekt**

Beim „Meß-, Vergleichs- und Positionierungsaspekt“ handelt es sich um das Grundprinzip des Benchmarking. Die Workbench kann in diesem Zusammenhang als ideale Plattform angesehen werden, um sich mit anderen zu messen, eigene Verfahren mit bestehenden zu vergleichen und sich hinsichtlich der Ergebnisse einordnen zu können. Die Ergebnisse können sowohl grafisch angezeigt als auch über eine geeignete Schnittstelle (*wkI*-Format) ausgegeben und weiterverarbeitet werden. An dieser Stelle wird auf die spätere Präsentation der Ergebnisse für das bereits beschriebene Anwendungsbeispiel verwiesen. Diese veranschaulichen die Überlegungen zu den oben genannten Forderungen.

#### **4.3.5 Lernaspekt**

Wesentliches Ziel des Benchmarking ist es, von anderen zu lernen und von deren Erfahrungsschatz zu profitieren. Aus diesem Grund liegen alle Quelltexte offen. Hierdurch wird beispielsweise ermöglicht, daß durch eine geeignete Kombination verschiedener Teile unterschiedlicher Verfahren, ein neuer leistungsfähiger Algorithmus entsteht. Erleichtert wird dies durch eine ausführliche Kommentierung des Quelltextes und die Angabe von Literaturhinweisen in den Matlab-Skripten.

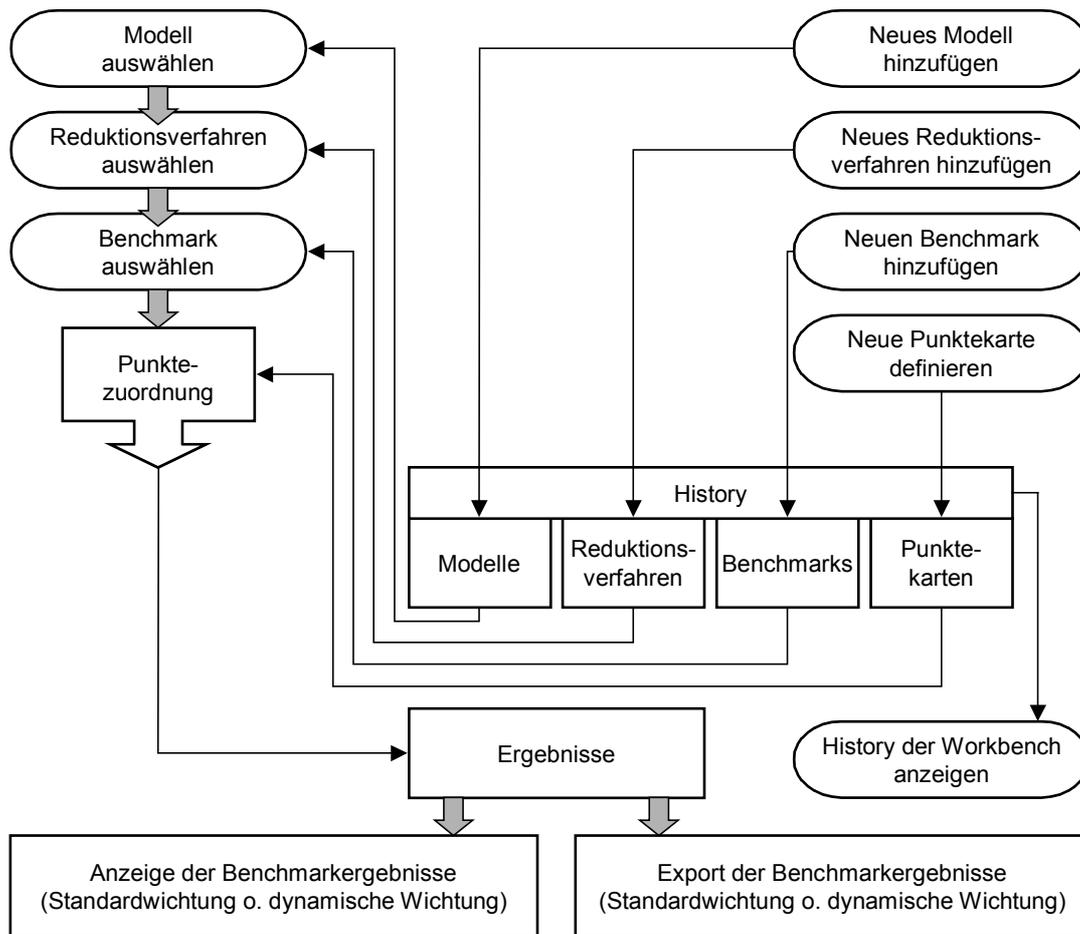
### **4.4 Aufbau der dynamischen Matlab-Workbench**

Die Workbench ist in einer Matlab-Figure realisiert. Über die Menüleiste am oberen Bildschirmrand können unterschiedliche Funktionen angesprochen werden. Diese Funktionen sind Matlab-Routinen, die über Callbacks aufgerufen und ausgeführt werden. Die einzelnen Aufrufe werden nacheinander im Mittelteil der Figure protokolliert.

Sämtliche Matlab-Files sind in einer hierarchischen Verzeichnisstruktur abgelegt und auf dem „Datei-Server“ für autorisierte Nutzer freigegeben. Über ein FTP-Programm, das in der Lage

ist, diese Verzeichnisse über einen Laufwerksbuchstaben in das Betriebssystem einzubinden, erfolgt der Datentransfer zwischen Client und Server. Vor dem Start der Workbench sind die Eigenschaften der Windows-Matlab-Verknüpfung anzupassen. Um nicht die Original-Verknüpfung verändern zu müssen, empfiehlt es sich, eine Kopie dieser Verknüpfung zu erstellen und dort das Arbeitsverzeichnis mit dem oben angesprochenen Laufwerksbuchstaben zu definieren. Im Anschluß daran startet die Workbench bei Aufruf der angepaßten Verknüpfung automatisch.

Die Bedienung der Workbench erfolgt über eine Menüleiste und Dialogboxen. Bereits in die Workbench eingestellte Modelle, Reduktionsverfahren und Benchmarks können über die ersten drei Menüpunkte ausgewählt werden. Das in Bild 4.3 abgebildete Flußdiagramm veranschaulicht mögliche Abläufe innerhalb der Workbench.



**Bild 4.3:** Ablaufdiagramm zur Workbench

Die Benchmarkergebnisse werden über die entsprechende Punktekarte ausgewertet, in der „Datenbank“ abgespeichert und zur Anzeige gebracht. Bereits abgespeicherte Ergebnisse können über das Menü „Ergebnisausgabe“ geladen und angezeigt werden. Darüber hinaus ist es möglich, beliebig viele Ergebnisdatensätze auszuwählen und zur weiteren Verarbeitung in eine *wk1*-Datei zu exportieren. Dieses Format kann von allen gängigen Tabellenkalkulationsprogrammen gelesen werden.

Über den Menüpunkt „Workbench erweitern“ können der Allgemeinheit neue Modelle, Ordnungsreduktionsverfahren und Benchmarks zur Verfügung gestellt werden. Dabei ist zu beachten, daß für jede Modell-Benchmark-Kombination eine Punktekarte existieren muß. Wird ein neues Modell oder ein neuer Benchmark eingestellt, so sind auch die entsprechenden Punktekarten zu definieren, welche den Ergebnissen der Bewertungskriterien die gewünschten Punkte zuordnet. Um sicherzustellen, daß sich neue Modelle, Verfahren und Benchmarks

problemlos ins Gesamtkonzept einfügen, wurden für alle Objekte Konventionen (Richtlinien) definiert und Vorlagen erstellt. Erweiterungen der Workbench werden zusammen mit den Nutzerdaten in einer History-Datei protokolliert. Die von den Erweiterungen betroffenen Menüs werden dynamisch aktualisiert.

Der Befehl „Clear Workbench“ ermöglicht es dem Nutzer, während einer Session den Matlab-Workspace zu löschen, um nach Fehleingaben ohne Neustart weiterarbeiten zu können. An dieser Stelle wird nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es sich um eine prototypisch realisierte Workbench handelt, bei der nicht alle denkbaren Fehler abgefangen werden. Weitere Bedienhinweise und Erklärungen können über den Menüpunkt Hilfe aufgerufen werden. Dort ist ein HTML-Dokument hinterlegt, das mit einem auf dem Client installierten Browser geöffnet werden kann.

### ***Systemvoraussetzungen***

Um mit der Workbench arbeiten zu können, ist die lokale Installation von Matlab/Simulink 5.3 mit der Control System Toolbox erforderlich. Der Datentransfer erfolgt über das FTP-Protokoll. Hierzu ist ein entsprechendes Programm zu installieren, welches in der Lage ist, FTP-Server-Ressourcen über einen Laufwerksbuchstaben ins Betriebssystem zu integrieren. In diesem Zusammenhang wird auf das Shareware-Programm „FTP-Netdrive 4.0“ verwiesen, welches zu Testzwecken auf Windows-Rechnern eingesetzt wurde. Zum Anzeigen der HTML-Hilfe wird ein handelsüblicher Browser benötigt. In diesem Zusammenhang wurden der Netscape Navigator 4.7 und der Microsoft Internet Explorer 5 getestet. Die zur Nutzung der Workbench notwendigen Zugangsdaten (Benutzername und Passwort), können über [www.publiziert.de](http://www.publiziert.de) kostenlos beantragt werden.

## 4.5 Präsentation der Ergebnisse für ein einfaches Anwendungsbeispiel

Für diesen Abschnitt wurde die Ordnungsreduktion eines linearen zeitinvarianten Zustandsraummodells vierter Ordnung als Anwendungsbeispiel ausgewählt. Das Originalsystem aus [45] wird durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -150 \\ 1 & 0 & 0 & -245 \\ 0 & 1 & 0 & -113 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

beschrieben. Die Eigenwerte des Systems sind  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = -5$  und  $\lambda_4 = -10$ .

Aus den vielen bereits entwickelten Verfahren zur Ordnungsreduktion werden das in Abschnitt 2.2.1 vorgestellte modale Ordnungsreduktionsverfahren nach Davison und aus der Gruppe der balancierten Ordnungsreduktionsverfahren das in Abschnitt 2.2.2 beschriebene Verfahren von Laub herausgegriffen. Durch das Benchmarking sollen ihre Stärken und Schwächen aufgedeckt werden.

Die modale Ordnungsreduktion liefert über Transformation mit der Eigenvektormatrix

$$V = \begin{pmatrix} 0.8405 & -0.5984 & 0.5527 & 0.5188 \\ 0.5323 & -0.7779 & 0.7922 & 0.7955 \\ 0.1009 & -0.1915 & 0.2579 & 0.3113 \\ 0.0056 & -0.0120 & 0.0184 & 0.0346 \end{pmatrix}$$

und einfaches Abschneiden des nichtdominanten Systemanteils die Matrizen

$$, \quad \text{und}$$

des reduzierten Modells zweiter Ordnung. Dabei wurden die dominanten Eigenwerte  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = -3$  ins reduzierte System übernommen. Der Index  $red_m$  steht für die Anwendung der modalen Reduktion. Das modal reduzierte Modell weicht sowohl dynamisch als auch stationär vom Originalsystem ab.

Die balancierte Ordnungsreduktion über den Laub-Algorithmus liefert für die Transformation mit der Transformationsmatrix

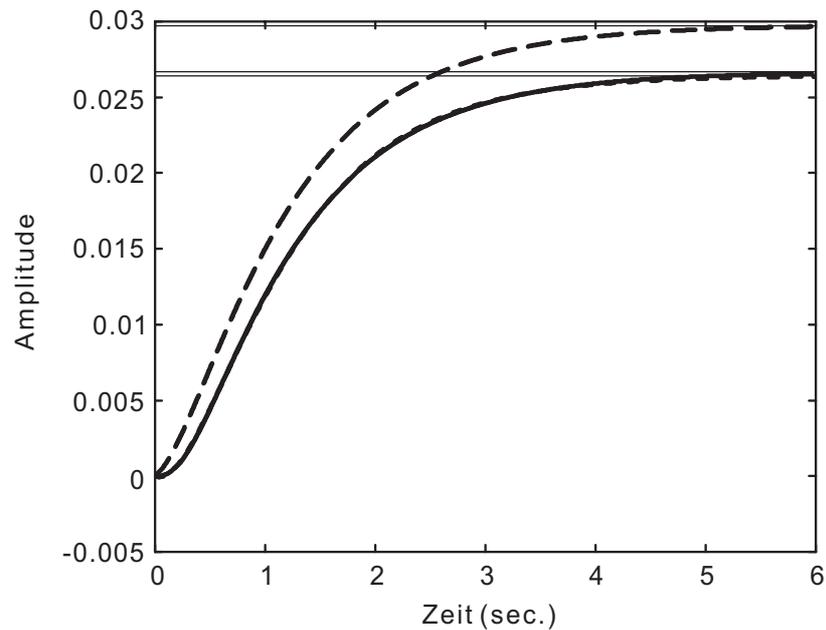
$$T = \begin{pmatrix} 29,0903 & -4.0562 & 0.5526 & -0.3095 \\ 14.7840 & 5.4494 & -0.5565 & 0.4256 \\ 2.3226 & 2.0930 & -0.0296 & -0.1217 \\ 0.1181 & 0.1307 & 0.0563 & 0.0069 \end{pmatrix}$$

auf balancierte Zustandsraumdarstellung und anschließender Reduktion durch einfaches Abschneiden die Matrizen

$$A_{\text{red}_b} = \begin{pmatrix} -0.4378 & -1.1685 \\ 1.1685 & -3.1353 \end{pmatrix}, B_{\text{red}_b} = \begin{pmatrix} 0.1181 \\ -0.1307 \end{pmatrix} \text{ und } C_{\text{red}_b} = \begin{pmatrix} 0.1181 \\ 0.1307 \end{pmatrix}^T$$

für das reduzierte System. Der Index  $\text{red}_b$  steht für die Anwendung der balancierten Reduktion.

Bild 4.4 zeigt die Sprungantwort des Referenzsystems vierter Ordnung (durchgezogene Linie) sowie die Sprungantworten der über die beschriebenen Verfahren auf zweite Ordnung reduzierten Systeme (beide gestrichelt). Das Simulationsergebnis des modal reduzierten Systems zeigt einen stationären Fehler. Die zur balancierten Ordnungsreduktion gehörende Kurve ist nahezu deckungsgleich mit der des Originalsystems.



**Bild 4.4:** Sprungantworten der Beispielsysteme für  $u(t \geq 0) = 1$   
(Referenzsystem – Linie durchgezogen; reduzierte Systeme – Linien gestrichelt)

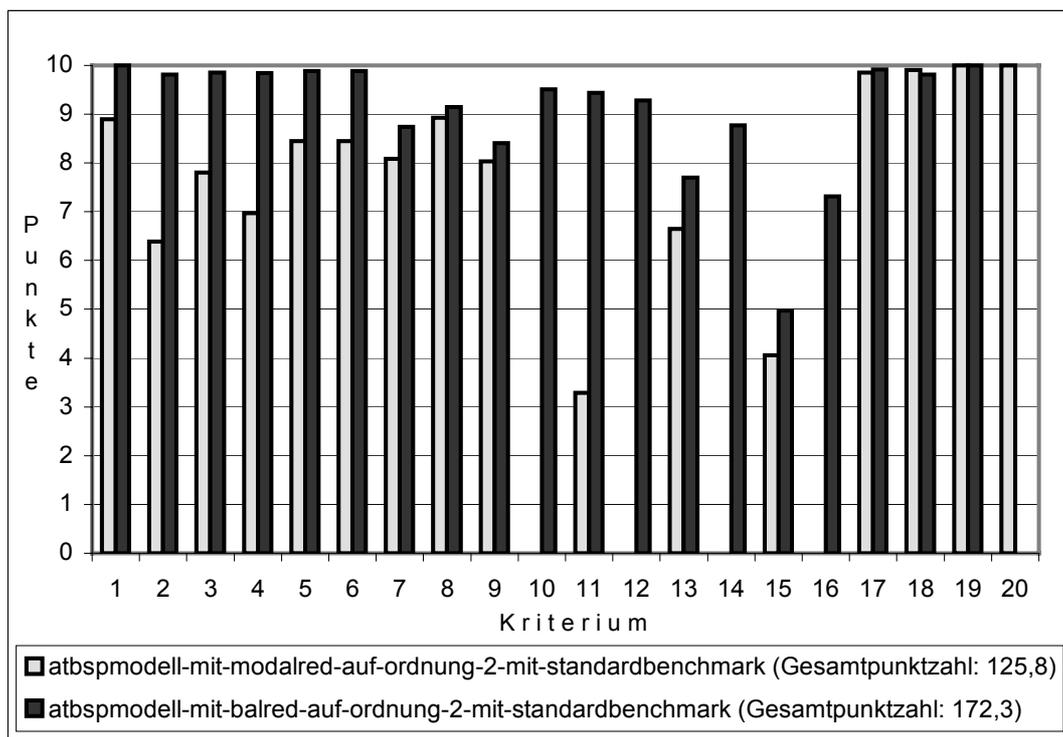
Die Bewertung der Simulationsergebnisse erfolgt in der Matlab-Workbench. Dort sind auf das Anwendungsbeispiel abgestimmte Bewertungskriterien hinterlegt.

Mit der Workbench wird nun das oben beschriebene Beispielsystem „Anwendungsbeispiel aus at\_(4)“ sowohl modal als auch balanciert auf zweite Ordnung reduziert. Die Endung „...\_(4)“ des Modellnamens steht für vierte Ordnung und wird von der Workbench bei Einstellung eines neuen Modells automatisch an den vorgegebenen Namen angehängt. Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt über den „Standard-Benchmark“ und die zugehörige Punktekarte. In Tabelle 4.1 sind die einzelnen Kriterien dieses Benchmarks aufgelistet.

Kriterium	Beschreibung
1	In Anlehnung an ISE-Kriterium (Anregung: Step)
2	In Anlehnung an IAE-Kriterium (Anregung: Step)
3	In Anlehnung an ITAE-Kriterium (Anregung: Step)
4	Durchschnittsabweichung (Anregung: Step)
5	Maximale Abweichung (Anregung: Step)
6	Stationäre Abweichung (Anregung: Step)
7	In Anlehnung an ISE (Amplitudengang)
8	In Anlehnung an IAE (Amplitudengang)
9	In Anlehnung an ITAE (Amplitudengang)
10	In Anlehnung an ISE (Phasengang)
11	In Anlehnung an IAE (Phasengang)
12	In Anlehnung an ITAE (Phasengang)
13	Durchschnittsabweichung Amplitudengang
14	Durchschnittsabweichung Phasengang
15	Max. Abweichung Amplitudengang nach oben
16	Max. Abweichung Phasengang nach oben
17	Max. Abweichung Amplitudengang nach unten
18	Max. Abweichung Phasengang nach unten
19	Abweichung hinsichtlich relativer Stabilitätsreserve
20	Abweichung hinsichtlich absoluter Stabilitätsreserve

**Tabelle 4.1:** Auflistung der Einzelkriterien des „Standard-Benchmarks“

Die Benchmarkergebnisse der beiden reduzierten Systeme werden über das *wk1*-Format nach Excel exportiert und dort aufbereitet. Das in Bild 4.5 dargestellte Säulendiagramm zeigt eine von vielen Möglichkeiten der Ergebnispräsentation.



**Bild 4.5:** Diagramm zum Beispielsystem

Die Grafik veranschaulicht die Stärken und Schwächen der beiden Verfahren bei Reduktion des Beispielsystems auf zweite Ordnung. Das Kriterium 20, welches die Veränderung der absoluten Stabilitätsreserve bewertet, liefert für das balancierte Ordnungsreduktionsverfahren den Wert Null Punkte. Dies leuchtet ein, da das vorgestellte balancierte Verfahren bei der Reduktion die Eigenwerte verschiebt. Das modale Verfahren hingegen verändert die Lage der ins reduzierte System übernommenen Eigenwerte nicht.

Mit Hilfe der Workbench können eine Vielzahl weiterer Fragestellungen beantwortet werden, worauf jedoch aus Platzgründen an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird. Erwähnenswert ist jedoch die Tatsache, daß das auf zweite Ordnung balanciert reduzierte System eine höhere Gesamtpunktzahl liefert, als das auf zweite Ordnung modal reduzierte System.



## 5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden unterschiedliche Möglichkeiten für den indirekten Entwurf von Reglern reduzierter aufgezeigt und miteinander verglichen. Dabei wird ein neuartiger Beobachterentwurf vorgestellt und eingesetzt. Die Kombination aus Zustandsbeobachter und -regler wird auch als Beobachterregler bezeichnet. Er wird auf die von der Zustandsraumdarstellung bekannte Struktur zur Beschreibung von Regelstrecken gebracht und kann somit über bekannte Verfahren der Ordnungsreduktion vereinfacht werden. Die Reglerreduktion liefert somit einen Beobachterregler niedriger Ordnung. Bisher gängige Praxis ist der Entwurf von reduzierten Reglern über eine dem Reglerentwurf vorangehende Modellreduktion. Die beiden unterschiedlichen Vorgehensweisen werden miteinander verglichen. Den Simulationen liegen dabei zwei unterschiedliche Modelle zugrunde: das um zusätzliche Eingangsgrößen erweiterte Triebwerksmodell aus [32] und ein über physikalische Modellbildung erzeugtes Hubschraubermodell. Die erfolgreiche Modellbildung wird über geeignete Vergleiche mit der Laboranlage nachgewiesen. Als Ergebnis kann festgestellt werden, daß das Modell das reale Systemverhalten gut approximiert. Zum Entwurf des Beobachterreglers wurden zwei unterschiedliche Reglerentwurfsverfahren (Polvorgabe und Riccati-Regler) eingesetzt. Der über Polvorgabe entworfene Zustandsregler eignet sich hervorragend für die Anwendung am Triebwerksmodell, weil dabei der dominante Eigenwert des Systems gezielt verschoben werden kann. Alle anderen Eigenwerte des Triebwerks sind wesentlich weiter von der Imaginärachse entfernt, weshalb das Triebwerk auch als „Steifes System“ charakterisiert werden kann. Für das wesentlich gutmütigere Rotormodell wird der Zustandsregler über die Optimierung eines quadratischen Gütefunktional festgelegt. Dabei werden die Gewichtungsmatrizen über die Ausgangsmatrix definiert, was sich als äußerst sinnvolle Wahl hinsichtlich Vergleichbarkeit der über die verschiedenen Wege und unterschiedlichen Verfahren entworfenen Beobachterregler reduzierter Ordnung erweist.

Ein Vergleich der beiden indirekten Wege miteinander ist nur begrenzt möglich, weil nicht jeder erzeugbare Beobachterregler auch ein stabiles Gesamtsystem liefert bzw. über modale Ordnungsreduktion manche Ordnungen nicht realisierbar sind. Daraus folgt, daß die Reduktion auf eine bestimmte Ordnung in vielen Fällen bereits den Weg festlegt. Für beide Modelle werden Tabellen angeboten, die basierend auf vollständigen Simulationsstudien machbare Entwurfsmöglichkeiten aufzeigen. Dabei werden sowohl unterschiedliche Dominanzmaße und Reduktionsverfahren, als auch andere frei wählbare Entwurfsparameter berücksichtigt.

Aus einer Vielzahl von möglichen Lösungen, werden für weiterführende Analysen sinnvoll miteinander vergleichbare Regler exemplarisch ausgewählt. Resultat dieser Untersuchungen ist, daß nicht pauschal ein Weg oder gewisse Verfahren von vornherein favorisiert werden können. Viel zu unterschiedlich sind doch die in der Realität vorkommenden Systemarten und verfügbaren Möglichkeiten einen Regler reduzierter Ordnung zu entwerfen. Spätestens an dieser Stelle wünscht man sich quantitative Bewertungsmöglichkeiten, die neben den durchgeführten Eigenwertbetrachtungen und der Analyse verschiedener Impulsantworten weitere Erkenntnisse liefern.

Am Beispiel der Ordnungsreduktion wird ein neuartiger interdisziplinärer Lösungsansatz vorgestellt, der diese Problematik aufgreift. Nachdem der Vergleich unterschiedlicher Reduktionsverfahren für diese Arbeit zentralen Charakter besitzt, wird für dieses grundsätzliche Problem eine prinzipielle Vorgehensweise aufgezeigt. Die für diesen Zweck entwickelte dynamische Matlab-Workbench gibt Anregungen für den Einsatz des Benchmarking in der Regelungstechnik. Unter „Forderungen an die Workbench“ werden die Aspekte herausgearbeitet, die neben dem „Vergleichen“ charakteristisch für das Benchmarking sind. Für die in dieser Arbeit präsentierten Überlegungen gibt es ein breites Spektrum an Einsatzmöglichkeiten. So könnten beispielsweise Arbeitsgruppen und Sonderforschungsbereiche von einigen Ideen profitieren und dazu beitragen, das Benchmarking in der modernen Wissenschaft weiter zu etablieren.

# Wichtige verwendete Symbole

## Allgemein verwendete Symbole

### *Formelzeichen*

ZEICHEN	BEDEUTUNG
$\alpha_k$	Realteil des k-ten Eigenwertes
$\beta_k$	Imaginärteil des k-ten Eigenwertes
$\beta; \lambda$	Eigenwert, allgemein
$\Lambda$	Matrix vom Typ (m, n)
$\hat{\Lambda}; \Sigma$	Singulärwertmatrix
$\mu_i$	Normierungsfaktor
$\sigma$	Singulärwert
$\psi$	Co-Zustandsvektor
A	Systemmatrix
$A_{ij}(\cdot)$	Amplitudengang von des i,j-ten Übertragungspfad
B	Eingangsmatrix
$b_{kj}^*$	Element der Matrix $B^*$
C	Ausgangsmatrix
$c_{ik}^*$	Element der Matrix $C^*$

---

$d_{ikj}; \hat{d}_{ikj}$	Dominanzwert
F	Systemmatrix des Beobachters
$G_{ij}$	Übertragungsfunktion des i,j-ten Pfades
H(.)	Hamilton-Funktion
J	Gütefunktional
K	Reglermatrix
k(.)	nichtlineare Reglerfunktion
L	Beobachtermatrix; Erweiterungsmatrix
$L_C$	Matrix der Cholesky-Zerlegung
$M_k; \hat{M}_k$	Dominanzmaß
n	Ordnung des Ausgangssystems
P	Steuerbarkeitsmatrix; Lösungsmatrix der Riccati-Gleichung
p	Vektor zur Polvorgabe
Q	Beobachtbarkeitsmatrix; Gewichtungsmatrix
q	Gewichtungsfaktor im Gütefunktional
$q_{ikj}$	Dominanzmaß
R	Gewichtungsmatrix
r	Ordnung des reduzierten Systems
;	Summe der Dominanzwerte

---

$T$	Transformationsmatrix
$t$	Zeit
$t_0$	Anfangszeitpunkt
$t_e$	Endzeitpunkt
$U$	Modalmatrix
$u$	Eingangsvektor
$V$	Modalmatrix
$v$	Verschiebungswert bei der Polvorgabe
$x$	Zustandsvektor
$x_0$	Anfangsvektor zum Zeitpunkt $t_0$
$\tilde{x}$	transformierter Zustandsvektor; Schätzfehler
$y$	Ausgangsvektor
$y_{ij\infty}$	Endwert des $i,j$ -ten Pfades für $t \rightarrow \infty$
$z$	transformierter Zustandsvektor

## Symbole im Teil Triebwerk

### *Formelzeichen*

ZEICHEN	EINHEIT	BEDEUTUNG
A	m <sup>2</sup>	Querschnittsfläche
c	m/s	Strömungsgeschwindigkeit
c <sub>p</sub>	1	spez. Wärmekapazität b. konst. Druck
c <sub>v</sub>	1	spez. Wärmekapazität b. konst. Volumen
Δ	1	Gefälle, Differenz
F	N	Schub
H	J/kg	Heizwert
h	J/kg	spezifische Enthalpie
η	%	Wirkungsgrad
J	kgm <sup>2</sup>	Trägheitsmoment
K	1	Konstante
κ	1	Isentropenexponent
m	kg	Masse
Ma	1	Machzahl
n	1/min	Drehzahl

---

P	Pa	Druck
$\pi$	1	Druckverhältnis
Q	kJ	Wärmemenge
R	J/kgK	spez. Gaskonstante
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Dichte
T	K	Temperatur
t	s	Zeit
V	m <sup>3</sup>	Volumen
w	m/s	Relativgeschwindigkeit
W*	kJ/kg	spez. Energie
x	m	Längenvariable

***Fußzeiger***

1...7	Ebenenbezeichnung
A	Austritt
BK	Brennkammer
br	Brennstoff
bl	Bleed
E	Eintritt

H	Hilfsaggregate
HT	Hochdruckturbine
HV	Hochdruckverdichter
is	isentrop
red	bezogene Größe
s	statische Größe
SD	Schubdüse
T	Turbine
t	Totalgröße
V	Verdichter

### ***Ebenenbezeichnung***

2	Verdichtereintritt
3	Verdichteraustritt
4	Brennkammeraustritt
5	Turbinenaustritt
6	Zwischenebene
7	Schubdüsenaustritt

## Symbole im Teil Rotormodell

### *Formelzeichen*

ZEICHEN	BEDEUTUNG
$\Theta$	Drehwinkel
$\Theta_h$	Drehwinkel des Schwenkarmes (Azimutwinkel)
$\alpha_h$	Winkelbeschleunigung um die vertikale Drehachse
$\Omega_h$	Winkelgeschwindigkeit des Schwenkarmes um die vertikale Rotationsachse
$\omega_m$	Winkelgeschwindigkeit des Hauptrotors (Rotordrehzahl)
$\omega_t$	Winkelgeschwindigkeit des Heckrotors (Rotordrehzahl)
$\Theta_v$	Neigungswinkel des Schwenkarms (Nickwinkel)
$\alpha_v$	Winkelbeschleunigung um die horizontale Drehachse
$\Omega_v$	Winkelgeschwindigkeit des Schwenkarmes um die horizontale Rotationsachse
$dm$	infinitesimales Massenelement
$d_{SA}$	Abstand des Schwerpunktes des Schwenkarmes zur Aufhängung
$d_{SP}$	Abstand des Schwerpunktes des Pendels zur Aufhängung
$F$	Matrix der nichtlinearen Systemanteile
$F_{Ah}$	Auftriebskraft des Heckrotors
$F_{Av}$	Auftriebskraft des Hauptrotors

---

$F_C$	Coriolis-Kraft
$F_{GA}$	Gewichtskraft des Schwenkarmes
$F_{GP}$	Gewichtskraft des Pendelstabs
$F_Z$	Zentrifugalkraft
$g$	Erdbeschleunigung
$h$	Abstand der Körperachse zur Drehachse
$i$	Ankerstrom
$I$	Trägheitsmoment
$I_h$	Gesamtträgheitsmoment bei Drehung um die vertikale Drehachse
$i_m$	Ankerstrom im Hauptrotorkreis
$I_{MAm}$	Trägheitsmoment des Motorankers im Hauptrotor
$I_{MAt}$	Trägheitsmoment des Motorankers im Heckrotor
$I_{mr}$	Trägheitsmoment des Hauptrotors
$I_{pm}$	Trägheitsmoment des Propellers des Hauptrotors
$I_{pt}$	Trägheitsmoment des Propellers des Heckrotors
$I_r$	Trägheitsmoment des Rotors
$I_S$	Trägheitsmoment bei Drehung um den Massenschwerpunkt
$i_t$	Ankerstrom im Heckrotorkreis
$I_{tr}$	Trägheitsmoment des Heckrotors

---

$I_v$	Gesamtträgheitsmoment bei Drehung um die horizontale Drehachse
$j$	Drehimpuls
$k_{Ah}$	Auftriebskonstante des Heckrotors
$k_{Av}$	Auftriebskonstante des Hauptrotors
$k_h$	Reibbeiwert der vertikalen Rotationsachse
$k_L$	Reibbeiwert der Luftreibung
$k_{Lm}$	Reibbeiwert der Luftreibung am Hauptrotor
$k_{Lt}$	Reibbeiwert der Luftreibung am Heckrotor
$k_m$	Drehmomentkonstante der Gleichstrommotoren
$k_R$	Reibbeiwert der Lagerreibung
$k_{Rm}$	Reibbeiwert der Lagerreibung im Hauptrotor
$k_{Rt}$	Reibbeiwert der Lagerreibung im Heckrotor
$k_T$	Torsionskonstante
$k_v$	Reibbeiwert der horizontalen Rotationsachse
$L$	Ankerinduktivität
$l_m$	Länge des Schwenkarmhauptteils
$l_t$	Länge des Schwenkarmheckteils
$m$	Masse
$m_A$	Masse des Schwenkarmes

---

$M_{Ah}$	Auftriebsmoment durch den Heckrotor
$M_{Av}$	Auftriebsmoment durch den Hauptrotor
$M_C$	Drehmoment durch Coriolis-Kraft
$M_D$	Drehmoment durch Drehimpulsänderung (Drall)
$M_{Dhm}$	Drehmoment durch Drehimpulsänderung des Hauptrotors um die vertikale Drehachse
$M_{Dvm}$	Drehmoment durch Drehimpulsänderung des Hauptrotors um die horizontale Drehachse
$m_{ges}$	Gesamtmasse des Körpers
$M_{Gv}$	Gewichtsmoment in vertikaler Ebene
$M_{GvA}$	Gewichtsmoment des Schwenkarmes
$M_{GvP}$	Gewichtsmoment des Pendelstabs
$M_h$	Gesamtdrehmoment um die vertikale Drehachse
$m_i$	Masse des i-ten Teilchens
$M_{Lm}$	Drehmoment der Luftreibung am Hauptrotor
$M_{Lt}$	Drehmoment der Luftreibung am Heckrotor
$M_M$	Drehmoment des Gleichstrommotors
$M_{MGm}$	Gegenmoment des Hauptrotors durch elektromechanische Kopplung
$M_{MGt}$	Gegenmoment des Heckrotors durch elektromechanische Kopplung
$M_{Mm}$	Gesamtmoment des Gleichstrommotors im Hauptrotorteilsystem

---

$M_{Mmx}$	x-Komponente des Moments des Gleichstrommotors im Hauptrotorteilsystem
$M_{Mmy}$	y-Komponente des Moments des Gleichstrommotors im Hauptrotorteilsystem
$m_p$	Masse des Pendels
$M_{Rh}$	Drehmoment der Lagerreibung der vertikalen Rotationsachse
$M_{Rm}$	Reibmoment durch Lagerreibung im Hauptrotor
$M_{Rt}$	Reibmoment durch Lagerreibung im Heckrotor
$M_{Rv}$	Drehmoment der Lagerreibung der horizontalen Rotationsachse
$M_{Th}$	Drehmoment durch Torsion der Zuleitungen
$M_v$	Gesamtdrehmoment um die horizontale Drehachse
$M_{Zv}$	Drehmoment durch Zentrifugalkraft
$r$	Abstand zur Drehachse
$R$	Ankerwiderstand
$r_i$	Abstand des i-ten Teilchens vom Drehpunkt
$u$	speisende Spannung
$u_h$	speisende Spannung des Heckrotors
$u_q$	Ankerrückwirkungsspannung
$u_v$	speisende Spannung des Hauptrotor



# Anhang

## Daten des Triebwerks

### *Referenzdaten des verwendeten Triebwerks [32]; [54]*

Verdichter:	Druckverhältnis	$\pi_V$	6,5	
	isentropischer Wirkungsgrad	$\eta_V$	0,86	
	Volumen	$V_V$	0,1	m <sup>3</sup>
	Querschnitt/Längen-Verhältnis	$ge_{0V}$	0,3	m
Brennkammer:	Druckverlust	$\Delta\pi_{BK}$	5	%
	Ausbrandgrad	$\eta_{BK}$	0,99	
	Volumen	$V_{BK}$	0,142	m <sup>3</sup>
	Querschnitt/Längen-Verhältnis	$ge_{0BK}$	0,7	m
Turbine:	spez. Enthalpiegefälle	$\Delta h_{HT}$	233,4	kJ/kg
	isentropischer Wirkungsgrad	$\eta_T$	0,86	
	Volumen		0,057	m <sup>3</sup>
	Querschnitt/Längen-Verhältnis		0,3	m

---

Schubdüse:	Druckverlust	$\Delta\pi_{SD}$	5	%
	Volumen	$V_{SD}$	0,05	m <sup>3</sup>
	Austrittsfläche	$A_7$	0,157	m <sup>2</sup>
	Strömungsgeschwindigkeit	$c_7$	590,4	m/s
Rotor:	Drehzahl	n	8300	1/min
	Trägheitsmoment	J	70,5	kgm <sup>2</sup>

**Arbeitspunktdaten**

Luftmassenstrom	$\dot{m}_2$	51	kg/s
Brennstoffmassenstrom	$\dot{m}_{br}$	1	kg/s
Bleedluftmassenstrom	$\dot{m}_{bl}$	1	kg/s
Verdichtereintrittsdruck	$P_2$	101,3	kPa
Verdichteraustrittsdruck	$P_3$	658,7	kPa
Turbineneintrittsdruck	$P_4$	625,7	kPa
Turbinenaustrittsdruck	$P_5$	261,7	kPa
Schubdüsenaustrittsdruck	$P_7$	248,3	kPa
statischer Schubdüsendruck	$P_{s7}$	135,3	kPa
Verdichtereintrittstemperatur	$T_2$	288,15	K
Verdichteraustrittstemperatur	$T_3$	522,6	K
Brennkammeraustrittstemperatur	$T_4$	1200	K
Turbinenaustrittstemperatur	$T_5$	996	K
Schubdüsentemperatur	$T_7$	996	K
statische Schubdüsentemperatur	$T_{s7}$	844	K
Schubkraft		35,5	kN

*Linearisiertes Zustandsraummodell des Triebwerks*

$x_1$	=	$\dot{m}_2$
$x_2$	=	$P_3$
$x_3$	=	$T_3$
$x_4$	=	$\dot{m}_3$
$x_5$	=	$P_4$
$x_6$	=	$T_4$
$x_7$	=	$\dot{m}_4$
$x_8$	=	$P_5$
$x_9$	=	$T_5$
$x_{10}$	=	$\dot{m}_5$
$x_{11}$	=	$P_7$
$x_{12}$	=	$T_7$
$x_{13}$	=	$n$

**Tabelle 5.1:** Definition der Zustandsgrößen des Triebwerks

*Systemmatrix A:*



## Daten des Rotormodells

$l_t = 0,250 \text{ m}$	$k_{Am} = 1,00 \cdot 10^{-5} \text{ Ns}^2$
$l_m = 0,240 \text{ m}$	$m_a = 0,97 \text{ kg}$
$I_{tr} = 2,71 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$	$m_p = 0,092 \text{ kg}$
$I_{mr} = 1,80 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$	$k_{Lm} = 4,45 \cdot 10^{-7} \text{ Nms}$
$I_v = 3,30 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$	$k_{Rm} = 5,00 \cdot 10^{-6} \text{ Nms}^{-1}$
$I_h = 5,53 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$	$k_{Lt} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ Nms}$
$k_h = 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ Nms}$	$k_{Rt} = 4,00 \cdot 10^{-6} \text{ Nms}^{-1}$
$k_v = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ Nms}$	$k_T = 2,80 \cdot 10^{-3} \text{ Nmrad}^{-1}$
$d_{SA} = 11 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$L = 10,3 \cdot 10^{-2} \text{ H}$
$d_{SP} = 161 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$R = 10,5 \text{ } \Omega$
$k_{At} = 1,21 \cdot 10^{-6} \text{ Ns}^2$	$a = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

**Tabelle 5.2:** Konstanten des Rotormodells

### *Linearisiertes Zustandsraummodell des Rotors*

*Systemmatrix A für den Arbeitspunkt AP1:*

**Systemmatrix A für den Arbeitspunkt AP2:**

$$A = \begin{bmatrix} -0,373 & -0,0697 & -0,00256 & 0,224 & -1,64 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0,490 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,550 & 0 & 0 & 0 & 775 & 0 \\ 0,273 & 0 & 0 & -0,0379 & -5,22 & 0,0209 & -0,636 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,668 & 0 & 117 \\ 0 & 0 & -2,04 & 0 & 0 & 0 & -1019 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,04 & 0 & -1019 \end{bmatrix}$$

**Systemmatrix A für den Arbeitspunkt AP3:**

$$A = \begin{bmatrix} -0,357 & -0,0667 & 0,00269 & 0,182 & 0,0108 & 0 & 0 & 0,484 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,575 & 0 & 0 & 0 & 775 & 0 \\ 0,232 & 0 & 0 & -0,0379 & -5,06 & 0,0241 & -0,636 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,764 & 0 & 117 \\ 0 & 0 & -2,04 & 0 & 0 & 0 & -1019 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,04 & 0 & -1019 \end{bmatrix}$$

**Eingangsmatrix B für die Arbeitspunkte AP1, AP2 und AP3:**

*Ausgangsmatrix C für die Arbeitspunkte AP1, AP2 und AP3:*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Literaturverzeichnis

- [1] Antoulas, A. C:  
Mathematical System Theory  
Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1991
  
- [2] Athans, M.:  
The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control  
System Design  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1971, S. 529-551
  
- [3] Baehr, H. D.:  
Thermodynamik, siebente korrigierte Auflage  
Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1989
  
- [4] Bauerfeind, K.:  
Steuerung und Regelung der Turboflugtriebwerke  
Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin, 1999
  
- [5] Beer, P.:  
The Suppliers of Commercial Aircraft Engine Programmes and Plans for the Future  
DGLR-Jahrestagung in Hamburg, 2.-4. Oktober, Jahrbuch 1989 II, S. 653-688
  
- [6] Bernstein, S.; Hyland, D.C.:  
Optimal Projection Approach to Robust Fixed-Structure Control Design  
American Institute of Aeronautics and Astronautics, Chapter 10, 1990
  
- [7] Besser, R.:  
Technik und Geschichte der Hubschrauber, Band 1 und 2  
Bernard & Graefe Verlag, München, 1982
  
- [8] Böttiger, A.:  
Regelungstechnik  
Oldenbourg Verlag, München – Wien, 1998

- 
- [9] Böttiger, A.:  
Optimale Steuerungs- und Regelungssysteme  
Vorlesungsskript, Universität der Bundeswehr München, 1999
- [10] Bräunling, W.J.G.:  
Flugzeugtriebwerke  
Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 2001
- [11] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.; Musiol, G.; Mühlig, H.:  
Taschenbuch der Mathematik  
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1997
- [12] Bryson, A.E., Jr.; Ho, Y.C.:  
Applied Optimal Control  
Ginn, Waltham, Massachusetts, 1969
- [13] Chidambara, M.R.:  
On „A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems“  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, S. 119-120  
Davison, E.J.:  
Author's Reply  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, S. 120-121
- [14] Chidambara, M.R.:  
Further Remarks on Simplifying Linear Dynamic Systems  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, S. 213-214  
Davison, E.J.:  
Author's Reply  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, S. 214

- [15] Chidambara, M.R.:  
Further Comments on „A Method of Simplifying Linear Dynamic Systems“  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, S. 799  
Davison, E.J.:  
Author's Reply  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, S. 799  
Chidambara, M.R.:  
Further Comments by M.R. Chidambara  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, S. 799-800  
Davison, E.J.:  
Further Reply by E.J. Davison  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, S.800
- [16] Daniel, T.:  
Mathematische Modellierung eines Hubschraubermodells und Reglersynthese  
Studienarbeit, Universität – Gesamthochschule Paderborn, 1999
- [17] Davison, E.J.:  
A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, S. 93-101
- [18] Davison, E.J.:  
A New Method for Simplifying Large Linear Dynamic Systems  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1968, S. 214-215
- [19] De Hoff, R.L.; Hall, W.E., Jr.:  
Design of a Multivariable Controller for an Advanced Turbofan Engine  
IEEE Systems Identification & Control Div., 1976, S. 1002-1008
- [20] Dietzel, F.:  
Turbinen, Pumpen und Verdichter  
Vogel-Verlag, Würzburg, 1980

- 
- [21] Eckardt, D.:  
Swiss Compression – ein Beitrag zur Gasturbinen-Entwicklungsgeschichte  
Vortrag am 08.11.2001 an der TUM  
Alstom, Baden, Schweiz
- [22] Fasol, K.H.; Gehre, G.; Varga, A.:  
Anmerkungen zum Beitrag von R. Guth: Stationär genaue Ordnungsreduktion  
balancierter Zustandsraummodelle  
at – Automatisierungstechnik, 40, 1992, S. 270-271
- [23] Feedback Instruments Ltd:  
Twin Rotor MIMO System 33-007  
Feedback Instruments Ltd, Crowborough, 1998
- [24] Föllinger, O.:  
Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung  
Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1994
- [25] Gajewski, S. A.; Morosow, F. N.; Tichomirow, J.P.:  
Regelung der Luftstrahltriebwerke  
Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik, Berlin, 1984
- [26] Gassmann, H.:  
Theorie der Regelungstechnik  
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1998
- [27] Geering, H. P.:  
Regelungstechnik  
Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1994
- [28] Geßlein, R.; Stamm, C.:  
Erstellung einer Workbench am Beispiel Ordnungsreduktion  
at – Automatisierungstechnik, 49, 2001, S. 532-539

- 
- [29] Guth, R.:  
Stationär genaue Ordnungsreduktion balancierter Zustandsraummodelle  
at – Automatisierungstechnik, 39, 1991, S. 286-290
- [30] Hagen, H.:  
Fluggasturbinen und ihre Leistungen  
Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1982
- [31] Haim, M.:  
Entwurf von Beobachterreglern reduzierter Ordnung und Anwendung auf ein  
Triebwerksmodell  
Diplomarbeit am Institut, Universität der Bundeswehr München, 2002
- [32] Harrer, H.:  
Modellbildung, Systemanalyse und Entwicklung reduzierter Modelle zur dynamischen  
Simulation von Fluggasturbinen  
Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 1995
- [33] Harrer, H.:  
Ordnungsreduktion  
Richard Pflaum Verlag, München, 2002
- [34] Jakob C.:  
Modellbildung und Simulation eines Twin-Rotor-MIMO-Systems und Entwurf von  
Reglern reduzierter Ordnung  
Diplomarbeit am Institut, Universität der Bundeswehr München, 2002
- [35] Kautsky, J.; Nichols, N.K.; van Dooren, P.:  
Robust Pole Assignment in Linear State Feedback  
Int. J. Control, 41, 1985, S. 1129-1155

- [36] Kreiner, A.; Preiß, A.:  
Regelungs- und Überwachungskonzepte moderner Fluggasturbinen  
Vortrag am 16.11.2000, TU München  
[www.lfa.mw.tum.de/seminar\\_lfa00.pdf](http://www.lfa.mw.tum.de/seminar_lfa00.pdf)
- [37] Kuchling, H.:  
Taschenbuch der Physik  
Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München – Wien, 1996
- [38] Kwakernaak, H.; Sivan, R.:  
Linear Optimal Control Systems  
Wiley-Interscience, New York – London – Sydney – Toronto, 1972
- [39] Laub, A.J.:  
Computation of "Balancing" Transformations  
Proc. Joint Automat. Contr. Conf., 1980
- [40] Laub, A.J.; Heath, M.T.; Paige, C.C.; Ward, R.C.:  
Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of  
Simultaneous Diagonalization Algorithms  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1987, S. 115-121
- [41] Litz, L.:  
Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren  
Hochschulverlag Freiburg, 1979
- [42] Litz, L.:  
Modale Maße für Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Regelbarkeit und Dominanz-  
Zusammenhänge, Schwachstellen, neue Wege  
Regelungstechnik, 31, 1983, S. 148-158
- [43] Ludyk, G.:  
Theoretische Regelungstechnik 2  
Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1995

- 
- [44] Luenberger, D.G.:  
Observing the State of a Linear System  
IEEE Transactions on Military Electronics, 8, 1964, S. 74-80
- [45] Moore, B.C.:  
Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and  
Model Reduction  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, S. 17-32
- [46] Ostenrath, H.:  
Gasturbinen-Triebwerke  
Verlag W. Girardet, Essen, 1968
- [47] Papageorgiou, M.:  
Optimierung  
Oldenbourg Verlag, Wien, 1991
- [48] Pieske, R.:  
Benchmarking in der Praxis: erfolgreiches Lernen von führenden Unternehmen  
Verlag Moderne Industrie, 1995
- [49] Platz, T.:  
Reglerentwurfsverfahren für Mehrgrößensysteme und Simulation an einem  
Triebwerksmodell  
Diplomarbeit am Institut, Universität der Bundeswehr München, 2001
- [50] Reckling, L.:  
Reglerreduktionsverfahren für dynamische Systeme hoher Ordnung und Simulation an  
einem Triebwerksmodell  
Diplomarbeit am Institut, Universität der Bundeswehr München, 2001
- [51] Schnell, G.:  
Modellbildung und Simulation eines Twin-Rotor-Systems  
Diplomarbeit am Institut, Universität der Bundeswehr München, 2001

- [52] Schwarz, K.:  
Volle Leistung, Moderne Fighter-Triebwerke  
Flug Revue, Ausgabe Februar 2001
- [53] Stamm, C.:  
Erstellung einer dynamischen Workbench unter Matlab zum Benchmarking von  
Ordnungsreduktionsverfahren  
Diplomarbeit am Institut, Universität der Bundeswehr München, 2001
- [54] Thetmeyer, R.:  
Mathematische Modellerweiterung und Entwicklung einer objektorientierten  
Simulationsoberfläche für ein Gasturbinentriebwerk  
Diplomarbeit am Institut, Universität der Bundeswehr München, 1999
- [55] Tipler, P.A.:  
Physik  
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin – Oxford, 1998
- [56] Tzu-Cheng, L.; Yan-Shen, G.:  
Optimal Control of Change of State of Aircraft Turbine Engine  
ASME, Paper 85-IGT-53, 1985, S. 1-8
- [57] Yau, C.H.; Gallagher, J.E.; Nwokah, O.D.I.:  
A Model Reference Quantitative Feedback Design Theory Application to  
Turbomachinery  
International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4, 1994, S.181-210
- [58] Yousuff, A.; Skelton, R.E.:  
A Note on Balanced Controller Reduction  
IEEE Transactions on Automatic Control, 1984, S. 254-257

### ***Internetadressen***

- [59] <http://www.apostar.de/edrw/hubi.html>
- [60] [http://www.airpower.at/flugzeuge/eurofighter\\_typhoon.htm](http://www.airpower.at/flugzeuge/eurofighter_typhoon.htm)