

UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen

Instationäres Temperatur- und Strukturverhalten von Stabwerkstrukturen

Robert Kroyer

UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen

Thema der Dissertation: **Instationäres Temperatur- und Strukturverhalten
von Stabwerkstrukturen**

Verfasser: **Dipl.-Ing. Robert Kroyer**

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: **Univ.-Prof. Dr.-Ing. Diethard Könke**
1. Berichterstatter: **Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ingbert Mangerig**
2. Berichterstatter: **Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Klaus Thoma, EMI Freiburg**

Tag der Prüfung: **22. Juni 2007**

Mit der Promotion erlangter akademischer Grad:

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

Neubiberg, den 22. Juni 2007

Zusammenfassung

Die Auslegung und Bewertung von Strukturen unter Einwirkung hoher Temperaturen ist für das Ingenieurwesen ein Thema mit hohem Forschungsbedarf. Dieses Themengebiet beinhaltet Fragestellungen mit komplexer multidisziplinärer Interaktion der klassischen Fachdisziplinen Strukturmechanik, Werkstoffwissenschaften, Strömungsmechanik und Konstruktionsmethodik. Durch eine definierte Zuweisung von technisch-wissenschaftlichen Phänomenen z.B. Verformungsberechnung mit den Methoden der Statik und Dynamik oder die Berechnung der Wärmeverteilung in Strukturen mittels Feldtheorien ist es möglich spezifische Fragestellungen zu lösen. Dafür stehen analytische und numerische Verfahren zur Verfügung.

In dieser Arbeit wurde exemplarisch an einer Gittersteuerfläche, einem Beispiel aus der Luft- und Raumfahrt aufgezeigt, welche Anforderungen sich an eine thermisch-mechanische Strukturauslegung ergeben, wenn das Bauteil extremen aerothermischen Aufheizungen ausgesetzt ist. Unter Verwendung von existierenden Verfahren und Algorithmen wurde eine Berechnungsmethode auf Basis von Finiten Elementen entwickelt, die es erlaubt, die wesentlichen Einflussparameter für eine Strukturbewertung zu analysieren. An ausgewählten, repräsentativen Stabwerkmodellen wurden Referenzbeispiele berechnet und Effekte dargestellt, welche für die Konstruktion und Berechnung von maßgebender Bedeutung sind.

Eine Erweiterung der Methode auf komplexere Berechnungsmodelle durch Einbeziehung von ebenen und räumlichen Elementen und erweiterte Werkstoffmodelle ist möglich.

Abstract

The design and evaluation of structures due to high temperature loads represent a field of high research potential for engineering application. This field of research includes application areas with complex multidisciplinary interactions of classical methods in structural mechanics, materials science, fluid mechanics and design. An in advance assignment of technical phenomena, i.e. analysis of structural deformation using static and dynamic methods or the calculation of temperature fields using field theories allows the solution of specific problems. Numerous analytical and numeric methods are available.

In this thesis the requirements for the thermo-mechanical design of a complex aerospace application, a lattice fin, subjected by extreme aerodynamic heating is presented. Using existing methods based on finite element technology a procedure to investigate significant influence parameters for structural evaluation were developed. For some selected representative truss structures reference examples were calculated and effects which are relevant for the design and analysis of truss structures are discussed.

The extension of this method to more complex analysis models including two- or three-dimensional elements and extended material models is possible.

Danksagung

Die Motivation zu dieser Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeiten als Entwicklungsingenieur für Strukturmechanik/Strukturdynamik.

Mein Dank für die Unterstützung dieser Arbeit gilt

Herrn Prof. Dr.-Ing. Ingbert Mangerig für sein Interesse am Thema der Temperatur-Struktur-Interaktion sowie für die kritische Durchsicht des Manuskripts. Die konstruktiven Gespräche, Anregungen und fachlichen Diskussionen im Rahmen dieser Arbeit waren eine stetige Motivation zum Gelingen dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. Klaus Thoma, Leiter des Ernst-Mach-Instituts für Kurzzeitphysik (EMI) für die Übernahme des Koreferates, der kritischen Durchsicht des Manuskripts, die wertvollen Anregungen zur Gestaltung der Arbeit und sein persönliches Engagement die Forschungsarbeiten an Gitterleitwerken zu unterstützen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Diethard Könke, indem er mich stets motiviert hat schwierige Aufgaben zu übernehmen und durchzuführen und mir im Rahmen meiner Tätigkeit an der Universität der Bundeswehr stets Gelegenheit zum wissenschaftlichen Arbeiten ermöglicht hat, sowie für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

Herrn Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. E.h., Dr. h.c. mult. Klaus Jürgen Bathe (MIT) für die langjährige Zusammenarbeit, die fruchtbare Unterstützung bei der Lösung von schwierigen Aufgaben in der Fluid- und Kontinuumsmechanik und die nachhaltige Motivation zur Erstellung einer Dissertation.

Herrn Dipl.-Ing. Peter Gleich, EADS/LFK, Chefingenieur für Aerodynamik, sowohl für die jederzeit fachlich kompetenten Gespräche zum Thema Gitterleitwerke als auch die wertvollen Diskussionen zur Thematik von Hochgeschwindigkeitsflugkörpern.

Meinen Eltern, Adolf und Margarete Kroyer, indem sie mir ein Studium der Ingenieurwissenschaften ermöglicht haben.

Meiner Frau Gabriele für die Geduld während der Erstellung dieser Arbeit, ihr Verständnis für meinen Beruf sowie für den Verzicht auf viele gemeinsame Stunden.

Meinen beiden Kindern Robert Maximilian und Michael Sebastian für Zeit, die sie mir zur Erstellung dieser Arbeit eingeräumt haben. Ihnen sei diese Arbeit gewidmet.

München, Juni 2007

Robert Kroyer

Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG, MOTIVATION UND ZIELSETZUNG.....	6
1.1	EINLEITUNG UND MOTIVATION	6
1.2	GITTERSTEUERFLÄCHE	10
1.3	ZIELSETZUNG.....	11
2	STAND DER WISSENSCHAFT.....	13
2.1	GITTERSTEUERFLÄCHE	15
2.2	WÄRME- UND TEMPERATURBERECHNUNG	23
2.3	INSTATIONÄRE TEMPERATURBERECHNUNG MIT FE-METHODEN	27
2.4	STRUKTURBERECHNUNG	28
2.5	STRUKTURBERECHNUNG ZEITABHÄNGIGER VORGÄNGE MIT FE-METHODEN.....	31
2.6	TEMPERATUR-STRUKTUR-KOPPELUNG	35
2.7	WERKSTOFFFESTIGKEIT.....	37
2.8	WÄRMEQUELLEN.....	42
2.8.1	Aerodynamische Aufheizung	42
2.8.2	Brandbelastung.....	47
2.9	EXTERNE LASTEN	48
2.10	HOCHTEMPERATURWERKSTOFFE.....	50
3	BERECHNUNGSMODELLE GITTERSTEUERFLÄCHE	53
3.1	STATISCHES TRAGSYSTEM GITTERSTEUERFLÄCHE.....	53
3.2	VERFORMUNGSVERHALTEN VON GITTERSTEUERFLÄCHEN	55
3.3	BEDEUTUNG DER FLUID-STRUKTUR-WECHSELWIRKUNG.....	58
4	EXPERIMENTELLE METHODEN.....	63
4.1	FORSCHUNG UND SACHSTAND.....	63
4.2	INGENIEURVERSUCHE.....	65
5	NUMERISCHES MODELL ZUR TEMPERATUR-STRUKTUR-INTERAKTION.....	68
5.1	ALLGEMEINE DARSTELLUNG	68
5.2	TEMPERATUR-STRUKTUR-KOPPELUNG	70
5.3	BESCHREIBUNG DES BERECHNUNGSMODELLS	70
5.4	ÄUßERE KRÄFTE UND WÄRMESTROM.....	72
5.5	NUMERISCHES BERECHNUNGSVERFAHREN.....	73
6	GEKOPPELTE SIMULATION DER TEMPERATUR-STRUKTUR-INTERAKTION.....	78
6.1	EINDIMENSIONALE DRUCKBEANSPRUCHUNG UND AUFHEIZUNG AN PROFILEN	78
6.2	STABWERKSTRUKTUR UNTER KOMBINIRTER BELASTUNG	87
6.3	GITTERFACHWERK.....	94
7	ANWENDUNGSGEBIETE.....	99
8	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	102
8.1	ZUSAMMENFASSUNG	102
8.2	AUSBLICK.....	103
9	LITERATUR	105
10	NOTATION	113

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1, Schlierenaufnahmen aus Untersuchungen zur Struktur- und Temperaturbelastung an einem spitzen und einem stumpfen Körper im Mercury-Projekt der NASA.....	6
Abb. 2: Strukturteilchen infolge thermisch-mechanischer Beanspruchung	7
Abb. 3: Profilquerschnitt nach Flammbeanspruchung am Wehrwissenschaftlichen Institut für Werk-, Explosiv- und Betriebsstoffe (WIWEB).....	8
Abb. 4: East Face of WTC 2 9:26:25 am, © Mark Stetler 2001	9
Abb. 5: Lattice Fin.....	10
Abb. 6: Gitterflügel im Windkanal	10
Abb. 7: Schema zur Temperatur-Struktur-Analyse (entkoppelt !)	13
Abb. 8: Schema zur Temperatur-Struktur-Analyse (gekoppelt !)	14
Abb. 9: Dreideckerflugzeug vor 1918	15
Abb. 10: Gitterflügelkonstruktionen nach RESHETCHATYE KRY'LA (Gittertragflügel nach <i>Belotserkovskiy, S.M.</i>).....	15
Abb. 11: Thematische Interaktionen zur Bewertung von Gittersteuerflächen im Hyperschallbereich	21
Abb. 12: Prototypen von Gittersteuerflächen [EADS/LFK-Lenkflugkörpersysteme GmbH].....	22
Abb. 13: FE-Modell einer Gittersteuerfläche [Starrer Anschluss am Trägersystem]	22
Abb. 14: Balkenelement mit ungleichmäßiger Temperaturbelastung	28
Abb. 15: Bi-Lineare Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (Uniaxial).....	39
Abb. 16: Idealierte Spannungs-Verzerrungs-Beziehung infolge Temperatur für bilineares Werkstoffverhalten.....	40
Abb. 17: Idealierte Beziehungen zwischen Spannungen und plastischen Verzerrungen infolge Temperatur	40
Abb. 18: Strömungsprofile im Überschallbereich /NASA/	42
Abb. 19: Temperaturverlauf im Staupunkt für Strömungsgeschwindigkeiten $1,0 < \text{Mach} < 7,0$ unter Idealgasbedingungen ($\gamma=1,4$).....	43
Abb. 20: Anwendungsgebiete für Hochtemperaturwerkstoffe.....	50
Abb. 21: Gittersteuerfläche nach Schubfeldanalogie.....	53
Abb. 22: Gittersteuerfläche unter Quer- und Temperaturbelastung.....	55
Abb. 23: Verformungsgeschichte Gitterstruktur (Starrer Anschluss)	57

Abb. 24: Verformte Gitterstrukturen nach Windkanalversuchen ($1,8 \leq Ma \leq 4,0$).....	58
Abb. 25: FE-Modell für die Berechnung einer 2D-Fluid-Struktur-Interaktion, dargestellt mit Strukturverformung infolge Durchströmung	59
Abb. 26: Instationäres Verformungsverhalten von gekoppelten Profillamellen bezogen auf den unverformten Profilquerschnitt mit Geschwindigkeitsvektoren	60
Abb. 27: Verformungsverhalten Sektion A.....	60
Abb. 28: Verformungsverhalten Sektion B.....	61
Abb. 29: Verformungsverhalten Sektion C	61
Abb. 30: Verformungsverhalten Sektion D	61
Abb. 31: Eigenschwingungs- und Frequenzverhalten an Gitterleitwerk - Mode 1 bis Mode 4.....	64
Abb. 32: Prüfling für Aufheizversuch	65
Abb. 33: Temperaturbelastung an geschärfter Profilkante, Prüfling (gedrehte Lage) nach Versuch 1	66
Abb. 34: Temperaturbelastung an angeschärfter und stumpfer Profilkante, Prüfling (gedrehte Lage) nach Versuch 2 und Versuch 3.....	66
Abb. 35: Vorgehensmodell zur Strukturauslegung	69
Abb. 36: Exemplarische Vernetzung zur Struktur- und Thermal-Modellierung	71
Abb. 37: Ablaufdiagramm der numerischen Temperatur-Struktur-Koppelung	77
Abb. 38: Profilbeanspruchung durch gleichzeitige Einwirkung von Druck- und Wärmestrombelastung.....	78
Abb. 39: Numerisches Berechnungsmodell für unterschiedliche Profilgeometrien...	78
Abb. 40: Druckkraft- und Wärmestromverlauf (Vorgabe).....	80
Abb. 41: Berechnetes Wärmestrom-Zeit-Verhalten in Profil A.....	81
Abb. 42: Berechnetes Wärmestrom-Zeit-Verhalten in Profil B.....	81
Abb. 43: Verhältnis der Wärmeströme in Profil B/Profil A.....	82
Abb. 44: Berechnete Temperaturverteilung in den Elementknoten von Profil A	82
Abb. 45: Berechnete Temperaturverteilung in den Elementknoten von Profil B	83
Abb. 46: Temperaturverhältnis Profil B / Profil A	83
Abb. 47: Axialspannungen in Profil A	84
Abb. 48: Axialspannungen in Profil B	84
Abb. 49: Knotenverformung Profil A und Profil B.....	85
Abb. 50: Verhältnis der Knotenverformungen von Profil B zu Profil A	85
Abb. 51: Fachwerksystem	87

Abb. 52: Wärmestromverlauf (Vorgabe)	89
Abb. 53: Verformungsverhalten der Knotenpunkte 102 und 201 in z-Richtung	89
Abb. 54: Zeitliche Änderung des Frequenzverhaltens in der Fachwerkstruktur bei Erwärmung.....	90
Abb. 55: Temperaturverlauf in den Fachwerkelementen	90
Abb. 56: Axialspannungen in den Fachwerkstäben bei Wärmeeintrag in ein harmonisch schwingendes Tragwerk.....	91
Abb. 57: Verformungsverhalten der Strukturknoten im Fachwerk	92
Abb. 58: Fachwerkverformung zum Zeitpunkt $t = 3,6$ [s]	92
Abb. 59: Knoten und Elemente am Gitterfachwerk.....	94
Abb. 60: Wärmestromverlauf (Vorgabe)	95
Abb. 61: Akkumulierte plastische Verzerrung an einem Gitterfachwerkelement.....	96
Abb. 62: Fließspannungsverhalten von Gitterfachwerkelementen.....	96
Abb. 63: Zeitverhalten der ersten Eigenfrequenz, Gitterfachwerk	97
Abb. 64: Zeitverhalten der zweiten Eigenfrequenz, Gitterfachwerk	98
Abb. 65: Spannungsverteilung am Rumpf eines Hochgeschwindigkeitsflugkörpers mit Gitterleitwerken infolge aerodynamischer Luftkräfte [EADS/LFK-Lenkflugkörper- systeme GmbH]	99
Abb. 66: Plastische Verzerrung an einer Gitterstruktur (Detail)	99
Abb. 67: Belageinbau an Fahrbahnoberseite und Thermographieaufnahme der Temperaturverteilung an Brückenunterseite infolge Heißeinbau von Gussasphalt	101

Tabellen

Tabelle 1: Werkstoffkennwerte INCONEL Stahl für Strukturanalyse	57
Tabelle 2: Temperaturbelastung und maximale Strukturverformung	57
Tabelle 3: Einsatzbereiche metallischer DMS	64
Tabelle 4: Angenommene Zeitfunktion für den konvektiven Wärmeübergang.....	72
Tabelle 5: Finite Elemente Definition für Profilquerschnitte	79
Tabelle 6: Werkstoffkennwerte von INCONEL Stahl für die Strukturberechnung	79
Tabelle 7: Werkstoffkennwerte von INCONEL Stahl für die Wärmeleitung	80
Tabelle 8: Werkstoffkennwerte S235 JO - Strukturberechnung.....	88
Tabelle 9: Werkstoffkennwerte S235 JO - Wärmeleitung	88
Tabelle 10: Statische Berechnung Fachwerk infolge Eigengewicht.....	93
Tabelle 11: Knotenkoordinaten - Gitterfachwerk.....	95
Tabelle 12: Frequenzverhalten - Gitterfachwerk.....	97

1 Einleitung, Motivation und Zielsetzung

1.1 Einleitung und Motivation

Die Entwicklung und Anwendung von numerischen Berechnungsverfahren und Methoden zur Bearbeitung von technischen Aufgabenstellungen hat in den vergangenen drei Jahrzehnten eine enorme Bedeutung für das Ingenieurwesen in allen Anwendungsgebieten erreicht. Die Möglichkeiten zur Bearbeitung von komplexen Themen scheinen sich kontinuierlich weiter zu entwickeln. Im Bereich des Bauingenieurwesens, des Maschinenbaus und der Luft- und Raumfahrt sind leistungsfähige Programme zur Struktur- und Strömungsberechnung sowie zur Thermalanalyse vorhanden. Trotzdem zeigt sich, dass sich bei der Auslegung, Dimensionierung sowie der endgültigen Nachweisführung von Strukturen bezüglich komplexer Anforderungen infolge gleichzeitig einwirkender statischer, dynamischer und thermischer Beanspruchung selbst bei Verfügbarkeit von leistungsfähigen Verfahren und Berechnungsprogrammen Ergebnisse einstellen, die sich keineswegs eindeutig bewerten lassen. Sind die Anforderungen stationär und linear, so lassen sich in den meisten Fällen noch Ersatzmodelle bilden, berechnen und mittels Variation von ausgewählten Einflussgrößen bewerten. Die Betrachtung von instationären Vorgängen mit ggf. nichtlinearen Einflussfaktoren unter Verwendung von numerischen Methoden ist grundsätzlich durchaus möglich, stellt jedoch an den Berechnungsingenieur erhebliche Anforderungen und setzt die Kenntnis sowohl der physikalischen Zusammenhänge als auch der angewendeten Verfahren und Methoden voraus. Eine eigene Erweiterung von verfügbaren Berechnungsprogrammen auf individuelle Fragestellungen ist kaum möglich.

Spezielle Herausforderungen zum Einbringen dieser Methoden ergeben sich dennoch, wenn es sich z. B. um die Entwicklung von Prototypen in der Luft- und Raumfahrt handelt, siehe [Abb. 1](#). Das Verständnis der physikalischen Zusammenhänge, wie sie an umströmten Körpern beim gleichzeitigen Auftreten von aerodynamischen Strömungskräften, einer Strukturaufheizung infolge Grenzschichtreibung und im Tragverhalten der Struktur auftreten, erfordert eine ganzheitliche Betrachtung.

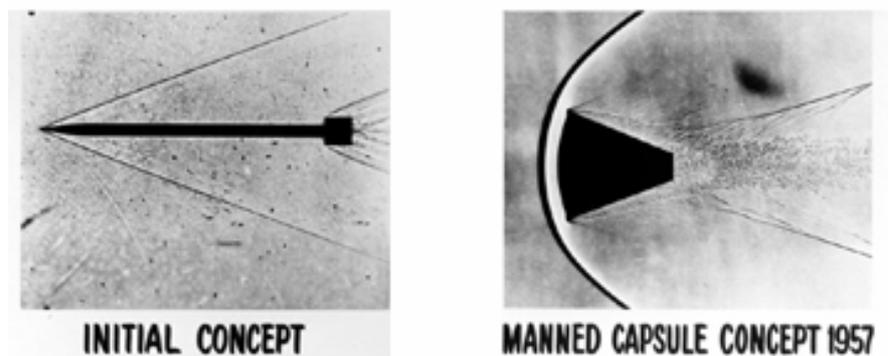


Abb. 1, Schlierenaufnahmen aus Untersuchungen zur Struktur- und Temperaturbelastung an einem spitzen und einem stumpfen Körper im Mercury-Projekt der NASA

Bei Fragestellungen dieser Art ist es erforderlich, Analysen und Bewertungen über mehrere Themengebiete, wie z.B. Statik/Dynamik/Thermodynamik und Werkstoffwissenschaften, durchzuführen, wobei eine Lösung der zu bewertenden Zusammenhänge durchaus im Grenzbereich vorhandener Erfahrung liegen kann.

Treten nun interdisziplinäre Vorgänge zu gleichen Zeiten auf, so erfordert dies ein deutlich erweitertes Berechnungsmodell und erhöht gleichzeitig die Komplexität der Ergebnisbewertung. Hierzu zeigt [Abb. 2](#) in einer schematischen Darstellung den Bewegungsablauf eines materiellen Strukturteilchens und welche Einflüsse in einer zeitabhängigen Betrachtung zu berücksichtigen sind.

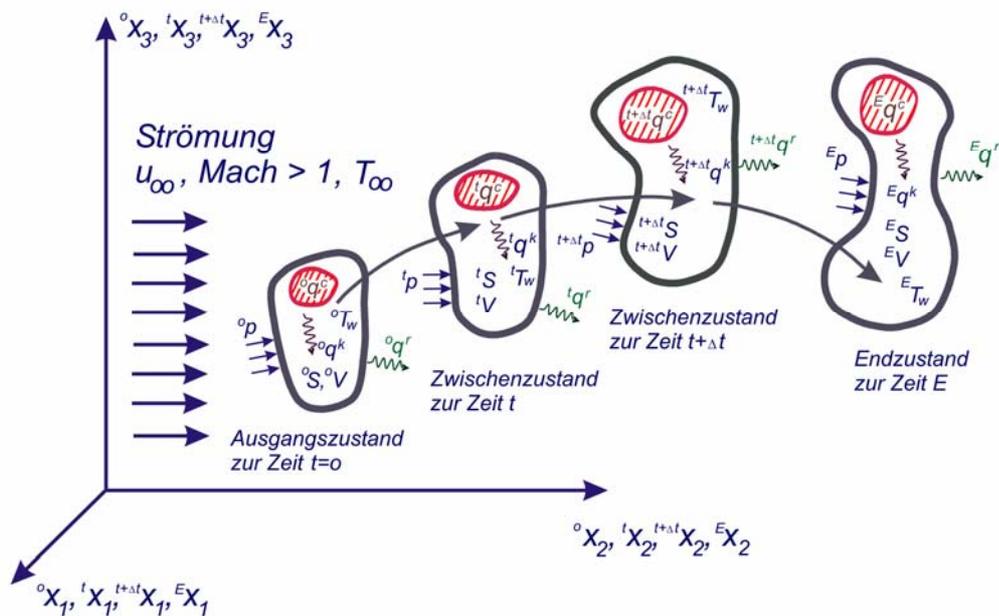


Abb. 2: Strukturteilchen infolge thermisch-mechanischer Beanspruchung

Bei den Beanspruchungen in [Abb. 2](#) entspricht q^c dem konvektiven Wärmestrom, q^k dem Wärmestrom infolge Wärmeleitung, q^r der Wärmestrahlung und p der äußeren Druckbelastung. Mit S ist die Oberfläche, mit V das Volumen und mit T_w die Oberflächentemperatur der Körpers definiert.

Wie zwingend erforderlich es ist, die Auswirkungen von Effekten wie sie in [Abb. 2](#) angedeutet sind zu verstehen, kann an einem Flügelquerschnitt demonstriert werden. Für eine Anwendung im Überschallbereich wurden an dünnwandigen Profilquerschnitten Machbarkeitsversuche durchgeführt, um einige der beschriebenen Phänomene durch Flammeinwirkung auf experimentellem Weg zu erzeugen und zu untersuchen. Die Ergebnisse der Versuche waren, wie in [Abb. 3](#) zu erkennen ist, angefangen von Bauteilerosion bis hin zur Materialaufschmelzung so unterschiedlich, dass sie als Auslegungskriterium nur bedingt eingesetzt werden konnten.

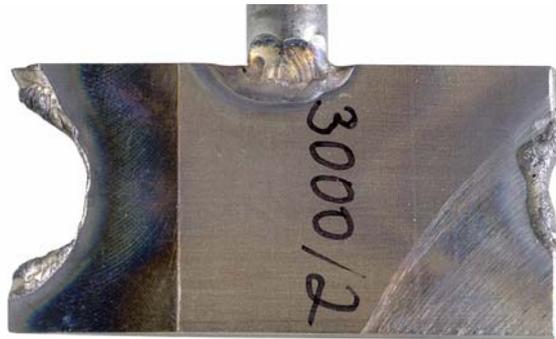


Abb. 3: Profilquerschnitt nach Flammbeanspruchung am Wehrwissenschaftlichen Institut für Werk-, Explosiv- und Betriebsstoffe (WIWEB)

Es ist durchaus vorstellbar, dass beim Auftreten solcher Zustände, wie sie als Ergebnis aus den Flammversuchen entstanden sind, die ursprünglich vorgesehenen Konstruktions- und Auslegungskriterien, sowie der Gültigkeitsbereich von verwendeten Berechnungsmodellen, überschritten werden.

In Bezug auf die Kritikalität der Anforderung ergeben sich vergleichbare Zusammenhänge im Bauwesen bei Brandeinwirkung. Die Kombination von extremer Hitzeentwicklung mit schnell auftretenden Strukturverformungen erzeugt hohe Tragwerksbeanspruchungen. Ist das Brandverhalten gekoppelt an Explosionsvorgänge, sind ebenfalls hohe Druckbeanspruchungen und Druckausbreitungsgeschwindigkeiten zu erwarten.

Da im Bereich des Bauwesens sowohl Kriterien der Energieversorgung, Schutz der Umwelt als auch der Schutz von Personen und fremden Eigentum im Vordergrund stehen, ist das Verhalten von Strukturen und Gebäuden infolge einer thermischen Beanspruchung stets von grundsätzlichem Interesse.

In Anwendungsbereichen, in denen die Sicherheit von Menschen und fremden Eigentums betroffen ist, ist es unerlässlich Regeln und Kriterien zu definieren, bei deren Ausformung mit großer Sorgfalt vorzugehen ist. Hierzu wurde speziell im Bereich des Bauwesens eine Vielzahl von Regelwerken geschaffen, bei deren Einhaltung es gelingt, in Brandfällen noch geeignete Gegenmaßnahmen zu ergreifen. Dies konnte aber nur geschaffen werden, da sich die Kenntnis über mögliche Wärmequellen, Bauweisen, Werkstoffe, Nachweis- und Prüfmethode kontinuierlich weiterentwickelt und verfeinert hat.

In anderen Bereichen wie z.B. dem Maschinenbau sowie der Luft- und Raumfahrttechnik, ist die Behandlung der Temperatur-Struktur-Interaktion auf individuelle Anwendungen bezogen und es bedarf einer aufwendigen Prototypenentwicklung um technische Risiken auf ein Minimum zu reduzieren, was u.a. für das Hitzeschild bei Wiedereintrittskörpern zutrifft.

Als zusätzliche, jedoch meist dominierende Zielsetzung, stellt sich die Forderung zur Entwicklung von gewichtsoptimierten Bauteilen mit hohen Festigkeitseigenschaften heraus. Dies bedeutet, dass sich speziell für die konstruktive Auslegung eines Bauteils keinesfalls querschnittlich Regelwerke erstellen lassen.

Als weitere Vereinfachung wird bei den meisten Konstruktionen davon ausgegangen, dass sich die thermisch-mechanische Bauteilbeanspruchung entkoppelt betrachten lässt, d.h. es wird nur das temperaturabhängige Werkstoffverhalten berücksichtigt. Wie bereits aus [Abb. 2](#) entnommen werden kann, ist zusätzlich neben den materiellen und örtlichen Anforderungen auch noch der zeitliche Ablauf von Ereignissen als Bewertungsgröße mit in die Auslegung einzubeziehen, da die meisten in Betracht kommenden Werkstoffe nur ein begrenztes Widerstandsvermögen in Bezug auf Temperatureinwirkung besitzen.

Gelten Voraussetzungen auf Grundlage von Musterzulassungen oder Regelwerken aus unvorhersehbaren Gründen, wie z.B. Anschlag auf das WTC (World Trade Center) in New York, Sep. 2001, siehe [Abb. 4](#), nicht mehr, so ist eine Abschätzung zum Tragverhalten von Strukturen außerordentlich schwierig.



Abb. 4: East Face of WTC 2 9:26:25 am, © Mark Stetler 2001

Gründe hierfür können sein

- die Bestimmung von Lage und Anzahl der Wärmequellen einschließlich der Intensität,
- die Abschätzung von Vorschädigungen, z.B. defekte Wärmeschutzverkleidungen,
- die Interaktion von internen und externen Strömungsverhältnissen aufgrund der beschädigten Gebäudeaußenhaut.

Vergleichsweise komplizierte Verhältnisse sind zu betrachten, wenn unerwartet hohe Wärmeströme durch aerothermische Aufheizungen infolge struktureller Vorschädigungen entstehen, und dann Unglücksfälle, z.B. wie den Absturz der Columbia Raumfähre im Jahre 2003 verursachen.

1.2 Gittersteuerfläche

Als ein außergewöhnlicher Anwendungsfall zur Interaktion von zuvor aufgeführten Zusammenhängen kann die Analyse von Gittersteuerflächen aus dem Bereich Luft- und Raumfahrttechnik in der Hyperschallanwendung genannt werden.

Für die Steuerung von Flugapparaten im Hochgeschwindigkeitsbereich werden derzeit erhebliche Anstrengungen unternommen, um Steuerflächen mit Gitterstrukturen einzusetzen. Diese Gitterstrukturen, wie sie in [Abb. 5](#) und [Abb. 6](#) dargestellt sind, zeigen in bestimmten Einsatzbereichen aus rein aeromechanischer Sicht grundsätzliche Vorteile gegenüber den bisher gebräuchlichen planaren Steuerflächen. Zu untersuchen wie sich diese Gittersteuerflächen realisieren lassen und welche technischen Fragestellungen dabei zu lösen sind, ist von großem Interesse.

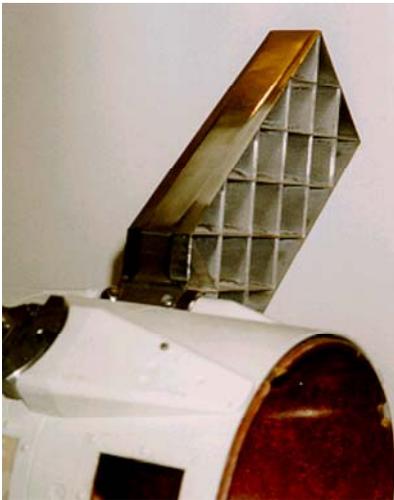


Abb. 5: Lattice Fin

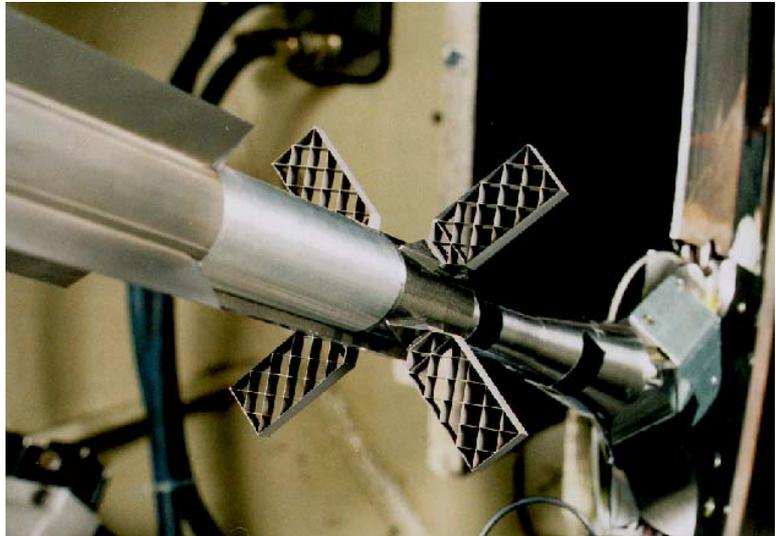


Abb. 6: Gitterflügel im Windkanal

Für die Auslegung und den Einsatz solcher Gittersteuerflächen, speziell im hohen Überschallbereich für $Mach > 3,0$, sind keine Standardauslegungskriterien vorhanden.

Zunächst scheint bei rein disziplinärer Betrachtung die Bearbeitung dieser Fragestellung mittels Methoden der Mechanik einfach durchführbar. Eine genauere Betrachtung jedoch zeigt, dass sich eine eindeutige Gewichtung der dimensionierenden Einflussfaktoren schwierig gestaltet. Die Gründe hierfür sind

- extrem hohe Strömungsgeschwindigkeiten, gekoppelt mit hoher aerothermischer Aufheizung
- komplexe Strömungsvorgänge
- kombinierte äußere statisch bestimmte Lagerung mit hoher innerer statischer Unbestimmtheit

- hohe Anforderung an Steifigkeit bezüglich Verformungs- und Schwingungsverhalten
- extreme Festigkeitsanforderungen an die verwendeten Werkstoffe
- hohe Anforderung an Fertigungsgenauigkeit und Maßhaltigkeit.

Es ist sehr einfach zu erkennen, dass sich die genannten Kriterien extrem zeitabhängig und nichtlinear verhalten können. Gleichzeitig beeinflussen sich diese Anforderungen mit unterschiedlicher Gewichtung der Fachdisziplinen gegensinnig, d.h. eine hohe Gitterdichte infolge hoher Steifigkeitsanforderung erhöht den aerodynamischen Widerstand und vergrößert die effektive Staupunktfläche, was wiederum eine Erhöhung des Wärmeeintrags zur Folge hat.

1.3 Zielsetzung

Die ganzheitliche Betrachtung zur Auslegung von thermisch beanspruchten Strukturen zeigt sehr schnell, dass eine konventionelle Vorgehensweise nicht zielführend ist. Die Bestimmung und Zusammenfassung von optimalen, aber disziplinär erarbeiteten Einzelergebnissen für die zuvor aufgeführten Einflussparameter ergibt keine klare Lösungsstrategie für Fragestellungen dieser Art. Die Auslegung einer Gittersteuerfläche mittels klassischen Methoden der Mechanik oder auf experimenteller Basis stößt sehr schnell an Grenzen der Realisierbarkeit. Für tragfähige Strukturkonzepte ist es unabdingbar, auf numerische Verfahren und Methoden zurückzugreifen, wie sie in den vergangenen Jahrzehnten entwickelt und erprobt wurden. Selbst wenn leistungsfähige Programme die Fähigkeit zur Berechnung von komplexen Zusammenhängen anbieten und ermöglichen, ist es zweckmäßig, die technisch-wissenschaftlichen Zusammenhänge nochmals aufzugreifen und in ihrer ganzen Vernetzung darzustellen. Das gilt speziell dann, wenn die Berechnungsergebnisse Bestandteil eines Entwicklungsprozesses sind oder die eingesetzten Methoden möglicherweise die Grenze ihrer Anwendbarkeit erreichen.

Die Bearbeitung der zuvor beschriebenen Themengebiete erfordert einen ganzheitlichen Lösungsansatz der in allen mitwirkenden Einzeldisziplinen maßgebend ist und nach Möglichkeit primären Einflusscharakter zeigt. Dazu ist es nahe liegend, die Temperatur gekoppelt an das Zeitverhalten als dominierende Einflussgröße zu definieren.

Im Allgemeinen muss ein Entwurf zur mechanisch-konstruktiven Gestaltung einer Struktur existieren, bevor eine Untersuchung auf ihr Verhalten in Bezug auf äußere Einwirkungen durchgeführt werden kann. In diesem Zusammenhang ist die thermisch-mechanische Interaktion von besonderer Bedeutung. Alle zu bewertenden Parameter sind in unterschiedlichster Weise eine Funktion der Temperatur. Diese Bedeutung erscheint auch sinnvoll, wenn die Temperatur als Einflussgröße nicht immer einen unabhängigen Charakter hat. Dies ist zutreffend, wenn in einer Wärmeübertragungsanalyse die Temperatur als Funktion des Wärmestroms und der Werkstoffeigenschaften erst berechnet werden muss.

Ziel dieser Arbeit ist es, Effekte und Einflussparameter der Temperatur-Struktur-Interaktion auf Basis des Wärmestroms unter Einbeziehung des Werkstoffverhaltens an ausgewählten Beispielen zu verdeutlichen.

Unter Verwendung von ausgewählten Stabwerksmodellen sollen verfügbare, wissenschaftliche Erkenntnisse und Methoden in ein zusammenhängendes Berechnungsmodell übergeführt werden. Gleichfalls sollte es möglich sein, komplizierte Zusammenhänge und Anforderungen an einfachen Prinzipbeispielen zu demonstrieren. Numerische Simulationen sollen effizient durch Anpassung von wenigen Kenngrößen ermöglicht werden.

Das Beispiel einer Gittersteuerfläche in der Hochgeschwindigkeitsanwendung ist geeignet um wesentliche Interaktionen einer thermo-mechanischen Betrachtung aufzuzeigen. Innerhalb der Arbeit wird jedoch auf weitere Anwendungsfälle verwiesen um die Übertragbarkeit der Zusammenhänge in andere Bereiche zu berücksichtigen.

2 Stand der Wissenschaft

Da in dieser Arbeit Erkenntnisse aus mehreren Fachdisziplinen miteinander verknüpft werden, erscheint es sinnvoll, zunächst die wesentlichen Grundlagen von Temperatur- und Strukturanalysen darzustellen. Aufgrund dessen, dass Temperaturbetrachtungen eng an strömungsmechanische Vorgänge gekoppelt sind, wird an speziellen Anknüpfungspunkten auch auf die Interaktion mit Strömungsberechnungen verwiesen, ohne die Effekte des Strömungsverhaltens weiter zu vertiefen. Wegen der Vielzahl von Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der numerischen Temperatur- und Strukturberechnung beschränkt sich die nachfolgende Darstellung ausschließlich darauf, grundlegende Zusammenhänge zum Verständnis der Komplexität wiederzugeben.

Für ausgewählte technische Anwendungen, z.B. Brandschutz nach DIN18230-1/2/3, DIN 4102-2/4 und VDS 2827, ist es möglich, das Temperaturverhalten von Strukturen als Feldproblem entkoppelt vom mechanischen Verhalten der Struktur anzunehmen. Ausnahmen hiervon sind z.B. Vorgänge, wie sie bei der Umformung von Metallen auftreten. Solche Vorgänge werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Die standardisierte, sequentielle Vorgehensweise, wie sie für die Berechnung von temperaturbeanspruchten Bauteilen angewendet wird, ist in vereinfachter Weise in [Abb. 7](#) dargestellt.

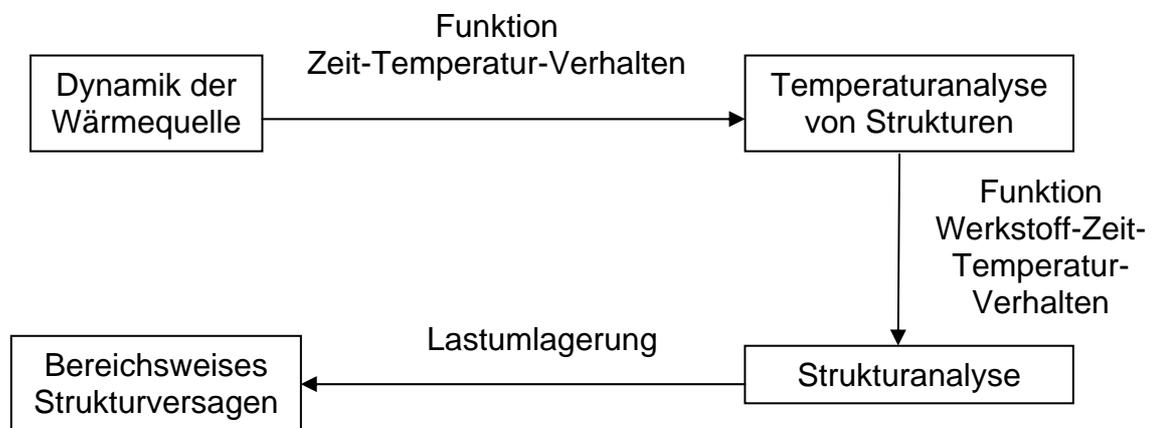


Abb. 7: Schema zur Temperatur-Struktur-Analyse (entkoppelt !)

Zeigt das Ergebnis der Analyse ein mögliches Strukturversagen, so wird im Allgemeinen die Bauweise verändert und/oder ein Werkstoff mit verbesserten Eigenschaften gewählt. Anschließend werden die anzuwendenden Berechnungsvorschriften entsprechend oft wiederholt, bis ausreichende Sicherheits- und Nutzungskriterien erfüllt sind. In Abhängigkeit von Komplexität und Fragestellung kann der Iterationsaufwand beträchtlich sein.

Für die Beurteilung der Resttragfähigkeit von Strukturen bei Schadensvorgängen oder der Ermittlung eines Versagenszustandes kann eine entkoppelte Betrachtung unter Umständen nicht ausreichend sein. Wie in [Abb. 8](#) dargestellt ist, müsste dann in einer erweiterten Betrachtung die Rückwirkung einer Temperatur-Struktur-Interaktion auf die vorhandene Wärmequelle mit einbezogen werden.

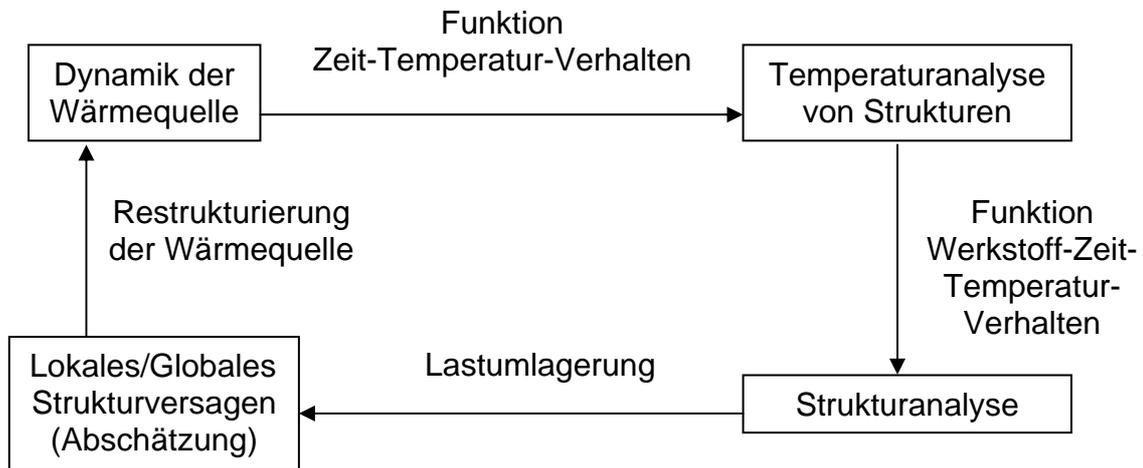


Abb. 8: Schema zur Temperatur-Struktur-Analyse (gekoppelt !)

Um diese Gedanken von Anfang an in eine Strukturauslegung mit einzubeziehen, was unter Anwendung von modernen numerischen Verfahren, z.B. Computational Fluid Dynamic (CFD) und Finite Elemente (FEM) Methoden anzustreben ist, werden partielle Zusammenhänge mit leistungsfähigen, verfügbaren Berechnungsprogrammen wie z.B. [FLUENT™](#), [CFD/FASTRAN™](#), [ADINA-A-T/-F™](#), [MSC/MARC™](#), [ANSYS™](#) usw. ¹⁾, bearbeitet und gelöst. Da die vorab dargestellten Vorgänge sowohl in ihrer Gesamtheit als auch bei rein disziplinärer Betrachtung bereits nichtlineare Ansätze erfordern, ist der Aufwand in Bezug auf Modellierung, Rechenzeit und Datenvolumen erheblich. Die Untersuchung und Bewertung von Zusammenhängen erfolgt dann durch entsprechende Datenaustauschalgorithmien zwischen den jeweiligen Einzelbetrachtungen, was gleichfalls mit erheblichem Aufwand verbunden ist.

Aus den Ablaufdiagrammen in [Abb. 7](#) und [Abb. 8](#) lässt sich noch nicht erkennen, inwieweit die gesamte Themenstellung vom Wärmeübertragungsverhalten, vom Strukturverhalten oder durch die Dynamik der Wärmequelle beherrscht wird. Deshalb ist für eine Betrachtung von thermisch-mechanischen Vorgängen eine von vornherein festgesetzte lineare Betrachtung niemals ausreichend, weil die Ermittlung von Art und Größe der physikalischen Ungleichgewichte gleichfalls ein Bestandteil der Ergebnisbewertung sein kann.

¹⁾ Die Liste der aufgeführten kommerziellen Software erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern dient lediglich dazu, auf bestehende Möglichkeiten zu verweisen.

2.1 Gittersteuerfläche

Zur Entwicklung und Einsatz von Steuerflächen auf Basis der Gittertechnologie liegen in der ehemaligen Sowjetunion grundlegende Erkenntnisse von **Belotserkovskiy** [B-05] für Flugkörper und Unterwasserfahrzeuge vor. Der Grundgedanke ist einfach nachzuvollziehen, da bereits in den frühen Entwicklungsphasen der Luftfahrt Ideen entwickelt wurden, um den Auftrieb von Flugzeugen zu verbessern. Eine Lösung war die Entwicklung von Flugzeugen mit mehreren, parallel angeordneten Tragflächen, wie sie in [Abb. 9](#) dargestellt sind.



Abb. 9: Dreideckerflugzeug vor 1918

Für die Anwendung als globale Auftriebssysteme konnten sich Gitterstrukturen in der allgemeinen Luftfahrt bislang nicht durchsetzen, wogegen ihre Effizienz bei Einsatz von Steuerelementen zunehmend an Bedeutung gewinnt. Dabei ergibt sich jedoch zusätzlicher Forschungsbedarf, insbesondere mit multidisziplinären Ansätzen.

In **Belotserkovskiy** [B-05] werden bereits theoretische Berechnungsverfahren zur Auslegung von Gittersteuerflächen aufgeführt. Beispiele für Gitterfachwerkkonstruktionen sind in [Abb. 10](#) wiedergegeben. Die Kräftepfeile geben typische Beanspruchungsrichtungen an.

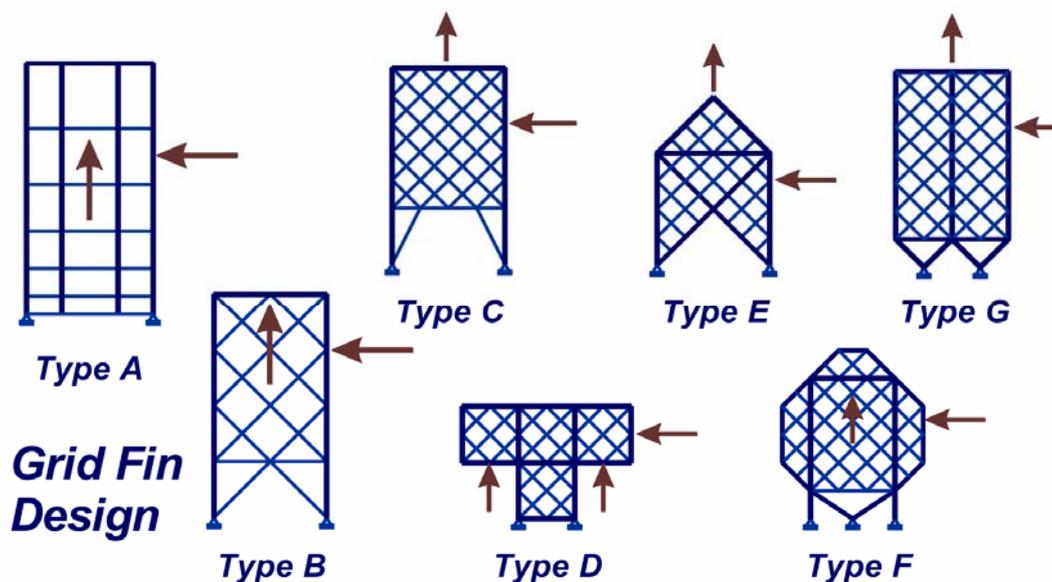


Abb. 10: Gitterflügelkonstruktionen nach RESHETCHATYE KRY'LA (Gittertragflügel nach *Belotserkovskiy, S.M.*)

Die angewandten Analyseverfahren für solche Gittersteuerflächen basieren auf den klassischen Ansätzen der theoretischen Strömungs- und Strukturmechanik. Wesentliches Augenmerk wurde in [B-05] auch auf konstruktive Möglichkeiten, die Fertigungsmethoden und die Werkstoffauswahl der dargestellten Gitterstrukturen verwendet. Der Grund dafür war, dass diese Gittersteuerflächen nicht nur monolithisch, d.h. aus Vollmaterial erodiert, sondern aus Einzelplatten zusammengefügt worden sind. Die Beständigkeit der geschweißten, gelöteten oder genieteten Verbindungen unter mechanischer und thermischer Belastung ist damit von wesentlicher funktioneller Bedeutung.

In den systematischen theoretischen und experimentellen Untersuchungen von **Belotserkovskiy** [B-05] zur Aerodynamik und Strukturberechnung von Gittersteuerflächen konnte umfangreiches Material für einen Mach-Zahl-Bereich von $0 < \text{Mach}_\infty < 5,0$ für die praktische Anwendung erarbeitet werden. Eine Berechnung als dreidimensionales Tragwerk mit der Optimierung auf Masse oder statische und dynamische Grenztragfähigkeit auf analytischer Basis erfolgte jedoch nicht. Eine Strukturoptimierung in Verbindung mit Experimenten kann weder nachvollzogen noch ausgeschlossen werden.

Aus Sicht der Aerodynamik, siehe [B-05], haben Gitter- oder Fachwerktragflügel zwei wesentliche Besonderheiten:

- a) es handelt sich um eine tragende Struktur mit einem räumlich angeordneten System freier Wirbel,
- b) es handelt sich um ein Mehrplattensystem. Es treten an den Vorderkanten der angeströmten Profilplatten Verdichtungsstöße auf, die dann wechselseitig auf benachbarte Platten auftreffen und von dort wieder reflektiert werden. Das vollständige Auftriebsverhalten eines Fachwerktragflügels ergibt sich damit aus der gegenseitigen Beeinflussung des Strömungsverhaltens als Funktion der Konstruktionsgeometrie. Erst bei hinreichend hohen Strömungsgeschwindigkeiten kann ein planparalleles Auftriebsverhalten der Einzelplatten angenommen werden, siehe auch Kapitel Aerodynamik im LHT [L-01].

Diese Wirkungsweisen wurden in Bezug auf das aerodynamische Verhalten in vielen Veröffentlichungen behandelt. Eine kurze Zusammenfassung zur Voraussage des aerodynamischen Verhaltens von Gittersteuerflächen findet sich in **Kretzschmer** und **Burkhalter** [K-01]. Dort wird ausgesagt, dass sich nahezu alle Gittersteuerflächen bis zu einem Anstellwinkel $\alpha < 7,0$ [Deg] nach den Gesetzen der linearen Aerodynamik verhalten. In Forschungsarbeiten der US Army wurde nach **Miller** [M-04] eine Gittersteuerfläche in einem Geschwindigkeitsbereich von $0,1 < \text{Mach} < 3,5$ und einem Anstellwinkel bis zu $\alpha = 60$ [Deg] getestet.

In den aufgeführten Forschungsarbeiten zum Thema Gittersteuerfläche, mit Ausnahme von [B-05], werden ausschließlich aerodynamische Aspekte wie Auftriebs- und Widerstandsverhalten untersucht und diskutiert. Diese Untersuchungen basieren auf der Annahme, dass sich die aerodynamische und thermo-mechanische Betrachtungen entkoppelt durchführen lassen. In keinem der vorliegenden Aufsätze wurde die Interaktion mit dem Strukturverhalten untersucht.

Wird **Belotserkovskiy** [B-05] studiert, oder beginnt die Strukturauslegung einer Gittersteuerfläche, so erkennt man, dass die effiziente Auslegung und Weiterentwicklung von Gitterstrukturen als Steuerflächen nur bei hoher interdisziplinärer Betrachtungsweise möglich ist.

Stationäres Vibrationsverhalten der Struktur auch im Hinblick auf die Auftriebscharakteristik oder instationäre Vorgänge wie Temperaturschock, plastisches Strukturantwortverhalten oder Ermüdung wurden in die vorliegenden Berechnungsansätze bislang nicht miteinbezogen. Ebenfalls konnten keine Ansätze gefunden werden, die Aufschluss über das tatsächliche Tragvermögen bezogen auf die einwirkende Belastung erlauben. Phänomene die sich durch kurzzeitige Überbeanspruchung bei „einmaligen Ereignissen“ ergeben, wurden gleichfalls noch nicht untersucht. Eine Betrachtung unter Einbeziehung von Kurzzeiteffekten erscheint möglich und sinnvoll, vor allem aber wenn dies noch durch Experimente gestützt werden kann.

Die Erforschung der Gittertechnologie als Steuerelement für Fluggeräte ist auch Gegenstand laufender Forschungsarbeiten [D-01, S-01, S-02, S-03, R-01, W-01], wobei der Forschungsschwerpunkt gleichfalls auf der Untersuchung des aerodynamischen Verhaltens von durchströmten Gitterstrukturen liegt.

Die derzeit mehr qualitativ vorhandenen Erkenntnisse über Gittersteuerflächen zeigen hohe aerodynamische Wirksamkeit bis zu sehr großen Anstellwinkeln. Diese Fähigkeit ist unbedingt erforderlich für den Einsatz von hochagilen Flugkörpern. Durch eine geeignete Wahl der geometrischen Einflussgrößen des Gitters kann die Auftriebscharakteristik, sowie der Angriffspunkt der aerodynamischen Auftriebskraft nahezu konstant gehalten werden. Dieser Effekt ermöglicht eine wesentlich zielgerichtete Auslegung der Reglersysteme, einschließlich einer deutlichen Reduzierung des Bauvolumens und der Masse des Stellsystemmechanismus. Wegen der hohen aerodynamischen Wirksamkeit der Gitterflügel sind die Längs- und Seitenstabilität des Flugkörpers, im Gegensatz zu konventionellen Steuerflächen, im gesamten Geschwindigkeitsbereich gewährleistet. Die Druckpunktwanderung innerhalb der Steuerfläche bei Veränderung der Fluggeschwindigkeit ist minimal. Die Ruderscharniermomente sind dadurch um ein Vielfaches kleiner als diejenigen bei konventionellen aerodynamischen Steuerflächen. Die Struktur der Steuerfläche ist bei gleicher Leistung wesentlich stabiler als klassische Steuerflächen mit ebenen Profilen. Der aerodynamische Widerstand ist zwar etwa drei- bis viermal so hoch wie bei planaren Steuerflächen mit gleicher tragender Fläche, jedoch lässt sich dies vermutlich durch geeignete Gestaltung der Gitterstruktur noch reduzieren. Im Verlauf dieser Arbeit wird gezeigt, dass dies ein sehr komplexes Vorgehen erfordert und erhebliche Schwierigkeiten beinhaltet. Ebenfalls ist anzumerken, dass sich in Abhängigkeit des Gitterprofils und der Anströmbedingungen stets eine dreidimensionale Luftkraftwirkung einstellt, d.h. erhöhte Auftriebskraft in Axialrichtung des Ruderzapfens, welche in der Bauweise der Rudermaschine und Befestigung der Steuerfläche zu berücksichtigen ist.

Die zuvor genannten Kriterien werden derzeit durch Forschungsarbeiten untersucht, um damit Bewertungskriterien für Gitterstrukturen als Steuerflächen im Hochgeschwindigkeitsbereich zu entwickeln. Veränderungen aus der ungestörten Strömung, als auch der gestörten Strömung durch Rumpfeinflüsse werden dabei berücksichtigt. Die Bestimmung der aerodynamischen Wirkung von Gittersteuerflächen erfolgt nach klassischen Ansätzen der theoretischen Aerodynamik und mittels Windkanalversuchen.

Die Auslegung einer Gittersteuerfläche auf das erforderliche Festigkeitsverhalten bei statischer, dynamischer und thermischer Beanspruchung ist weitgehend unerforscht. Aerodynamische und strukturdynamische Interaktionen an Gitterstrukturen infolge Fluid-Struktur-Wechselwirkung, sowie instationäre Effekte wie z.B. Schock- und Expansionsverhalten oder die Veränderung der Gitterstruktur bei aerodynamischer Aufheizung einschließlich zugehörigem Materialverhalten, ist ebenfalls noch in der Entwicklungsphase. Die Bewertung der interdisziplinären Einflüsse auf die Wirkungsweise von Gitterstrukturen ist jedoch für ihren Einsatz unbedingt erforderlich. Da derzeit keine eingeführten Auslegungsverfahren für Gitterstrukturen vorhanden sind, erfolgt die Dimensionierung mit den Methoden der klassischen Struktur- und Strömungsmechanik.

Die klassische Auslegungs- und Nachweisführung erfolgt iterativ nach folgender Vorgehensweise:

- a) Ermittlung der erforderlichen aerodynamischen Auftriebskraft, einschließlich der zugehörigen Luftkraftverteilung,
- b) Abschätzung der aerodynamischen Aufheizung, d.h. Ermittlung der Grenzschichttemperatur,
- c) Ermittlung einer möglichen Profilgeometrie und Gitterstruktur,
- d) Materialauswahl und Vordimensionierung,
- e) Windkanalversuche an skalierten Windkanalmodellen, d.h. keine aerodynamische Ähnlichkeit, zur Bestätigung der theoretisch ermittelten aerodynamischen Kenngrößen.

Diese Vorgehensweise ist sehr aufwendig und liefert für wesentliche Einflussgrößen allenfalls nur Approximationslösungen. Als Einflussgrößen sind hier die aerodynamische Luftkraftwirkung und die aerothermische Aufheizung zu nennen. Die Wirkung der aeromechanischen Luftkräfte kann sowohl analytisch als auch experimentell nur näherungsweise erfasst werden.

Die Grenzen der analytischen Aeromechanik liegen in den jeweils getrennten Theorien zur Luftkraftermittlung für den sub-, trans- und supersonischen Geschwindigkeitsbereich. Verfügbar sind nur Werte für ebene Profile oder rotationssymmetrische Körper. Bereits **Söhngen** und **Meister** [S-06, S-07, S-08] haben in ihren Arbeiten gezeigt, dass die Thematik eines durchströmten, schwingenden Gitters kompliziert ist, wobei hier die Einwirkung von thermischen Belastungen noch nicht berücksichtigt ist.

Die Ermittlung der aerodynamischen Luftkräfte durch Windkanalversuche für den derzeit vorstellbaren Flugbereich bis zu Mach 7,0 unter Bedingungen der Standardatmosphäre in Bodennähe ist derzeit nicht realisierbar. Da für den hohen Machbereich die erforderliche Leistung seitens des Windkanals nicht erbracht werden kann, sind entscheidende Einflüsse auf das Strukturverhalten nicht oder nur in grober Approximation zu erfassen. Alternative Ansätze zur experimentellen Prüfung von Gittertragflügeln sind nach **Belotserkovskiy** [B-05] gegeben durch

- Gitterflügel im Wasserkanal
- Gitterflügel im heißen Austrittsstrahl einer Gasturbine
- Gitterkonstruktionen im Überschallstrahl eines Flüssigkeitstriebwerks.

Die Anforderungen und Grenzen für eine realistische Gestaltung und Bewertung der Messergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- a) die aerodynamische Ähnlichkeit der Gitterstruktur, basierend auf hochtemperaturfesten Materialien, einschließlich aller Anschlusssteifigkeiten ist für eine, zunächst noch unbekannte Gitterstruktur aufwändig und teuer herzustellen,
- b) das Anbringen von Messgebern, z.B. Beschleunigungsaufnehmern oder Dehnungsmessstreifen würde das Messergebnis durch die Änderung des Strömungsfeldes signifikant beeinflussen und teilweise verfälschen. Eine Kalibrierung des erforderlichen Messbereiches und der Messgenauigkeit ist aus Mangel an Detailkenntnissen der Einzeleffekte ebenfalls schwierig zu definieren,
- c) eine getrennte Untersuchung der aerodynamischen Wirkung, der aerothermischen Aufheizung, sowie des strukturmechanischen Verformungs- und Vibrationsverhaltens mit anschließender sequentieller Koppelung der Ergebnisse, beinhaltet nicht die reale, instationären Wirkungsweisen welche infolge einer direkten Strömungs-Struktur-Wechselwirkung auftreten,
- d) die derzeit angewandten klassischen Verfahren für den Flatternachweis basieren auf der Annahme von harmonischen Anregungen und werden bislang mit Erfolg im sub- und im supersonischen Geschwindigkeitsbereich an konventionellen Trag-, Steuerflächen und Gesamtkonfigurationen eingesetzt. Diese Verfahren sind seit Jahren im Einsatz und werden laufend durch Versuche verifiziert. Einschränkungen bestehen dahingehend, dass hier i.A. lineares Strukturverhalten, kleine Verformungen und geringe Anstellwinkel vorausgesetzt werden. Bei Fluggeräten mit großer Manövrierfähigkeit sind die Kenntnisse über das Kurzzeitverhalten von Steuerflächen, welche bei der Strömungs-Struktur-Koppelung im hohen Machzahlbereich und bei hohen Anstellwinkeln bis 30 [Deg] von wesentlicher Bedeutung. Auch lässt sich zeigen, dass bei deformierten Profilen die kritische Flattergeschwindigkeit sinkt, d.h. die linearen Auslegungsmethoden sind nicht mehr konservativ,
- e) die Dämpfungscharakteristik, z.B. Modale Dämpfung oder RAYLEIGH-Dämpfung, wie sie für Auslegungszwecke nach der klassischen, linearen Schwingungsanalyse eingesetzt wird, ist bei Temperatureinwirkung schwierig zu bestimmen,
- f) das Übertragungsverhalten zwischen der Steuereinheit und dem Trägheitsnavigationssystem kann unter Strömungs-Struktur-Interaktion nichtlinear werden.

Selbst bei dynamisch ähnlichen Teilmodellen können im Prinzip aus wirtschaftlichen Gründen nur wenige signifikante Freiheitsgrade erfasst werden.

Generell lässt sich sagen, dass im Bereich der nichtlinearen Aeroelastizität und Aerothermoelastizität noch Forschungsbedarf besteht, um Erkenntnisse daraus als Auslegungskriterium für Strukturteile, z. B. an Steuerflächen, wirksamer zu nutzen.

Trotz der Vielzahl von komplexen Interaktionen müssen Ansätze für Bewertungskriterien bei Gittersteuerflächen gefunden werden, welche als Grundlage für weitere Untersuchungen verwendet werden können.

Werden die bisherigen Ausführungen zusammengefasst, so zeigt sich, dass es sich bei der Auslegung einer Gittersteuerfläche um eine sehr komplexe Aufgabenstellung handelt, in der sich die Fachgebiete Struktur- und Strömungsmechanik, Werkstofftechnologie und Bauweise hochinteraktiv gegenseitig beeinflussen. Dies liegt darin begründet, dass die Konstruktionsphilosophie zur Gestaltung einer stark versteiften Struktur mit minimalen Verformungseigenschaften grundsätzlich gegenseitig gerichtet ist bezogen auf die Konstruktionsphilosophie einer durchströmten Struktur, welche einen hohen und möglichst ungestörten Massendurchsatz eines flüssigen oder gasförmigen Mediums, z.B. Luft, erfordert.

Die Aufgabe kann nach derzeitigem Stand der Forschung nur iterativ für einen spezifizierten Anwendungsbereich gelöst werden. Die zu berücksichtigenden Interaktionen sind in [Abb. 11](#) zum Verständnis der Thematik nochmals dargestellt.

Eine erste Betrachtung dieser Zusammenhänge könnte zu der Schlussfolgerung führen, dass es sich dabei um eine klassische Vorgehensweise bei der Entwicklung von Strukturen in der Luft- und Raumfahrt handelt. Der grundsätzliche Unterschied liegt im zeitlichen Ablauf der Interaktionen. Es sind alle Einflussparameter in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit für einen Zeitbereich von $t < 30$ bis 60 Sekunden zu betrachten, ihre Einflüsse zu gewichten und zu bewerten.

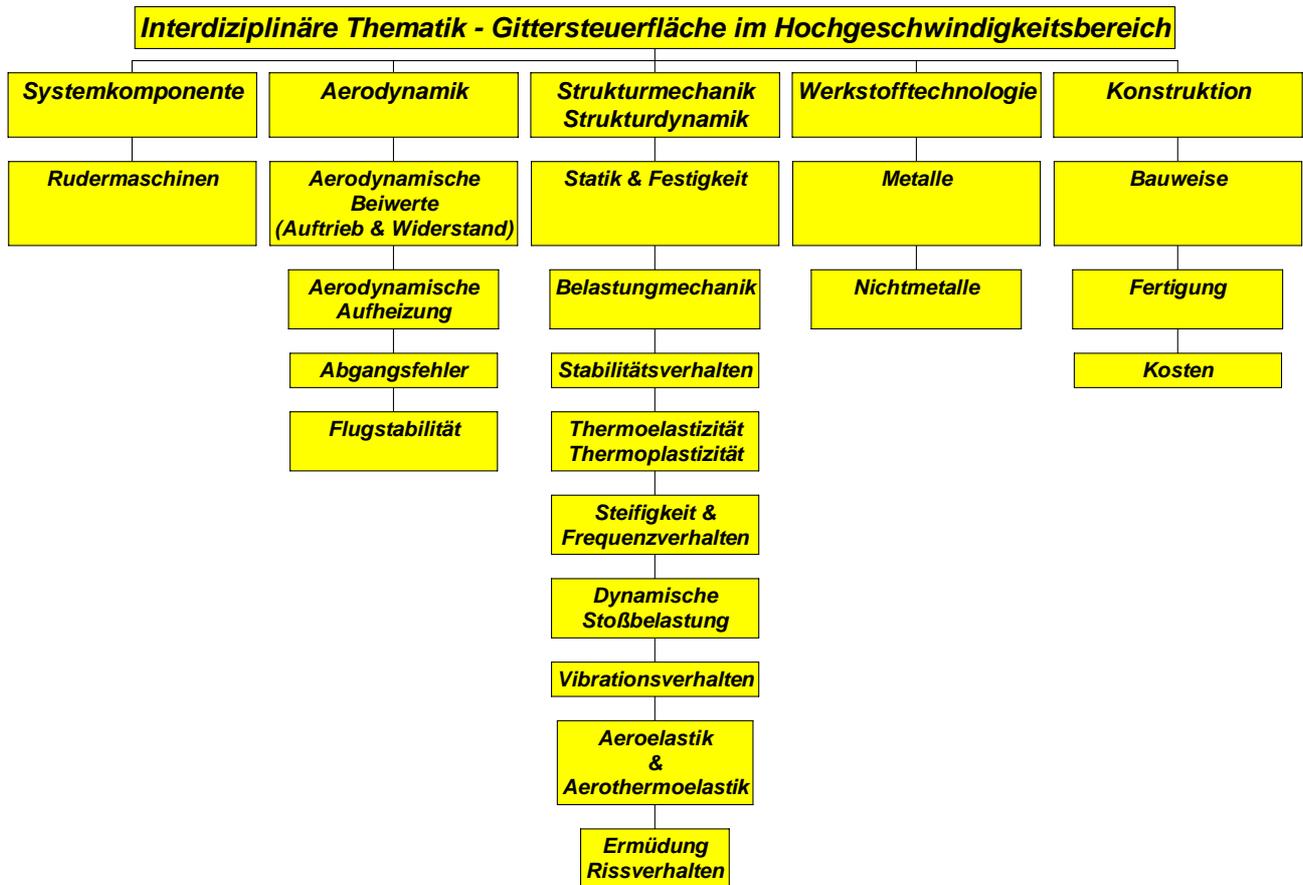


Abb. 11: Thematische Interaktionen zur Bewertung von Gittersteuerflächen im Hyperschallbereich

Die in [Abb. 11](#) dargestellten Interaktionen an Gittersteuerflächen sind, für einen Einsatzbereich beginnend im hohen Unterschall bis hin zur mehrfachen Schallgeschwindigkeit in Bodennähe bei gleichzeitig hoher Agilität des Trägersystems, nur durch folgende Eigenschaften zu erreichen:

- Extremer Leichtbau
- Hohe Kurzzeitfestigkeit
- Hohe Struktursteifigkeit
- Hohe Temperaturbelastbarkeit
- Hohe aerodynamische Wirksamkeit.

Diese Anforderungen erzwingen eine Strukturauslegung die sich von vornherein an der technischen Realisierungsgrenze bewegt.

In [Abb. 12](#) ist zur Veranschaulichung der Thematik ein Entwurfsmuster für eine Gittersteuerfläche dargestellt. Es ist zu bemerken, dass es sich bei diesem Prototyp um ein Fertigungsmuster handelt, welches keinesfalls alle bereits diskutierten Anforderungen beinhaltet.



Abb. 12: Prototypen von Gittersteuerflächen [EADS/LFK-Lenkflugkörpersysteme GmbH]

Für die analytische Untersuchung von Gittersteuerflächen lassen sich bereits hierzu verschiedene Berechnungsmodelle erstellen, siehe [Abb. 13](#), welche für die Untersuchung von individuellen Fragestellungen geeignet sind. Diese Modelle sind ebenfalls hilfreich um weitere Anforderungen aufzuzeigen und den Stand der Wissenschaft darzustellen.

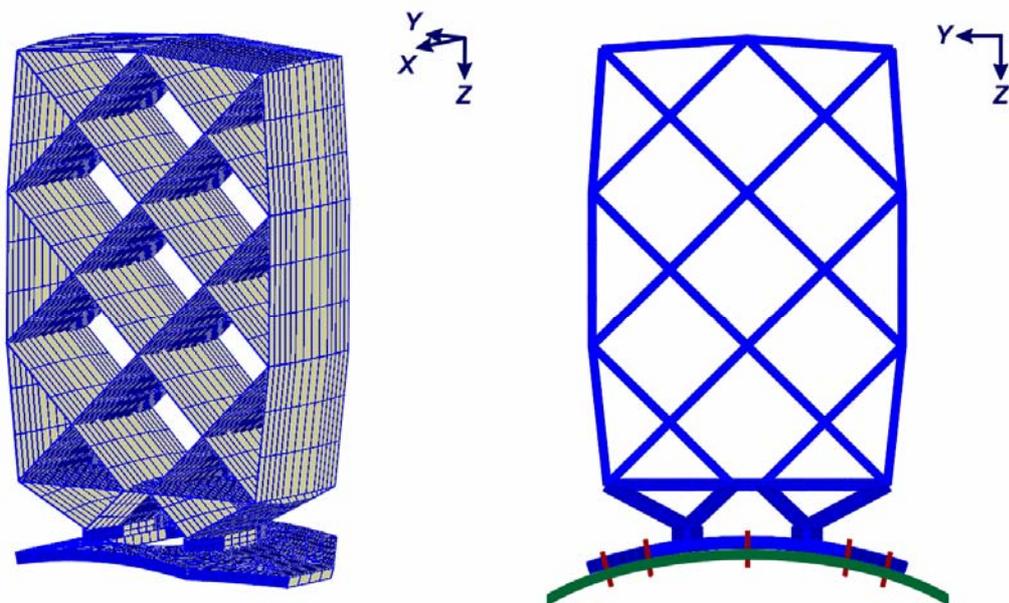


Abb. 13: FE-Modell einer Gittersteuerfläche [Starrer Anschluss am Trägersystem]

2.2 Wärme- und Temperaturberechnung

Die Untersuchung von Temperaturphänomenen basiert im Wesentlichen auf den Grundlagen der Wärmelehre. Nach **Meschede** [M-01] besteht die Wärmeenergie aus der Bewegungsenergie der Atome und Moleküle. Temperatur ist ein lineares Maß für den Mittelwert dieser Energie.

Für technisch-physikalische Fragestellungen gilt es nun, Zusammenhänge der Wärmeübertragung zu formulieren, wobei analytische Lösungen speziell für instationäre Vorgänge nur in Sonderfällen möglich sind, siehe **Carslaw** und **Jaeger** [C-01].

Zur Einführung in die Thematik der Temperaturanalysen werden zweckmäßig grundlegende Begriffe und Zusammenhänge nochmals beschrieben. Eine anschauliche Zusammenfassung findet sich in **Mangerig** [M-03]. Er zeigt, dass der Wärmeaustausch zwischen einzelnen Körpern bzw. Medien auf drei verschiedenen Wegen erfolgen kann.

Die erste Art der Wärmeübertragung ist die an Materie gebundene Wärmeleitung, bei der ein Wärmeaustausch mit den unmittelbar benachbarten Körperelementen auf molekularer Basis stattfindet. In festen Körpern erfolgt die Wärmeübertragung ausschließlich durch Wärmeleitung. In Gasen trägt die Wärmeleitung nur in geringem Maße zur Wärmeübertragung bei.

Die zweite Art der Wärmeübertragung ist die Konvektion. Sie tritt auf, wenn Elemente eines Körpers ihre Stellung im Raum verändern und so die an diese Körperelemente gebundene Wärme eine Ortsänderung erfährt. Diese Art der Wärmeübertragung findet hauptsächlich in strömenden Gasen und Flüssigkeiten statt. Bezieht man in die Betrachtung der Konvektion auch die Begrenzungsflächen – die durch feste Körper gebildet sein sollen – mit ein, so führt dies zum Begriff des Wärmeübergangs. Die an den Begrenzungsflächen der jeweiligen Medien ausgetauschte Wärme führt zu Dichteänderungen, die im gasförmigen bzw. flüssigen Körper eine Strömung hervorruft. Diese Form des Wärmeübergangs wird als freie Konvektion bezeichnet. Die Strömung kann durch äußere Einwirkungen, wie z.B. Wind, verstärkt werden, was dann als erzwungene Konvektion bezeichnet wird. Vorgänge der aerothermischen Aufheizung bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten werden in starkem Maß durch die Konvektion und dem dabei stattfindenden Wärmeübergang bestimmt und sind Gegenstand steter Forschung.

Die dritte Art der Wärmeübertragung ist die Strahlung. Im Unterschied zur Wärmeleitung und zur Konvektion ist die Strahlung nicht an ein Übertragungsmedium gebunden. Die Wärmeübertragung infolge Strahlung ist deshalb durch Vakuum (Weltraum) wie auch durch strahlungsdurchlässige Körper (Luft) möglich. Die Wärmestrahlung entsteht an den Oberflächen der Körper durch Umwandlung der an den Körper gebundenen thermischen Energie in Strahlungsenergie und wird beim Auftreffen auf den Körper wieder in thermische Energie umgewandelt.

Selbstverständlich ist es möglich, dass in Abhängigkeit der technischen Anforderungen alle Arten der Wärmeübertragung in kombinierter Form an einem Bauteil auftreten.

Aus den bislang beschriebenen Grundlagen leitet sich die Vorgehensweise zur Temperaturanalyse ab, wobei klar zu erkennen ist, dass sich Temperaturphänomene als Funktion wechselnder Energien ereignen und im Allgemeinen die Temperaturverteilung innerhalb eines Körpers unbekannt ist. Die Temperaturverteilung oder das Temperaturfeld $\theta = \theta(x, y, z, t)$ innerhalb eines Körpers muss unter Verwendung von

Berechnungsverfahren der Wärmeübertragung ermittelt werden. Es wird weiterhin davon ausgegangen, dass jeder Körper ohne eigene innere Energiequelle nach einer bestimmten Zeitspanne eine Referenztemperatur θ_{Ref} annimmt, die im Allgemeinen der Umgebungstemperatur entspricht, sofern sich Absorptions- und Emmissionsverhalten des betrachteten Körpers im Gleichgewicht befinden.

Für den eindimensionalen, stationären Wärmetransport innerhalb eines Körpers mit zwei parallelen Wandflächen gilt die Fourier'sche Wärmeleitungsbeziehung

$$q = -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad , \quad (W-1)$$

wobei q die Wärmestromdichte bzw. Wärmestrom pro Flächeneinheit, θ die Temperatur und k die Wärmeleitfähigkeit des Materials beschreiben. Das negative Vorzeichen definiert, dass der Wärmestrom in Richtung der niedrigeren Temperatur zunimmt. Für einen dreidimensionalen Festkörper lässt sich Gleichung (W-1) für die jeweiligen Hauptachsenrichtungen anschreiben

$$q_x = -k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad q_y = -k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad q_z = -k_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad . \quad (W-2a/b/c)$$

Die Gleichgewichtsbeziehung des Wärmestroms im Inneren des Körpers lässt sich wie folgt ausdrücken

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = -q^B \quad , \quad (W-3)$$

wobei mit q^B die entstehende Wärme pro Volumeneinheit definiert ist.

Um die Temperaturverteilung innerhalb des Mediums zu bestimmen ist Gleichung (W-3) zu lösen. Zu diesem Zweck müssen Randbedingungen für die Wärmeleitgleichung eingeführt werden. Als mögliche Randbedingungen an der Oberfläche können definiert werden:

- a) eine konstante Oberflächentemperatur (Dirichlet Randbedingung)

$$\theta_{s1} = \theta_e \quad (W-4a)$$

- b) ein vorgegebener Wärmestrom (Neumann Randbedingung)

$$-k_n \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{s2} = q^S \quad (W-4b)$$

- c) kein Wärmestrom, d.h. adiabatische Bedingungen

$$-k_n \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{s2} = 0 \quad (W-4c)$$

d) eine konvektive Wärmeübergangsbedingung

$$-k_n \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{S3} = q^S = h(\theta_e - \theta_{S3}) \quad (\text{W-4d})$$

e) eine Strahlungsrandbedingung

$$-k_n \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{S4} = q^S = \sigma_r \varepsilon A_r (\theta_r^4 - \theta_{S4}^4) \quad (\text{W-4e})$$

Mit den Oberflächenbezeichnungen $S1$, $S2$, $S3$ und $S4$ sind diejenigen Punkte oder Flächen bezeichnet, an denen die Randbedingung definiert ist. An den Oberflächen der Struktur müssen die Bedingungen a, b, c, d oder e erfüllt sein, wobei k_n die Wärmeleitfähigkeit des Körpers ist und n die nach außen gerichtete Normale zur Oberfläche des Körpers beschreibt.

In Gleichung (W-4b) bezeichnet q^S den, durch die Oberfläche $S2$ des Körpers zugeführten Wärmestrom. In Gleichung (W-4d) bedeutet θ_e die Umgebungstemperatur, θ_{S3} die Oberflächentemperatur des Körpers und h definiert den Wärmeübergangskoeffizienten, der auch temperaturabhängig ist. In Gleichung (W-4e) bedeutet θ_r die Temperatur der äußeren Strahlungsquelle, θ_{S4} die Oberflächentemperatur des Körpers. Weiterhin ist zu berücksichtigen die Stefan-Boltzmann'sche Strahlungskonstante $\sigma_r = 5,67 \cdot 10^{-8} [W/m^2 \cdot K^4]$, der Emissionsgrad ε sowie die eigentliche Strahlungsfläche A_r . Für die praktische Berechnung wird Gleichung (W-4e) zweckmäßigerweise wie folgt umgeschrieben

$$-k_n \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{S4} = q^S = \kappa (\theta_r - \theta_{S4}) \quad (\text{W-4f})$$

wobei dann für κ gilt

$$\kappa = \sigma_r \varepsilon A_r (\theta_r^2 + \theta_{S4}^2) (\theta_r + \theta_{S4}) \quad .$$

In einer zeitabhängigen Berechnung müssen auch die Anfangsbedingungen der Temperatur vorgegeben werden.

Damit sind alle erforderlichen Größen zur Beschreibung der Wärmeleitung definiert und es lässt sich das beherrschende Funktional für die 3-dimensionale Wärmeleitung anschreiben, vergleiche nach **Bathe** [B-02],

$$\int_V \frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right\} dV - \int_V \theta q^B dV - \int_{S2} \theta^S q^S dS - \sum_i \theta^i Q^i = \Pi \quad (\text{W-5})$$

Durch Einbeziehung von Q^i lassen sich auch konzentrierte Wärmeströme erfassen. Die Forderung nach Einbeziehung der Stationarität liefert aus Gleichung (W-5)

$$\int_V \delta \theta^{T'} k \theta' dV = \int_V \delta \theta q^B dV + \int_S \delta \theta^S q^S dS + \sum_i \delta \theta^i Q^i \quad , \quad (W-6)$$

wobei

$$\theta^{T'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

und

$$k = \begin{vmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{vmatrix}$$

ist. Mit δ wird die "Variation von", hier der Temperatur, bezeichnet.

Bei zeitabhängigen Betrachtungen muss noch berücksichtigt werden mit welcher Geschwindigkeit die Wärme im betrachteten Körper gespeichert wird. Dies geschieht mit Gleichung (W-7), welche den Wärmestrom im Körper selbst erfasst

$$q^c = c \frac{\partial \theta}{\partial t} = c \dot{\theta} \quad . \quad (W-7)$$

Zur Lösung von nichtlinearen Wärmeleitungsproblemen muss Gleichung (W-6) in eine inkrementelle Form gebracht werden. Dies ist ausführlich in **Bathe** und **Khoshgoftaar** [B-03], sowie in **Dietrich** und **Bathe** [D-02] aufgezeigt und wird hier im Einzelnen nicht mehr wiedergegeben. Für die Behandlung von instationären Vorgängen unter Verwendung eines impliziten Euler-Rückwärtsverfahrens ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \int_V \delta \theta^{T'} {}^t k \Delta \theta^{S(i)} dV + \int_{S^c} \delta \theta^S {}^t h \Delta \theta^{S(i)} dS + \int_{S^r} \delta \theta^S {}^t \kappa \Delta \theta^{S(i)} dS = \\ {}^{t+\Delta t} Q + \int_{S^c} \delta \theta^S {}^{t+\Delta t} h^{(i-1)} \left({}^{t+\Delta t} \theta_e - {}^{t+\Delta t} \theta^{S(i-1)} \right) dS + \int_{S^r} \delta \theta^S {}^{t+\Delta t} \kappa^{(i-1)} \left({}^{t+\Delta t} \theta_r - {}^{t+\Delta t} \theta^{S(i-1)} \right) dS - {}^{t+\Delta t} \tilde{Q} \\ {}^{t+\Delta t} Q = \int_V \delta \theta {}^{t+\Delta t} q^B dV - \int_V \delta \theta {}^{t+\Delta t} c {}^{t+\Delta t} \dot{\theta} dV + \int_S \delta \theta^S {}^{t+\Delta t} q^S dS, \end{aligned} \quad (W-8)$$

wobei gilt ${}^{t+\Delta t} \tilde{Q} = \int_V \delta \theta^{T'} {}^{t+\Delta t} k^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \theta^{S(i-1)} dV .$

2.3 Instationäre Temperaturberechnung mit FE-Methoden

Für die Berechnung von Gleichung (W-8) mit numerischen Methoden werden nun die Beziehungen zur Berechnung des Temperaturverhaltens, gleichfalls nach **Bathe** [B-02], unter Verwendung von Matrixgleichungen für nichtlineare, instationäre Wärmeleitung angeschrieben

$${}^{t+\Delta t}C \dot{\theta} + ({}^tK^k + {}^tK^c + {}^tK^r) \Delta \theta = {}^{t+\Delta t}Q + {}^{t+\Delta t}Q^c + {}^{t+\Delta t}Q^r - {}^{t+\Delta t}Q^k, \quad (W-9)$$

wobei

${}^{t+\Delta t}C$	die Wärmekapazitätsmatrix des Systems zur Zeit $t + \Delta t$,
${}^tK^k$	der Anteil Wärmeleitung an der Wärmeübertragungsmatrix zur Zeit $t + \Delta t$,
${}^tK^c$	der Anteil Konvektion an der Wärmeübertragungsmatrix zur Zeit $t + \Delta t$,
${}^tK^r$	der Anteil Strahlung an der Wärmeübertragungsmatrix zur Zeit $t + \Delta t$,
${}^{t+\Delta t}\dot{\theta}$	der Temperaturgradient zur Zeit $t + \Delta t$,
$\Delta \theta$	der Vektor der inkrementellen Knotenpunkttemperaturen, d.h. $\Delta \theta = {}^{t+\Delta t}\theta - {}^t\theta$,
${}^{t+\Delta t}Q$	der Vektor der externen Wärmeströme zur Zeit $t + \Delta t$,
${}^{t+\Delta t}Q^c$	der Vektor der Wärmeströme infolge Konvektion zur Zeit $t + \Delta t$,
${}^{t+\Delta t}Q^r$	der Vektor der Wärmeströme infolge Wärmestrahlung zur Zeit $t + \Delta t$ und
${}^{t+\Delta t}Q^k$	der Vektor der inneren Wärmeströme zur Zeit $t + \Delta t$

ist.

Da das Temperaturgleichgewicht zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ nicht bekannt ist, muss Gleichung (W-9) iterativ, z.B. unter Verwendung eines Newton-Raphson-Verfahrens, gelöst werden.

Die gesuchte Knotenpunkttemperatur ergibt sich dann zu

$${}^{t+\Delta t}\theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\theta^{(i)} + \Delta \theta^{(i)}. \quad (W-10)$$

Die Wärmekapazitätsmatrix ${}^{t+\Delta t}C^{(i)}$ in Gleichung (W-9) ist für jeden Iterationsschritt neu zu berechnen.

Die erforderlichen Elementmatrizen für ein 2-Knoten Wärmeübertragungselement sind in [Anhang A](#) angegeben.

Ein Algorithmus zur Lösung von Gleichung (W-9) ist in [Anhang C](#) dargestellt.

2.4 Strukturberechnung

Ist das Strukturverhalten infolge thermischer Beanspruchung von Interesse so wird die Temperaturverteilung innerhalb des zu betrachtenden Bauteils als bekannt angenommen, d.h. es liegen Messwerte aus Versuchen vor oder es wurde eine Temperaturberechnung durchgeführt.

Die wesentlichen Kenngrößen für eine Auslegung von Strukturen im klassischen Sinne sind Kräfte, Druck- und Temperaturbelastungen, Struktursteifigkeit, Materialfestigkeit sowie die vorgegebenen Lagerungsbedingungen. Eine besondere Bedeutung kann der Temperaturbelastung zugewiesen werden, da sie sowohl die Kräfteverteilung innerhalb der Struktur als auch das Werkstoffverhalten beeinflusst.

Das Strukturverhalten bis zum Erreichen der Fließgrenze des Materials wird durch die Methoden der Thermoelastik beschrieben. Grundlagen auf Basis der Kontinuumsmechanik sowie analytische Lösungen für ausgewählte Bauteile sind in **Nowaki** [N-01] angegeben.

Da in dieser Arbeit das Hauptaugenmerk auf Stabstrukturen liegt, wird die Wirkung einer Temperaturbeanspruchung an Stäben für den Fall einer beliebigen Temperaturbelastung nach **Grundmann** [G-02] an einem Balkenelement, hier zur Zeit t , betrachtet.

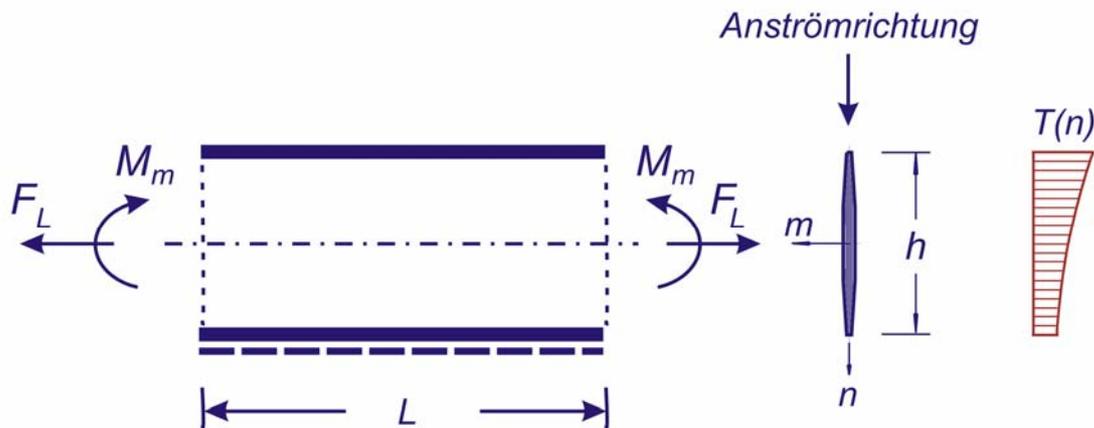


Abb. 14: Balkenelement mit ungleichmäßiger Temperaturbelastung

Dieses Balkenelement kann als Abschnitt einer beliebigen Stabwerksstruktur angesehen werden und wird nun durch einen beliebigen, jedoch zeitabhängigen Temperaturverlauf beansprucht, wodurch in jeder Faser die Spannungen $\sigma(n) = -{}^t E(T, n) {}^t \alpha_T(T, n) {}^t T(n)$ entstehen. Um diesen Zustand zu erzwingen ist eine

$$\text{Kraft in Elementlängsachse} \quad {}^t F_l = - \int_A {}^t E(T, n) {}^t \alpha_T(T, n) {}^t T(n) dA \quad (\text{G-1})$$

und ein

$$\text{Moment um die m-Achse} \quad {}^t M_{m-m} = - \int_A {}^t E(T, n) {}^t \alpha_T(T, n) {}^t T(n) n dA \quad (\text{G-2})$$

erforderlich.

Betrachtet man das in [Abb. 14](#) dargestellte Balkenelement in einem lokalen Koordinatensystem $l-m-n$ als zunächst beidseitig eingespannt, schneidet es an den beiden Enden frei und bringt F_l und M_{m-m} als Haltekräfte wieder auf so entsteht ein Spannungszustand mit Zwängungsspannungen

$${}^t\sigma_l^{TH} = -{}^tE(T,n) {}^t\alpha_T(T,n) {}^tT(n) - \frac{{}^tF_l}{{}^tA} - \frac{{}^tM_{m-m}}{{}^tI}n \quad (G-3)$$

der bei ebenen Querschnittsflächen im Gleichgewicht steht. Die zugehörigen Verzerungen ergeben sich wie folgt

Balkendehnung
$$u_T' = -\varepsilon_l = \frac{-{}^tF_l}{{}^tEA} = \frac{\int_A {}^tE(T,n) {}^t\alpha_T(T,n) {}^tT(n) dA}{\int_A {}^tE(T,n) dA} \quad (G-4)$$

Balkenkrümmung
$$w_{\Delta T}'' = \phi_{\Delta T}' = \phi_{M_{m-m}}' = -\frac{{}^tM_{m-m}}{{}^tEI} = -\frac{\int_A {}^tE(T,n) {}^t\alpha_T(T,n) {}^tT(n)n dA}{\int_A {}^tE(T,n)n^2 dA}, \quad (G-5)$$

wobei

$${}^tT(n) = {}^tT_{absolut}(n) - {}^tT_{REF} \quad (G-6)$$

die zum Zeitpunkt t auftretende Temperaturdifferenz in der betrachteten Längsfaser ist.

An diesen grundlegenden Beziehungen am Biegestab lässt sich zeigen, dass dadurch in der Beanspruchung von Strukturen eine Interaktion zwischen Werkstoffeigenschaften und Temperaturbelastung in der Balkenfaser n auftritt. Komplexere Zusammenhänge, wie sie bei statisch unbestimmten Systemen mit zusammengesetzten Profilen zu erwarten sind, lassen sich deshalb nur noch unter Verwendung von numerischen Methoden behandeln.

In Anlehnung an die dargestellten, differentiellen Beziehungen lassen sich die Belastungsvektoren des Einzelstabes zur linearen Berechnung von Stabtragwerken nach **Withum** [W-03] ableiten, um daraus unter Verwendung von FE-Methoden, z.B. nach **Zienkiewicz** [Z-02], die Strukturverformungen zu berechnen. Auf die Details der linearen FE-Methode wird hier nicht weiter eingegangen, sondern auf die zahlreichen Veröffentlichungen zur Methode der Finiten Elemente verwiesen. Die Behandlung des „Lastfalles Temperatur“ an ebenen Stabtragwerken unter Verwendung von Übertragungsmatrizen gekoppelt mit der FE-Methode wurde in **Kroyer** [K-02] ausführlich dargestellt. Die Stabendschnittgrößen ergeben sich für reine Temperaturbelastung nach **Hennlich** [H-04] unter Verwendung der linearen Steifigkeitsbeziehung für den ebenen Einzelstab aus den lokalen Stabendverformungen gemäß nachfolgender Beziehung:

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 S_{L,i}^{(e)} \\
 S_{N,i}^{(e)} \\
 S_{M,i}^{(e)} \\
 S_{L,j}^{(e)} \\
 S_{N,j}^{(e)} \\
 S_{M,j}^{(e)}
 \end{array} \right\} = \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
 \hline
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 u_{L,i}^{(e)} \\
 u_{N,i}^{(e)} \\
 u_{M,i}^{(e)} \\
 u_{L,j}^{(e)} \\
 u_{N,j}^{(e)} \\
 u_{M,j}^{(e)}
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 -EA\alpha_T(\theta - \theta_{REF}) \\
 0 \\
 -EI\alpha_T(\theta - \theta_{REF})/h \\
 EA\alpha_T(\theta - \theta_{REF}) \\
 0 \\
 EI\alpha_T(\theta - \theta_{REF})/h
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \end{array}$$

(G-7)

Sind die Stabendschnittgrößen bekannt, lassen sich die Stabschnittgrößen an beliebiger Stelle analog zur Ermittlung der Festeinspannungsgrößen unter Verwendung von Übertragungsmatrizen berechnen.

Die bislang dargestellten Grundlagen zeigten lediglich die Möglichkeiten zur Erfassung von Temperatureinflüssen der klassischen Stabstatik und sind für das weitere Verständnis der Problematik geeignet. Eine Erweiterung auf nichtlineares Strukturverhalten unter Einbeziehung von Plastizität erfordert zusätzlichen Forschungsbedarf.

Extensive Forschungen wurden in den vergangenen Jahrzehnten in die Entwicklung von nichtlinearen FE-Methoden auf Basis von isoparametrischen Elementformulierungen, z.B. **Bathe** [B-02] oder **Huebner, Dewhirst, Smith, Byrom** [H-07], durchgeführt und verifiziert. Für das Verständnis und die Anwendung dieser Forschungsergebnisse erfolgt nochmals eine kurze Darstellung in den beiden nachfolgenden Kapiteln.

2.5 Strukturberechnung zeitabhängiger Vorgänge mit FE-Methoden

Wird zunächst nur das Strukturverhalten betrachtet, dann kann dies unter Verwendung der Bewegungsgleichung für eine Finite Elemente Analyse in inkrementeller Darstellung nach **Bathe** [B-02] wie folgt angeschrieben werden

$$M {}^{t+\Delta t}\ddot{U} + C {}^{t+\Delta t}\dot{U} + {}^tK \Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \quad , \quad (\text{S-1})$$

wobei

- M die Massenmatrix des Systems,
- C die Dämpfungsmatrix, z.B. RAYLEIGH-Dämpfung $C = \alpha M + \beta K$,
- tK die Tangentensteifigkeitsmatrix des Systems zur Zeit t ,
- ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ der Vektor der Knotenpunktbeschleunigungen zur Zeit $t + \Delta t$,
- ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ der Vektor der Knotenpunktgeschwindigkeiten zur Zeit $t + \Delta t$,
- ΔU der Vektor der inkrementellen Knotenpunktverschiebungen, d.h.
 $\Delta U = {}^{t+\Delta t}U - {}^tU$,
- ${}^{t+\Delta t}R$ der Vektor der externen Knotenpunktlasten zur Zeit $t + \Delta t$ und
- tF der Vektor der Knotenpunktkräfte infolge der internen Elementspannungen zur Zeit t

ist.

Für eine weitere Betrachtung ist es sinnvoll, die zu berechnenden Größen von den bekannten Größen zu trennen, und in Gleichung (S-2) umzuschreiben

$${}^tK \Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF - M {}^{t+\Delta t}\ddot{U} - C {}^{t+\Delta t}\dot{U} \quad . \quad (\text{S-2})$$

Die Lösung von Gleichung (S-2) kann unter Verwendung der Newmark-Methode auf Basis eines erweiterten Ansatzes zur Annahme einer linearen Beschleunigung nach **Bathe** und **Wilson** [B-04] mit impliziter Zeitintegration erfolgen. Die Newmark-Methode wird als übliches Verfahren zur Lösung von zeitabhängigen Berechnungen eingesetzt, da für lineare Systeme nachgewiesen werden kann, dass das Verfahren unabhängig von der Wahl des Zeitschritts stabil ist, also keine numerische Dämpfung oder Anfachung der Schwingung entsteht. Hierin liegt, nach **Rogalla** [R-04], bei der praktischen Anwendung des Verfahrens, ein wesentlicher Nachteil. Die bei einer dynamischen Untersuchung zu Beginn der Rechnung häufig unvermeidbaren, numerisch bedingten Oberschwingungen bleiben im Verlauf der Rechnung erhalten, werden also nicht ausgedämpft. Trotzdem scheint es sinnvoll mit der impliziten Newmark-Methode starke und schwache Nichtlinearitäten zu untersuchen, da durch die iterative Lösung bereits eine partielle Verifizierung der gelösten Ungleichgewichte stattfindet.

Zur Lösung der Bewegungsgleichung (S-2) werden Ansätze für die Geschwindigkeit und die Verschiebungen unter Annahme einer konstant-linearen Beschleunigung an den Knotenpunkten der diskreten Struktur zur Zeit $t + \Delta t$ getroffen, wie sie nachfolgend dargestellt sind.

Geschwindigkeit zur Zeit $t + \Delta t$ ${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + [(1-\delta) {}^t\ddot{U} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{U}] \Delta t$ (S-3a)

Verschiebung zur Zeit $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + {}^t\dot{U}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{U} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \Delta t^2 \quad (\text{S-3b})$$

In Gleichung (S-2) wird die Beschleunigung ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ und die Geschwindigkeit ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ zur Zeit $t + \Delta t$ benötigt, welche gemäß Gleichung (S-3a/b) angenommen werden kann.

Unter Verwendung der nachfolgenden Integrationskonstanten

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0,5 & \alpha &\geq 0,25(0,5 + \delta)^2 \\ a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} & a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) & a_6 &= \Delta t(1 - \delta) & a_7 &= \delta \Delta t \end{aligned}$$

und der inkrementellen Knotenpunktverschiebung erhalten wir für die Beschleunigung ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ zur Zeit $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{U} = a_0 \Delta U - a_2 {}^t\dot{U} - a_3 {}^t\ddot{U} ,$$

sowie die Geschwindigkeit ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ zur Zeit $t + \Delta t$ unter Verwendung der Beschleunigungsantwort ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ zu Zeit $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + a_6 {}^t\dot{U} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{U} .$$

Die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten zur Zeit $t + \Delta t$ und die Beschleunigungen zur Zeit $t + \Delta t$ werden nun in Gleichung (S-2) eingesetzt und es ergibt sich Gleichung (S-4).

$$\left({}^tK + a_0 M + a_1 C \right) \Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF + M \left(a_2 {}^t\dot{U} + a_3 {}^t\ddot{U} \right) + C \left(a_4 {}^t\dot{U} + a_5 {}^t\ddot{U} \right) \quad (\text{S-4})$$

Als weitere Vereinfachung wird eine effektive Steifigkeitsmatrix \hat{K} zur Zeit $t + \Delta t$

$$\hat{K} = {}^tK + a_0 M + a_1 C$$

und

der effektive Belastungsvektor ${}^{t+\Delta t}\hat{R}$ zur Zeit $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\hat{R} = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF + M(a_2 {}^t\dot{U} + a_3 {}^t\ddot{U}) + C(a_4 {}^t\dot{U} + a_5 {}^t\ddot{U})$$

definiert.

Nun lässt sich Gleichung (S-4) erneut anschreiben

$$\hat{K} {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}\hat{R} \tag{S-5}$$

Die Beschleunigung ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ und die Geschwindigkeit ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ zur Zeit $t + \Delta t$ muss nun für jeden Zeitschritt gemäß dem gewählten Ansatz für Beschleunigungen neu berechnet werden.

Gleichung (S-5) wird rekursiv für alle Zeitschritte gelöst, wobei sich die Zeitschritte während der inkrementellen Berechnung verändern können. Die iterative Lösung von Gleichung (S-5) ist von **Bathe et. al.** [B-02] detailliert behandelt.

Nach iterativer Lösung von Gleichung (S-2) ergeben sich die Knotenpunktverschiebungen ${}^{t+\Delta t}U$ zur Zeit $t + \Delta t$ mit

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + \Delta U \tag{S-6}$$

Infolge einer sukzessiven Strukturanalyse verändert sich das Systemverhalten und ein wesentlicher Teil der nichtlinearen Analyse ist die Berechnung des internen Knotenkraftvektors ${}^{t+\Delta t}F$ für jeden Iterationsschritt in dem das nichtlineare Werkstoffverhalten erfasst wird.

Für instationäre Beanspruchungen ist der externe Lastvektor ${}^{t+\Delta t}R$ zu jedem Zeitpunkt $t+\Delta t$ wie nachfolgend dargestellt neu zu bilden.

Der externe Lastvektor ${}^{t+\Delta t}R$ setzt sich nach **Bathe** [B-02] zusammen aus

$$R_B \quad \dots \text{Volumenkräften} \quad R_B = \int_V H^T f^B dV \quad ,$$

$$R_S \quad \dots \text{Oberflächenkräften} \quad R_S = \int_S H^{S^T} f^S dS$$

und

$$R_I \quad \dots \text{Innere Spannungen, z.B. Temperaturlasten} \quad R_I = \int_V B^T \sigma^I dV \quad ,$$

wobei sich die inneren Spannungen σ^I infolge thermo-elastischen Materialverhaltens wie folgt formulieren lassen

$$\sigma^I = C(\varepsilon - \varepsilon^{TH}) \tag{S-7}$$

In Gleichung (S-7) beschreibt C die Elastizitätsmatrix, ε den Vektor der gesamten Strukturverzerrungen und ε^{TH} den Verzerrungsvektor infolge Temperaturbeanspruchung. Der Verzerrungsvektor bei Temperaturbeanspruchung lässt sich wie folgt schreiben

$$\varepsilon^{TH} = \alpha_T (\theta - \theta_{REF}) \quad . \quad (S-8)$$

In Gleichung (S-8) gibt α_T den Temperatúrausdehnungskoeffizienten des Werkstoffes, θ die einwirkende Temperatur und θ_{REF} die Referenztemperatur der Struktur an.

Infolge einer auf die Struktur einwirkenden Wärmequelle ist die auftretende Temperatur θ eine Funktion des Wärmestroms innerhalb der Struktur und der vorgegebenen Wärmequelle. Das bedeutet, in jedem Zeitschritt sind die örtlich wirksamen Temperaturen als Funktion der Wärmequelle für die Zeit $t+\Delta t$ neu zu bestimmen. Verändern sich die Werkstoffkennwerte als Funktion der Temperatur, so erfordert die Lösung von Gleichung (S-5) gleichfalls ein iteratives Vorgehen.

2.6 Temperatur-Struktur-Koppelung

Wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten gezeigt wurde, ist es möglich, Temperaturanalysen und korrespondierende Strukturberechnungen entkoppelt und sequentiell durchzuführen. Gleichzeitig kann an unterschiedlichen Forschungsarbeiten und Anwendungen gezeigt werden, dass die gekoppelte Betrachtung mit verschiedenartigsten Zielsetzungen nötig ist.

Von **Rammersdorfer et. al.** [R-02] wurde die Analyse des Eigenspannungsverhaltens bei Wärmebehandlungsvorgängen an zylindrischen Rohrstrukturen gezeigt. In diese Untersuchungen wurden ebenfalls Effekte der Kriechens und des Phasenübergangs mit einbezogen. Die Ergebnisse in [R-02] zeigen, dass das Kriechverhalten für den untersuchten Spannungs- und Temperaturbereich beim eingesetzten Stahlwerkstoff und kurzen Temperatureinwirkzeiten, hier 300 [sec], einen geringen Einfluss hat. Da in der vorliegenden Arbeit in einem ersten Schritt nur die Temperatureinwirkung über einen kurzen Zeitabschnitt betrachtet werden soll, werden Kriechphänomene in dieser Arbeit nicht weiter beachtet. In **Paulke** [P-01] wurde mittels nichtlinearer thermomechanisch gekoppelter Grundgleichungen für Schalentragwerke die Möglichkeit geschaffen, Stabilitätsphänomene an thermisch beanspruchten Flächentragwerken, z.B. Tragflügeln infolge thermischer Aufheizung, zu untersuchen. In dieser Arbeit wurde die Einwirkung einer schockartigen, harmonischen Temperaturbelastung unter Einbeziehung eines thermo-elastischen Werkstoffverhaltens am Beispiel einer Platte gezeigt. In **Wald** [W-02] wurde die thermomechanische Interaktion von Hyperschallströmungen mit Strukturelementen durch Koppelung einer Navier-Stokes-Berechnung an einem linsenförmigen Überschallprofil gezeigt. Die Ermittlung der Strukturantworten wurde unter Annahme von linear elastischem Werkstoffverhalten durchgeführt. Die Auswirkungen des übertragenen Wärmestroms auf Strukturverformung und Spannungsverhalten wurden dort nicht dargestellt. In **Thornton** [T-01] finden sich mehrere Ansätze auf Grundlage von thermoelastischem Struktur- und Werkstoffverhalten zur thermisch-mechanisch gekoppelten Analyse sowohl an Flächen-, als auch an Stab- und Balkenstrukturen. Zur Berechnung der Strukturen werden sowohl klassische Ansätze der Wärmeübertragung als auch FE-Verfahren herangezogen. Als beispielhafte Anwendungen werden hier thermisch induzierte Schwingungen sowie Stabilitätsprobleme an einfachen Stab-, Balken-, Platten- und Schalenstrukturen behandelt. Weiterhin werden Ansätze zur viskoplastischen Berechnung einer 2D-Struktur, hier auch nur über einen sehr kurzen Zeitraum von 1,2 [sec], aufgeführt.

Aus dem Bereich des Bauwesens hat **Zehfuß** [Z-01] ein Rechenmodell für die Tragwerksanalyse im Brandfall unter Verwendung von **ANSYS™** vorgestellt. In diesem Berechnungsmodell wurden Versagenszustände anhand von Validierungsbeispielen, basierend auf dem Konzept der Brandlast Q [MJ] simuliert. Unter dem Begriff der Brandlast ist die Summe der Verbrennungswärme sämtlicher, in einem bestimmten Raum oder Körper enthaltenen brennbaren Stoffe, inklusive der Bekleidungen von Decken, Fußböden, Wänden und Trennwänden zu verstehen. Daraus können die Brandlastdichten q [MJ/m²] bei verschiedenen Nutzungen nach EN1991-1-2 abgeschätzt werden. In dieser Simulation wurden Elastizitätsmodul, Wärmeausdehnungskoeffizient und Querdehnungszahl temperaturabhängig vorgegeben. Da für die brandschutztechnische Beurteilung davon ausgegangen wird, dass nur das berechnete Temperaturfeld einen Einfluss auf die mechanische Analyse hat, wurde nur

eine einseitige Koppelung, d.h. Temperaturfeldberechnung mit anschließender Strukturberechnung, durchgeführt. Ebenso wurden Langzeit-Kriechvorgänge in Anlehnung an EC2-1-2 für die mechanische Analyse brandbeanspruchter Bauteile und Tragwerke vernachlässigt. Auf die Bedeutung, thermische Spannungen im richtigen Zusammenhang zu sehen und zu beurteilen, weisen **Hellmann & Krätzig** [H-02] hin. Dies geschieht im Zusammenhang mit der Spannungskategorisierung unter Einschluss der thermischen Wirkungen für thermisch hoch beanspruchte Tragwerke. Dabei wird herausgestellt, dass thermische Einwirkungen im üblichen konstruktiven Ingenieurbau eine wichtige, aber selten eine für die Tragsicherheit dominierende Rolle einnehmen. Bereits diese Situation stellt bei Einwirkung von höheren Temperaturen, nach Eurocode 4 bis zu 500 [°C], für üblichen Baustahl eine erhebliche Anforderung dar. In diesem Aufsatz wird bereits darauf hingewiesen, dass selbst an Tragwerken, die nach dem Stand der Technik dimensioniert wurden, erhebliche Schäden durch unkontrolliert hohe Deformationen bis hin zu stark verkürzten technischen Lebensdauern infolge Rissbildungen beobachtet wurden. **Hellmann** [H-03] hat den Einfluss von nichtlinearen thermischen Spannungen und zugehörigen Formänderungen in thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stahlbau-Profilstäben untersucht. Für diesen speziellen Beanspruchungsfall konnte eine analytische Berechnungsmethode für thermo-elastisches Werkstoffverhalten unter der Annahme von quasi-stationären Temperaturfeldern entwickelt werden.

In einer Untersuchung zur Bestimmung der Schweißseigenstressungen konnte **Pasquale** [P-02] unter Verwendung des FE-Programmsystems SYSWELD+ an dem zweidimensionalen Modell einer Schweißnaht eine thermisch-mechanische Simulation unter Einbeziehung von thermo-metallurgischen Effekten durchführen.

In allen aufgeführten Arbeiten wurden jeweils schwierige Fragestellungen zur thermisch-mechanischen Koppelung bearbeitet. Die aufgezeigten Untersuchungen basieren jedoch auf vergleichsweise einfachen Geometrien, Randbedingungen und Belastungsannahmen. Eine durchgängige Betrachtung der einwirkenden Einfluss- und Antwortgrößen, wie sie bei zeitveränderlicher Temperatureinwirkung zu berücksichtigen ist, ist in den vorhandenen Arbeiten nicht enthalten. Auf Grund des hohen Komplexitätsgrades in den aufgeführten Arbeiten, ist eine Übertragung auf ein Analysemodell von reduzierter Ordnung nur mit großem Aufwand denkbar.

2.7 Werkstofffestigkeit

Alle bisher dargestellten Einflussparameter und Anforderungen an thermisch hochbeanspruchten Strukturen erlauben keine Einschränkung auf rein thermo-elastisches Strukturverhalten, d.h. die Möglichkeit einer thermo-plastischen Strukturantwort muss für eine verallgemeinerte Betrachtung mit abgebildet werden. Wie bereits in Gleichung (S-5) gezeigt wurde, muss die Beschreibung des inneren Spannungszustandes zu einem beliebigen Zeitpunkt τ auf Grundlage des vorliegenden Verzerrungszustandes erfolgen. Zur Formulierung eines Materialmodells für kleine Verzerrungen wird der Verzerrungstensor nach Gleichung (M-1), ausgedrückt als Summe aus den elastischen, plastischen und thermischen Verzerrungen, benutzt

$${}^{\tau}e_{ij} = {}^{\tau}e_{ij}^E + {}^{\tau}e_{ij}^P + {}^{\tau}e_{ij}^{TH} . \quad (M-1)$$

In Gleichung (M-1) beschreiben ${}^{\tau}e_{ij}$ die Komponenten des vollständigen Verzerrungstensors, ${}^{\tau}e_{ij}^E$ die Komponenten des elastischen Verzerrungstensors, ${}^{\tau}e_{ij}^P$ die Komponenten des plastischen Verzerrungstensors und ${}^{\tau}e_{ij}^{TH}$ die Komponenten des thermischen Verzerrungstensors zum Zeitpunkt τ . Basierend auf der allgemeinen Beziehung von Gleichung (M-1) ist es möglich, das Zeitstandsverhalten, z.B. Kriechen, von Werkstoffen mit abzubilden. In dieser Arbeit wird Kriechverhalten nicht weiter betrachtet, da es gemäß dem Stand der Wissenschaft als keine primäre Kenngröße für Kurzzeitanalysen eingestuft werden kann.

Der Spannungstensor zum Zeitpunkt τ unter Einbeziehung von isotropem, thermo-elastischen Materialverhalten lässt sich dann in Gleichung (M-2) wie folgt anschreiben,

$${}^{\tau}\sigma_{ij} = {}^{\tau}C_{ijrs} \left({}^{\tau}e_{rs} - {}^{\tau}e_{rs}^P - {}^{\tau}e_{rs}^{TH} \right) \quad (M-2)$$

wobei ${}^{\tau}C_{ijrs}$ die Komponenten des elastischen Materialtensors, siehe auch **Malvern** [M-02] oder **Flügge** [F-02], mit

$${}^{\tau}C_{ijrs} = {}^{\tau}\lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + {}^{\tau}\mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) ,$$

und den Lamé-Konstanten (1852)

$${}^{\tau}\lambda = \frac{{}^{\tau}E {}^{\tau}\nu}{(1+{}^{\tau}\nu)(1-2{}^{\tau}\nu)} \quad {}^{\tau}\mu = \frac{{}^{\tau}E}{2(1+{}^{\tau}\nu)} ,$$

beschreiben. In diesen Gleichungen beschreibt ${}^{\tau}E$ den Elastizitätsmodul und ${}^{\tau}\nu$ die Querdehnzahl zum Zeitpunkt τ , sowie δ_{ij} das "Kronecker"-Delta.

Zur Formulierung eines Werkstoffgesetzes unter Einbeziehung von plastischem Werkstoffverhalten sind drei Kriterien erforderlich:

- eine Fließbedingung, welche angibt, ob für einen vorgegebenen Spannungszustand Fließen eintritt
- ein Fließgesetz, welches die plastischen Verzerrungsanteile $d\varepsilon_{ij}$ mit den Spannungsinkrementen $d\sigma_{ij}$ für den aktuellen Spannungszustand verknüpft
- eine Verfestigungsregel, welche die Änderung der Fließbedingung während der plastischen Verformung beschreibt.

Zur Ableitung eines einachsigen Vergleichszustandes ist es zweckmäßig, den Spannungstensor gemäß Gleichung (M-2) in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil aufzuspalten, vergleiche **Szabó** [S-10]. Unter Verwendung der elastischen und thermischen Verzerrungsanteile lassen sich die Komponenten des deviatorischen Spannungstensors mit Gleichung (M-3) anschreiben,

$${}^{\tau}S_{ij} = {}^{\tau}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}{}^{\tau}\sigma_{mm}\delta_{ij} \quad (M-3)$$

wobei für isothermales Wärmeausdehnungsverhalten gilt

$${}^{\tau}\sigma_{mm} = \frac{{}^{\tau}E}{1-2{}^{\tau}\nu} ({}^{\tau}e_m - {}^{\tau}e^{TH}) \quad (M-4)$$

In Gleichung (M-4) ist ${}^{\tau}e_m = {}^{\tau}e_{ii}/3$ und ${}^{\tau}e^{TH}$ die thermische Verzerrung.

Für isotropes Verfestigungsverhalten, siehe auch **Reckling** [R-03], bestimmt sich die v. Mises'sche Vergleichsspannung zu

$${}^{\tau}\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{3}{2}{}^{\tau}S_{ij}{}^{\tau}S_{ij}} \quad (M-5)$$

Unter Einbeziehung der Fließgrenze σ_y eines Werkstoffes, lässt sich die Fließfunktion für metallische Werkstoffe durch eine einparametrische Fließfunktion darstellen. Dadurch folgt für den Fall einer isotropen Verfestigung

$${}^{\tau}F = \frac{1}{2}{}^{\tau}S_{lm}{}^{\tau}S_{lm} - \frac{1}{3}{}^{\tau}\sigma_y^2 \quad (M-6)$$

Für den Fall einer kinematischen Verfestigung, in der die Verschiebung der Fließfläche durch den Parameter ${}^{\tau}\alpha$ berücksichtigt wird, siehe auch **Kojic** und **Bathe** [K-03], gilt

$${}^{\tau}F = \frac{1}{2}({}^{\tau}S_{lm} - {}^{\tau}\alpha_{lm})({}^{\tau}S_{lm} + {}^{\tau}\alpha_{lm}) - \frac{1}{3}{}^{\tau}\sigma_y^2 \quad (M-7)$$

Die plastische Verzerrungsrate kann nun unter Verwendung eines zeitunabhängigen Plastizitätsmodelles, vergleiche **Snyder** und **Bathe** [S-05], unter Einbeziehung der Fließbedingung

$${}^{\tau}F = {}^{\tau}F({}^{\tau}\sigma_{ij}, {}^{\tau}\alpha_{ij}, {}^{\tau}\sigma_y) \quad (M-8)$$

für nicht-isothermisches Werkstoffverhalten berechnet werden. Für elastisches Verhalten gilt ${}^{\tau}F < 0$ und für plastisches Verhalten muss ${}^{\tau}F = 0$ gelten, d.h. die Fließbedingung ist i.a. iterativ zu lösen. Dabei ist zu beachten, dass ${}^{\tau}\alpha_{ij}$ und ${}^{\tau}\sigma_y$ von der plastischen Verformungsgeschichte und von der Temperatur abhängen. Die plastische Verzerrungsrate ergibt sich nach der Prandtl-Reuss-Fließregel, siehe auch **Göldner** [G-01], zu

$${}^{\tau}\dot{e}_{ij}^P = {}^{\tau}\Lambda \frac{\partial {}^{\tau}F}{\partial {}^{\tau}\sigma_{ij}} \quad (M-9)$$

Das Verfestigungsverhalten wird in dieser Arbeit nur für ein bi-lineares Werkstoffgesetz betrachtet, da beabsichtigt ist, lediglich Interaktionseffekte zu untersuchen.

Die effektive Fließspannung für eine vorgegebene Temperatur ${}^{\tau}\theta$ und ${}^{\tau}\sigma \geq {}^{\tau}\sigma_{yv}$ wird aus nachfolgender Gleichung erhalten,

$${}^{\tau}\sigma_y = {}^{\tau}\sigma_{yv} + {}^{\tau}E_T \left({}^{\tau}e - \frac{{}^{\tau}\sigma_{yv}}{{}^{\tau}E} \right) \quad (M-10)$$

wobei die geometrischen Zusammenhänge in **Abb. 15** für elastische, lineare Verfestigungsverfestigung nach **Owen** und **Hinton** [O-01] abgeleitet werden.

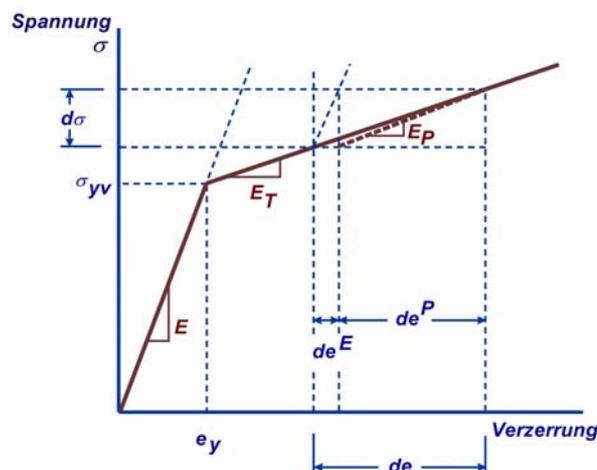


Abb. 15: Bi-Lineare Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (Uniaxial)

Die plastische Verzerrung ${}^{\tau}e^P$ nach Gleichung (M-11) kann dann aus Gleichung (M-10) für eine einachsige Beanspruchung direkt entnommen werden.

$${}^{\tau}e^P = {}^{\tau}e - \frac{{}^{\tau}\sigma_y}{{}^{\tau}E} \quad (\text{M-11})$$

Wird Gleichung (M-11) in Gleichung (M-10) eingesetzt, so berechnet sich die Fließspannung zum Zeitpunkt τ nach Gleichung (M-12).

$${}^{\tau}\sigma_y = \frac{{}^{\tau}E^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} {}^{\tau}e^P + {}^{\tau}\sigma_{yv} = {}^{\tau}E_P {}^{\tau}e^P + {}^{\tau}\sigma_{yv} \quad (\text{M-12})$$

Welches Verfestigungsverhalten in einer Konstruktion maßgebend ist, d.h. infolge der einwirkenden Belastungen die ungünstigsten Strukturantworten zeigt, ist im Allgemeinen nicht bekannt. Deshalb ist sowohl isotrope, als auch kinematische Verfestigung in eine Analyse mit einzubeziehen. Die Fließbedingung in Gleichung (M-8) wird dabei für nicht-isothermische, isotrope Verfestigung betrachtet, da die Fließspannung ${}^{\tau}\sigma_y = {}^{\tau}\sigma_y({}^{\tau}e^P, {}^{\tau}\theta)$ eine Funktion der plastischen Verzerrung und der Temperatur, unter Einbeziehung der Materialcharakteristik nach [Abb. 16](#) und [Abb. 17](#), ist.

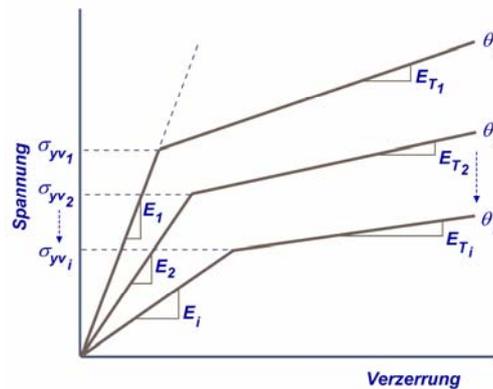


Abb. 16: Idealierte Spannungs-Verzerrungs-Beziehung infolge Temperatur für bilineares Werkstoffverhalten

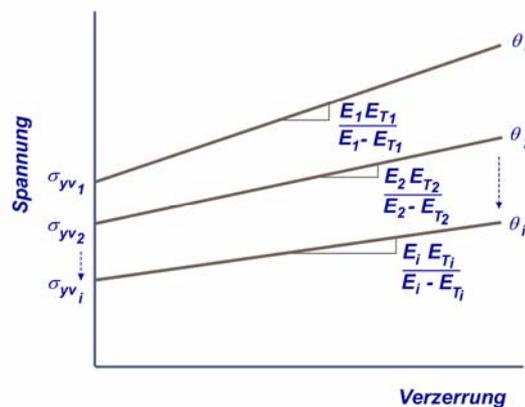


Abb. 17: Idealierte Beziehungen zwischen Spannungen und plastischen Verzerrungen infolge Temperatur

Eine detaillierte Darstellung zur Herleitung eines thermo-elastisch-plastischen Stoffgesetzes findet sich in **Snyder** und **Bathe** [S-05] und ist auszugsweise in **Anhang D** wiedergegeben. Auf alternative Methoden zur Beschreibung von thermo-plastischen Materialmodellen wird auszugsweise auf **Kojic** und **Bathe** [K-03] verwiesen.

Die Gleichung (M-1) bis (M-13) gelten für einen beliebigen Zeitpunkt τ innerhalb des betrachteten Zeitintervalls. Bis zum Erreichen des Fließzustandes eines Materialpunktes liegt thermo-elastisches Verhalten vor und die Spannung ${}^{\tau}\sigma$ kann nach Gleichung (S-7) unmittelbar berechnet werden. Oberhalb des Fließpunktes ist bei der Berechnung die Spannung ${}^{\tau}\sigma$ die sukzessive zunehmende plastische Verzerrung für den Fall von isotroper Verfestigung zu berücksichtigen.

Die Berechnung der zugehörigen Spannungen ${}^{t+\Delta t}\sigma$ zur Zeit $t+\Delta t$ für den vorhandenen thermo-plastischen Verzerrungszustand erfolgt deshalb auf inkrementeller Basis durch

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + \int_{{}^t e}^{{}^{t+\Delta t} e} {}^{\tau} C^E d(e - e^{PL} - e^{TH}) \quad (M-13)$$

Da die plastischen Verzerrungen für den Zeitpunkt $t+\Delta t$ nicht bekannt sind, wird Gleichung (M-13) inkrementell und iterativ unter Verwendung eines Einschrittverfahrens, bekannt auch unter α -Methode, gelöst.

2.8 Wärmequellen

2.8.1 Aerodynamische Aufheizung

Bei Körpern, die mit hoher Geschwindigkeit von der Luft angeströmt werden, stellen sich im Bereich des Staupunktes hohe Temperaturen ein. Als Beispiel hierfür können Strömungsaufnahmen von Projektilen und Wiedereintrittskörpern dienen, siehe [Abb. 18](#), welche im Rahmen der „Blunt-Body“-Theorie von Julian Allen erforscht und entwickelt wurde. Dadurch gelang es Hitzeschildkonstruktionen für Mercury, Gemini und Apollo Raumkapseln zu entwickeln, um den Wiedereintritt in die Erdatmosphäre zu ermöglichen. Das Ergebnis war, dass „Stumpfe Körper“ kühler bleiben als Strömungskörper mit geringen Spitzenwiderständen.

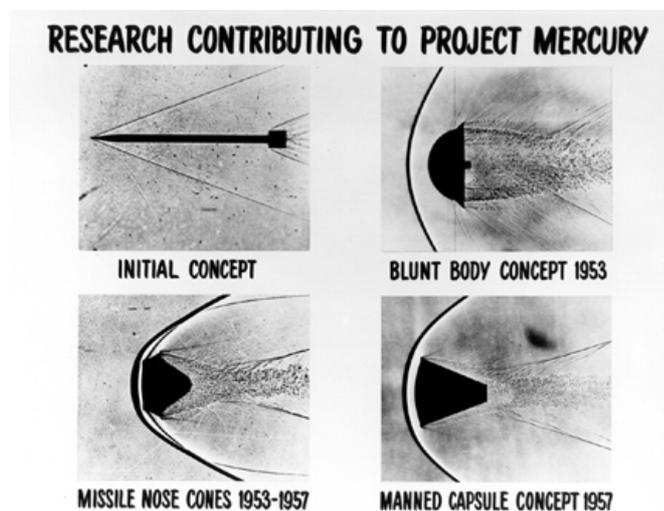


Abb. 18: Strömungsprofile im Überschallbereich /NASA/

Die dabei im Staupunkt entstehenden Temperaturen werden für Idealgasbedingungen nach **Anderson** [A-01] wie folgt angegeben

$$\frac{T_{Stag}}{T_0} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 . \quad (W-11)$$

Für Bedingungen der Standardatmosphäre ergibt sich der Isentropen-Exponent $\gamma = c_p / c_v$ zu $\gamma = 1,4$, wobei c_p und c_v die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck bzw. konstanter Temperatur sind. Diese Beziehung lässt sich für verschiedene Machzahlen und einer vorgegebenen Referenztemperatur T_0 tabellarisch auswerten und graphisch darstellen. Für $T_0 = 273,15 [K]$ zeigt sich ein Verlauf der Temperatur im Staupunkt wie er in [Abb. 19](#) aufgetragen ist. Aus dem Diagramm lässt sich unmittelbar die zugehörige Temperatur im Staupunkt von $T_{Stagnation} = 1638,9 [Kelvin]$ für eine Strömungsgeschwindigkeit von Mach 5 ablesen. Bis zu diesen Strömungsgeschwindigkeiten wurden von **Belotserkovskiy** [B-05] Gittersteuerflächen entwickelt.

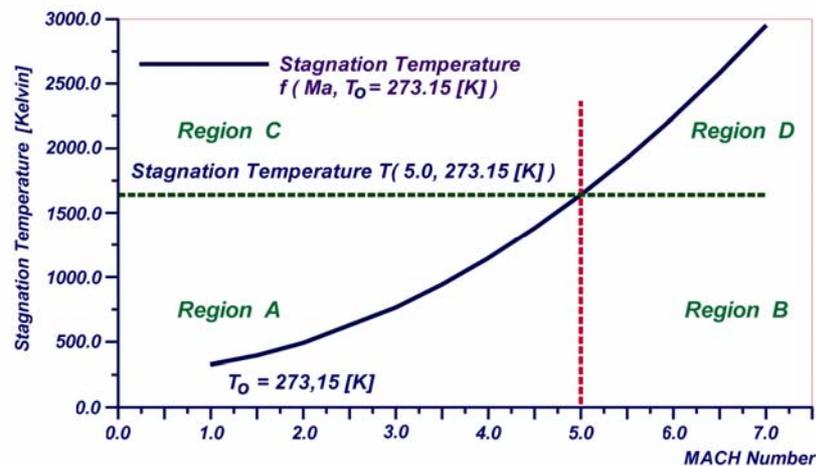


Abb. 19: Temperaturverlauf im Staupunkt für Strömungsgeschwindigkeiten $1,0 < \text{Mach} < 7,0$ unter Idealgasbedingungen ($\gamma=1,4$)

Es lassen sich vier Bereiche für eine vereinfachte Klassifizierung festlegen:

- **Bereich A** Auslegungsbereich für Gittersteuerflächen nach **Belotserkovskiy** [B-05], d.h. dieser Bereich wurde bereits erforscht und scheint beherrschbar obwohl keine Zeitangaben bezüglich Temperatureinwirkung gegeben sind.
- **Bereiche B/C** könnte bedingt für kurze Aufheizungsphasen möglich sein, wobei dann der zeitliche Verlauf des thermo-mechanischen Strukturverhaltens untersucht werden muss.
- **Bereich D** erscheint als ein Gebiet, dass sowohl in Bezug auf die Auslegung von Strukturen, als auch bezüglich verfügbarer Werkstofftechnologie noch weitgehend unerforscht ist.

Nach **Anderson** [A-02] setzen bereits ab einem Geschwindigkeitsbereich von ca. Mach $> 3,8$ infolge der aerothermischen Aufheizung chemische Reaktionen ein, die zu einem Dissoziationsverhalten der Luft führen und damit ein Aufheizen der Grenzschicht verlangsamen, d.h. Gleichung (W-11) verliert für höhere Geschwindigkeiten ihre Gültigkeit. Für erste Abschätzungen und Vorüberlegungen soll dieser Ansatz nach Gleichung (W-11) näherungsweise ausreichend sein.

Während das Verformungs- und Spannungsverhalten von Festkörperstrukturen durch die Wärmeleitungs- und Wärmespeichereigenschaften beeinflusst werden, sind für den Wärmeeintrag in eine Struktur der konvektive Wärmeübergang, bei umströmten Strukturen vorrangig erzwungene Konvektion, sowie die Wärmestrahlung, von Bedeutung. Die Berechnung von Konvektions- und Strahlungsvorgängen in Strömungen, speziell von Körper- und Profilmströmung, erfolgt mittels Einsatz von numerischen Methoden, ist kompliziert, erfordert extreme Ressourcen in Bezug auf Rechnerleistung und verlangt Erfahrung in der Ergebnisbeurteilung.

Die Tendenz der aktuellen Forschung zur Ermittlung der vollständigen Strömungskenngrößen, wie die Strömungsgeschwindigkeiten u , v , w bei dreidimensionaler Strömung, Druck, und Temperatur erfolgt auf Basis der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Grundlagen hierzu sind u.a. in **Truckenbrodt** [T-02], **Anderson** [A-03] und **Fletcher** [F-01] dargestellt. Die Kenntnis dieser Grundlagen zeigt, dass sich Methoden die auf der Lösung von Navier-Stokes-Gleichungen basieren, nur mit spezifischen Kenntnissen in der numerischen Strömungssimulation auf komplexe Strukturen anwenden lassen und keine unmittelbare Übertragung auf vereinfachte Berechnungsmodelle ermöglichen.

Zur experimentellen Ermittlung des Wärmeübergangsverhaltens haben **Carlomagno** und **de Luca** in [C-02] ein Verfahren auf Basis von Thermographie gezeigt, dass nicht nur die Visualisierung des Wärmeübergangs ermöglicht, sondern auch zusätzlich die Bestimmung der Wärmeübergangskoeffizienten beinhaltet. Als typischer Temperaturbereich für das Verfahren wird 20-800 [°C] angegeben, der sich lt. Aussage in [C-02] auch auf den Bereich von Temperaturen zwischen 1500-2000 [°C] erweitern lässt.

Ein konventioneller Ansatz zur Ermittlung des Wärmeeintrags in eine Struktur, infolge erzwungener Konvektion kann unter Verwendung der Grenzschichttheorie, siehe u.a. **Schlichting** und **Gersten** [S-04], **Incropera** und **DeWitt** [I-01] oder **Spurk** [S-09], erfolgen. Für eine vereinfachte Betrachtung lassen sich die Lösungen der Grenzschichtgleichungen einer „flachen Platte“ auf schlanke Profile übertragen. Das angeströmte Profil wird sich nicht nur an der Profilvorderkante erwärmen, sondern durch Konvektion auch längs der Profilkanten. Die Beziehungen des lokalen Wärmestroms nach Gleichung (W-4d) im Bereich der Temperaturgrenzschicht kann, unter der Annahme dass sich die Druckverhältnisse ($\partial p / \partial x = 0$) entlang der Wand in Strömungsrichtung nicht ändern, nach **Truitt** [T-03], siehe auch **Anderson** [A-04], wie folgt angeschrieben werden,

$$q_w = \frac{Q}{A} = h(T_{aw} - T_w) \quad (W-12)$$

wobei T_w die Oberflächentemperatur θ_{S3} nach Gleichung (W-4d) des umströmten Körpers beschreibt. In Gleichung (W-12) gibt h den Wärmeübergangskoeffizienten zwischen der Strukturoberfläche und dem umströmenden Fluid an. Mit T_{aw} wird die adiabatische Wandtemperatur, d.h. die Temperatur der wärmeisolierten bzw. vollkommen wärmeisolierten Wand bezeichnet. Ein negativer Betrag für den Wärmestrom in Gleichung (W-12) bedeutet, dass Wärme an das umgebende Medium übertragen wird. Der lokale Wärmeübergangskoeffizient h_x wird unter Verwendung der Nusselt-Zahl Nu oder Stanton-Zahl St , vergleiche **Hirschel** [H-05], in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re_x und der Prandtlzahl Pr bestimmt, wobei gilt

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{k_\infty} \quad (W-13)$$

und k_∞ die Wärmeleitfähigkeit des strömenden Mediums beschreibt. Mit x wird der Abstand zur vordersten Anströmkante, d.h. der Beginn der Grenzschicht, bezeichnet. Kenngrößen die sich auf den Zustand der ungestörten Strömung beziehen, werden mit dem Index „ ∞ “ gekennzeichnet.

Da sowohl laminare, als auch turbulente Strömungsverhältnisse auftreten können, wird die Nusselt-Zahl, siehe [I-01], wie folgt angegeben

Laminare Strömung $Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (0,6 \leq Pr \leq 50)$

Turbulente Strömung $Nu_x = 0,0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad (0,6 < Pr < 60)$

wobei für die lokale Reynoldszahl gilt

$$Re_x = \frac{\rho_\infty u_\infty x}{\mu_\infty} . \quad (W-14)$$

In Gleichung (W-14) definiert ρ_∞ die Dichte, μ_∞ die kinematische Viskosität und u_∞ die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung. Die Prandtl-Zahl kann angegeben werden als Quotient der kinematischen Viskosität μ_∞ und der Temperaturleitfähigkeit a

$$Pr = \frac{\mu_\infty}{a} . \quad (W-15)$$

Die Temperaturleitfähigkeit a in Gleichung (W-15) wird berechnet aus der Wärmeleitfähigkeit bezogen auf Dichte ρ_∞ und der spezifischen Wärme bei konstantem Druck c_p

$$a = \frac{k_\infty}{\rho_\infty c_p} . \quad (W-16)$$

Die adiabate Wandtemperatur kann angeschrieben werden, vergleiche **Triutt** [T-03], zu

$$\frac{T_{aw}}{T_\infty} = 1 + r \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) M_\infty^2 . \quad (W-17)$$

In Gleichung (W-17) beschreibt r den „recovery factor“ = „Rückgewinnungsfaktor“, γ den Isentropen-Exponenten und M_∞ die Machzahl der ungestörten Strömung. Der Rückgewinnungsfaktor in einer laminaren Strömung ist etwa proportional zur Quadratwurzel aus der Prandtl-Zahl $Pr_{lam} \approx 0,7$, d.h. $r_{lam} \approx 0,837$, welche jedoch bei genauer Betrachtung als Funktion der Umgebungstemperatur zu bestimmen ist. Wird eine turbulente Umströmung der Struktur angenommen, dann ergibt sich für der Rückgewinnungsfaktor zu

$$r_{turbulent} \approx Pr_{lam}^{1/3} \approx 0,7^{1/3} \approx 0,9 . \quad (W-18)$$

Aus Gleichung (W-12) lässt sich ablesen, dass der Betrag des Wärmestromvektors q_w zu einem betrachteten Zeitpunkt von den vorhandenen Wandtemperaturen zum betrachteten Zeitpunkt bestimmt wird. Gleichfalls lässt sich aus Gleichung (W-12) ablesen, dass sich mit zunehmender Oberflächentemperatur der Betrag des Wärmestromvektors verringert und gegebenenfalls sein Vorzeichen wechselt.

Für die Auswertung verschiedener exakter Lösungen der laminaren, kompressiblen Grenzschicht hat **Eckert** [E-02], vergleiche auch **Hirschel** [H-05], eine sehr einfache und dennoch genaue Methode angegeben, welche es gestattet, die vorab aufgeführten Beziehungen unter Einführung eines geeigneten Referenzzustandes basierend auf einer Referenztemperatur T^* auch für den kompressiblen Fall, d.h. variable Materialeigenschaften, zu verwenden

$$T^* = 0.5(T_\infty + T_w) + 0.22(T_{aw} - T_e) . \quad (W-19)$$

Mit Gleichung (W-19) lassen sich nun alle erforderlichen Kenngrößen für den konvektiven Wärmeübergang und die Wärmeübergangszahl für kompressible Strömung in Abhängigkeit der Referenztemperatur T^* berechnen.

Bemerkung: Die Literaturangaben zur Berechnung der Wärmeübertragung und Strömungslehre umfassen nur eine geringe Auswahl der verfügbaren Quellen um die erforderlichen Grundlagen darzustellen. Eine umfassende Darstellung würde den Rahmen der Arbeit übersteigen.

2.8.2 Brandbelastung

Ein unmittelbarer Bezug zur aerothermischen Aufheizung als Wärmequelle kann in der Einwirkung einer Brandbelastung gesehen werden. In Bezug auf die Gesetze der Wärmeübertragung lassen sich die gleichen Grundlagen und Gedankengänge einbringen, wobei möglicherweise im Gegensatz zu stromlinienförmig geformten Körpern der Luft- und Raumfahrt sehr viel komplexe Geometrien, vergleichbar zu Gittersteuerflächen, betrachtet werden müssen. Ein Ansatz zur Erfassung von Brandbelastung und Brandschutz erfolgt durch Berechnungskonzepte auf Basis von Wärmebilanzrechnungen, siehe **Baehre** [B-01]. Hierbei wird eine, sich im Brandraum befindliche Stahlkonstruktion betrachtet, wenn eine Wärmemenge Q , die im Zeitintervall Δt die Grenzschicht zwischen Rauchgas und Stahlprofil (pro Längeneinheit) passiert, einwirkt.

$$Q = h A_S (\theta_B - \theta_S) \Delta t \quad [J/m] \quad (\text{B-01})$$

Dabei beschreibt

- h die Wärmeübergangszahl in der Grenzschicht $[W/(m^2 \cdot K)]$,
- A_S die dem Brand ausgesetzte Fläche des Stahlprofils pro Längeneinheit $[m^2/m]$,
- θ_B die Temperatur im Brandraum zum Zeitpunkt t $[K]$,
- θ_S die Temperatur im Stahlprofil zum Zeitpunkt t $[K]$ und
- Δt das Zeitintervall $[s]$.

Die erforderliche Wärmemenge Q (pro Längeneinheit) zur Erwärmung eines Stahlprofils um den Wert $\Delta\theta_S$ $[^\circ K]$ beträgt

$$Q = c_{ps} \Delta\theta_S V_S \rho_S \quad [J/m] \quad (\text{B-02})$$

In Gleichung (B-02) ist

- c_{ps} die spez. Wärmekapazität von Stahl $[kJ/(kg \cdot K)]$,
- V_S das Volumen des Stahlprofils pro Längeneinheit $[m^3/m]$ und
- ρ_S die Dichte des Stahls $[kg/m^3]$.

Aus Gleichung (B-01) und (B-02) berechnet sich die Temperaturerhöhung $\Delta\theta_S$ im Zeitintervall Δt zu

$$\Delta\theta_S = \frac{h}{c_{ps} \rho_S} \frac{A_S}{V_S} (\theta_B - \theta_S) \Delta t \quad [K] \quad (\text{B-03})$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Temperatur im Stahlprofil zu jedem Zeitpunkt gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist, z.B. dünne Bleche, und dass der Wärmetransport eindimensional ist.

Die Wärmeübergangszahl h der Grenzschicht zwischen Rauchgas und Stahl besteht aus einem Konvektionsanteil h_K und einem Strahlungsanteil h_S . Es gilt

$$h = h_K + h_S = 23 + \frac{5,77 \varepsilon_R}{\theta_t - \theta_s} \left[\left(\frac{\theta_t + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{\theta_s + 273}{100} \right)^4 \right] \left[\frac{W}{m^2 K} \right]. \quad (\text{B-04})$$

Die resultierende Emissionszahl ε_R , Richtwerte siehe [B-01], ist abhängig von der Emissionszahl der Flammen ε_t und der Zahl ε_s des Stahlquerschnitts sowie von Größe und Lage beider Medien. Die Wärmeübergangszahl h nach Gleichung (B-04) stellt nach bestehender Norm eine Vereinfachung dar, da in Realität der Wärmeübergang nur für Konvektion definiert ist und der Wärmeaustausch bei Strahlung unter Verwendung der Absorptions- bzw. Emissionseigenschaften von Körpern bestimmt wird.

Für weitere Beispiele zur Entstehung von konzentrierten Wärmequellen bei Brandbelastung wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

2.9 Externe Lasten

Für die Beschreibung des Tragverhaltens eines umströmten Körpers sind grundsätzlich die Kräfte aus der strömungsmechanischen Druckverteilung zu berücksichtigen. Die Kräfte, welche an einem umströmten Körper wirken, lassen sich für den ebenen Umströmungszustand grundsätzlich, vergleiche **Rosemeier** [R-05], wie folgt angeben

$$F = c \frac{\rho}{2} u_\infty^2 S_{ref} = c q_\infty S_{ref} . \quad (\text{A-01})$$

In Gleichung (A-01) gibt c die aerodynamischen Beiwerte gekoppelt an eine geometrische Referenzfläche S_{ref} an. Mit ρ_∞ ist die Dichte und mit u_∞ die Strömungsgeschwindigkeit des umströmenden Mediums definiert.

Daraus ergeben sich die Beanspruchungen der jeweiligen Anströmrichtungen zu

$$F_W = c_W q_\infty S_{ref} \quad \text{Widerstandskraft} \quad (\text{A-02a})$$

$$F_A = c_A q_\infty S_{ref} \quad \text{Auftriebskraft} \quad (\text{A-02b})$$

$$F_Q = c_Q q_\infty S_{ref} \quad \text{Seitenkraft} \quad (\text{A-02c})$$

und im globalen Koordinatensystem zu

$$c_X = \frac{F_X}{q_\infty \cdot S} \quad c_Y = \frac{F_Y}{q_\infty \cdot S} \quad c_Z = \frac{F_Z}{q_\infty \cdot S} \quad (\text{A-03a/b/c})$$

$$cm_x = \frac{M_x}{q_\infty \cdot Sl} \quad cm_y = \frac{M_y}{q_\infty \cdot Sb} \quad cm_z = \frac{M_z}{q_\infty \cdot Sb} \quad . \quad (\text{A-04a/b/c})$$

Diese Vorgehensweise folgt aus der klassischen Aerodynamik und ist geeignet für die Bemessung des Anschlussbereiches einer Steuerfläche. Die Beiwerte c_W , c_A , und c_Q können der jeweiligen Windkanalkonfiguration und den Messpolaren, d.h. in Abhängigkeit von der Machzahl und den Anströmwinkeln, entnommen werden. Hierbei fällt bereits auf, dass eine Gitterstruktur aerodynamische Kräfte in drei Ebenen abzutragen hat, wogegen eine planare Steuerfläche im Allgemeinen nur Auftriebs-, Widerstandskraft und ein Auftriebsmoment erzeugt. Das Auftreten einer zusätzlichen Kraft normal zur Widerstands- und Auftriebsebene bereitet in der Betrachtung keine grundsätzliche Schwierigkeit. Allerdings wird der Untersuchungsaufwand, auch in Hinblick auf anschließende Strukturkomponenten, dadurch merklich vergrößert.

Die Beziehungen zwischen dem globalen Koordinatensystem der Gitterstruktur, siehe [Abb. 13](#), und den Anströmwinkeln der Luftkräfte lassen sich durch folgende Transformationsbeziehung beschreiben.

$$T_{z\text{-Axis}} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{T-01})$$

$$T_{y\text{-Axis}} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma \cos\beta & \sin\gamma \cos\beta & -\sin\beta \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \cos\gamma \sin\beta & \sin\gamma \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

In der gegebenen Transformationsmatrix (T-01) gibt β die Verdrehung der Anströmrichtung um die Y-Achse (Anstellwinkel) und γ die Verdrehung der Anströmrichtung um die Z-Achse (Schiebewinkel) der Gitterstruktur, bezogen auf das globale Koordinatensystem, an.

Mit der Definition der aerodynamischen Kraftgrößen $F_W =$ Luftwiderstand, $F_A =$ Auftriebskraft und $F_Q =$ Querkraft besteht nachfolgender Zusammenhang zwischen dem Anströmwinkel und der globalen Beanspruchung einer Gitterstruktur.

$$\begin{aligned} F_W &= F_x \cdot \cos\gamma \cos\beta + F_y \cdot \sin\gamma \cos\beta - F_z \cdot \sin\beta \\ F_A &= -F_x \cdot \sin\gamma \quad + F_y \cdot \cos\gamma \\ F_Q &= F_x \cdot \cos\gamma \sin\beta + F_y \cdot \sin\gamma \sin\beta + F_z \cdot \cos\beta \end{aligned} \quad (\text{T-02})$$

Als alternative Ermittlung zur Bestimmung der aerodynamischen Luftkräfte stehen leistungsfähige EDV-Programme der Strömungssimulation zur Verfügung. Die Bestimmung von diskreten Luftkräften erfolgt dann durch Integration der wirkenden Druckverteilung an der Körperoberfläche.

2.10 Hochtemperaturwerkstoffe

Werden Strukturen thermischen Belastungen ausgesetzt, erfordert dies stets eine gezielte Werkstoffauswahl, was wiederum Kompatibilität, z.B. ähnliches Temperaturendeckungsverhalten der Werkstoffe innerhalb einer Konstruktion verlangt. Das in [Abb. 19](#) dargestellte Temperaturprofil erzwingt für die Herstellung von Gittersteuerflächen zum Einsatz im Hyperschallbereich ausschließlich den Einsatz von Hochtemperaturwerkstoffen wie z.B. hochwarmfeste Stähle, Titan oder Nichtmetalle wie z.B. CSiC-Keramik. Keramische Werkstoffe eignen sich in Bezug auf ihre thermischen Eigenschaften und ihrem Steifigkeitsverhalten sehr gut für Hochtemperaturanwendung, befinden sich aber bezüglich ihres Festigkeitsverhaltens und der Verfügbarkeit von Versagensmodellen noch im Stadium der Forschung.

Unter metallischen Hochtemperaturwerkstoffen werden im Allgemeinen diejenigen Materialien verstanden, die bei Temperaturen höher als 500 [°C] eingesetzt werden können. Zum Vergleich, ein üblicherweise im Bauwesen eingesetzter Stahl weist bei 500 [°C] nur noch ca. 10 % seiner Tragfähigkeit auf. Einige typische Anwendungsgebiete für temperaturbeständige Werkstoffe als Funktion der erforderlichen Einsatzdauer und den geforderten Einsatztemperaturen zeigt [Abb. 20](#) von **Stroosnijder** und **van de Voorde** [S-11].

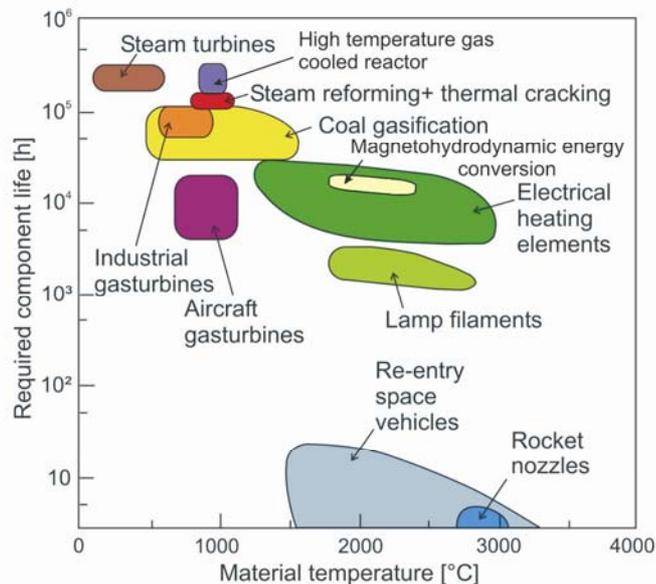


Abb. 20: Anwendungsgebiete für Hochtemperaturwerkstoffe

Hochtemperaturwerkstoffe müssen bei den jeweiligen Einsatztemperaturen gute mechanische und thermophysikalische Eigenschaften aufweisen (z.B. hoher Kriechwiderstand, geeignete Wärmeleitfähigkeit und eine hohe Resistenz gegen Oxidations- und Korrosionseinflüsse). Reicht die inhärente Oxidationsbeständigkeit nicht aus, so muss die Oberfläche des Werkstoffes (Bauteils) mit einer geeigneten Schutzschicht überzogen werden. Aus [Abb. 20](#) ist zu erkennen, dass sich die Einsatzzeit für Hochtemperaturwerkstoffe von wenigen Minuten (Raketendüsen) bis zu mehreren 100.000 Stunden (Schaufeln für Dampfturbinen) erstrecken kann.

Für eine thermisch-mechanische Betrachtung sind nachfolgend aufgeführten thermo-physikalischen Stoffeigenschaften simultan als Funktion von Temperatur und Zeit zu betrachten.

Kennwerte für Temperaturfeld	$k(T,t)$	Temperaturleitfähigkeit	[W/(m.K)]
	$\rho(T,t)$	Werkstoffdichte	[kg/m ³]
	$c_p(T,t)$	Wärmespeicherkapazität	[J/(kg.K)]
	$T_s(t)$	Schmelztemperatur	[K]
	$q_s(t)$	Schmelzwärme	[kJ/kg]
Kennwerte für Struktursteifigkeit und Festigkeit	$E(T,t)$	Elastizitätsmodul	[MPa = N/mm ²]
	$\sigma_y(T,t)$	Fließgrenze	[MPa = N/mm ²]
	$\varepsilon_y(T,t)$	Fließdehnung	[-]
	$R_m(T,t)$	Bruchgrenze	[Pa = N/mm ²]
	$\varepsilon_m(T,t)$	Bruchdehnung	[-]
	$\alpha_T(T,t)$	Wärmeausdehnungskoeffizient	[1/K]

Für Temperaturen, wie sie z.B. im Staupunkt bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten auftreten, siehe [Abb. 19](#), liegen keine Materialkennwerte in Standardtabellen vor. Für erste Abschätzungen müssen Annahmen getroffen werden. Für Anwendungen in denen der Werkstoff als gesetzt gilt, werden üblicherweise die nicht verfügbaren Kennwerte durch Versuche bestimmt, was mit erheblichem Kosten- und Zeitaufwand verbunden ist. Alternativ lassen sich für erste Näherungen einzelne Werte von chemischen Basiselementen aus der Literatur z.B. nach **Incropera & DeWitt** [I-01], dem **MIL-HDBK** [M-05], nach **Blanke** [B-06] oder speziellen Veröffentlichungen wie **Bock** [B-07] oder **Dietrich** [D-02] heranziehen. Muss das Verhalten von Werkstoffen für nur sehr kurze Einwirkzeiten verstanden werden, d.h. < 60 Sekunden, finden sich aufgrund seltener Anwendungsfälle keine verifizierbaren Angaben.

Nach **Blanke** [B-06] kann das Werkstoffverhalten für ausgewählte Werkstoffe jedoch auch nur für Temperaturbereiche von ca. 800-1000 [°C] abgeschätzt werden. Die Kennwerte sind teilweise als Zahlenangaben verfügbar oder lassen sich über funktionale Zusammenhänge berechnen. Die funktionalen Zusammenhänge sind abhängig vom physikalischen Aggregatzustand der Kenngröße und ergeben sich z.B. wie folgt

$$\text{Spez. Wärmekapazität} \quad c_p = A + BT + CT^{-2} + DT^2 \text{ [kJ/(kgK)]} \quad T > 273 \text{ [K]} .$$

Die Konstanten A, B, C, D ergeben sich gleichfalls werkstoffspezifisch und sind in Abhängigkeit der Temperatur aus Tabellen zu entnehmen.

Vereinzelt liegen Werkstoffkennwerte auch in Datenblättern, wie z.B. für hochwarmfesten Chrom-Nickel-Stahl (INCONEL-Stahl) oder einem PM2000-Stahl der Fa. Plansee, vor. Diese Kennwerte sind jedoch üblicherweise für stationäre Temperatureinwirkzeiten angegeben und für Kurzzeitbeanspruchung möglicherweise zu konservativ.

Die Überlegungen zeigen eindeutig, dass Werkstoffkennwerte für den hohen Temperaturbereich experimentell gewonnen werden müssen. Dieses Vorgehen wurde auch in **Belotserkovskiy** [B-05] gewählt. Als wichtigste Werkstoffgrößen wurden in [B-05] die Werkstofffestigkeit $\sigma_B^{(T)}$ und der Elastizitätsmodul $E^{(T)}$ definiert. Für verschiedene Grundwerkstoffe mit Eignung für hohe Temperaturbelastungen wie Nickel, Titan, Zirkonium, Chrom, Vanadium und Wolfram, um nur einige Werkstoffe aufzuführen, wurde dann zusätzlich aus experimentell gewonnenen Werten eine mathematische Darstellung in exponentieller Schreibweise unter Einbeziehung der Schmelztemperatur T_s gefunden.

Die Auswertung der Messwerte, z.B. Spannungen als Funktion der Temperatur, basiert auf der Methode der kleinsten Quadrate für mehrere Veränderliche. Da die grundlegenden Messwerte nicht veröffentlicht sind, können die nachstehenden Beziehungen nur übernommen und ggf. für Vergleichszwecke zu eigenen Experimenten verwendet werden.

Werkstofffestigkeit für Metalle und Metalllegierungen nach **Belotserkovskiy** [B-05]

$$\sigma_B^{(T)} = 0,386 \cdot A \cdot T_s \cdot e^{-4,866(T/T_s)} [MPa]$$

Der Beiwert A beschreibt das Verhältnis der experimentell ermittelten und der rechnerischen Versagensgrenze, d.h.

$$A(T/T_s) = \frac{\sigma_{B, Experiment}^{(T)}}{\sigma_{B, Rechenwert}^{(T)}}$$

als Funktion von T/T_s und ist abhängig vom Werkstoff oder der Werkstofflegierung.

$$\begin{aligned} \text{E-Modul} \quad E(T) &= 92,8 \cdot T_s \cdot e^{-0,45(T/T_s)} [MPa] & \text{für} & \quad 0 \leq T/T_s \leq 0,5 \\ E(T) &= 142,2 \cdot T_s \cdot e^{-1,3(T/T_s)} [MPa] & \text{für} & \quad 0,5 < T/T_s \leq 1,0 \end{aligned}$$

Mit den Werkstoffgleichungen für den Elastizitätsmodul ist zumindest ein Ansatz für eine tiefgehende Werkstoffnutzung gegeben, der selbstverständlich noch weiter verifiziert werden muss.

Nach **Bürgel** [B-08] handelt es sich bei hitzebeständigen, warmfesten oder hochwarmfesten Stählen im Allgemeinen um spezielle Legierungen, z.B. auf Eisen (FE)-, Kobalt (Co)- oder Nickel (Ni)-Basis. Sind die Hauptelemente aufgrund der chemischen Zusammensetzung dieser Legierungen für spezifische Werkstoffanforderungen, wie z.B. Korrosionsbeständigkeit oder Ermüdungsfestigkeit, in unterschiedlichen Anteilen enthalten, so gestaltet sich die vollständige Ermittlung der Werkstoffkennwerte für eine thermisch-mechanische Analyse sehr aufwändig.

3 Berechnungsmodelle Gittersteuerfläche

3.1 Statisches Tragsystem Gittersteuerfläche

Typische Konstruktionen von Gittersteuerflächen unter äußeren Kräften sind in [Abb. 10](#) dargestellt. Der Kraftfluss in einzelnen Stäben lässt sich nach der Schubfeldtheorie berechnen. In **Belotserkovskiy** [B-05] findet sich eine Vielzahl von exzellenten Lösungsansätzen zur Berechnung von spezifischen Gitterstrukturen die jedoch nicht ohne eigene, zeitintensive Herleitung generalisiert angewendet werden können. Für das Verständnis zum Tragverhalten von Gitterstrukturen ist es dennoch unabdingbar einfache Tragmodelle zu bilden. Da Gittersteuerflächen nach Leichtbaukriterien auszulegen sind, lässt sich der Kraftfluss in einer Gittersteuerfläche, siehe [Abb. 21](#), nach Ansätzen von **Czerwenka** und **Schnell** [C-03] mittels einer Schubfeldbetrachtung bestimmen. Die Ermittlung der Kraftverhältnisse nach einem einfachen Verfahren ist sinnvoll zu Dimensionierung der Rahmenstäbe und der Schubfeldgrößen.

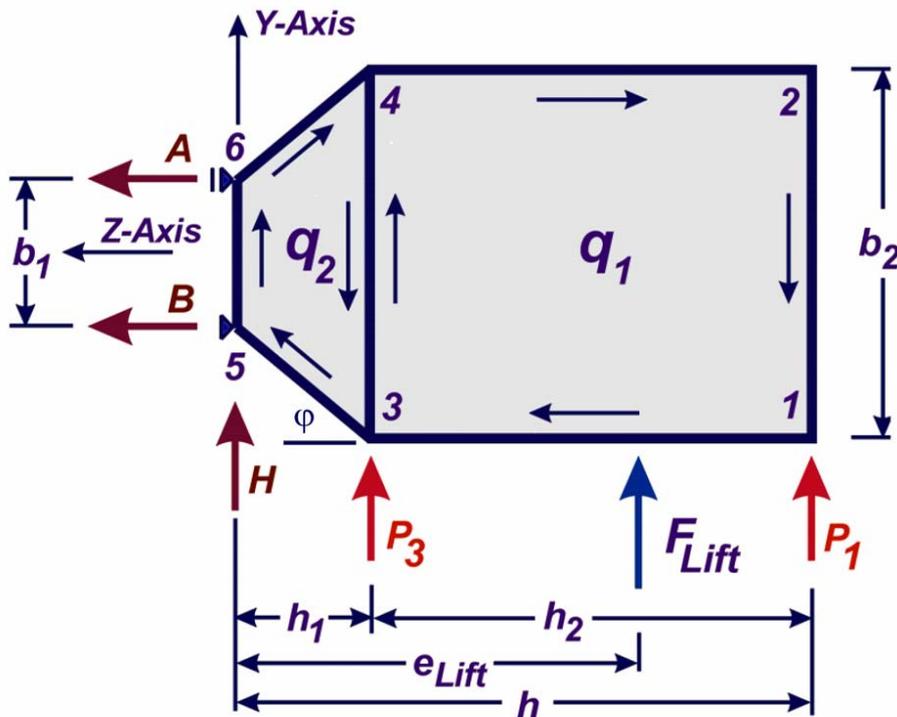


Abb. 21: Gittersteuerfläche nach Schubfeldanalogie

$$\Sigma M_{Knoten5} = 0: \quad -A \cdot b_1 - F_{Lift} \cdot e_{Lift} = 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{b_1} F_{Lift} \cdot e_{Lift}$$

$$\Sigma M_{Knoten6} = 0: \quad B \cdot b_1 - F_{Lift} \cdot e_{Lift} = 0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{b_1} F_{Lift} \cdot e_{Lift}$$

Schubfeld q_1 (Rechteckfeld) – Auftrennung der Gittersteuerfläche am Stab 3-4

Aus Gleichgewichtsgründen folgt

$$\begin{aligned} \text{Stabkraft, K1-K2:} & & P_1 - q_1 \cdot b_2 = 0 & \rightarrow & q_1 = \frac{P_1}{b_2} \\ \text{Normalkraft im Obergurt, Knoten 2:} & & N_2 = 0 & & \\ & \text{Knoten 4:} & N_4 - q_1 \cdot h_2 = 0 & \rightarrow & N_4 = q_1 \cdot h_2 \\ \text{Normalkraft im Untergurt, Knoten 1:} & & N_1 = 0 & & \\ & \text{Knoten 3:} & N_3 + q_1 \cdot h_2 = 0 & \rightarrow & N_3 = -q_1 \cdot h_2 \end{aligned}$$

$$\tan \varphi = (b_2 - b_1) / (2 \cdot h_1)$$

Schubfeld q_2 (Trapezfeld) – Auftrennung der Gittersteuerfläche am Stab 3-4

$$\begin{aligned} \text{Stabkraft, K3-K4:} & & P_3 + N_3 \cdot \tan \varphi + q_1 \cdot b_2 - q_{2r} \cdot b_2 - N_4 \cdot \tan \varphi & = & 0 \\ & & q_{2r} \cdot b_2 & = & P_3 + N_3 \cdot \tan \varphi + q_1 \cdot b_2 - N_4 \cdot \tan \varphi \\ & & q_{2r} & = & \frac{1}{b_2} (P_3 + N_3 \cdot \tan \varphi + q_1 \cdot b_2 - N_4 \cdot \tan \varphi) \end{aligned}$$

mit $N_3 = -q_1 \cdot h_2$

und $N_4 = q_1 \cdot h_2$ folgt

$$\begin{aligned} q_{2r} & = \frac{1}{b_2} (P_3 - q_1 \cdot h_2 \cdot \tan \varphi + q_1 \cdot b_2 - q_1 \cdot h_2 \cdot \tan \varphi) \\ q_{2r} & = \frac{1}{b_2} (P_3 - q_1 (h_2 \cdot \tan \varphi - b_2 + h_2 \cdot \tan \varphi)) \\ q_{2r} & = \frac{1}{b_2} (P_3 - q_1 (2h_2 \cdot \tan \varphi - b_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Stabkraft, K5-K6:} & & H + N_3 \cdot \tan \varphi + q_{2l} \cdot b_1 - N_4 \cdot \tan \varphi & = & 0 \\ & & q_{2l} & = & \frac{1}{b_1} (-H - N_3 \cdot \tan \varphi + N_4 \cdot \tan \varphi) \\ & & q_{2l} & = & \frac{1}{b_1} (N_4 \cdot \tan \varphi - H - N_3 \cdot \tan \varphi) \\ & & q_{2l} & = & \frac{1}{b_1} (q_1 \cdot h_2 \cdot \tan \varphi - H + q_1 \cdot h_2 \cdot \tan \varphi) \\ & & q_{2l} & = & \frac{1}{b_1} (2q_1 \cdot h_2 \cdot \tan \varphi - H) \end{aligned}$$

Mittlere Schubkraft $q_m = q_2 = \sqrt{q_{2l} \cdot q_{2r}}$

3.2 Verformungsverhalten von Gittersteuerflächen

Wird die Gittersteuerfläche als ein eingespannter Kragträger der Länge l und der Bauhöhe h betrachtet, so lassen sich die Verformungs- und Schnittkraftbeziehungen mittels der Differentialgleichung des Biegebalkens herleiten.

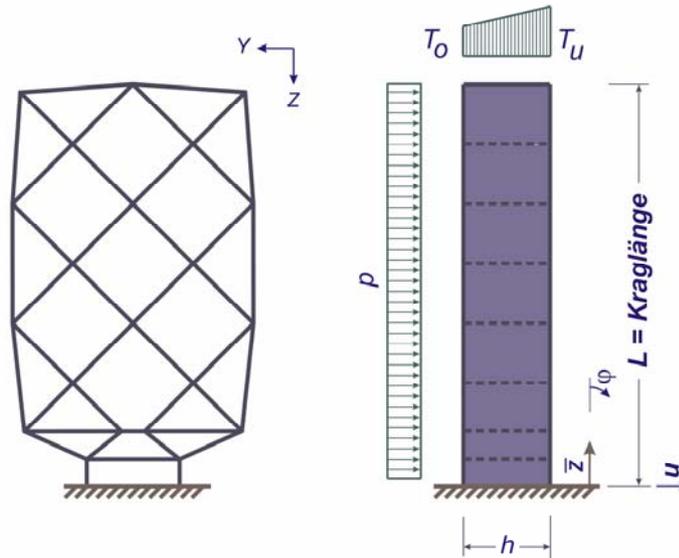


Abb. 22: Gittersteuerfläche unter Quer- und Temperaturbelastung

Unter der Voraussetzung eines linear elastischen Werkstoffverhaltens und eines konstanten Temperaturgradienten lassen sich die Einflussgrößen infolge Temperaturbelastung unter Verwendung der Differentialgleichung am eingespannten Balken darstellen.

Diese Annahme gilt nur für einen stationären Anströmungszustand und kleine Verformungen infolge aerodynamischer Aufheizung. Für das wirksame Biegeträgheitsmoment um die y -Achse des Gitterquerschnitts kann ein ideeller Wert ermittelt werden. Der Elastizitätsmodul soll hier zunächst ebenfalls noch konstant sein.

Zur Einbeziehung der Temperaturbelastung lässt sich die Krümmungsbeziehung in zwei Anteile aufspalten:

Biegemomenten Beanspruchung
$$u''(\bar{z}) = -\frac{M(\bar{z})}{EI_{ideell}} \quad (D-1)$$

und

ungleichmäßige Temperaturbelastung
$$u''(\bar{z}) = -\alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h}, \quad (D-2)$$

wobei gilt

$$\Delta T(\bar{z}) = T_u(\bar{z}) - T_o(\bar{z}). \quad (D-3)$$

Daraus folgt

$$u''(\bar{z}) = -\frac{M(\bar{z})}{EI_{ideell}} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h}. \quad (D-4)$$

Durch Umformung ergibt sich
$$u''(\bar{z}) + \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h} = -\frac{M(\bar{z})}{EI_{ideell}} \quad (D-5)$$

$$EI_{ideell} (u''(\bar{z}) + \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h}) = -M(\bar{z}) \quad (D-6)$$

$$M(\bar{z}) = -EI_{ideell} u''(\bar{z}) - EI_{ideell} \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h} \quad (D-7)$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung der elastischen Linie ergeben sich die Verformungsbeziehungen:

Krümmung
$$-EI_{ideell} u''(\bar{z}) - EI_{ideell} \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h} = \frac{1}{2} q(\bar{z}) \cdot \bar{z}^2 + C_1 \cdot \bar{z} + C_2 \quad (D-8)$$

$$-EI_{ideell} u''(\bar{z}) = \frac{1}{2} q(\bar{z}) \cdot \bar{z}^2 + C_1 \cdot \bar{z} + C_2 + EI_{ideell} \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h} \quad (D-9)$$

Verdrehung

$$-EI_{ideell} w'(\bar{z}) = \frac{1}{6} q(\bar{z}) \cdot \bar{z}^3 + \frac{1}{2} C_1 \cdot \bar{z}^2 + C_2 \cdot \bar{z} + C_3 + EI_{ideell} \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h} \cdot \bar{z} \quad (D-10)$$

Durchbiegung

$$-EI_{ideell} w(\bar{z}) = \frac{1}{24} q(\bar{z}) \cdot \bar{z}^4 + \frac{1}{6} C_1 \cdot \bar{z}^3 + \frac{1}{2} C_2 \cdot \bar{z}^2 + C_3 \cdot \bar{z} + C_4 + \frac{1}{2} EI_{ideell} \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h} \cdot \bar{z}^2 \quad (D-11)$$

Für den Fall des am Fußpunkt starr eingespannten Gitterflügels lassen sich die Konstanten aus den Schnittkraft- und Verformungsbedingungen analog eines Kragträgers bei konstant wirkender Querbelastrung $q(x)=p$ und konstantem Temperaturgradienten wie folgt bestimmen:

Querkraft
$$Q(\bar{z}) = p(\bar{z} - L) \quad (D-12)$$

Biegemoment
$$M(\bar{z}) = \frac{1}{2} p(\bar{z} - L)^2 \quad (D-13)$$

Verdrehung
$$\varphi(\bar{z}) = \frac{1}{6EI_{ideell}} p(-\bar{z}^3 + 3L\bar{z}^2 - 3L^2\bar{z}) - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h} \cdot \bar{z} \quad (D-14)$$

Durchbiegung
$$w(\bar{z}) = \frac{1}{24EI_{ideell}} p(-\bar{z}^4 + 4L\bar{z}^3 - 6L^2\bar{z}^2) - \frac{1}{2} \alpha_T \cdot \frac{\Delta T(\bar{z})}{h} \cdot \bar{z}^2 \quad (D-15)$$

Aus diesen Beziehungen ergibt sich, dass die durch Temperatur hervorgerufenen globalen Verformungen eines einseitig eingespannten Trägers unabhängig von Material- und Biegesteifigkeit sind.

Die thermo-elastische Berechnung der in [Abb. 13](#) dargestellten Gittersteuerfläche unter Verwendung der E-Moduli und Wärmeausdehnungskoeffizienten nach [Tabelle 6](#) zeigt für einen vorgegebenen, zeitabhängigen Temperaturgradienten nach [Tabelle 2](#) ein stark instationäres Verformungsverhalten.

Tabelle 1: Werkstoffkennwerte INCONEL Stahl für Strukturanalyse

Temperatur [K]	E-Modul [N/mm ²]	Poisson-Zahl [-]	α_T 1,0E-6 [1/K]
273,15	199000	0,30	12,8
293,15	199000	0,30	12,8
373,15	195000	0,30	12,8
473,15	190000	0,30	13,4
573,15	185000	0,30	13,8
673,15	179000	0,30	14,1
773,15	174000	0,30	14,3
873,15	167000	0,30	14,7
973,15	163000	0,30	15,6
1073,15	149000	0,30	16,4
1173,15	134000	0,30	17,2
1573,15	84000	0,30	22,2
2273,15	60667	0,30	22,2

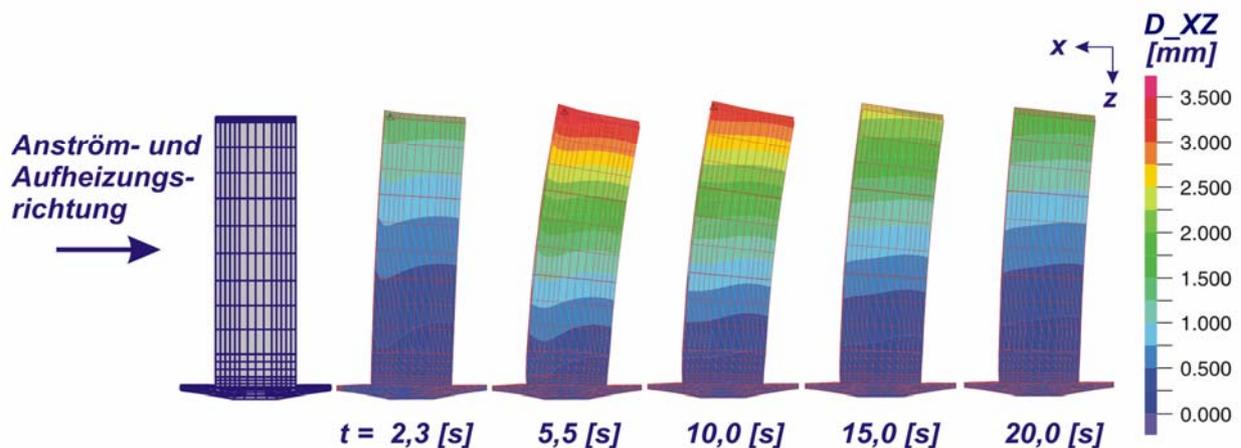


Abb. 23: Verformungsgeschichte Gitterstruktur (Starrer Anschluss)

Tabelle 2: Temperaturbelastung und maximale Strukturverformung

Zeit [s]	Profilvorderkante T [K]	Profilhinterkante T [K]	max. Verformung D_XZ [mm]
2,3	2214	293,15	1,48
5,5	1760	293,15	3,49
10,0	998	293,15	3,24
15,0	705	293,15	2,38
20,0	584	293,15	1,74

Mit den angegebenen Beziehungen der elastischen Linie ist eine näherungsweise Abschätzung der globalen Strukturverformungen, wie sie in [Abb. 23](#) abgebildet sind, bei bekanntem Temperaturgradienten möglich.

3.3 Bedeutung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung

Die klassischen Ansätze der Aerodynamik beruhen auf der Annahme, dass sich die umströmten Körper starr verhalten. Aus praktischer Sicht lässt sich leicht nachweisen, dass sich unendlich steife Strukturen für reale Bauteile nicht verwirklichen lassen, speziell dann, wenn minimale Gewichtsanforderungen zu erreichen sind. Für die effiziente Auslegung einer Gitterstruktur in Leichtbauweise, d.h. geringe Strukturnachgiebigkeit innerhalb einer vorgegebenen Konstruktionsenvelope bei minimalem Eigengewicht zum Einsatz im Hyperschallbereich und unter Bedingungen der Standardatmosphäre in Bodennähe, kann die Fluid-Struktur-Wechselwirkung nicht mehr vernachlässigt werden. Infolge Temperatureinwirkung wird in Abhängigkeit des einwirkenden Wärmestroms, der Bauweise und der verwendeten Werkstoffe auf jeden Fall eine sukzessive Steifigkeitsverminderung eintreten.

In einem Messprogramm [E-01] zur Bestimmung der aerodynamischen Kennwerte wurden 3 Konfigurationen von Gitterleitwerken in Machzahlbereich $1,8 \leq Ma \leq 4,0$ bei Anstellwinkeln zwischen -10 [Deg] und 30 [Deg] untersucht. Wie an Gittersteuerflächen, dargestellt in [Abb. 24](#), nach Windkanalversuchen [E-01] zu sehen ist, zeigen durchströmte Gitter bei gleichen Anströmbedingungen unterschiedliche plastische Verformungen. Das scheinbar steifere Gitter, siehe [Abb. 24](#) rechts, deformiert sich stärker und weist gleichzeitig sowohl globale als lokale Versagensformen auf. Eine Erklärung dieser Effekte erfordert bereits bei Bedingungen im Bereich der Normtemperatur ($T_n = 273,15$ [°K]) intensive Untersuchungen.

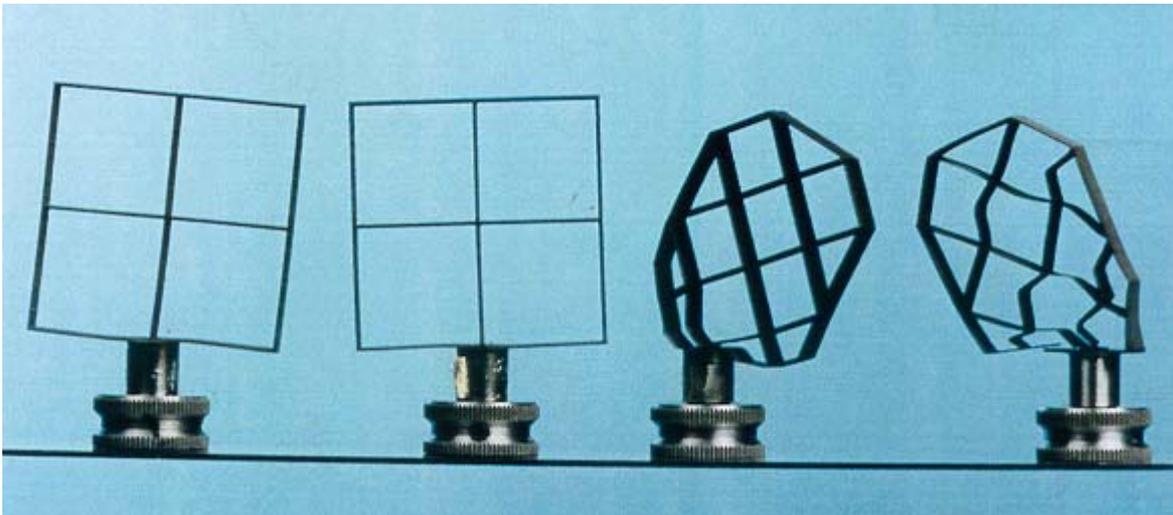


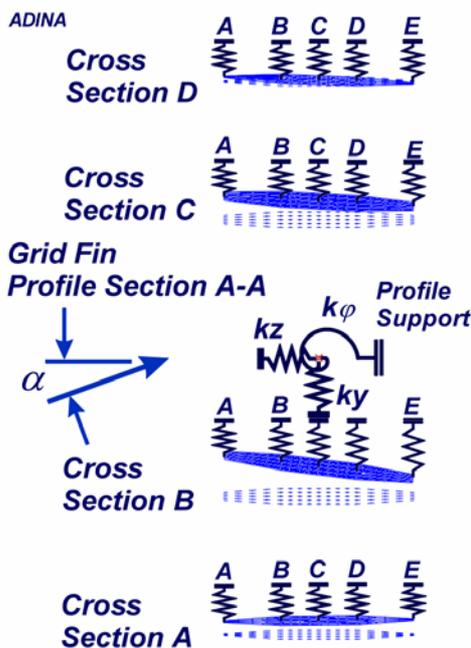
Abb. 24: Verformte Gitterstrukturen nach Windkanalversuchen ($1,8 \leq Ma \leq 4,0$)

Bei einer Gittersteuerfläche handelt es sich um eine Konstruktion, deren Einzelelemente aus angeschrägten und/oder stumpfen Rechteckprofilen bestehen, die als Gesamtstruktur wiederum eine rechteckige Kontur beschreiben. Deshalb ist zu erwarten, dass aeroelastische Erscheinungen für den vorgesehenen Geschwindigkeitsbereich auftreten.

Bei einer Strukturverformung verändert sich die Anströmrichtung und die Strömungskraft oszilliert, was wiederum eine Rückwirkung auf die Schwingungsamplitude der Struktur hat. Wenn die oszillierende Strömungskraft dazu neigt, die Strukturverformung zu vergrößern, wird die Struktur aerodynamisch instabil und sehr große Amplituden können die Folge sein. Diese, im stationären Zustand meist harmonische Schwingung, wird beim Übergang vom subsonischen in den supersonischen Geschwindigkeitsbereich von instationären Schock- und Expansionsvorgängen überlagert. Bei einer durchströmten Gitterstruktur sind noch Reflexionsvorgänge zwischen den Gitterprofilen in die Betrachtung mit einzubeziehen. Zusätzlich gilt noch für den stationären Flugzustand im hohen Überschallbereich in Bodennähe, dass eine Verminderung der Struktursteifigkeit durch Änderung des Elastizitätsmoduls infolge aerothermischer Aufheizung von einem zunächst stabilen Gleichgewichts- in einen instabilen Gleichgewichtszustand wechseln kann.

Um aufzuzeigen ob sich infolge Profildurchströmung aeroelastische Phänomene bei hoher Struktursteifigkeit ergeben können, wird eine Berechnung unter Einbeziehung der Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) mit dem Programmsystem **ADINA™ & ADINA-F™** durchgeführt. Die Berechnung wird an einem zweidimensionalen Modell, wie es in **Abb. 25** dargestellt ist, durchgeführt. Das Berechnungsmodell wurde durch einen horizontalen Schnitt aus der in **Abb. 13** abgebildeten Gittersteuerfläche gewonnen, wobei sich die elastisch gelagerten Profilschnitte A, B, C und D ergeben.

Eine Abschätzung der klassischen Aeroelastik ist bereits an solchen, im Vergleich zu dreidimensionalen Gittertragwerken, einfachen Tragsystemen mit analytischen Verfahren nicht mehr möglich [K-04].



Die Federsteifigkeiten zur Lagerung der Sektionen A bis D werden durch die Profilgeometrie und die Gitterdichte bestimmt und sind aus dem 3-dimensionalen FE-Modell, siehe **Abb. 13**, abgeleitet.

Die Federkenngrößen k_z , k_y und k_ϕ für den gesamten Profilquerschnitt sind durch die Lagersteifigkeit der Gesamtstruktur definiert.

Für diese Betrachtung werden Werkstoffkennwerte unter Normaltemperatur $T = 273,15 [K]$ angenommen. Ziel der Analyse war es, das Verformungsverhalten von elastisch gekoppelten Profilen für einen Anströmungszustand, hier $Ma=7,0$ und $\alpha=20,0 [Deg]$, unter Bedingungen der Standardatmosphäre zu untersuchen.

Abb. 25: FE-Modell für die Berechnung einer 2D-Fluid-Struktur-Interaktion, dargestellt mit Strukturverformung infolge Durchströmung

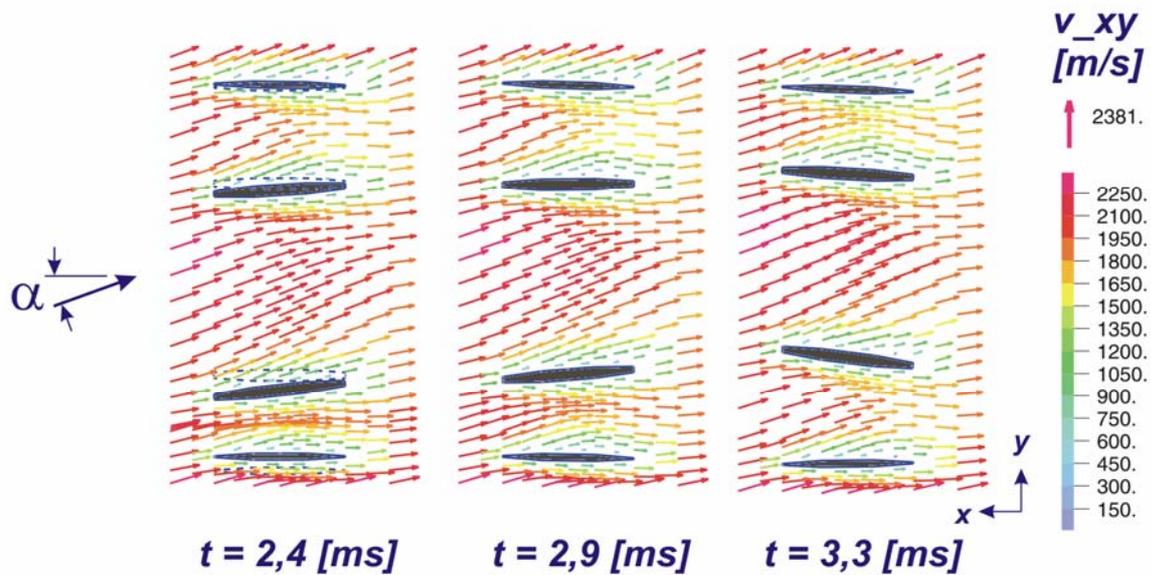


Abb. 26: Instationäres Verformungsverhalten von gekoppelten Profillamellen bezogen auf den unverformten Profilquerschnitt mit Geschwindigkeitsvektoren

In [Abb. 26](#) wird für ausgewählte Zeiten bei stationärer Profilanströmung die durchströmte Konfiguration dargestellt. Die Geschwindigkeitsvektoren in den durchströmten Querschnitten ergeben deutliche Abweichungen im Strömungsverhalten, sowohl für Betrag und Richtung, bezogen auf den stationär vorhandenen Anströmwinkel von $\alpha=20$ [Deg] und der vorgegebenen Strömungsgeschwindigkeit von Mach 7,0, vor allem in den seitlichen Strömungskanälen. Die Ursachen werden auf die stark instationären Strukturantworten der durchströmten Querschnitte zurückgeführt, wobei in diesem Zusammenhang auf das stark unterschiedliche Verformungsverhalten der Einzelsektionen in den ausgewählten Zeiten von [Abb. 26](#) hingewiesen wird. Daraus lässt sich eine starke Strömungs-Strukturverformungs-Interaktion zwischen den um- und durchströmten Gitterprofilen vermuten. Hierzu muss z.B. der Einfluss der Strukturverformung auf das Reflexionsverhalten im Strömungskanal noch weiter untersucht werden. In dieser Analyse wird nur das zeitliche Verformungsverhalten der einzelnen Gitterprofile, siehe [Abb. 27](#) bis [Abb. 30](#), ausgewertet und die aeroelastische Sensibilität des untersuchten Gitterquerschnitts diskutiert.

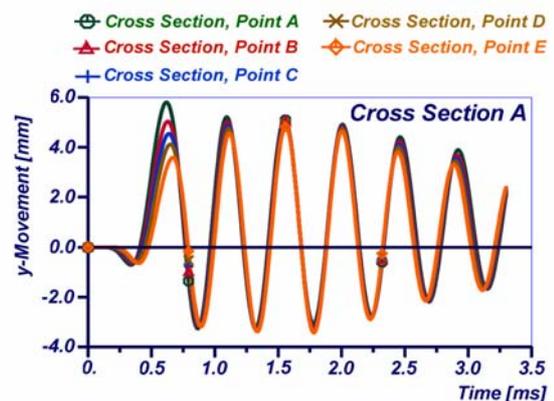


Abb. 27: Verformungsverhalten Sektion A

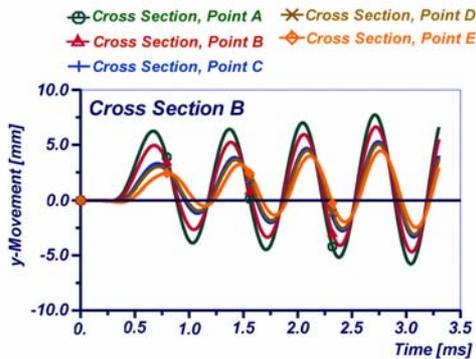


Abb. 28: Verformungsverhalten Sektion B

Abb. 29: Verformungsverhalten Sektion C

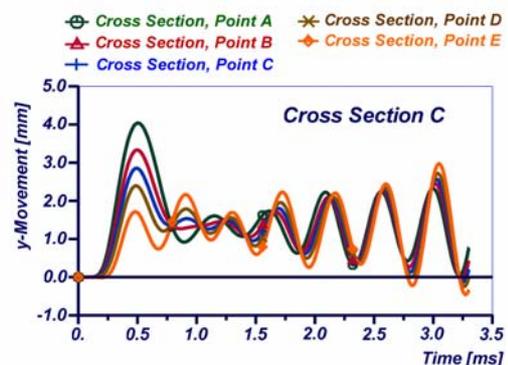
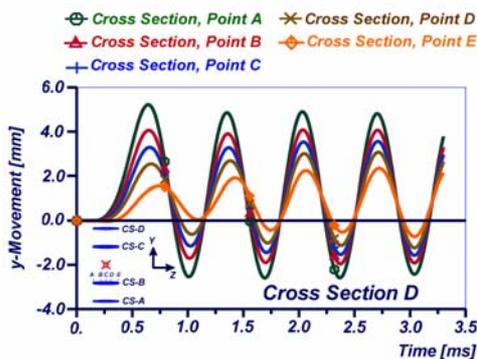


Abb. 30: Verformungsverhalten Sektion D

Als Randbedingungen für die Strömungsberechnung wurden folgende Voraussetzungen definiert

- Laminares Strömungsverhalten
- Stationäre Anströmgeschwindigkeit im M_∞ Kontrollvolumen
- „No Slip Condition“ an den Profilkanten, d.h. die Strömungsgeschwindigkeit tangential ($\vec{v}_T = 0$) und normal ($\vec{v}_n = 0$) zu Profilloberfläche wird zu Null angenommen
- Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für reibungsbehaftete Strömung
- Keine Strukturdämpfung im mechanischen System.

Unter diesen Bedingungen, d.h. ohne Temperatureinfluss, zeigt das zeitliche Verhalten der Profilverformungen von einzelnen Positionen entlang der Profillachse, Punkte A bis E auf den Profilschnitten, ein harmonisches Verhalten, jedoch mit deutlich unterschiedlichem Charakter.

Eine Ergebnisbewertung nach aeroelastischen Kriterien ergibt:

- Sektion A Kurzes Einschwingverhalten und Übergang zu einer gedämpften Schwingung
- Sektion B Instabil - Anfachung zur Schwingung aller Profilpunkte A bis E
- Sektion C Kurzes Einschwingverhalten der Profilpunkte A bis E, sowie Koppelung der Schwingungsamplituden und Übergang zur angefachten Schwingung
- Sektion D Stabiles Schwingungsverhalten der Profilpunkte A bis D, jedoch stetiges Anfachen des hinteren Profilpunktes E.

Diese Untersuchung verdeutlicht, dass bei durchströmten Gitterprofilen unterschiedliche aeroelastische Phänomene gleichzeitig auftreten können.

Gleichzeitig gibt diese zweidimensionale Analyse einen ersten Einblick über Phänomene die bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten an Strukturbauteilen untersucht werden müssen.

Die Berechnung des dargestellten Systems erfordert bereits einen erheblichen Aufwand an Rechenzeit und Speichervolumen, obwohl in der durchgeführten Analyse noch kein nichtlineares Werkstoffverhalten abgebildet wurde.

4 Experimentelle Methoden

4.1 Forschung und Sachstand

Bei einer messtechnischen Untersuchung von Strukturen, die einer dynamischen Beanspruchung ausgesetzt sind, ist die Erfassung von Strukturspannungen und die Bestimmung des Vibrationsverhaltens von großem Interesse.

Die Messung von Strukturspannungen erfolgt in üblicher Weise mittels Dehnmessstreifen. Die Grundlagen zu Anwendung der Technik des Messens mit Dehnmessstreifen (DMS) sind in **Hoffmann** [H-06] ausführlich dargestellt. Zur Messung des dynamischen Verhaltens werden Beschleunigungsaufnehmer eingesetzt. Eine anschauliche Einführung hierzu findet sich in **Harris** [H-01].

An dieser Stelle wird kurz dargestellt, wo konventionelle Methoden in Verbindung mit Temperatureinwirkung an ihre Grenzen stoßen.

Unabhängig von den individuellen Messverfahren zur Erfassung von Dehnungen und Beschleunigungen ist es erforderlich, die jeweiligen Messaufnehmer von außen an der Gitterstruktur zu befestigen. Aufgrund der Stosswellenreflexion innerhalb des Gitters hat dies unmittelbar Auswirkung auf das lokale Strömungsverhalten, einschließlich Grenzschichtbereich, und reduziert damit die Aussagekraft der Messung. Die technische Realisierbarkeit gestaltet sich ohnehin schwierig und muss im Detail durch in die Struktur integrierte Messaufnehmer gelöst werden.

Als wesentliche Einflussgröße auf die Messverfahren lässt sich jedoch wiederum die Temperatur spezifizieren. Die Temperatursensitivität erfasst nicht nur die Prüfstruktur, sondern gleichfalls die gesamte Messstrecke, d.h. Messaufnehmer, Befestigungstechnik und Messleitungen. Deshalb ist der nutzbare Temperaturbereich z.B. für DMS nach [H-06] äußerst schwierig anzugeben. Denn hinsichtlich der Auswirkung einer Temperatur auf die Güte der Messung sind zwei Punkte zu beachten:

- die Höhe der Temperatur
- ihre Veränderlichkeit während der Messung.

Geht es um die Höhe der Temperatur, so muss bekannt sein, ob bzw. wie lange eine DMS-Applikation beständig ist, oder aber, welche Auswirkungen zu erwarten sind. Nun tritt die Temperatur, wie bereits erwähnt, nicht als unabhängige Größe auf. Sie ist immer gekoppelt mit der Zeit, etwa der Anstiegszeit oder der Verweildauer; sie wird begleitet von äußeren Einflüssen, z.B. atmosphärischen, die sich als physikalische (z.B. Druck) oder chemische Angriffe (z.B. Oxidation) äußern können. Auch Umwandlungsvorgänge in den Messgitterlegierungen, die bei erhöhter Temperatur ablaufen können, müssen hier mit in die Betrachtung einbezogen werden.

Die Frage, bis zu welcher Temperatur eine DMS-Applikation betriebsfähig ist, muss zwangsläufig die Randbedingungen mit einschließen. Wichtig ist es zu erkennen, dass eine Temperatureinwirkung nicht zu sprunghaften Veränderungen von Messergebnissen führt, ggf. sind die wirklichen Grenzen problemspezifisch neu abzuleiten.

Die Übergänge von gut über brauchbar zu unbrauchbar sind fließend, wobei ihre Klassifizierung von den gestellten Genauigkeitsansprüchen abhängt. Als grobe Orientierung kann in [Tabelle 3](#) nach [H-06] eine Übersicht der für metallische DMS gebotenen Möglichkeiten angegeben werden.

Tabelle 3: Einsatzbereiche metallischer DMS

Anforderung	Messbereich	Messzeit
nicht-nullpunktbezogene Messung	-269 bis +800 [°C]	keine Angabe
nullpunktbezogene, kurzzeitige Messung	< 500 [°C]	keine Angabe
DMS mit Konstantan-Messgitter	-200 [°C] bis +200 [°C]	keine Angabe
- Standard Aufnahmequalität	-20 [°C] bis +70 [°C]	keine Angabe
- für höchste Genauigkeitsanforderung	-10 [°C] bis +40 [°C]	< 20 [min]

Die Entwicklung von Messverfahren, speziell im Bereich hoher Temperaturen ist Gegenstand aktueller Forschung und ein Einsatz kann nicht ohne spezifische Kalibrierungstests und Kenntnis der Werkstoffeigenschaften der Teststruktur durchgeführt werden. Diese Forderung steht in direktem Bezug zur Erforschung der Eigenschaften von Hochtemperaturwerkstoffen.

Eine ähnliche Betrachtung lässt sich für piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer durchführen, die nach [H-01] für einen Temperaturbereich von -254 [°C] bis +760 [°C] ohne äußere Kühlung eingesetzt werden können. Hinzu kommt noch, dass bei einer unterschiedlichen Temperaturverzerrung von piezoelektrischen Elementen und Strukturteilen der Beschleunigungsgeber wechselnde Kräfte entstehen, die das elektrische Signal beeinflussen.

Für das in [Abb. 13](#) dargestellte Gitterleitwerk wurden die Eigenfrequenzen und das Eigenschwingungsverhalten mit ADINA™ berechnet. Aufgrund der Berechnungsergebnisse, wie sie in [Abb. 31](#) abgebildet sind, sind Vibrationsantworten im hohen Frequenzbereich (100 – 3000 [Hz]) infolge der hohen Strömungsgeschwindigkeiten zu erwarten. Um hierzu verwertbare Messergebnisse zu erhalten, erfordert dies eine Vielzahl von Vibrationsaufnehmern.

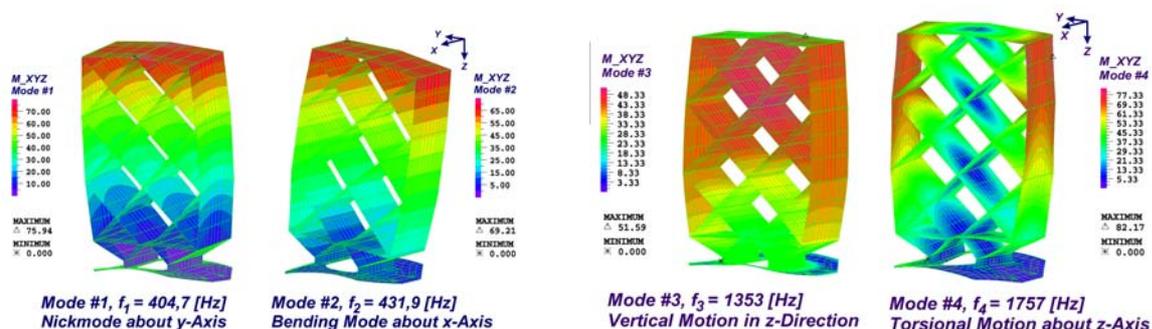


Abb. 31: Eigenschwingungs- und Frequenzverhalten an Gitterleitwerk - Mode 1 bis Mode 4

In Bezug auf das Ermüdungsverhalten von Werkstoffen werden dadurch bereits nach sehr kurzer Beanspruchungsdauer hohe Lastwechselzahlen erreicht, die ein Strukturversagen herbeiführen können.

4.2 Ingenieurversuche

Alle bisher durchgeführten Betrachtungen konnten bereits aufzeigen, dass konventionelle Auslegungsmethoden für Strukturen mit extremer Temperaturbeanspruchung ihre Grenze erreichen. Um dennoch für die Anwendung von metallischen Werkstoffen im Kurzzeitbereich Anhaltspunkte zu erhalten, ist es erforderlich, theoretische Überlegungen experimentell zu stützen.

Zu diesem Zweck werden an Profilquerschnitten, wie exemplarisch in [Abb. 32](#) dargestellt, sowohl an der angeschärften als auch an der stumpfen Profilvorderkante verschiedene Aufheizversuche durchgeführt. Die Versuche wurden am Wehrwissenschaftlichen Institut für Werk-, Explosiv- und Betriebsstoffe (WIWEB), Erding, durchgeführt.



Abb. 32: Prüfling für Aufheizversuch

Als Energiequelle zur Erzeugung der erforderlichen Temperatur konnten zwei Flammtemperaturen, $T_{F1} \approx 1800$ [°C] und $T_{F2} \approx 3000$ [°C], vorgegeben werden. Eine Flammtemperatur mit der prognostizierten Staupunkt- und Grenzschichttemperatur von ca. 2500 [°C] war versuchstechnisch nicht verfügbar. Die Prüflinge wurden über unterschiedliche Beanspruchungszeiten beiden Flammen ausgesetzt.

- Versuch 1** Aufheizung der angeschärften Profilkante aus INCONEL Stahl
Flammtemperatur $T_{F1} \approx 1800$ [°C], Aufheizdauer ca. $t = 10$ [sec]
- Versuch 2** Aufheizung der angeschärften Profilkante aus INCONEL Stahl
Flammtemperatur $T_{F2} \approx 3000$ [°C], Aufheizdauer ca. $t = 2$ [sec]
- Versuch 3** Aufheizung der stumpfen Profilkante aus INCONEL Stahl
Flammtemperatur $T_{F2} \approx 3000$ [°C], Aufheizdauer ca. $t = 2$ [sec]

Die Ergebnisse der Versuche zeigen deutliche Unterschiede infolge der Temperatureinwirkung.

Versuch 1 Nach der Abkühlphase, siehe [Abb. 33](#), konnte augenscheinlich kaum eine Änderung der Strukturgeometrie wahrgenommen werden, obwohl die Profilvorderkante rotglühend war. Labortests ergaben eine einsetzende Umwandlung im metallischen Gefüge.

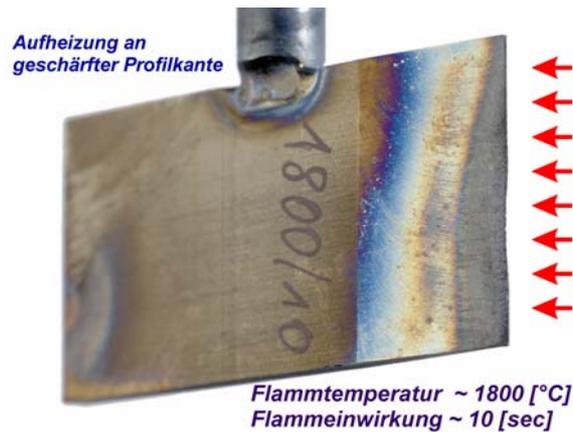


Abb. 33: Temperaturbelastung an geschärfter Profilkante, Prüfling (gedrehte Lage) nach Versuch 1

Versuch 2 Die angeschärfte Profilvorderkante, siehe [Abb. 34](#) links, wird im unmittelbaren Bereich der Flammeinwirkung unter Druck und Hitze vollkommen wegerodiert.

Versuch 3 Die Profilhinterkante, siehe [Abb. 34](#) rechts, wird infolge der Flammeinwirkung aufgeschmolzen und das Material hat sich, wie nach dem Abkühlvorgang festgestellt wurde, um den Bereich der Flammeinwirkung verteilt.

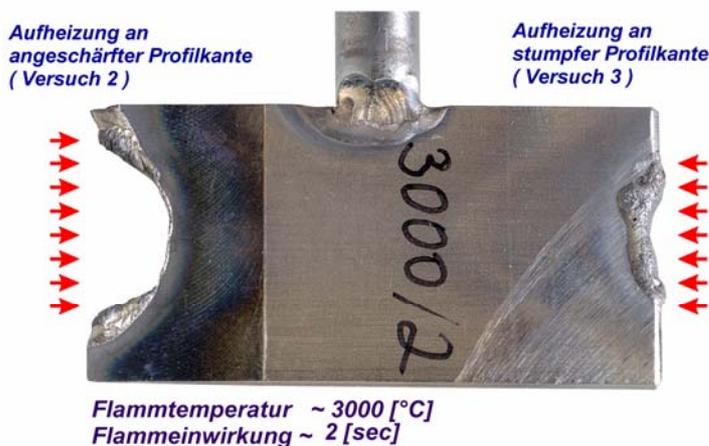


Abb. 34: Temperaturbelastung an angeschärfter und stumpfer Profilkante, Prüfling (gedrehte Lage) nach Versuch 2 und Versuch 3

Nicht berücksichtigt in den Versuchen ist die Wirkung der mechanischen Belastung eines unter realen Flugbedingungen auftretenden Staudrucks, sowie eine evtl. beschleunigte Verbrennung infolge des stetig zugeführten Sauerstoffes aus der Luft. Dadurch ergeben sich noch ungünstigere Randbedingungen, die jedoch mit den verfügbaren Möglichkeiten nicht weiter untersucht werden konnten.

Der Zustand des Profils mit angeschärfter Vorderkante nach Versuch 1 stützt die Vermutung, dass selbst bei kurzzeitiger Überschreitung der Schmelzgrenze eines Werkstoffes ein Abfließen des Materials nicht unmittelbar einsetzt. Die Flammtemperatur T_{F2} in Versuch 2 erzeugt an der angeschärften Profilseite einen nicht akzeptablen Abtrag des Werkstoffes, wogegen an der stumpfen Profilseite geringe Erosion zu erkennen ist. Dieses Ergebnis scheint aufgrund der Erkenntnisse zum Wärmeübergang an stumpfen Körpern plausibel.

Die Auswirkungen in Versuch 2 sind bezogen auf eine mögliche Profilerosion an eine Gesamtstruktur für Statik und Festigkeit nicht erfassbar und eine Veränderung der Profilgeometrie in Versuch 3 lässt erhebliche Auswirkungen auf das aerodynamische Verhalten erwarten.

Aus diesen Versuchen konnten auftretenden Phänomene infolge Flammeinwirkung erkannt und die vorhandenen Werkstoffkennwerte näherungsweise verifiziert werden. Weiterführende Aussagen zum kurzzeitigen Aufheizungsverhalten von, mit hoher Geschwindigkeit angeströmten, metallischen Profilen sind nur durch ein umfassendes Versuchsprogramm zu gewinnen.

5 Numerisches Modell zur Temperatur-Struktur-Interaktion

5.1 Allgemeine Darstellung

Im Kapitel zum Stand der Wissenschaft wurden die Anforderungen und Einflussfaktoren für die Bearbeitung von thermisch-mechanisch beanspruchten Strukturen an einer Anwendung (Gitterleitwerk) ausführlich diskutiert und aufgezeigt. Mein Beitrag zur Betrachtung von thermo-mechanisch gekoppelten Fragestellungen ist einen zusammenhängenden Algorithmus zu erstellen, der es ermöglicht, gekoppelt die Vielzahl der aufgeführten Einflussparameter zu untersuchen.

Für eine allgemeine Vorgehensweise ist es zunächst erforderlich die Berechnungsschritte zu ordnen. Dabei erscheint es zunächst sinnvoll die Verbindung zur Strukturumströmung mit zu betrachten. In einem Berechnungsmodell mit reduzierten Freiheitsgraden kann der Einfluss der Umströmung noch nicht effektiv mit einbezogen werden. Das Ergebnis dieses vereinfachten Modells weist aber schon auf die reale Lösung hin. Als integrales Element des Verfahrens wird dann die Temperatur-Struktur-Koppelung unter instationären Bedingungen detailliert betrachtet.

Die grundlegende Vorgehensweise ist in einem Ablaufdiagramm dargestellt, siehe [Abb. 35](#). Wie jedoch die bislang durchgeführten Betrachtungen gezeigt haben, ist eine vollständige Analyse der Fragestellung selbst unter Anwendung moderner Rechenmethoden (Methode der Finiten Elemente) für die Strukturanalyse, Wärmeübertragung und Strömungsmechanik mit hohem Bearbeitungsaufwand verbunden und gekoppelt nur bedingt möglich. Für die Umsetzung der in [Abb. 35](#) aufgeführten Berechnungsschritte ist es erforderlich, auf numerische Methoden in Verbindung mit analytischen Ansätzen zurückzugreifen. Aufgrund der in den vergangenen Jahren geleisteten Forschung bieten diese Methoden ausreichend Potential zur Lösung solcher Fragestellungen.

Da bei multidisziplinären Fragestellungen der Grad der jeweiligen, gegenseitigen Interaktion nicht von vornherein bekannt ist, ist eine Vorgehensfolge festzulegen, in welcher disziplinär ermittelte Einzelergebnisse der gekoppelten Lösung zufließen. Wie aus [Abb. 35](#) zu entnehmen ist, wurde die Strukturanalyse als dominierender Berechnungspfad definiert. Dies erscheint nahe liegend, da die endgültige Tragfähigkeitsbeurteilung einer Struktur im Wesentlichen auf dem instationären Strukturantwortverhalten beruht. Würde z.B. eine Strömungsberechnung ungeeignete aerodynamische Beiwerte ergeben, so ist eine Änderung der aerodynamischen Konfiguration erforderlich. Ergibt sich aus der Thermalanalyse ein nicht akzeptables Temperaturprofil, so ist ein Werkstoff mit verbesserten thermischen Eigenschaften zu wählen. In beiden Fällen würde eine Änderung der Konstruktion erfolgen und damit eine neue Strukturanalyse erforderlich sein.

Um die Allgemeingültigkeit der FE-Methode für die vorgeschlagene Vorgehensweise bestmöglich zu nutzen ist es zwingend erforderlich, auf die Formulierung der Elementmatrizen unter Verwendung von isoparametrischen Verschiebungsansätzen zurückzugreifen. Veröffentlichungen von, z.B. **Bathe, Zienkiewicz & Taylor, Hinten, Owen** u.a., haben die Effizienz dieser Ansätze ausführlichst erläutert, getestet und das vorhandene Potential für Weiterentwicklungen demonstriert.

Numerisches Modell zur Temperatur-Struktur-Interaktion

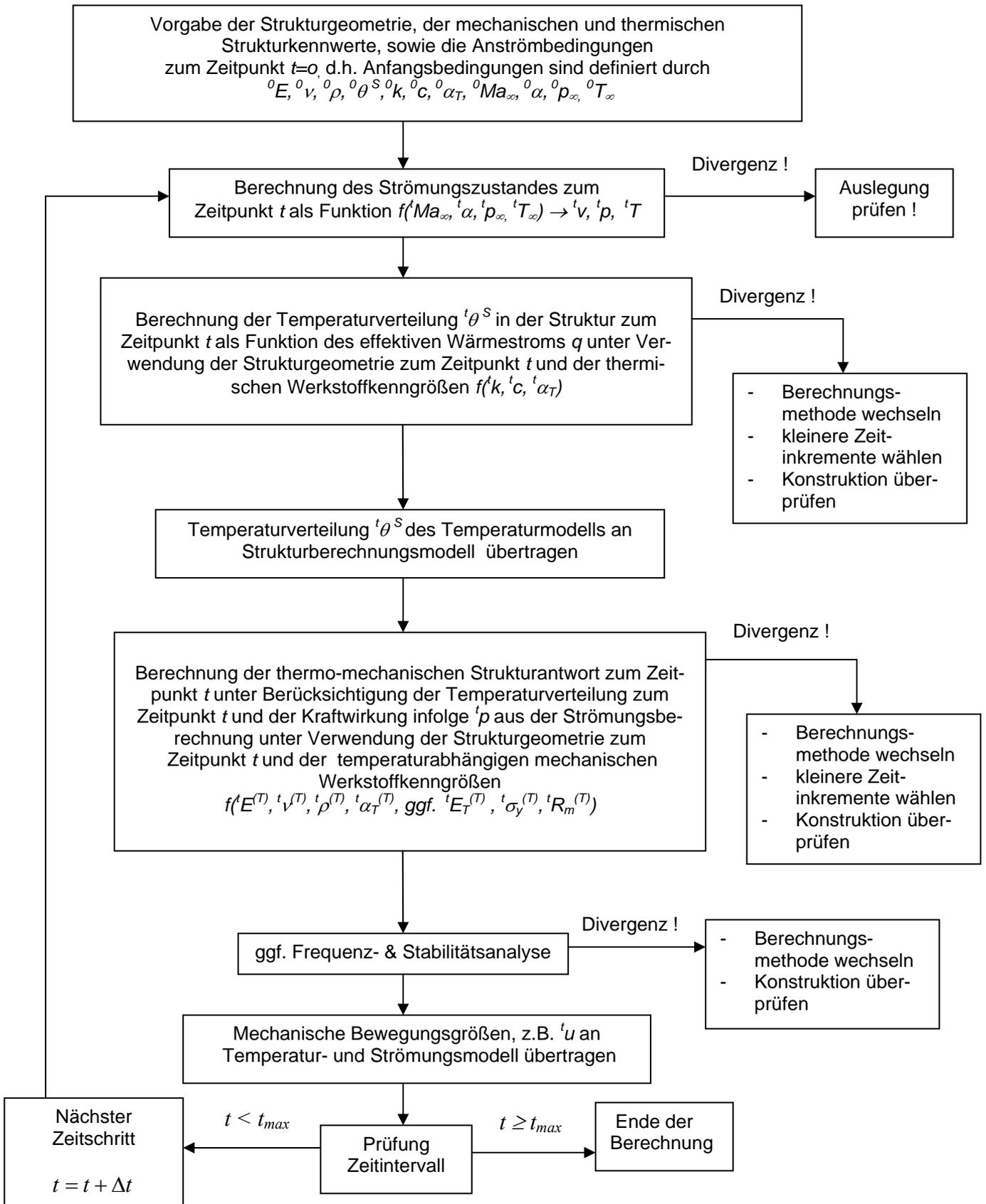


Abb. 35: Vorgehensmodell zur Strukturauslegung

Da es sich bei der vorgegebenen Fragestellung um zeitabhängige Vorgänge handelt, ist es erforderlich, die Problematik der Zeitintegration mit in die Betrachtung einzubeziehen. Gewählt wird in dieser Arbeit die Newmark-Methode.

Zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens von Metallen wird ein einparametrisches, thermo-plastisches Materialgesetz, wie in Kapitel 2.7 beschrieben, herangezogen.

Damit kann das vollständige Strukturverhalten, einschließlich der vorhandenen Nichtlinearitäten aus thermischen Belastungen, Struktur- und Werkstoffverhalten, schrittweise im Zeitbereich gelöst werden.

5.2 Temperatur-Struktur-Koppelung

Ziel der Arbeit ist nun, die Methoden der Strukturanalyse und die Methoden zur Lösung der Temperaturgleichungen zu koppeln, um damit Struktureffekte infolge der Einwirkung von hohen Temperaturen in Verbindung mit temperaturabhängigem Werkstoffverhalten zu untersuchen. Als Beurteilungsgröße wird das Eigenschwingungsverhalten der Struktur in die Analyse miteinbezogen.

Als Grundlage für das Verfahren wurde das Programm **STAP** von **K.J. Bathe** [B-02] verwendet und auf die im Stand der Wissenschaft beschriebenen Algorithmen für Stabwerke angepasst. Dies erschien als eine geeignete Vorgehensweise, da durch zahlreiche Veröffentlichungen in Bezug auf die verwendeten Theorien, Speichertechnik und Verifikationsmöglichkeiten die besten Voraussetzungen zum Überprüfen der dargestellten Vorgehensweisen gegeben sind. Da sich die Methodik zur Berechnung von Temperaturproblemen analog zum Ablauf einer Strukturberechnung abbilden lässt, war es möglich mit vergleichsweise geringem Aufwand einen Algorithmus für eindimensionale Wärmeleitung zu entwickeln.

5.3 Beschreibung des Berechnungsmodells

Um eine Gesamtbetrachtung durchzuführen, ist es zweckmäßig, die Definition von Berechnungsmodellen auf Basis reiner Geometriebeschreibung, d.h. Punkte, Linien und Flächen, vorzunehmen. Die in die Untersuchungen mit einzubeziehenden Belastungen, Randbedingungen und Werkstoffkenngrößen werden gleichfalls nur der Geometriedefinition zugewiesen. Auf Basis der Geometriebeschreibung wird dann die Systemtopologie des Berechnungsmodells für die mechanische Strukturantwort definiert.

Dieses Vorgehen wird hier gewählt, weil es zum einen möglich sein muss, beliebige Netzdichten als Konsequenz von Berechnungsergebnissen aus einer einmalig zu definierenden Geometrie abzuleiten und eine eindeutige Zuweisung von Randbedingungen vorzunehmen. Die Zuweisung von äußeren Belastungen ist eindeutig, da diese nur seitens der Struktur aufgenommen werden können; die Zuweisung von Temperaturen könnte sowohl für die Temperaturfeldberechnung definiert sein als auch für die Strukturberechnung.

Die Verwendung von zwei unabhängigen Berechnungsmodellen ist zur Ermittlung des mechanischen und thermischen Verzerrungsverhaltens gleichfalls erforderlich.

Die gesamte Verzerrung aus mechanischer und thermischer Beanspruchung wird angeschrieben mit

$${}^{\tau}e_{rs} = {}^{\tau}e_{rs}^M - {}^{\tau}e_{rs}^{TH}, \quad \text{wobei} \quad {}^{\tau}e_{rs}^{TH} = {}^{\tau}\alpha_m \left({}^{\tau}\theta - \theta_{REF} \right) \delta_{rs}$$

ist.

Für die thermische Analyse wird ${}^{\tau}e_{rs}^{TH}$ linear, da ${}^{\tau}\theta$ linear ist. In der mechanischen Analyse ist ${}^{\tau}e_{rs}^M$ konstant wenn lineare Verschiebungsansätze verwendet werden, d.h. ein linearer Ansatz für die Thermalanalyse bedingt einen quadratischen Verschiebungsansatz im Strukturmodell. Dieser Effekt wird näherungsweise in dieser Arbeit durch die Möglichkeit einer frei wählbaren Elementunterteilung zur Temperaturberechnung berücksichtigt.

Dazu sind unterschiedliche Berechnungsnetze erforderlich, die jedoch ineinander übergeführt werden müssen.

Die Generierung der Berechnungsmodelle erfolgt deshalb in direkter Anlehnung an die geometrische Topologievorgabe. Auf Basis der frei wählbaren Unterteilung der Strukturelemente erfolgt die automatische Diskretisierung des Berechnungsmodells zur Wärmeübertragung, siehe [Abb. 36](#). Die Gitterpunkte des Wärmeübertragungsmodells werden unter Verwendung von Formfunktionen eindeutig an das Strukturberechnungsmodell gekoppelt. Die spezifischen Randbedingungen und Belastungen werden automatisch den unterschiedlichen Berechnungsmodellen zugewiesen und in den Berechnungsalgorithmus eingefügt.

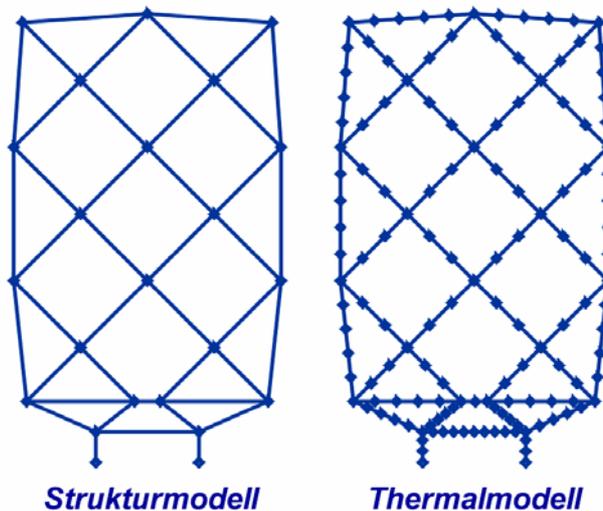


Abb. 36: Exemplarische Vernetzung zur Struktur- und Thermal-Modellierung

Dieses aufgeteilte Berechnungsmodell ist deshalb erforderlich, weil im Fall einer reinen Wärmestrombelastung und/oder Konvektionsbelastung die Strukturbelastung nur mittelbar über die zuvor zu berechnende Temperaturverteilung entsteht. Dadurch, dass das Berechnungsmodell zur Wärmeübertragung aus dem Modell zur Strukturberechnung abgeleitet wurde, ist gleichfalls eine eindeutige Zuweisung der berechneten Temperaturen gegeben.

5.4 Äußere Kräfte und Wärmestrom

Diese Arbeit beinhaltet keine Berechnung der Druck-, Temperatur- oder Wärmestromverteilung in der Strömung. Diese, von außen auf die Struktur einwirkenden, Beanspruchungen müssen für vorgegebene Strömungszustände einer vorgezogenen numerischen Strömungsberechnung entnommen werden oder sind analytisch zu bestimmen. Die konzentrierten Wärmeströme Q werden durch Integration der pro Flächeneinheit wirkenden Wärmestromverteilung q an der Körperoberfläche ermittelt. Die Verteilung der im Windkanal bestimmten Kraftverteilung erfolgt anteilmäßig auf die gewählten Systemknoten. Da diese Belastungen einem zeitabhängigen Strömungsprofil zugeordnet sind, erfolgt die zeitliche Zuordnung der äußeren Einwirkungen auf die Struktur unter Verwendung von Zeitfunktionen durch Vorgabe von konzentrierten Wärmeströmen $Q(t)$ und Einzelkräften $F(t)$ an den Systemknoten.

Für die Einbeziehung der Wärmeübertragung durch erzwungene Konvektion wird eine erweiterte Zeitfunktion eingeführt. Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient h lässt sich ausdrücken als Funktion $h(T_\infty, Re, Pr, Ma, k_\infty, L)$ von Umgebungstemperatur T_∞ , Reynolds-Zahl, Prandtl-Zahl, Mach-Zahl, Wärmeleitfähigkeit k des strömenden Mediums und der Geometrie, hier „Flache Platte“ mit der Länge L . Die adiabate Wandtemperatur T_{aw} ist eine Funktion $T_{aw}(T_\infty, Ma, Pr)$ von Umgebungstemperatur T_∞ , Machzahl und der Prandtl-Zahl. Die hierfür erforderlichen Parameter werden auf Basis strömungsmechanischer Grundlagen vorab berechnet und, wie in [Tabelle 4](#) vorgegeben, als Randbedingung in die Berechnung eingebracht.

Tabelle 4: Angenommene Zeitfunktion für den konvektiven Wärmeübergang

Zeit [sec]	h [W/(m²·K)]	A_{ref} [m²]	T_{aw} [K]
t_1	h_1	A_{ref_1}	T_{aw_1}
t_2	h_2	A_{ref_2}	T_{aw_2}
.	.	.	.
.	.	.	.
t_n	h_n	A_{ref_n}	T_{aw_n}

5.5 Numerisches Berechnungsverfahren

In einer zeitabhängigen Berechnung wird nun die nichtlineare Wärmeübertragung innerhalb der Struktur mit dem nichtlinearen, dynamischen Antwortverhalten der Struktur gekoppelt. Die auftretenden mechanischen und thermischen Belastungen sind für den physikalischen Vorgang bekannt und werden in frei wählbaren, diskreten Zeiten als Knotenkräfte und Knotenpunktwärmeströme vorgegeben. Ebenso sind die physikalischen Werkstoffeigenschaften als bekannt definiert und werden dem Berechnungsmodell als Funktion der Temperatur zur Verfügung gestellt. Zu vorgegebenen Zeiten werden nun die physikalischen Ungleichgewichte für die Wärmeübertragung und das Strukturverhalten mittels nichtlinearer, inkrementeller Vorgehensweise numerisch gelöst. Der Ablauf des numerischen Berechnungsverfahrens ist im Ablaufdiagramm von [Abb. 37](#) dargestellt.

Zu Beginn der Berechnung wird davon ausgegangen, dass sowohl das thermische und mechanische Gleichgewicht eingehalten ist. Ausgehend davon wird die zu einem nachfolgenden Zeitpunkt wirkende Wärmestrombelastung in die Struktur eingeleitet. Die dabei infolge Wärmeleitung an den Knotenpunkten auftretenden Temperaturen werden nun für das vorgegebene Zeitinkrement inkrementell mit einem impliziten Euler-Rückwärtsverfahren als Funktion des Wärmestroms in Abhängigkeit der thermophysikalischen Werkstoffeigenschaften berechnet. Da die thermophysikalischen Werkstoffkennwerte eine Funktion der Temperatur sind, und das stationäre Wärmestromgleichgewicht im System zum betrachteten Zeitpunkt unbekannt ist, wird die Temperaturverteilung iterativ bestimmt. Die Randbedingungen für definierte Knotenpunkttemperaturen werden dabei unter Verwendung des Strafverfahrens eingehalten. Die Elemente innerhalb des Wärmeübertragungsmodells sind als adiabat angenommen. Nach erfolgreicher Iteration des Wärmestromgleichgewichts liegen nun die Temperaturen an den Modellknoten vor und werden als thermische Beanspruchung an das Strukturberechnungsmodell übergeben. Das Wärmeübertragungsmodell wurde direkt aus dem Strukturberechnungsmodell abgeleitet, dadurch ist die Zuordnung der korrespondierenden Modellpunkte durch eine Inzidenztabelle unmittelbar gegeben. Optional zur Temperaturbelastung werden Trägheits- und Einzelkräfte berücksichtigt.

Für genau diesen betrachteten Zeitraum, währenddessen der einwirkende Wärmestrom den Temperaturzustand der Struktur verändert hat, wird nun das mechanische Gleichgewicht der Struktur bestimmt. Die mechanischen Werkstoffkennwerte liegen als Funktion des veränderten Temperaturzustandes vor und werden zur Aufstellung der dynamischen Systemgleichungen verwendet. Die Berechnung der auftretenden dynamischen Strukturantworten erfolgt unter der Annahme eines linearen Ansatzes für die Beschleunigung nach dem Newmark-Verfahren. Die Berechnung der thermischen Verzerrungen eines Stabelementes erfolgt für den Mittelwert der Temperaturen an den Stabendknoten. Die Bestimmung der aufnehmbaren Spannungen ${}^{t+\Delta t}\sigma(e^{PL}, T)$ in den Strukturelementen als Funktion der plastischen Verzerrungen und der Temperatur erfolgt iterativ unter Einhaltung der von Mises Fließbedingung für isotropes Materialverhalten. Aus den Spannungen ${}^{t+\Delta t}\sigma$ ergeben sich dann unter Verwendung der vorgegebenen Querschnittsfläche die gesuchten Stabkräfte.

Wirken gleichzeitig zur Temperaturbeanspruchung noch mechanische Kräfte und sind große Systemverformungen zu erwarten, so sind deren Wirkungen auch am verformten System zu untersuchen. Die Beschreibung der wirksamen Systemsteifigkeit erfolgt durch eine lineare und eine geometrische Steifigkeitsmatrix. Für die Erstellung der linearen als auch der nichtlinearen Elementsteifigkeitsmatrizen wird der isoparametrische Verschiebungsansatz für ein 2-Knotenelement verwendet. Das geometrisch nichtlineare Verformungsverhalten wird durch eine Total-Lagrange-Formulierung in die Berechnung mit einbezogen. Die Beschreibung der werkstoffabhängigen Struktursteifigkeiten geschieht durch die lineare Elementsteifigkeitsmatrix ${}^{t+\Delta t}_0 K_L$ und der Einfluss der geometrischen Veränderung wird durch die Steifigkeitsmatrix ${}^{t+\Delta t}_0 K_{NL}$ unter Verwendung der Kraft im Stabelement erfasst. Die Berechnung der unbekanntenen Knotenpunktverformungen erfolgt aufgrund der materiellen und geometrischen Nichtlinearitäten iterativ und wahlweise mit einem vollständigem Newton-Raphson oder einem modifizierten Newton-Raphson Verfahren.

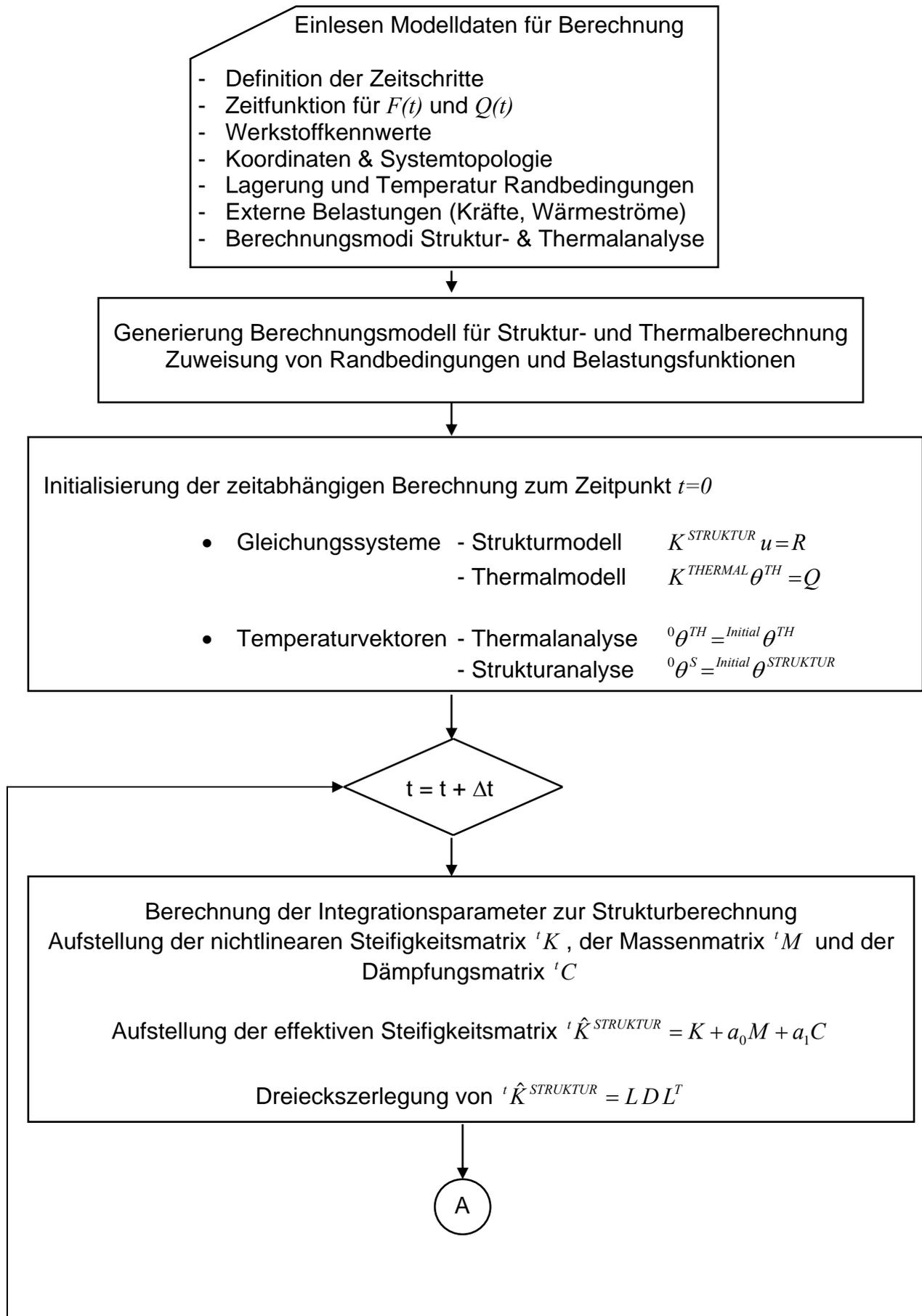
Unter Verwendung der berechneten, endgültigen Knotenpunktverformungen wird eine neue Geometrie des Wärmeübertragungsmodells erstellt. Die Verformungen an den Modellpunkten, welche nicht korrespondierend zum Strukturmodell vorhanden sind, werden unter Verwendung des isoparametrischen Elementansatzes interpoliert. Das geometrisch veränderte Berechnungsmodell zur Berechnung der Wärmeübertragung wird damit zur Berechnungsgrundlage für die Berechnung der Temperatur- und Strukturantworten im nachfolgenden Zeitschritt.

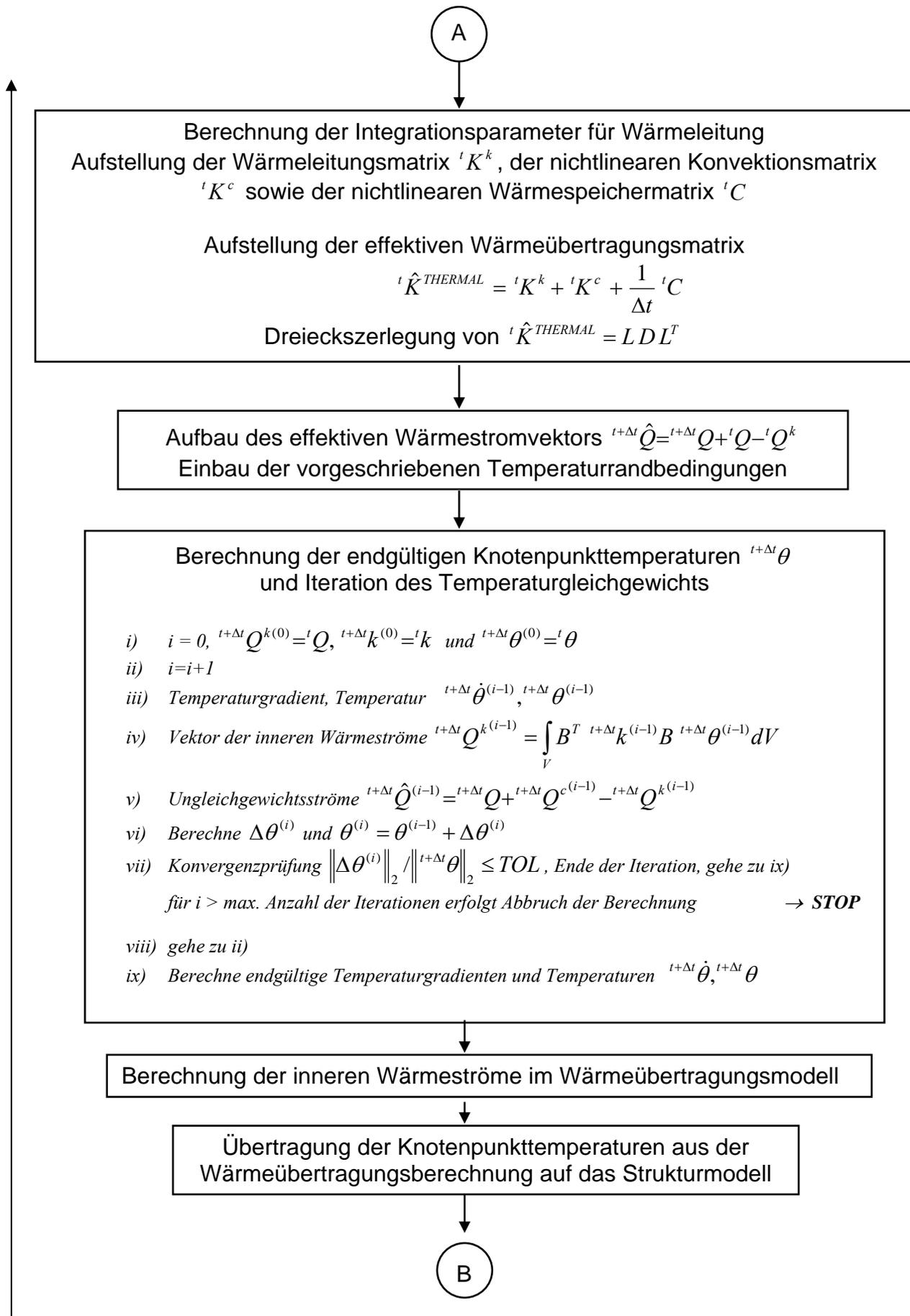
Infolge Temperatureinwirkung und äußerer Belastung ändern sich Werkstoffkennwerte und Strukturgeometrie als Funktion der Zeit. Zusätzlich ist die jeweilige auftretende dynamische Antwort zum Zeitpunkt t gleichfalls eine Funktion aus dem vorangegangenen Zeitverhalten. Sowohl die Änderung der Werkstoffkennwerte als auch der Geometrie infolge der ermittelten Strukturverformungen beeinflussen unmittelbar die Systemsteifigkeit und die Massenverteilung. Dieser Zusammenhang kann eine diskrete Bewertung der Analyse und des Tragwerkverhaltens in Bezug auf seine dynamische Sensitivität sehr kompliziert gestalten.

Für die Bewertung des Strukturverhaltens wird deshalb die Veränderung des Eigenschwingungsverhaltens als Funktion der temperaturabhängigen Werkstoffkenngrößen und der Strukturverformung herangezogen. Zu diesem Zweck wird nachfolgend dargestelltes Eigenproblem

$$K \Phi = \lambda_E M \Phi$$

gelöst. Hierbei beschreibt K die Steifigkeitsmatrix, M die Massenmatrix, Φ den Eigenvektor und λ_E den Eigenwert des betrachteten Systems. Die für eine Bewertung erforderlichen physikalischen und geometrischen Zustandsgrößen liegen am Ende eines jeden Zeitschrittes, d.h. zum Zeitpunkt $t+\Delta t$, unter Verwendung der nichtlinearen konstitutiven Steifigkeits- und Massenmatrix vor, um damit das Eigenschwingungsverhalten zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ zu berechnen. Zur Lösung des dargestellten Eigenwertproblems wird das SUBSPACE-Verfahren von **Bathe** [A-01] verwendet.





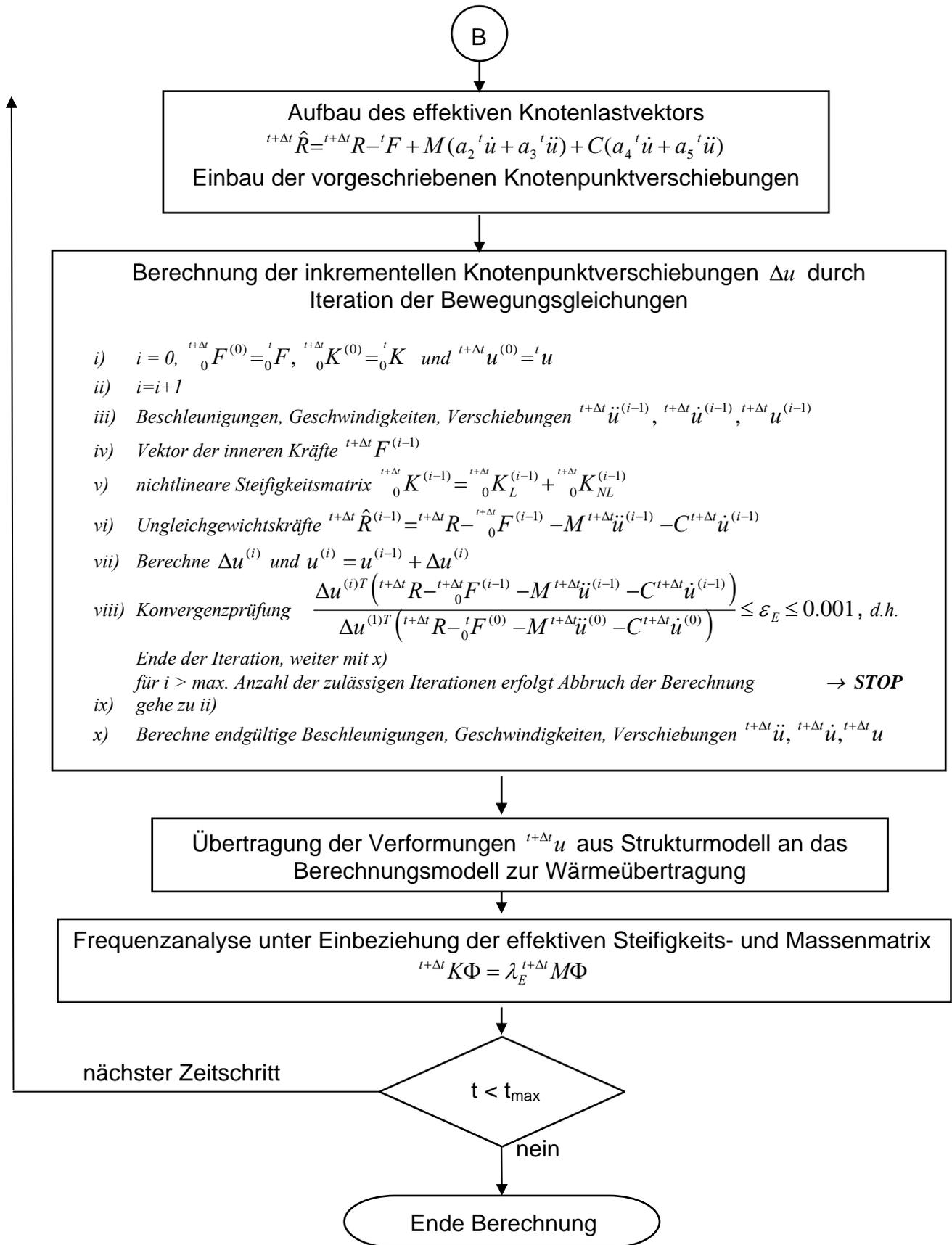


Abb. 37: Ablaufdiagramm der numerischen Temperatur-Struktur-Koppelung

6 Gekoppelte Simulation der Temperatur-Struktur-Interaktion

Exemplarisch wird nun an einigen Prinzipbeispielen gezeigt, welche Möglichkeiten das dargestellte Verfahren beinhaltet.

6.1 Eindimensionale Druckbeanspruchung und Aufheizung an Profilen

Ein einfaches Profil, siehe [Abb. 38](#), wird gleichzeitig infolge Druck und Wärmestrom an der Stirnseite beansprucht. Untersucht wird die Interaktion zwischen stationärem Temperatur- und Strukturverhalten.

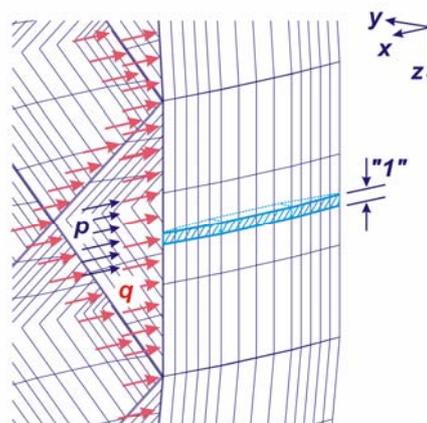


Abb. 38: Profilbeanspruchung durch gleichzeitige Einwirkung von Druck- und Wärmestrombelastung

Um den Einfluss der Profilgeometrie mit in die Betrachtung einzubeziehen wird ein Rechteckprofil (Profil A) und ein Profil mit angeschärfter Vorderkante (Profil B), siehe [Abb. 39](#), untersucht.

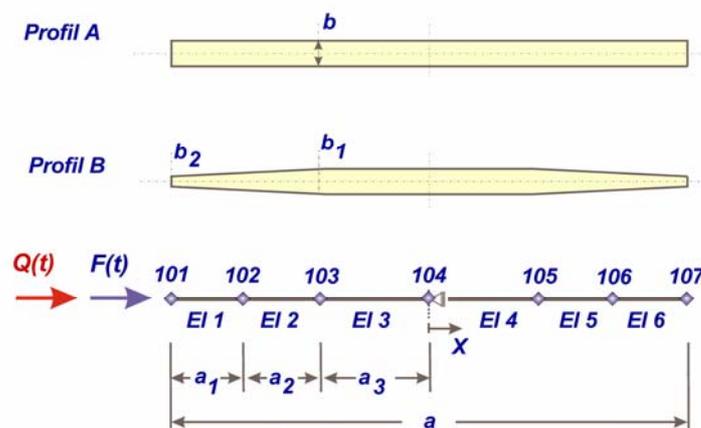


Abb. 39: Numerisches Berechnungsmodell für unterschiedliche Profilgeometrien

Die Profile sollen jeweils in der Profilmitte unverschieblich gelagert sein.

Die Abmessungen der Profile werden mit $a = 40,0$ [mm], $a_1 = 6,0$ [mm], $a_2 = 6,0$ [mm], $a_3 = 8,0$ [mm], $b=b_1=2,0$ [mm] und $b_2=0,5$ [mm] angesetzt. Die Profilhöhe wird mit $h=1,0$ [mm] gewählt.

Damit lässt sich die in [Tabelle 5](#) angegebene Elementbeschreibung erstellen.

Tabelle 5: Finite Elemente Definition für Profilquerschnitte

Element	Knoten A	Knoten E	Querschnittsfläche	
			A (Profil A) [mm ²]	A (Profil B) [mm ²]
1	101	102	2,0	0,875
2	102	103	2,0	1,625
3	103	104	2,0	2,000
4	104	105	2,0	2,000
5	105	106	2,0	1,625
6	106	107	2,0	0,875

Die erforderlichen Werkstoffkennwerte werden aus einschlägigen Datenblättern für hochwarmfesten INCONEL 718 Stahl abgeschätzt.

Tabelle 6: Werkstoffkennwerte von INCONEL Stahl für die Strukturberechnung

Temperatur [K]	E-Modul [N/mm ²]	Poisson-Zahl [-]	Dichte [kg/m ³]	α_T 1,0E-6 [1/K]	σ_y [N/mm ²]
273,15	199000	0,29	8200	12,8	1050,0
293,15	199000	0,29	8200	12,8	998,4
373,15	195000	0,28	8200	12,8	956,8
473,15	190000	0,28	8061	13,4	931,8
573,15	185000	0,27	7921	13,8	913,1
673,15	179000	0,27	7782	14,1	900,6
773,15	174000	0,27	7503	14,3	890,0
873,15	167000	0,27	7224	14,7	881,0
973,15	163000	0,29	6945	15,6	873,0
1073,15	149000	0,31	6667	16,4	640,0
1173,15	134000	0,33	6252	17,2	422,0
1573,15	102000	0,33	4800	19,7	150,0
1673,15	98410	0,34	4497	20,3	135,8
1756,15	95890	0,34	4251	20,6	124,1
2073,15	84000	0,46	3282	22,2	80,0

Tabelle 7: Werkstoffkennwerte von INCONEL Stahl für die Wärmeleitung

Temperatur [K]	k [W/(m.K)]	c _s [J/(kg.K)]	Dichte [kg/m ³]
273,15	13,0	440,0	8200
293,15	13,0	440,0	8200
373,15	13,0	450,0	8200
473,15	14,0	470,0	8061
573,15	15,0	500,0	7921
673,15	17,0	520,0	7782
773,15	19,0	530,0	7503
873,15	21,0	560,0	7224
973,15	23,0	630,0	6945
1073,15	25,0	640,0	6667
1173,15	27,0	650,0	6252
1573,15	35,0	698,8	4800
1673,15	37,0	711,0	4497
1756,15	39,0	717,0	4251
2073,15	45,0	747,6	3282

Bemerkung: Die thermo-physikalischen Kennwerte von metallischen Werkstoffen für den Temperaturbereich > 2000 [K] sind nicht konsistent verfügbar und wurden deshalb verschiedenen Datenblättern entnommen. Fehlende Werte für den hohen Temperaturbereich wurden durch inter- und extrapolieren mit kubischen Splines ergänzt. Deshalb sind die verwendeten Daten nur Anhaltswerte und müssen für eine exakte Werkstoffauswahl überprüft werden.

Das Zeitverhalten für Druckkraft und Wärmestrom wird gemäß [Abb. 40](#) angenommen. Als Maximum der Druckkraft wird für Profil A eine Kraft $F_{N101, \max} = 1,5$ [N] und für Profil B ein Kraft $F_{N101, \max} = 0,375$ [N] gewählt. Der auftretende Wärmestrom wird mit $Q_{N101, \max} = 2,5$ [W] angesetzt. Sowohl Druckkraft als Wärmestrom sollen ihren Maximalwert nach $t_1 = 30$ [s] erreicht haben und dann konstant bleiben. Das Temperatur- und Strukturantwortverhalten wird über einen Zeitraum von $t_{\max} = 120$ [s] untersucht.

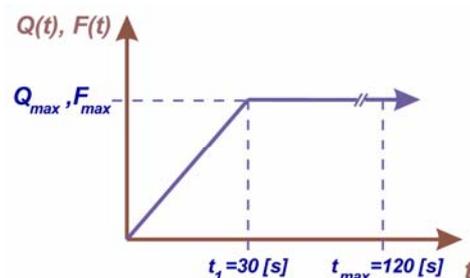


Abb. 40: Druckkraft- und Wärmestromverlauf (Vorgabe)

Als Referenztemperatur für die Strukturanalyse wird $T_{\text{Referenz}} = 293,15 \text{ [K]}$ gewählt.

Die Berechnung der instationären Temperaturantworten erfolgt unter Verwendung des Euler-Rückwärtsverfahrens. Für das instationäre Wärmeübertragungsverhalten wird eine konsistente Wärmespeicherkapazität angenommen. Für die Berechnung des instationären Strukturverhaltens wird das Newmark-Verfahren mit impliziter Zeitintegration verwendet, wobei eine konsistente Massenverteilung angenommen wird. Es wird davon ausgegangen, dass keine Strukturdämpfung stattfindet.

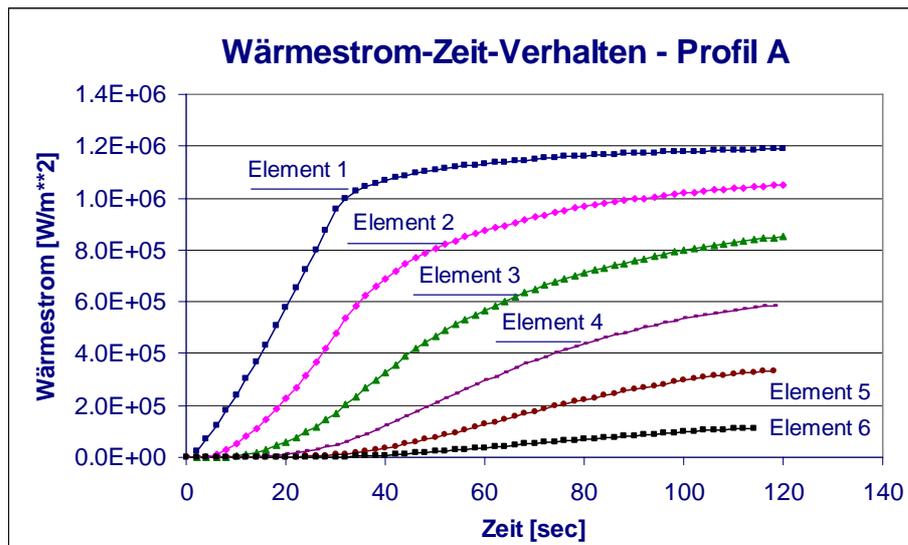


Abb. 41: Berechnetes Wärmestrom-Zeit-Verhalten in Profil A

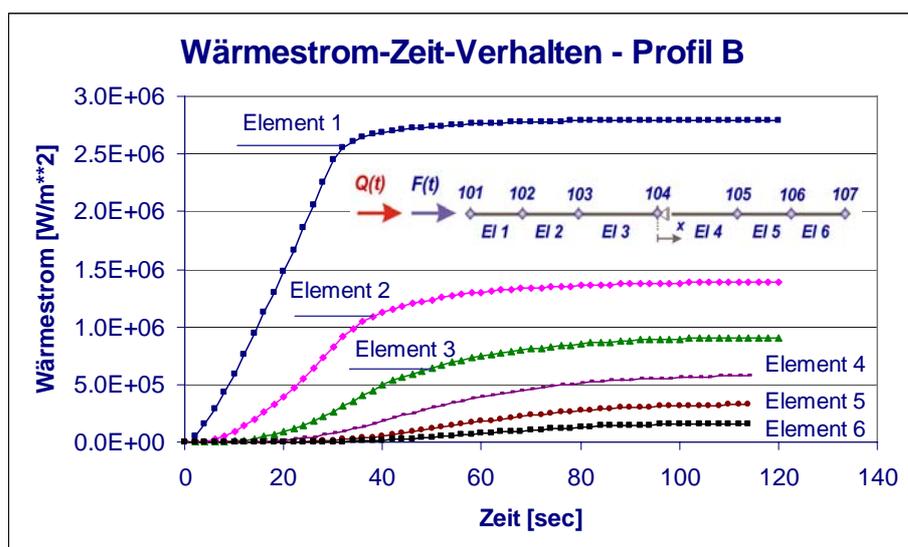


Abb. 42: Berechnetes Wärmestrom-Zeit-Verhalten in Profil B

Aus [Abb. 41](#) und [Abb. 42](#) ist sowohl der betragsmäßige, als auch der zeitliche Verlauf der Wärmeströme entlang der Profillinie und der definierten Elementquerschnitte zu entnehmen.

Ein Vergleich der zeitgleich auftretenden Wärmeströme an den untersuchten Profilen lässt einen deutlich größeren Wärmestrom in Profil B erkennen.

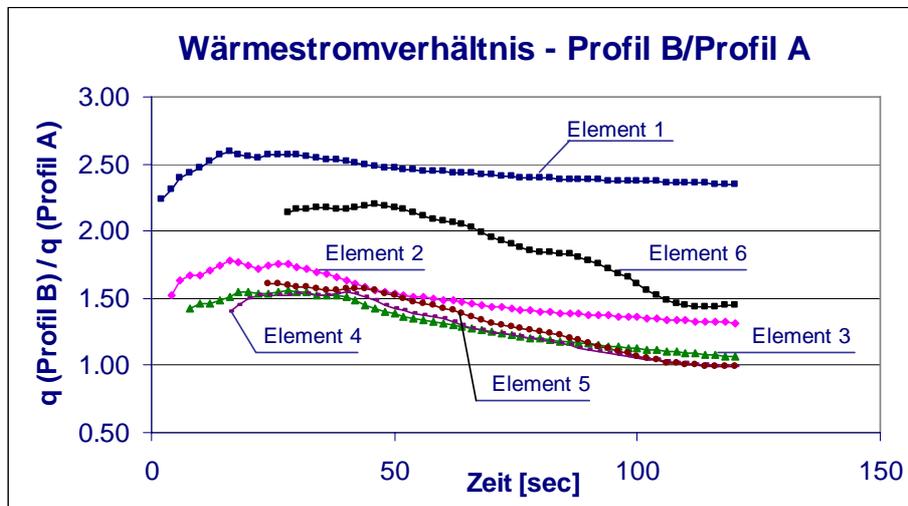


Abb. 43: Verhältnis der Wärmeströme in Profil B/Profil A

Aus [Abb. 43](#) lässt sich entnehmen, dass im vorderen Strukturbereich von Profil B, d.h. Element 1, der ca. 2,5-fache Wärmestrom von Profil A fließt. In Element 6, d.h. am Profilende, zeigt sich während der Aufheizungsphase gleichfalls ein Faktor größer 2,0 im Wärmestromverlauf. Da sich betragsmäßig verwertbare Wärmeströme in Bereichen mit größerem Abstand zur Wärmequelle als Funktion der Wärmeübertragungseigenschaften des Werkstoffes erst mit zeitlicher Verzögerung ergeben, wurden unterschiedliche Anfangszeiten zur Berechnung der Verhältniszahlen aus dem Wärmestromverlauf von [Abb. 41](#) und [Abb. 42](#) bestimmt.

In Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit der Struktur ergeben sich die instationäre Temperaturverteilungen.

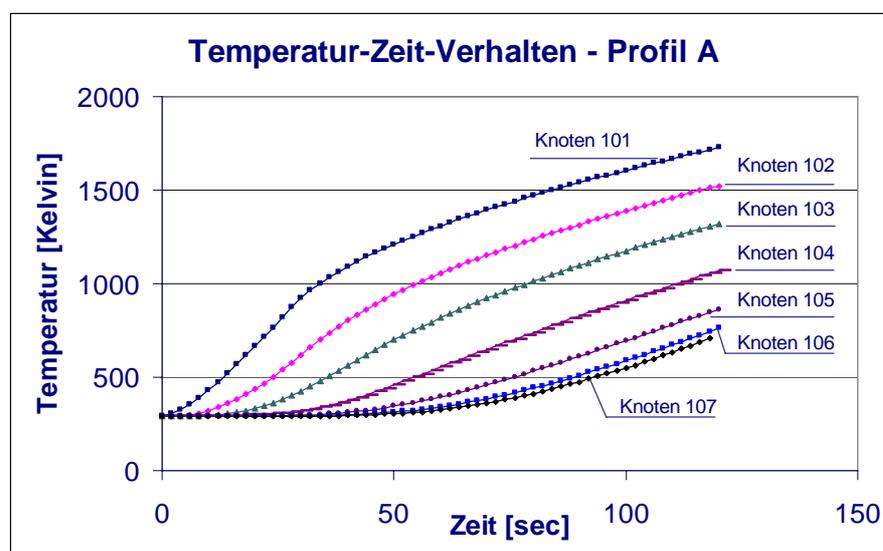


Abb. 44: Berechnete Temperaturverteilung in den Elementknoten von Profil A

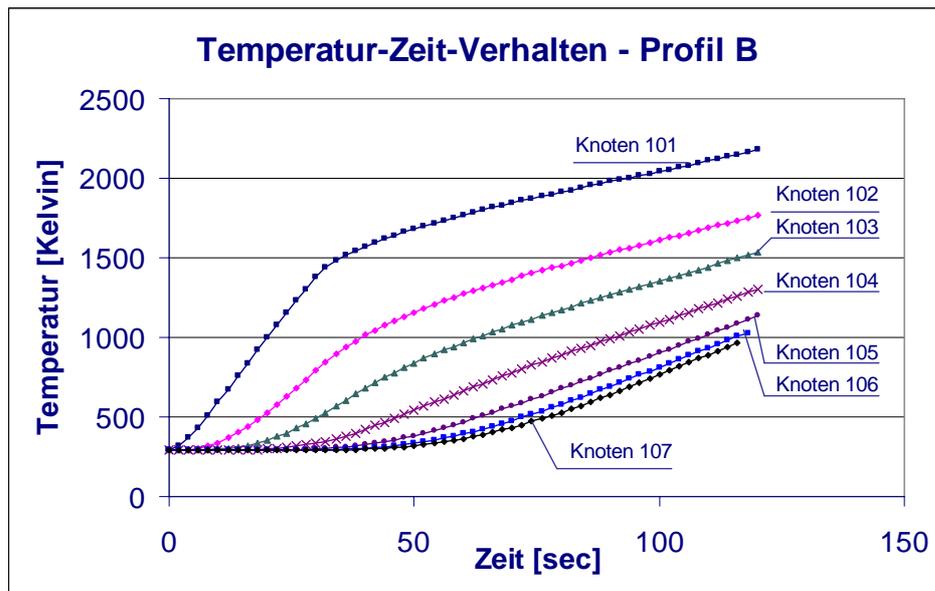


Abb. 45: Berechnete Temperaturverteilung in den Elementknoten von Profil B

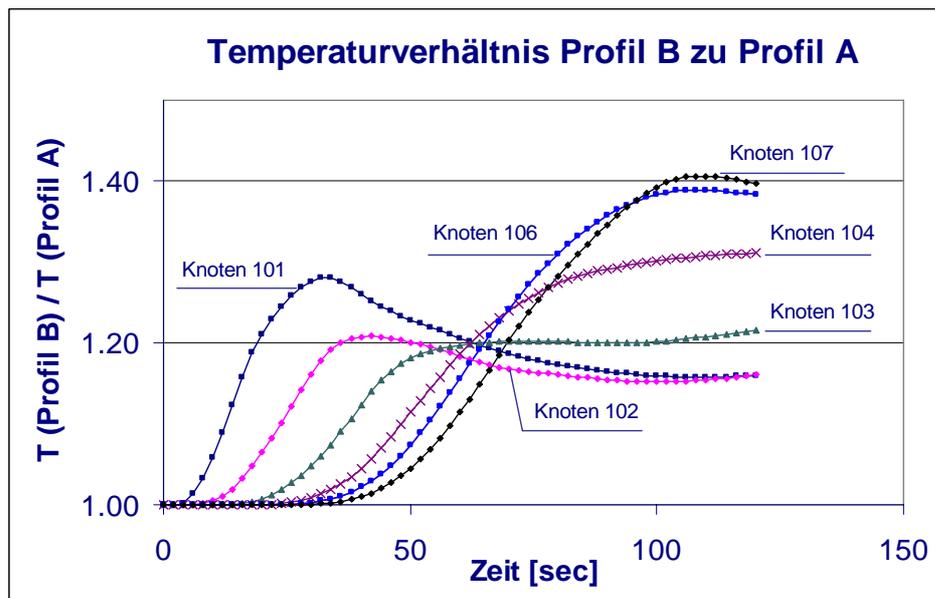


Abb. 46: Temperaturverhältnis Profil B / Profil A

Aus dem Verhältnis der auftretenden Profiltemperaturen, siehe [Abb. 46](#), von Profil B mit angeschärfte Vorderkante zum Rechteckprofil (Profil A), zeigt sich, dass sich der Zuwachs an Temperatur bei gleichem Wärmestrom im angeschärfte Profil erheblich schneller ereignet. Das Profil im Bereich der vorderen Anschärfung zeigt eine um ca. 30 %, über die Zeitachse auf ca. 20 % abfallend, höhere Temperatur. Im hinteren Profilabschnitt ist ein Anstieg der Temperatur bis auf den 1,4-fachen Betrag von Profil A zu erwarten.

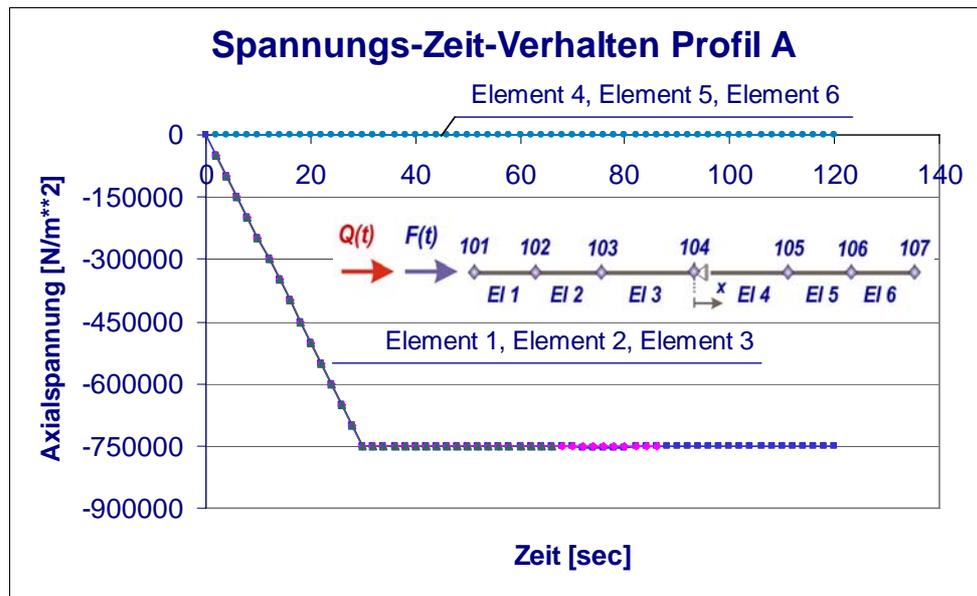


Abb. 47: Axialspannungen in Profil A

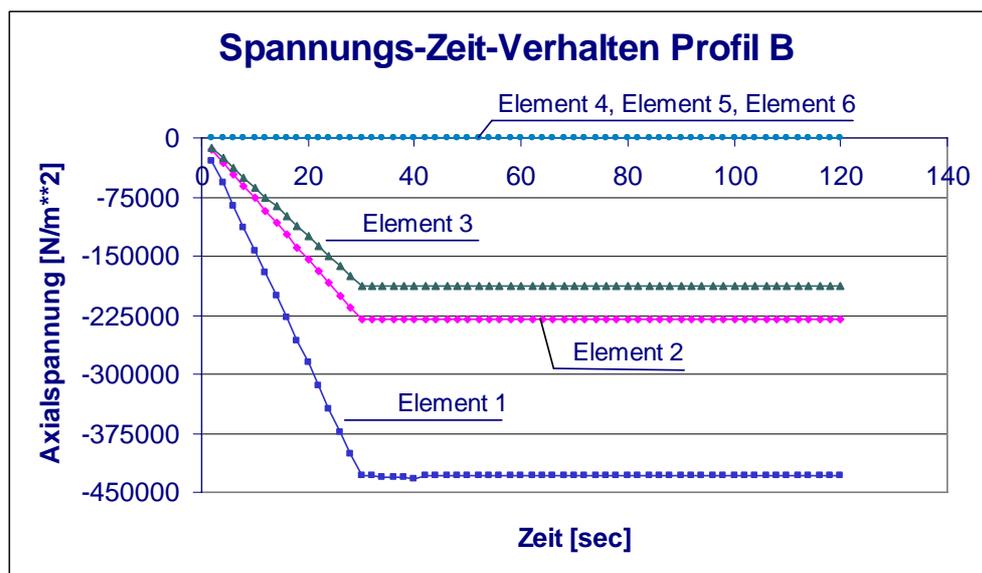


Abb. 48: Axialspannungen in Profil B

Aufgrund des Rechteckquerschnittes von Profil A, d.h. konstante Querschnittswerte, ergibt sich in den Elementen 1 bis 3 eine zeitlich veränderliche, jedoch betragsmäßig identische Druckspannung, siehe [Abb. 47](#). Für Profil B mit angeschärfter Vorderkante, d.h. veränderliche Querschnittswerte, zeigt sich sowohl eine zeitlich als auch betragsmäßig veränderliche Druckspannung in den Elementen 1 bis 3, siehe [Abb. 48](#). Aufgrund der gewählten Profillagerung ist die Struktur ab Element 4 spannungsfrei. Um die dargestellten Spannungsverteilungen in Element 1 bis 4 zu erreichen ist die Gleichgewichtsiteration, z.B. nach dem Energietoleranzkriterium mit hoher Genauigkeit $ETOL < 1.0E-10$, durchzuführen.

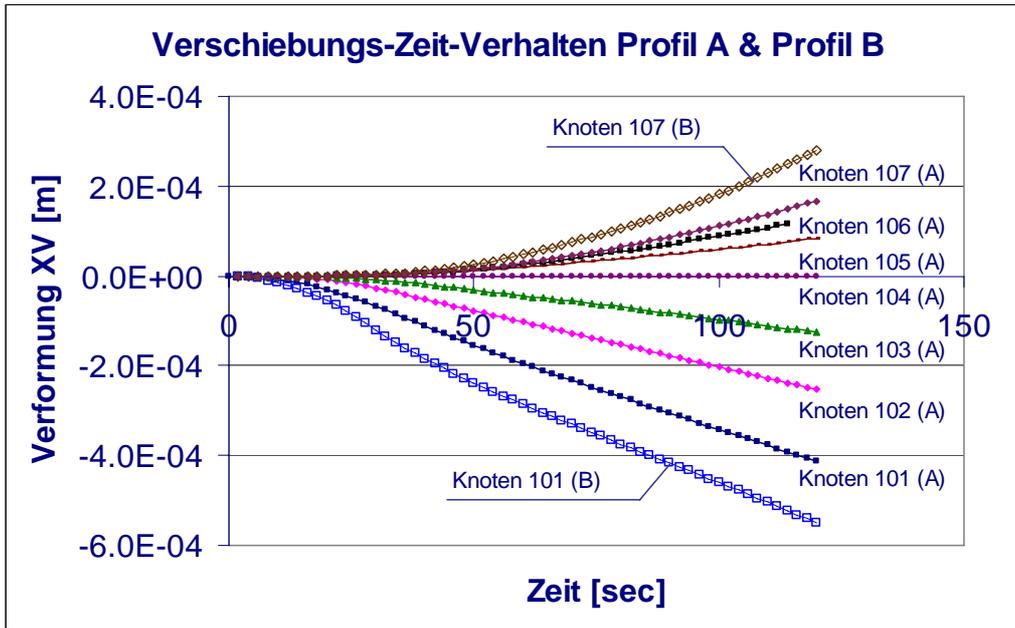


Abb. 49: Knotenverformung Profil A und Profil B

Obwohl sich in der Struktur infolge der aufgeprägten Kraft ein Druckspannungszustand einstellt, zeigt sich infolge der gleichzeitigen, einseitigen Erwärmung eine Ausdehnung der Profile in beide Richtungen. Durch dieses Verformungsverhalten entsteht eine deutliche Unsymmetrie der Profilgeometrie, siehe [Abb. 49](#), bezogen auf die Profilmitte. Die Verformung von Profil B ist für die Knoten 101 und 107 in [Abb. 49](#) eingetragen, wobei eine signifikante Zunahme der Strukturverformung gegenüber Profil A bei identischer Temperaturbelastung zu erkennen ist. Das gesamte Verformungsverhältnis für die gewählten Profile ist dargestellt in [Abb. 50](#).

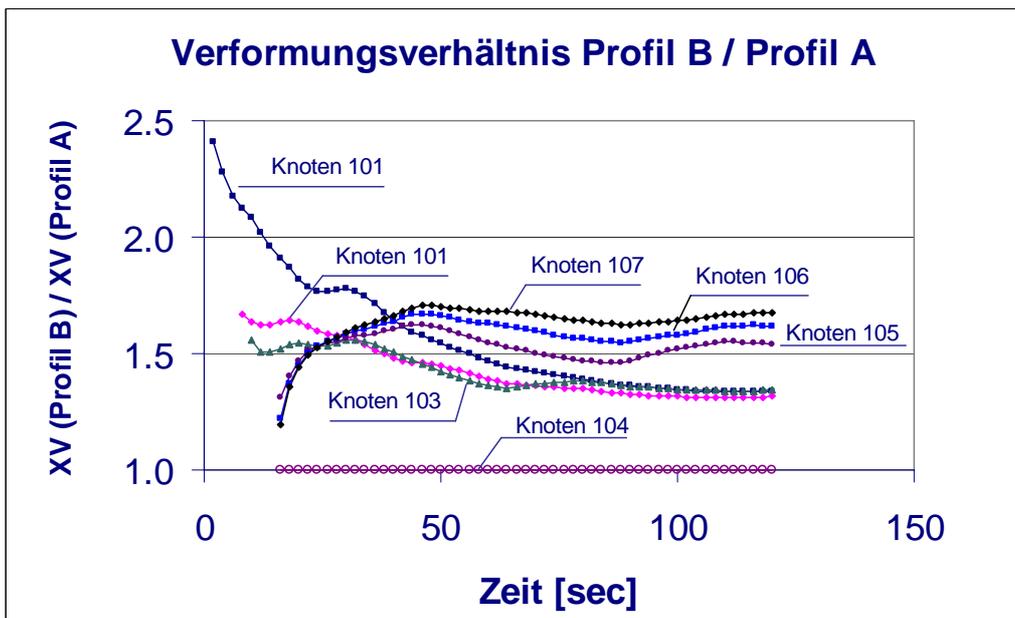


Abb. 50: Verhältnis der Knotenverformungen von Profil B zu Profil A

Das Verhältnis der Profilverformungen ergibt eine ca. 1,5-fach größere Strukturverformung im angeschärften Profil (B) als im Rechteckprofil (A). Zeigt für strömungsmechanische Anforderungen ein angeschärftes Profil deutliche Vorteile gegenüber einer stumpfen Profilverformung, so ist aufgrund des zu erwartenden Wärmeübertragungsverhaltens und der damit verbundenen thermischen Ausdehnung ein Profil konstanter Wandstärke zu empfehlen. Die Berechnung hat ebenfalls gezeigt, dass der zeitliche Wärmeeintrag in der angeschärften Profilverformung schneller abläuft. Das gleiche Verhalten würde sich auch bei einem Abkühlvorgang zeigen. Das bedeutet, dass dünnwandige Elemente deutlich schneller und heftiger auf Temperatureinflüsse reagieren als dickwandige Elemente. Die Anfälligkeit auf thermische Ermüdung ist deshalb bei dünnwandigen Elementen von zusätzlicher Bedeutung und zusätzlich zu untersuchen. Aufgrund der unsymmetrischen Profilverformung ist eine Änderung der strömungsmechanischen Druckverteilung zu erwarten, was zu zusätzlichen Kräfte- und Momentenbelastungen führen kann. Diese Beanspruchungen sind gleichfalls in der Bauteildimensionierung zu berücksichtigen. Generell ist bei einer Profilerwärmung davon auszugehen, dass sich die überströmte Länge vergrößert. Für den Fall, dass die untersuchten Profilquerschnitte Elemente eines Fachwerktragflügels sind, sind Auswirkungen auf das Expansions- und Reflexionsverhalten in den Gitterkanälen zu erwarten, da selbst bei stationären Anströmbedingungen eine Änderung der umströmten Geometrie stattfindet.

Tabelle 8: Werkstoffkennwerte S235 JO - Strukturberechnung

Temperatur [K]	E-Modul [N/mm ²]	Poisson-Zahl [-]	Dichte [kg/m ³]	α_T 1,0E-6 [1/K]	σ_y [N/mm ²]
273,15	210000	0,285	7850	12,0	240,0
293,15	210000	0,285	7850	12,0	240,0
373,15	210000	0,285	7850	12,0	240,0
473,15	205800	0,285	7850	12,0	235,0
573,15	197400	0,295	7850	12,0	200,0
673,15	186900	0,313	7850	12,0	160,0
773,15	174300	0,313	7850	12,0	136,0
873,15	159600	0,313	7850	12,0	80,0
973,15	136500	0,313	7850	12,0	17,5
1073,15	120800	0,314	7850	12,0	17,5
1173,15	110000	0,313	7850	12,0	17,5

Tabelle 9: Werkstoffkennwerte S235 JO - Wärmeleitung

Temperatur [K]	k [W/(m.K)]	c_s [J/(kg.K)]	Dichte [kg/m ³]
273,15	65,29	420,1	7832
293,15	64,26	430,4	7832
373,15	60,08	473,2	7832
473,15	55,03	519,9	7832
573,15	50,12	522,8	7832
673,15	45,17	575,8	7832
773,15	40,39	646,7	7832
873,15	36,20	838,5	7832
973,15	32,35	1101,1	7832
1073,15	28,27	1316,4	7832
1173,15	23,38	1366,4	7832

Bemerkung: Die angegebenen Werkstoffkennwerte sind verschiedenen Quellen entnommen, da die erforderlichen thermo-physikalischen Kennwerte nicht konsistent verfügbar sind. Deshalb sind die vorgegebenen Daten nur Anhaltswerte und sind ohne Überprüfung nicht auf andere Aufgabenstellungen übertragbar. Die unterschiedlichen Werkstoffdichten wurden gewählt um die Eigengewichtsbelastung nicht als Funktion der Temperatur zu verändern.

Als Belastung sollen die vorhandenen Massen infolge der Erdanziehung wirken. Gleichzeitig wird das Fachwerk am Knoten 102 mit einer harmonischen Sinusbelastung $F_{N102} = 5000 \cdot \sin \omega t$ [N] erregt, wobei als Erregerfrequenz $f = 5$ [Hz] gewählt wird. Zusätzlich wird am Knoten 102 ein zeitabhängiger Wärmestrom, z.B. aus Brandbeanspruchung, aufgeprägt.

Das Zeitverhalten für den einwirkenden Wärmestrom wird gemäß [Abb. 52](#) angenommen. Der auftretende Wärmestrom wird mit $Q_{N102, \max} = 80E+06$ [W] angesetzt und soll den Maximalwert nach $t_1 = 3$ [s] erreicht haben und dann konstant bleiben. Das Temperatur- und Strukturantwortverhalten wird über einen Zeitraum von $t_{\max} = 7,2$ [s] untersucht.

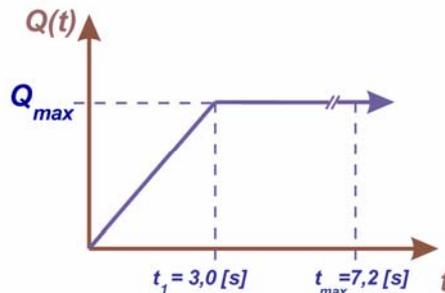


Abb. 52: Wärmestromverlauf (Vorgabe)

Als Referenztemperatur für die Strukturanalyse wird $T_{\text{Referenz}} = 293,15$ [K] gewählt.

Die Berechnung des instationären Temperaturverhaltens erfolgt unter Verwendung des Euler-Rückwärtsverfahren. Für das instationäre Wärmeübertragungsverhalten wird eine konsistente Wärmespeicherkapazität gewählt. Für die Berechnung des instationären Strukturverhaltens wird das Newmark-Verfahren mit impliziter Zeitintegration verwendet wobei eine konsistente Massenverteilung angenommen wird. Als Strukturdämpfung wird für die erste und zweite Eigenfrequenz eine RAYLEIGH-Dämpfung mit den Konstanten $\alpha=7,45321$ und $\beta=0,00003$ angesetzt.

Als Referenz für die instationäre Strukturantwort bei Temperatureinwirkung wird zunächst eine Berechnung bei Referenztemperatur, d.h. kein zusätzlicher Wärmeeintrag, durchgeführt und die Strukturschwingung für zwei Systemknoten in [Abb. 53](#) dargestellt.

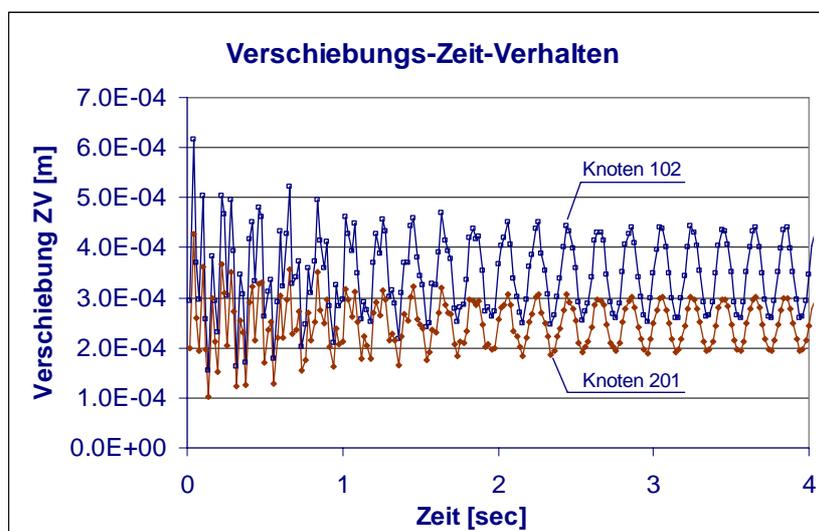


Abb. 53: Verformungsverhalten der Knotenpunkte 102 und 201 in z-Richtung

Wie sich das statische System und die Eigenschaften des Tragwerks durch die Einwirkung eines äußeren Wärmestroms verändern, wird unter Verwendung der Frequenzantwort, dem zeitlichen Antwortverhalten der Stabkräfte und dem Verformungsverhalten des Tragwerks betrachtet.

Eine Eigenschwingungsberechnung unter Referenztemperatur ergibt für die untersten Frequenzen $f_1=26,08$ [Hz], $f_2=43,07$ [Hz] und $f_3=71,56$ [Hz]. In [Abb. 54](#) wird die zeitliche Veränderung dieser Frequenzen bei Erwärmung, Schwingungsbelastung und dem dabei auftretenden, geometrisch nichtlinearem, Verformungsverhalten dargestellt.

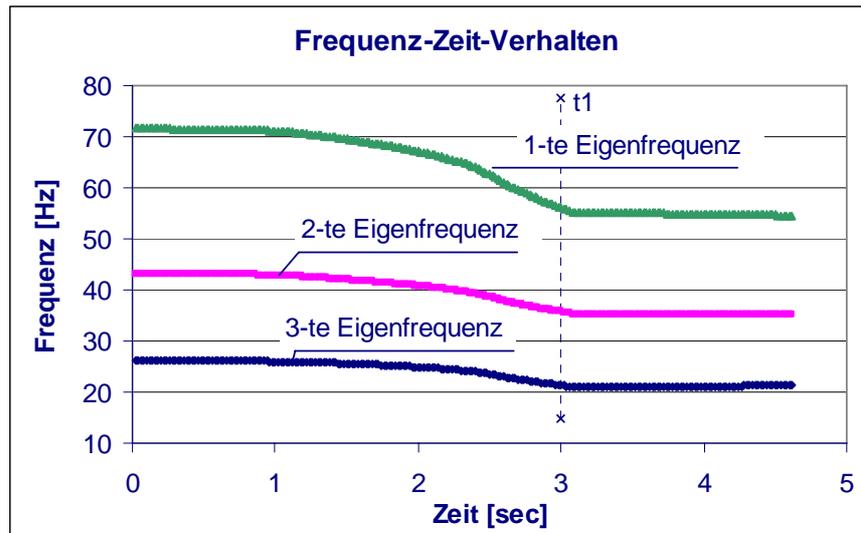


Abb. 54: Zeitliche Änderung des Frequenzverhaltens in der Fachwerkstruktur bei Erwärmung

Wie der Kurvenverlauf in [Abb. 54](#) zeigt, ereignet sich während der Einwirkphase des Wärmestroms bis zum Zeitpunkt t_1 ein relativ starker Abfall der Eigenfrequenzen, wobei die Abnahme der höheren Frequenzen betragsmäßig größer ausfällt.

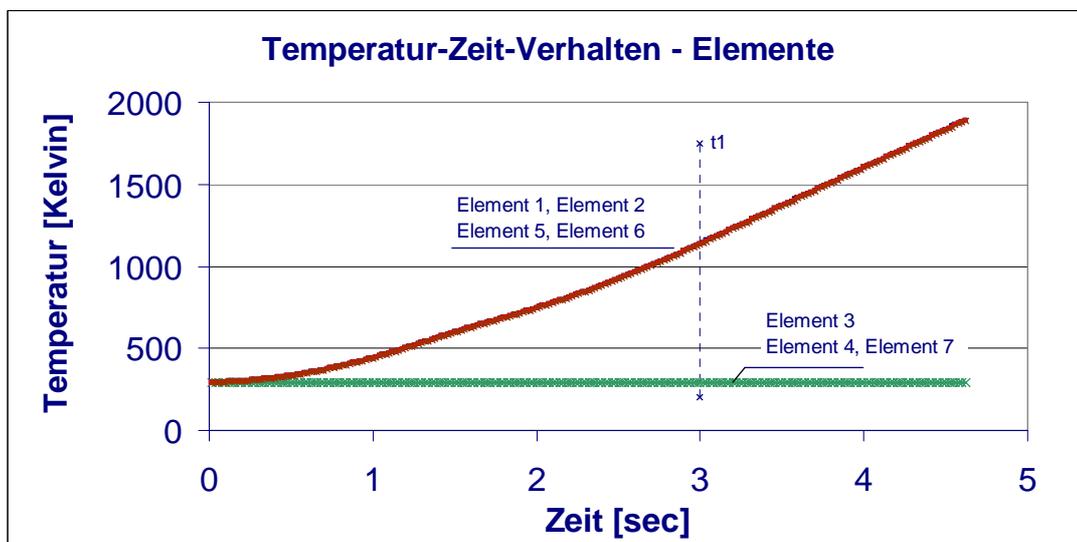


Abb. 55: Temperaturverlauf in den Fachwerkelementen

Für die Ermittlung der Temperaturverteilung wurde eine Unterteilung der vorgegebenen Fachwerkstäbe in jeweils fünf Wärmeübertragungselemente vorgenommen. Zur Ermittlung der Spannungen in den Fachwerkstäben werden die Knotenpunkttemperaturen in eine, zum betrachteten Zeitpunkt, konstante Stabtemperatur umgerechnet. In Abhängigkeit des vorgegebenen Wärmestroms, der Symmetrieeigenschaften des Tragwerks und des gewählten Zeitbereichs ergibt sich ein Temperaturverlauf in den Fachwerkstäben, siehe [Abb. 55](#), mit extrem hoher Temperaturdifferenz im Tragwerk. Der Temperaturverlauf in [Abb. 55](#) zeigt einen extremen Temperaturanstieg in den am Knoten 102 angeschlossenen Stäben, wogegen sich z.B. am Obergurt (Element 3) innerhalb des betrachteten Zeitraums nahezu keine Temperaturerhöhung ereignet.

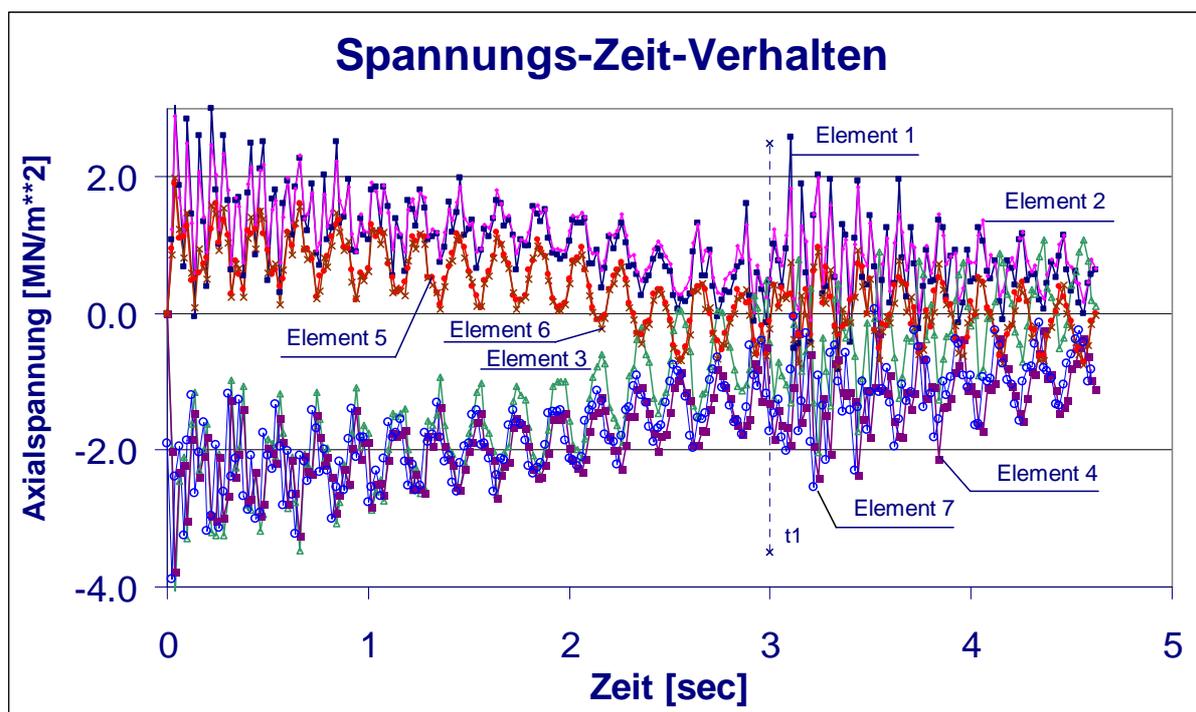


Abb. 56: Axialspannungen in den Fachwerkstäben bei Wärmeeintrag in ein harmonisch schwingendes Tragwerk

Aus dem zeitlichen Verlauf der Spannungen in den Fachwerkstäben, wie er in [Abb. 56](#) dargestellt ist, zeigt sich während der gesamten Phase des zunehmenden Wärmeeintrags eine deutliche Verminderung der dynamischen Spannungsamplituden. Diese Spannungsänderung ist sowohl auf die Abnahme des Elastizitätsmoduls in den sich erwärmenden Stäben als auch auf die gleichzeitig auftretende, nichtlineare Tragwerksverformung, siehe [Abb. 57](#) im Zeitbereich kleiner $t_1=3,0$ [sec], zurückzuführen. Die Abnahme des Elastizitätsmoduls und der, in diesem Fall, Vergrößerung der Systemabmessungen führen auf eine Reduktion der Systemsteifigkeit. Im Übergangsbereich zwischen dem zeitlich zunehmenden und zeitlich konstanten Wärmeeintrag erfolgt ein kurzzeitiger Anstieg der Spannungsamplituden. Dieses Verhalten wird auf den Übergang von einem Tragsystem mit nichtlinearer Steifigkeitsabnahme auf ein Tragsystem mit annähernd linearer Steifigkeitsabnahme, vergleiche [Abb. 54](#), zurückgeführt.

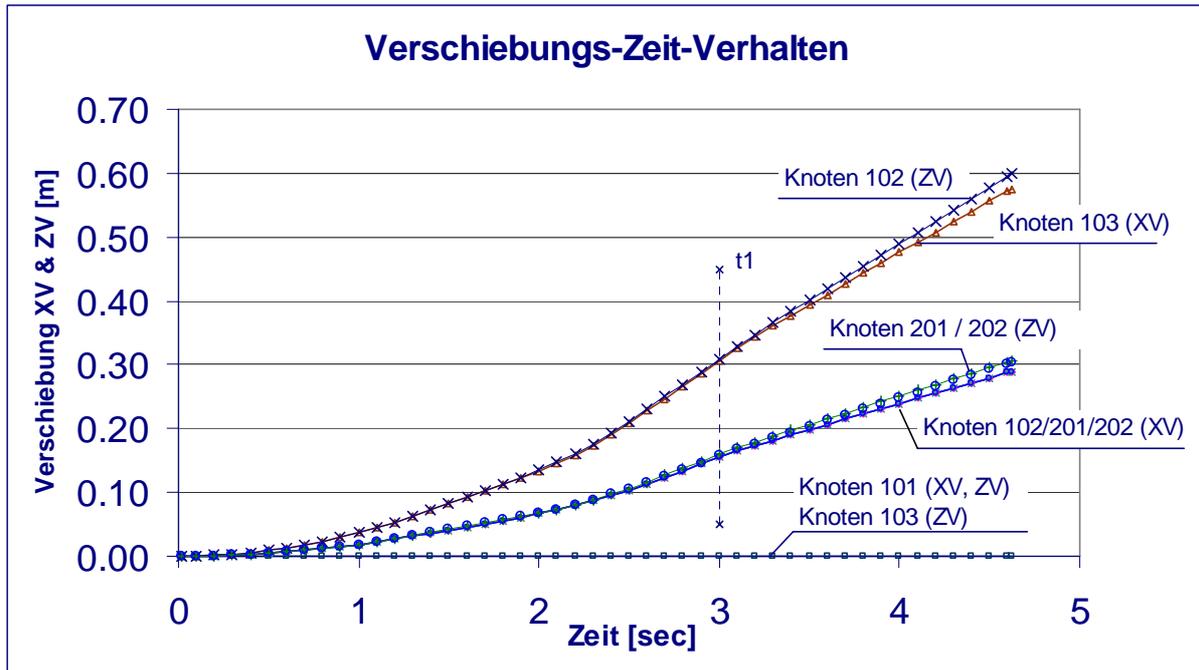


Abb. 57: Verformungsverhalten der Strukturknoten im Fachwerk

Wie der instationäre Verformungsverlauf von Knoten 102 und 201 zeigt, ist die in Abb. 53 dargestellte, vorhandene stationäre Schwingungsantwort etwa um den Faktor 10^3 kleiner. Dies bedeutet, dass die Strukturverformung infolge der aufgebrachtten Vibrationsbelastung durch die stark ausgeprägte Strukturverformung der Temperatureinwirkung vollkommen dominiert wird.

Die gesamte Tragwerksverformung, wie sie in Abb. 58 gezeichnet ist, entsteht sukzessive infolge Temperatureinwirkung. Zum Zeitpunkt $t = 3,6$ [s] stellt sich am Knoten 102 eine Verformung von $u_x \approx 0,21$ [m] und $u_z \approx 0,42$ [m] ein.

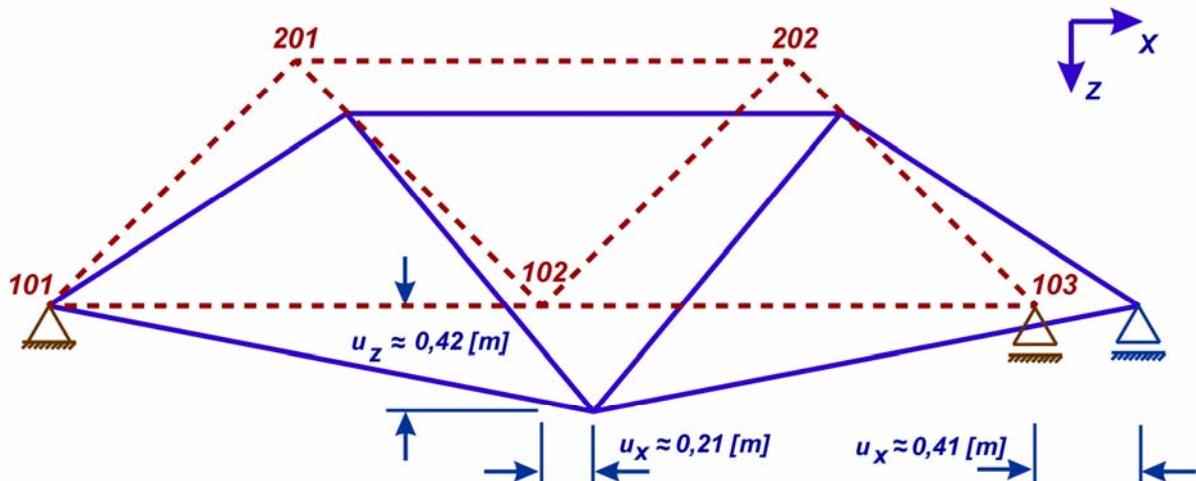


Abb. 58: Fachwerkverformung zum Zeitpunkt $t = 3,6$ [s]

Als Referenz werden Vergleichswerte aus der rein statischen Berechnung infolge Eigengewichtsbelastung unter Verwendung von ADINA™ ermittelt.

Tabelle 10: Statische Berechnung Fachwerk infolge Eigengewicht

Element(e)	Stabkraft [N]	Spannung [N/mm**2]	Verzerrung [-]
1 und 2	12981,1	1,662120	0,791484E-05
3	-18309,3	-2,344340	-0,111635E-05
4 und 7	-18357,4	-2,350500	-0,111928E-04
5 und 6	7535,3	0,964826	0,459441E-05

Die statische Durchbiegung an Knoten 102 beträgt $u_z \approx 0,349E-3$ [m], d.h. unter Einbeziehung der Ergebnisse von [Tabelle 10](#) ist das Fachwerk ohne Berücksichtigung von Stabilitätsbetrachtungen ausreichend dimensioniert.

Aufgrund der extremen Verformungen infolge der Temperatureinwirkung lassen sich unmittelbar zwei Konsequenzen ableiten

- a) das anfänglich vorhandene symmetrische Antwortverhalten der Struktur wird unsymmetrisch und
- b) die angenommenen Freiheitsgrade an den Auflagern können zu veränderten Lagerbedingungen führen und sind neu zu definieren.

6.3 Gitterfachwerk

An einer komplexeren Fachwerkstruktur wird nun gezeigt, dass der Grad der inneren statischen Unbestimmtheit gleichfalls Einfluss auf die Gestaltung von thermisch beanspruchten Strukturen hat.

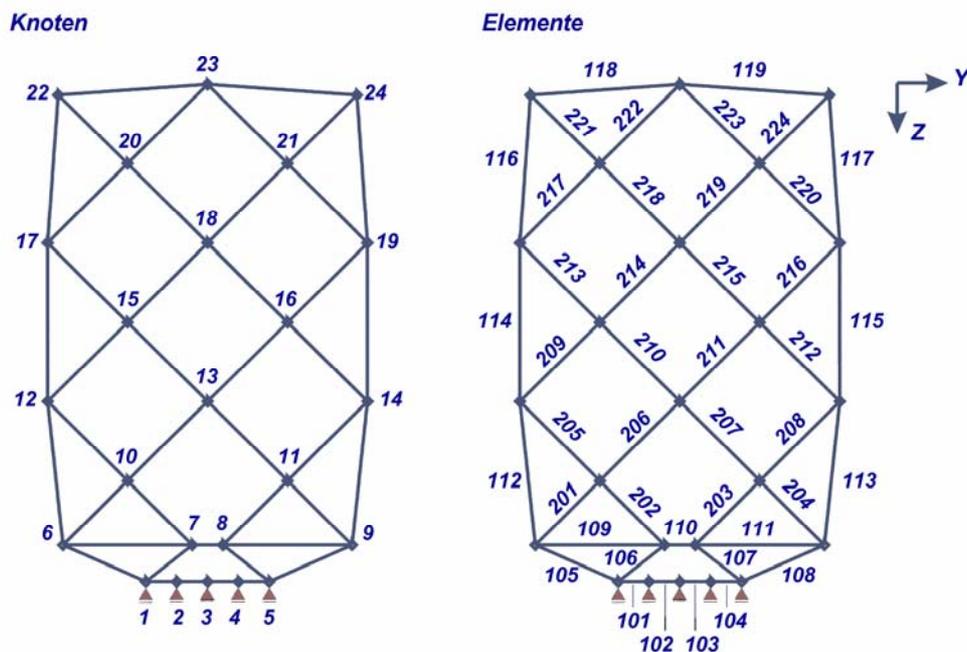


Abb. 59: Knoten und Elemente am Gitterfachwerk

Die Systemlängen ergeben sich aus den Knotenkoordinaten und sind in [Tabelle 11](#) unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften angegeben. Für alle Stäbe wird eine Querschnittsfläche von $A=80,0 \text{ [mm}^2\text{]}$ vorgegeben. Die Systemmasse ergibt sich durch Integration des Bauteilvolumens und der Dichte gemäß definierter Werkstofftabelle.

Der Werkstoff für das Gitterfachwerk soll ebenfalls ein hochwarmfester INCONEL 718 Stahl sein und die Werkstoffkennwerte werden, wie im ersten Beispiel angegeben, gewählt.

Die Gitterstäbe sollen ein Rechteckprofil $a=40,0 \text{ [mm]}$ und $b=2,0 \text{ [mm]}$ aufweisen, wobei die schwache Achse um die x-Achse wirken soll, d.h. die maßgebliche Struktursteifigkeit des Gitterfachwerks wird durch die Anordnung der Fachwerkstäbe bestimmt.

Tabelle 11: Knotenkoordinaten - Gitterfachwerk

Knoten	Y-Koordinate [mm]	Z-Koordinate [mm]
1 (5)	-16,0	-2,5
2 (4)	-8,0	-2,5
3	0,0	-2,5
6 (9)	-37,5	-12,0
7 (8)	-4,0	-12,0
10 (11)	-20,75	-28,75
12 (14)	-41,5	-49,5
13	0,0	-49,5
15 (16)	-20,75	-70,25
17 (19)	-41,5	-91,0
18	0,0	-91,0
20 (21)	-20,75	-111,75
22 (24)	-38,75	-129,74
23	0,0	-132,5

Die äußeren Kräfte sollen im vorliegenden Fall als vernachlässigbar gelten und es wird ausschließlich ein Wärmestrom von jeweils $Q_{\max} = 750$ [W] auf die Strukturknoten N 7 und N 8 des Gitterfachwerks aufgebracht. Das Zeitverhalten für den Wärmestrom wird gemäß Abb. 60 angenommen wobei der Maximalwert nach $t_1 = 30$ [s] erreicht werden soll und dann konstant bleibt. Das Temperatur- und Strukturantwortverhalten wird bis zum Versagenszeitpunkt untersucht.

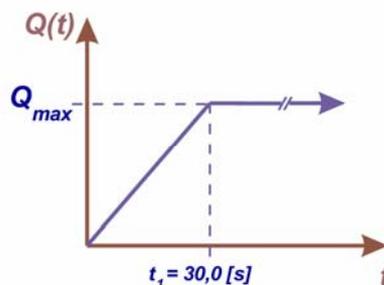


Abb. 60: Wärmestromverlauf (Vorgabe)

Als Referenztemperatur für die Strukturanalyse wird $T_{\text{Referenz}} = 293,15$ [K] gewählt.

Die Berechnung des instationären Temperaturverhaltens erfolgt mittels des Euler-Rückwärtsverfahrens. Für das instationäre Wärmeübertragungsverhalten wird eine konsistente Wärmespeicherkapazität angenommen. Für die Berechnung des instationären Strukturverhaltens wird das Newmark-Verfahren mit impliziter Zeitintegration verwendet, wobei eine konsistente Massenverteilung angenommen wird. Die Gleichgewichtssiteration wird unter Verwendung einer vollständigen Newton-Raphson-Iteration durchgeführt. Eine Strukturdämpfung wird nicht berücksichtigt.

Wie in den zuvor gezeigten Beispielen wird das instationäre Strukturverhalten infolge des aufgetragenen Wärmestroms ermittelt. Dabei lässt sich zeigen, dass sich nach $t = 24,284$ [s] eine beginnende plastische Verformung im Stab 10, siehe [Abb. 61](#), einstellt.

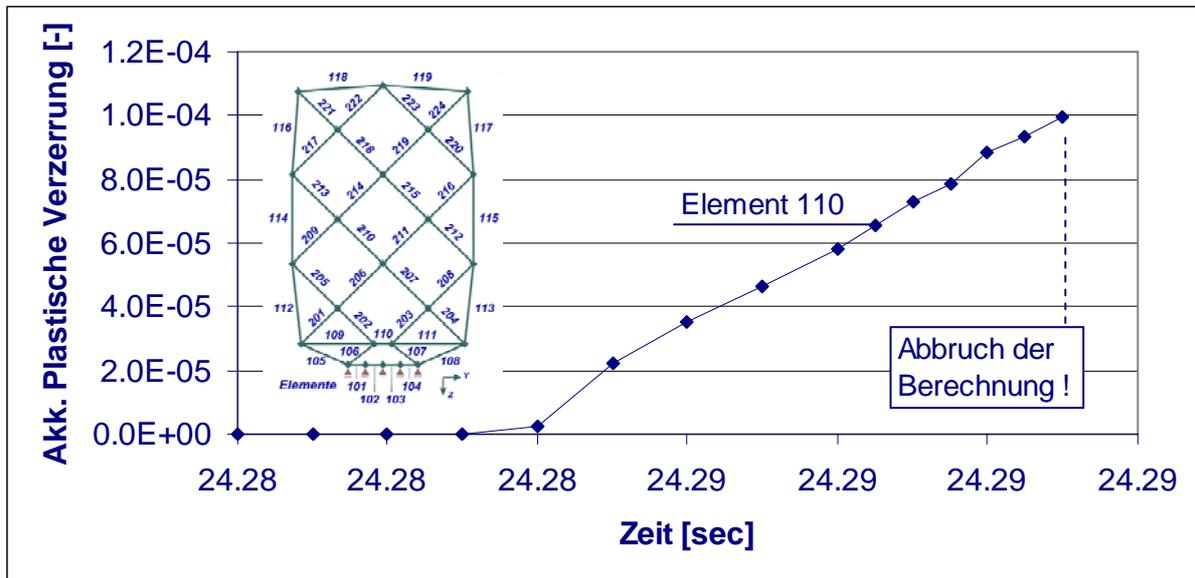


Abb. 61: Akkumulierte plastische Verzerrung an einem Gitterfachwerkelement

Die Auswertung der an Knoten 7 anschließenden Stabelemente, Stab 6, Stab 9 und Stab 10, zeigt, dass Stab 10 die Fließgrenze erreicht hat, wogegen sich die beiden anderen Stäbe noch deutlich im elastischen Bereich befinden.

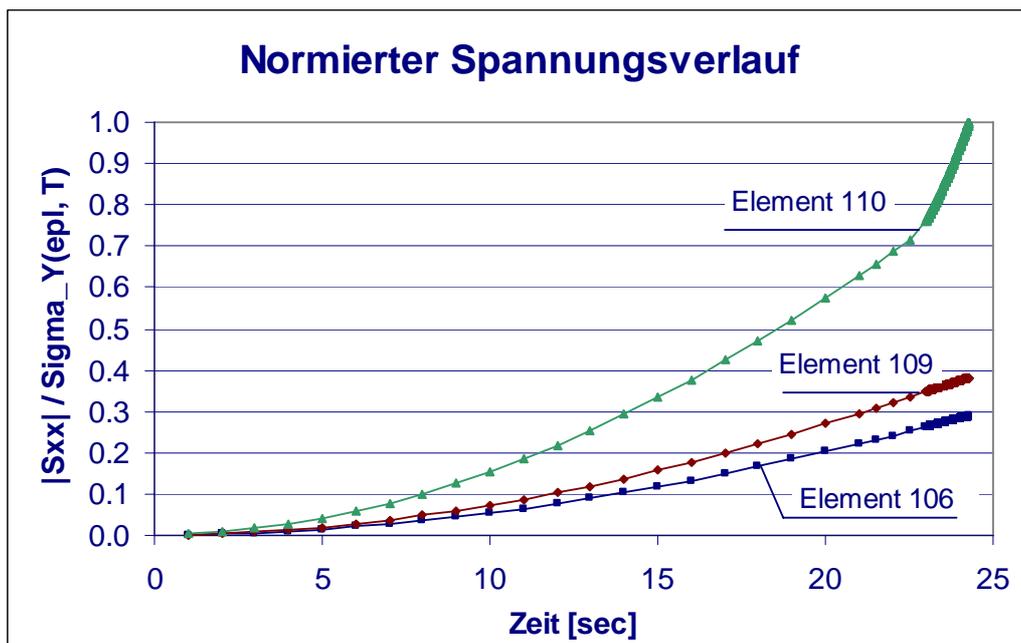


Abb. 62: Fließspannungsverhalten von Gitterfachwerkelementen

Da sich infolge von extremen, einwirkenden Temperaturbeanspruchungen die Fließgrenze als Funktion der Temperatur stark nichtlinear verhält, ist es zweckmäßig für jeden Stab die auftretende Axialspannung auf die zum Zeitpunkt t zulässige Fließspannung zu normieren, siehe [Abb. 62](#). Dabei ist zu bemerken, dass die Fließspannung zum Zeitpunkt t ebenfalls zu berechnen ist, da sie abhängig ist von der auftretenden plastischen Verzerrung und bei isotropem Fließverhalten vom Verfestigungsmodul des Werkstoffes.

Zunächst wird das Frequenzverhalten als Funktion der instationären Temperatureinwirkung dargestellt. Als Referenzrechnung wird eine Eigenfrequenzberechnung, siehe [Tabelle 12](#), mit **ADINA™** durchgeführt und das Frequenzverhalten zum Zeitpunkt der beginnenden Plastifizierung von Stab 10 dargestellt.

Tabelle 12: Frequenzverhalten - Gitterfachwerk

Frequenzindex	ADINA™	Eigene Analyse		Differenz
	Anfangsbedingungen	Anfangsbedingungen	Plastifizierung Stab 10	
1	273,7 [Hz]	273,3 [Hz]	165,2 [Hz]	-39,6 [%]
2	1902 [Hz]	1902 [Hz]	1835,3 [Hz]	-3,5 [%]
3	3545 [Hz]	3545 [Hz]	3395,5 [Hz]	-4,2 [%]
4	5282 [Hz]	5247 [Hz]	5081,2 [Hz]	-3,6 [%]
5	7838 [Hz]	7903 [Hz]	6040,9 [Hz]	-23,6 [%]

Die Analyse zeigt wie erwartet, dass unter Temperatureinwirkung eine Abnahme der Eigenfrequenzen erfolgen muss. Diese Reduzierung zeigt für die erste Eigenfrequenz, dargestellt in [Abb. 63](#), einen stetigen Verlauf. Im Zeitverlauf der zweiten Eigenfrequenz, siehe [Abb. 64](#), ergibt sich nach zunächst stetiger Verminderung eine Unstetigkeitsstelle in der Berechnung des Frequenzverhaltens. Für eine detaillierte Analyse dieses Frequenzverhaltens als Funktion von plastischen Verzerrungen ist jedoch ein Berechnungsmodell mit mehr Freiheitsgraden erforderlich.

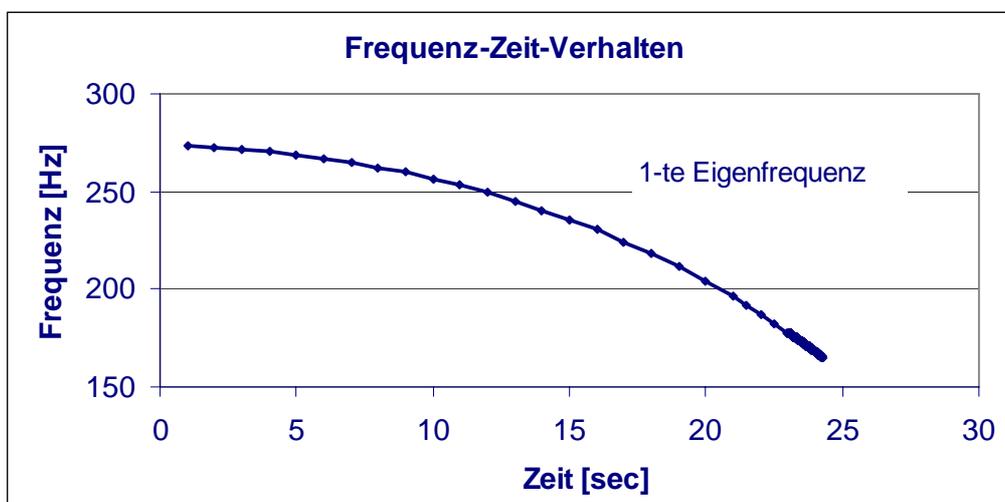


Abb. 63: Zeitverhalten der ersten Eigenfrequenz, Gitterfachwerk

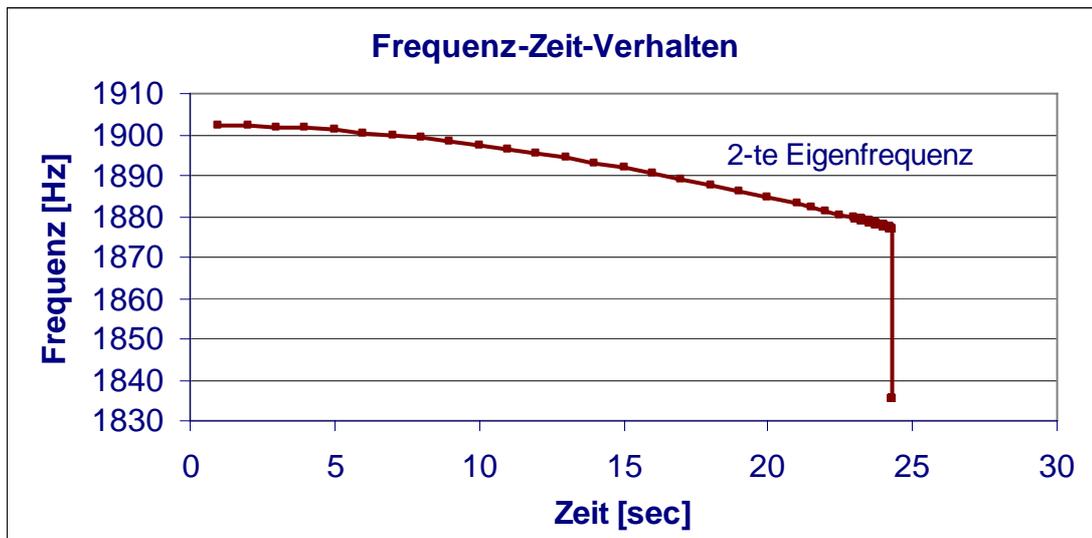


Abb. 64: Zeitverhalten der zweiten Eigenfrequenz, Gitterfachwerk

Dieses Beispiel hat verdeutlicht, dass bei hoher innerer statischer Unbestimmtheit ein lokales Strukturversagen infolge ungleichmäßiger Temperaturbeanspruchung als Funktion eines eingeleiteten Wärmestroms auftreten kann. Aufgrund der thermischen Ausdehnung ergeben sich innere Zwängungen. Erfolgt kein Abbau bzw. keine Verminderung dieser Zwängungen durch die gleichzeitig eintretende Steifigkeitsreduktion, so führt dies sehr schnell zu einer Überschreitung der lokalen Festigkeit. Für den Fall, dass sich ausreichend hohe Temperaturdifferenzen einstellen, kann dieser Zustand an beliebiger Stelle im Tragwerk auftreten. Hierbei ist zu bemerken, dass dieses Verhalten nicht nur von einer äußeren Wärmestrombelastung abhängt, sondern erheblich vom thermischen Ausdehnungskoeffizienten und der Wärmeleitfähigkeit des Konstruktionswerkstoffes. Daraus leitet sich für Werkstoffe von thermisch beanspruchten Strukturen die Forderung nach einer hohen Wärmeleitfähigkeit bei gleichzeitig geringem thermischem Wärmeausdehnungsvermögen ab.

7 Anwendungsgebiete

Wie bereits zum Stand der Wissenschaft erläutert wurde, handelt es sich bei der Auslegung einer Gittersteuerfläche um eine ausgewählte Anwendung zur thermo-mechanischen Interaktion, z.B. zur Steuerung von Hyperschallflugkörpern.

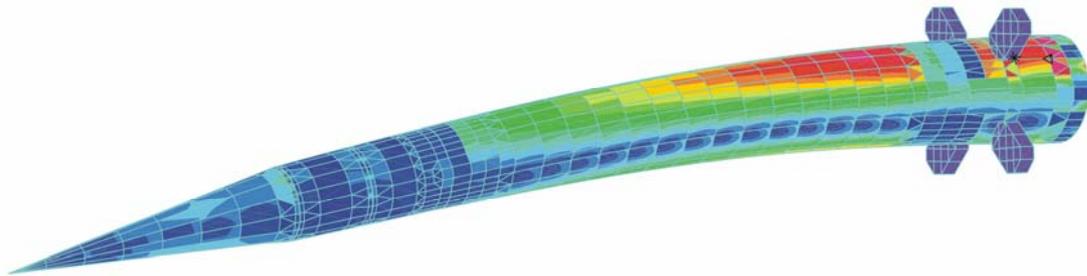


Abb. 65: Spannungsverteilung am Rumpf eines Hochgeschwindigkeitsflugkörpers mit Gitterleitwerken infolge aerodynamischer Luftkräfte [EADS/LFK-Lenkflugkörpersysteme GmbH]

Anzustreben ist auch die Analyse für komplexe Bauteilgeometrien mit dem vorgestellten Verfahren durchzuführen, wie sie beispielhaft in [Abb. 13](#) dargestellt ist.

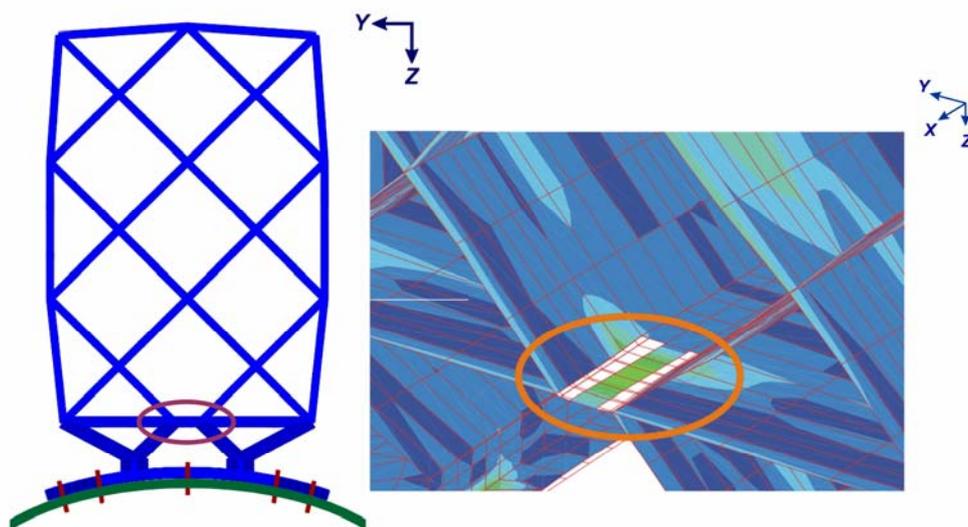


Abb. 66: Plastische Verzerrung an einer Gitterstruktur (Detail)

Eine Verifizierung der in Beispiel 3, Gitterfachwerk, festgestellten Phänomene lässt sich näherungsweise durch eine Strukturanalyse an einem komplexen 3D-Volumenmodell durchführen. Auf die Struktur wird ausschließlich ein Temperaturverlauf, d.h. keinerlei äußere Kraffteinwirkung, an der Profilverdkerante aufgeprägt. Die Analyse wird unter Verwendung der identischen Werkstoffkenngrößen, wie in Beispiel 3 angegeben, mit dem Programm ADINA™ durchgeführt. Wie erwartet, zeigt sich am identischen Strukturbereich, natürlich hier mit räumlicher Auswirkung, gleichfalls plastisches Strukturverhalten. Da diese Anwendung als Motivation für diese Arbeit verwendet wird, wird von einer weiteren Detaillierung abgesehen.

Als weitere Anwendungsgebiete sind vorwiegend Stahlbauten, wie Hallen oder Brücken mit extremer Temperatureinwirkung, zu sehen. Auch in Fällen von etablierten Konstruktionen- und Bauweisen, wie z.B. dem Einbau von Bitumenbelägen auf Stahlbrücken, entstehen thermo-mechanische Interaktionen, die mittels der vorab dargestellten Vorgehensweise genauer untersucht werden können. Untersuchungen von **Mangerig** [M-06] haben gezeigt, dass sich durch den Heißeinbau von Gussasphalt plastische Verformungen infolge Aufheizung an den Stahlträgern eingestellt hatten. In [Abb. 67](#) wird der Einbau des Gussasphalts auf der Fahrhahnoberseite und die dadurch entstehende Temperaturverteilung an der Fahrhahnunderseite gezeigt. Für eine gute Verarbeitbarkeit ist der Gussasphalt mit Temperaturen zwischen 200 [°C] und 250 [°C] auf die Tragkonstruktion aufzubringen. Diese schockartig auftretende Temperaturbelastung ist mit den zeitlich veränderlichen, nichtlinear begrenzten Temperaturfeldern infolge permanent klimatischen Temperatureinwirkungen wie Sonnenstrahlung, Luft, aber auch den atmosphärischen Bestandteilen und den terrestrischen Umgebungseinflüssen zu überlagern. Die klimatischen Temperatureinwirkungen weisen witterungsabhängige, saisonale und tägliche Unterschiede auf, so dass erwartet werden muss, dass der Erwärmungsvorgang auch von der Wahl des Einbauzeitpunktes abhängt. Im Extremfall könnten die resultierenden Zwängungsbeanspruchungen die Grenztragfähigkeit einzelner Tragelemente erreichen. Darüber hinaus besteht bei unmittelbar betroffenen Stahlbauteilen die Gefahr, dass die hohen Bauteiltemperaturen vorhandene Beschichtungen nachhaltig schädigen. Mit dem vorgestellten Verfahren sind rechnerische Parameteruntersuchungen nach

1. Einhaltung zulässiger Temperaturen hinsichtlich Beschichtungssysteme
2. Temperaturbeanspruchungen unter einer ungünstigen/mittleren klimatischen Einwirkungssituation und
3. Betrachtung einer räumlichen Beeinflussung der Tragfähigkeit unter einer in Position und Intensität veränderlichen Temperaturwandlerlast bei gleichzeitig ungünstig auftretender Verkehrslast

denkbar.

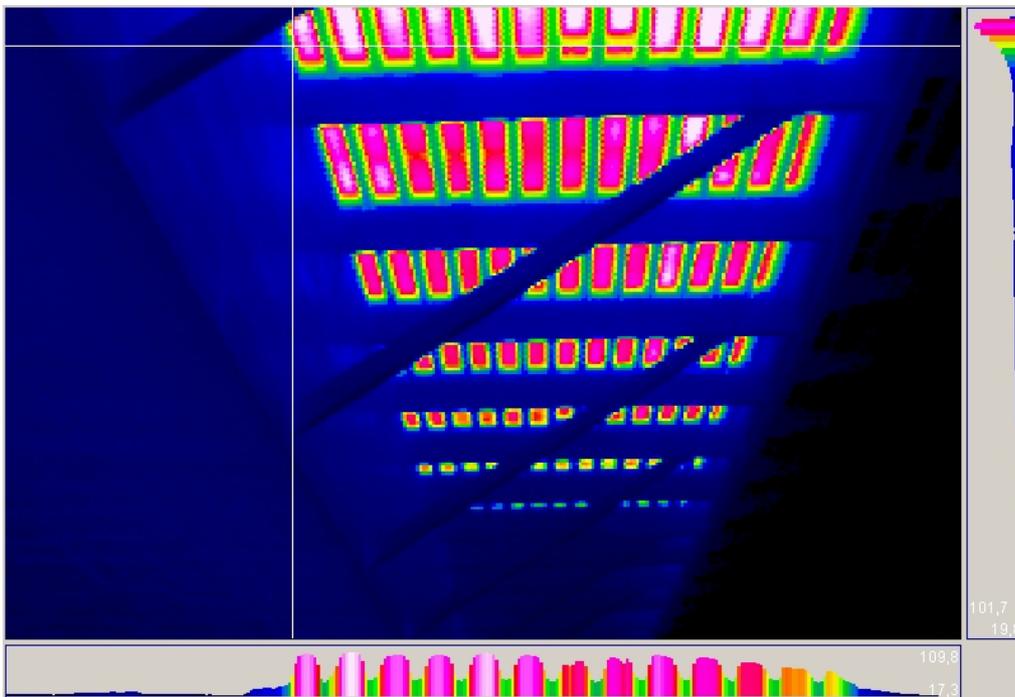


Abb. 67: Belageinbau an Fahrhahnoberseite und Thermographieaufnahme der Temperaturverteilung an Brückenunterseite infolge Heißeinbau von Gussasphalt

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden an einer thermisch-mechanisch beanspruchten Struktur die grundsätzlichen Erfordernisse und Einflussgrößen an eine gekoppelte, thermisch-mechanische Berechnung dargestellt.

An mehreren Stellen konnte aufgezeigt werden, dass sich die entwickelte Vorgehensweise zur thermisch-mechanischen Berechnung, exemplarisch vorgestellt am Beispiel einer Gittersteuerfläche, auch verallgemeinern lässt. Eine Übertragung dieser Thematik auf Anwendungsbereiche aus dem Bauwesen ist ohne Schwierigkeiten durchführbar, für brandbeanspruchte Strukturen sogar notwendig und wünschenswert.

In der Arbeit wurde eine Methode zur Untersuchung von thermisch-mechanisch beanspruchten Gitterstrukturen unter Verwendung von vorhandenen numerischen Berechnungsverfahren und Algorithmen entwickelt. Der Berechnungsgang ermöglicht eine klare Trennung zwischen äußeren Einwirkungen, d.h. Wärmeströmen und Kräften und den inneren Schnitt- und Zwangskräften. Die Beschreibung des Werkstoffverhaltens unter Einbeziehung eines thermo-plastischen Materialgesetzes für isotrope Werkstoffe wurde mit in die Betrachtung einbezogen. Die Modelldefinition erfolgt auf Basis einer einheitlichen Geometrievorgabe und sowohl das Berechnungsmodell für die Strukturanalyse als auch für die Ermittlung der Temperaturen wird daraus abgeleitet. Unter Verwendung dieser Vorgehensweise konnte die simultane Lösung der Strukturgleichungen zur Ermittlung der dynamischen Bewegungsgrößen und Spannungen in Verbindung mit der Lösung eines Feldproblems zur Lösung der Temperaturgleichungen zu korrespondierenden Zeiten gezeigt werden. Als Bewertungsparameter für das Gesamtsystem wurde das Eigenschwingungsverhalten unter Verwendung der Steifigkeiten, basierend auf den temperaturabhängigen Werkstoffkennwerten und der verformten Struktur, in den Berechnungsablauf mit einbezogen.

In mehreren Berechnungsbeispielen wurden an Stabstrukturen Phänomene der Temperatur-Struktur-Interaktion untersucht, die sich nur bei kontinuierlicher Führung der Temperatureinflüsse an einem Bauteil ergeben und bislang ein hohes Maß an ingenieurmäßigen Annahmen erfordert hat. Die Arbeit hat gezeigt, dass infolge hoher Temperaturbelastungen auf Strukturen eine Trennung zwischen Struktur- und Feldproblem nicht mehr erfolgen kann. Wurden bislang als primär relevante Werkstoffparameter zur Strukturauslegung von Gittersteuerflächen der Elastizitätsmodul und die ertragbare Werkstofffestigkeit betrachtet, so zeigt sich anhand der Berechnungsbeispiele, dass das Verformungsverhalten und die damit verbundenen Zwängungsspannungen vorrangig zu beherrschen sind. Das bedeutet, dass der thermische Ausdehnungskoeffizient als wesentlicher Parameter in die Werkstoffauswahl mit einzubeziehen ist.

Die Durchführung von spezifischen Modellrechnungen ist als Referenz zu weiterführenden und detaillierteren Untersuchungen zwingend erforderlich. Unter Verwendung des vorgestellten Verfahrens lassen sich Parameteruntersuchungen bezüglich vorhandener oder erforderlicher mechanischer und thermischer Werkstoffeigen-

schaften an Stabsystemen durchführen. Damit ist eine Vorauslegung von Tragwerken auf Basis von Stabsystemen unter Einbeziehung aller aufgeführten Einflussgrößen möglich.

Nicht betrachtet wurden Einflüsse wie zyklisches Festigkeitsverhalten, thermische Ermüdung, Zeitstandsfestigkeit und Hochtemperaturkorrosion. Unabhängig davon, dass entsprechende Werkstoffkennwerte erst ermittelt werden müssen, ist bezüglich einer Verifizierung der dazu erforderlichen Werkstoffgesetze ein extremer Forschungsbedarf gegeben.

8.2 Ausblick

Für ein umfassendes Verständnis von durchströmten, schwingenden Gitterstrukturen wird es unverzichtbar sein, die volle Fluid-Struktur-Wechselwirkung zwischen der Struktur und dem strömenden Medium zu betrachten. Dass dies noch einer erheblichen Anstrengung bedarf lässt sich aus dieser Arbeit ableiten.

Gegenstand weiterer Ansätze zur theoretischen Vorauslegung wäre zunächst die Erweiterung des Verfahrens auf andere Elementtypen, zunächst höherwertige Stab- und Balkenelemente und später dann Volumenelemente. Eine Erweiterung auf Balkenelemente in Verbindung mit einer automatischen Anpassung der Berechnungstopologie würde die Möglichkeiten zur Untersuchung von lokalen Fließgelenken infolge thermisch induzierter Zwängungsspannungen deutlich verbessern. Weiterhin sinnvoll ist eine stabbezogene Beschreibung der äußeren Belastung, sowohl für Kräfte als auch für Wärmeströme. Ein weiterer Schritt kann auch die direkte Übernahme von Wärmeströmen und Druckbelastungen aus einer numerischen Strömungsberechnung sein.

Zur Untersuchung des Strukturverhaltens infolge örtlicher Einwirkung von konzentrierten Wärmeströmen unter Berücksichtigung von Knotennachgiebigkeiten könnte durch spezielle, temperaturabhängige Federelemente erfolgen.

Für eine einfache Bewertung der Berechnungsergebnisse sind noch Versagensmodelle in Abhängigkeit der jeweiligen Anforderungen zu definieren und einzufügen. Diese Versagensmodelle können sowohl basieren auf

- a) max/min Temperaturen,
- b) Spannungs- und Verzerrungsüberschreitungen,
- c) Verformungsbegrenzung,
- d) Begrenzung der Verzerrungsrate.

Notwendigerweise muss im Berechnungsverfahren sowohl das globale als auch das lokale Stabilitätsversagen berücksichtigt werden. Dies kann analog der bereits implementierten Frequenzanalyse unter Verwendung der zum betrachteten Zeitpunkt vorhandenen Steifigkeitswerte erfolgen.

Für die Behandlung von genaueren Aussagen bei höheren Temperaturbeanspruchungen wird es erforderlich sein, Einflüsse von Phasenübergängen mit zu berücksichtigen. Weiterhin wird es für die Beurteilung von längeren Temperatureinwirkzeiten notwendig sein, Krieeffekte zu betrachten. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass dies weitere zusätzliche Werkstoffkennwerte als Funktion der Temperatur erfordert.

Es ist zu erwarten, dass in Abhängigkeit der Aufgabenstellung Konvergenzprobleme in der gewählten Vorgehensweise auftreten, die z.B. durch automatische Zeitschrittwahl, weiter verfeinert werden können. Gleichfalls kann es erforderlich werden, die Temperaturberechnung unmittelbar in das Iterationsverfahren zur Lösung der nichtlinearen Verformungsgleichungen einzubinden, um die Qualität der Ergebnisse zu verbessern. Es ist sinnvoll, diese Verfeinerungen erst nach weiterer Erforschung des Verfahrens vorzunehmen.

Da die Herausforderung in der Dimensionierung und Berechnung von Strukturen grundsätzlich in der gewichts- und steifigkeitsoptimalen Gestaltung liegt, selbstverständlich unter Einhaltung aller erforderlichen Sicherheitsbeiwerte, ist die Einbindung in Optimierungsverfahren denkbar, da alle erforderlichen Parameter zu diskreten Zeiten verfügbar sind.

Wie bereits erwähnt, erfolgt die Beschreibung der Struktur auf Basis der Geometrie, was in einer weiterführenden Entwicklung die Berücksichtigung von veränderlichen Oberflächen- und Randbedingungen ermöglicht.

9 Literatur

Bücher und Aufsätze

- [A-01] Anderson, J.D.: *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1991
- [A-02] Anderson, J.D.: *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1990
- [A-03] Anderson Jr., J. D.: *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill Inc., International Editions, New York, 1995
- [A-04] Anderson Jr., J.D.: *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1989
- [B-01] Baehre, R.: *Vorlesungen über Stahlbau, Brandbelastung und Brandschutz, Umdruck BS/V*, Lehrstuhl für Stahl- und Leichtmetallbau, Universität Fridericiana (TH) Karlsruhe, 1991
- [B-02] Bathe K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1986
- [B-03] Bathe K.J., Khosgoftaar M.R.: *Nonlinear Heat Transfer*, Nuclear Engineering and Design 51 (1979) 389-401, North-Holland Publishing Company
- [B-04] Bathe, K.J., Wilson E.L.: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976
- [B-05] Belotserkovskiy S.M.: *Reshetchatye Kryl'ya (= Grid Fins)*, Moskow, Maschinostroenie, 1985
- [B-06] Blanke, W.: *Thermophysikalische Stoffgrößen*, Springer Verlag, 1989
- [B-07] Bock, H.M.: *Über das Brandverhalten von Stahlstützen während eines Normbrandversuches*, Stahlbau 6/1987
- [B-08] Bürgel, R.: *Handbuch der Hochtemperatur-Werkstofftechnik*, Vieweg Verlag, 2001
- [C-01] Carslaw, H.S., Jaeger, J.C.: *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press 1959

- [C-02] Carlomagno, G.M., de Luca, L.: *Infrared Thermography for Flow Visualization and Heat Transfer Measurements*, Oxford University Infrared Università di Napoli "Federico II" - DETEC. P.le Tecchio, 80 80125 Naples, Italy
- [C-03] Cerwenka, G. Schnell, W.: *Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967
- [D-01] Dupuis, A., Berner, C.: Aerodynamic Aspects of Fin Geometries on a Lattice Fin Projectile, 20th International Symposium on Ballistics, Orlando/FL, USA, September 23-27, 2002
- [D-02] Dietrich R., Bathe, K.J.: *Entwicklung von Finite-Element-Prozeduren für die Analyse von unter Wasser geschweißten Strukturen*, Prentice-Hall, Statusbericht GKSS 83/E/22, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH, 1983
- [E-01] Esch, H.: *Kraftmessungen an Gitterleitwerken*, Interner Meßbericht IB-39113-99C11, Institut für Strömungsmechanik Göttingen, Abteilung Windkanäle Köln-Porz, 1999
- [E-02] Eckert, E.R.G.: *Survey on Heat Transfer at High Speed*, WADC Technical Report 54-70, 1954
- [F-01] Fletcher, C.A.J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume 1, 2nd Edition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1991
- [F-02] Flügge, W.: *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972
- [G-01] Göldner, H.: *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre*, Physik-Verlag, Weinheim, 1985
- [G-02] Grundmann, H.: *Statik elastischer Körper*, Skript Mechanikvorlesung Bauingenieurwesen TU-München, 2003
- [H-01] Harris, C.M.: *Shock and Vibration Handbook (4th-Edition)*, McGraw-Hill, New York, 1995
- [H-02] Hellmann, K., Krätzig, W.B.: *Thermisch hoch beanspruchte Tragwerke: Spannungskategorisierung unter Einschluss thermischer Wirkung*, Stahlbau 74 (2005), Heft 11
- [H-03] Hellmann, K.: *Nichtlineare thermomechanische Spannungen und zugehörige Formänderungen in thermisch ungleichmäßig beanspruchten Stahlbau-Profilen*, Dissertation, Fakultät für Bauingenieurwesen der Bergischen Universität-Gesamthochschule Wuppertal, 2003

- [H-04] Hennlich H.H.: *Einführung in die lineare Matrizenstatik*, Kurs E02, WBBau, Studienschwerpunkt: Numerische Verfahren und Datenverarbeitung im konstruktiven Ingenieurbau, Uni Hannover, 1983
- [H-05] Hirschel, E.H.: *Basics of Aerothermodynamics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2005
- [H-06] Hoffmann, K.: *Eine Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmeßstreifen*, Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt, 1987
- [H-07] Huebner, K.H., Dewhirst, D.L., Smith E.D., Byrom T. G.: *The Finite Element Method for Engineers*, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001
- [I-01] Incropera, F.P., DeWitt, D.P.: *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1990
- [K-01] Kretzschmer, R.W., Burkhalter, J.E.: *Aerodynamic Prediction Methodology for Grid Fins*, RTO-MP5, Symposium on Missile Aerodynamics, Sorrento/Italy, 1998
- [K-02] Kroyer, R.: *Behandlung des Lastfalles Temperatur bei der linearen Stabwerksberechnung nach der FE-Methode*, Abschlussarbeit im Weiterbildenden Studium Bauingenieurwesen (WBBAU), Studienschwerpunkt: Numerische Verfahren u. Datenverarbeitung im konstruktiven Ingenieurbau, Uni Hannover, 1987
- [K-03] Kojic, M., Bathe, K.J.: *Inelastic Analysis of Solids and Structures*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2005
- [K-04] Kroyer, R.: *On some aspects of fluid-structure interaction analysis with respect to aeroelasticity on industrial applications*, Proceedings First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, June 12-15, 2001, Cambridge, MA, Elsevier, Science, Ltd. 2001
- [L-01] LHT, Luftfahrttechnisches Handbuch, LHT-Koordinierungsstelle IABG mbH, 85521 Ottobrunn, Einsteinstr. 20
- [M-01] Meschede, D.: *Gerthsen Physik*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 22. Auflager
- [M-02] Malvern, L.E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1969
- [M-03] Mangerig, I.: *Klimatische Temperaturbeanspruchungen von Stahl- und Verbundbrücken*, Mitteilung Nr. 86-4, 1986, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum

- [M-04] Miller, M.S., Davis, F.A., Washington D.W., *U.S. Utilization of Russian Missile Technology*, The Global Missile Summit 20th, 21th & 22th, London/UK, March 2000
- [M-05] MIL-HDBK-5H, *Military Handbook, Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicle Structures*, Department of Defense, United States of America, 1 December 1998
- [M-06] Mangerig, I., Beucher, St., Lichte, U.: *Temperatureinwirkungen beim Heißeinbau von Fahrbahnbelag auf Straßenbrücken*, DIN Fachberichte im Brückenbau – Stahlbrücken und Verbundbrücken, Veranstaltung der Bayerischen Ingenieurekammer -Bau, 31.03.2003
- [N-01] Nowacki W.: *Thermoelasticity*, International Series of Monographs on Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, Oxford London New York Paris, 1962
- [O-01] Owen, D.R.J., Hinton, E.: *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980
- [P-01] Paulke, S.: *Ein Beitrag zur Herleitung und Lösung nichtlinearer thermomechanisch gekoppelter Grundgleichungen für Schalenträgerwerke*, Dissertation, Institut für Mechanik und Statik, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr München, 2002
- [P-02] Pasquale, P.: *Numerische Simulation schweißtechnischer Fertigungsschritte*, Dissertation, Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe, 2001
- [R-01] Reynier, P., Longo, J. M., Schüle, E.: *Simulation of Missiles with Grid Fins Using an Actuator Disk*, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 43, No. 1, January–February 2006
- [R-02] Rammersdorfer, F.G., Fischer, D.F., Mitter, W., Bathe, K.J., Snyder, M.D.: *On Thermo-Elastic-Plastic Analysis of Heat-Treatment Processes including Creep and Phase Changes*, Computers & Structures, Vol. 13, pp. 771-779, Pergamon Press Ltd., 1981
- [R-03] Reckling, K.A.: *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967
- [R-04] Rogalla, B.U.: *Zur statischen und dynamischen Berechnung geometrisch nichtlinearer Linientragwerke unter Strömungs- und Wellenlasten*, Dissertation, Bericht Nr. 25/1988, Institut für Strömungsmechanik und Elektron. Rechnen im Bauwesen der Universität Hannover
- [R-05] Rosemeier, G.: *Winddruckprobleme bei Bauwerken*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976

- [S-01] Schülein, E.: *Aerodynamisches Auslegungs- und Optimierungsverfahren für isolierte Gitterflügel „FastGRIDS“*, Vortrag, 11. STAB-Workshop, DLR Göttingen, 04.-05.11.2003
- [S-02] Schülein, E., Guyot, D.: *Novel High-Performance Grid Fins for Missile Control at High Speeds: Preliminary Numerical and Experimental Investigations*, Experimental Investigations. In Innovative Missile Systems (pp. 35-1 – 35-26), Meeting Proceedings RTO-MP-AVT-135, Paper 35, Neuilly-sur-Seine, France: RTO
- [S-03] Srulijes, J., Hennig, P., Gleich, P.: *Aerodynamik von Gitterflügeln im Stoßrohr-Windkanal STB des ISL*, STAB-Workshop, DLR Göttingen, 13.09.2005
- [S-04] Schlichting, H., Gersten, K.: *Grenzschichttheorie, 10. Auflage*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006
- [S-05] Snyder M.D., Bathe, K.J.: *A Solution Procedure for Thermo-Elastic-Plastic and Creep Problems*, Nuclear Engineering and Design 64 (1981) 49-80, North-Holland Publishing Company
- [S-06] Söhngen H.: *Luftkräfte an einem schwingenden Gitter*, ZAMM, Band 35, Nr. 3, 1955
- [S-07] Söhngen H., Meister E.: *Beitrag zur Aerodynamik eines schwingenden Gitters I*, ZAMM, Band 38, Nr. 11/12, 1958
- [S-08] Söhngen H., Meister E.: *Beitrag zur Aerodynamik eines schwingenden Gitters II*, ZAMM, Band 42, Nr. 1/2, 1962
- [S-09] Spurk, J.H.: *Strömungslehre, 4. Auflage*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1996
- [S-10] Szabó, I.: *Höhere Technische Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977
- [S-11] Stroosnijder, M.F., van de Voorde, M.H.: *High Temperature Materials - Their Development and Prospects*, Materialwissenschaft und Werkstofftechnik, 21, 1-5, VCH Verlagsgesellschaft mbH, D-6940 Weinheim, 1990
- [T-01] Thornton, E.A.: *Thermal Structures for Aerospace Applications*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1996
- [T-02] Truckenbrodt E.: *Fluidmechanik, Band 1*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1980

- [T-03] Truitt, R.W.: *Fundamentals of Aerodynamic Heating*, The Ronald Press Company, New York, 1960
- [W-01] Wu et al.: *The research analysis of aerodynamic numerical simulation of grid fin*, Journal of Zhejiang University SCIENCE, 2005 6A(7):741-746, ISSN 1009-3095
- [W-02] Wald, L.: *Zur numerischen Simulation der thermischen Interaktionen zwischen Hyperschallströmungen und Strukturelementen*, Fortschrittsbericht VDI Reihe 7 Nr. 282, Düsseldorf: VDI-Verlag 1995.
- [W-03] Withum D.: *Berechnung räumlicher Stabwerke*, Hannover, Der Bauingenieur 1966, Heft 12
- [Z-01] Zehfuß, J.: *Bemessung von Tragsystemen mehrgeschossiger Gebäude in Stahlbauweise für realistische Brandbeanspruchung*, Dissertation, Fachbereich Bauingenieurwesen der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 2004
- [Z-02] Zienkiewicz, O.C.: *The Finite Elemente Method*, McGraw-Hill (UK), London, 1977

Normen und Richtlinien

- [DIN 18230-1] DIN 18230 Teil 1: Baulicher Brandschutz im Industriebau; Rechnerisch erforderliche Feuerwiderstandsdauer. Berlin: Beuth Verlag, Mai 1998.
- [DIN 18230-2] DIN 18230 Teil 2: Baulicher Brandschutz im Industriebau; Ermittlung des Abbrandverhaltens von Materialien in Lageranordnung; Werte für den Abbrandfaktor m . Berlin: Beuth Verlag, Januar 1999.
- [DIN 18230-3] DIN 18230 Teil 3: Baulicher Brandschutz im Industriebau; Rechenwerte. Berlin: Beuth Verlag, August 2002.
- [DIN 4102-2] DIN 4102 Teil 2: Brandverhalten von Baustoffen und Bauteile; Bauteile – Begriffe, Anforderungen und Prüfungen. Berlin: Beuth Verlag, September 1977.
- [DIN 4102-4] DIN 4102 Teil 4: Brandverhalten von Baustoffen und Bauteile; Zusammenstellung und Anwendung klassifizierter Baustoffe, Bauteile und Sonderbauteile. Berlin: Beuth Verlag, März 1994.
- [VDS2827] Bemessungsbrände für Brandsimulation und Brandschutzkonzepte. Köln: VdS Schadenverhütung Verlag, Mai 2000.
- [EN1991-1-2] DIN EN 1991-1-2; Eurocode 1 Teil 1-2: Einwirkungen auf Tragwerke: Allgemeine Einwirkungen, Brandeinwirkungen auf Tragwerke. Berlin: Beuth Verlag, September 2003.
- [EC2-1-2] DIN V ENV 1992-1-2; Eurocode 2 Teil 1-2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Allgemeine Regeln – Tragwerksbemessung für den Brandfall. Berlin: Beuth Verlag, Mai 1997.

Kommerzielle Berechnungssoftware zur Strömungs- und Strukturberechnung

- FLUENT™ Program zur Berechnung von Strömungsvorgängen
Fluent Inc. Copyright © 1995-2006 by Fluent Inc.,
10 Cavendish Court, Lebanon, NH 03766-1442.
- CFD/FASTRAN™ Program zur Berechnung von Strömungsvorgängen
CFD Research Corporation
215 Wynn Drive, Huntsville, AL 35805
- ADINA-A/-T/-F™ Programm zur Strukturberechnung sowie zur Berechnung von
Temperatur- und Strömungsvorgängen
ADINA R&D, Inc., 71 Elton Avenue, Watertown,
MA 02172 U.S.A.
- MSC/MARC™ Programm zur Strukturberechnung
CFD Research Corporation
215 Wynn Drive, Huntsville, AL 35805
- ANSYS™ Programm zur Strukturberechnung sowie zur Berechnung von
Temperatur- und Strömungsvorgängen
ANSYS, Inc.
Southpointe, 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317

10 Notation

Wärme- und Temperaturberechnung

q	Wärmestromdichte bzw. Wärmestrom pro Flächeneinheit
q^B	Wärme pro Volumeneinheit
q^S	Wärmestrom an der Strukturoberfläche
θ	Temperatur
$\dot{\theta}$	zeitliche Abhängigkeit der Temperatur von der Zeit, Temperaturgradient
θ_e	Oberflächentemperatur
θ_r	Temperatur einer äußeren Strahlungsquelle
k	Wärmeleitfähigkeit
c	Wärmespeicherkapazität
ρ	Dichte vom strömenden Medium oder Festkörper
h	Wärmeübergangskoeffizient
σ_r	Stefan-Boltzmann'sche Strahlungskonstante $\sigma_r = 5,67 \cdot 10^{-8} [W/m^2 \cdot K^4]$
ε	Emissionsgrad
κ	Strahlungskonstante
$S1, S2, S3, S4$	Oberflächenbezeichnungen
A_r	Strahlungsfläche
V	Körpervolumen

Instationäre Temperaturberechnung mit FE-Methoden

${}^{t+\Delta t}C$	Wärmekapazitätsmatrix des Systems zur Zeit $t + \Delta t$
${}^tK^k$	Anteil Wärmeleitung an der Wärmeübertragungsmatrix zur Zeit $t + \Delta t$
${}^tK^c$	Anteil Konvektion an der Wärmeübertragungsmatrix zur Zeit $t + \Delta t$
${}^tK^r$	Anteil Strahlung an der Wärmeübertragungsmatrix zur Zeit $t + \Delta t$
${}^{t+\Delta t}\dot{\theta}$	Temperaturgradient zur Zeit $t + \Delta t$
$\Delta\theta$	Vektor der inkrementellen Knotenpunkttemperaturen
${}^{t+\Delta t}Q$	Vektor der externen Wärmeströme zur Zeit $t + \Delta t$
${}^{t+\Delta t}Q^c$	Vektor der Wärmeströme infolge Konvektion zur Zeit $t + \Delta t$
${}^{t+\Delta t}Q^r$	Vektor der Wärmeströme infolge Wärmestrahlung zur Zeit $t + \Delta t$
${}^{t+\Delta t}Q^k$	Vektor der inneren Wärmeströme zur Zeit $t + \Delta t$

Strukturberechnung

t	Zeit
$\sigma(n)$	Spannung zur Zeit t in der Balkenfaser n
${}^t E(T, n)$	E-Modul zur Zeit t in der Balkenfaser n
${}^t \alpha_T(T, n)$	Wärmeausdehnungskoeffizient zur Zeit t in der Balkenfaser n
${}^t T(n)$	Temperatur zur Zeit t in der Balkenfaser n
${}^t F_l$	Kraft in Elementlängsachse zur Zeit t
${}^t M_{m-m}$	Moment um die m-Achse zur Zeit t
${}^t \sigma_l^{TH}$	Temperaturspannung zur Zeit t in der Balkenfaser n
u_T	Balkendehnung
$w_{\Delta T}$	Balkenkrümmung
θ	Temperatur
θ_{REF}	Referenztemperatur
A	Querschnittsfläche Stabelement
L	Länge Stabelement
$S_{L,i}^{(e)}$	Kraft in Stabrichtung im Element (e) am Stabanfang
$S_{N,i}^{(e)}$	Querkraft im Element (e) am Stabanfang
$S_{M,i}^{(e)}$	Biegemoment im Element (e) am Stabanfang
$S_{L,j}^{(e)}$	Kraft in Stabrichtung im Element (e) am Stabende
$S_{N,j}^{(e)}$	Querkraft im Element (e) am Stabende
$S_{M,j}^{(e)}$	Biegemoment im Element (e) am Stabende
$u_{L,i}^{(e)}$	Knotenverschiebung in Stabrichtung im Element (e) am Stabanfang
$u_{N,i}^{(e)}$	Knotenverschiebung senkrecht zur Stabrichtung im Element (e) am Stabanfang
$u_{M,i}^{(e)}$	Verdrehung um Stabquerachse im Element (e) am Stabanfang
$u_{L,j}^{(e)}$	Knotenverschiebung in Stabrichtung im Element (e) am Stabende
$u_{N,j}^{(e)}$	Knotenverschiebung senkrecht zur Stabrichtung im Element (e) am Stabende
$u_{M,j}^{(e)}$	Verdrehung um Stabquerachse im Element (e) am Stabende

Strukturberechnung zeitabhängiger Vorgänge mit FE-Methoden

M	Massenmatrix des Systems
C	Dämpfungsmatrix, z.B. RAYLEIGH-Dämpfung $C = \alpha M + \beta K$
${}^t K$	Tangentensteifigkeitsmatrix des Systems zur Zeit t
${}^{t+\Delta t} \ddot{U}$	Vektor der Knotenpunktbeschleunigungen zur Zeit $t + \Delta t$
${}^{t+\Delta t} \dot{U}$	Vektor der Knotenpunktgeschwindigkeiten zur Zeit $t + \Delta t$
ΔU	Vektor der inkrementellen Knotenpunktverschiebungen
${}^{t+\Delta t} R$	Vektor der externen Knotenpunktlasten zur Zeit $t + \Delta t$
${}^t F$	Vektor der Knotenpunktkräfte infolge der internen Elementspannungen zur Zeit t
R_B	Volumenkräfte
R_S	Oberflächenkräfte
R_I	Innere Spannungen, z.B. Temperaturlasten
σ^I	Innere Spannungen
C	Elastizitätsmatrix
ε	Vektor der gesamten Strukturverzerrungen
ε^{TH}	Verzerrungsvektor infolge Temperaturbeanspruchung
α_T	Temperaturausdehnungskoeffizient des Werkstoffes
θ	einwirkende Temperatur
θ_{REF}	Referenztemperatur der Struktur

Werkstofffestigkeit

${}^\tau e_{ij}$	Komponenten des vollständigen Verzerrungstensors
${}^\tau e_{ij}^E$	Komponenten des elastischen Verzerrungstensors
${}^\tau e_{ij}^P$	Komponenten des plastischen Verzerrungstensors
${}^\tau e_{ij}^{TH}$	Komponenten des thermischen Verzerrungstensors
τ	Zeitpunkt
${}^\tau C_{ijrs}$	Komponenten des elastischen Materialtensors
${}^\tau \lambda, {}^\tau \mu$	Lamé-Konstanten
${}^\tau E$	Elastizitätsmodul
${}^\tau \nu$	Querdehnzahl
δ_{ij}	“Kronecker“-Delta
${}^\tau S_{ij}$	Komponenten des deviatorischen Spannungstensors
${}^\tau \sigma_{mm}$	Spannungen infolge hydrostatischer Verzerrung und isothermale Wärmeausdehnungsverhalten
${}^\tau \sigma_{vM}$	v. Mises Vergleichsspannung
σ_y	Fließgrenze eines Werkstoffes
${}^\tau F$	Fließfunktion
${}^\tau \alpha$	Verschiebung der Fließfläche bei kinematischer Verfestigung
${}^\tau \dot{e}_{ij}^P$	Komponenten des Tensors der plastischen Verzerrungsrate

${}^{\tau}\Lambda$	skalärer Multiplikationsfaktor der plastischen Verfestigung
${}^{\tau}\sigma_{yv}$	Ursprüngliche Fließgrenze bei isotroper Verfestigung
${}^{\tau}E_T$	Tangentenmodul des Werkstoffes bei bi-linearer Verfestigung
${}^{\tau}e^p$	plastische Verzerrung bei uni-axialer Verformung
${}^{\tau}e$	gesamte Verzerrung bei uni-axialer Verformung
${}^{\tau}E_p$	plastischer Verfestigungsmodul bei uni-axialer Verformung
${}^t\sigma$	Spannung zur Zeit t
${}^{t+\Delta t}\sigma$	Spannung zur Zeit $t + \Delta t$
${}^{\tau}C^E$	Elastizitätstensor zum Zeitpunkt τ

Wärmequellen - Aerodynamische Aufheizung

T_{Stag}	Temperatur im Staupunkt
T_0	Referenztemperatur der ungestörten Strömung
γ	Isentropen-Exponent $\gamma = c_p / c_v$
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck
c_v	spezifische Wärme bei konstanter Temperatur
M_{∞}	Machzahl der ungestörten Strömung
T_w	Oberflächentemperatur des umströmten Körpers
h	Wärmeübergangskoeffizienten zwischen der Strukturoberfläche und dem umströmenden Fluid
T_{aw}	adiabatische Wandtemperatur
Nu_x	lokale Nusselt-Zahl
h_x	lokaler Wärmeübergangskoeffizient
Re_x	lokale Reynolds-Zahl
Pr	Prandtl-Zahl
k_{∞}	Wärmeleitfähigkeit des ungestörten strömenden Mediums
x	Abstand zur vordersten Anströmkante, d.h. der Beginn der Grenzschicht
„ ∞ “	Zustand der ungestörten Strömung
μ_{∞}	kinematische Viskosität
u_{∞}	Geschwindigkeit der ungestörten Strömung
a	Temperaturleitfähigkeit
r	„recovery factor“ = „Rückgewinnungsfaktor“
T^*	Eckert'sche Referenztemperatur

Wärmequellen - Brandbelastung

A_S	Fläche, die dem Brand ausgesetzt ist
θ_B	Temperatur im Brandraum zum Zeitpunkt t
θ_S	Temperatur im Stahlprofil zum Zeitpunkt t
Δt	Zeitintervall
Q	erforderliche Wärmemenge (pro Längeneinheit) zur Erwärmung eines Stahlprofils
c_{ps}	spez. Wärmekapazität von Stahl
V_S	Volumen des Stahlprofils pro Längeneinheit
ρ_t	Dichte des Stahls
$\Delta\theta_S$	Temperaturerhöhung im Zeitintervall Δt
h	Wärmeübergangszahl der Grenzschicht zwischen Rauchgas und Stahl
h_K	Wärmeübergangszahl für Anteil Konvektion
h_S	Wärmeübergangszahl für Anteil Strahlung
ε_R	Emissionszahl
ε_t	Emissionszahl der Flammen
ε_S	Emissionszahl des Stahlquerschnitts

Externe Lasten

F	wirksame Kraft infolge Anströmung
c_W, c_A, c_Q	aerodynamischen Beiwerte
S_{ref}	Referenzfläche für aerodynamische Kraftmessung
ρ_∞	Dichte des strömenden Mediums
u_∞	Geschwindigkeit des strömenden Mediums
F_w	Widerstandskraft
F_A	Auftriebskraft
F_Q	Seitenkraft
β	Verdrehung der Anströmrichtung um die Y-Achse (Anstellwinkel)
γ	Verdrehung der Anströmrichtung um die Z-Achse (Schiebewinkel)

Verformungsverhalten von Gittersteuerflächen

l	Länge Kragträger
h	Bauhöhe Kragträger
$q(x)=p$	Querbelastung
$Q(\bar{z})$	Querkraft an der Stelle \bar{z}
$M(\bar{z})$	Biegemoment an der Stelle \bar{z}
$\varphi(\bar{z})$	Verdrehung an der Stelle \bar{z}
$w(\bar{z})$	Durchbiegung an der Stelle \bar{z}

Anhang

Annex A, Elementmatrizen für Struktur- und Wärmeübertragungselemente

3-D Strukturelement, 2-Knotenelement mit isoparametrischem Ansatz

a) Verschiebungsinterpolationsmatrix

$$H = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (1-r) & 0 & 0 & (1+r) & 0 & 0 \\ 0 & (1-r) & 0 & 0 & (1+r) & 0 \\ 0 & 0 & (1-r) & 0 & 0 & (1+r) \end{vmatrix} \quad (1)$$

b) Lineare Verzerrungs-Verschiebungs-Interpolationsmatrix

$$B_L^{(e)} = \frac{1}{J^2} x^T H_{,r}^T H_{,r} \quad (2)$$

wobei $J = \frac{L}{2}$ und $x^T = |x_1 \ y_1 \ x_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2|$ ist.

c) Lineare Steifigkeitsmatrix

$$K^{(e)} = \int_{V^{(e)}} B^{(e)T} C^{(e)} B^{(e)} dV \quad \text{wobei} \quad dV = \det J \ dr \ ds \ dt \quad (3)$$

d) Nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungs-Interpolationsmatrix

$$B_{NL}^{(e)} = \frac{1}{J} H_{,r} \quad (4)$$

e) Nichtlineare Steifigkeitsmatrix

$$K_{NL}^{(e)} = S^{(e)} \int_r B_{NL}^{(e)T} B_{NL}^{(e)} \det J \ dr \quad (5)$$

In Gleichung (5) definiert $S^{(e)}$ die Stabkraft innerhalb des Stabelements.

f) Massenmatrix für konzentrierte Einzelmassen

$$M^{(e)} = \frac{\rho^{(e)} A^{(e)} L^{(e)}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

g) Massenmatrix für konsistente Massenverteilung

$$M^{(e)} = \int_{V^{(e)}} H^{(e)T} \rho^{(e)} H^{(e)} dV \quad \rightarrow \quad M^{(e)} = \frac{\rho^{(e)} A^{(e)} L^{(e)}}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Wärmeübertragungselement, 2-Knotenelement mit isoparametrischem Ansatz

a) Verschiebungsinterpolationsmatrix

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-r \\ 1+r \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$B^{(e)} = J^{-1} H_{,r} \quad \text{wobei} \quad J = \frac{L}{2}$$

b) Wärmeleitungsmatrix

$$K^{k^{(e)}} = \int_{V^{(m)}} B^{(e)T} k^{k^{(m)}} B^{(e)} dV \quad \text{wobei} \quad dV = \det J dr ds dt \quad (2)$$

$$K^{k^{(e)}} = \frac{k^{k^{(e)}} A^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (3)$$

c) Matrix für konzentrierte Wärmekapazitäten

$$C^{(e)} = \frac{\rho^{(e)} c^{(e)} A^{(e)} L^{(e)}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

d) Matrix für konsistente Wärmekapazitäten

$$C^{(e)} = \int_{V^{(e)}} H^{(e)T} \rho^{(e)} c^{(e)} H^{(e)} dV \quad \rightarrow \quad C^{(e)} = \frac{\rho^{(e)} c^{(e)} A^{(e)} L^{(e)}}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Quelle: Bathe, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*, Deutsche Übersetzung von Peter Zimmermann, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1986

Annex B, Newmark-Verfahren für nichtlineare Analysen

Quelle: Bathe, K.J.: *Finite Element Formulation, Modeling and Solution of Non-linear Dynamic Problems*, Academic Press, Inc., Veröffentlicht in Seminar über Nichtlineare Finite-Element-Analysen und ADINA, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH, 1987

Nachfolgend wird die Vorgehensweise für den Ablauf des Integrationsverfahrens nach der Newmark-Methode für **nichtlineare** Analysen angegeben.

Allgemeine Berechnung

Aufstellen der linearen Systemmatrizen für die Strukturanalyse und Berechnung der Integrationskonstanten.

Steifigkeitsmatrix K
 Massenmatrix M
 Dämpfungsmatrix C (optional !)

Wahl des Zeitschritts Δt sowie der Parameter α und δ , sowie Berechnung der Integrationskonstanten:

$$\delta \geq 0,5 \quad \alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad a_6 = -a_2 \quad a_7 = -a_3$$

$$a_8 = \Delta t(1 - \delta) \quad a_9 = \delta \Delta t$$

Initialisierung der zeitabhängigen Berechnung

Einführen der Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren und initialisieren zum Zeitpunkt $t=0$.

Verschiebungsvektor 0u
 Geschwindigkeitsvektor ${}^0\dot{u}$
 Beschleunigungsvektor ${}^0\ddot{u}$

Aufstellung der effektiven linearen Steifigkeitsmatrix

$$\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C .$$

Für jeden Zeitschritt bei impliziter Zeitintegration ist nun zu berechnen

- (i) Aufstellen der Steifigkeitsmatrix K unter Berücksichtigung des nichtlinearen Steifigkeitsverhaltens und Berechnung der effektiven Steifigkeitsmatrix ${}^t\hat{K}$, anschließend Durchführung einer Dreieckszerlegung von ${}^t\hat{K}$

$${}^t\hat{K} = LDL^T$$

- (ii) Berechnung der effektiven Lasten zur Zeit $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\hat{R} = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF + M(a_2 {}^t\dot{u} + a_3 {}^t\ddot{u}) + C(a_4 {}^t\dot{u} + a_5 {}^t\ddot{u})$$

- (iii) Berechnung der Verschiebungsinkremente

Berechnung der Verschiebungsinkremente unter Verwendung der letzten D -, L -Faktoren

$$LDL^T u = {}^{t+\Delta t}\hat{R}$$

- (iv) Iterative Bestimmung des dynamischen Gleichgewichtszustandes

$$u^{(0)} = u$$

$$i = 0$$

a) $i = i + 1$

- b) Berechne $(i-1)^{te}$ Näherung für Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Verschiebungen

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u}^{(i-1)} = a_0 u^{(i-1)} - a_2 {}^t\dot{u} - a_3 {}^t\ddot{u}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{u}^{(i-1)} = a_1 u^{(i-1)} - a_4 {}^t\dot{u} - a_5 {}^t\ddot{u}$$

$${}^{t+\Delta t}u^{(i-1)} = u^{(i-1)} + {}^t u$$

- c) Berechne $(i-1)^{te}$ effektive Ungleichgewichtskräfte

$${}^{t+\Delta t}\hat{R} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} - M {}^{t+\Delta t}\ddot{u}^{(i-1)} - C {}^{t+\Delta t}\dot{u}^{(i-1)}$$

- d) Berechne die i^{te} Korrektur der Verschiebungsinkremente

$$LDL^T \Delta u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\hat{R}^{(i-1)}$$

e) Berechne neue Verschiebungskremente

$$u^{(i)} = u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)}$$

f) Konvergenzprüfung

- wenn Konvergenz erreicht $u = u^{(i)}$ ist, dann gehe zu (v)
- wenn keine Konvergenz erreicht ist und $(i) < (i)_{max}$ dann gehe zu a), d.h. nächster Iterationsschritt
- wenn nicht, dann wähle eine neue Methode der Steifigkeitsberechnung und/oder kleinere Zeitschritte

(v) Berechne neue Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Verschiebungen

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} = a_0 u + a_6 {}^t\dot{u} + a_7 {}^t\ddot{u}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + a_8 {}^t\ddot{u} + a_9 {}^{t+\Delta t}\ddot{u}$$

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + u$$

(vi) Gehe zum nächsten Zeitschritt

Annex C, Zeitintegration Temperaturberechnung

Quelle: ADINA Users Manual, Report AE-81-2, ADINA Engineering 1981

Nachfolgend wird die Vorgehensweise für den Ablauf des Integrationsverfahrens nach der Euler'schen Rückwärtsmethode für **nichtlineare** Analysen angegeben.

Allgemeine Berechnung

Aufstellen der linearen Wärmeleitungs matrix K sowie der linearen Wärmespeichermatrix C für die Temperaturberechnung.

Wahl des Zeitschritts Δt und Berechnung der Integrationskonstanten:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t} \quad a_1 = 1$$

Initialisierung der zeitabhängigen Berechnung

Einführen des Temperaturvektors und initialisieren zum Zeitpunkt $t=0$.

Temperaturvektor ${}^0\theta$

Aufstellung der effektiven linearen Wärmeübertragungsmatrix

$$\hat{K} = K^k + K^c + a_0 C .$$

Für jeden Zeitschritt bei impliziter Zeitintegration ist nun zu berechnen

- (i) Aufstellen der Wärmeleitungs matrix ${}^tK^k$, der nichtlinearen Konvektionsmatrix ${}^tK^c$, der Wärmestrahlungsmatrix ${}^tK^r$ sowie der nichtlinearen Wärmespeichermatrix tC . Zur Beschreibung des Wärmübertragungsverhaltens ist die effektive Steifigkeitsmatrix ${}^t\hat{K}$ aufzustellen und anschließend die Dreieckszerlegung von ${}^t\hat{K}$ durchzuführen

$${}^t\hat{K} = {}^tK^k + {}^tK^c + {}^tK^r + a_0 {}^tC$$

$${}^t\hat{K} = LDL^T$$

- (ii) Berechnung des effektiven Wärmestromvektors zur Zeit $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\hat{Q} = {}^{t+\Delta t}Q + {}^tQ^c + {}^tQ^r - {}^tQ^k$$

- (iii) Berechnung der Temperaturinkremente an den Strukturknotenpunkten unter Verwendung der letzten D -, L -Faktoren

$$LDL^T \theta = {}^{t+\Delta t}\hat{Q}$$

- (iv) Iterative Bestimmung des Temperaturgleichgewichts

$$\theta^{(0)} = \theta$$

$$i = 0$$

a) $i = i + 1$

- b) Berechne $(i-1)^{te}$ Näherung der Knotenpunkttemperaturen sowie die zeitliche Änderung der Knotenpunkttemperaturen

$${}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} = {}^t\theta + \theta^{(i-1)}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\theta}^{(i-1)} = a_0 \left({}^{t+\Delta t}\theta - {}^t\theta \right)$$

- c) Berechne $(i-1)^{te}$ Ungleichgewichtskräfte des Wärmestroms

$${}^{t+\Delta t}\hat{Q}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}Q + {}^{t+\Delta t}Q^{c(i-1)} + {}^{t+\Delta t}Q^{r(i-1)} - {}^{t+\Delta t}Q^{k(i-1)}$$

- d) Berechne die i^{te} Korrektur der Temperaturinkremente

$$LDL^T \Delta\theta^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\hat{Q}^{(i-1)}$$

- e) Berechne die neuen Temperaturinkremente

$$\theta^{(i)} = \theta^{(i-1)} + \Delta\theta^{(i)}$$

- f) Konvergenzprüfung

$$\left\{ \left\| \Delta\theta^{(i)} \right\|_2 / \left\{ j = \frac{\max}{(i)} \Delta t, \dots, t + \Delta t \right\} \right\} < tol \quad \text{wobei} \quad tol < 0,01$$

- wenn Konvergenz erreicht $\theta = \theta^{(i)}$ ist, dann gehe zu (v) ;
- wenn keine Konvergenz erreicht ist und $(i) < (i)_{max}$ dann gehe zu a), d.h. nächster Iterationsschritt

- wenn nicht, dann wähle eine neue Methode der Wärmeübertragungsberechnung und/oder kleinere Zeitschritte

(v) Berechne neue Knotenpunkttemperaturen zur Zeit $t+\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}\theta = {}^t\theta + a_1\theta$$

(vi) Gehe zum nächsten Zeitschritt

Annex D, Materialmodell für thermo-plastisches Werkstoffverhalten

Quelle: Snyder M.D., Bathe, K.J.: *A Solution Procedure for Thermo-Elastic-Plastic and Creep Problems*, Nuclear Engineering and Design 64 (1981) 49-80, North-Holland Publishing Company

Die akkumulierte plastische Vergleichsverzerrung kann angeschrieben werden als

$${}^{\tau} \bar{e}^P = \int_0^{\tau} {}^{\tau} \dot{e}^P dt . \quad (1)$$

Mit Gleichung (2) wird die effektive plastische Verzerrungsrate ${}^{\tau} \dot{e}^P$ beschrieben, welche in Gleichung (1) verwendet wird.

$${}^{\tau} \dot{e}^P = \sqrt{\frac{2}{3} {}^{\tau} \dot{e}^P {}^{\tau} \dot{e}^P} \quad (2)$$

Durch Ableitung der konstitutiven Spannungs-Verzerrungs-Beziehung nach der Zeit t lassen sich die elastischen Spannungen in zeitabhängiger Darstellung wie folgt anschreiben:

$${}^{\tau} \dot{\sigma}_{ij} = {}^{\tau} C_{ijmn}^E \left({}^{\tau} \dot{e}_{mn} - {}^{\tau} \dot{e}_{mn}^P - {}^{\tau} \dot{e}_{mn}^{TH} \right) + {}^{\tau} \dot{C}_{ijcd}^E {}^{\tau} e_{cd}^E . \quad (3)$$

Unter Einbeziehung der Prandtl-Reuss-Fließregel kann Gleichung (3) erneut angeschrieben werden, und es ergibt sich

$${}^{\tau} \dot{\sigma}_{ij} = {}^{\tau} C_{ijmn}^E \left({}^{\tau} \dot{e}_{mn} - {}^{\tau} \Lambda \frac{\partial {}^{\tau} F}{\partial {}^{\tau} \sigma_{ij}} - {}^{\tau} \dot{e}_{mn}^{TH} \right) + {}^{\tau} \dot{C}_{ijcd}^E {}^{\tau} e_{cd}^E . \quad (4)$$

Aufgrund der Forderung, dass während der Plastifizierung der Spannungs-Temperatur-Zustand auf der Fließfläche verbleiben soll, und eine inkrementelle Theorie benutzt werden soll, ergibt sich für die Änderung der Fließbedingung unter der Annahme einer isotropen Verfestigung

$${}^{\tau} \dot{F} = \frac{\partial {}^{\tau} F}{\partial {}^{\tau} \sigma_{ij}} {}^{\tau} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial {}^{\tau} F}{\partial {}^{\tau} \sigma_y} {}^{\tau} \dot{\sigma}_y = 0 . \quad (5)$$

Die einzelnen Komponenten von Gleichung (5) lassen sich nun wie folgt anschreiben:

$$\frac{\partial {}^{\tau} F}{\partial {}^{\tau} \sigma_{ij}} = {}^{\tau} S_{ij} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^\tau F}{\partial^\tau \sigma_y} = -\frac{2}{3} \tau \sigma_y \quad (7)$$

$$\tau \dot{\sigma}_y = \frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \bar{e}^P} \tau \dot{\bar{e}}^P + \frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \theta} \tau \dot{\theta} \quad (8)$$

Werden die Gleichungen (6), (7) und (8) in Gleichung (5) eingesetzt, kann die Fließbedingung unter Einbeziehung der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit und der Temperaturänderung in Gleichung (9) angeschrieben werden.

$$\tau \dot{F} = \tau S_{ij} \tau \dot{\sigma}_{ij} - \frac{2}{3} \tau \sigma_y \left(\frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \bar{e}^P} \tau \dot{\bar{e}}^P + \frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \theta} \tau \dot{\theta} \right) = 0 \quad (9)$$

Unter Verwendung von $\tau \dot{\bar{e}}^P = \tau \Lambda \frac{\partial^\tau F}{\partial^\tau \sigma_y} = \tau \Lambda \tau S_{ij}$ und Gleichung (2) ergibt sich aus Gleichung (9)

$$\tau S_{ij} \tau \dot{\sigma}_{ij} = \frac{2}{3} \tau \sigma_y \left(\frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \bar{e}^P} \tau \Lambda \sqrt{\frac{2}{3} \tau S_{ij} \tau S_{ij}} + \frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \theta} \tau \dot{\theta} \right). \quad (10)$$

Wenn die Fließbedingung $\tau F = 0$ infolge plastischer Verzerrung erfüllt wird, muss gelten

$$\tau S_{ij} \tau S_{ij} = \frac{2}{3} \tau \sigma_y^2. \quad (11)$$

Dadurch kann Gleichung (10) weiter vereinfacht werden und unter Verwendung von Gleichung (3) ergibt sich

$$\tau S_{ij} \tau \dot{\sigma}_{ij} = \tau S_{ij} \tau C_{ijmn}^E \left(\tau \dot{e}_{mn} - \tau \Lambda \tau S_{mn} - \tau \dot{e}_{mn}^{TH} \right) + \tau S_{ij} \tau \dot{C}_{ijcd}^E \tau e_{cd}^E, \quad (12)$$

und

$$\tau S_{ij} \tau \dot{\sigma}_{ij} = \frac{2}{3} \tau \sigma_y \left(\frac{2}{3} \tau \sigma_y \frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \bar{e}^P} \tau \Lambda + \frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \theta} \tau \dot{\theta} \right). \quad (13)$$

Durch Einsetzen und Umformung von Gleichung (12) und Gleichung (13) lässt sich schreiben

$$\tau S_{ij} \tau C_{ijmn}^E \left(\tau \dot{e}_{mn} - \tau \Lambda \tau S_{mn} - \tau \dot{e}_{mn}^{TH} \right) + \tau S_{ij} \tau \dot{C}_{ijcd}^E \tau e_{cd}^E = \frac{4}{9} \tau \sigma_y^2 \frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \bar{e}^P} \tau \Lambda + \frac{2}{3} \tau \sigma_y \frac{\partial^\tau \sigma_y}{\partial^\tau \theta} \tau \dot{\theta},$$

woraus sich nach längerer Zwischenrechnung der skalare Proportionalitätsfaktor ${}^{\tau}\Lambda$

$${}^{\tau}\Lambda = \frac{{}^{\tau}S_{ij} {}^{\tau}C_{ijmn}^E \left({}^{\tau}\dot{e}_{mn} - {}^{\tau}\dot{e}_{nm}^{TH} \right) + {}^{\tau}S_{ij} {}^{\tau}\dot{C}_{ijcd}^E {}^{\tau}e_{cd} - \frac{2}{3} {}^{\tau}\sigma_y \frac{\partial^{\tau}\sigma_y}{\partial^{\tau}\theta} {}^{\tau}\dot{\theta}}{\frac{4}{9} {}^{\tau}\sigma_y^2 \frac{\partial^{\tau}\sigma_y}{\partial^{\tau}\bar{e}^P} + {}^{\tau}S_{ij} {}^{\tau}C_{ijmn}^E {}^{\tau}S_{mn}} \quad (14)$$

ergibt.

Die Ableitungen der Fließspannung in Gleichung (14) nach den plastischen Verzerrungen sowie der Temperatur ergeben sich für ein bi-lineares Verfestigungsverhalten gemäß Gleichung (15) und Gleichung (16).

$$\frac{\partial^{\tau}\sigma_y}{\partial^{\tau}\bar{e}^P} = \frac{{}^{\tau}E^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^{\tau}\sigma_y}{\partial^{\tau}\theta} = {}^{\tau}\bar{e}^P \frac{\partial}{\partial^{\tau}\theta} \left(\frac{{}^{\tau}E^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} \right) + \frac{\partial^{\tau}\sigma_{yv}}{\partial^{\tau}\theta} \quad (16)$$

Unter Verwendung von Gleichung (15) und Gleichung (16) erhält man schließlich den skalaren Proportionalitätsfaktor ${}^{\tau}\Lambda$ in Abhängigkeit der Verzerrungen und der Temperaturänderung zu

$${}^{\tau}\Lambda = \frac{{}^{\tau}S_{ij} {}^{\tau}C_{ijmn}^E \left({}^{\tau}\dot{e}_{mn} - {}^{\tau}\dot{e}_{nm}^{TH} \right) + {}^{\tau}S_{ij} {}^{\tau}\dot{C}_{ijcd}^E {}^{\tau}e_{cd} - \frac{2}{3} {}^{\tau}\sigma_y \left[{}^{\tau}\bar{e}^P \frac{\partial}{\partial^{\tau}\theta} \left(\frac{{}^{\tau}E^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} \right) + \frac{\partial^{\tau}\sigma_{yv}}{\partial^{\tau}\theta} \right] {}^{\tau}\dot{\theta}}{\frac{4}{9} {}^{\tau}\sigma_y^2 \frac{{}^{\tau}E^{\tau}E_T}{{}^{\tau}E - {}^{\tau}E_T} + {}^{\tau}S_{ij} {}^{\tau}C_{ijmn}^E {}^{\tau}S_{mn}} \quad (17)$$

In analoger Weise kann der Proportionalitätsfaktor ${}^{\tau}\Lambda$ für ein kinematisches Verfestigungsverhalten unter Einbeziehung der Verschiebung der Fließfläche durch den Spannungstensor ${}^{\tau}\alpha_{ij}$ abgeleitet werden, und es ergibt sich

$${}^{\tau}\Lambda = \frac{\left({}^{\tau}S_{ij} - {}^{\tau}\alpha_{ij} \right) {}^{\tau}C_{ijmn}^E \left({}^{\tau}\dot{e}_{mn} - {}^{\tau}\dot{e}_{nm}^{TH} \right) + \left({}^{\tau}S_{ij} - {}^{\tau}\alpha_{ij} \right) {}^{\tau}\dot{C}_{ijcd}^E {}^{\tau}e_{cd} - \frac{2}{3} {}^{\tau}\sigma_y \frac{\partial^{\tau}\sigma_y}{\partial^{\tau}\theta} {}^{\tau}\dot{\theta}}{\frac{2}{3} {}^{\tau}\sigma_y^2 \frac{\partial^{\tau}\sigma_y}{\partial^{\tau}\bar{e}^P} + \left({}^{\tau}S_{ij} - {}^{\tau}\alpha_{ij} \right) {}^{\tau}C_{ijmn}^E \left({}^{\tau}S_{mn} - {}^{\tau}\alpha_{mn} \right)} \quad (18)$$

Lebenslauf

Lebenslauf

Kroyer, Robert Adolf Georg

Geburtsdatum: 2. Juni 1957

Geburtsort: Straubing, Niederbayern

Ehefrau: Kroyer, Gabriele, Steuergehilfin, geb. 2. Januar 1961
Kinder: Kroyer, Robert Maximilian, geb. 18. November 1990
Kroyer, Michael Sebastian, geb. 25. September 1992

Eltern: Kroyer, Adolf, geb. 4. Mai 1933, Beruf Schreiner
Kroyer, Margarete, geborene Meschütz, geb. 2. Juni 1936,
Beruf kaufm. Angestellte

Geschwister: Kroyer, Alexander, Dr. med. dent., geb. 12. März 1971,
Beruf Zahnarzt

1963-1969 Volksschule Altheim
1969-1973 Staatliche Realschule für Knaben in Landshut
1973-1975 Fachoberschule Landshut
1975-1977 Grundwehrdienst beim FlaRak Btl 34 in Lenggries
1977-1981 Studium Bauingenieurwesen an der Fachhochschule München

1981-1985 Entwicklungsingenieur von Statik- und CAD-Software
für das Bauwesen im Büro Prof. G. Nemetschek, München

1985 Entwicklungsingenieur von Statiksoftware für das Bauwesen
in der Ingenieurgemeinschaft Dr.-Ing. H. Hennlich und
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil., Dr.-Ing. E.h. Udo Meißner, Hannover

1985-1989 Assistent am Institut für Statik und Mechanik der UniBw
München unter der Leitung von Univ. Prof. Dr.-Ing. Diethard
Könke

1989-1995 Entwicklungsingenieur für Strukturmechanik bei der LFK-
Lenkflugkörpersysteme GmbH, ehemals MBB.

1996-2000 Abteilungsleiter Strukturmechanik bei EADS/LFK

seit 2001 Chefberater für Strukturmechanik/Strukturdynamik in der
EADS/LFK Lenkflugkörpersysteme GmbH
