

Universität der Bundeswehr München

Institut für Wasserwesen

Mitteilungen

Heft 89/2004

**Das stationäre Transportgleichgewicht natürlicher
geschiebeführender Fließgewässer –
Empfindlichkeit hydromechanischer Parameter in
eindimensionalen Modellen**

Alexander Bofinger

München 2004

Bibliografische Informationen der Deutschen Bibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnd.ddb.de> abrufbar.

Bofinger, Alexander

Das stationäre Transportgleichgewicht natürlicher geschiebeführender Fließgewässer – Empfindlichkeit hydromechanischer Parameter in eindimensionalen Modellen / A. Bofinger, Universität der Bundeswehr München, Institut für Wasserwesen. - München, 2004

(Mitteilungen / Universität der Bundeswehr München, Institut für Wasserwesen; Heft 89)

Herausgeber:

- Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wilhelm Bechteler
Hydromechanik und Hydrologie
- Univ.-Prof. Dr.-Ing. F. Wolfgang Günthert
Siedlungswasserwirtschaft und Abfalltechnik
- Univ.-Prof. Dr.-Ing. Markus Disse
Wasserwirtschaft und Ressourcenschutz

Institut für Wasserwesen
Universität der Bundeswehr München
85577 Neubiberg

Tel.: 089/6004-3493,-3484,-3490; Fax: 089/6004-3858

<http://www.bauw.unibw-muenchen.de/institute/inst6.html>

©2004. Alle Rechte vorbehalten

Satz: Institut für Wasserwesen
Universität der Bundeswehr München
85577 Neubiberg

Druck: Universität der Bundeswehr München

Vorwort

Natürliche Fließgewässer, von denen es in Mitteleuropa nur noch wenige gibt, sind stets mehr oder weniger großen Veränderungen unterworfen. Dabei besitzen sie drei Freiheitsgrade, indem sie etwa im Grundriss durch Uferverlagerung bzw. Mäandrierung, aber auch in der Tiefe durch Sohlenaufhöhung oder Erosion, sowohl ihre Lage als auch ihre Gestalt verändern. Diese Veränderungen können einerseits mehr oder weniger stetig, jedoch bei größeren Hochwasserereignissen auch sehr unstetig verlaufen. Dies führte in der Vergangenheit immer wieder zu Verlusten an landwirtschaftlichen Flächen, aber insbesondere zu Schäden an der Infrastruktur in besiedelten Gebieten. Im 19. Jahrhundert begann deshalb an vielen unserer Fließgewässer der sog. 'Ausbau' durch Versteinung der Ufer, Bau von Hochwasserdeichen und Einbau von Sohlenabstürzen, um den Fluss in seinem Lauf zu fixieren und damit im wahrsten Sinn des Wortes berechenbar zu machen. Diese Maßnahmen erstreckten sich bis weit in das 20. Jahrhundert. Zunächst stellte sich durch diese Konzentration des Abflusses auf ein begradigtes und schmaleres Flussbett der Erfolg dieser Maßnahme insofern ein, indem durch die erhöhte Schleppkraft die Flusssohle sich einzutiefen begann, womit der Abflussquerschnitt vergrößert und damit die Hochwassergefahr weiter reduziert wurde. Erst nach längerer Zeit wurde in den meisten Fällen klar, dass diese Eintiefungstendenz nicht zum Stillstand kam und sich entsprechende negative Konsequenzen durch einstürzende Brücken, abrutschende Ufer, aber auch durch abgesenkte Grundwasserspiegel, mit nachteiligen Folgen für die Ökologie einstellten. Das aus der Flusssohle ausgetragene Geschiebe lagerte sich wiederum nachteilig an Aufweitungen des Fließquerschnitts, wie Stauräumen, Hafeneinfahrten, etc, ab. Dies war mit eine Ursache für die verstärkte Erforschung des Feststoff-, insbesondere des Geschiebetransportes in all seinen Auswirkungen, vor allem auf die Gewässerstabilität.

Heute existieren eine Vielzahl von empirisch-theoretischen Formeln für den Feststofftransport, welche mehr oder weniger gute Ergebnisse für praktische Probleme liefern. Die wesentlichen Schwierigkeiten bei der Berechnung des Feststofftransportes stellen einerseits die zahlreichen Parameter dar, welche diesen Prozess beeinflussen, aber auch die Interaktion zwischen Abfluss und Feststofftransport. So bilden sich bei beweglicher Sohle mit steigendem Abfluss beginnend mit einem relativ ebenen Flussbett je nach Korndurchmesser des Materials Riffeln bzw. Dünen oder sogar Antidünen aus, welche wiederum signifikante Auswirkungen auf das Abflussverhalten infolge variabler Mikro- bis Makrorauheit zur Folge haben. Die Ausbildung dieser sog. Transportkörper und deren Verschwinden bedarf einer gewissen Entwicklungszeit.

Grundsätzlich interessiert in diesem Zusammenhang die Frage nach einem Gleichgewicht zwischen den Phänomenen Abfluss und Geschiebetransport, um zumindest idealisiert den Endzustand eines Gewässers abschätzen zu können. Dieser Fragestellung hat sich Herr Bofinger in der vorgelegten Dissertationsschrift gewidmet. Dabei ist er den klassischen, aber schwierigen Weg gegangen, die Ausgangsgleichungen für Strömung und Geschiebetransport analytisch zu entwickeln. In der vorgelegten Schrift gelang es dem Verfasser, die analytischen Beziehungen für die Hydraulik und den Feststofftransport vereinfacht für stationäre Verhältnisse und eindimensionale Strömung zu koppeln und damit Aussagen für ein Transportgleichgewicht abzuleiten. Für unterschiedliche Annahmen sowohl für Rechteckgerinne mit konstanter als auch mit variabler Breite wurden die resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichungen für den jeweiligen Wasserstand abgeleitet. Damit können Auswirkungen lokal veränderter Prozessparameter prognostiziert werden.

Weiterführende Überlegungen für den praxisrelevanten Fall der stationär-ungleichförmigen Strömung ermöglichen eine geschlossene implizite Lösung. Mit diesen Formeln konnte sowohl der Einfluss veränderlicher Rauheit als auch veränderlicher Breite auf das Endergebnis analytisch untersucht werden. Auch die Zeit bis zur Entwicklung eines stationären Gleichgewichtes kann damit abgeschätzt werden.

Die Arbeit endet mit Vorschlägen zu Grundsatzuntersuchungen an Labormodellen, um die hier abgeleiteten Beziehungen auf ihre Allgemeingültigkeit untersuchen zu können.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Was ist ein Gleichgewicht?	7
1.2	Fragen	9
1.3	Ziele	13
1.4	Ergebnisse	14
1.5	Grenzen und Ausblick	17
2	Gleichungen der stationären Spiegellinie	18
2.1	Stationäre Hydraulik offener Gerinneströmungen	18
2.2	Die Sohlenschubspannung	25
2.3	Symmetrische Zustände — Versuche an einer rauhen Rampe	30
2.4	Stationäre Hydraulik breiter Rechteckgerinne	33
3	Das stationäre Transportgleichgewicht	42
3.1	Kontinuität des Geschiebetransports	42
3.2	Symmetriegesetze des Geschiebetransports in zwei Dimensionen	44
3.3	Stationarität des Geschiebetransports in zwei Raumdimensionen	47
3.4	Stationarität des Geschiebetransports in einer Raumdimension	49
3.5	Klassifikation der Geschiebetransportgesetze	51
3.6	Kontinuität des Schubspannungs-Geschiebetransports	53
3.7	Kontinuität für fließgeschwindigkeitsabhängige Transportgesetze	55
4	Kopplung der Hydraulik mit Transport	57
4.1	Das gekoppelte System in Rechteckgerinnen konstanter Breite	59
4.2	Offene Rechteckgerinne veränderlicher Breite	64
4.3	Lokale Veränderung der Parameter	65
5	Diskussion der Lösungen für das Transportgleichgewicht	68
5.1	Implizit geschlossene Lösung für das gekoppelte Transportgleichgewicht	69
5.2	Potenzreihenentwicklung und explizite Näherungsformeln	76
5.3	Der Einfluss veränderlicher Rauheit	79
5.4	Der Einfluss veränderlicher Breite	84

5.5	Einstellzeit für das stationäre Gleichgewicht	87
5.6	Sensitivitäten	89
5.7	Fließgeschwindigkeitsbestimmte Transportgesetze	90
5.8	Experimentelle Ergebnisse zur Einstellzeit	92
6	Das freie Flussbett	97
6.1	Stabile Querprofile in eindimensionaler Behandlung	97
6.2	Querprofil aus konstanter effektiver Schubspannung	98
6.3	Stabile Querprofile aufgrund von Kräftegleichgewichten	109
6.4	Die stationäre Hydraulik im freien Flussbett	111
7	Transportkörper	113
7.1	Die Differentialgleichung für periodische Transportkörper	114
7.2	Unmittelbare Folgerungen	117
7.3	Diskussion gegenüber experimentellen Ergebnissen	121
7.4	Weitere Folgerungen aus (151)	125
7.5	Folgerungen aus einer Abhängigkeit des Transports von der Sohlenkrümmung	128
7.6	Transportkörper durch Schubspannungen	138
7.7	Schubspannung des Wasserkörpers über der Sohle auf die Sohle	143
7.8	Lösung von (143) – Ein Modell für den Transport durch Dünen	149
7.9	Ergebnisse des Modells und Diskussion	153
8	Experimente	161
8.1	Versuch zur Validierung des eindimensionalen Modells	163
8.2	Kippsohlenversuche	165
8.3	Der relative Volumenanteil transportierten Geschiebes	168
8.4	Differentielle Messung von Transportraten	170
9	Thesen	172
10	Formelergebnisse	173
11	Symbole	186
A	Mathematische Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen	193
A.1	Zu den Flachwassergleichungen (6)	193

A.2 Stationär-oszillatorische Lösungen der Flachwassergleichungen 200

A.3 Zur Klassifikation der Transport-Kontinuitätsgleichung (33) 207

B Die stationäre Spiegellinie im Laborversuch an einer rauhen Rampe 208

C Heuristik 219

C.1 Linearisierung des Sohlgefälles 220

C.2 Die Lösung der Spiegelliniengleichung (31) von Bresse 221

C.3 Integration von (85) 222

C.4 Integration von (129) für das stabile Querschnittsprofil 223

C.5 Potenzreihenentwicklung zu (65) 224

C.6 Gebrochen rationale Näherungslösung zu (65) 226

C.7 Sohlendynamik bei schubspannungsbestimmten Transport 228

C.8 Sohlendynamik bei fließgeschwindigkeitsbestimmtem Transport 230

C.9 Stabile Querprofile 233

C.10 Logarithmische Geschwindigkeitsverteilung in der Sedimentschicht 236

C.11 Zur Integration von (143), Eigenschaften der Funktion Λ 239

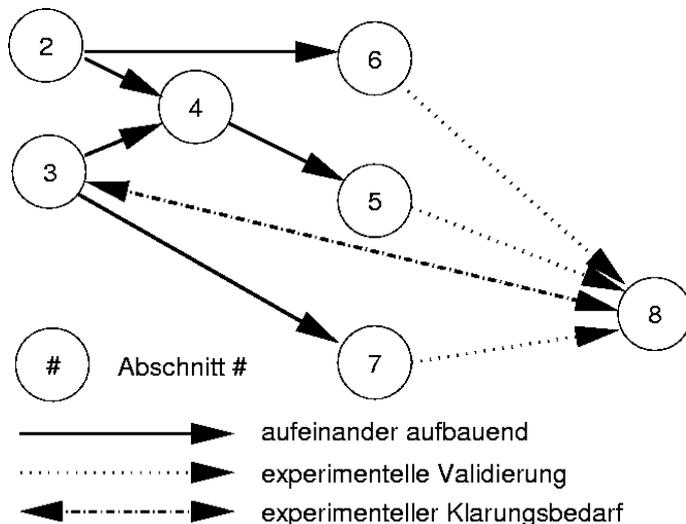
C.12 Parameterdarstellung für den reduzierten Ort x 243

C.13 Das Transportmodell (163) mit der Formel von Boys 252

C.14 Das Transportmodell (163) mit der Formel von Meyer-Peter 258

C.15 Das Transportmodell (163) mit der Formel von Engelund-Hansen 261

Logischer Aufbau der Arbeit



1 Einleitung

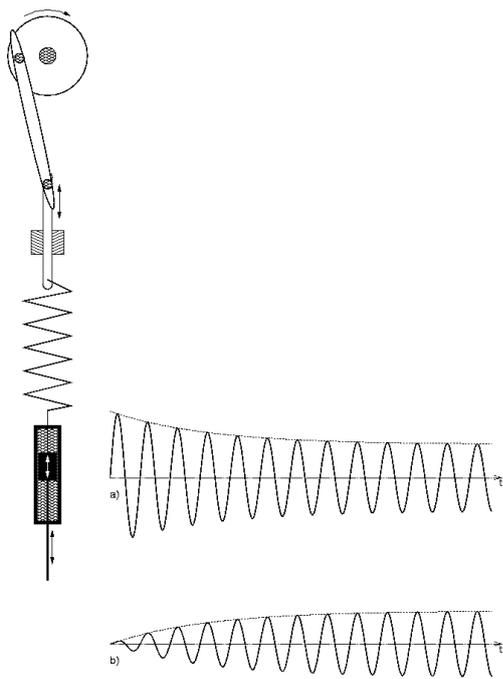
1.1 Was ist ein Gleichgewicht?

Ein Gleichgewicht ist ein Zustand eines Systems. Als Zustand eines Systems betrachtet werden hierbei Größen, durch die sich dieses mathematisch beschreiben lässt. Gleichgewichte sind speziell solche Zustände, in denen die betrachteten Größen zeitlich konstant sind. Gleichgewichte gelten also nur unter Bezug auf die für das System betrachteten Größen. In physikalischen Systemen müssen Größen, für die Gleichgewichte betrachtet werden können, Erhaltungsgesetzen unterliegen, so z. B. Masse, Gesamtenergie, Gesamtimpuls u. a. (Für eine ausführliche Einführung siehe [15], III §11 und IV §12 S. 146-176.)

In einem System, das sich in einem Gleichgewichtszustand befindet, können sich aber durchaus Größen mit der Zeit ändern. Sie verhalten sich jedoch periodisch, sofern sie einem deterministischen Gesetz unterliegen. Ein Beispiel gibt die Lage des Massepunktes des reibungsfrei schwingenden Pendels. Nur die Gesamtenergie ist als Summe kinetischer und potentieller Energie Erhaltungsgröße. In Abb. 1 wird das Gleichgewicht erläutert, das sich bei einem erregten und zugleich gedämpften Federpendel einstellt.

Praktisches Interesse besteht an Gleichgewichten da, wo durch einmalige Einflussnahme auf ein System, etwa durch 'Einstellen' von Parametern, eine lang anhaltende Wirkung erzielt werden soll. Das gilt nicht nur im Bereich der exakten Naturwissenschaften oder den darauf aufbauenden Ingenieurdisziplinen, sondern auch in der Biodynamik, Ökonomie und Soziologie. Um damit Erfolg zu haben, müssen jedoch zwei Voraussetzungen erfüllt werden:

- Das System muss in praktisch annehmbarer Zeit zumindest näherungsweise ein Gleichgewicht erreichen. Das System muss sich durch Größen beschreiben lassen, die sich in absehbarer Zeit nur noch geringfügig ändern.
- Die 'Wünsche' an das einzustellende System müssen sich auf solche Größen beziehen. Auf Größen, die im Gleichgewichtszustand periodisch sind, darf kein Sollwert gesetzt werden. Geeignet sind hingegen aus den periodischen Größen abgeleitete Größen, wie Mittelwert, Frequenz und andere, sofern deren zeitliche Änderung für ein Ungleichgewicht, deren zeitliche Konstanz für ein Gleichgewicht des Systems steht.



Differentialgleichung des in seiner Eigenfrequenz ω erregten linear gedämpften Federpendels:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha \frac{dx}{dt} + \omega^2 x - \sin \omega t = 0 \quad (\alpha > 0).$$

(Der Einfluss der horizontalen Komponente der skizzierten Mechanik wird bei hinreichend langer Pleuelstange vernachlässigt.) Gleichgewicht besteht, wenn $\alpha \frac{dx}{dt} = -\sin \omega t$ gilt, also $x(t) = \frac{\cos \omega t}{\alpha \omega}$, während $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ erfüllt wird. Angenommen würde dieses Gleichgewicht nur, wenn zu einer Zeit $t_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ eine Elongation $x_0 = \frac{1}{\alpha \omega}$ exakt eingestellt werden könnte. Ansonsten gibt es u. a. die hier skizzierten Lösungen $x(t) = \left(\frac{1 \pm x_0 e^{-\alpha t}}{\alpha \omega} \right) \cos \omega t$.

Abbildung 1: In seiner Resonanzfrequenz erregtes und durch Reibung gedämpftes Federpendel. Hier stellt sich im Gleichgewicht eine zeitlich konstante Amplitude der Schwingung ein. Je nach der Anfangsamplitude wächst (a) oder fällt (b) diese (gestrichelte Hüllkurve der Oszillogramme) gegen den nur asymptotisch erreichten Wert im Gleichgewicht. Die örtliche Lage und die Geschwindigkeit des Masseschwerpunktes werden im Gleichgewichtszustand periodisch. Der Zeitabstand zwischen zwei Nulldurchgängen ist durchweg konstant.

Besteht ein System aus mehreren Teilsystemen, unter denen Austauschvorgänge ablaufen, so können für das Gesamtsystem im Gleichgewicht Größen zeitlich konstant sein, die sich in den jeweiligen Teilsystemen zeitlich ändern. Ein sog. detailliertes Gleichgewicht innerhalb und zwischen einzelnen Teilsystemen ist zwar hinreichend, nicht aber notwendig für ein Gleichgewicht des alle Teilsysteme umfassenden Gesamtsystems. Notwendig für ein detailliertes Gleichgewicht in physikalischen Systemen ist zunächst, dass die für das Gleichgewicht des Gesamtsystems betrachteten Größen bereits in jedem Teilsystem Erhaltungsgrößen sind.

1.2 Fragen

So stellt sich für das Regime der Fließgewässer die Frage nach Gleichgewichten, aus den exakten Naturwissenschaften heraus speziell nach physikalischen Gleichgewichten. Damit hier aber von physikalischem Gleichgewicht gesprochen werden kann, müssen hierzu je nach Fragen oder Zielen des Regimes physikalische Größen zeitlich konstant werden. Das widerspricht oft einem übergeordneten ökologischen Gleichgewicht. Dieses verlangt im allgemeinen Dynamik, d. h. viele Freiheitsgrade bei allen ihm untergeordneten physikalischen Vorgängen. Zunächst stellen sich die grundsätzlichen Fragen:

- Welche Hierarchie besteht unter den Gleichgewichten? Zwischen welchen untergeordneten Systemen sind detaillierte Teilgleichgewichte möglich?
- Welche Ziele sind mit welchen Gleichgewichtsforderungen verträglich?
- Welche Gleichgewichte ließen sich realisieren?
- Wie kommen hier physikalische Gleichgewichte überhaupt (noch) zur Diskussion?

Physikalische Bilanzgleichgewichte der Fließgewässer sind zu erwarten

- als hydrologisches Gleichgewicht zwischen Zu- und Abflüssen und
- als Transportgleichgewicht zwischen Ein- und Austrag der Sedimente.

Die Frage bleibt aber, ob und wie diese Gleichgewichte zur Geltung kommen. Bei Veränderung der Flussmorphologie durch häufige instationäre Ereignisse müssen die physikalischen Gleichgewichte auf Größen bezogen werden, die über einen so langen Zeitraum gemittelt werden, dass sich in dieser Zeit bereits andere Einflüsse aus dem Ökohaushalt, etwa Klima- und Vegetationsänderungen, auf den zunächst rein physikalisch betrachteten Sachverhalt auswirken. Weiter wirkt sich in so langen Zeiträumen der Zustand eines Flusses und dessen Umgebung selbst auf den Ökohaushalt aus. Bereits das Ziel, ein Fließgewässer und dessen Umgebung auf Gleichgewichte einzustellen, zwingt dazu, in den freien Lauf der Natur einzugreifen.

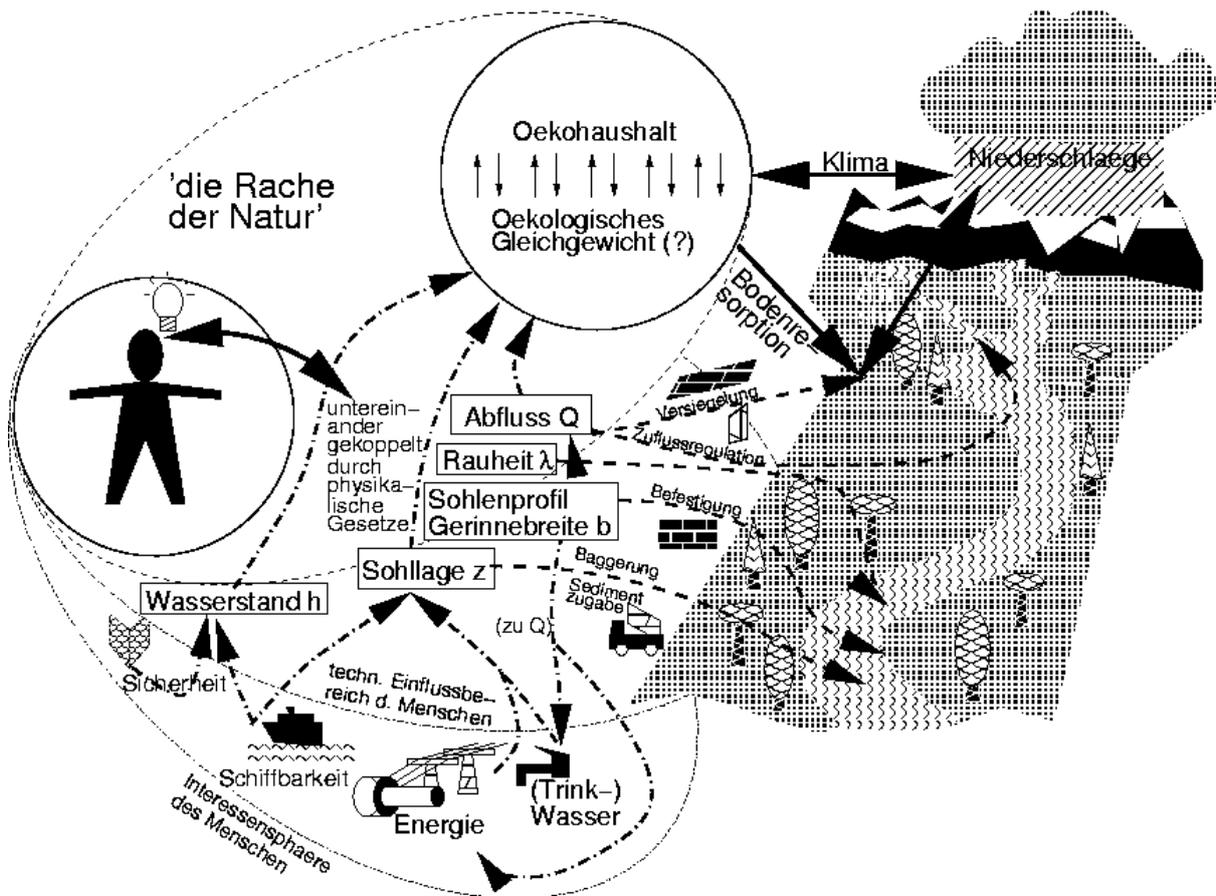


Abbildung 2: Der Mensch und der Fluss. Ein Flussregime beschränkt sich auf die technischen Einflussmöglichkeiten. Hier widersprechen sich unmittelbare Interessen des Menschen mit ökologischen Wechselwirkungen. Im nicht regulierten Fluss ist dessen physikalische Manifestation dem ökologischen Gleichgewicht untergeordnet.

Jede Form einer Regulierung eines Flusses, auch eine naturnah-ökologische, bleibt eine Regulierung. Die Regulierung zieht nun eben auch übergeordnete Systeme mit ein. Primär interessiert den Menschen jedoch weiterhin die physikalische Stabilität des Flusses. Diese ist das Thema dieser Arbeit.

Zunächst mag man fragen, ob sich in einem durch den Menschen völlig ungestörten Ökosystem je wirklich Gleichgewichtes einstellen. Gleichgewichte an 'natürlichen' Fließgewässern werden somit untersucht unter der Annahme, dass sich Gleichgewichte einstellen.

In natürlichen Fließgewässern werden abhängig vom Wasserstand, von der Fließgeschwindigkeit des Wassers, von der Lage und Form des Flussbettes Sedimente transportiert. Erosion und Auflandung der Sedimente legen Lage und Form des Flussbettes fest. Lage und Form des Flussbettes bestimmen bei gegebenem Zu- bzw. Abfluss Wasserstand und Fließgeschwindigkeit. Physikalisch lassen sich die natürlichen Fließgewässer nur als Kopplung von Hydraulik mit Transport beschreiben.

Im Jahr 1876 hat Du Boys in seiner grundlegenden Arbeit über den Schubspannungsinduzierten Geschiebetransport postuliert, dass sich hierbei insbesondere für das Gefälle des Flussbettes ein Gleichgewicht einstellt. ([3], IV. S. 188-193) Modellversuche und numerische Simulationen beschreiben nur individuelle Szenarien, heute sogar solche mit instationärer Hydraulik gekoppeltem instationärem Transport. Doch fehlen Kriterien dafür, wann mit einem Gleichgewicht überhaupt gerechnet werden darf. Weiter fragt man sich: Wie empfindlich ist ein solches Gleichgewicht? Zu letzterer Frage gibt es bereits Ansätze über die Zuverlässigkeitstheorie. ([31])

Ein Problem bei den Untersuchungen bildet die große Zahl unterschiedlicher Ansätze, den Sedimenttransport zu beschreiben, und sich daraus ergebender Geschiebetransportformeln. Erleichternd wirkt hier nur, dass bei Untersuchung eines Gleichgewichtes weniger die absolute Größe der sich aus einer Formel ergebende Fracht als deren Abhängigkeit von bestimmten hydromechanischen Größen, wie Fließgeschwindigkeit, Feststoff-Froude-Zahl (Schubspannung) u. a. von Belang ist. Interessant bei der Konzeption von Modellversuchen wird, nicht nur aus schwer zu messenden Frachtraten, sondern auch aus dem Vergleich eines aufgenommenen Sohlenprofils in einem Transportgleichgewichtszustand mit einem berechneten Profil Transportgesetze zu validieren.

Das Transportgleichgewicht ist thermodynamisch. Die Kontinuitätsgleichung für den Transport ist, wenn sie sich linear verhält, parabolisch und entspricht der Wärmeleitungsgleichung. Andererseits werden sowohl im Experiment als auch in der Natur im stationären Gleichgewicht oszillatorische Vorgänge beobachtet. In Modellen zweier Raumdimensionen sind das Transportkörper, in dreidimensionalen Modellen alternierende Kolke und Bänke sowie der Mäander. Die Flachwassergleichungen sind hyperbolisch und erlauben oszillatorische Lösungen. Aus mathematischer Sicht stellt sich daher die Frage welcher Klasse partieller Differentialgleichungen das gekoppelte System für Hydraulik und Transport angehört.

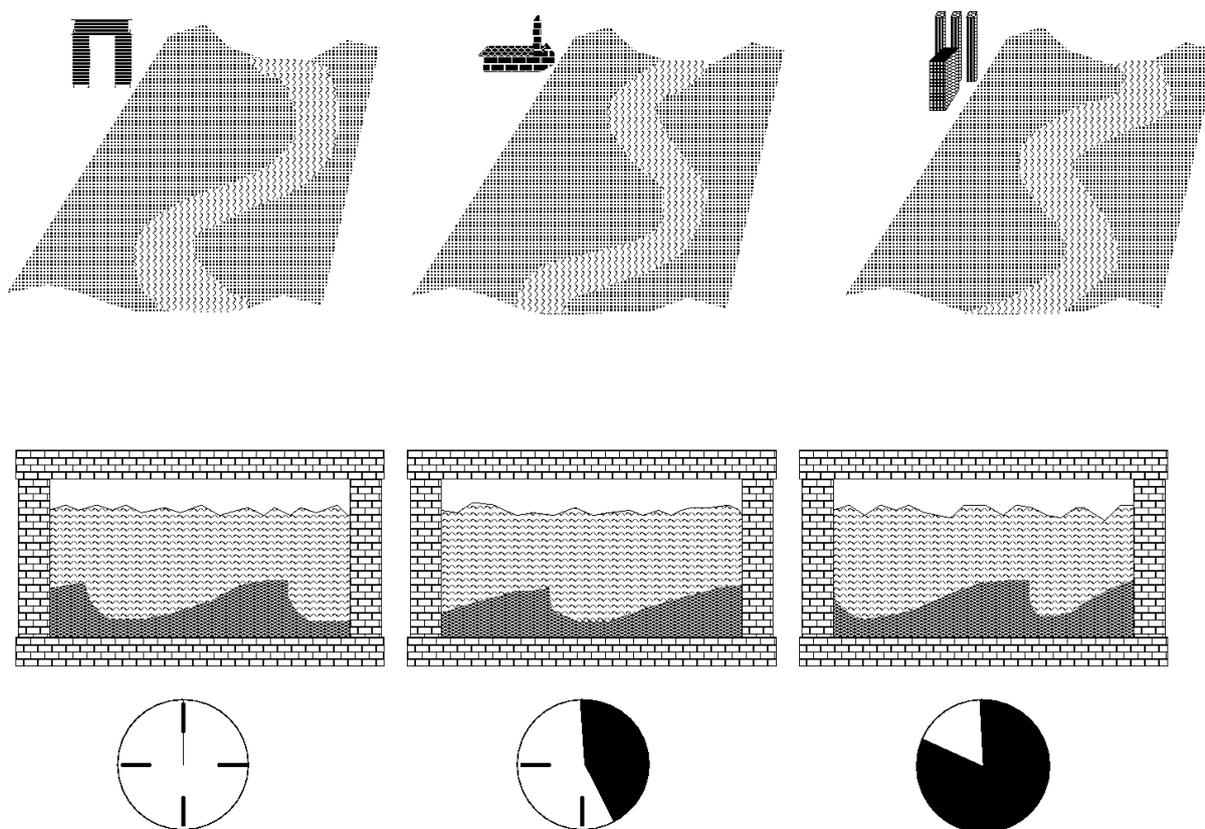


Abbildung 3: Oszillatorische Vorgänge im Transportgleichgewicht der Fließgewässer . Solche Vorgänge laufen in großem (*oben*, Flussmeander) und kleinem (*unten*, Dünenwanderung) Zeitmaßstab ab.

Wichtig ist die Dauer des Zeitraumes, über den ein Transportvorgang untersucht werden soll. Während man sich in der Geomorphologie für Vorgänge interessiert, die sich über Jahrmillionen erstrecken, achtet man im Bauwesen beim Hochwasserschutz auf instationäre Einzelereignisse, die sich sogar innerhalb weniger Stunden abspielen. Wird nach einem Gleichgewicht gesucht, muss sich das hydromechanische Modell zwangsläufig auf einen ausreichend langen Zeitraum erstrecken.

1.3 Ziele

Rein numerische Rechnungen simulieren nur individuelle Szenarien. Daraus ergeben sich nur schwer allgemeine Erkenntnisse. Zudem befinden sich gerade ‘natürliche’ Fließgewässer niemals in einem Gleichgewicht, sondern in einem metastabilen Zustand, der ein Gleichgewicht imitiert. Massen werden großenteils über nur sehr kurze, und damit instationäre, Einzeltvorgänge, zu deutsch Hochwasserereignisse, ausgetauscht.

Um den mit Geschiebetransport gekoppelten Abfluss analytisch zu beschreiben, wird eine Integraldarstellung (13) der Spiegellinie mit der Gleichgewichtsbedingung (58) für den Transport gekoppelt. Speziell für Gerinne konstanter Breite lässt sich aus der Integraldarstellung (64) für das gekoppelte System eine Differentialgleichung (65) und deren analytische Lösung (91) gewinnen. So gelangt man zu grundlegenden Gleichungen. In sie gehen keine speziellen Gesetze für die Frachtrate ein; doch ergeben Empfindlichkeiten des stationären Gleichgewichtes gegenüber Parametern.

Ausgegangen wird zunächst von einem offenen geradlinigen Rechteckgerinne konstanter Breite mit beweglicher Sohle. In diesem Gerinne wird ein stationäres an stationären Abfluss gekoppeltes Transportgleichgewicht untersucht sowohl bei konstantem als auch bei ortsveränderlichem Widerstandsbeiwert. Durch einen Störansatz werden die Ergebnisse aus diesem Spezialfall auf Rechteckgerinne veränderlicher Breite ohne Fließwechsel verallgemeinert. In natürlichen Fließgewässern ist jedoch der bei vorgegebenem Abfluss angenommene Fließquerschnitt eine freie Größe. Hierzu wird in Abschnitt 6 auf Untersuchungen zu stabilen Flussbettprofilen zurückgegriffen.

Im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen Gesetze, nach denen der Transport von Geschiebe von der Feststoff-Froude-Zahl abhängt, also von der Sohlenschubspannung. Diskutiert werden daneben auch solche, nach denen der Transport von der Fließgeschwindigkeit des Wassers direkt abhängt.

Dynamisch stabile Sohlenquerprofile natürlicher Fließgewässer lassen sich mit eindimensionalen Modellen beschreiben, indem davon ausgegangen wird, dass die innerhalb eines Sohlenquerschnittes auf jedem Punkt der Sohloberfläche wirkende effektive Schubspannung konstant ist. Ein solcher mechanischer Ansatz wird in Abschnitt 6 mit dem zur Herleitung der Gleichung für die Kettenlinie in Verbindung gebracht.

1.4 Ergebnisse

Sofern für den Transport der Sedimente ein Gesetz zugrunde gelegt wird, nach dem die Frachtrate von der Schubspannung abhängt, wird in den Abschnitten 3 und 4 grundlegend erkannt: Das sich bei Transportgleichgewicht der beweglichen Sohle einstellende Gefälle des offenen Gerinnes ist im wesentlichen Funktion des Widerstandsbeiwertes. Für die schubspannungsbestimmten Transportgesetze ergibt sich speziell in Gerinnen konstanter Breite als Bedingung für ein stationäres Transportgleichgewicht, dass sich Wasserstand und Gefälle als Funktionen des Ortes reziprok zueinander verhalten.

So ist für schubspannungsbestimmte Transportgesetze ein Gleichgewicht sogar in Gerinnen konstanter Breite auch bei stationär-ungleichförmigem Abfluss möglich, sofern die Randbedingungen (Schütze, Wehre, abrupte Aufweitung oder Verengung) den Transport nicht behindern. Die Stau- bzw. Senkungslinien weichen jedoch von der Bresse-Kurve ab, weil das Gefälle nicht konstant ist. Entscheidend für dieses Gefälle ist der Widerstandsbeiwert des Gerinnes. Eine lokale Veränderung der Breite des Gerinnes wirkt sich nur proportional zur Kubikwurzel des Breitenverhältnisses auf den Wasserstand aus.

Wird dem Geschiebetransportgleichgewicht ein Gesetz zugrunde gelegt, nach dem die Frachtrate nur von der tiefengemittelten Fließgeschwindigkeit des Wassers abhängt, tritt ein Transportgleichgewicht nur bei konstantem Wasserstand ein. In Gerinnen konstanter Breite bedeutet das Normalabfluss; bei wechselnder Breite eine Reziprozitätsbeziehung zwischen Gefälle in Breite.

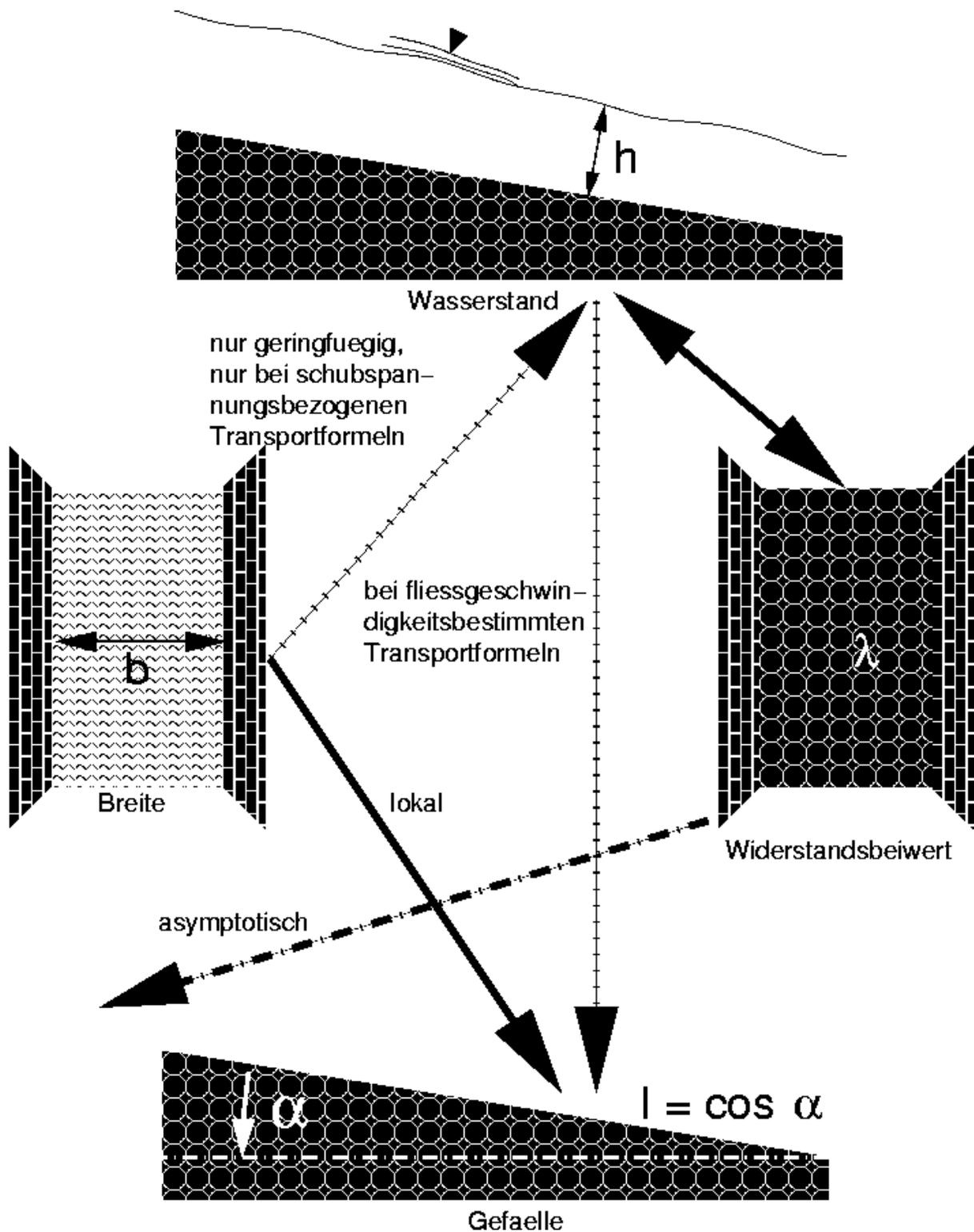


Abbildung 4: Der Zusammenhang zwischen der Breite b , dem Widerstandsbeiwert λ , dem Wasserstand h eines offenen Rechteckgerinnes und dem Gefälle I der beweglichen Sohle. Im Gegensatz zu Gerinnen mit einer festen Sohle beeinflusst die Gerinnebreite b nur wenig den Wasserstand, bei fließgeschwindigkeitsbestimmten Geschiebformeln sogar überhaupt nicht, weil im Transportgleichgewicht eine Änderung der Breite durch das Gefälle ausgeglichen wird.

Ein Ausblick auf den instationären Prozess, in dem sich das Transportgleichgewicht einstellt, weist in Abschnitt 5.5 für schubspannungsbestimmte Transportgesetze auf eine Analogie zur Wärmeleitungsgleichung. Der entsprechende Koeffizient ist linear im Gefälle des Gleichgewichtszustandes und wird auch sehr durch die Empfindlichkeit des Transportgesetzes gegenüber der Feststoff-Froude-Zahl bestimmt. Hieraus ergeben sich in Abschnitt 8.1 aufgezeigte Konsequenzen wie die Ergebnisse zum stationären Transportgleichgewicht experimentell validiert werden könnten.

Erklären lässt sich die Analogie zur Wärmeleitungsgleichung daraus, dass die Schubspannung, ebenso wie die Temperatur, eine physikalische Feldgröße ist. In Verbindung mit der der intensiven Feldgröße zugeordneten extensiven Mengengröße (Entropie \longleftrightarrow Temperatur, hier Sedimentfracht \longleftrightarrow Schubspannung.) streben Feldgrößen ein Gleichgewicht durch Diffusion an. (Das Produkt intensive Größe mal zugeordnete extensive Größe ist von der Dimension Arbeit bzw. Energie. [15], II §6 S. 87-89) Für fließgeschwindigkeitsbestimmte Transportgesetze verhält sich der dynamische Prozess oszillatorisch. Hier ergibt sich für die Sohlform eine im allgemeinen nichtlineare Wellengleichung.

Dynamisch stabile Querprofile natürlicher Fließgewässer müssen eine sog. Rektifikationsbedingung erfüllen. Ein grobes Modell führt zu der Erkenntnis, dass das Produkt Minimaltiefe mal Länge der transportaktiven Sohloberfläche (in Querrichtung) gleich der Fließquerschnittsfläche sein sollte. Ein verfeinertes Modell, das auch die von dem Eigengewicht der Körner ausgehende Schubspannung berücksichtigt, relativiert diese Aussage dahin, dass bei konstantem Fließquerschnitt die Länge der transportaktiven Sohloberfläche proportional zur Feststoff-Froude-Zahl wachsen darf. Bei starkem Transport wird die Sohle (auch in Querrichtung) ‘zerklüfteter’. Abschätzungen für den hydraulischen Radius zeigen, dass dessen Differenz zum Wasserstand geringer ausfallen kann als bei einem Rechteckgerinne derselben Breite. Nicht befriedigend lösen jedoch beide Modelle das Problem der Erosion an senkrechten Uferwänden.

Verhält sich der Transport linear in der Schubspannung, so die Transportkörper-Periodenlänge linear zur Quadratwurzel des Quotienten aus Wellenwanderungsgeschwindigkeit an der Wasseroberfläche durch die Dünenwanderungsgeschwindigkeit auf der Sohle. Quantitativ werden unter dieser Annahme mit dem in 7 entwickelten Modell für eindimensionale Transportkörper eher Riffel als Dünen beschrieben.

1.5 Grenzen und Ausblick

Bereits in einer zu Beginn des Abschnitts 3.2 zur Kontinuität des Geschiebetransports geführten Diskussion wird gezeigt, dass dringend experimentell geklärt werden sollte wie sich ein quer zur Fließ- und Transportrichtung verlaufendes Gefälle auf die Frachtrate auswirkt. Sonst lässt sich das zweidimensionale Transportgleichgewicht nicht befriedigend beschreiben. Um auch kleine Differenzen zwischen Frachtraten mit befriedigender Auflösung zu messen, wird in Abschnitt 8.4 ein differentielles Messverfahren vorgeschlagen.

Besonders viel versprechen weitere Untersuchungen zu dem dynamischen Vorgang der Einstellung des stationären Gleichgewichtes. Weil es sich hierbei zumindest aus Sicht der Transportvorgänge um einen instationären Vorgang handelt, (für die Hydraulik kann hier i. a. stationär gerechnet werden, solange der Abfluss konstant ist.) ist dieses Thema in dieser Arbeit nur angerissen worden. Die Ergebnisse aus Abschnitt 5.7 zu Geschiebetransportformeln, bei denen die Frachtrate nur von der mittleren Fließgeschwindigkeit des Wassers abhängt, zeigen, dass auch stationär-oszillatorische Gleichgewichte möglich sind. Für schubspannungsbestimmte Geschiebeformeln ist das erst der Fall, wenn nichtlineare Phänomene, wie in Abschnitt 7 zu Transportkörpern, betrachtet werden.

Neben solchen grundsätzlichen, eher qualitativen Fragen sollten auch einige der quantitativen Ergebnisse durch spezielle Modellversuche validiert werden. Mit solchen Versuchen sollte vor allem geklärt werden, inwieweit die bei der Herleitung dieser Ergebnisse zugrunde gelegten Annahmen gerechtfertigt sind. So lässt sich z. B. die sich bei stationärem Transportgleichgewicht ohne Normalabfluss einstellende Sohlform und zugehörige Wasserstände heute leichter messen als die Frachtraten direkt. Damit lässt sich klären, ob der Transport ausschließlich von der Schubspannung abhängt. Gilt ein Reziprozitätsgesetz zwischen Wasserstand und Gefälle, ist eine solche exklusive Abhängigkeit bestätigt.

2 Gleichungen der stationären Spiegellinie

Beschreiben lässt sich ein Transportgleichgewicht nur, indem die Gleichungen für die Hydraulik offener Gerinneströmungen mit denen für den Sedimenttransport gekoppelt werden. Ein stationäres Transportgleichgewicht setzt dabei eine stationäre Strömung voraus. Für instationäre Vorgänge treten in den jeweiligen Differentialgleichungen auch partielle Ableitungen nach der Zeit auf. Um den eindimensional-stationären Fall zu behandeln, genügt gewöhnliche Differentialgleichungen und deren Lösungen zu diskutieren.

Wesentlich vereinfachen lassen sich die Rechnungen durch dimensionslose Größen. Für die Hydraulik sind das die Froude-Zahl F_r und der dimensionslose Wasserstand h^* (in Gerinnen konstanter Breite), für den Geschiebetransport die Einsteinsche Transportintensität Φ , die Feststoff-Froude-Zahl F_r^* und die dimensionslose Frachtzahl G^* nach DIN.

In folgenden vier Teilabschnitten wiedergegebene Gleichungen der stationären Hydraulik gehören überwiegend bereits lange zum gesicherten Wissen der Hydromechanik. Sie werden nochmals detailliert hergeleitet, um die Arbeit logisch geschlossen aufzubauen und die Notation zu vermitteln. Hierin zeigt sich zitierte Literatur uneinheitlich.

2.1 Stationäre Hydraulik offener Gerinneströmungen

Werden in einer offenen Gerinneströmung zwei Querschnitte an den Orten x_1 und x_2 in Fließrichtung betrachtet, ergibt sich aus dem Gleichgewicht der Stützkkräfte bei stationärer Strömung

$$\rho \left((\mathbf{g}(h - h_s)_1 + v_1^2) A_1 - (\mathbf{g}(h - h_s)_2 + v_2^2) A_2 \right) = \underbrace{\int_{x_2}^{x_1} \rho \mathbf{g} I A dx}_{\text{Gewicht}} - \underbrace{\int_{x_2}^{x_1} F'_F dx}_{\text{Reibungskraft}} \quad (1)$$

des Wassers zwischen x_1 und x_2

bei kleinem Gefälle I zwischen x_1 und x_2 , da nur für kleine I näherungsweise $I \approx \sin(\arctan I)$ gesetzt werden darf. Für die potentielle Energie und der sich daraus ergebende Anteil der Stützkkräfte entscheidend ist die Differenz $h - h_s$ zwischen dem Wasserstand h , also der Höhe des Wasserspiegels über der Sohle und Höhe h_s des Schwerpunktes des Fließquerschnitts über der Sohle. (Abb. 5)

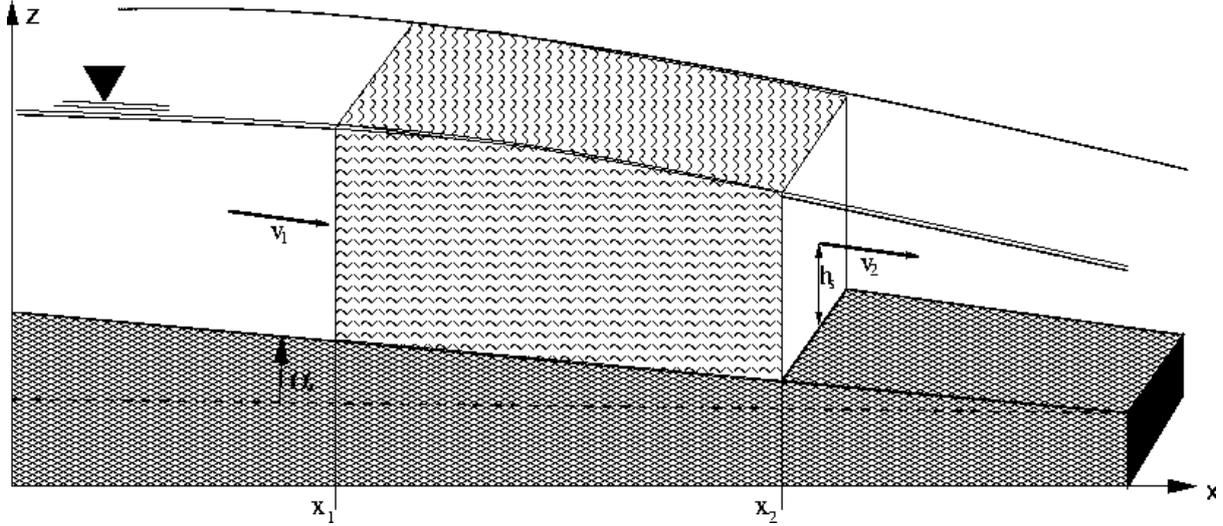


Abbildung 5: Gleichgewicht der Stützkräfte bei stationärer Strömung. Die Kraft als Differenz zwischen Gewicht und Reibung des schraffierten Segmentes steht nach (1) im Gleichgewicht zu der Differenz zwischen den Kräften, die sich aus der Differenz der Gesamtenergie des Wassers in den Querschnitten x_1 und x_2 ergeben.

Aus einem quadratischen Widerstandsgesetz $8\mathbf{g}r_H I_F = \lambda v^2$ (Darcy) ergibt sich die Ortsableitung F'_F der Stützkraft F_F aus dem Reibungsgefälle I_F über

$$F'_F = \varrho \mathbf{g} A I_F = \frac{\varrho A \lambda v^2}{8r_H} \quad (2)$$

$$\iff \frac{F'_F}{\varrho} = \frac{A \lambda v^2}{8r_H} \quad (3)$$

und

$$(\mathbf{g}(h - h_s)_1 + v_1^2) A_1 - (\mathbf{g}(h - h_s)_2 + v_2^2) A_2 = \mathbf{g} \int_{x_2}^{x_1} A(I - I_F) dx \quad (4)$$

die in der Literatur üblicherweise differentiell zitierte Stützkraftgleichung ([6], 15.2.4 Gl. (15.2), S. 288 für I_F)

$$\frac{d}{dx} \left((\mathbf{g}(h - h_s) + v^2) A \right) = \mathbf{g} A (I - I_F) \quad \text{mit} \quad I_F = \frac{\lambda v^2}{8\mathbf{g}r_H}. \quad (5)$$

(Zu I_F [6] 5.2, S. 110, 2. Anmerkung, wobei $\frac{Q^2}{A^2} = v^2$ und $\frac{P_w}{A} = \frac{1}{r_H}$ obige Gleichung für I_F ergeben.) Andere Fließgesetze ergeben kompliziertere Ausdrücke für I_F . Aufgrund dieser Herleitung gelten für (5) folgende Einschränkungen:

- Mit (4) bzw. (5) liegt speziell die stationär-eindimensionale Form der sog. Flachwassergleichungen von Saint-Venant vor. Im allgemeinen, instationär-zweidimensionalen Fall handelt es sich bei den Flachwassergleichungen um ein gekoppeltes System dreier partieller Differentialgleichungen, einer skalaren Kontinuitätsbedingung und einer vektoriellen Impuls- bzw. Energieerhaltungsgleichung ([25], 4.1 (4.1.1), (4.1.4), (4.1.5) S. 225-226, [2] 6.3.2 (6.6) und (6.7) S. 218 mit speziellen Quell- und Beschleunigungskorrekturtermen für instationäre Modellierung der Flüsse):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{div}(h\vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial hv_x}{\partial t} + \frac{\partial hv_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial(hv_x^2 + \mathbf{g}h^2/2)}{\partial x} &= \mathbf{g}h(I - I_F)_x \\ \frac{\partial hv_y}{\partial t} + \frac{\partial hv_x v_y}{\partial x} + \frac{\partial(hv_y^2 + \mathbf{g}h^2/2)}{\partial y} &= \mathbf{g}h(I - I_F)_y \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Hierbei sind $(I - I_F)_x = I_x - \frac{\lambda v_x^2}{8\mathbf{g}r_H}$ und $(I - I_F)_y = I_y - \frac{\lambda v_y^2}{8\mathbf{g}r_H}$ die Differenzen zwischen den Richtungsgefällen I_x bzw. I_y und den Reibungsgefällen in Fließ- bzw. Querrichtung. In Anhang A.1 wird gezeigt, dass hier bei vorgegebenen Gefällen ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem erster Ordnung gegeben ist. Für solche Gleichungssysteme wird das Cauchysche Anfangswertproblem gestellt.

Bei Stationarität wird vorausgesetzt, dass sich die Spiegellinie zeitlich nicht ändert. In (6) verschwinden die partiellen Ableitungen nach der Zeit. So ergibt sich auf einem Rechteck $[x_1; x_2] \times \left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right]$ für die Impulsgleichungen folgende Integraldarstellung:

$$\left. \begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_2} \left[(hv_x v_y) \left(x, \frac{b}{2} \right) - (hv_x v_y) \left(x, -\frac{b}{2} \right) \right] dx \\
& + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left(hv_x^2 + \mathbf{g} \frac{h^2}{2} \right) (x_2, y) - \left(hv_x^2 + \mathbf{g} \frac{h^2}{2} \right) (x_1, y) \right] dy \\
& = \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathbf{g} h (I - I_F)_x(x, y) dy dx \\
& \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[(hv_x v_y)(x_2, y) - (hv_x v_y)(x_1, y) \right] dy \\
& + \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(hv_y^2 + \mathbf{g} \frac{h^2}{2} \right) \left(x, \frac{b}{2} \right) - \left(hv_y^2 + \mathbf{g} \frac{h^2}{2} \right) \left(x, -\frac{b}{2} \right) \right] dx \\
& = \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathbf{g} h (I - I_F)_y(x, y) dy dx
\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

In stationär-eindimensionalen Modell verschwinden die Differenzen $(\dots) \left(\frac{b}{2} \right) - (\dots) \left(-\frac{b}{2} \right)$. Die Integrale über y werden durch das Mittel ersetzt. So folgt (4).

Unterschlagen werden beim Ansatz der stationären Flachwassergleichungen stationär-oszillatorische Lösungen der instationären Gleichungen. Auf deren Natur wird in Anhang A.1 eingegangen.

- Als Differentialgleichung wird (5) im Gegensatz zu der Integralgleichung (4) an Punkten mit Fließwechseln singular. Im Rahmen der klassischen Differentiation und Integration gibt es im allgemeinen nur stückweise definierte Lösungen für die Spiegellinie. Sog. Zwischenintegrale $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x(t')) dt'$ einer (klassischen) Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, ergeben sich in der Physik aus dem Energiesatz, falls ein Impuls $m \frac{dx}{dt}$ über die Zeit t integriert wird, und besitzen allgemeinere Lösungen als die (klassische) Differentialgleichung selbst.

- Bezeichnet I das Gefälle, d. h. $I = -\frac{dz}{dx}$ für die Höhe z der Sohle über einem festen Nullniveau, gilt (1) nur für kleine I , insoweit $I \approx \sin(\arctan I)$ vertretbar genau ist. (Linearisierungsfehler graphisch in Abb. 6 und tabelliert in [5], 5.2.2 Tab. 5.2, S. 28)

Dabei ist $\sin(\arctan I) = \frac{I}{\sqrt{1+I^2}}$. Andernfalls muss $I - I_F$ durch $\frac{I}{\sqrt{1+I^2}} - I_F$ in (1) ersetzt werden. (Die in Anhang C.1 untersuchte linearisierte Näherung (280) bringt keine wesentlichen Vorteile.)

Die Kopplung der hydraulischen Gleichungen mit den für das stationäre Gleichgewicht des Geschiebetransports wird hierdurch nicht berührt, weil auch in diesen Gleichungen entsprechend substituiert wird. Ergeben sich als Lösung der in den folgenden Abschnitten gewonnenen Gleichungen für das gekoppelte hydromechanische Gleichgewicht große Absolutbeträge für I , wird I über

$$-\frac{dz}{dx} = \frac{I}{\sqrt{1-I^2}} \quad (8)$$

in das eigentliche Gefälle $-\frac{\partial z}{\partial x}$ umgerechnet.

Für das gekoppelte instationäre Gleichgewicht hingegen müssen beim Transportgleichgewicht auch partielle Zeitableitungen $\frac{\partial z}{\partial t}$ der Sohlenhöhe z berücksichtigt werden. Aus diesen ergeben sich zeitlich veränderliche Gefälle $-\frac{\partial z}{\partial x}$, die auf Hydraulik und Geschiebetransport rückwirken. Hier muss mit der genauen Formel gerechnet werden, wenn sich als Lösung des instationären Problems nicht dem Betrag nach nur kleine Gefälle ergeben.

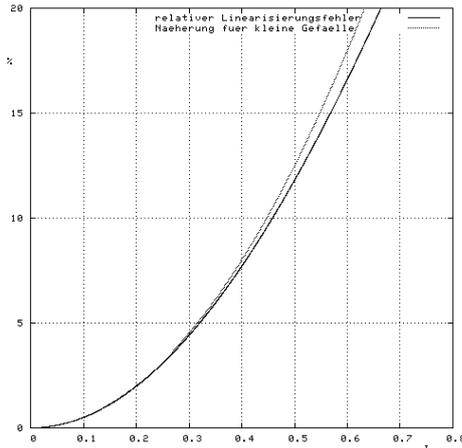


Abbildung 6: Relativer Fehler ε_I (prozentual) durch Linearisierung des Gefällesinus. Diesen Fehler beschreibt die Funktion $\varepsilon_I = \sqrt{1 + I^2} - 1$ (durchgezogener Graph). Für kleine I gilt näherungsweise $\varepsilon_I \approx \frac{I^2}{2}$ (gestrichelter Graph)

- Prinzipiell darf der Widerstandsbeiwert λ vom Ort x abhängen, da bei der Herleitung zu (5) keine Funktion nach x abgeleitet wird, in deren Funktionsterm bereits vor der Ableitung λ als konstant angenommener Faktor auftritt. In einem deterministischen Modell des stationären Gleichgewichtes liegt jedoch nahe, bei bewegter Sohle den Widerstandsbeiwert als konstant anzunehmen. Damit sich der Term rechts in (5) als eine Ortsableitung ergibt, muss er sich insbesondere integrieren lassen. So muss auch $\lambda = \lambda(x)$ integrierbar sein.
- Wie sich eine Sohlenkrümmung auf λ auswirkt, wird nicht berücksichtigt, sofern nicht λ selbst von der Krümmung abhängt. Selbst in offenen Gerinnen konstanter Breite krümmt sich eine bewegliche Sohle zwangsläufig, wenn kein Normalabfluss vorliegt. (Zu sog. Theorien zweiter Ordnung kontinuierlicher Abflüsse siehe [21], III.2. S. 115-125) Kritisch wird das allerdings nur, wenn das Transportgleichgewicht über kurze Strecken untersucht werden soll, um die Bildung von Transportkörpern, z. B. von Dünen, zu erklären. Bei Untersuchungen über so kurze Strecken muss ohnehin Turbulenz berücksichtigt werden. Die Modelle werden dementsprechend kompliziert; hierzu kurz Abschnitt 7.

Für befestigte Rechteckgerinne ($A = bh$, $h_s = \frac{h}{2}$) folgt aus (4) und (3)

$$\mathbf{g} \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} + h_1 v_1^2 - h_2 v_2^2 = \mathbf{g} \int_{x_2}^{x_1} \left(hI - \frac{\lambda v^2}{8} \right) dx. \quad (9)$$

Indem die Froude-Zahl $F_r = \frac{v}{\sqrt{gh}}$ eingeführt wird, lässt sich $v^2 = \mathbf{g}hF_r^2$ in (9) ersetzen zu

$$h_1^2 \left(\frac{1}{2} + F_{r1}^2 \right) - h_2^2 \left(\frac{1}{2} + F_{r2}^2 \right) = \int_{x_2}^{x_1} h \left(I - \frac{\lambda F_r^2}{8} \right) dx. \quad (10)$$

Im Rechteckgerinne gilt ([6], 5.2, S. 108, Anmerkung 3, zweite Gleichung) bei einem Abfluss Q

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{Q}{A} = \frac{Q}{bh^{3/2}\sqrt{\mathbf{g}}} \quad \text{bzw.} \quad F_r^2 = \frac{Q^2}{b^2\mathbf{g}h^3}. \quad (11)$$

An einem Querschnitt x_0 mit der Grenztiefe h_g bei einer Breite $b_0 = b(x_0)$ gilt $F_r = 1 = F_r^2$. So folgt aus (11) $1 = \frac{Q^2}{b_0^2\mathbf{g}h_g^3} \iff Q^2 = b_0^2\mathbf{g}h_g^3$. Wird Q^2 in (11) ersetzt, lässt sich der Quotient durch \mathbf{g} kürzen, und so folgt

$$\boxed{F_r^2 = \frac{b_0}{b} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3}. \quad (12)$$

Wird in der Integraldarstellung (10) für das Stützkraftgleichgewicht im zweiten Querschnitt der Position $x_1 = 0$ die Grenztiefe $h_2 = h_g$ bei einer Gerinnebreite b_0 angenommen, folgt

$$\boxed{\frac{h^2(x)}{2} + \frac{b_0}{b(x)} \cdot \frac{h_g^3}{h(x)} - \frac{3}{2}h_g^2 = \int_0^x h(x')I(x') dx' - \frac{b_0 h_g^3}{8} \int_0^x \frac{\lambda(x') dx'}{b(x')h^2(x')}}. \quad (13)$$

2.2 Die Sohlschubspannung bei stationär-ungleichförmigem Abfluss im offenen Rechteckgerinne

Bei Normalabfluss verschwinden beide Seiten der Stützkraftgleichung (1). Die in Gefälle- richtung wirkende Gewichtskraft des Wasserkörpers über der Sohle und die im eindimen- sional-tiefengemittelten Modell angenommene Reibungskraft F_F zwischen Wasserkörper und Sohle sind gleich. (Abb. 7) Deshalb bleibt beim Ansatz der Sohlschubspannung τ zu

$$\tau = \tau_{\vec{g}} = \rho g h I \quad (14)$$

für Normalabfluss ([58] 1.2 S. 17 Gl. (1.2-2); [16] 6.3.1 Gl. (6.16) S. 90, dort $\gamma = \rho g$.) offen, ob als Sohlschubspannung die (statische) Gewichts- oder die durch die Bewegung des Wassers verursachte Reibungskraft wirkt.

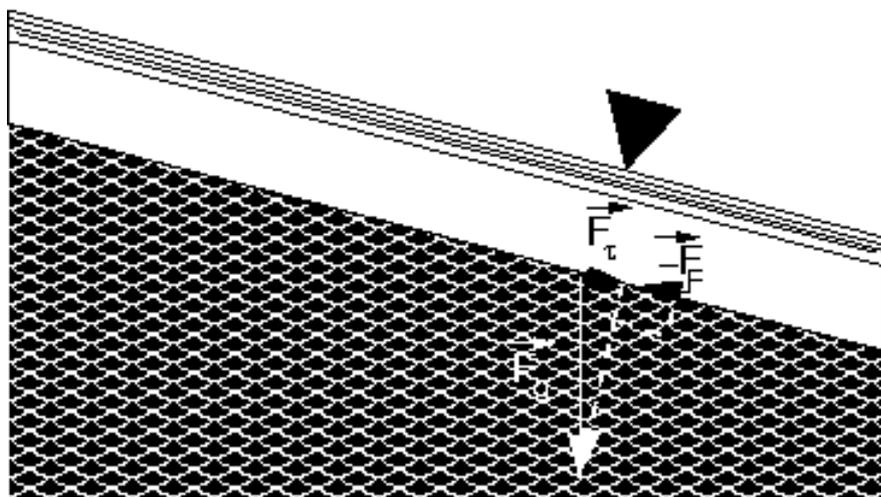


Abbildung 7: Die Schubspannung bei Normalabfluss: In Gefällerrichtung wirkende Gewichtskraft \vec{F}_g und Reibungskraft \vec{F}_F sind gleich.

Bevor die Schubspannung allgemein für den stationär-ungleichförmigen Abfluss untersucht wird, mag man fragen: Wie steht es mit ihr bei waagrechter Sohle? In rauhen Gerinnen konstanter Breite liegt bei waagrechter Sohle, ggf. nach einem Wechselsprung, eine Staulinie vor, weil durch die Sohlreibung hydraulische Energie abgebaut wird, ohne dass durch die Schwerkraft neue gewonnen wird. (Abb. 8)

Nach (14) ergibt sich für eine waagrechte Sohle jedoch keine wirksame Schubspannung.

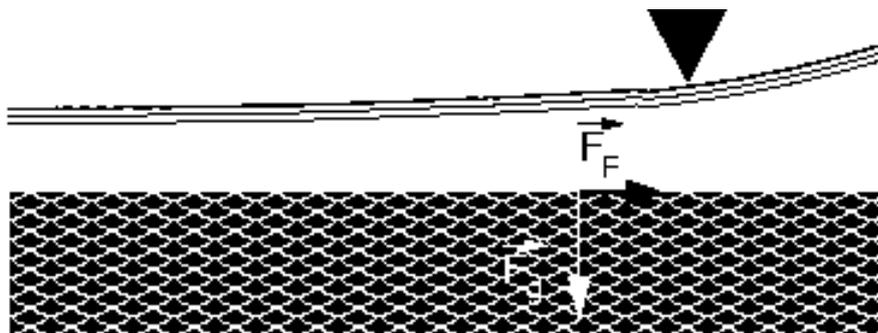


Abbildung 8: Bei waagrechter Sohle liegt, ggf. nach einem Wechselsprung, eine Staulinie vor. Die Gewichtskraft \vec{F}_g wirkt nur senkrecht zur Fließrichtung. Doch wirkt eine Reibungskraft \vec{F}_F in Fließrichtung, die für die Staulinie verantwortlich ist.

Sehr wohl hingegen ergibt sich eine Schubspannung nach (14) für ein eingestautes Gewässer mit schräger Sohle bei waagrechter Spiegellinie (Abb. 9), denn die Schubspannung wird mit der rein statisch wirkenden Gewichtskraft des Wasserkörpers auf die Sohle in Richtung des Gefälles gleichgesetzt. Diese Gewichtskraft wird jedoch durch die Stauung statisch kompensiert.

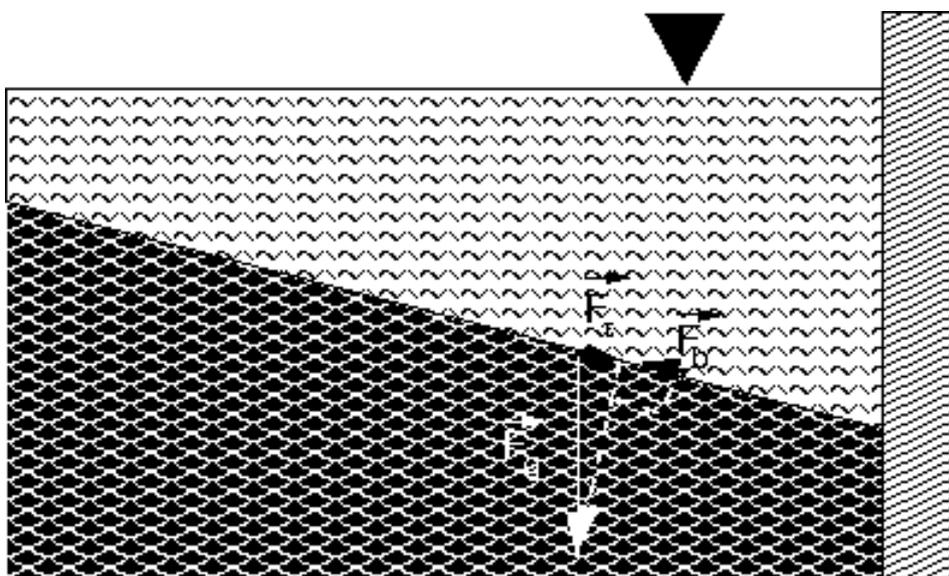


Abbildung 9: Die Schubspannung bei waagrechter Spiegellinie ohne Fluss: In Gefällerrichtung wirkende Gewichtskraft \vec{F}_g wird statisch durch eine Gegenkraft \vec{F}_b kompensiert.

Wird die Schubspannung für den Transport von Sediment verantwortlich gemacht, kann es sich bei ihr nur um eine dynamische, durch die *Bewegung* des Wassers verursachte Kraft handeln. Auf Smerdon und Beasley, Wittmann und Vollmers geht ein Ansatz für die Sohlenschubspannung bei ungleichmäßigem Abfluss zurück. Aus ihm ergibt sich τ zu

$$\boxed{\tau = \tau_{\bar{v}} = \varrho \left(\mathbf{g}h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) + v^2 \frac{dh}{dx} \right)} \quad (15)$$

([53] 2. Gl. (8b); [58] 1.6 Abb. 1.6/1, S. 75). Dem Ansatz von Wittmann und Vollmers ([56], wiedergegeben in [53] Bild 1 S. 23, identisch mit [58] 1.6 Abb. 1.6/1, S. 75) liegt der Stützkraftansatz zu Abb. 5 zugrunde. Im Rechteckgerinne konstanter Breite b ergibt sich aus (1) durch Division durch b

$$\begin{aligned} & \varrho \left((\mathbf{g}(h - h_s)_1 + v_1^2)h_1 - (\mathbf{g}(h - h_s)_2 + v_2^2)h_2 \right) \\ &= \varrho \left(\left(\frac{\mathbf{g}h_1}{2} + v_1^2 \right) h_1 - \left(\frac{\mathbf{g}h_2}{2} + v_2^2 \right) h_2 \right) \\ &= \underbrace{\varrho \mathbf{g} \int_{x_2}^{x_1} h I dx}_{\text{Gewicht}} - \underbrace{\int_{x_2}^{x_1} \tau_{\bar{v}} dx}_{\text{Reibungskraft}} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{pro Breitereinheit}} \end{aligned} \quad (16)$$

und hierzu äquivalent

$$\varrho \left(\mathbf{g} \int_{x_2}^{x_1} h I dx + \mathbf{g} \frac{h_2^2 - h_1^2}{2} + h_2 v_2^2 - h_1 v_1^2 \right) = \int_{x_2}^{x_1} \tau_{\bar{v}} dx . \quad (17)$$

Wird x_2 mit $x_2 = x_0$ als feste und x_1 mit $x_1 = x$ als laufende Ortsvariable angenommen, ergibt Differentiation von (17) nach x bei konstantem Abfluss Q

$$\begin{aligned} \tau &= \varrho \left(\mathbf{g}hI - \mathbf{g}h \frac{dh}{dx} - v^2 \frac{dh}{dx} - 2hv \frac{dv}{dx} \right) \\ &= \varrho \left(\mathbf{g}h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) - v^2 \frac{dh}{dx} - 2hv \frac{dv}{dx} \right) \\ &= \varrho \left[\mathbf{g}h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) - v^2 \frac{dh}{dx} - 2hv \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{bh} \right) \right] \\ &= \varrho \left[\mathbf{g}h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) - v^2 \frac{dh}{dx} + 2hv \frac{Q}{bh^2} \frac{dh}{dx} \right] \\ &= \varrho \left(\mathbf{g}h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) - v^2 \frac{dh}{dx} + 2hv \frac{v}{h} \frac{dh}{dx} \right) \\ &= \varrho \left(\mathbf{g}h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) + v^2 \frac{dh}{dx} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

und so (15). Pernecker und Vollmers ersetzen in ([56] 2. S. 237-238 Herleitung zu Gl. (8a) und (8b)) mit $\int_{x_2}^{x_1} \tau dx = \tau l$ und dem Abstand l der in x_1 und x_2 betrachteten Querschnitte $l = x_2 - x_1$ die Integraldarstellung und betrachten eine Reihenentwicklung. Der hierbei unterlaufene, konzeptionelle Fehler, dass τ auf dem Sohlenabschnitt von x_1 bis x_2 als konstant angenommen wird, wird ausgeglichen, indem höhere Glieder der Reihenentwicklung vernachlässigt werden. In Zusammenfassung folgt zu (15), dass

- die Sohlschubspannung der Sohlreibungsstützkraft pro Sohlflächeneinheit gleichgesetzt wird. Damit gilt bei quadratischen Fließgesetzen wegen (2) in breiten Rechteckgerinnen mit dem Widerstandsbeiwert λ insbesondere

$$\boxed{\tau_{\bar{v}} = \frac{F'_F}{b} = \frac{\varrho h \lambda v^2}{8r_H} \approx \varrho v^2 \frac{\lambda}{8}} \quad (19)$$

Die Herleitung zu (15) setzt voraus:

- Rechteckgerinne,
- konstante Breite,
- stationären Abfluss.

An Wechselsprüngen wird $\frac{dh}{dx}$ singulär. Unter Vorwegnahme der erst im übernächsten Unterabschnitt 2.4 diskutierten Gleichung (27), äquivalent zu (31) von Bresse, folgt

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{v}} & \stackrel{(15)}{=} \varrho \left(\mathbf{g}h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) + v^2 \frac{dh}{dx} \right) \\ & = \varrho \left(\mathbf{g}h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) + \mathbf{g}h F_r^2 \frac{dh}{dx} \right) \\ & = \varrho \mathbf{g}h \left(I + \left(1 - F_r^2 \right) \frac{dh}{dx} \right) \\ & \stackrel{(12)}{=} \varrho \mathbf{g}h \left(I + \left(1 - \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \right) \frac{dh}{dx} \right) \\ & \stackrel{(27)}{=} \varrho \mathbf{g}h \left(I + \frac{h^3 - h_g^3}{h^3} \cdot \frac{h^3 I - (\lambda/8) h_g^3}{h^3 - h_g^3} \right) \\ & = \varrho \mathbf{g}h \left(2I - \frac{\lambda}{8} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Da also bei einer Normalabflusstiefe h_n

$$\lim_{h \rightarrow h_g} \tau_{\bar{v}}(h) = \varrho \mathbf{g} h_g \left(2I - \frac{\lambda}{8} \right) \stackrel{(30)}{=} \varrho \mathbf{g} h_g I \left(2 - \left(\frac{h_n}{h_g} \right)^3 \right) \quad (21)$$

gilt, lässt sich mit (15) die Sohlschubspannung auch an Wechselsprüngen beschreiben.

Verallgemeinern auf Rechteckgerinne veränderlicher Breite lässt sich der Ansatz von Smerdon und Beasley, Wittmann und Vollmers, indem statt auf einen Stützkraftansatz ‘pro Breitereinheit’ auf den allgemeinen Ansatz (1) zurückgegriffen wird. Mit $A = bh$ folgt analog zu (17) die Integraldarstellung

$$\begin{aligned} \varrho \mathbf{g} \int_{x_2}^{x_1} bhI dx - \int_{x_2}^{x_1} b\tau_{\bar{v}} dx &= \varrho \left(\left(\frac{\mathbf{g}h_1}{2} + v_1^2 \right) b_1 h_1 - \left(\frac{\mathbf{g}h_2}{2} + v_2^2 \right) b_2 h_2 \right) \\ \iff \int_{x_2}^{x_1} b\tau_{\bar{v}} dx &= \varrho \left(\mathbf{g} \int_{x_2}^{x_1} bhI dx + \mathbf{g} \frac{b_2 h_2^2 - b_1 h_1^2}{2} + b_2 h_2 v_2^2 - b_1 h_1 v_1^2 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

und durch Differentiation nach dem Ort x

$$\begin{aligned} b\tau_{\bar{v}} &= \varrho \left[\mathbf{g} \left(bhI - h^2 \frac{db}{dx} - bh \frac{dh}{dx} \right) - hv^2 \frac{db}{dx} - bv^2 \frac{dh}{dx} - 2bhv \frac{dv}{dx} \right] \\ &= \varrho \left[\mathbf{g}h \left(bI - h \frac{db}{dx} - b \frac{dh}{dx} \right) + v^2 \left(h \frac{db}{dx} + b \frac{dh}{dx} \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Division durch die Gerinnebreite b ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{v}} &= \varrho \left[\mathbf{g}h \left(I - \frac{h}{b} \frac{db}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) + v^2 \left(\frac{h}{b} \frac{db}{dx} + \frac{dh}{dx} \right) \right] \\ &= \varrho \left[\underbrace{\mathbf{g}h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) + v^2 \frac{dh}{dx}}_{\tau \text{ nach (15)}} + \frac{h}{b} \mathbf{g}h (F_r^2 - 1) \frac{db}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Demnach muss die Schubspannung nach (15) im Fall einer veränderlichen Gerinnebreite um den Wert $\frac{h}{b} \mathbf{g}h (F_r^2 - 1) \frac{db}{dx}$ korrigiert werden. Vernachlässigen lässt er sich an breiten Gerinnen im Bereich kritischer Abflüsse. Ungeklärt bleibt wie die dynamische Schubspannung $\tau_{\bar{v}}$ mit dem statischen, tiefenaufgelösten Ansatz (ohne Betrachtung des Mittels) für die Schubspannung in der Literatur in Einklang gebracht werden kann.

2.3 Symmetrische hydraulische Zustände — Laborversuche an einer rauhen Rampe

Sind die hydraulischen Zustände in den zwei Querschnitten an den Orten $x_1 = -x$ und $x_2 = x$ gleich, gilt speziell

$$\boxed{\int_{-x}^x hI \, dx' = \frac{b_0 h_g^3}{8} \int_{-x}^x \frac{\lambda \, dx'}{bh^2}}. \quad (25)$$

Während sich differentielle Darstellungen dazu eignen, partikuläre Lösungen zu bestimmen, weisen die Integraldarstellungen auf Funktionenräume, in denen Lösungen zu suchen sind. Aus physikalischen Überlegungen folgt, dass $h > 0$ gilt. So ist $\frac{1}{h}$ quadrat-integrierbar genau dann, wenn h quadrat-integrierbar ist. Entsprechend müssen b wegen $b > 0$ und λ in erster Potenz integrierbar sein. Quadrat-integrierbare Funktionen lassen sich zwar durch Fourier-Reihen approximieren, sind im allgemeinen aber nicht stetig, geschweige denn analytisch. In Rechnungen der stationären Hydromechanik wird daher bei h speziell von singulären Punkten x_0 ausgegangen, an denen die Grenztiefe h_g erreicht wird. Auf offenen Intervallen $]x_0; x_0'[$ zwischen zwei solchen Punkten x_0 und x_0' oder den Intervallen $] -\infty; x_0[$ oder $]x_0; \infty[$ kann für h Differenzierbarkeit vorausgesetzt werden, sofern b und λ stetig sind.

Leicht lässt sich sehen, dass (25) keine Lösung $h > 0$ im Fall $\lambda = 0 = \text{const}$ besitzen kann. So muss auch $\lambda > 0$ vorausgesetzt werden.

Ist $\lambda = \lambda(x)$ beschränkt, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \inf_{|x'| < |x|} I(x') > 0$ und $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \inf_{|x'| < |x|} b(x') > 0$, ist jede Lösung $h = h(x)$ zu (25) nach oben beschränkt, da sonst $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \frac{\lambda \, dx'}{bh^2} < \infty$ existieren würde, obwohl das Integral in (25) links mit x unbeschränkt wüchse.

In Versuchen an einem physikalischen Modell einer Blocksteinrampe an der Leitzach bei Mühlkreit sind am Institut für Wasserwesen der Universität der Bundeswehr München durch Frau Susanne Vogel 2001-2001 stationäre Spiegellinien bestimmt worden ([52]). Abb. 10 zeigt schematisch den Aufbau des Modells.

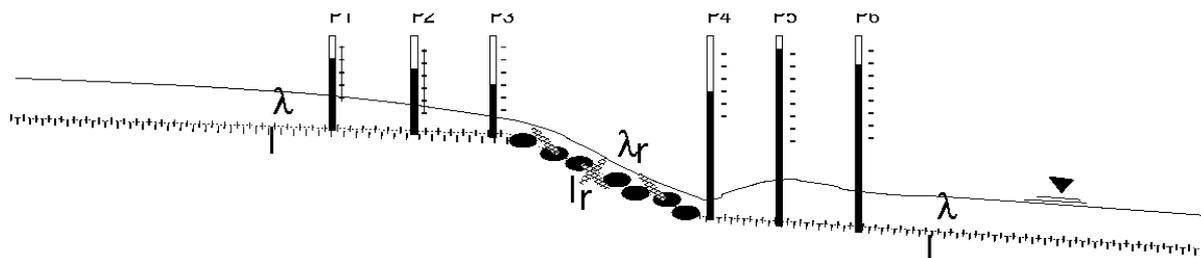


Abbildung 10: Schematischer Aufbau des Modellversuchs zur rauhen Rampe an der Leitzach bei Mühlkreit (Zu weiteren Einzelheiten vgl. [52], Kap. 3, S. 10-11.)

Die Vor- und Nachlaufstrecken des 1,10 m breiten Trapezgerinnes besitzen beide das Gefälle $I = 0,002$. Mit jeweils drei annähernd äquidistant angeordneten Pegeln sind Wasserstände entlang der Vor- und Nachlaufstrecke gemessen worden. Wegen der im Vergleich zum Wasserstand teils recht großen Blocksteine auf der Rampe lassen sich auf der Rampe Wasserstände nicht verlässlich messen. Hier lassen sich die im Anhang B in den Tabellen 13 — 16 tabellierten Wasserstände aus den Versuchsreihen 5 — 8 jeweils mit Rampengefällen $I_r = 0,033, 0,05, 0,067, 0,1$ verwenden. An den Querschnitten der Pegel P3 40 cm vor der Rampenober- und P4 18 cm hinter der -unterkante stehen ergänzend Messdaten P3' und P4' zweier Druckmessdosen zur Verfügung.

In den Versuchen Nr. 502 bei einem Abfluss $Q = 5$ l/s und Nr. 503 bei $Q = 17$ l/s aus Versuchsreihe 5 mit einem Rampengefälle $I_r = 0,033$, in Versuch Nr. 604 bei $Q = 26$ l/s aus Versuchsreihe 8 mit einem Rampengefälle $I_r = 0,05$ und in Versuch Nr. 805 bei $Q = 52$ l/s aus Versuchsreihe 8 mit einem Rampengefälle $I_r = 0,1$ stellen sich zur Rampenmitte annähernd symmetrische hydraulische Zustände an jeweils allen drei Pegelquerschnitten ein. In den Tabellen 13 — 16 werden symmetrische Wasserstände *kursiv* hervorgehoben. Annähernd symmetrische Pegelstände in Versuch Nr. 702 bei $Q = 5$ l/s und $I_r = 0,067$ zeigen, dass aus symmetrischen Pegelständen im allgemeinen nicht auf eine symmetrische Spiegellinie geschlossen werden darf. In diesem Versuch wird in der Vorlaufstrecke zwischen P2 und P3 die kritische Abflusstiefe stetig unterschritten, aber zwischen P4 und P5 durch einen (im eindimensionalen Modell unstetigen) Wechselsprung wieder überschritten.

Wird auf der Vor- und der Nachlaufstrecke ein konstanter Widerstandsbeiwert λ angenommen, lassen sich die Integrale zu (25) in Teilintegrale zerlegen. Verläuft die Spiegellinie zwischen P1 und P3 sowie zwischen P4 und P6 stetig, lassen sich diese Teilintegrale durch Interpolation näherungsweise bestimmen. So kann in Anhang B nach λ gelöst werden.

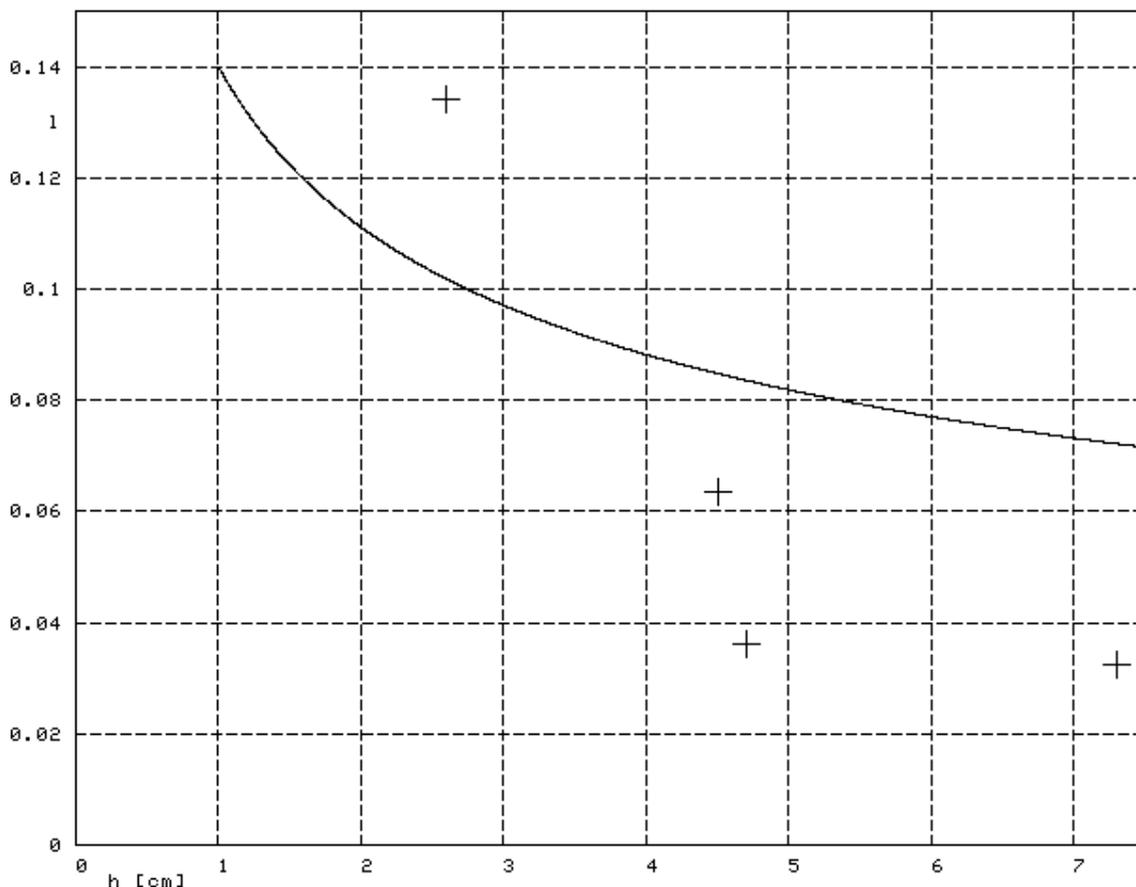


Abbildung 11: Zu den Versuchen Nr. 502, 503, 604 und 805 bestimmte Widerstandsbeiwerte λ nach Tabelle 17 im Anhang B in Abhängigkeit des über P1 — P6 gemittelten Wasserstandes h . Die Werte verhalten sich nicht proportional zu $h^{-1/3}$, wie nach der Manning-Strickler Formel zu erwarten wäre.

Zum Verlauf der Spiegellinie über der Rampe sind ohne Messdaten nur Vermutungen möglich. Möglich sind Normalabfluss oder ein beschleunigter Abfluss. Werden in P3 und P4 gleiche, aber überkritische Abflüsse gemessen, muss in letzterem Fall bei einem Fließwechsel auf der Rampe nahe der Rampenunterkante ein Wechselsprung eintreten.

2.4 Stationäre Hydraulik offener Rechteckgerinne konstanter, gegenüber dem Wasserstand großer Breite

Für Rechteckgerinne konstanter Breite ergibt sich aus (13) der Spiegellinie h speziell die Integraldarstellung

$$\frac{h^2}{2} + \frac{h_g^3}{h} - \frac{3}{2}h_g^2 = \int_0^x hI \, dx' - \frac{h_g^3}{8} \int_0^x \frac{\lambda \, dx'}{h^2}. \quad (26)$$

Diese Gleichung lässt sich nach dem Ort x ableiten und ergibt über

$$\begin{aligned} \left(h - \frac{h_g^3}{h^2}\right) \frac{dh}{dx} &= hI - \frac{\lambda h_g^3}{8h^2} \\ \Leftrightarrow \frac{dh}{dx} &= \frac{h^3 I - (\lambda/8)h_g^3}{h^2} \cdot \frac{h^2}{h^3 - h_g^3} \end{aligned}$$

für h die explizite Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{h^3 I - (\lambda/8)h_g^3}{h^3 - h_g^3}}. \quad (27)$$

Eine Grafik hierzu in der dimensionslosen Größe $h^* = \frac{h}{h_g}$ gibt Abb. 12. Hier zeigt sich, dass sich die Kuben der einer horizontalen Spiegellinie ($\frac{dh}{dx} = 0$) zuzuordnenden Wassertiefen (gestrichelte Linien) zueinander verhalten wie die hierzu gehörigen Verhältnisse $\frac{\lambda}{I}$ zueinander.

Für Anfangswertaufgaben $h(x_0) = h_0$ ist ihre eindeutige Lösung gesichert, sofern $h_0 \in]0; h_g[$ oder $h_0 \in]h_g; \infty[$ gilt. Sind unter Verallgemeinerung der Differentiation auch absolut-stetige Funktionen als Lösung zu (26) gefragt, sind weiter lediglich die Messbarkeit der ortsabhängigen Funktionen I und λ Voraussetzung.

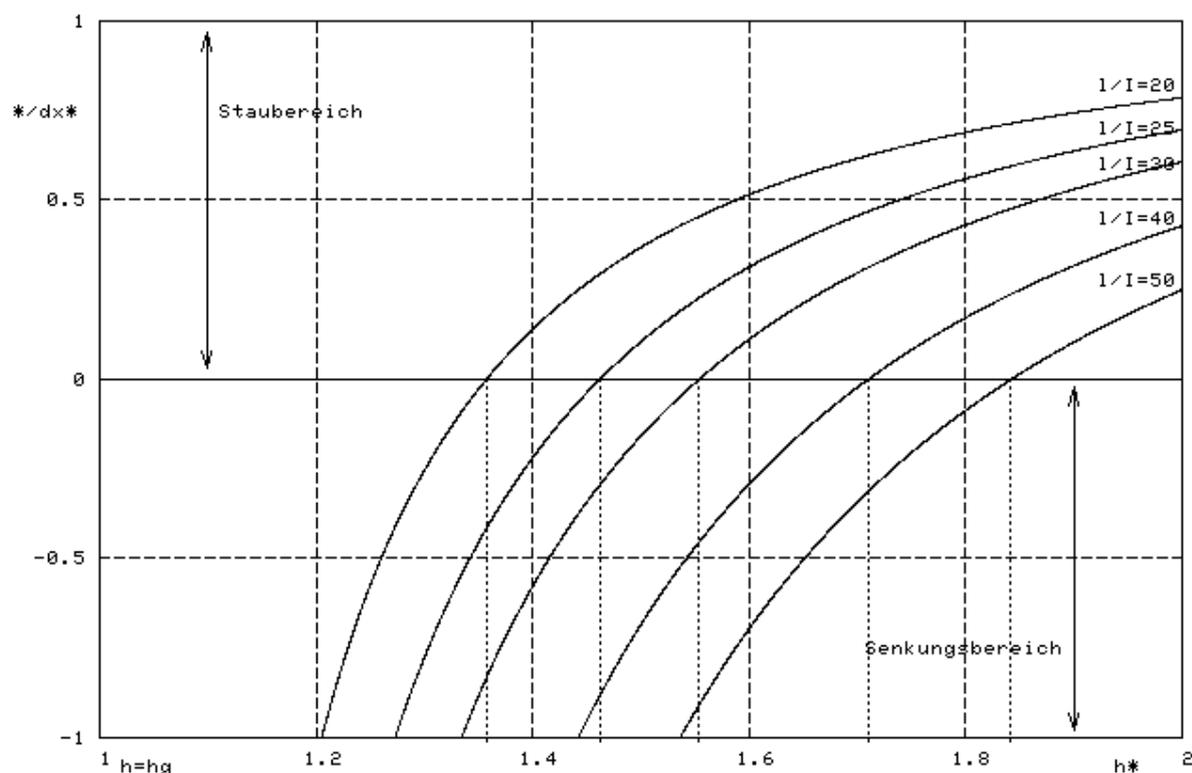


Abbildung 12: Graphen zu der durch (27) gegebenen Funktion $\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dx}(h)$ für die Parameterverhältnisse $\frac{\lambda}{I} = 20, 25, 30, 40$. Für die Grafik zu der entsprechenden Gleichung (65) bei beweglicher Sohle vgl. Abb. 25.

Zu dem im letzten Unterabschnitt 2.3 vorgestellten physikalischen Modellversuch einer rauhen Rampe an der Leitzach bei Mühlkreit sind Daten zu den Wasserständen h und dem Gefälle I gegeben. Durch (27) wird eine Anfangswertaufgabe gegeben. Dazu lassen sich der Wasserstand am Pegel P1 als Anfangsbedingung für eine Vorwärts-, der am Pegel P6 für eine Rückwärtsrechnung vorgeben. Unbekannt sind die Widerstandsbeiwerte λ für die Vor- und Nachlaufstrecke und λ_r für die Rampe. Treten keine Fließwechsel auf, hängt Lösung h des Anfangswertproblems stetig (sogar differenzierbar) von diesen Parametern ab. So lassen sich λ und λ_r durch Intervallschachtelung so bestimmen, dass numerische Lösungen dieser Aufgabe durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsrechnung sowohl die Anfangs- als auch eine Endbedingung erfüllen.

Im folgenden zeigen die Ergebnisse, dass die so bestimmten Spiegellinien entweder an den Pegeln P2 und P5 oder an den Pegeln P3 und P4 deutlich von den gemessenen Werten abweichen. In den Abbildungen 13 und 13 sind auch die Messwerte der Druckmessdosen P'3 und P'4 eingetragen. Zum Teil decken sich die Spiegellinien mit deren Messwerten.

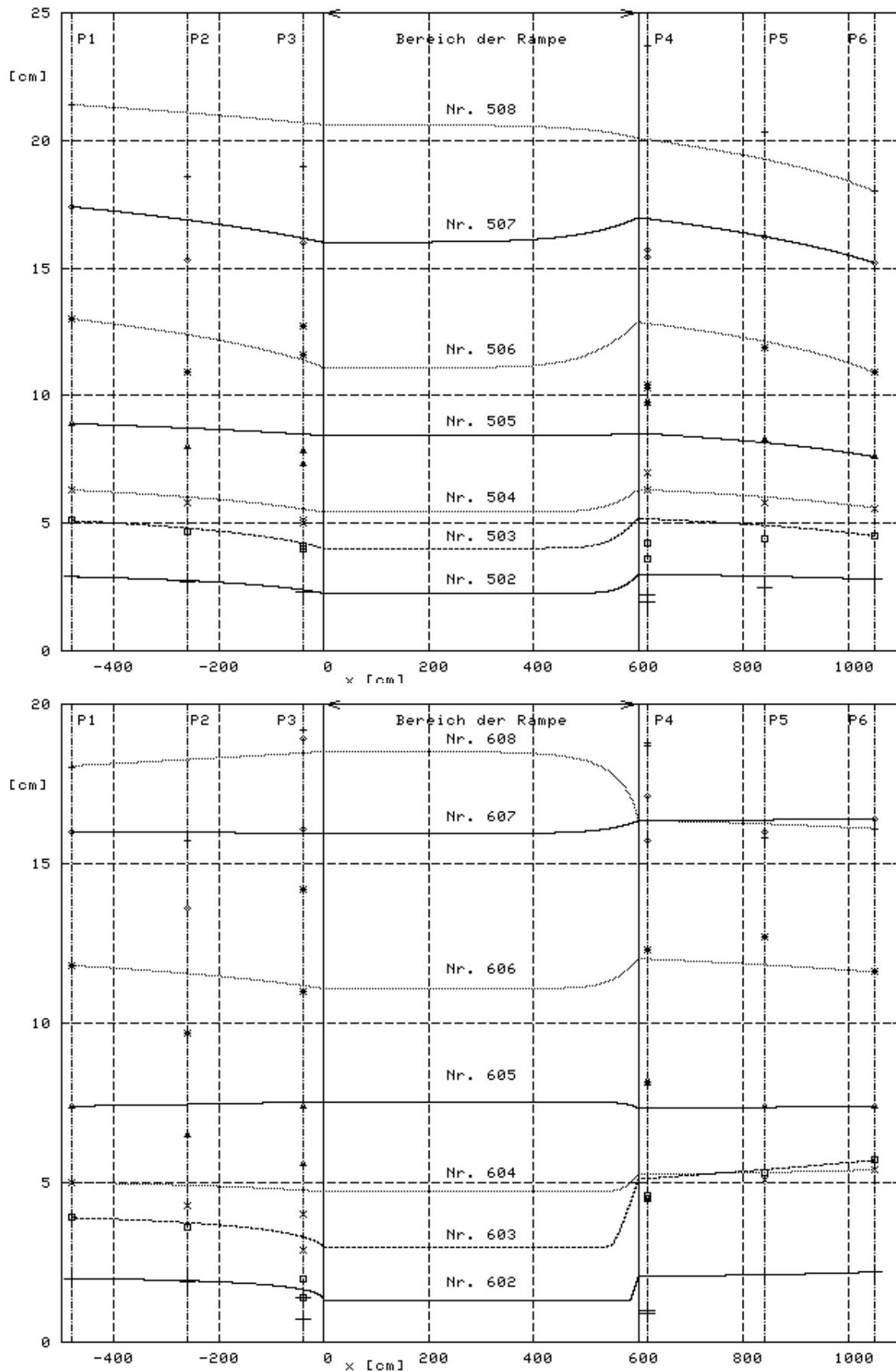


Abbildung 13: Numerisch nach (27) bestimmte Spiegellinien zu den Versuchsreihen 5 (*oben*) und 6 (*unten*) zu geeigneten Widerstandsbeiwerte λ und λ_r .

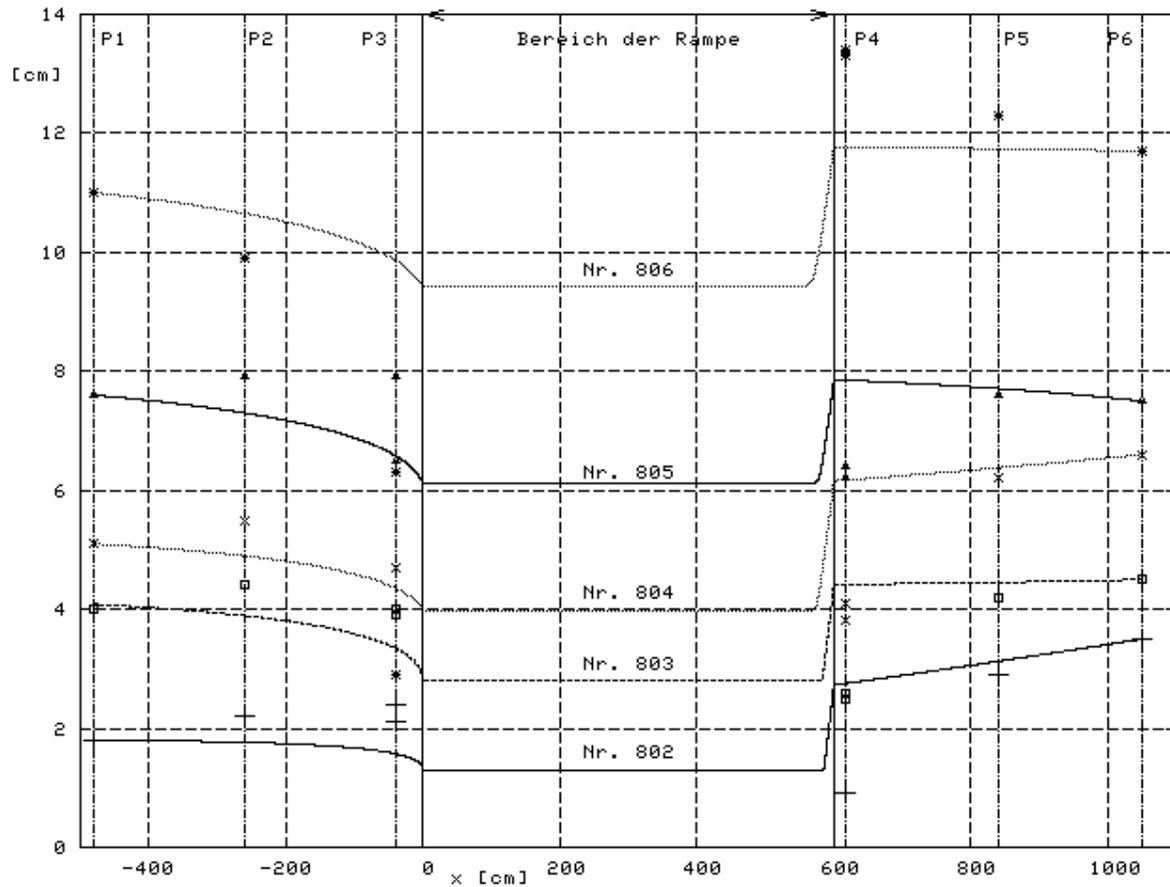
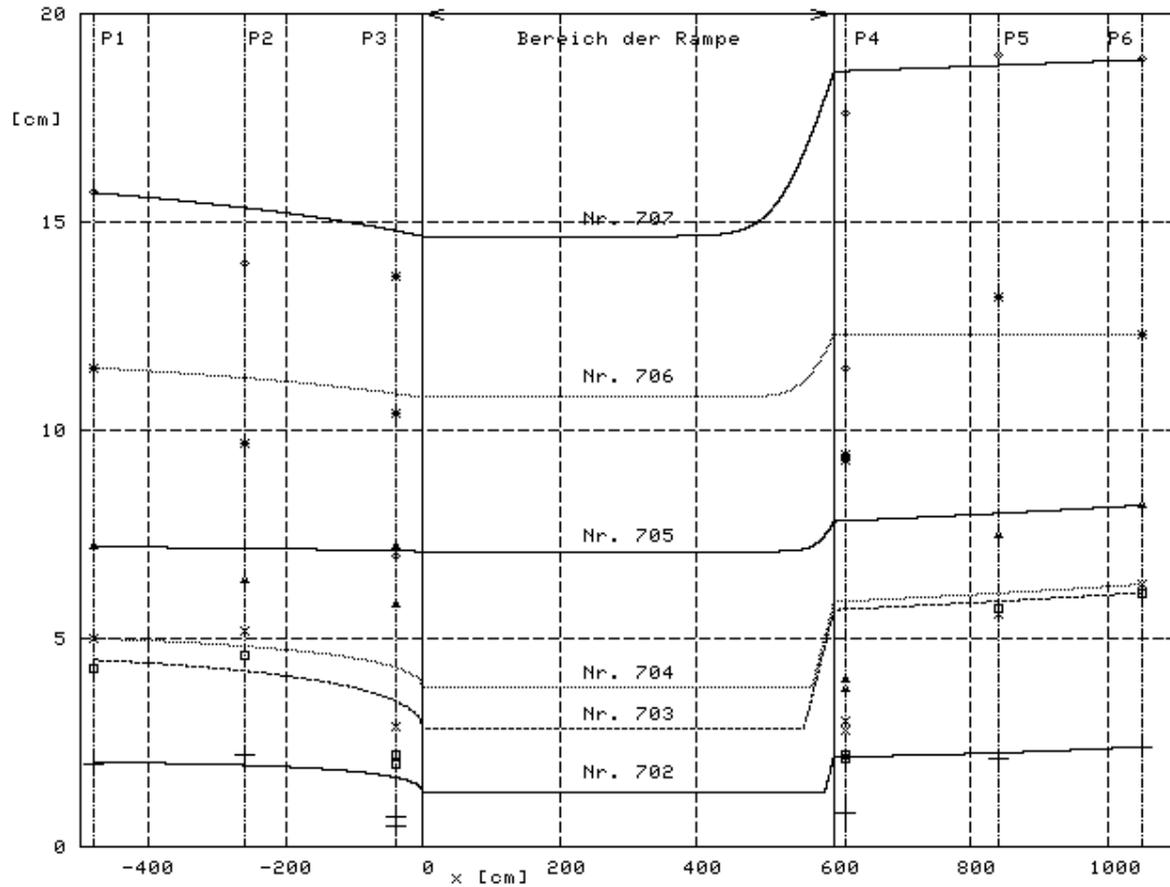


Abbildung 14: Numerisch nach (27) bestimmte Spiegellinien zu den Versuchsreihen 7 (*oben*) und 8 (*unten*) zu geeigneten Widerstandsbeiwerte λ und λ_r .

Die Widerstandsbeiwerte λ für die Vor- und Nachlaufstrecke fallen etwas, die Widerstandsbeiwerte λ_r für die Rampe deutlich höher aus als die im vorigen Unterabschnitt nach sehr groben Integrationsverfahren unter Symmetrieanahmen berechneten Werte. Für die in Abb. 15 skizzierten λ lässt sich eine Abhängigkeit von dem über P1 — P6 gemittelten Wasserstand nach dem Manning-Strickler-Gesetz erahnen. Deutlich hervor tritt sie jedoch nicht. Die in Abb. 16 skizzierten λ_r sind als Funktion des aus den Werten in P3 und P4 gemittelten Wasserstandes im groben konstant um 0,8. Wie jedoch schon aus den Rechnungen in Anhang B zeigt sich auch hier eine gegenüber der Vor- und Nachlaufstrecke um eine Größenordnung höhere Rauheit der Rampe.

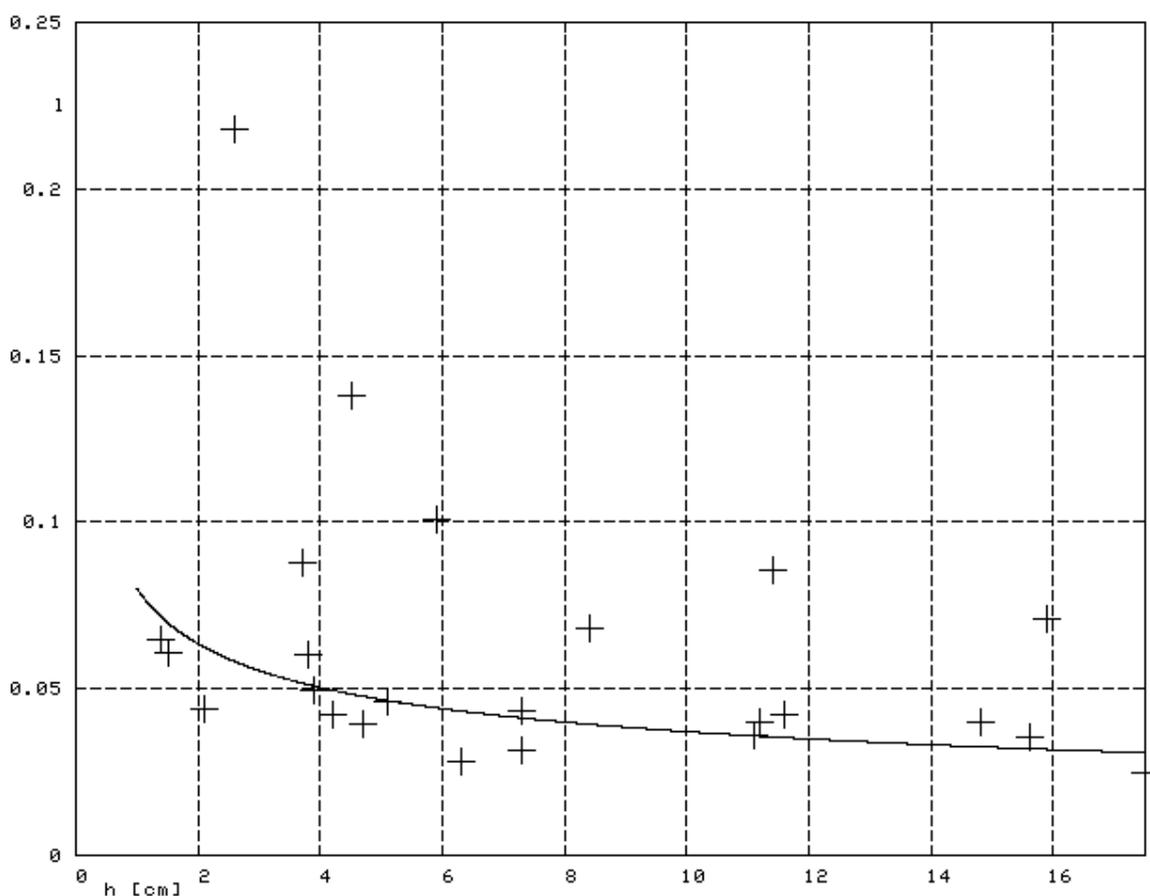


Abbildung 15: Für den physikalischen Modellversuch bestimmte Widerstandsbeiwerte λ der Vor- und Nachlaufstrecke in Abhängigkeit des über P1 — P6 gemittelten Wasserstandes h . Als durchgezogener Graph eine Proportionalität zu $h^{-1/3}$, wie sie nach der Manning-Strickler Formel zu erwarten wäre. Hier sind jedoch noch deutliche Ausreisser zu erkennen.

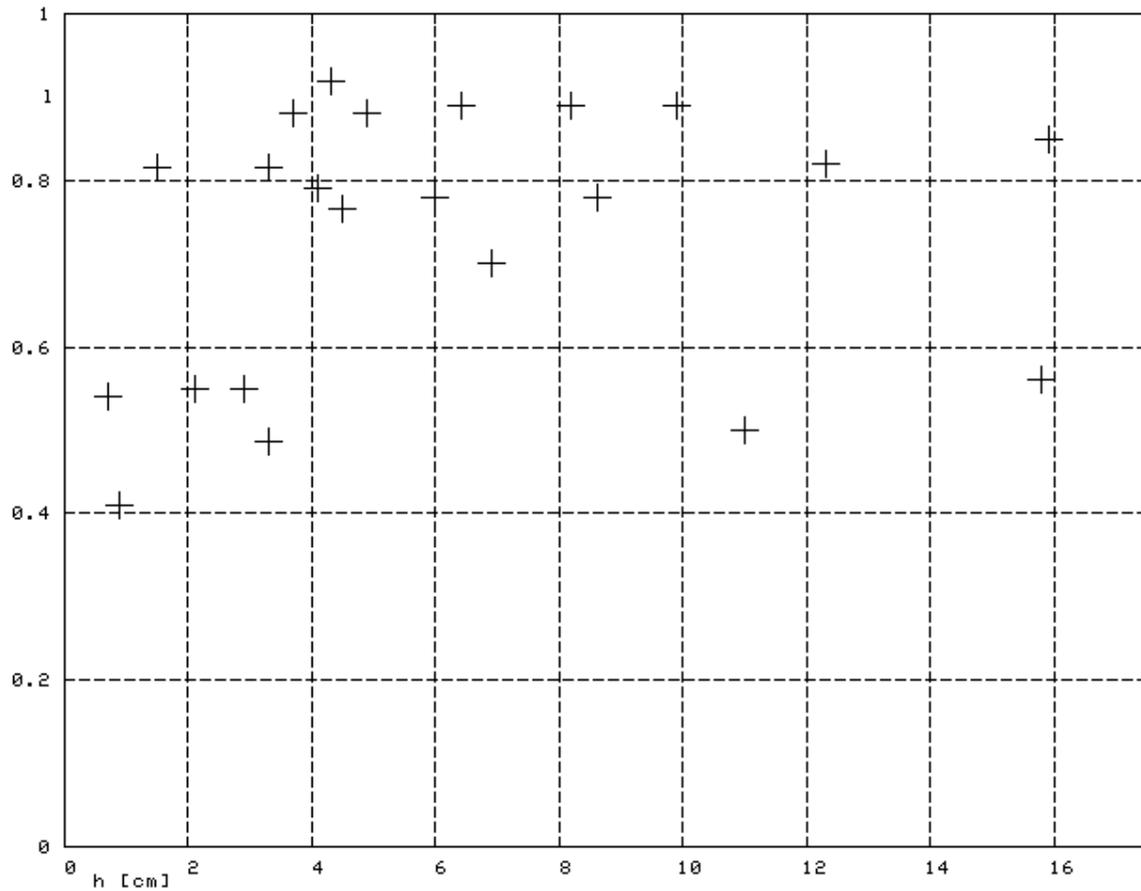


Abbildung 16: Für den physikalischen Modellversuch bestimmte Widerstandsbeiwerte λ_r der Rampe in Abhängigkeit des über P3 und P4 gemittelten Wasserstandes h .

Für das Quadrat der Froude-Zahl ergibt sich aus (12) bei $b_0 = b = \text{const}$ speziell:

$$\boxed{F_r^2 = \left(\frac{h_g}{h}\right)^3} \quad (28)$$

So wird zu (27) äquivalent zu

$$\frac{dh}{dx} = \frac{I - \lambda F_r^2/8}{1 - F_r^2}, \quad (29)$$

Diese Gleichung wird im übernächsten Teilabschnitt 4.1 wieder aufgegriffen.

Bei Normalabfluss ergibt $0 = \frac{dh}{dx}$ über $F_r^2 = \frac{8I}{\lambda}$ die wichtige Hilfsformel

$$\boxed{\left(\frac{h_g}{h_n}\right)^3 = \frac{8I_n}{\lambda}} \quad (30)$$

für das Verhältnis von Normalabflusstiefe h_n zu Grenztiefe h_g mit einem konstanten Normalabflussgefälle I_n .

So ergibt sich aus (27)

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h^3 I_n - \lambda h_g^3 / 8}{h^3 - h_g^3} = I_n \frac{h^3 - \lambda h_g^3 / (8I_n)}{h^3 - h_g^3} = I_n \frac{h^3 - h_n^3}{h^3 - h_g^3} \quad (31)$$

die Gleichung der Spiegellinie bei stationär-ungleichförmigem Abfluss wie sie 1860 von Bresse angegeben worden ist ([49] (2. Aufl.) 3.5.4, Gl. (3.217a), S. 317; [36], 3.1.3.1 Gl. (445) S. 307). Da bei dieser Gleichung von einer festen Sohle konstanten Gefälles ausgegangen wird ([21], IIIa, 2. c) S. 124), werden mit ihrer Lösung lediglich neue Ergebnisse für die stationären Spiegellinien über beweglichen Sohlen verglichen.

Die aus der Literatur bekannte und im Anhang C.2 nachvollzogene Lösung für die Spiegellinie zu (31) lässt sich nur implizit angeben durch

$$I_n \frac{x + x_0}{h_n} = \xi - (1 - \xi_g) \left[\frac{1}{6} \log \left(\frac{1 + \xi + \xi^2}{(1 - \xi)^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arccot} \left(\frac{1 + 2\xi}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (32)$$

mit $\xi = \frac{h}{h_n}$ und dem Parameter $\xi_g = \frac{h_g}{h_n}$ ([49] (2. Aufl.) 3.5.4.2, Gl. (3.218), S. 317; [39] 3.4.2.6.2 Gl. (95), S. 78; [36], 3.1.3.1 Gl. (447) S. 307). Graphisch dargestellt wird (32) in Abb. 17 speziell für $\xi_g = \frac{3}{4} = 0,75$ bei $I_n = 1$. In der Literatur finden sich üblicherweise nur die aus der Grafik oben rechts in Abb. 17 durch Spiegelung an der Diagonalen gewonnene Darstellung der Spiegellinie als Senkungs- oder Staulinie (mitte bzw. unten, [49] (2. Aufl.) 3.5.4.2, Abb. 3.65, S. 318; [24], II.1. Abb. 239, S. 231; [36], 3.1.3.1 Abb. 250 S. 306).

An dem bereits im letzten Teilabschnitt erläuterten physikalischen Modell einer rauhen Rampe lässt sich die Bresse-Kurve nur anhand der Daten zu den Versuchen Nr. 705 als Senkungs- und Nr. 706 als Staulinie verifizieren. Die Wasserstände finden sich in der Tabelle 15 des Anhangs B. Nur in diesen Versuchen tritt in unmittelbarer Nähe des Pegels P3 bzw. P4 ein Fließwechsel ein, so dass dessen Position bekannt ist. Als Normalabflusstiefe kann der in P1 bzw. P4 gemessene Wasserstand verwendet werden. Abb. 18 zeigt die ermittelten Bresse-Kurven im Vergleich zu den an den Pegeln gemessenen Wasserständen.

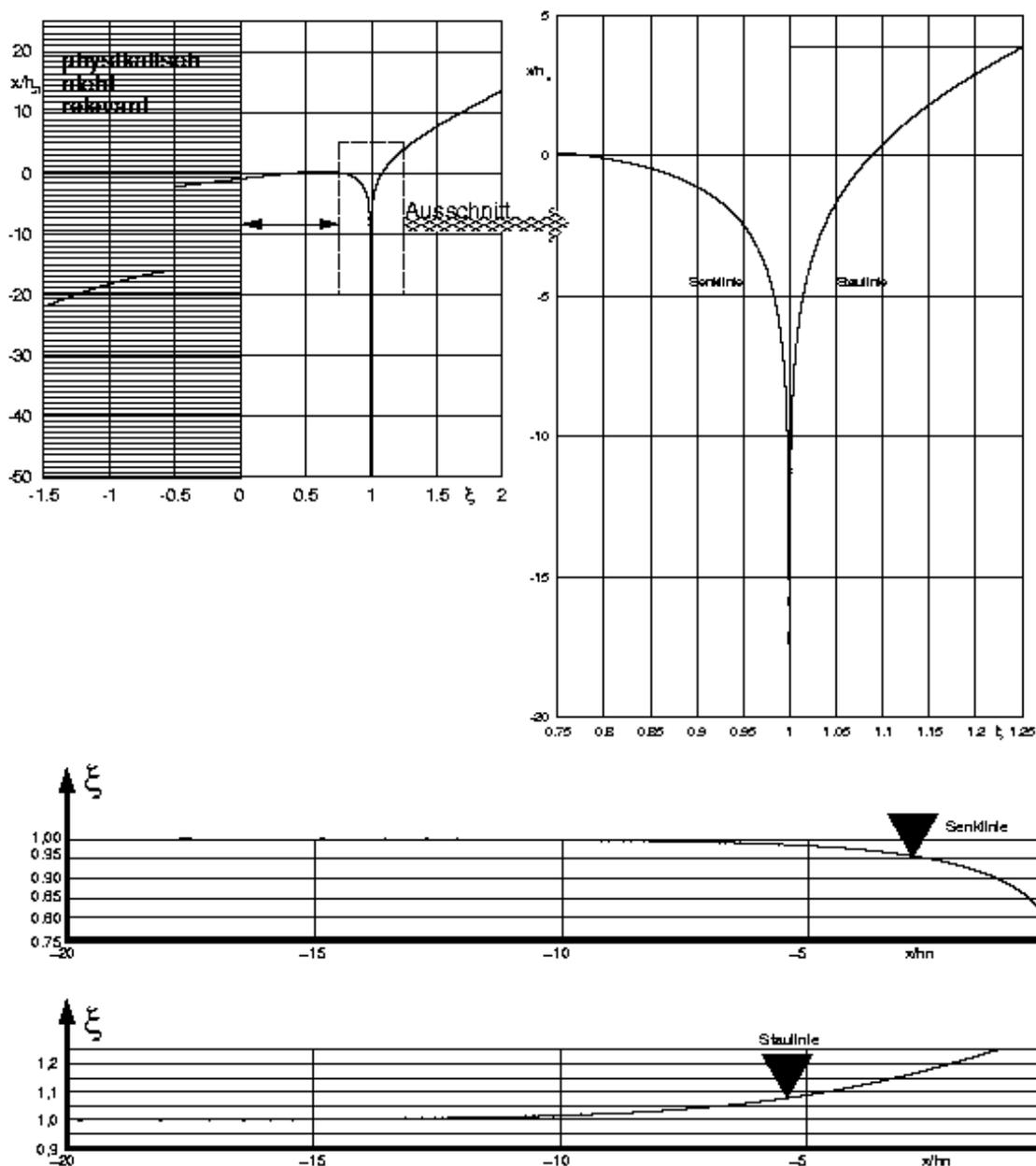


Abbildung 17: Grafiken zur Lösung der Spiegellinie (31) nach Bresse. *Oben*: Grafik zur impliziten Darstellung der Lösung (32) als Funktion $(h/h_n)(\xi)$ bei $I_n = 1$ und $\xi_g = 3/4$ in großem (*links*) und kleinem (*rechts*) Maßstab. Der Doppelpfeil in der Grafik oben links begrenzt das Intervall $[0; 3/4]$. Die hier nicht dargestellte Umkehrfunktion auf diesem Intervall gibt das (hypothetische) Überschussprofil bei schießendem Auslauf mit der Grenztiefe h_g . *Mitte* und *unten*: Die Umkehrfunktionen zu $(h/h_n)(\xi)$ auf den Intervallen $]3/4; 1[$ und $]1; \infty[$ ergeben die Senkungslinie (*mitte*) bzw. die Staulinie (*unten*).

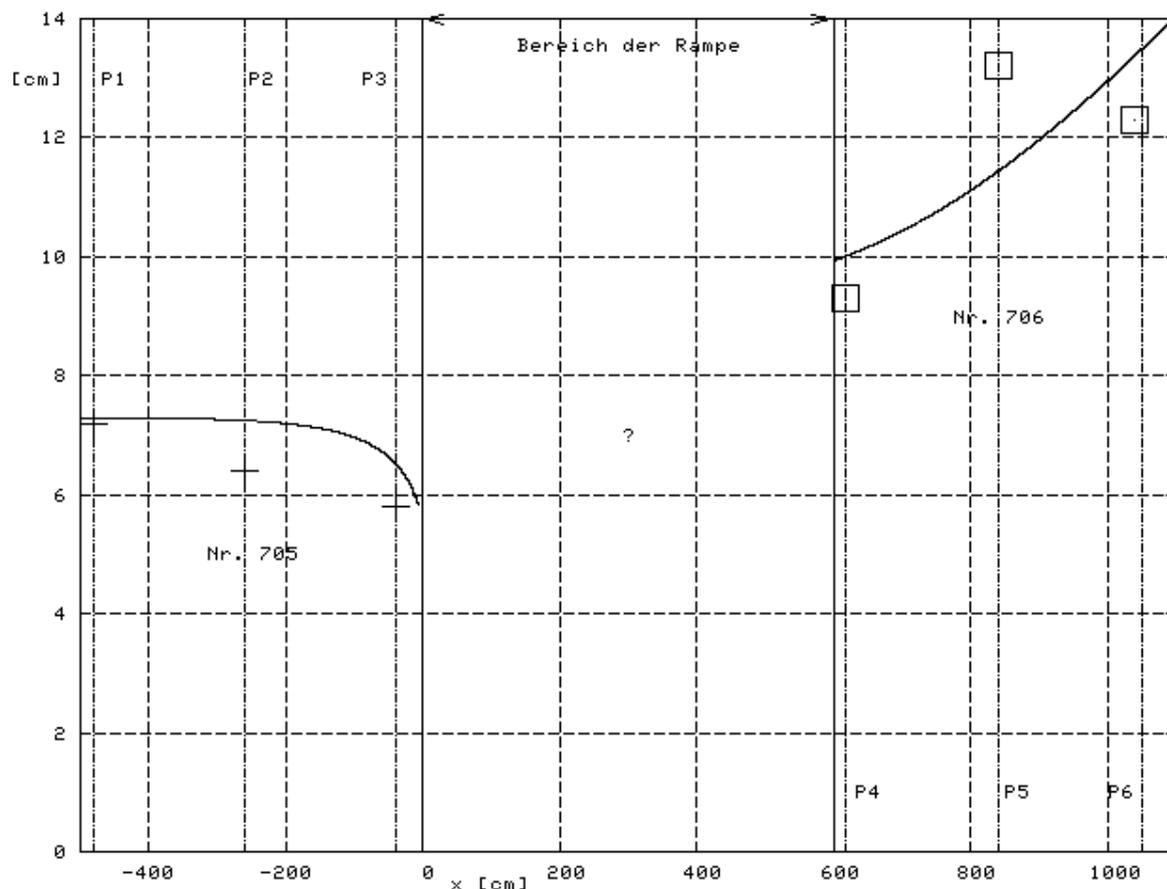


Abbildung 18: Bresse-Kurven im Vergleich zu den an der rauhen Rampe in den Versuchen Nr. 705 und Nr. 706 gemessenen Wasserständen. *unten links*: Senkungslinie zu Versuch Nr. 705, *oben rechts*: Staulinie zu Versuch Nr. 706.

Ein Vergleich der Kurven mit jeweils nur drei Messpunkten sagt selbst dann kaum etwas, wenn sich Kurven und Punkte gut decken. Doch wird hier durch recht krasse Abweichungen hier ein deutliches Beispiel für die eher theoretische Bedeutung der Bresse-Kurve gegeben. Die deutlich flacher verlaufende Senkungslinie im Fall einer bewegten Sohle nach Abb. 36 würde auch hier besser passen. Überraschenderweise zeigen auch die u. a. in Abb. 14 oben dargestellte, zu diesen Versuchen numerisch berechneten Spiegellinien diese Abweichungen. Nicht erklären lässt sich das durch den als konstant genommenen Widerstandsbeiwert λ . Mit fallendem Wasserstand müsste λ wachsen. So wäre nur zu erklären, dass gemessene Werte h höher lägen als berechnete. Typisch für viele Versuche sind die im Vergleich zu den berechneten Spiegellinien an P2 gemessenen deutlich tieferen Werte.

3 Das stationäre Transportgleichgewicht

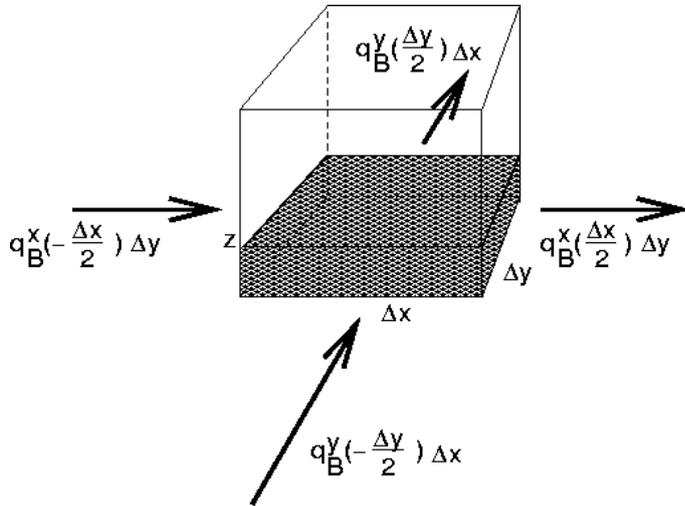


Abbildung 19: Kontinuitätsbedingung für den zweidimensionalen Geschiebetransport .

Damit das transportierte Gesamtvolumen erhalten bleibt, gilt die Volumenbilanz

$$\left[q_B^x \left(\frac{\Delta x}{2} \right) - q_B^x \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta y + \left[q_B^y \left(\frac{\Delta y}{2} \right) - q_B^y \left(-\frac{\Delta y}{2} \right) \right] \Delta x = \Delta x \Delta y \frac{\partial z}{\partial t}$$

Nach Division dieser Gleichung durch den Grundflächeninhalt $\Delta x \Delta y$ folgt

$$\frac{q_B(\Delta x/2) - q_B(-\Delta x/2)}{\Delta x} + \frac{q_B(\Delta y/2) - q_B(-\Delta y/2)}{\Delta y} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \text{ Durch Grenzübergang}$$

in Δx und Δy folgt die allgemeine Kontinuitätsgleichung (33).

3.1 Kontinuität des Geschiebetransports

Seien m_G die durch einen fest vorgegebenen Sohlenquerschnitt im Ort x der Sohlenbreite b transportierte Masse an Geschiebe pro Zeiteinheit und q_B das transportierte Geschiebevolumen pro Zeit- und Sohlenbreiteneinheit (Geschiebetrieb), so ergibt sich $m_G = b \rho_p q_B$. Dabei bezeichnet ρ_p die Schüttdichte des Geschiebes. Für die Kontinuität des Geschiebetransports soll hier von einer konstanten Schüttdichte ausgegangen werden. So wird stellvertretend für die Massenerhaltung mit einer Volumenerhaltung gerechnet. Gerechtfertigt ist das insoweit, als sich im hydromechanischen Experiment aufgelandete mineralische Sedimente inkompressibel verhalten.

In einem zweidimensionalen Modell der Sohle wird Geschiebe so mit einem Volumen q_B^x pro Zeit- und Sohlenbreiteneinheit in Fließrichtung und mit einem Volumen q_B^y pro Zeit- und Längeneinheit quer zur Fließrichtung transportiert. Die Transportrate wird in einem solchen Modell zur der vektoriellen Größe \vec{q}_B . Bezeichnet z die Höhe der Sohle, ergibt sich aus der Erhaltung des Volumens

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial t} + \mathbf{div} \vec{q}_B = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q_B^x}{\partial x} + \frac{\partial q_B^y}{\partial y} = 0} \quad . \quad (33)$$

analog zur Kontinuitätsgleichung der instationären Hydraulik. Erläutert wird diese Gleichung anhand der Abb. 19. Betrachtet wird ein Quader mit der Länge Δx , der Breite Δy und der Höhe z . $q_B^x \Delta y$ und $q_B^y \Delta x$ sind das jeweils in Fließ- bzw. in Querrichtung Zu- oder abfließende Sedimentvolumen. Das im Quader abgetragene oder aufgelandete Sedimentvolumen $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$ muss der Summe der Differenzen der Ein- und Austräge entsprechen.

Der Nullpunkt der z -Achse im x -, y -, z -Koordinatensystem lässt sich willkürlich festlegen, ohne dass hierdurch die hydromechanischen Vorgänge beeinflusst werden. Daher darf \vec{q}_B nicht von z selbst abhängen. Mit anderen Worten, es gilt

$$\frac{\partial q_B^x}{\partial z} = 0 = \frac{\partial q_B^y}{\partial z} \quad . \quad (34)$$

Welcher Klasse partieller Differentialgleichungen (33) angehört, lässt sich nur entscheiden, wenn bekannt ist, wie q_B^x und q_B^y von den jeweiligen Richtungsgefällen $I_x = -\frac{\partial z}{\partial x}$ und $I_y = -\frac{\partial z}{\partial y}$ der Sohle abhängen. Werden Funktionen $q_B^x(I_x, I_y)$ und $q_B^y(I_x, I_y)$ gegeben, dann ergibt sich aus (33) eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in z , die sich entsprechend klassifizieren lässt. Der Geschiebetransport ist mit hydraulischen Gesetzmäßigkeiten gekoppelt. So zeigt sich eine Abhängigkeit des Transports vom Gefälle in Transportformeln nicht nur explizit, sondern auch indirekt über die in solche Formeln einfließenden hydraulischen Größen, wie der Wasserstand oder die Fließgeschwindigkeit. Im Abschnitt 7 wird in einer Ortsdimension der Fall diskutiert, dass q_B^x auch von der zweiten Ableitung $\frac{d^2 z}{dx^2}$ der Sohlhöhe z abhängt.

3.2 Symmetriegesetze des Geschiebetransports in zwei Dimensionen, Ansätze zur Klassifikation der Kontinuitätsbedingung (33) und Folgerungen daraus

Den Mechanismen des Sedimenttransports wird nicht gerecht zu fordern, dass q_B^x nur von I_x , nicht aber von I_y und q_B^y nur von I_y , nicht aber von I_x abhängt. Zum einen fördert die Mobilisation der Sedimentkörner in einer Richtung auch deren Beweglichkeit in der zu dieser senkrechten Richtung; zum anderen muss bei schubspannungsbestimmtem Transport eine im Abschnitt 6.2 erläuterte effektive Schubspannung berücksichtigt werden. Für diese effektive Schubspannung wirkt sich ein zu dem die Schubspannung erzeugenden Gefälle der (lokalen!) Fließrichtung senkrecht Gefälle mindernd aus.

Sinnvoll ist hingegen zu fordern, dass es eine — zunächst im klassischen Sinn differenzierbar anzunehmende — Funktion $G_{q_B} = G_{q_B}(I_1, I_2)$ gibt, so dass

$$q_B^x = G_{q_B}(I_x, I_y) \quad \text{und} \quad q_B^y = G_{q_B}(I_y, I_x) \quad (35)$$

gilt. Weiter muss G_{q_B} die Eigenschaft

$$G_{q_B}(-I_1, I_2) = -G_{q_B}(I_1, I_2) \quad (36)$$

besitzen, damit die Gleichungen $q_B^x(I_x, I_y) = -q_B^x(-I_x, I_y)$ und $q_B^y(I_x, I_y) = -q_B^y(I_x, -I_y)$ einer Punktsymmetrie erfüllt werden (Abb. 20 links). G_{q_B} darf im zweiten Argument nur vom Absolutbetrag abhängen, da sich ein zur Transportrichtung senkrecht Gefälle nur richtungsunabhängig auswirken darf (Abb. 20 rechts).

Mit diesen Eigenschaften lässt sich G_{q_B} in ein Produkt $G_{q_B}(I_1, I_2) = \bar{G}_{q_B}(I_1) G_{q_B}^\perp(I_2)$ aus zwei Funktionen \bar{G}_{q_B} und $G_{q_B}^\perp$ in je einem Argument zerlegen. $G_{q_B}^\perp$ ist nur vom Betrag seines Arguments abhängig und darf nur positive Werte annehmen. Eindeutig wird die Produktzerlegung, wenn zusätzlich gefordert wird, dass $G_{q_B}^\perp = 1$ gilt. Offensichtlich gilt $\bar{G}_{q_B}(0) = 0$; und \bar{G}_{q_B} ist isoton.

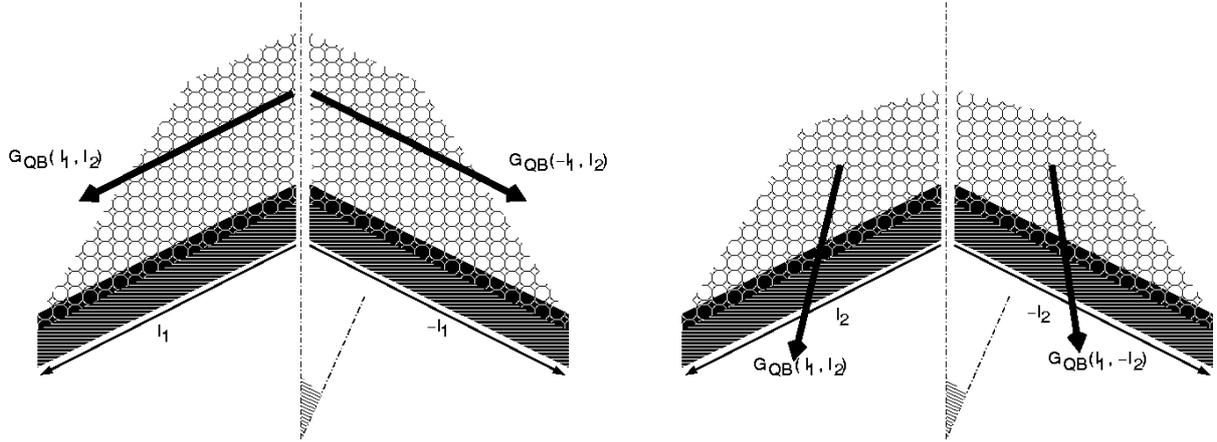


Abbildung 20: Symmetrieeigenschaften der Funktion $G_{q_B}(I_1, I_2)$. *Rechts*: Der Transport in der dem Gefälle I_1 gemeinsamen Richtung muss im Vorzeichen dem Gefälle entsprechen. *Links*: Der Transport in der zum Gefälle I_2 senkrechten Richtung darf sich durch Vorzeichenumkehr des Gefälles I_2 nicht ändern.

Um (33) über (262) im allgemeinen zu klassifizieren, werden die Koeffizientenfunktionen

$$\left. \begin{aligned} A \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= G_{q_B}^\perp \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{d\bar{G}_{q_B}}{dI} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ B \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \bar{G}_{q_B} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \frac{dG_{q_B}^\perp}{dI} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \bar{G}_{q_B} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{dG_{q_B}^\perp}{dI} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ \Gamma \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= G_{q_B}^\perp \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \frac{d\bar{G}_{q_B}}{dI} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (37)$$

eingeführt. Im Anhang A.3 wird nachgerechnet, dass sich mit (262) aus (33) ergibt

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -A \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \Gamma \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (38)$$

Grundsätzlich liegt in (38) somit, bezogen auf die zweiten Ableitungen, eine parabolische Gleichung vor. Da A , B und Γ Funktionen in den ersten Ortsableitungen von z sind, kann jedoch auch eine partielle Differentialgleichung nur erster Ordnung betrachtet werden unter der Nebenbedingung, dass deren Lösungen z in den zweiten Ortsableitungen konstant sind.

Eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung liegt mit (262) bzw. (38) nur in folgenden Fällen vor:

- a) $\bar{G}_{q_B}(I)$ ist konstant und $G_{q_B}^\perp$ ist linear in I oder
- b) $G_{q_B}^\perp(I)$ ist konstant und \bar{G}_{q_B} ist linear in I .

Der Fall a) scheidet hier aus, denn $\bar{G}_{q_B}(I)$ müsste wegen $\bar{G}_{q_B}(0) = 0$ konstant verschwinden, während $G_{q_B}^\perp$ niemals in I linear sein kann. So bleibt nur der Fall b). Falls (262), und dann und nur dann auch (33), linear ist, gibt es also ein $\gamma_{q_B} > 0$ mit $\bar{G}_{q_B}(I) = \gamma_{q_B} I$; und es ist $\bar{G}_{q_B} = 1 = \text{const.}$ Wird in (262) eingesetzt, folgt

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\gamma_{q_B} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \gamma_{q_B} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\gamma_{q_B} \Delta z. \quad (39)$$

Man erhält also folgenden Grundsatz:

Wird durch die Kontinuitätsgleichung (33) eine lineare partielle Differentialgleichung gegeben, so ist dies die parabolische Wärmeleitungsgleichung in ihrer Grundform.

Über ihre Lösungen ist bekannt, dass sich abhängig von der Anfangsbedingung und den Randbedingungen ein asymptotischer Zustand einstellt, in dem jede Oszillation verschwindet. Nun widerspricht zum einen die Annahme, dass $\bar{G}_{q_B} = \text{const}$ gelte, der zu Beginn dieses Teilabschnittes erwähnten Tatsache, dass sich auch das zur betrachteten Transportrichtung senkrechte Gefälle auf den Transport auswirkt; zum anderen zeigen sich in mäandrierenden Flüssen asymptotische Gleichgewichtszustände, in denen oszillatorische Vorgänge erhalten bleiben. So folgt im Umkehrschluss:

- Durch die Kontinuitätsgleichung (33) wird der Geschiebetransport nur bei Vorliegen als nichtlinearer partieller Differentialgleichung naturgetreu wiedergegeben.
- Eine mathematische Modellierung des zweidimensionalen Geschiebetransports ist erst möglich, wenn eine zwei- oder dreidimensionale Mechanik für diesen Transport bekannt ist, aus der sich eine Gesetzmäßigkeit gewinnen lässt, wie der Transport in einer Richtung durch das zu dieser Richtung senkrechte Gefälle beeinflusst wird.

3.3 Stationaritat des Geschiebetransports in zwei Raumdimensionen

Einem Trugschluss unterliegt bei der zweidimensionalen Betrachtung die Annahme, dass bei einem stationären Transportgleichgewicht $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ an jedem Ort (x, y) gelten müsse.

Mandrierende Flüsse zeigen, dass diese Aussage nur im Mittel über das Querprofil an jedem Querschnitt am Ort x bei einer Gerinnebreite $b = b(x)$ gilt (Abb. 3.3). So folgt

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial z}{\partial t} dy = \frac{d}{dt} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z(x, y, t) dy = 0. \quad (40)$$

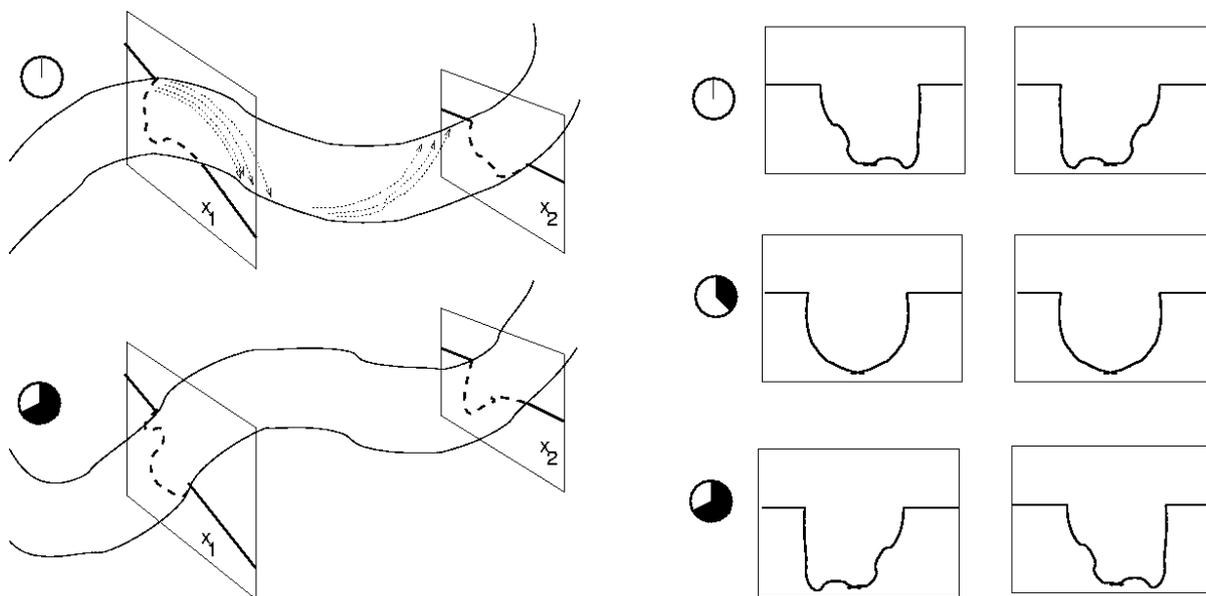


Abbildung 21: Stationärer Transport in zwei Raumdimensionen, hier am Beispiel eines mäandrierenden Flusses (schematisch): In Mäander-Flussbetten werden die Auenufer erodiert; an Innenufern findet Aufandung statt. So verschiebt sich der Mäander mit der Zeit. Betrachtet werden zwei fest gewählte Querschnitte an den Orten x_1 und x_2 (*links*). Als Funktion der Zeit ergibt sich ein periodisch veränderliches Sohlenquerprofil (*rechts*). Das Mittel der Sohlhöhe bleibt jedoch konstant. So folgt (40).

Dem Umstand, dass der Sohle bei stationärem Transportgleichgewicht quer zur Fließrichtung Geschiebe weder am Einlauf mit Ort x_0 zu- noch am Auslauf mit Ort x_e abgeführt wird, lässt sich eine weitere Integralbedingung abgewinnen mit

$$\int_{z_0}^{x_e} q_B^y dx = 0. \quad (41)$$

Hieraus ergeben sich insbesondere

$$\int_{x_0}^{x_e} \frac{\partial q_B^y}{\partial x} dx = 0 \quad (42)$$

$$\int_{x_0}^{x_e} \frac{\partial q_B^y}{\partial y} dx = 0. \quad (43)$$

Analytisch gelangt man jedoch erst weiter, indem man z. B. fordert, dass sich die Sohlform, also die Sohlhöhe z mit der Zeit t periodisch ändert, wie bei mäandrierenden Flüssen oder alternierenden Kolken und Bänken. Dann lässt sich auch in zwei Raumdimensionen die Kontinuitätsgleichung mit der Wellengleichung koppeln, wie es zur Beschreibung periodischer Transportkörper in einer Raumdimension in Abschnitt 7 beschrieben wird.

Analog zu (143) erhält man für periodische Sohlformen in zwei Raumdimensionen

$$\boxed{u_{Tx} I_x + u_{Ty} I_y = \frac{\partial q_B^x}{\partial x} + \frac{\partial q_B^y}{\partial y}} \quad (44)$$

mit im allgemeinen jeweils verschiedenen Wanderungsgeschwindigkeiten der Sohlformation u_{Tx} in x - sowie u_{Ty} in y -Richtung. Als eine (auch im Fall nicht differenzierbarer q_B gültige) Integraldarstellung zu (44) ergibt sich für eine Sohle der Breite b zwischen den Querschnitten in x_0 und x

$$u_{Tx} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z(x, y) dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q_B^x(x, y) dy = C \cdot x - \int_{x_0}^x q_B^y(x', y) dx' - u_{Ty} \int_{x_0}^x z(x', y) dx' \quad (45)$$

mit einer von x_0 abhängigen Konstante C .

3.4 Stationarität des Geschiebetransports in einer Raumdimension

Um ein stationäres Transportgleichgewicht an einer nicht mehr zeitlich in ihrer Höhe veränderlichen Sohle zu erkennen, muss mit einem eindimensionalen Modell gerechnet werden. Dann wird bei Transport in einem Volumen $q_B = q_B^x$ pro Zeit- und Sohlenbreiteinheit ausschließlich in Fließrichtung die Volumenerhaltung nur noch als Mittel über den Querschnitt gefordert. So folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(bz) = -\frac{\partial}{\partial x}(bq_B) \quad (46)$$

([58] 10.2.1 Gl. (10.2-1), S. 348, [14] (1), S. 167; dort wird $bq_B = v$ noch mit der Geschwindigkeit des über der Sohle fließenden Wassers gleichgesetzt; aufgrund tieferer Einsicht in die Transportmechanismen wird heute bei der Formulierung der ‘Exner-Gleichung’ hiervon abgesehen!)

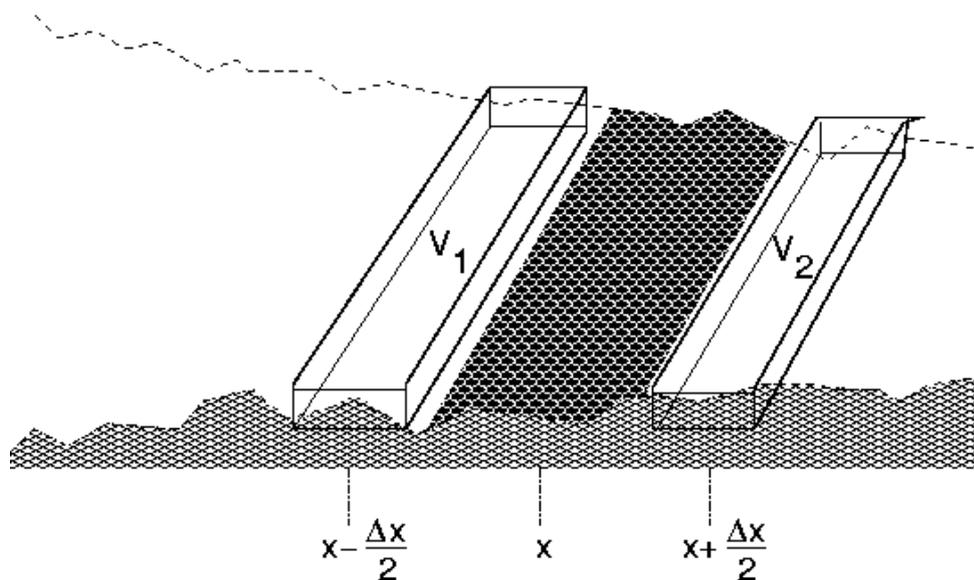


Abbildung 22: Erhaltung des Transportvolumens nach (46). Pro Zeiteinheit Δt werden am Ort $x - \frac{\Delta x}{2}$ das Volumen V_1 und am Ort $x + \frac{\Delta x}{2}$ das Volumen V_2 transportiert. Die Differenz $V_2 - V_1$ ergibt das in diesem Zeitraum zwischen den Querschnitten aufgeladete bzw. erodierte Volumen, nach Division durch die Grundfläche $b\Delta x$ die Auflandungshöhe bzw. Erosionstiefe Δz (schraffiert).

Ein stationäres Transportgleichgewicht oder befestigte Ufer geben die Voraussetzung dafür, dass $\partial b/\partial t = 0$ gilt. Aus

$$b \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(bq_B) = -q_B \frac{db}{dx} - b \frac{\partial q_B}{\partial x}$$

folgt dann durch Division beider Seiten durch $b \neq 0$ als Kontinuitätsbedingung für den nicht die Sohlenbreite b beeinflussenden Geschiebetransport

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{q_B}{b} \frac{db}{dx} - \frac{\partial q_B}{\partial x}. \quad (47)$$

Für ein stationäres Transportgleichgewicht in einer Dimension ist notwendig $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$; und so folgen

$$\frac{dq_B}{dx} + \frac{q_B}{b} \frac{db}{dx} = 0 \quad (48)$$

$$\iff \frac{1}{q_B} \frac{dq_B}{dx} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} \quad (49)$$

$$\iff \frac{d}{dx} \log q_B = \frac{d}{dx} \log \frac{1}{b} \quad (50)$$

$$\iff \log q_B = \text{const} + \log \frac{1}{b}$$

$$\iff bq_B = \text{const} =: \mathbf{v}_0. \quad (51)$$

Die im Gleichgewicht konstante Größe \mathbf{v}_0 trägt die Dimension $\frac{\text{Volumen}}{\text{Zeit}}$.

Eindimensionale Transportmodelle erlauben den Ansatz zu

$$q_B = \Phi \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}. \quad (52)$$

Unter der Voraussetzung, dass sich der Transport in stationärem Gleichgewicht befindet, können die relative Dichte ϱ' der Sedimente und der mittlere Korndurchmesser d_m als konstant angesehen werden.

3.5 Bemerkungen zur Klassifikation der Geschiebetransportgesetze nach transportbestimmenden Größen

Die seit Boys (1876) aufgestellten, sehr zahlreichen Transportgesetze für Geschiebe lassen sich teils nach dem Ansatz ihrer Herleitung klassifizieren. (Zu Übersichten [50] Kap. 2, [63] 3.3-3.7, S. 38-53) Viele Transportgesetze sind jedoch empirisch gewonnen worden, indem ältere Formeln nach neueren Versuchen abgeändert worden sind. So lassen sich Transportgesetze teils auch nach ‘Verwandtschaft’ im äußeren Erscheinungsbild ordnen. (Übersicht nach diesem Kriterium in [16], Teil 3, Kap. 7)

Relevant für ein Transportgleichgewicht ist weniger die absolute Frachtrate. Diese reagiert empfindlich auf sedimentologische Parameter wie die Korngröße. Deshalb unterscheiden sich Formeln einer Klasse oft nur in Termen für diese Parameter. Auf sie wird in dieser Arbeit nicht eingegangen. Entscheidend für das Transportgleichgewicht werden sich jedoch folgende den Transport bestimmenden hydromechanischen Größen aus der Hydraulik erweisen:

- Die Schubspannung τ des Wasserkörpers über der Sohle $\tau = \rho_W g h I$. Hierbei handelt es sich um eine intensive Größe.
- Die Fließgeschwindigkeit v des Wasserkörpers ist extensive Größe. Sie wird in dem eindimensionalen Modell nur tiefengemittelt betrachtet.
- Die Schubleistung $\Pi = \tau v$ pro Querschnittsflächeneinheit ([51] 7.3.1 (7.13) S. 173) trägt die Dimension $\frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$. Die Leistung ergibt sich stets als Produkt einer intensiven mal zugeordnete extensive Flussgröße.

Nach der transportbestimmenden Größe eindeutig klassifizieren lassen sich solche Formeln, in denen diese aus ihrem Ansatz hervorgeht. So wird der Transport nach Boys ([3], siehe auch nähere Erläuterung hier in 7.6), Laursen, Ranga Raju et al. Zanke und Rijn ([50], 2.4 S. 30-33, [58], 5.3.2 S. 211 ff) durch die Schubspannung, nach Bagnold ([16], 9.2.3, S. 208-211, insbesondere (9.10)-(9.13) S. 209-210, [51], 7.1 S. 160) durch die Schubleistung und nach Stelczer ([48], Kap. 5, stochastischer Ansatz) durch die Fließgeschwindigkeit bestimmt.

Schwieriger lassen sich empirisch ermittelte Formeln klassifizieren. Im allgemeinen werden diese nicht in τ , v und Π angegeben, sondern neben den sedimentologischen Parametern in den messtechnisch direkt zugänglichen Größen h , I und ggf. noch v . Experimentell ermittelt bzw. validiert worden sind solche Formeln überwiegend bei Normalabfluss. Das gibt aus experimenteller Sicht den Vorteil, aber aus theoretischer Sicht den Nachteil, dass durch die hydraulischen Fließgesetze für den Normalabfluss ortsunabhängig ein und derselbe Zusammenhang zwischen τ , v und Π gegeben ist. So lässt sich schlecht sagen, welche der drei Größen die transportbestimmende ist.

Transportformeln, in denen h und I nur als Produkt hI (über die Feststoff-Froude-Zahl F_r^*) v aber überhaupt nicht auftreten, sind schubspannungsbestimmt. Dazu gehören u. a. die Formeln von Meyer-Peter, Pernecker & Vollmers mit kritischer Schwelle sowie die Formel von Engelund & Hansen. Man mag sich allerdings fragen, ob das der Formel von Engelund & Hansen zugrunde liegende Schubleistungsmodell ([50] 2.3.3 S. 28) bei stationär-ungleichförmigem Abfluss noch gerechtfertigt ist. Nur bei Normalabfluss gilt:

quadratisches Fließgesetz	Manning- Strickler
$v^2 \sim F_r^*$	$v^2 \sim F_r^* h^{1/6}$
$\Pi \sim F_r^{*3/2}$	$\Pi \sim F_r^{*3/2} h^{1/6}$

So entspricht die Darstellung $\Phi = F_r^{*3/2} G^*$ der dimensionslosen Transportintensität Φ nach DIN nur bei Normalabfluss einem Produkt der Schubleistung mit einer Frachtzahl.

Einige Transportformeln, z. B. die Formel von Jäggi & Smart (1983) enthalten als Funktion in F_r^* nochmals explizit das Gefälle I , im allgemeinen nur in niedriger Potenz, ([63] 3.3.3 Gleichung (47) S. 42, dort $I = J$ und $F_r^* = \theta'$) um das Eigengewicht des Geschiebes zu berücksichtigen. Solche Formeln gelten näherungsweise noch als schubspannungsbestimmt, obwohl bezüglich der im nächsten Abschnitt entwickelten Gleichungen, abhängig von den sedimentologischen Parametern, Korrekturen notwendig wären.

3.6 Kontinuität des Schubspannungs-Geschiebetransports

Für Gerinne konstanter Breite, also $\frac{db}{dx} = 0$, ist demnach $\Phi = \text{const}$ notwendig für ein stationäres Transportgleichgewicht. Falls $\Phi = \Phi(F_r^*)$ nur über die Feststoff-Froude-Zahl

$$F_r^* = \frac{hI}{\varrho' d_m} \quad (53)$$

(mit dem maßgebenden Korndurchmesser d_m des Geschiebes und dessen relativer Dichte ϱ' gegenüber dem Wasser) vom Wasserstand h und dem Gefälle I abhängt, ist hierzu offensichtlich

$$\boxed{hI = \text{const} =: s_0 \iff I(h) = \frac{s_0}{h}} \quad (54)$$

äquivalent ([37] 8.2.4, 8.3 S. 235, hier jedoch nur die Frage des Baus stabiler Gerinne). Obiger Definition der Feststoff-Froude-Zahl liegt der Begriff einer Sohlenschubspannungsgeschwindigkeit zugrunde ([58] 3. (3-5) S. 122), aus der sich (53) über

$$F_r^* = \frac{\tau}{\varrho' g d_m} \quad (55)$$

nur für den Fall von Normalabfluss aus (14) ergibt. Bei stationär-ungleichförmigem Abfluss im Rechteckgerinne konstanter Breite ergibt sich aus (15) nach Smerdon und Beasley, Wittmann und Vollmers

$$F_r^* = \frac{h \left(I - \frac{dh}{dx} \right) + \frac{v^2}{g} \frac{dh}{dx}}{\varrho' d_m}. \quad (56)$$

Da wegen (55) die Feststoff-Froude-Zahl konstant ist, genau dann, wenn auch die Schubspannung τ selbst konstant ist, rechnet sich im nächsten Abschnitt bei stationär-ungleichförmigem Abfluss leichter mit der Integraldarstellung (17). Aus (19) folgt jedoch sofort, dass nach dem Schubspannungsmodell von Smerdon und Beasley ein stationäres Transportgleichgewicht im Rechteckgerinne konstanter Breite nur möglich ist, wenn

$$\boxed{\lambda v^2 = \text{const}} \quad (57)$$

gilt. Diese Bedingung erfüllt bei konstanter Rauheit λ nur der Normalabfluss.

Die allgemeine Kontinuitätsbedingung (51) lässt sich für Feststoff-Froude-Zahlabhängige Φ über die Zerlegung $\Phi = F_r^{*3/2} G^*$ weiter vereinfachen. ([58] (3-7), S. 112) So ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_0 & \stackrel{(51)}{=} b q_B \\
 & = b \Phi \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \\
 & = b F_r^{*3/2} G^* \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \\
 & \stackrel{(55)}{=} b \left(\frac{\tau}{\varrho \varrho' \mathbf{g} d_m} \right)^{3/2} G^* \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \\
 & = \frac{b}{\varrho' \mathbf{g}} \left(\frac{\tau}{\varrho} \right)^{3/2} G^* \\
 & = \frac{b \tau}{\sqrt{\varrho' \mathbf{g}}} \sqrt{F_r^*} G^*
 \end{aligned}$$

aus (51) mit $\mathbf{v}_0 = \text{const}$

$$\boxed{b \tau = \frac{\mathbf{v}_0}{G^*} \sqrt{\frac{\varrho' \mathbf{g}}{F_r^*}}} \quad (58)$$

Diese Gleichung wird im Teilabschnitt 4.2 wieder aufgegriffen. Zunächst werden allerdings im Teilabschnitt 4.1 des nächsten Hauptabschnittes Gerinne konstanter Breite untersucht, für die (54) gilt. Nahe liegt der Gedanke, die dort gewonnenen Lösungen durch Korrekturterme dem allgemeinen Fall anzupassen.

3.7 Kontinuität des Geschiebetransports für fließgeschwindigkeitsabhängige Transportgesetze

Manche Autoren sehen anstelle der Schubspannung ‘Stoß’kräfte des sich auch an der Sohle bewegenden Wassers als transportauslösend an. ([48], 4.1.4, S. 82 ff. Gegenüberstellung der ‘impact theory’ in 4.1.4.1, S. 82 ff und des Schubspannungsprinzips, hier ‘frictional drag theory’ in 4.1.4.2, S. 128 ff, unter deutlicher Kritik an letzterem!) Um solche Transportmodelle mit tiefengemittelten hydraulischen Modellen zu koppeln, muss von einer Proportionalität zwischen der Fließgeschwindigkeit des Wassers an der Sohle in jedem Fließquerschnitt proportional und der über den Querschnitt gemittelten Fließgeschwindigkeit v ausgegangen werden.

Offensichtlich wird in Gerinnen konstanter Breite ein stationäres Transportgleichgewicht bei solchen Transportmodellen ebenfalls nur bei Normalabfluss möglich; denn v verhält sich reziprok zu h . Zeigen q_B bzw. Φ eine Abhängigkeit von v^2 , ‘versteckt’ sich letztendlich auch hier die Schubspannung nach dem Modell von Smerdon und Beasley, Wittmers und Vollmers.

$$\begin{aligned}
 \text{Aus (49) folgt} \quad & \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{d(v^2)}{dx} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\mathbf{g}}{\Phi} \frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{d(hF_r^2)}{dx} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\mathbf{g}}{\Phi} \left(h \frac{d(F_r^2)}{dx} + F_r^2 \frac{dh}{dx} \right) \frac{d\Phi}{d(v^2)} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\mathbf{g}}{\Phi} \left\{ \frac{b_0}{b} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{dh}{dx} + h \frac{d}{dx} \left[\frac{b_0}{b} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \right] \right\} \frac{d\Phi}{d(v^2)} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\mathbf{g}}{\Phi} \left[\frac{b_0}{b} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{dh}{dx} - \frac{b_0 h_g^3}{b h^2} \left(\frac{3}{h} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \right) \right] \frac{d\Phi}{d(v^2)} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} \\
 \Leftrightarrow & -\frac{\mathbf{g} b_0}{\Phi b} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \left(2 \frac{dh}{dx} + \frac{h}{b} \frac{db}{dx} \right) \frac{d\Phi}{d(v^2)} = -\frac{1}{b} \frac{db}{dx} \\
 \Leftrightarrow & 2 \frac{\mathbf{g} b_0}{\Phi} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{dh}{dx} = \frac{db}{dx} \left(1 - \frac{\mathbf{g} b_0 h_g^3}{b h^2 \Phi} \frac{d\Phi}{d(v^2)} \right) \\
 \Leftrightarrow & \frac{\Phi}{2 \mathbf{g} b_0} \left(\frac{h}{h_g} \right)^3 \left(\frac{d\Phi}{d(v^2)} \right)^{-1} - \frac{h}{b} = \frac{dh}{db}
 \end{aligned} \tag{59}$$

Auch in breiten Rechteckgerinnen lässt sich der Term $\frac{h}{b}$ nicht vernachlässigen. Generell muss $\frac{dh}{db} < 0$ und $\frac{dh}{db} \nearrow 0$ für $h \searrow h_g$ gelten. Aus $h(b_0) = h_g$ folgt insbesondere

$$0 = \frac{\Phi}{2\mathbf{g}b_0} \left(\frac{d\Phi}{d(v^2)} \right)^{-1} - \frac{h_g}{b_0} \quad (60)$$

$$\iff h_g \mathbf{g} \frac{d\Phi}{d(v^2)} = \frac{\Phi}{2}.$$

Demnach erlauben nur Transportgesetze $\Phi = \Phi(v^2)$ ein stationäres Gleichgewicht, für die an Querschnitten mit kritischer Abflusstiefe gilt

$$\boxed{\frac{d\Phi}{d(v^2)} \searrow 0 \quad \text{für} \quad \Phi \searrow 0.} \quad (61)$$

Hierzu muss sich Φ superlinear in v^2 verhalten, z. B. $\Phi \sim v^{2+\alpha}$ für ein $\alpha > 0$.

Da $\frac{dh}{db}$ allgemein negativ zu sein hat, folgt

$$\left. \begin{aligned} 0 &> \frac{\Phi}{2\mathbf{g}b_0} \left(\frac{h}{h_g} \right)^3 \left(\frac{d\Phi}{d(v^2)} \right)^{-1} - \frac{h}{b} \\ \iff \mathbf{g}h \frac{d\Phi}{d(v^2)} &> \frac{\Phi}{2} \left(\frac{h}{h_g} \right)^3 \frac{b}{b_0} \\ \iff \frac{v^2}{F_r^2} \frac{d\Phi}{d(v^2)} &> \frac{\Phi}{2F_r^2} \\ \iff \frac{d\Phi}{d(v^2)} &> \frac{\Phi}{2v^2} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich über die Lösung

$$\Phi(v^2) = \sqrt{\left(\frac{v}{v_0} \right)^2} = \frac{v}{v_0}, \quad v_0 \text{ hier unbestimmte Konstante,} \quad (63)$$

zu der Differentialgleichung $\frac{d\Phi}{d(v^2)} = \frac{\Phi}{2v^2}$, dass Φ superlinear in v zu sein hat, um ein stationäres Transportgleichgewicht zu ermöglichen.

4 Kopplung der Hydraulik mit Transport

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \text{Hydraulische Kontinuität}$$

$$h \frac{\partial v_x}{\partial t} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + hv_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + hv_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = (I - I_F)_x \quad \text{Impulsgleichungen}$$

$$h \frac{\partial v_y}{\partial t} + gh \frac{\partial h}{\partial y} + hv_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + hv_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = (I - I_F)_y$$

$$q_B = q_B(I, h, v) \quad \text{Transportrate}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\text{div } q_B \quad \text{Transport-Kontinuität}$$

Abbildung 23: Schema einer Kopplung der Flachwassergleichungen (6) mit der Kontinuitätsgleichung für den (33) Geschiebetransport. Im allgemeinen hängen die Frachtraten q_B^x und q_B^y neben sedimentologischen Parametern vom Wasserstand h , von den Richtungsfällen I_x und I_y und den Fließgeschwindigkeiten v_x und v_y ab. Eine Abhängigkeit der Frachtrate vom Gefälle sorgt im allgemeinen für eine ‘intrinsische Rückkopplung’ in der Kontinuitätsgleichung, die, wie bereits gezeigt worden ist, im linearen Fall zu einer parabolischen Gleichung führt.

Abb. 23 zeigt schematisch die Kopplung der Hydraulik mit dem Geschiebetransport in zwei Raumdimensionen. Prinzipiell werden die Flachwassergleichungen (6) mit der Kontinuitätsgleichung (33) über folgende hydromechanische Größen gekoppelt:

- Fließgeschwindigkeiten v_x und v_y ,
- Wasserstand h und
- Richtungsgefälle I_x und I_y .
- Nicht berücksichtigt werden durch den Transport verursachte lokale Änderungen des Widerstandsbeiwertes λ .

Das Produkt hI bestimmt nach 14 die Schubspannung des Wasserkörpers über einer ebenen Sohle zumindest bei gleichförmigem Abfluss.

Umstritten ist, ob der Geschiebetransport generell eher eine Funktion der Schubspannung (in der älteren Literatur auch Schleppkraft) nach 14 ist oder eine des Abflusses, und so mittelbar eine der Fließgeschwindigkeit. Diese beiden Alternativen stellen Extremtypen der Kopplung dar. Im einen Fall werden Hydraulik und Transport nur über das Produkt hI , im anderen Fall nur über v miteinander gekoppelt.

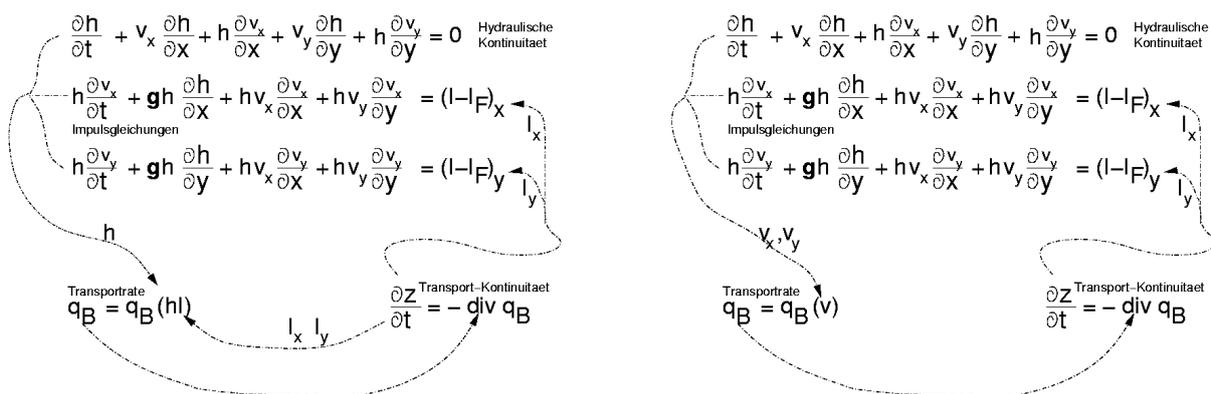


Abbildung 24: Extremtypen der Kopplung zwischen Hydraulik und Transport. *Links:* Bei schubspannungsbestimmtem Transport dominiert die ‘intrinsische Rückkopplung’ in der Kontinuitätsgleichung über die Gefälle, die sich daneben auf den Wasserstand auswirken. *Rechts:* Bei fließgeschwindigkeitsbestimmtem Transport wirken die Gefälle nur über die Hydraulik wieder auf die Transportrate und -Kontinuität ein.

Abb. 24 zeigt den wesentlichen Unterschied zwischen diesen Extremtypen der Kopplung darin, dass mit dem Gefälle I eine sich aus der Transport-Kontinuitätsgleichung ergebende Größe über die Transportformel für q_B direkt wieder in die Transport-Kontinuitätsgleichung eingeht. So kommt es im linearen Fall zu dem in 3.2 bereits diskutierten parabolischen Verhalten der Transport-Kontinuitätsgleichung.

4.1 Das gekoppelte System für den Spezialfall eines Rechteckgerinnes konstanter, gegenüber dem Wasserstand großer Breite

In der Integraldarstellung (26) der Spiegellinie lässt sich der Integrand hI im ersten Integral der rechten Seite der Gleichung durch (54) ersetzen. So folgt:

$$\frac{h^2}{2} + \frac{h_g^3}{h} - \frac{3}{2}h_g^2 = s_0x - \frac{h_g^3}{8} \int_0^x \frac{\lambda dx'}{h^2}. \quad (64)$$

Aus der differentiellen Darstellung (27) folgt entsprechend

$$\frac{dh}{dx} = \frac{s_0h^2 - (\lambda/8)h_g^3}{h^3 - h_g^3}. \quad (65)$$

Hierbei macht nur $\lambda > 0$ physikalisch einen Sinn. Grundsätzlich darf λ veränderlich sein.

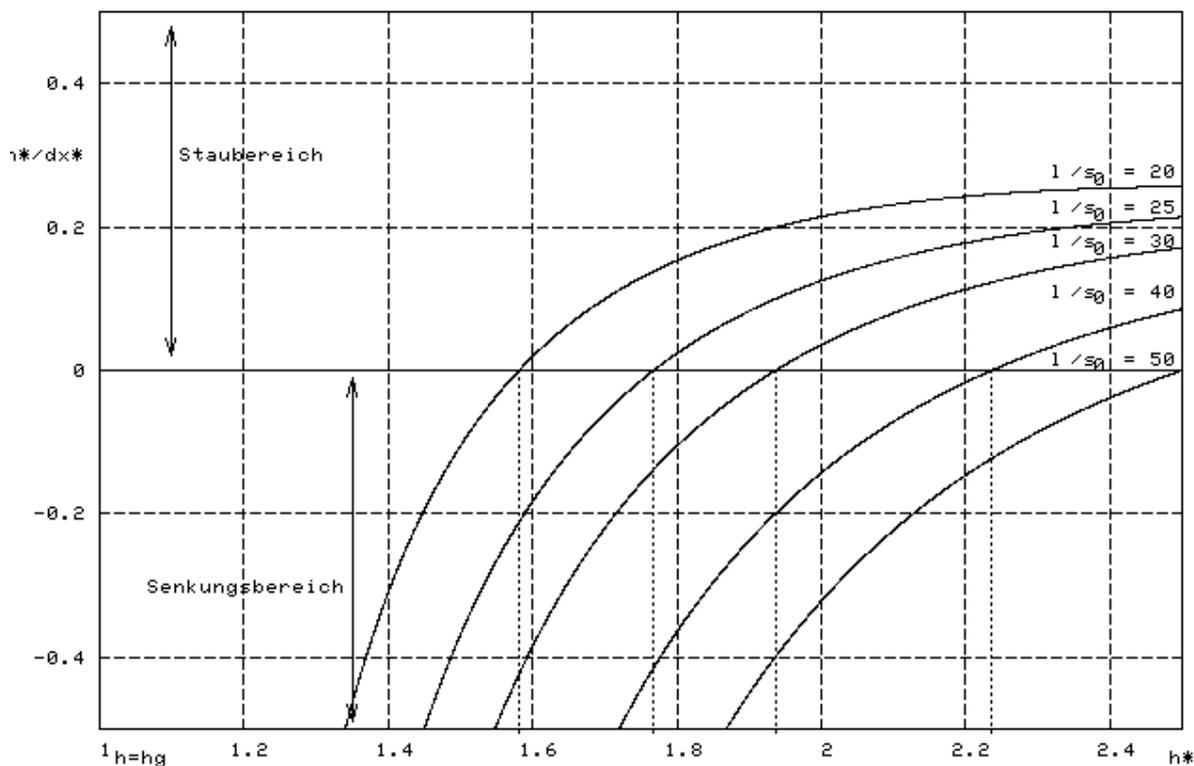


Abbildung 25: Graphen zu der durch (65) gegebenen Funktion $\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dx}(h)$ für die Parameterverhältnisse $\frac{\lambda}{s_0} = \frac{1 \cdot 64}{5}, \frac{64}{4}, \frac{64}{3}, \frac{64}{2}, 64$. Für unbewegliche Sohle vgl. Abb. 12

Eine Grafik hierzu in der dimensionslosen Größe $h^* = \frac{h}{h_g}$ gibt Abb. 25. Im Vergleich zu Abb. 12 zeigt sich, dass sich hier die Quadrate der einer horizontalen Spiegellinie ($\frac{dh}{dx} = 0$) zuzuordnenden Wassertiefen zueinander verhalten wie die Verhältnisse $\frac{\lambda}{s_0}$ zueinander.

Festlegen lässt sich s_0 aus der Bedingung, dass die Grenztiefe h_g am Ein- bzw. am Auslauf des Gerinnes erreicht werden muss. Wie sich diese Randbedingung auch an Gerinnen konstanter Breite realisieren lässt, zeigt Abb. 26 umseitig. Um dann mit dieser Randbedingung s_0 festzulegen, muss aber im nächsten Teilabschnitt auch die Gleichung (65) integriert werden.

Von der Spiegelliniengleichung für den Wasserstand h_b bei unbeweglicher Sohle (31) von Bresse $\frac{dh_b}{dx} = I_n \frac{h^3 - h_n^3}{h^3 - h_g^3}$ unterscheidet sich (65) durch den Faktor

$$\frac{s_0 h^2 - (\lambda/8) h_g^3}{I_n (h^3 - h_n^3)} = \frac{s_0 h^2 / I_n - h_n^3}{h^3 - h_n^3} = \frac{h^3 (I/I_n) - h_n^3}{h^3 - h_n^3}. \quad (66)$$

Es gilt somit

$$\frac{dh}{dx} = \frac{s_0 h^2 / I_n - h_n^3}{h^3 - h_n^3} \frac{dh_b}{dx} = \frac{h^3 (I/I_n) - h_n^3}{h^3 - h_n^3} \frac{dh_b}{dx}. \quad (67)$$

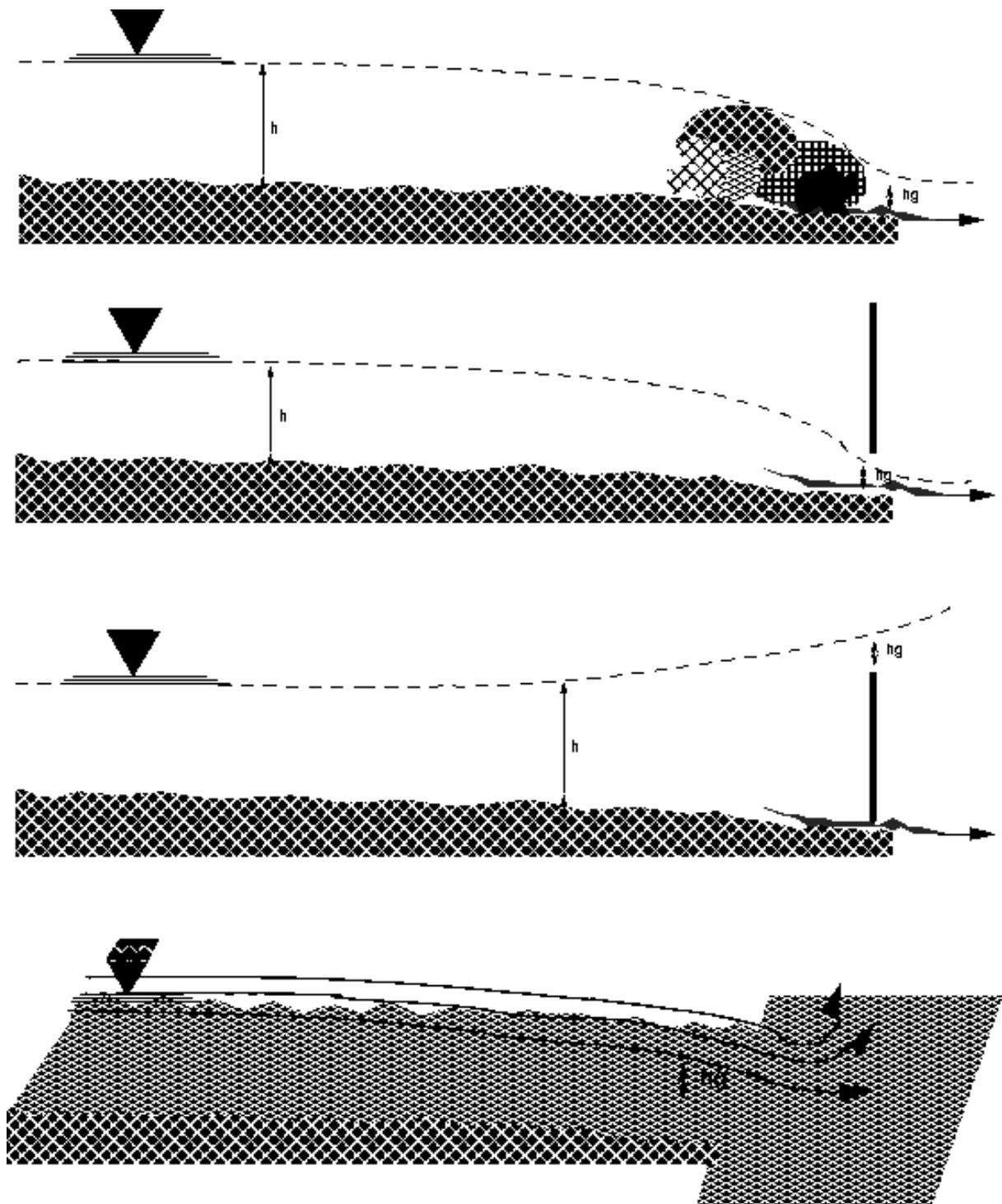


Abbildung 26: Beispiele für technische Ausführungen der Randbedingung, durch die ein stationär-ungleichförmiger Abfluss auch in Gerinnen konstanter Breite erreicht wird, indem am Auslauf die Wassertiefe kritisch wird. Hierbei darf der Geschiebetransport nicht behindert werden. *Oben* Naturnahe Ausführung durch eine raue Rampe. *Mitte oben:* Geregelt Schütz, das so eingestellt wird, dass über der Sohle die kritische Wassertiefe erreicht wird. *Mitte unten:* Wehr mit Geschiebeklappe. Hier ist die Wahrung der Transportkontinuität problematisch. *Unten:* Abrupte (unstetige) Aufweitung des Gerinnes so, dass ein Fließwechsel eintritt.

Eine Lösung $h_b(x)$ der Bresse-Gleichung nimmt asymptotisch eine Normalabflusstiefe h_n an. Ob auch eine Lösung zu (65) ein asymptotisches Gefälle I_∞ und eine entsprechende asymptotische Normalabflusstiefe h_∞ besitzt, lässt sich erst durch Integration im nächsten Teilabschnitt klären. In Abb. 27 wird dieser Fall skizziert.

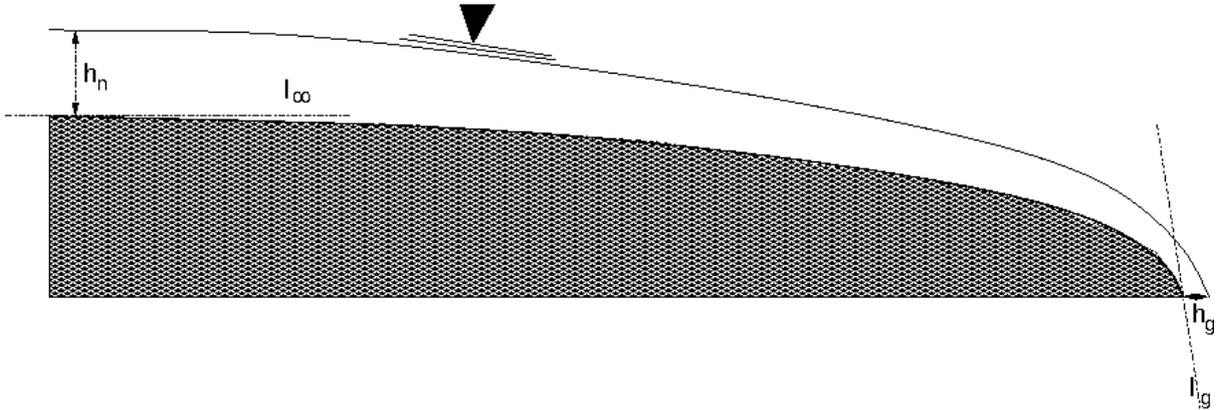


Abbildung 27: Wird bei strömendem Abfluss oberstrom (hier skizziert) bzw. bei schießendem Abfluss unterstrom asymptotisch eine Normalabflusstiefe h_n erreicht, gibt es zu dieser ein entsprechendes Gefälle I_∞ der beweglichen Sohle. Das Gefälle I_g im Punkt, an dem die kritische Abflusstiefe h_g angenommen wird, lässt sich mit (70) als Funktion von λ und I_∞ ausdrücken.

Jetzt ergibt sich aus (67) bereits die Aussage, dass dann $\frac{s_0 h_\infty^2}{I_\infty} = h_\infty^3$ gelten muss, und so

$$h_\infty = \frac{s_0}{I_\infty} \iff s_0 = h_\infty I_\infty, \quad (68)$$

weil $\frac{s_0 h^2 / I_\infty - h^3}{h^3 - h_\infty^3} \rightarrow 1$ erfüllt sein muss für $h \rightarrow h_\infty$. So lässt sich in (65) einsetzen zu $\frac{dh}{dx} = \frac{h_\infty I_\infty h^2 - (\lambda/8) h_g^3}{h^3 - h_g^3} = I_\infty \frac{h_\infty h^2 - \lambda h_g^3 / (8 I_\infty)}{h^3 - h_g^3} = I_\infty \frac{h_\infty h^2 - h_\infty^3}{h^3 - h_g^3}$ mit dem Ergebnis

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = I_\infty \frac{h_\infty h^2 - h_\infty^3}{h^3 - h_g^3} = h_\infty I_\infty \frac{h^2 - h_\infty^2}{h^3 - h_g^3} = h_\infty I_\infty \frac{(h + h_\infty)(h - h_\infty)}{h^3 - h_g^3}} \quad (69)$$

Offensichtlich darf wegen der Gefälleänderung nach (54) das hier vom Ort x abhängige Gefälle $I = I(x)$ in (65) im Gegensatz zur Bresse-Gleichung (31) nicht eingehen. Doch mit (54) folgt aus $hI(h) = s_0 = h_\infty I_\infty$ allgemein

$$I(h) = I_\infty \frac{h_\infty}{h} \quad (70)$$

und speziell für das Gefälle I_g an einem Querschnitt mit kritischer Wassertiefe h_g

$$I_g = I(h_g) = I_\infty \frac{h_\infty}{h_g} = I_\infty \left(\frac{8}{\lambda I_\infty} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{8 I_\infty^2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (71)$$

Näher diskutieren lässt sich diese Gleichung für das Gefälle erst im nächsten Abschnitt, nachdem (65) integriert worden sein wird. Erst dann wird geklärt sein, ob bzw. wann asymptotische Wasserstände und Gefälle für Lösungen zu (65) existieren.

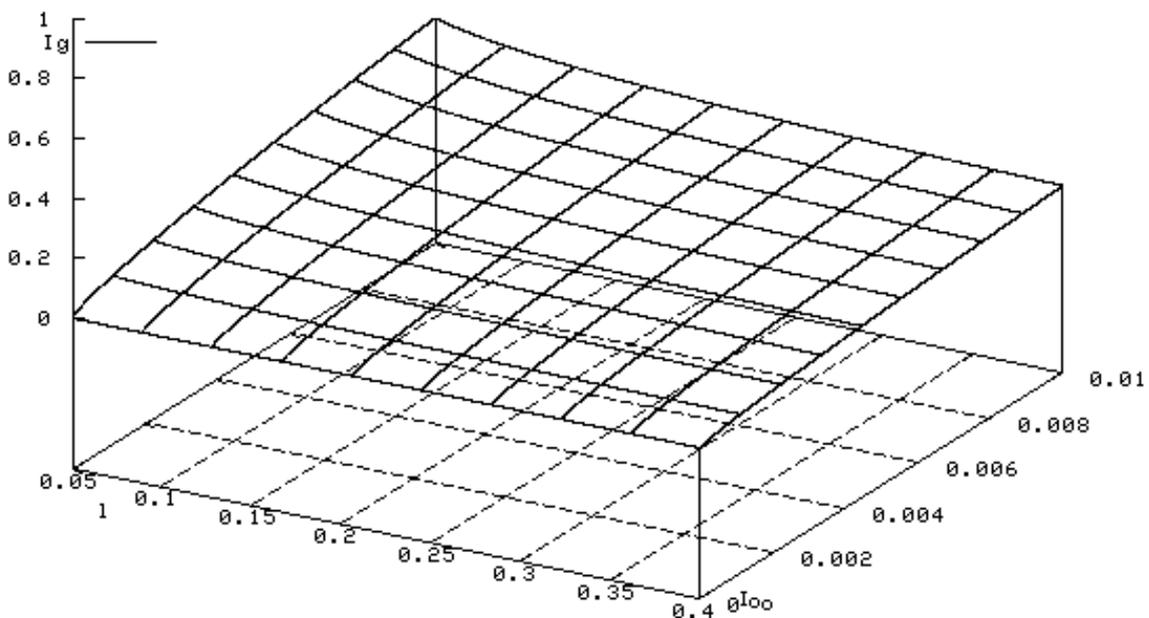


Abbildung 28: Das Gefälle I_g in Querschnitten mit kritischer Abflusstiefe h_g nach (71) als Funktion $I_g = I_g(\lambda, I_\infty)$ des Widerstandsbeiwertes λ und des asymptotische Gefälles I_∞

Praktische Anwendung finden im nächsten Abschnitt zu diskutierende Näherungslösungen zu (65) wegen der Voraussetzungen speziell an regulierten Flüssen. Regulierelemente werden für geschiebeführende Fließgewässer als Rampen oder Schütze so ausgestaltet, dass sich ein Transportgleichgewicht einstellen kann, während der Spiegellinie am Ort des Regulierelementes eine Randbedingung auferlegt wird. Je nach dem Fließzustand des Wassers vor und bzw. oder hinter dem Regulierelement beschreiben die Lösungen die sich einstellende Spiegellinie und das zugehörige Gefälle.

4.2 Das gekoppelte System für offene Rechteckgerinne veränderlicher Breite unter glatten Randbedingungen ohne Berücksichtigung von Fließwechseln

Für Rechteckgerinne veränderlicher, im Ort x Breite b ergibt sich zunächst aus der Integraldarstellung (13) der Spiegellinie

$$\frac{h^2}{2} + \frac{b_0}{b} \cdot \frac{h_g^3}{h} - \frac{3}{2}h_g^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{g}}} \int_0^x \left(\frac{\varrho' \mathbf{v}_0}{bG^*} \right)^{2/3} dx' - \frac{b_0 h_g^3}{8} \int_0^x \frac{\lambda dx'}{bh^2}, \quad (72)$$

indem der Integrand hI im ersten Integral der rechten Seite in (13) durch (58) ersetzt wird. Wird nach dem Ort x abgeleitet, folgt

$$\begin{aligned} \left(h - \frac{b_0}{b} \cdot \frac{h_g^3}{h^2} \right) \frac{dh}{dx} - \frac{b_0}{b^2} \cdot \frac{h_g^3}{h} \frac{db}{dx} &= \frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{g}}} \left(\frac{\varrho' \mathbf{v}_0}{bG^*} \right)^{2/3} - \frac{\lambda b_0 h_g^3}{8bh^2} \\ \frac{dh}{dx} &= \left[\frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{g}}} \left(\frac{\varrho' \mathbf{v}_0}{bG^*} \right)^{2/3} + \frac{b_0}{b} \left(\frac{h_g^3}{bh} \frac{db}{dx} - \frac{\lambda h_g^3}{8h^2} \right) \right] \frac{h^2}{h^3 - (b_0/b)h_g^3} \\ \Leftrightarrow & \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{g}}} \left(\frac{\varrho' \mathbf{v}_0}{bG^*} \right)^{2/3} h^2 + \frac{b_0}{b} \left(\frac{h}{b} h_g^3 \frac{db}{dx} - \frac{\lambda h_g^3}{8} \right) \right] \frac{1}{h^3 - (b_0/b)h_g^3} \end{aligned}$$

sofern die Gerinnebreite b nach x differenzierbar ist. Da bereits für (13) bezüglich des Wasserstandes breite Gerinne vorausgesetzt werden, sollte auch hier der Term $\frac{h}{b} h_g^3 \frac{db}{dx}$ vernachlässigt werden, denn für abrupte Änderungen der Gerinnebreite ist ein differentieller Ansatz ohnehin fragwürdig. Mit

$$s_v(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{g}}} \left(\frac{\varrho' \mathbf{v}_0}{bG^*} \right)^{2/3} \quad (73)$$

(Dimension Länge!) ergibt sich so mit

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{s_v(x)h^2 - (b_0/b)(\lambda/8)h_g^3}{h^3 - (b_0/b)h_g^3} = \frac{(b/b_0)s_v(x)h^2 - (\lambda/8)h_g^3}{(b/b_0)h^3 - h_g^3}} \quad (74)$$

eine Differentialgleichung für den Wasserstand h analog zu (65). Indem rechts durch h_g^3 gekürzt wird, lässt sich zu der dimensionslosen Größe $h^* = \frac{h}{h_g}$ übergehen. So folgt

$$\frac{dh}{dx} = \frac{(b/b_0)(s_v(x)/h_g)h^{*2} - (\lambda/8)}{(b/b_0)h^{*3} - 1} \quad (75)$$

4.3 Anwendung: Störung des gekoppelten Transportgleichgewichtes bei Normalabfluss im Rechteckgerinne durch lokale Veränderung hydraulischer oder sedimentologischer Parameter

Um den Einfluss lokaler Änderungen hydraulischer Parameter auf ein ansonsten ungestört normal abfließendes Gewässer bei gekoppeltem Transportgleichgewicht zu untersuchen, wird von (25) ausgegangen. Der Nullpunkt der Ortskoordinaten x wird in den Bereich der lokalen Störung gelegt. Für den Fall einer lokalen Verengung bzw. Aufweitung zeigt dies Abb. 29.

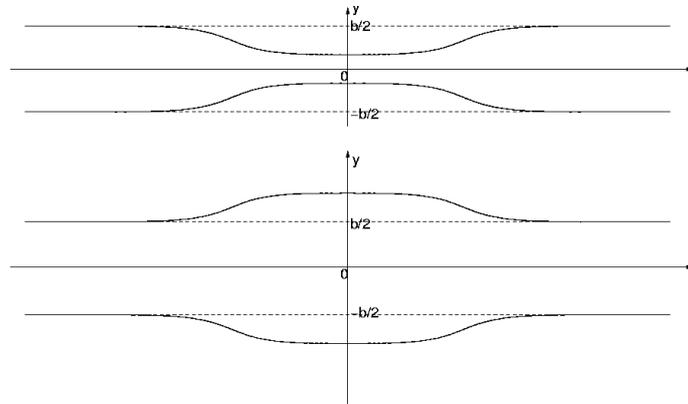


Abbildung 29: Symmetrische hydraulische Zustände bei Variation der Gerinnebreite. Der Nullpunkt der Längskoordinatenachse x , hier auch der Nullpunkt einer Querkoordinatenachse y , wird in das Symmetriezentrum gelegt. Ausgegangen wird von symmetrischen hydraulischen Zuständen, also insbesondere davon, dass Fließwechsel infolge lokaler Verengung (*oben*) oder Aufweitung (*unten*) nur in gerader Anzahl eintreten.

Ausgegangen wird davon, dass in hinreichender Entfernung $|x|$ von diesem Nullpunkt der hydraulische Zustand in den Querschnitten am Ort $-x$ und x gleich sind. So folgt aus

$$\begin{aligned}
 (25) \text{ mit } (58) \quad & \sqrt[3]{\frac{(\varrho' \mathbf{v}_0)^2}{\mathbf{g}}} \int_{-x}^x \frac{dx}{(bG^*)^{2/3}} = \frac{b_0 h_g^3}{8} \int_{-x}^x \frac{\lambda dx'}{bh^2} \text{ und äquivalent dazu} \\
 0 &= \sqrt[3]{\frac{(\varrho' \mathbf{v}_0)^2}{\mathbf{g}}} \int_{-x}^x \frac{dx}{(bG^*)^{2/3}} - \frac{b_0 h_g^3}{8} \int_{-x}^x \frac{\lambda dx'}{bh^2} \\
 &= \int_{-x}^x \left[b^{-2/3} \sqrt[3]{\frac{(\varrho' \mathbf{v}_0)^2}{\mathbf{g} G^{*2}}} - \frac{b_0 h_g^3}{8} \frac{\lambda}{bh^2} \right] dx' \\
 &= \int_{-x}^x b^{-2/3} \sqrt[3]{\frac{(\varrho' \mathbf{v}_0)^2}{\mathbf{g} G^{*2}} - \left(\frac{b_0 h_g^3}{8} \frac{\lambda}{h^2} \right)^3} \frac{1}{b} dx' \tag{76}
 \end{aligned}$$

Da b , und somit $b^{-2/3}$ positiv, und die Kubikwurzel punktsymmetrisch zum Nullpunkt und streng monoton ist, folgt aus (76) $\int_{-x}^x \left[\frac{(\varrho' \mathbf{v}_0)^2}{\mathbf{g} G^{*2}} - \left(\frac{b_0 h_g^3}{8} \frac{\lambda}{h^2} \right)^3 \frac{1}{b} \right] dx' = 0$. Hierzu ist äquivalent

$$(\varrho' \mathbf{v}_0)^2 \int_{-x}^x \frac{dx}{G^{*2}} = \left(\frac{b_0 h_g^3}{8} \right)^3 \int_{-x}^x \frac{\lambda^3}{h^6} \frac{1}{b} dx' \quad (77)$$

(77) lässt sich auch in der \mathbf{L}_2 -Norm schreiben als

$$\boxed{\varrho' \mathbf{v}_0 \left\| \frac{1}{G^*} \right\|_2 = \left(\frac{b_0 h_g^3}{8} \right)^{3/2} \left\| \frac{1}{h^3} \sqrt{\frac{\lambda^3}{b}} \right\|_2} \quad (78)$$

Offensichtlich muss $\frac{1}{h^3}$ zum Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen gehören. Für $\frac{1}{b}$ und λ^3 genügt einfache Integrierbarkeit. Neben $\lambda, b, h > 0$ ist aufgrund des Störansatzes sinnvoll, davon auszugehen, dass diese Größen obendrein beschränkt sind. So stellen die Integrabilitätsforderungen keine Einschränkungen an den Lösungsraum dar.

Ist G^* konstant, folgt

$$\text{const} = \left\| \frac{1}{h^3} \sqrt{\frac{\lambda^3}{b}} \right\|_2 \quad (79)$$

Demnach verhält sich der Wasserstand h an nichtsingulären Punkten reziprok zu $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{b}}{\lambda}}$. In Abb. 30 wird dieser Zusammenhang graphisch dargestellt. Die Längen h und b sind dabei als relative dimensionslose Größen aufzufassen. Deutlich empfindlicher spricht h auf den Widerstandsbeiwert λ als auf die Breite b an. Eine Breitenänderung wird also in hohem Maße durch eine Änderung des Gefälles ausgeglichen, weniger durch eine des Wasserstandes.

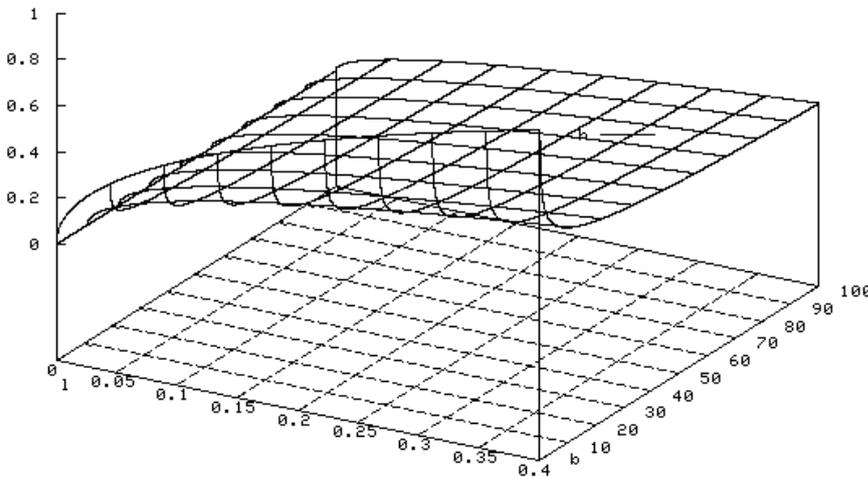


Abbildung 30: Der durch (79) gegebene Zusammenhang zwischen Wasserstand h , Widerstandsbeiwert λ und der Gerinnebreite b .

Viele Geschiebetransportformeln sind von der Form $G^* = \beta F_r^{*\gamma} - \alpha$ oder $G^* = \beta(F_r^{*\gamma} - \alpha)^\kappa$, so z. B.

Engelund und Hansen: ([50] Anl. 10 (EH2))	$G^* = \frac{F_r^*}{10}$	$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{10}, \quad \gamma = 1$
Pernecker und Vollmers: ([58] 5.2.8 (5.2.8-1) S. 203)	$G^* = 25F_r^* - 1$	$\alpha = 1, \quad \beta = 25, \quad \gamma = 1$
Meyer-Peter und Müller: ([58] 5.2.6 (5.2.8-2) S. 199)	$G^* = 8 \left(1 - \frac{1}{20F_r^*}\right)^{3/2}$	$\alpha = \frac{1}{20}, \quad \gamma = -1$ $\beta = 8, \quad \kappa = \frac{3}{2}$

Bei der Form $G^* = \beta F_r^{*\gamma} - \alpha$ führt (77) zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_0 h_g^3}{8}\right)^3 \int_{-x}^x \frac{\lambda^3}{h^6} \frac{1}{b} &= (\varrho' \mathbf{v}_0)^2 \int_{-x}^x \frac{dx}{(\beta F_r^{*\gamma} - \alpha)^2} \\ &= \left(\frac{\mathbf{v}_0}{d_m^\gamma} \varrho'^{\gamma-1}\right)^2 \int_{-x}^x \frac{dx}{[(hI)^\gamma - \alpha']^2} \end{aligned} \quad (80)$$

mit $\alpha' = \frac{\alpha}{(\varrho' d_m)^\gamma}$. Analog zu (78) folgt bei konstantem λ mit Abschätzung nach oben

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{v}_0}{d_m^\gamma} \varrho'^{\gamma-1} \left\| \frac{1}{(hI)^\gamma - \alpha'} \right\|_2 &= \left(\frac{\lambda b_0 h_g^3}{8}\right)^{3/2} \left\| \frac{1}{h^3 \sqrt{b}} \right\|_2 \\ &\leq \left(\frac{\lambda b_0 h_g^3}{8}\right)^{3/2} \left\| \frac{1}{h^3} \right\|_2 \left\| \frac{1}{\sqrt{b}} \right\|_2 \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\lambda b_0 h_g^3}{8}\right)^{3/2} \left\| \frac{1}{\sqrt{b}} \right\|_2 \sqrt{\int_{-x}^x \frac{dx}{h^3}} \\ &\leq \sqrt{\frac{2x}{h_{\min}^3}} \left(\frac{\lambda b_0 h_g^3}{8}\right)^{3/2} \left\| \frac{1}{\sqrt{b}} \right\|_2. \end{aligned} \quad (82)$$

Zu (82) ist folgende Ungleichung äquivalent

$$\left\| \frac{1}{(hI)^\gamma - \alpha'} \right\|_2 \leq \frac{d_m^\gamma}{\mathbf{v}_0 \varrho'^{\gamma-1}} \sqrt{\frac{2x}{h_{\min}^3}} \left(\frac{\lambda b_0 h_g^3}{8}\right)^3 \left\| \frac{1}{\sqrt{b}} \right\|_2, \quad (83)$$

wobei h_{\min} der auf dem Intervall $[-x; x]$ minimale Wasserstand ist. Somit muss mit wachsender Breite b auch das Produkt hI zunehmen. Da mit wachsendem b aber h abnimmt, führt das zu einer überproportionalen Kompensation durch das Gefälle I .

5 Diskussion der Lösungen für das Transportgleichgewicht bei stationär-ungleichförmigem Abfluss und dessen Störung durch Variation der Breite oder des Widerstandsbeiwertes offener Rechteckgerinne

In diesem Kapitel wird bei der weiteren Untersuchung der Gleichgewichte des schubspannungsbestimmten Transports von (14) ausgegangen. D. h. es gelte $\tau = hI$. Der geschlossene analytische Ausdruck für den Wasserstand h als Funktion vom Ort x als Ergebnis der Integration von (65) bei schubspannungsbestimmten Transportgleichgewicht lässt sich nicht mehr nach h auflösen. So werden hier implizit gegebene Funktionen diskutiert. Als wesentliches Ergebnis folgt, dass das Sohlenprofil bei schubspannungsbestimmtem Transportgleichgewicht und konstanter Breite nur eine Funktion des Widerstandsbeiwertes λ ist. Für die Senkungslinie lässt sich eine explizite Näherung angeben. Lösungen für das gekoppelte stationäre Transportgleichgewicht bei örtlich veränderlicher Breite werden auf die Lösung für (65) zurückgeführt.

Weiter wird gezeigt, dass sich schubspannungsbestimmter Transport diffusiv verhält. Abweichungen des Gefälles vom Gleichgewichtsgefälle klingen mit der Zeit ab. Betrachtet wird speziell ein anzustrebender Gleichgewichtszustand bei Normalabfluss. (14) ist hier in jedem Fall gerechtfertigt.

Für fließgeschwindigkeitsbestimmten Transport gilt hingegen eine Advektionsgleichung. Sie lässt Schwingungen zu. Bei kritischen Abflüssen schaukeln sie sich auf. So verhält sich fließgeschwindigkeitsbestimmten Transport völlig entgegengesetzt dem schubspannungsbestimmten. Das dynamische Verhalten des Transports gibt demnach einen Hinweis darauf, welche Größe bestimmend ist: Das Produkt hI oder v^2 .

5.1 Die implizit geschlossen darstellbare Lösung für das gekoppelte Transportgleichgewicht in Rechteckgerinnen konstanter Breite und Rauheit

Liegen die Voraussetzungen vor, unter denen im Abschnitt 2, insbesondere 4.1, (65) hergeleitet worden ist, und zwar

- stationärer Abfluss Q
- Rechteckgerinne mit konstanter, gegenüber h großer Breite b ,
- nur von der Feststoff-Froude-Zahl F_r^* abhängiges Transportgesetz für die Transportintensität Φ ,

wird durch Gleichung (65) für den Wasserstand $h = h(x)$ über der Sohle

$$\frac{dh}{dx} = \frac{s_0 h^2 - (\lambda/8) h_g^3}{h^3 - h_g^3}$$

die Spiegellinie bei beweglicher Sohle im Transportgleichgewicht beschrieben.

Bei konstantem Widerstandsbeiwert λ lassen sich ihre Differentiale zwar trennen, doch lassen sich die Rechnungen für die Integration vereinfachen, indem zunächst der dimensionslose Wasserstand

$$h^* = \frac{h}{h_g} \quad \text{und die Anfangsbedingung} \quad h^{*'} = \frac{s_0}{h_g} \quad (84)$$

eingeführt werden.

So ergibt sich

$$\frac{dh^*}{dx} = \frac{1}{h_g} \frac{dh}{dx} = \frac{1}{h_g} \frac{(s_0/h_g)(h/h_g)^2 - (\lambda/8)}{h^{*3} - 1} = \frac{h^{*'} h^{*2} - (\lambda/8)}{h_g(h^{*3} - 1)} \quad (85)$$

Die Differentiale zu (85) werden getrennt; und eine im Anhang C.3 ausgeführte Integration führt zu dem impliziten, nicht nach h auflösbaren Ausdruck

$$x + x_0 = \frac{4h_g}{\sqrt{\lambda h^{*'}}} \cdot \left[\sqrt{\frac{\lambda}{8h^{*'}}} \left(h^{*2} - \frac{\lambda}{8h^{*'}} \right) + 2 \operatorname{arctanh} \left(h^* \sqrt{\frac{8h^{*'}}{\lambda}} \right) + \left(\frac{\lambda}{8h^{*'}} \right)^{3/2} \log \left| \frac{8h^{*'}}{\lambda} h^{*2} - 1 \right| \right] \quad (86)$$

Der Wasserstand h wird als Funktion $h = h(x)$ des Ortes bei Erreichen der Grenztiefe h_g möglicherweise unstetig. Das legt den Ansatz nahe, solche kritischen Punkte entlang der Fließrichtung x zum Nullpunkt zu wählen. So gelangt man bei $x_0 = 0$ aus der Anfangsbedingung $h(0) = h_g$ über $h^*(0) = 1$ zu

$$\sqrt{\frac{\lambda}{8\chi}} \left(1 - \frac{\lambda}{8\chi} \right) + 2 \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{8\chi}{\lambda}} \right) + \left(\frac{\lambda}{8\chi} \right)^{3/2} \log \left(\frac{8\chi}{\lambda} - 1 \right) = 0. \quad (87)$$

Daraus lässt $h^{*'} = \chi(\lambda)$ als Funktion $\chi = \chi(\lambda)$ in λ bestimmen.

Wird mit $\chi^* = \frac{8\chi(\lambda)}{\lambda}$ substituiert, lässt sich ersehen, dass gilt

$$h^{*'} = \frac{8}{\chi^* \lambda}, \quad (88)$$

wenn χ^* als Nullstelle der für $\chi > 0$ definierten Funktion

$$\begin{aligned} X(\chi) &= \frac{1}{\sqrt{\chi}} \left(1 - \frac{1}{\chi} \right) + 2 \operatorname{arctanh}(\sqrt{\chi}) + \frac{\log|\chi - 1|}{\chi^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\chi}} \left(1 - \frac{1}{\chi} \right) + \left(\frac{1}{\chi^{3/2}} + 1 \right) \log(\sqrt{\chi} + 1) + \left(\frac{1}{\chi^{3/2}} - 1 \right) \log|\sqrt{\chi} - 1| \end{aligned} \quad (89)$$

bestimmt wird (Grafik in Abb. 31).

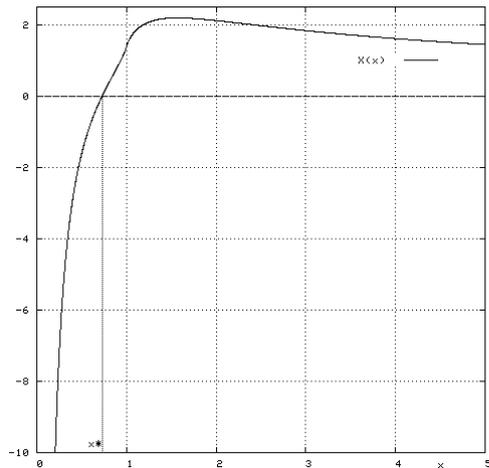


Abbildung 31: Graph der in (89) erklärten Funktion $X(\chi)$. Die Funktion ist in $\chi = 1$ stetig fortsetzbar. Nach der Darstellung (90) von $X(\chi)$ ist das plausibel, weil der Vorfaktor $\frac{1}{\chi^{3/2}} - 1$ vor dem kritischen $\log|\sqrt{\chi} - 1|$ verschwindet. In $\chi = 0$ besitzt X jedoch eine Polstelle.

Diese Nullstelle, ihre Wurzel und ihre Reziproke ergeben sich durch Intervallschachtelung (Newton-Verfahren divergiert!) als Zahlenwert in zehnstelliger Genauigkeit zu

Tabelle 1: Wurzeln und Potenzen von χ^*

χ^*	$\approx 0,727639715$	≈ 51	/	70
$\sqrt{\chi^*}$	$\approx 0,853018004$	≈ 6	/	7
$\chi^{*3/2}$	$\approx 0,620689777$	≈ 4400	/	7089
$1/\chi^*$	$\approx 1,374306514$	≈ 70	/	51
$\sqrt{1/\chi^*}$	$\approx 1,172308199$	≈ 7	/	6
$1/\chi^{*3/2}$	$\approx 1,611110794$	≈ 7089	/	4400

Aus (86) ergibt sich

$$x = \frac{4h_g}{\lambda\sqrt{\chi^*}} \left(\frac{h^{*2} - 1/\chi^*}{\sqrt{\chi^*}} + 2 \operatorname{arctanh}(h^* \sqrt{\chi^*}) + \frac{\log|\chi^* h^{*2} - 1|}{\chi^{*3/2}} \right) \quad (91)$$

Um den dimensionslosen Wasserstand h^* als Funktion des Ortes x (unter der Anfangsbedingung $h(0) = h_g$) zumindest graphisch und numerisch anzugeben, liegt nahe, als ‘dimensionslosen Ort’ x^* den Quotienten $x^* = \frac{x}{h_g}$ einzuführen. Aus (91) folgt:

$$\lambda x^* = \frac{4}{\sqrt{\chi^*}} \left(\frac{h^{*2} - 1/\chi^*}{\sqrt{\chi^*}} + 2 \operatorname{arctanh} (h^* \sqrt{\chi^*}) + \frac{\log |\chi^* h^{*2} - 1|}{\chi^{*3/2}} \right). \quad (92)$$

Auf der rechten Seite wird (92) singularär für $h^* = 1/\sqrt{\chi^*} \approx 1,17$. Da gilt: $x^* \rightarrow -\infty$ für $h^* \rightarrow 1/\sqrt{\chi^*}$, erreicht der Wasserstand h oberstrom asymptotisch etwa sieben Sechstel der Grenztiefe h_g . Die für $h^* > 0, h^* \neq 1/\sqrt{\chi^*}$ durch (92) gegebene Funktion $(\lambda x^*)(h^*)$ ist für $0 < h^* < 1/\sqrt{\chi^*}$ streng antiton und somit umkehrbar. Denn ihre Ableitung ergibt

$$\begin{aligned} \lambda \frac{dx}{dh} &= \lambda \frac{dx^*}{dh^*} = \frac{4}{\sqrt{\chi^*}} \left(\frac{2h^*}{\sqrt{\chi^*}} - \frac{2\sqrt{\chi^*}}{\chi^* h^{*2} - 1} + \frac{2h^*}{\sqrt{\chi^*}(\chi^* h^{*2} - 1)} \right) \\ &= \frac{8}{\sqrt{\chi^*}} \left(\frac{h^*}{\sqrt{\chi^*}} + \frac{-\chi^* + h^*}{\sqrt{\chi^*}(\chi^* h^{*2} - 1)} \right) = \frac{8}{\sqrt{\chi^*}} \cdot \frac{h^*(\chi^* h^{*2} - 1) - \chi^* + h^*}{\sqrt{\chi^*}(\chi^* h^{*2} - 1)} \\ &= \frac{8\chi^*}{\sqrt{\chi^*}} \cdot \frac{\chi^* h^{*3} - \chi^*}{\sqrt{\chi^*}(\chi^* h^{*2} - 1)} = 8 \cdot \frac{\overbrace{h^{*3} - 1}^{>0 \text{ fuer } h^* > 1}}{\underbrace{\chi^* h^{*2} - 1}_{<0 \text{ fuer } |h^*| < 1/\sqrt{\chi^*}}} \end{aligned} \quad (93)$$

und ist negativ, während sich aus (93) ihre Reziproke ergibt zu

$$\frac{8 dh}{\lambda dx} = \frac{8 dh^*}{\lambda dx^*} = \frac{\chi^* h^{*2} - 1}{h^{*3} - 1} = \frac{\chi^* h_g h^2 - h_g^3}{h^3 - h_g^3}. \quad (94)$$

Zum einen wird so die implizit dargestellte (91) Lösung $h = h(x)$ zu (65) validiert; zum anderen nimmt $\frac{4h_g}{\lambda\sqrt{\chi^*}} \left(\frac{h^{*2} - 1/\chi^*}{\sqrt{\chi^*}} + 2 \operatorname{arctanh} (h^* \sqrt{\chi^*}) + \frac{\log |\chi^* h^{*2} - 1|}{\chi^{*3/2}} \right)$ positive Werte x nur für $h^* \geq \frac{h_g}{\sqrt{\chi^*}}$ an. Stromabwärts in einen schießenden Abfluss ist die Rechnung also nicht möglich.

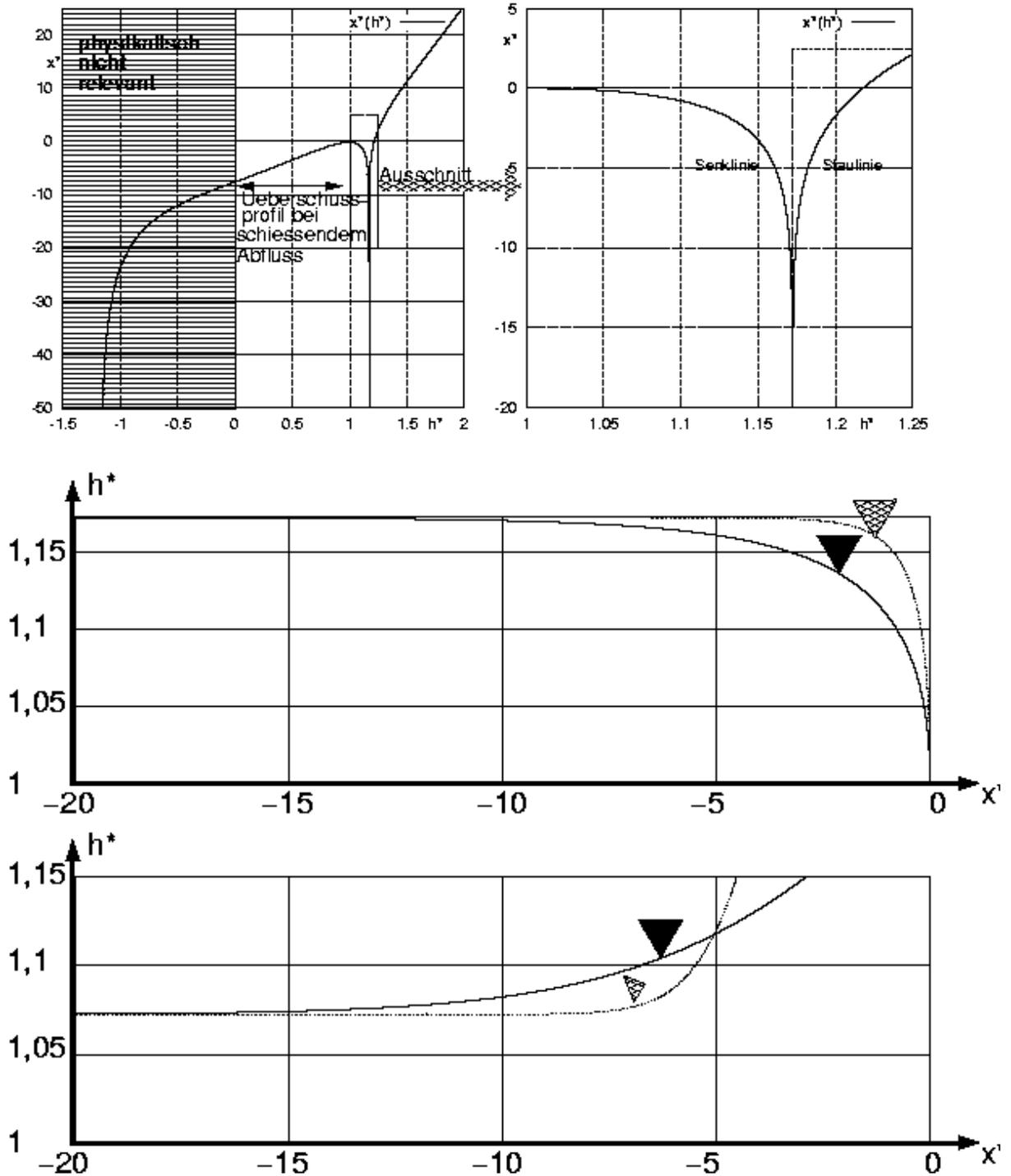


Abbildung 32: Graphen der Lösung $x^*(h^*)$ und die durch die Umkehrfunktion für $\lambda = 1$ gegebenen relativen Spiegellinien. *Oben*: Graph der durch (91) gegebenen Funktion in niedriger (*links*) und in hoher (*rechts*) Auflösung. Hieraus ergibt sich bei strömendem Zufluss durch Umkehrung eine Senkungslinie (*mitte*) oder eine Staulinie (*unten*). Zum Vergleich ist für diese auch die Lösung nach der Bresse-Gleichung (31) für das asymptotische Gefälle jeweils gestrichelt gegeben.

Nach (94) gelten

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dh}{dx} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \frac{h}{h_g} = h^* \nearrow \frac{1}{\sqrt{\chi^*}}, \quad \text{also für} \quad h \nearrow \frac{h_g}{\sqrt{\chi^*}} \\ \text{und} \\ \frac{dh}{dx} \longrightarrow -\infty \quad \text{für} \quad \frac{h}{h_g} = h^* \searrow 1, \quad \text{also für} \quad h \searrow h_g. \end{array} \right\} \quad (95)$$

Im Oberlauf wird daher bei strömendem Zufluss asymptotisch Normalabfluss mit einem Wasserstand $h_\infty = \frac{h_g}{\sqrt{\chi^*}} \approx 1,17h_g$ angenommen. Aus (68) folgt

$$\frac{h_g}{\sqrt{\chi^*}} = h_\infty = \frac{s_0}{I_\infty} = \frac{\lambda h_g}{8\chi^* I_\infty}. \quad (96)$$

Asymptotisch stellt sich ein Gefälle I_∞ ein zu

$$\boxed{I_\infty = \frac{\lambda}{8\chi^{*3/2}} \approx 0,2014\lambda \approx \frac{\lambda}{5}}. \quad (97)$$

Bei strömendem Zufluss im Oberlauf ergibt sich bei $0 < h^* < 1/\sqrt{\chi^*}$ wegen (93) eine Senkungslinie als Wasserspiegel, d. h. $\frac{dh}{dx} < 0$. Liegt an einem Punkt x_a im Oberlauf bezüglich des Punktes x_0 ein positives Gefälle $I(x_a) > 0$ vor, muss dieses Gefälle wegen der Reziprozität zu h stromabwärts zunehmen.

Der Parameter s_0 lässt sich hier aus (54) mit $I_\infty = \frac{s_0}{h_\infty}$ bestimmen zu $s_0 = h_\infty I_\infty = \frac{\lambda h_g}{8\chi^{*2}}$.

So ergibt das Gefälle I als Funktion von h^*

$$\boxed{I(h^*) = \frac{\lambda}{8\chi^{*2}h^*}}. \quad (98)$$

Speziell in $x = 0$ mit $h(0) = h_g$, also $h^*(0) = 1$ ergibt sich ein Gefälle $I_0 = \frac{\lambda}{8\chi^{*2}}$.

Das entspricht dem Ergebnis aus (71), denn $\sqrt[3]{\frac{8}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{8\chi^{*3/2}} \right)^2} = \frac{\lambda}{8\chi^*}$.

Mit $I^{\lambda^*} = \frac{8I}{\lambda}$ ergibt sich

$$1,6111 \approx \frac{1}{\chi^{*3/2}} < I^{\lambda^*} \leq \frac{1}{\chi^{*2}} \approx 1,8887 \quad (99)$$

und aus

$$I^{\lambda^*} = \frac{1}{\chi^{*2}h^*} \iff h^* = \frac{1}{\chi^{*2}I^{\lambda^*}}$$

durch Ersetzen von h^* in (91) schließlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{4h_g}{\lambda\sqrt{\chi^*}} \left(\frac{1/(\chi^{*2}I^{\lambda^*})^2 - 1/\chi^*}{\sqrt{\chi^*}} + \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\chi^{*2}I^{\lambda^*}} \sqrt{\chi^*} \right) + \frac{\log |\chi^*/(\chi^{*4}I^{\lambda^*}) - 1|}{\chi^{*3/2}} \right) \\ &= \frac{4h_g}{\lambda\sqrt{\chi^*}} \left(\frac{1 - \chi^{*4}I^{\lambda^*2}}{\chi^{*9/2}I^{\lambda^*2}} + \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\chi^{*3/2}I^{\lambda^*}} \right) + \frac{\log |1/(\chi^{*3}I^{\lambda^*}) - 1|}{\chi^{*3/2}} \right) \end{aligned} \quad (100)$$

als implizit geschlossene Darstellung des Gefälles I als Funktion des Ortes x im Oberlauf bei strömendem Zufluss an den Querschnitt in $x = 0$ mit der kritischen Wassertiefe h_g .

Graphisch dargestellt wird das Sohlenprofil z , das sich durch Integration des Gefälles I ergibt, zusammen mit der darüber verlaufenden Spiegellinie in Abb. 33.

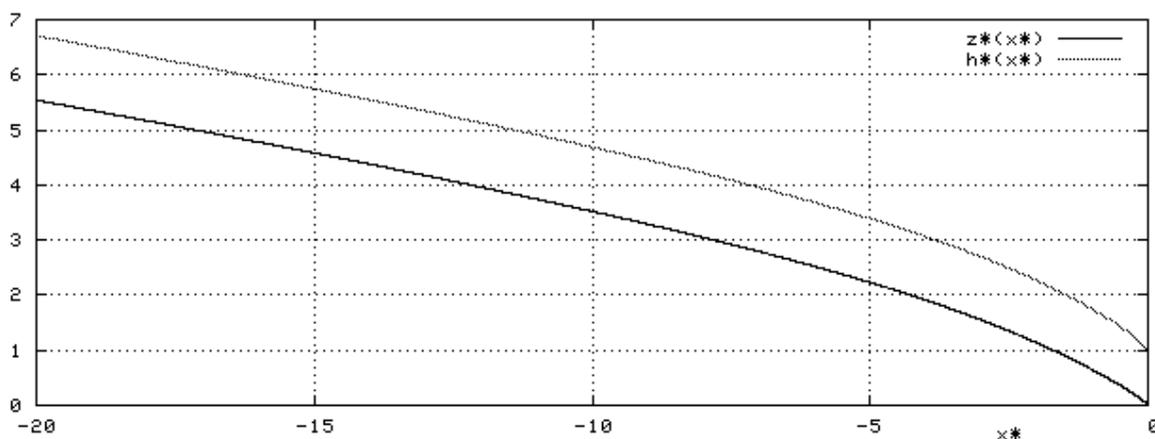


Abbildung 33: Spiegellinie und Sohlenprofil im gekoppelten stationären Transportgleichgewicht eines Rechteckgerinnes konstanter Breite und beweglicher Sohle. Längeneinheit ist die kritische Wassertiefe h_g , die bei $x = 0$ als Randbedingung vorgegeben wird. Die Graphen für das Sohlenprofil z (**fett**) und die Spiegellinie $h + z$ verlaufen nicht parallel! Der Abstand von einer Längeneinheit in $x = 0$ wächst oberstrom bis auf etwa sieben Sechstel Längeneinheiten.

5.2 Potenzreihenentwicklung und explizite Näherungsformeln für die Spiegellinie im gekoppelten Transportgleichgewicht bei stationär-ungleichförmigem Abfluss

Nur für $|z| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^n z^k$ gegen ihren Grenzwert $\frac{1}{1-z}$. Man setzt $z = \Xi h^{*2} = \chi^* h^{*2}$, also $z = u^2$. Für $1 > |z| = |\Xi h^{*2}| = |\chi^* h^{*2}|$, oder, hierzu äquivalent, für $h^* < \frac{1}{\sqrt{\chi^*}}$ lässt sich (287) als Potenzreihe schreiben. Diese Potenzreihe lässt gliedweise integrieren; und die Reihe der integrierten Glieder lässt sich umkehren. So wird in Anhang C.5 polynomiale folgende Näherung als explizite Darstellung für die Lösung zu (65) gewonnen:

$$h^* = 1 - 2\lambda x^* \left(1 - \frac{4\lambda^2 \sqrt{\chi^*}}{3} x^{*2} + \frac{2\lambda^3}{\sqrt{\chi^*}} x^{*3} + \frac{32\lambda^4 \chi^{*3/2}}{15} x^{*4} - \frac{40\lambda^5 \sqrt{\chi^*}}{3} x^{*5} + \dots \right). \quad (101)$$

Nach Tabelle 1 gilt so näherungsweise

$$h^* \approx 1 - 2\lambda x^* \left(1 - \frac{8}{7}(\lambda x^*)^2 + \frac{7}{3}(\lambda x^*)^3 + \frac{28160}{21767}(\lambda x^*)^4 - \frac{80}{7}(\lambda x^*)^5 + \dots \right).$$

Praktisch interessant ist eine solche Reihenentwicklung nur für Punkte x nahe Null. Abb. 34 zeigt die Divergenz der Reihenentwicklung (101) oberstrom bei strömendem Zufluss bereits an Orten x , deren Entfernung $|x|$ kleiner als die kritische Wassertiefe $h_g = h(0)$ im Nullpunkt des Ortskoordinatensystems ist.

Näher liegt daher, als geschlossene Näherung $h^*(x^*)$ eine Funktion zu bestimmen, die den Randbedingungen in $x = 0$ und den im letzten Unterabschnitt gewonnenen asymptotischen Eigenschaften für $-\infty < x^* \leq 0$ bzw. $1/\sqrt{\chi^*} > h^* \geq 1$ entspricht. Aus dem Ansatz einer gebrochen rationalen Funktion ergibt sich nach den Ausführungen in Anhang C.6

$$\lambda x^*(h^*) \approx -\frac{10}{3} \left(\frac{h^* - 1}{\sqrt{h^* - 1/\sqrt{\chi^*}}} \right)^{\frac{5}{4}}. \quad (102)$$

Abb. 35 zeigt eine Grafik dieser Näherungslösung.

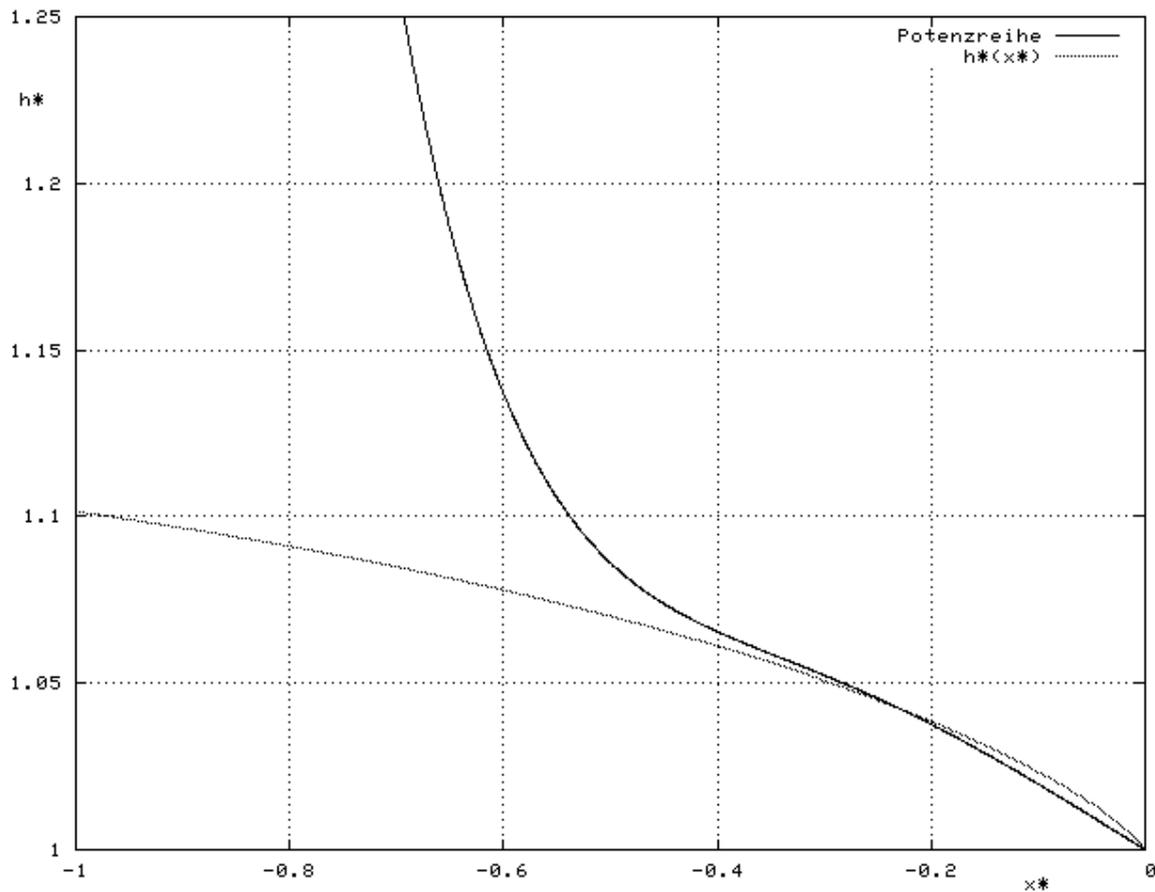


Abbildung 34: Die Potenzreihenentwicklung (101) ist nur in unmittelbarer Nähe zum Nullpunkt brauchbar, an dem die kritische Abflusstiefe h_g erreicht wird.

Ihre Umkehrung im Bereich der Senkungslinie lässt sich mit $\tilde{x} = \left(\frac{3\lambda x^*}{10}\right)^{\frac{4}{5}}$ darstellen als

$$h^* = 1 + \tilde{x} \left(\sqrt{\frac{\tilde{x}^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}} - 1 - \frac{\tilde{x}}{2} \right) \approx 1 + \tilde{x} \left(\sqrt{\frac{\tilde{x}^2}{4} + \frac{1}{6}} - \frac{\tilde{x}}{2} \right) \quad (103)$$

mit dem Funktionsgraphen in Abb. 36.

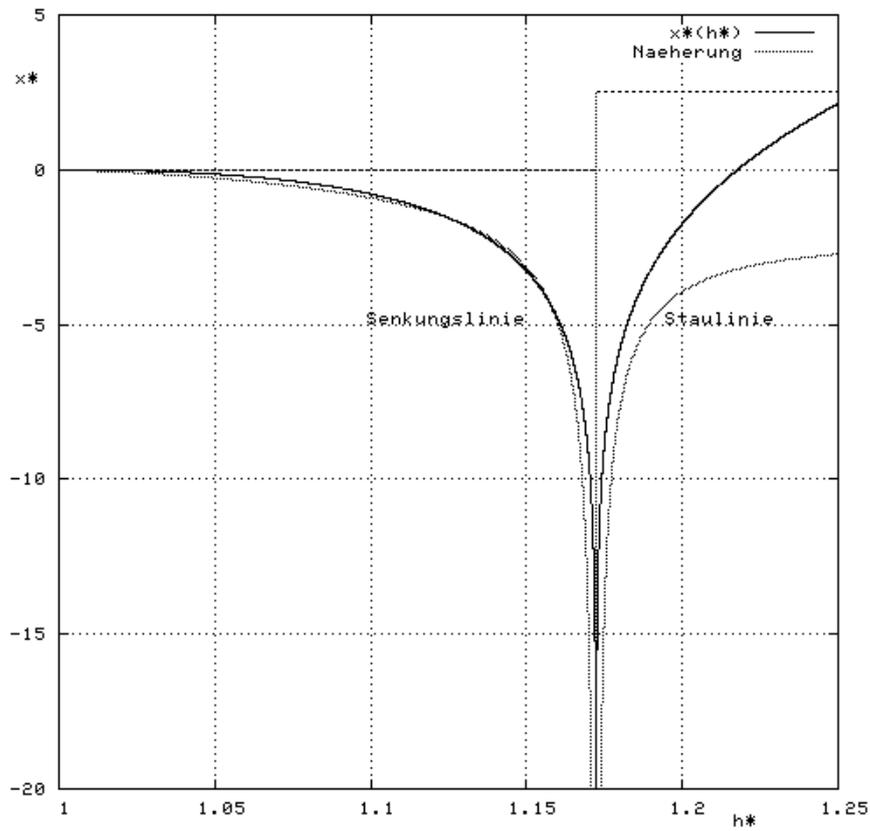


Abbildung 35: Geschlossen umkehrbare Näherungslösung (102) (gestrichelt) zu (65) im Bereich der Senkungslinie für $\lambda = 1$. Für die Staulinie ist die Näherung nicht brauchbar.

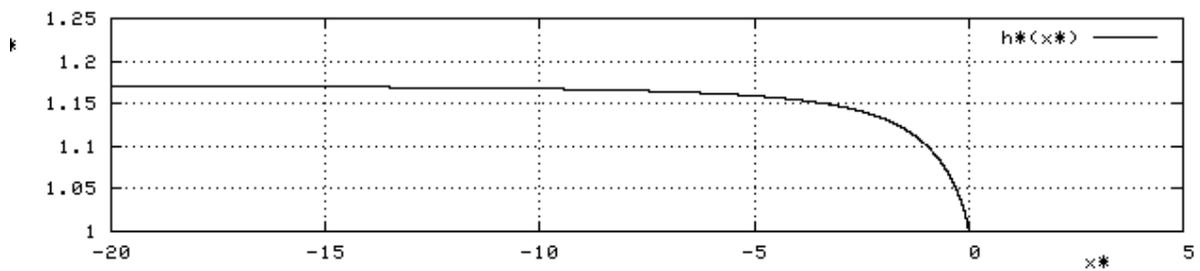


Abbildung 36: Geschlossene Umkehrung (103) der Näherungslösung (102) im Bereich der Senkungslinie für $\lambda = 1$.

5.3 Der Einfluss veränderlicher Rauheit auf das Transportgleichgewicht in Rechteckgerinnen konstanter Breite

Um das stationäre Transportgleichgewicht im offenen Rechteckgerinne konstanter Breite bei veränderlichem Widerstandsbeiwert λ zu untersuchen, lassen sich die Differentiale der Gleichung (65) $\frac{s_0 h^2 - (\lambda/8) h_g^3}{h^3 - h_g^3} = \frac{dh}{dx}$ für den Wasserstand $h = h(x)$ über der Sohle nicht mehr trennen, wenn $\lambda = \lambda(x)$ als Funktion des Ortes x gegeben ist.

Für spezielle Fragen ist durchaus interessant, den Widerstandsbeiwert λ nicht als Funktion des Ortes x , sondern nur als eine des Wasserstandes h zu betrachten. So wird z. B. ein im Versuch beobachteter Anstieg des Wasserstandes zu Beginn der Transportprozesse mit einem Anstieg der hydraulischen Rauheit in Verbindung gebracht (sog. Formwiderstand der Sohle, [55] 3.7.4.2). Damit ist λ jedoch abhängig von der Feststoff-Froude-Zahl F_r^* (Ansatz von Yalin und Scheuerlein, [55] 3.7.4.2, S. 42) oder anderen Grössen nach einem Transportgesetz.

Ist λ abhängig von F_r^* , so hängt λ von dem bei einem Transportgleichgewicht konstanten Produkt hI aus Wasserstand h mal Gefälle I ab. λ ist demnach als Funktion des Ortes x ebenfalls konstant und somit unabhängig von h . Wird im stationären Transportgleichgewicht eine ortsabhängige Änderung von λ beobachtet, die sich als eine Funktion $\lambda = \lambda(h)$ in h ausdrücken lässt, muss diese anders erklärt werden.

Die Auswirkungen auf das Gefälle I und den Wasserstand h im stationären Transportgleichgewicht einer solchen lokalen Variabilität des Widerstandsbeiwert λ , die sich als eine Funktion $\lambda = \lambda(h)$ darstellen lässt, kann noch analytisch behandelt. λ lässt sich zerlegen in $\lambda(h) = \lambda_0(d_{ch}) + \lambda_h \left(\frac{h}{d_m} \right)$. Für eine solche Zerlegung lassen sich die Differentiale der Gleichung (65) immer noch trennen.

Indem $\frac{1}{s_0 h^2 - (\lambda/8) h_g^3} \approx \frac{1}{s_0 h^2 - (\lambda_0/8) h_g^3} + \frac{h_g^3 (\lambda_h/8)}{(s_0 h^2 - (\lambda_0/8) h_g^3)^2}$ in λ_0 linearisiert wird, folgt für kleine λ_h

$$\begin{aligned}
x + x_0 &= \int \frac{h^3 - h_g^3}{s_0 h^2 - (\lambda/8) h_g^3} dh = \int \frac{h^3 - h_g^3}{s_0 h^2 - h_g^3 (\lambda_0 + \lambda_h(h))/8} dh \\
&\approx \int \frac{h^3 - h_g^3}{s_0 h^2 - h_g^3 \lambda_0/8} dh + h_g^3 \int \frac{\lambda_h(h) (h^3 - h_g^3)}{8 (s_0 h^2 - h_g^3 \lambda_0/8)^2} dh \\
&= \underbrace{\int \frac{h^3 - h_g^3}{s_0 h^2 - h_g^3 \lambda_0/8} dh}_{\text{bekannte Lsg. fuer } \lambda_0} + h_g^3 T(h) \tag{104}
\end{aligned}$$

Das Integral für den Störterm $T = T(h) = \int \frac{\lambda_h(h) (h^3 - h_g^3)}{8 (s_0 h^2 - h_g^3 \lambda_0/8)^2} dh$ lässt sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
T &= \int \frac{\lambda_h(h) (h^3 - h_g^3)}{8 (s_0 h^2 - h_g^3 \lambda_0/8)^2} dh \\
&= \frac{8}{h_g^2 \lambda_0} \int \frac{\lambda_h(h) (h^3 - h_g^3)}{8 (\chi^* h^2 - h_g^2)^2} dh = \frac{1}{h_g^2 \lambda_0} \int \frac{\lambda_h(h) (h^3 - h_g^3)}{(\chi^* h^2 - h_g^2)^2} dh \\
&= \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{1}{h_g^2} \int \frac{\lambda_h(h) h^3}{(\chi^* h^2 - h_g^2)^2} dh - h_g \int \frac{\lambda_h(h)}{(\chi^* h^2 - h_g^2)^2} dh \right) \\
&= \frac{1}{4\lambda_0} \left[\frac{1}{h_g^3} \left(\int \frac{\lambda_h(h) h^2}{(\sqrt{\chi^*} h - h_g)^2} dh - \int \frac{\lambda_h(h) h^2}{(\sqrt{\chi^*} h + h_g)^2} dh \right) \right. \\
&\quad \left. + h_g \left(\int \frac{\lambda_h(h)}{h(\sqrt{\chi^*} h - h_g)^2} dh - \int \frac{\lambda_h(h)}{h(\sqrt{\chi^*} h + h_g)^2} dh \right) \right] \tag{105}
\end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $s_0 = h_g \chi^* \lambda_0$ wird vorausgesetzt, dass $\lambda(h_g) = \lambda_0$, also $\lambda_h(h_g) = 0$ ist. Geschlossen darstellen lassen sich die Integrale in (105) im allgemeinen nicht; doch ergibt sich die durch Variation der Rauheit gestörte Lösung h aus der ungestörten Lösung \bar{h} für eine ungleichförmig-stationäre Spiegellinie in einem Rechteckgerinne konstanter Breite implizit als

$$x(h) = \bar{h}^{-1} + h_g^3 T(h). \quad (106)$$

Hierbei bezeichnet \bar{h}^{-1} die *Inverse* zu $\bar{h}(x)$.

Die Integraldarstellung (64) zeigt wie sich ein direkt vom Ort x abhängiger Widerstandsbeiwert λ auswirkt:

$$\underbrace{\frac{h^2}{2} + \frac{h_g^3}{h} - \frac{3}{2}h_g^2}_{\text{beschränkt, wenn } h \text{ beschränkt und } \inf_{h>0}} = s_0 x - \frac{h_g^3}{8} \int_0^x \frac{\lambda dx'}{h^2} = x \left(\underbrace{s_0 - \frac{h_g^3}{8x} \int_0^x \frac{\lambda dx'}{h^2}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty} \right).$$

Bleibt die Wassertiefe $h = h(x)$ für große x beschränkt mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \inf h(x) > 0$, gilt daher

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\lambda dx'}{h^2} = \frac{8s_0}{h_g^3}. \quad (107)$$

Wird für große x nach x abgeleitet, folgt aus

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \left(\frac{8s_0}{h_g^3} \right) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\lambda dx'}{h^2} \right) \\ &= \frac{1}{x} \frac{\lambda}{h^2} - \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{\lambda dx'}{h^2} = \frac{1}{x} \frac{\lambda}{h^2} - \frac{8s_0}{h_g^3 x} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{\lambda}{h^2} - \frac{8s_0}{h_g^3} \right) \end{aligned}$$

zunächst $h^2 = \frac{\lambda h_g^3}{8s_0}$ und mit $s_0 = h_g I_g$ schließlich

$$\boxed{h^2(x) = \frac{\lambda(x)}{8I_g} h_g^2} \quad (108)$$

für große x .

So wirkt sich also für den Wasserstand h am Ort x auch der Widerstandsbeiwert λ unmittelbar am Ort x aus. Der Widerstandsbeiwert $\lambda(0)$ in $x = 0$ beeinflusst h in x insoweit linear, als er die Grenztiefe $h_g = h(0)$ mit bestimmt. (Grafik Abb. 37)

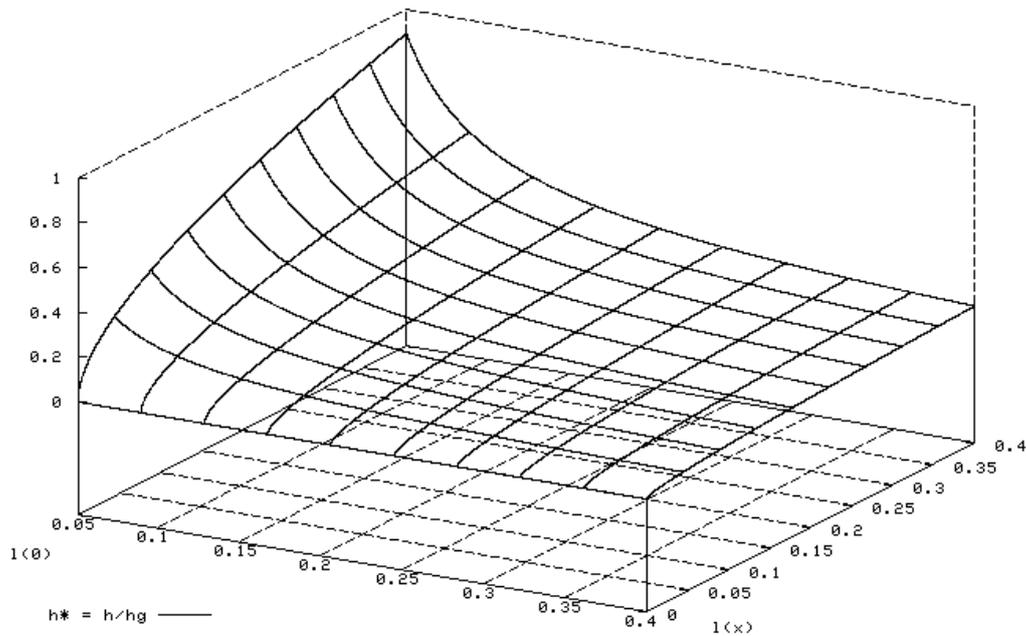


Abbildung 37: Der dimensionslose Wasserstand $h^* = \frac{h}{h_g}$ als Funktion $h^* = h^*(\lambda(0), \lambda(x))$ nach (108) in den Widerstandsbeiwerten $\lambda(0)$ und $\lambda(x)$ bei einem Grenzgefälle $I_g = \frac{1}{64} \cdot h_g$ ist linear in $\lambda(0)$. Demnach ist h^* umgekehrt proportional zu $\lambda(0)$.

Schließlich interessieren Zahlenwerte für die asymptotischen Gefälle. Der Widerstandsbeiwert λ ist jedoch nur ein relativer Rauheitsparameter in dem Sinn, dass er neben der absoluten Rauheit k auch vom hydraulischen Radius r_H abhängt. Für die in älterer Literatur übliche Chézy-Konstante

$$C_{Chézy} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad (109)$$

ergibt sich über

$$\lambda = \frac{8g}{C_{Chézy}^2} \quad (110)$$

das asymptotische Gefälle I_∞ aus (97) zu

$$I_\infty = \frac{g}{\chi^{*3/2} C_{Chézy}^2} \approx \frac{15,8}{C_{Chézy}^2} \quad \text{für } C_{Chézy} \text{ in } \frac{\sqrt{m}}{s} \quad (111)$$

Tabelle 2: Chézy-Konstanten, Widerstandsbeiwerte und asymptotische Gefälle

$C_{Chézy}$	$\left[\frac{\sqrt{m}}{s} \right]$	15	20	25	30	35	40	45
λ		0,35	0,2	0,125	0,09	0,064	0,049	0,039
I_∞		7%	4%	2,5%	1,7%	1,3%	1%	7,8‰

Bei geschiebeführenden natürlichen Fließgewässern ergeben Chézy-Konstanten um $30 \frac{\sqrt{m}}{s}$ Widerstandsbeiwerte λ um 0,09. Asymptotische Normalabflussgefälle liegen unter den Voraussetzungen der Herleitung dieses Gesetzes somit um zwei Prozent.

5.4 Das gekoppelte schubspannungsbestimmte Transportgleichgewicht bei stationär-ungleichförmigem Abfluss und veränderlicher Breite eines Rechteckgerinnes

Wie sich eine lokale Störung der Gerinnebreite auf einen Normalabfluss auswirkt, ist bereits in 4.3 diskutiert worden. Um explizite Aussagen für den stationär-ungleichförmigen Abfluss zu gewinnen, muss auf die differentielle Darstellung (74) des gekoppelten Gleichgewichtes in 4.2 zurückgegriffen werden.

Geschlossen integrieren lässt sich nur für konstanten Widerstandsbeiwert λ unter den Annahmen

$$\frac{b_0}{b} = \left(\frac{h}{h_g} \right)^n \quad (112)$$

$$I = I_g \left(\frac{h_g}{h} \right)^m \quad (113)$$

zwischen Wasserstand h und Breite b bzw. Gefälle I für $m, n = 1, 2$ ist. Hierbei ist wie in (74) b_0 die Breite des Rechteckgerinnes in dem Querschnitt am Ort x_0 , an dem die kritische Wassertiefe h_g angenommen wird.

Wesentlich vereinfacht werden die Rechnungen durch den dimensionslosen Wasserstand $h^* = \frac{h}{h_g}$, also $\frac{b_0}{b} = h^{*n}$, und den dimensionslosen Ort $x^* = \frac{x}{h_g}$. Mit $\mathbf{s}_v = hI$ nach (58) (im Gegensatz zu s_0 bei konstanter Breite hier s_v i. a. nicht konstant!) und (73) ist $\mathbf{s}_v = h \frac{I_g}{h^{*m}}$. So ergibt sich aus (75)

$$\frac{dh^*}{dx^*} = \frac{dh}{dx} = \frac{I_g h^{*3+n-m} - (\lambda/8)}{h^{*3+n} - 1}. \quad (114)$$

Die Differentiale in (114) werden getrennt zu

$$\begin{aligned} x^* + \frac{x_0}{h_g} &= \int \frac{h^{*3+n} - 1}{I_g h^{*3+m+n} - (\lambda/8)} dh^* = \frac{8}{\lambda} \int \frac{h^{*3+n} - 1}{(8I_g/\lambda) h^{*3+m+n} - 1} dh^* \\ &= \frac{8}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{8I_g} \right)^{\frac{1}{3+m+n}} \int \frac{\{[\lambda/(8I_g)]^{\frac{1}{3+m+n}} u\}^{3+n} - 1}{u^{3+m+n} - 1} du \quad \text{mit } u = \left(\frac{8I_g}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3+m+n}} h^* \\ &= \frac{8}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{8I_g} \right)^{\frac{1}{3+m+n}} \left[\left(\frac{\lambda}{8I_g} \right)^{\frac{3+n}{3+m+n}} \int \frac{u^{3+n} du}{u^{3+m+n} - 1} - \int \frac{du}{u^{3+m+n} - 1} \right]. \quad (115) \end{aligned}$$

Für den Fall $m = 1$ lässt sich das erste Integral nach der ersten Substitutionsregel lösen, da der Zähler des Bruches proportional zur Ableitung des Nenners ist. So folgt für $m = 1$

$$x^* + \frac{x_0}{h_g} = \frac{8}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{8I_g} \right)^{\frac{1}{4+n}} \left[\left(\frac{\lambda}{8I_g} \right)^{\frac{3+n}{4+n}} \frac{\log |u^{4+n} - 1|}{4+n} - \int \frac{du}{u^{4+n} - 1} \right]. \quad (116)$$

Analytisch lässt sich das noch nicht aufgelöste Integral in (116) noch für die zwei Fälle $n = 0$ (b konstant, ist bereits diskutiert) und $n = 2$ behandeln. Für $n = 1$ wäre die für eine Zerlegung in Partialbrüche notwendige Faktorisierung von $u^5 - 1$ in seine (komplexen) Nullstellen recht aufwendig. Über sukzessive Partialbruchzerlegung folgt

$$\begin{aligned} & \int \frac{du}{u^6 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{du}{u^3 + 1} - \int \frac{du}{u^3 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(\int \frac{du}{u+1} - \int \frac{u-2}{u^2 - u + 1} du \right) - \left(\int \frac{du}{u-1} - \int \frac{u+2}{u^2 + u + 1} du \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left(\log \left| \frac{u+1}{u-1} \right| + \frac{1}{2} \log \left| \frac{u^2 + u + 1}{u^2 - u + 1} \right| + \int \frac{du}{u^2 - u + 1} - \int \frac{du}{u^2 + u + 1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\operatorname{arctanh}(u) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \log \left| \frac{u^2 + u + 1}{u^2 - u + 1} \right| + \int \frac{du}{(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \int \frac{du}{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \operatorname{arctanh}(u) + \frac{1}{4} \log \left| \frac{u^2 + u + 1}{u^2 - u + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctan} \left(u - \frac{1}{2} \right) - \operatorname{arctan} \left(u + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Demnach ist im Fall $m = 1$ und $n = 2$ mit $u = \left(\frac{8I_g}{\lambda} \right)^{\frac{1}{6}} h^*$

$$\begin{aligned} x^* + \frac{x_0}{h_g} &= \frac{8}{3\lambda} \left(\frac{\lambda}{8I_g} \right)^{\frac{1}{6}} \left\{ \left(\frac{\lambda}{8I_g} \right)^{\frac{5}{6}} \frac{\log |u^6 - 1|}{2} - \operatorname{arctanh}(u) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} \log \left| \frac{u^2 + u + 1}{u^2 - u + 1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctan} \left(u - \frac{1}{2} \right) - \operatorname{arctan} \left(u + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (117) \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck (Grafik in Abb. 38) finden sich sowohl Terme der Lösung (86) für die stationär-ungleichförmige Spiegellinie im gekoppelten Transportgleichgewicht bei konstanter Breite als auch solche der Lösung von Bresse (32) für die Spiegellinie bei fester Sohle konstanten Gefälles bei konstanter Gerinnebreite wieder.

Mit $x^* \rightarrow -\infty$ für $0 < u \nearrow 1$ wird hier asymptotisch $h^*_\infty = \left(\frac{\lambda}{8I_g} \right)^{\frac{1}{6}}$ erreicht. So folgt für das asymptotische Gefälle $I_\infty = I_g^{\frac{7}{6}} \left(\frac{8}{\lambda} \right)^{\frac{1}{6}}$.

Nach der Voraussetzung $\frac{b_0}{b} = \left(\frac{h}{h_g}\right)^n$ im Ansatz muss bei $n = 2$ jedoch eine asymptotische Breite b_∞ vorgegeben sein mit $\frac{b_\infty}{b_0} = \left(\frac{I_g}{I_\infty}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{8I_g}{\lambda}}$. Die Breite b wird als Funktion $b = b(x)$ des Ortes x bestimmt durch $b(x) = b_0 h^{*2}(x)$, wobei sich $h^*(x) = h^*(x^* h_g)$ als Umkehrung von (117) ergibt.

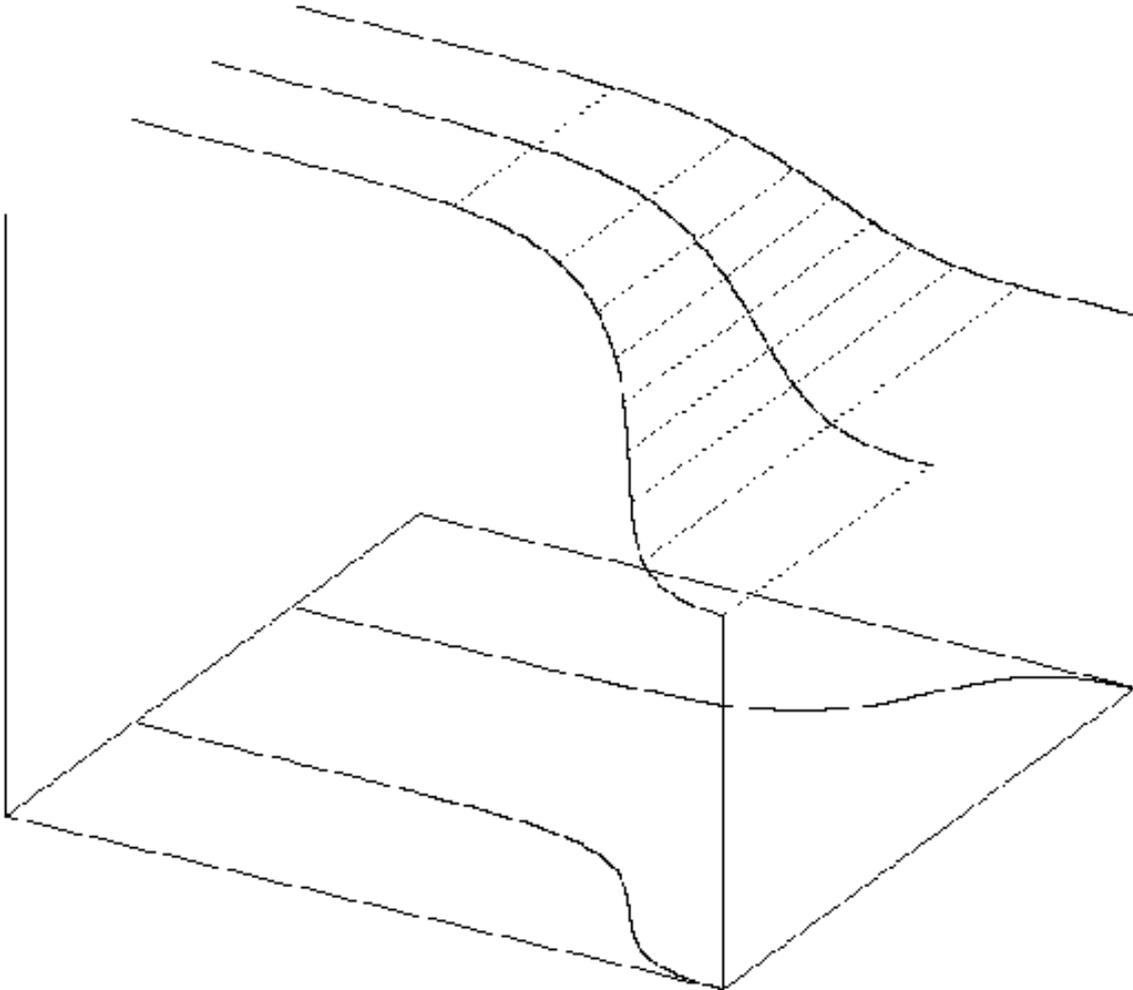


Abbildung 38: Lösung der Spiegellinie über (116) für $\lambda = 1$ und zugehörigem Grundriss des Rechteckgerinnes nach (112), **fett** eingezeichnet auf Sohlniveau. Das Gefälle wird nicht wiedergegeben. Am Auslauf wird die kritische Wassertiefe h_g angenommen.

5.5 Einstellzeit für das stationäre Gleichgewicht bei schubspannungsgetriebenem Transport

Um die Zeit abzuschätzen, in der sich ein Transportgleichgewicht in einem Rechteckgerinne konstanter Breite einstellt, muss die Kontinuitätsgleichung (47) für den instationären Geschiebetransport in einer Dimension untersucht werden. Für Gerinne konstanter Breite ergibt sich unter $q_B = \Phi \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}$ vereinfacht:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial q_B}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}. \quad (118)$$

Als Gefälle I wird in dieser Arbeit der Sinus des lokalen Sohlneigungswinkels verwendet. So gilt nur bei kleinen Gefällen näherungsweise $I \approx -\frac{dz}{dx}$. Mit dieser Näherung ergibt sich die Zeitableitung des Gefälles aus (118) nach (302) im Anhang C.7 zu

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g} d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial I}{\partial x} \right).$$

Nahe liegt hier wieder, den Wasserstand h in eine Summe $h = \bar{h} + h^\Delta$ und das Gefälle I in die Summe $I = \bar{I} + I^\Delta$ zu zerlegen. \bar{h} und \bar{I} beschreiben das erwartete Transportgleichgewicht. h^Δ und I^Δ sind die Differenzen hierzu im Nicht-Gleichgewichtszustand. Aus $\bar{h}\bar{I} = \text{const}$ ergibt sich $\bar{h} \frac{d\bar{I}}{dx} = -\bar{I} \frac{d\bar{h}}{dx}$. So folgt (304) im Anhang C.7 mit

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g} d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(I^\Delta - \frac{h^\Delta}{\bar{h}} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} + \bar{I} \frac{\partial h^\Delta}{\partial x} + \bar{h} \frac{\partial I^\Delta}{\partial x} \right]$$

und dem Ansatz $h^\Delta = \frac{dh}{dI} I^\Delta$ für kleine I^Δ .

Wird das Transportgleichgewicht bei einem Normalabfluss mit $\bar{h} = h_n$ und $\bar{I} = I_n$ erreicht, gilt $\frac{d\bar{h}}{dx} = 0$; und (304) vereinfacht sich wesentlich zu

$$\boxed{\frac{\partial I^\Delta}{\partial t} = -I_n \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g} d_m}{\varrho'}} \cdot \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2} = -I_n \cdot \frac{dh^\Delta}{dI} \cdot \frac{dq_B}{d(hI)} \cdot \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2}} \quad (119)$$

Offensichtlich liegt hier eine Wärmeleitungsgleichung in ihrer Grundform vor. Zu ihrer Lösung wird auf die einschlägige Literatur verwiesen. Die Temperatur T wird hier durch das Gefälle I^Δ ersetzt. Ein Gleichgewicht tritt erst nach unendlich langer Zeit ein. Das Analogon zu einem Wärmeleitungskoeffizienten wird durch den Term $-I_n \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\rho'}}$ bestimmt. Empfindlich auf diesen Koeffizienten wirken sich neben dem Normalabflussgefälle I_n zum einen der Widerstandsbeiwert über $\frac{dh^\Delta}{dI}$, zum anderen die Ableitung $\frac{d\Phi}{dF_r^*}$ aus.

Damit sich in Modellversuchen schnell ein Transportgleichgewicht einstellt, sollte also auf starke Gefälle beim angestrebten Gleichgewichtszustand bei einer Transportrate geachtet werden, die nur etwas über der kritischen Schwelle liegt. Sichergestellt werden muss allerdings, dass der Transport noch differenzierbar von der Feststoff-Froude-Zahl abhängt.

Für ein Transportgleichgewicht bei stationär-ungleichförmigem Abfluss wird (65) in (304) eingesetzt; denn lässt sich verifizieren, dass Gefälleänderungen nur langsam gegenüber den hydraulischen Vorgängen ablaufen, können bei konstantem Abfluss die Formeln für die stationäre Hydraulik verwendet werden.

(307) im Anhang C.7 ergibt so

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I^\Delta}{\partial t} \\ = & \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\rho'}} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{dh^\Delta}{dI} \left[\left(\frac{2s_0 I^\Delta}{\bar{h}^3 - h_g^3} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dI^\Delta}{dx} \right) - \frac{1}{\bar{I}} \frac{dI^\Delta}{dx} \right] \frac{d\bar{h}}{dx} - \frac{I^\Delta}{\bar{I}} \frac{2s_0 \bar{h}}{\bar{h}^3 - h_g^3} - \bar{I} \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2} \right\} \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite befinden sich nur noch additive Terme, die von I^Δ und von der ersten Ortsableitung $\frac{dI^\Delta}{dx}$ abhängen. Der Term $-\frac{I^\Delta}{\bar{I}} \frac{2s_0 \bar{h}}{\bar{h}^3 - h_g^3} = -I^\Delta \frac{2\bar{h}^2}{\bar{h}^3 - h_g^3}$ begünstigt hier das Abklingen von Gefälleabweichungen vom Gleichgewicht in Nähe der kritischen Wassertiefe. Hier verhalten sich die fließgeschwindigkeitsabhängigen Geschiebetransportformeln grundverschieden. Sie neigen gerade im Bereich der kritischen Wassertiefe zu einem oszillatorischen Gleichgewicht. Hierauf wird in 5.7 eingegangen.

5.6 Sensitivitäten

Als Ergebnis der bisherigen Untersuchungen können folgende qualitative Aussagen zur Empfindlichkeit des Transportgleichgewichtes gegenüber hydromechanischen Parametern gewonnen werden. Bei stationärem Abfluss in Gerinnen mit festgelegter Breite b sind nur

- der Abfluss Q
- die absolute Rauheit k
- ggf. weitere Parameter, die an festen Punkten des Gerinnes eine Grenztiefe h_g festlegen, z. B. durch Regulierelemente (Kontrollbauwerke)

unabhängige hydromechanische Größen, die die bei schubspannungsbestimmtem Transportgleichgewicht für Geschiebe wechselseitig abhängigen Größen

- Wasserstand h
- Gefälle I

bei stationär-ungleichförmigem Abfluss festlegen. Hierbei zeigt das Gefälle I eine hohe Empfindlichkeit gegenüber dem Widerstandsbeiwert λ , der wiederum sehr von der absoluten Rauheit k , aber nur geringfügig von h abhängt. In Gerinnen konstanter Breite verhalten sich die Größen h und I im schubspannungsbestimmten Transportgleichgewicht einander reziprok. Bei Normalabfluss kann entweder das Gefälle oder der Wasserstand frei gewählt werden.

Bei natürlichen Fließgewässern kann davon ausgegangen werden, dass Normalabfluss nur als asymptotischer Normalabfluss vorliegt. Es gibt also einen Querschnitt, in dem eine kritische Abflusstiefe h_g angenommen wird. Parameter, die die kritische Tiefe an diesem Punkt festlegen, wirken wesentlich auch fernab auf die Sohlform und auf die dort nahezu parallel zu ihr verlaufende Spiegellinie.

Die für die absoluten Frachtraten wesentlichen sedimentologischen Parameter (Korngröße und -form) beeinflussen das sich durch Wasserstand und Gerinnemorphologie manifestierende stationäre Gleichgewicht nur durch ihren Einfluss auf die Rauheit. Entscheidend wirken sie sich als frachtbestimmende Parameter bei instationären Vorgängen aus. Hier wird ein schnelles Einstellen des Gleichgewichtes durch starkes Gefälle, empfindliches Ansprechen der Frachtrate gegenüber Änderung der Feststoff-Froude-Zahl und großes Korn begünstigt.

5.7 Transportgleichgewicht für fließgeschwindigkeitsbestimmte Transportgesetze

Um die in Abschnitt 3.7 gewonnene Gleichung (59) für Stationarität und Kontinuität fließgeschwindigkeitsbestimmten Geschiebetransports mit der Hydraulik zu koppeln muss die differentielle Darstellung

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{bh^2}{bh^3 - b_0h_g^3} \left(hI - \frac{b_0h_g^3\lambda}{8bh^2} + \frac{b_0}{b^2} \cdot \frac{h_g^3}{h} \cdot \frac{db}{dx} \right)}; \quad (120)$$

der Spiegellinie verwertet werden. Indem (120) in (59) eingesetzt wird, folgt

$$\begin{aligned} \frac{db}{dx} &= \frac{2\mathbf{g}b_0}{\Phi} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{bh^2}{bh^3 - b_0h_g^3} \left(hI - \frac{b_0h_g^3\lambda}{8bh^2} + \frac{b_0}{b^2} \cdot \frac{h_g^3}{h} \cdot \frac{db}{dx} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{2\mathbf{g}b_0}{\Phi} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{bh^2}{bh^3 - b_0h_g^3} \left(hI - \frac{b_0h_g^3\lambda}{8bh^2} \right) \\ &= \left(1 - \frac{2\mathbf{g}b_0}{\Phi} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{bh^2}{bh^3 - b_0h_g^3} \frac{b_0}{b^2} \frac{h_g^3}{h} \right) \frac{db}{dx} \\ &\Leftrightarrow hI - \frac{b_0h_g^3\lambda}{8bh^2} \\ &= \left(\frac{\Phi}{2\mathbf{g}b_0} \left(\frac{h}{h_g} \right)^3 \left(\frac{d\Phi}{d(v^2)} \right)^{-1} \left(h - \frac{b_0h_g^3}{bh^2} \right) - \frac{b_0}{b^2} \frac{h_g^3}{h} \right) \frac{db}{dx} \\ &\Leftrightarrow I - \frac{\lambda}{8} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{b_0}{b} \\ &= \left(\frac{\Phi}{2\mathbf{g}b_0} \left(\frac{d\Phi}{d(v^2)} \right)^{-1} \left[\left(\frac{h}{h_g} \right)^3 - \frac{b_0}{b} \right] - \frac{b_0}{b^2} \frac{h_g^3}{h^2} \right) \frac{db}{dx} \end{aligned} \quad (121)$$

Nach (121) ergibt sich der Wasserstand h im stationären fließgeschwindigkeitsbestimmten Transportgleichgewicht direkt als Funktion $h = h(b)$ der Gerinnebreite b , ohne dass das Gefälle I in dieser Funktion enthalten wäre. So bestimmt (121) das Gefälle I . Der Term $I_n := \frac{\lambda}{8} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{b_0}{b}$ entspricht dem Normalabflussgefälle beim Wasserstand h , dem Widerstandsbeiwert λ und der Breite b unter der Annahme, dass bei einem Normalabfluss bei einer Breite b_0 die kritische Abflusstiefe h_g angenommen würde. So ergibt sich

$$\boxed{I - I_n = \left(\frac{\Phi}{2\mathbf{g}b_0} \left(\frac{d\Phi}{d(v^2)} \right)^{-1} \left[\left(\frac{h}{h_g} \right)^3 - \frac{b_0}{b} \right] - \frac{b_0}{b^2} \frac{h_g^3}{h^2} \right) \frac{db}{dx}}. \quad (122)$$

Besonders empfindlich spricht bei fließgeschwindigkeitsbestimmtem Transport das Sohlenprofil auf sedimentologische Parameter an, die in die Terme Φ und $\frac{d\Phi}{d(v^2)}$ eingehen, also nur dort, wo sich die Gerinnebreite im klassischen Sinn differenzierbar ändert. Nicht erörtert werden soll hier die Frage, inwieweit ein solches Transportgleichgewicht je experimentell validiert worden ist. Das Ergebnis gibt jedoch ein Beispiel dafür, wie aus rein morphologischen Messungen ohne aufwendige Bestimmung von Frachtraten möglich wäre festzustellen, ob das Gleichgewicht von der Konstanz einer hydromechanischen Größe dominiert wird.

Analog zu (302) sind auch zu fließgeschwindigkeitsbestimmten Transportgesetzen Aussagen zur Einstellzeit eines Transportgleichgewichtes möglich. Die Rechnungen werden dank der Konstanz von h etwas einfacher. In Gerinnen konstanter Breite ergibt eine Zerlegung des Wasserstandes h in eine Summe $h = \bar{h} + h^\Delta$ und des Gefälles I in $I = \bar{I} + I^\Delta$ für die Ortsableitungen $\frac{dh}{dx} = \frac{dh^\Delta}{dx}$ und $\frac{dI}{dx} = \frac{dI^\Delta}{dx}$, wenn \bar{h} und \bar{I} das erwartete Transportgleichgewicht bei Normalabfluss beschreiben. h^Δ und I^Δ sind die Differenzen hierzu im Nicht-Gleichgewichtszustand. Rechnungen werden im Anhang C.8 ausgeführt.

Mit

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= 4h \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h}\right)^3 \sqrt{(\mathbf{g}d_m)^3 \varrho'} \frac{h^2}{h^3 - h_g^3} \\ \Theta_2 &= \frac{2}{I^2} \left(\frac{h_g}{h}\right) \frac{h^3 - h_g^3}{h^2}\end{aligned}$$

lässt sich (310) aus Anhang C.8 schreiben als

$$\boxed{\frac{\partial I^\Delta}{\partial t} = -\Theta_1 \frac{dI^\Delta}{dx} \left(1 + \Theta_2 \frac{dI^\Delta}{dx}\right)}. \quad (123)$$

Für $\Theta_2 = 0$ liegt die kanonische Form (144) der im Anhang 7.1 für die Dünenbewegung untersuchten Wellengleichung vor. Sie wird auch als Advektionsgleichung bezeichnet ([29], 3.4.1, 3.17, S. 93) und bildet das hyperbolische Gegenstück zu der parabolischen Diffusionsgleichung. Der Ausbreitungsgeschwindigkeit u_T in (144) entspricht Θ_1 . Für $h \rightarrow h_g$ verschwindet Θ_2 , während Θ_1 unbeschränkt wächst. So ist im Bereich kritischer Abflüsse ein Wellenverhalten der Sohle mit hoher Wanderungsgeschwindigkeit zu erwarten.

5.8 Experimentelle Ergebnisse zur Einstellzeit durch Laborversuche

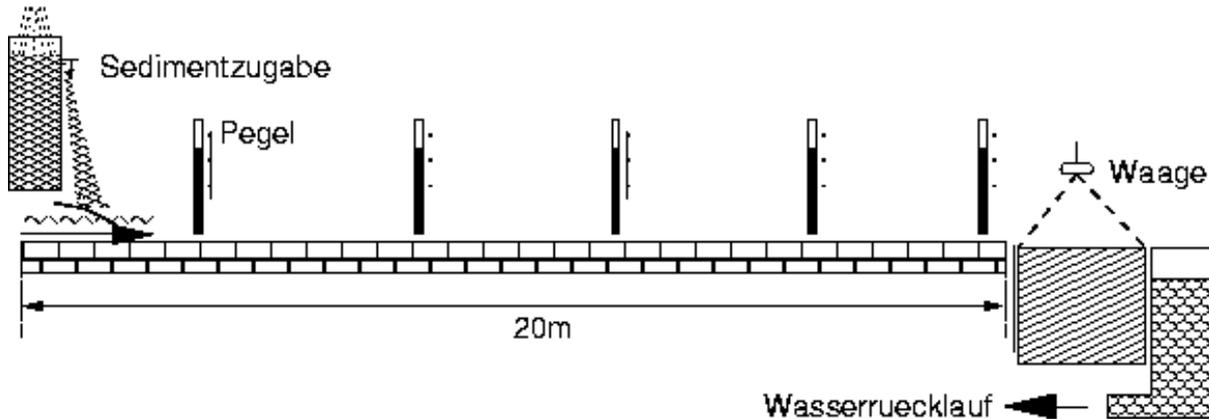


Abbildung 39: Schematischer Aufbau des Versuchsmodells für einen Abschnitt der Weissach. Nicht eingezeichnet ist der Messwagen mit der Sonde zur Aufnahme des Sohlenprofils.

In den Jahren 2000 bis 2002 sind im Wasserbaulaboratorium des Institut für Wasserwesen der Universität der Bundeswehr München an einem Modell für einen Abschnitt der Weissach (Aufbau Abb. 39, Querschnitt Abb. 40) Versuche mit Einkornsediment zum stationären Transportgleichgewicht durchgeführt worden. Hierzu wurden kontinuierlich Sand in die Versuchsrinne zugeführt, der Austrag in einem Absetzbecken aufgefangen und gewogen. Indem das Wehr am Auslauf der Rinne geregelt wurde, sollte in jedem Versuch Normalabfluss eingestellt werden. Generell ist zu jeder Kombination an Parametern ein erster Versuch wiederholt worden, um seine Reproduzierbarkeit zu bestätigen.

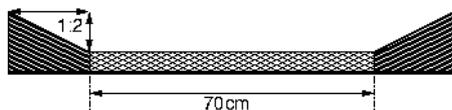


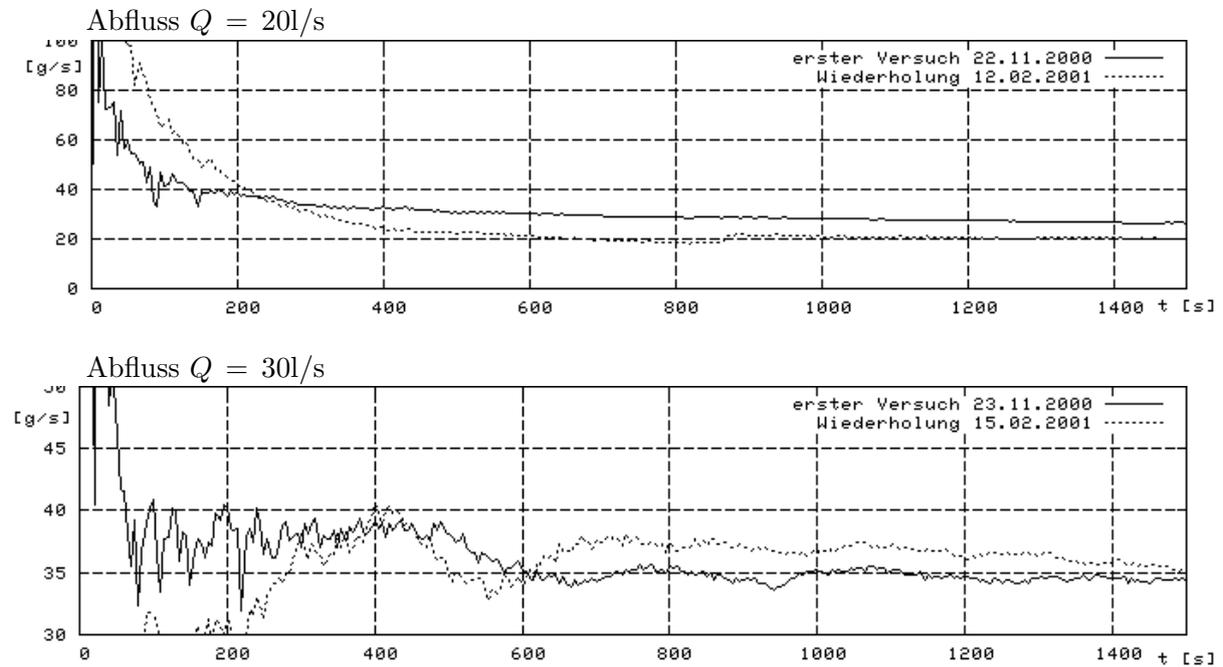
Abbildung 40: Trapezprofil der Rinne des Weissach-Modells.

Tabelle 3: Grenztielen

Q [l/s]	h_g [cm]
20	4,1
30	5,2

Zu Verfügung standen Siebkorndurchmesser von 0,65mm und 2,0mm. Beobachtet worden ist Transport bei Versuchen mit einem Gefälle von 4‰ bzw. 6‰ unter stationären Abflüssen von 20 l/s und 30 l/s. Tabelle 3 zeigt die für diese Abflüsse errechneten, bei einem Trapezgerinne nur mehr iterativ bestimmbar (Gleichung 5. Ordnung!) Grenztielen h_g . Die Versuchsdauer betrug etwa eine Stunde. Während des Ablaufs der Versuche haben sich keine Sohlenprofile aufzeichnen lassen.

Mittlerer Korndurchmesser $d_m = 0,65\text{mm}$



Mittlerer Korndurchmesser $d_m = 2,0\text{mm}$

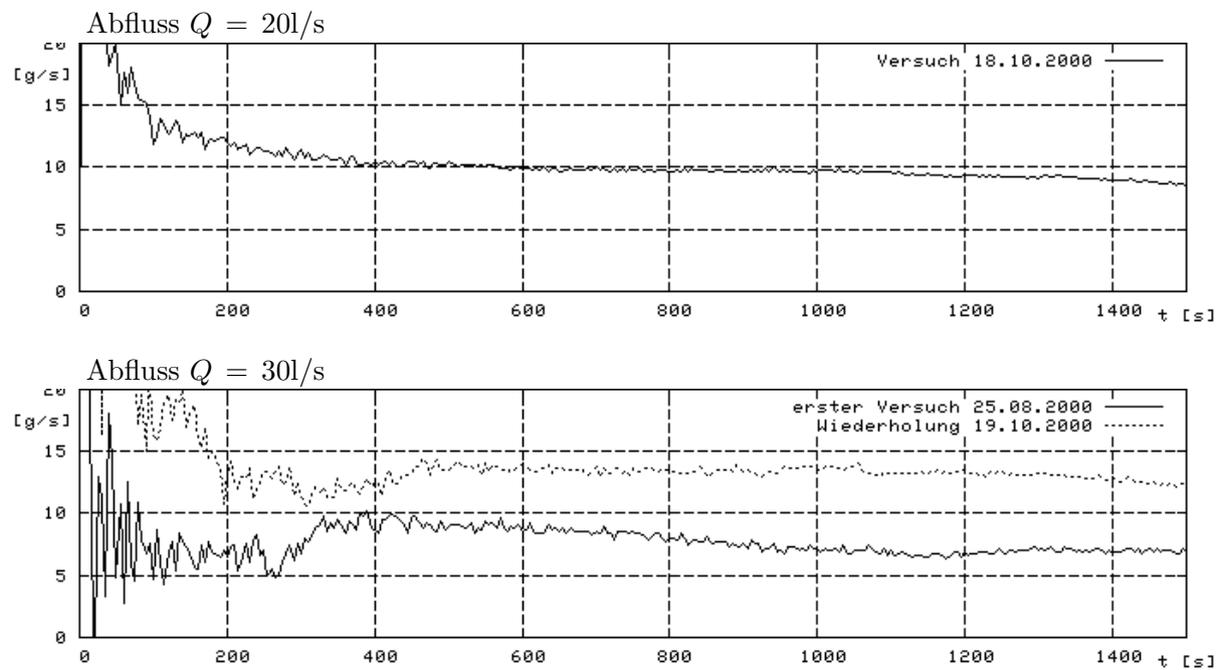


Abbildung 41: Transportgleichgewicht bei Versuchen am Weissach-Modell mit einem Gefälle von 4‰ :

Die Tabellen 4 bis 6 zeigen die hydraulischen Daten der Versuche. Da sich Wasserstände zwischen Erstversuch und Wiederholung nur um etwa 2mm unterschieden haben, sind zu Versuchspaaren hier nur Mittelwerte wiedergegeben worden. Die relative Reproduktionsgenauigkeit der Pegelstände liegt bei etwa 5%.

Tabelle 4: $I = 0,004$; $d_m = 0,65\text{mm}$

Q	h	v	A	F_r	r_H	λ	$C_{Chézy}$	k_{st}	$n = \frac{1}{k_{st}}$	k_F
[l/s]	[cm]	$\left[\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right]$	[cm ²]	—	[cm]	—	$\frac{\sqrt{\text{m}}}{\text{s}}$	$\frac{\text{m}^{1/3}}{\text{s}}$	$\frac{\text{s}}{\text{m}^{1/3}}$	$\frac{\text{m}^{0,3}}{\text{s}}$
20	4,5	355,5	56,3	0,85	4,2	0,042	43,2	73,7	0,014	81,9
30	6,2	510,9	58,7	0,75	5,6	0,051	39,2	63,4	0,016	69,8

Tabelle 5: $I = 0,004$; $d_m = 2,0\text{mm}$ (Einheiten wie in Tabelle 4)

Q	h	v	A	F_r	r_H	λ	$C_{Chézy}$	k_{st}	$n = \frac{1}{k_{st}}$	k_F
20	4,4	346,7	57,7	0,88	4,1	0,039	44,9	76,7	0,013	85,3
30	5,8	473,3	63,4	0,84	5,3	0,041	43,8	71,0	0,014	78,3

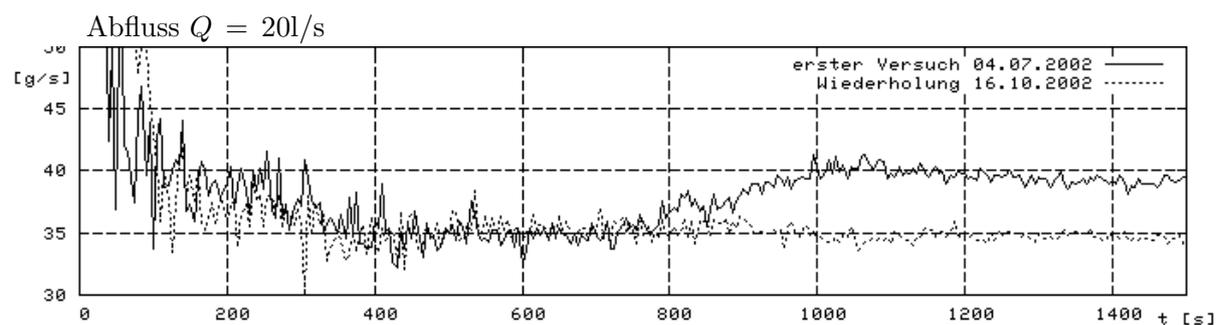
Tabelle 6: $I = 0,006$; $d_m = 0,65\text{mm}$ (Einheiten wie in Tabelle 4)

Q	h	v	A	F_r	r_H	λ	$C_{Chézy}$	k_{st}	$n = \frac{1}{k_{st}}$	k_F
20	4,2	329,3	60,7	0,95	3,7	0,047	40,9	70,6	0,014	78,8
30	5,6	454,7	66,0	0,89	5,1	0,055	37,7	62,0	0,016	68,4

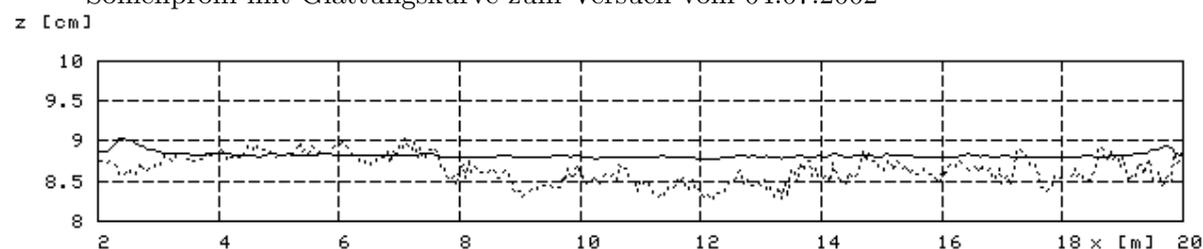
Für Widerstandsbeiwerte λ , bzw. für die zu λ reziproken Chézy-Konstanten, für die Strickler-Beiwerte k_{st} und für die Beiwerte k_F nach Forchheimer werden bei $d_m = 0,65\text{mm}$ zu beiden Gefällen vergleichbare Werte bestimmt. Sie hängen jedoch von Q ab! Die Konstanten zum quadratischen Fließgesetz (λ , $C_{Chézy}$) differieren für die zwei Abflüsse weniger als die Beiwerte für Manning-Strickler oder gar Forchheimer. Nur sehr geringfügig unterscheiden sich die Chézy-Konstanten für den groben Sand mit $d_m = 2,0\text{mm}$. Zu den Versuchen mit letzterem Sand stehen Vergleichsdaten aus den Grundlagenuntersuchungen von Wieprecht ([55] 5.3 S. 76ff) an einer Kippbinne zur Verfügung.

Bei den Versuchen Nr. 081 und Nr. 082-1 mit vergleichbaren Abflüssen ([55] 5.3 Tab. 5.3, S. 76) werden allerdings etwa doppelt so hohe Wasserstände gemessen. So ergeben sich entsprechend höhere Widerstandsbeiwerte $\lambda \approx 0,08$. Die Versuche mit $d_m = 0,65\text{mm}$ und annähernd vergleichbare Versuche von Wieprecht mit $d_m = 0,85\text{mm}$ ([55] 5.2, Tab. 5.1, S. 68) differieren noch mehr.

Mittlerer Korndurchmesser $d_m = 0,65\text{mm}$



Sohlenprofil mit Glättungskurve zum Versuch vom 04.07.2002



Sohlenprofil mit Glättungskurve zum Versuch vom 16.10.2002

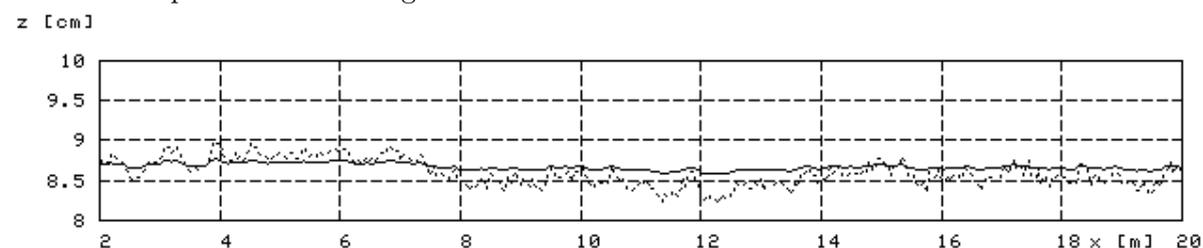


Abbildung 42: Transportgleichgewicht bei Versuchen am Weissach-Modell mit einem Gefälle von 6‰ und einem Abfluss von 20l/s (Die Ergebnisse eines nur teilweise im Sinn der Planung erfolgreichen Versuchspaars bei gleichem Korn, Gefälle und einem Abfluss von 30l/s werden unter 8.1 anhand der Abb. 72 besprochen.): Bei diesem Versuch wird nach Tabelle 6 eine Froude-Zahl von $0,95$ erreicht. Ob der kritische Abfluss die Ursache für die bei diesen Versuchen recht lange Zeit von über 1000s bis zum Erreichen stabiler Transportverhältnisse ist, muss durch weitere Versuche bei kritischem Abfluss zu anderen Gefällen geklärt werden.

Auf die Stabilität des Transportgleichgewichtes lässt sich nur aus den (nach starker Glättung verwertbar) gemessenen Frachtraten schließen. In den Grafiken der Abbildungen 41 und 42 zum zeitlichen Verlauf der Frachtrate werden nur die ersten 1500 Sekunden wiedergegeben. Auf fällt, dass sich in mit Abb. 42 beschriebenen Versuch bei einer Froude-Zahl von 0,95 erst sehr langsam ein stabiles Gleichgewicht einstellt. Mit Ausnahme dieses Versuchs stellt sich dies bei den Versuchen mit dem geringeren Abfluss ($Q = 20\text{l/s}$) nach ca. 400s etwa gleich schnell ein wie bei dem höheren. In dem Versuch mit $Q = 30\text{l/s}$ bei $I = 0,004$ und $d_m = 0,65\text{mm}$ wird die geringste Froude-Zahl von 0,75 angenommen. Die Einstellzeit für das Transportgleichgewicht nimmt i. a. nicht monoton zu mit einer monoton gegen eins wachsenden Froude-Zahl.

Die Froude-Zahlen dieser Versuche decken nur einen Bereich von 0,75 bis 0,95 ab. Für zuverlässige Aussagen zur Einstellzeit des Transportgleichgewichtes ist er zu klein. Es fehlen zudem zu ein und derselben Froude-Zahl mehrere Versuche bei unterschiedlichem Korn bzw. Gefälle.

6 Das in seiner Breite freie Flussbett

In völlig naturbelassenen Fließgewässern ohne Uferbefestigung bestimmt die Koppelung der Hydraulik mit dem Transport nicht nur das Gefälle sondern auch die Breite des Gerinnes. Ein stationäres, insbesondere jedoch ein eindimensionales Modell gibt diese Vorgänge allerdings nur stark vereinfacht wieder.

Ein rechteckiger Flussbettquerschnitt darf sich aus einem Modell für stationär-stabile Querprofile niemals ergeben, sonst wäre an den Seitenwänden nur Erosion möglich. D. h. das Flussbett wird zunehmend breiter. Im Gegenzug nähme das Gefälle ab, weil sich von den Seitenwänden erodierten Sedimente an der Sohle ablagern. Über die Zeit ist dieser Zustand nicht stabil und alles andere als stationär. Beobachten lässt sich dieser Zusammenhang in der Natur an nicht regulierten Flüssen. Im allgemeinen erweist sich nur das bei hohen Abflüssen angenommene Querprofil solcher Flüsse als annähernd rechteckig, bevor Auen überflutet werden. Die Querschnitte einzelner Arme oftmals gegliederter Gerinne solcher Flüsse bei niedrigem Abfluss bilden eher Kreissegmente.

6.1 Stabile Querprofile in eindimensionaler Behandlung

Um das Transportgleichgewichtes im freien Flussbett zu untersuchen, muss zunächst ein stabiles Querprofil bestimmt werden. Offenbar vermag ein eindimensionales Modell nur symmetrische stabile Querprofile zu bestimmen. Ansätze hierzu finden sich schon seit langem in der Literatur. ([16] 6.6.2, S. 118-121, [37] 8.2.3, S. 226ff) Viele Autoren ziehen sich jedoch darauf zurück, ein Querprofil zu bestimmen, entlang dem die Schubspannung gerade kritisch sein soll. So bleibe dieses Profil stabil. Dieser Ansatz mag insofern gerechtfertigt sein, als in einem *regulierten* Fluss, oder gar in einem Kanal, Transport an sich minimiert werden soll. In natürlichen, nicht regulierten Fließgewässern sind aber auch solche Profile stabil, in denen sich viel Transport in Fließrichtung entlang jeder ‘Strähne’ im Gleichgewicht befindet. (Diskussion nach diesem Gesichtspunkt in [37] 8.3, S. 235-236; für natürliche Fließgewässer deshalb dort Befürwortung der in [37] 8.2.1, S. 210ff als Produkt der Anglo-Indischen Hydraulikschule beschriebenen, empirischen ‘regime theory’.) Turbulenz löst eine bereits detailliert untersuchte Konvektion aus und sorgt bei mobilisiertem Korn grundsätzlich auch für Transport quer zur Fließrichtung. So führt ein separater Ansatz für eine kritische Schubspannung in Querrichtung nicht weiter.

6.2 Querprofil aus konstanter effektiver Schubspannung

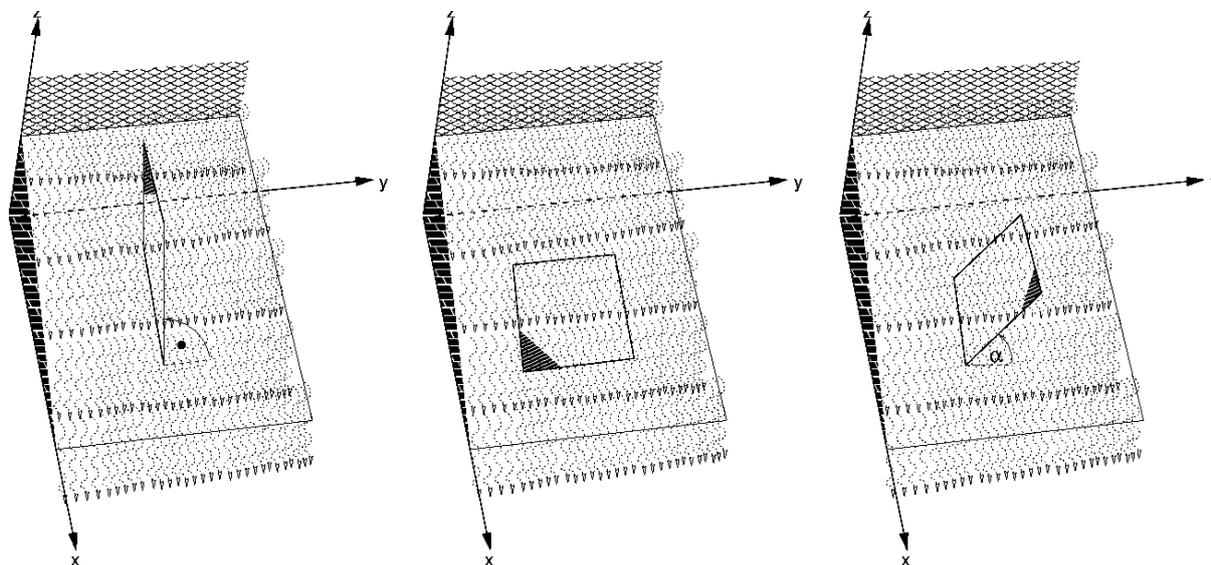


Abbildung 43: Die effektive Schubspannung. *Links:* Auf eine Ebene senkrecht zur Sohle mit einer Schnittgeraden in Fließrichtung wirkt keine Schubspannung. *Mitte:* Auf die Ebene einer glatten Sohloberfläche wirkt die volle Schubspannung. *Rechts:* Auf Ebenen, die zur Sohle so geneigt werden, dass die Schnittgerade der Ebene mit der (ebenfalls ebenen) Sohle in Fließrichtung verläuft, wirkt ein vom Anstellwinkel α abhängiger Anteil der Schubspannung.

Anhand der Abb. 43 wird der Gedanke einer effektiven Schubspannung erläutert: Auf eine raue Testebene wirkt eine vernachlässigbar geringe, im idealisierten Fall keine, Schubspannung, wenn diese Ebene die Sohlebene in Fließrichtung schneidet und senkrecht auf ihr steht. Liegt die Testebene hingegen auf der Sohle, wirkt die volle Schubspannung.

Allgemein wirkt auf jede Testebene, die die Sohlebene in Fließrichtung schneidet, ein vom Anstellwinkel der Testebene abhängiger Anteil der Schubspannung, den der Wasserkörper auf die Sohle ausübt. Hier wird dieser Anteil gleich dem Kosinus des Anstellwinkels angesetzt.

In der Literatur wird bislang ein solcher Ansatz verwendet, um kritische Schubspannungen als Widerstandskräfte aus dem Eigengewicht des Kornes zu bestimmen. Neu wird hier hingegen die Abhängigkeit der *angreifenden* Schubspannung von der Sohlenquerneigung eingeführt.

Um diesen Ansatz sinnvoll scheinen zu lassen, geht die Schubspannung vom Gewicht des Wasserkörpers aus (Diskussion hierzu [37] 8.2.3, S. 227, Mitte bis Ende des zweiten Absatz). Ihr liegt demnach die Formel (14) $\tau = \rho ghI$ zugrunde.

Noch nicht geklärt ist, ob Querneigung der Sohle nicht nur die Schubspannung sondern auch die kritische Schubspannung verringert und so Geschiebe doch eher mobilisiert. Wesentlich wird eine Antwort hierauf, wie bereits in 3.2 diskutiert, für das Verständnis zweidimensionaler stationär-oszillatorischer Vorgänge.



Abbildung 44: Modell für den Ansatz nach (125) für eine konstante effektive Schubspannung. *Links:* Die auf jede Sohlensträhne angreifende Schubspannung ist proportional zur Höhe der Wassersäule über ihr. Diese Schubspannung wäre aber nur auf eine waagrechte Oberfläche in Höhe der Sohlensträhne voll wirksam. *Rechts:* Die effektive Schubspannung ergibt sich erst als Produkt mal dem Kosinus des Anstellwinkels α .

Um aus einem eindimensionalen Transportmodell heraus zur einem Modell für ein stabiles Querprofil zu gelangen, stelle man sich Sohlensträhnen mit gerader Oberfläche vor. (Abb. 44 links) Der Rand eines Querschnitts erscheint als Polygonzug. (Abb. 44 rechts) So bietet sich ein Ansatz an, nach dem die *in Fließrichtung* auf eine Sohlensträhne wirkende Schubspannung um einen Faktor korrigiert wird, der vom Anstellwinkel, d. h. dem Böschungswinkel α der jeweiligen Strähne abhängt. So wird angesetzt

$$\tau_{eff}(y) = \tau |\cos \alpha| . \quad (124)$$

Für die Feststoff-Froude-Zahl F_r^* entlang eines Fließquerschnittes, also $F_r^* = F_r^*(y)$ als Funktion der Koordinate y quer zur Fließrichtung mit $y = 0$ im Sohlscheitel, folgt

$$\begin{aligned} F_r^*(y) &= \frac{\tau_{eff}}{\varrho_w \varrho' d_m} \\ &= \frac{h(y)I}{\varrho' d_m} |\cos \alpha| . \end{aligned} \quad (125)$$

Während auf die waagrechte Oberfläche einer Strähne am Sohlscheitel, von der über der Strähne liegenden Wassersäule die volle Schubspannung wirkt, wird davon ausgegangen, dass auf senkrechte Oberflächen, in Abb. 44 links dort, wo die gekrümmte Sohle ins Ufer übergeht, keine Schubspannung wirkt. So gelangt man zu einfachen Gleichungen; denn mit $\tan \alpha = -\frac{dh}{dy}$ gilt

$$|\cos \alpha| = \left| \cos \left(\arctan \left(-\frac{dh}{dy} \right) \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy} \right)^2}} \quad (126)$$

und so

$$F_r^*(y) = \frac{I}{\varrho' d_m} \frac{h(y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy} \right)^2}} ; \quad (127)$$

doch muss man in Kauf nehmen, dass viele in der Natur beobachtete Phänomene nicht berücksichtigt werden:

- Dass an senkrechten Oberflächen kein Transport stattfindet, ist nur Annahme. Beobachtet wird natürlich *Seitenauflandung* und *-erosion*, nicht nur an mäandrierenden Flüssen, sondern auch an (nahezu) geradlinigen dort, wo sich die Breite des Gerinnes ändert. Typisch ist eine Seitenauflandung an Verengungen, während der Boden erodiert, und Seitenerosion bei Aufweitungen, während der Boden verlandet (Abb. 45). In beiden Fällen wirkt eine (positive bzw. negative) Seitenschubspannung.

Seitenschubspannungen werden durch die Ortsableitung $\frac{db}{dx}$ der Gerinnebreite b in Fließrichtung x bestimmt. So wäre eine Bestimmungsgleichung für das Querprofil in y nicht mehr vom Ort x entkoppelt. Stabile Flussquerprofile unter Berücksichtigung von Seitenauflandung oder -erosion durch sich verändernde Gerinnebreite lassen sich daher grundsätzlich nur in zwei- oder dreidimensionalen Modellen bestimmen.

Soll die (an sich wesentliche) Seitenauflandung oder -erosion nicht vernachlässigt werden, gilt das hier aus einem eindimensionalen Modell bestimmte Querprofil nur für freie Gerinne (annähernd) konstanter Breite.

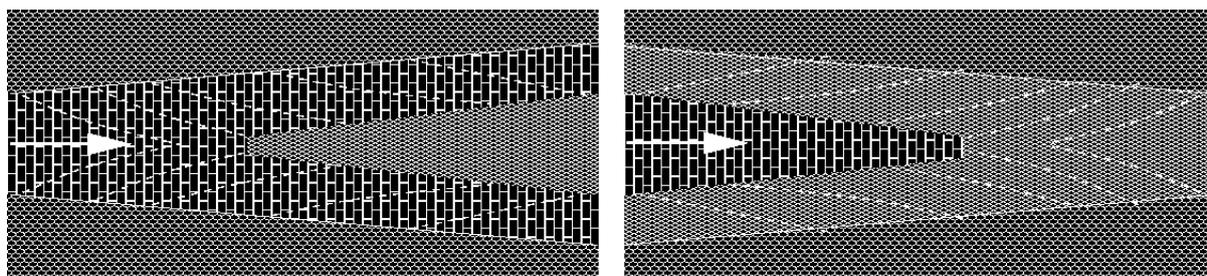


Abbildung 45: Seitenerosion und -auflandung (schematisch). In einer Gerinneaufweitung (*links*) landet aus dem beweglichen Ufer erodiertes Sediment in der Sohlmitte auf. In einer Gerinneverengung (*rechts*) landet aus der Sohle erodiertes Sediment am Ufer auf.

- Ob Transport ausschließlich von der Schubspannung bestimmt wird, wird bezweifelt. Auch in einem Rechteckgerinne konstanter Breite wird ein nicht befestigtes Ufer erodiert. Eine solche Erosion ist selbst bei Zugabe von Ufermaterial entlang des Ufers oberstrom nicht umzukehren, weil sich einmal von senkrechten Uferwänden abgelöste Körner nicht wieder an senkrechten Uferwänden festsetzen (Abb. 46).

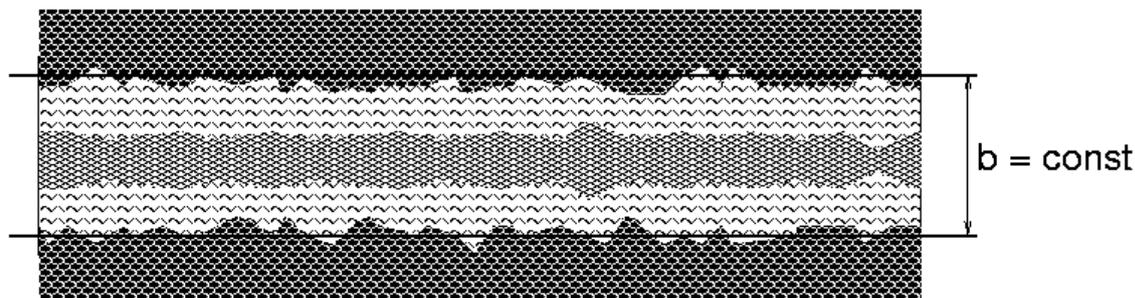


Abbildung 46: Wandererosion (schematisch). Auch in Gerinnen konstanter Breite landet aus einem senkrechten Ufer erodiertes Sediment in der Sohlmitte auf. Dieser Vorgang ist irreversibel.

Der zweite Einwand darf ignoriert werden, wenn sich aus dem eindimensionalen Modell als stabiles Profil ein solches ergibt, in dem keine senkrechten Abschnitte im Sohlenprofil unter Wasser auftreten. Leider ergibt sich letztlich kein solches Profil. Gegenüber der Erosion an senkrechten Wänden stabil ist ein natürliches Flussbett demnach nur, wenn die Breite nicht konstant ist, sondern ein oszillatorisches Gleichgewicht durch Seitenauflandung und -erosion aufrechterhalten wird. Dieses lässt sich wiederum nicht mit einem eindimensionalen Modell beschreiben.

Ziel in diesem Abschnitt ist, eine (Differential)gleichung für ein stabiles Profil zu bestimmen, indem der Wasserstand h an einer fest vorgegebenen Querschnittsposition x als Funktion $h = h(y)$ bestimmt wird. Wird die Wasseroberfläche als gerade und horizontal angenommen, ergibt sich mit $z(y) = h_{\max} - h(y)$ das Sohlenquerprofil. So ergibt sich aus der Konstanz der Transportintensität Φ in Querrichtung über die Konstanz der Feststoff-Froude-Zahl der Ansatz

$$\begin{aligned}
\text{const} &= \frac{h(y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2}} := c_0 \\
\iff \sqrt{\left(\frac{dh}{dy}\right)^2 + 1} &= \frac{h}{c_0} \\
\iff \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 + 1 &= \left(\frac{h}{c_0}\right)^2 \\
\iff \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 &= \left(\frac{h}{c_0}\right)^2 - 1 \\
\iff \frac{dh}{dy} &= \pm \sqrt{\left(\frac{h}{c_0}\right)^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Somit ergeben sich aus der sog. infinitesimalen Rektifikation

$$\frac{h}{c_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} \quad (128)$$

zwei Differentialgleichungen erster Ordnung als

$$\frac{dh}{dy} = \pm \sqrt{\left(\frac{h}{c_0}\right)^2 - 1}. \quad (129)$$

Wegen der bereits erwähnten Symmetrie des Sohlenquerprofils liegt nahe, den Nullpunkt für die y -Koordinate in die Sohlmitte zu legen. Für $h < c_0$ existiert die Quadratwurzel im Reellen nicht mehr. So gibt es bei vorgegebener Gerinnebreite b auf dem Intervall $\left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right]$ für jede (notwendigerweise stetige) Lösung zu (129) eine minimale Wassertiefe $h_{\min} \geq c_0$. In jedem Fall muss also das Ufer durch senkrechte bzw. erosionsfeste Wände begrenzt werden. Für $\delta > 0$ wird durch die durch die rechte Seite von (129) gegebene Funktion in h keine Lipschitz-Bedingung auf dem Intervall $[c_0; c_0 + \delta]$ erfüllt, damit also keine Bedingung, die hinreichend für eine eindeutige Lösung zu (129) wäre. Eine triviale Lösung zu (129) ist das Rechteckprofil mit $\frac{dh}{dy} = 0$ und $c_0 = h$. Viele Fließgewässer zeigen ein solches Profil (für Beispiele siehe [45] III. c) δ) Abb. 227, S. 176). Leicht lässt sich die im Anhang C.4 gewonnene zweite, nicht-triviale Lösung

$$y(h) = c_0 \cosh\left(\frac{y + y_0}{c_0}\right) \quad (130)$$

zu (129) mit den den Anfangs- bzw. Randbedingungen anzupassenden Konstanten c_0 und y_0 ([23] Teil C, 6 · 111, S. 571) verifizieren. Die Kontrolle zeigt

$$\frac{dh}{dy} = \sinh\left(\frac{y+y_0}{c_0}\right), \quad (131)$$

$$\text{also } \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 = \sinh^2\left(\frac{y+y_0}{c_0}\right) = \cosh^2\left(\frac{y+y_0}{c_0}\right) - 1 = \left(\frac{h^2}{c_0}\right) - 1.$$

Verwandt ist (129) mit der Differentialgleichung der Kettenlinie. Der physikalische Zusammenhang zwischen der Herleitung zu (129) und zu der Differentialgleichung der Kettenlinie

$$\frac{d^2h}{dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} \quad (132)$$

wird anhand von Abb. 47 näher erläutert.

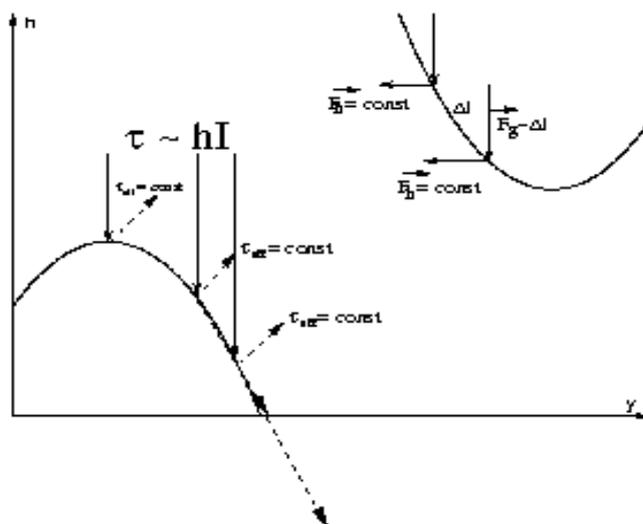


Abbildung 47: Zusammenhang zwischen den Ansätzen zu Gleichung (129) für das stabile Sohlenquerprofil (*links unten*) und (132) für die Kettenlinie (*rechts oben*). Das Bild wird im Text näher erläutert. Für das Sohlenprofil bezeichnet h den Abstand des Wassers über der Sohle und hat deshalb das umgekehrte Vorzeichen! In beiden Fällen wird eine der Komponenten, die sich durch Zerlegung der angreifenden Kraft ergeben, konstant gehalten.

Im Diagramm zur Kettenlinie oben rechts in Abb. 47 ist der Betrag $|\vec{F}_g|$ der auf einen Seilabschnitt mit der horizontalen Ausdehnung dy und der infinitesimalen Länge dl wirkenden Gewichtskraft \vec{F}_g proportional zu dl . Im Diagramm zum Gleichgewicht effektiver Schubspannungen am stabilen Sohlenquerprofil unten links ist der Betrag $|\tau|$ der Schubspannung τ proportional zu h , hier mit anderem Vorzeichen. In beiden Fällen wird die angreifende Kraft an der Kette bzw. der Sohloberfläche in zwei Komponenten zerlegt. Jeweils eine Komponente ist konstant, an der Kette ist die horizontale \vec{F}_h , an der Sohle die in Fließrichtung verlaufende τ_{eff} ; dort soll ja hierdurch das Transportgleichgewicht bestimmt werden.

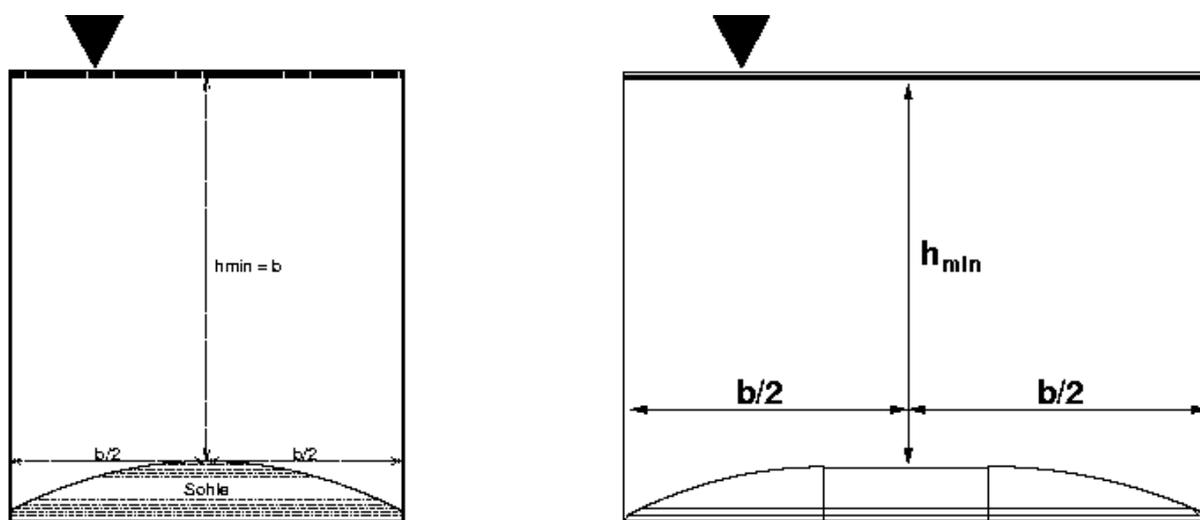


Abbildung 48: Nicht-triviale, im Intervall $\left] -\frac{b}{2}; \frac{b}{2} \right[$ differenzierbare Lösungen zu (129). *Links:* Lösung nach (130). *Rechts:* In den Sohlscheitel darf ein waagrechter Abschnitt beliebiger Länge eingefügt werden. So gelangt man zu einer weiteren, allerdings nur einmal stetig differenzierbaren Lösung.

So ergibt sich für die Kettenlinie über den Ansatz ([7], III, §2, S. 117)

$$\begin{aligned} \frac{d|\vec{F}_{\mathbf{g}}|}{dy} &\sim \frac{dl}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} \\ \Leftrightarrow \text{const} &= |\vec{F}_h| = \frac{|\vec{F}_{\mathbf{g}}|}{dh/dy} \\ \Leftrightarrow \text{const} \cdot \frac{dh}{dy} &= |\vec{F}_{\mathbf{g}}| \\ \Rightarrow \text{const} \cdot \frac{d^2h}{dy^2} &= \frac{d|\vec{F}_{\mathbf{g}}|}{dy} \sim \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} \end{aligned}$$

unter Vernachlässigung konstanter Faktoren (132).

Da der Hyperbelkosinus in 0 achsensymmetrisch ist, ergibt sich in der Lösung (130) $y_0 = 0$. Nach (131) ist die Sohle dann in $y = 0$ horizontal. Dort wird eine minimale Wassertiefe $h_{\min} = c_0$ angenommen. In Abb. 48 links wird illustriert, dass ein stabiles Gerinne mit diesem Querprofil, ebenso wie das Rechteckgerinne, nur mit senkrechten, erosionsfesten Seitenwänden realisiert werden könnte. Bei diesem Profil nimmt die Tiefe mit wachsendem Abstand zur Gerinnemitte sogar zu.

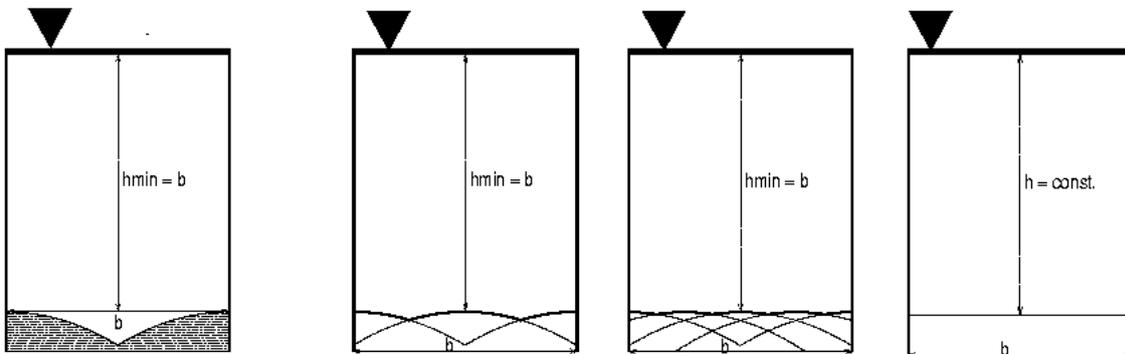


Abbildung 49: Im Intervall $\left] -\frac{b}{2}; \frac{b}{2} \right[$ stückweise differenzierbare Lösungen zu (129). *Außen links:* Bei der 'zweiten nicht-trivialen Grundlösung' läuft die Sohle wie im Rechteckgerinne waagrecht an die Uferwände. *Mitte:* Aus der ersten und zweiten nicht-trivialen Grundlösung können weitere Lösungen zusammengestückt werden, sofern an den Übergangspunkten rechts- und linksseitiger Limes der Ableitung den gleichen Absolutbetrag haben. *Außen rechts:* Rechteckgerinne als trivialer Lösung und Grenzfall der stückweise zusammengesetzten Lösungen.

Da $\frac{dh}{dy}$ in (129) nicht explizit von y abhängt und sich beide Lösungstrajektorien des Phasenraumes $\left(h \left| \frac{dh}{dy} \right.\right)$ in $(c_0|0)$ berühren, ist auch die stückweise Kombination der trivialen Lösung und der nicht-trivialen nach Abb. 48 rechts möglich. Diese Lösung ist allerdings nur einmal stetig differenzierbar.

Grundsätzlich sind auch Lösungen $h = h(y)$ zu (129) physikalisch zulässig, für die sogar die erste Ableitung $\frac{dh}{dy}$ an ‘einzelnen’ Punkten nicht existiert. Der Begriff ‘einzeln’ wird später näher geklärt.

Ausgehend von (130) mag zunächst die in Abb. 49 links dargestellte ‘zweite Grundlösung’ in Betracht kommen. Hier wird die Sohle jeweils am Ufer waagrecht, während für die Sohlmitte nur gilt $\lim_{y \nearrow 0} \frac{dh}{dy} = -\lim_{y \searrow 0} \frac{dh}{dy}$. Aus dieser ‘zweiten Grundlösung’ und der ‘ersten’ nicht-trivialen Lösung (130) lassen sich weitere Lösungen nach Abb. 49 mitte und rechts zusammenstückeln, deren erste Ableitungen mehr und mehr singuläre Punkte besitzen. Das erklärt, warum Bänke und Kolke in Querrichtung möglich sind, die bei niedrigen, nicht sohlformenden Wasserständen sogar zu einem verästelnden Gerinne führen können.

Die Gleichung (129) ist nicht linear. Deshalb lassen sich diese gestückelten Lösungen nicht als additive Superposition von Grundlösungen schreiben. Intuitiv plausibel erscheint als ‘Grenzlösung’ hier wieder das triviale Rechteckprofil. Bleibt das mathematisch schlüssig?

Äquivalent zu (128) ist $\int_{y_0}^y h(\tilde{y}) d\tilde{y} = c_0 \int_{y_0}^y \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} d\tilde{y} + C$ für ein noch unbestimmtes C . Das Integral

$$s(y_0, y) := \int_{y_0}^y \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} d\tilde{y} \quad (133)$$

wird als *Rektifikation* des Graphen der Funktion $h = h(y)$ auf dem Intervall $[y_0; y]$ bezeichnet und entspricht der Länge des Graphen in diesem Intervall und der Einheit des kartesischen Koordinatensystems. Hieraus ergeben sich nicht nur in 6.4 zu behandelnde Konsequenzen für den hydraulischen Radius eines Gerinnes, dessen Sohlquerschnittsprofil (129) erfüllt; sondern auch für den mathematischen Funktionenraum, in dem Lösungen $h = h(y)$ liegen.

Funktionen beschränkter Variation sind die Funktionen, deren Graphen rektifizierbar sind. Sie sind stetig und stückweise monoton. Ihre Ableitung, das sog. Lebesgue-Differential, muss in einem allgemeineren Sinn als dem klassischen Differentiationsbegriff verstanden werden. Für Funktionen beschränkter Variation besteht für Punkte einer, ggf. sogar überabzählbaren Ausnahmemenge vom Lebesgue-Maß Null keine klassische Ableitung. Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (Ableitung invers zu Integral) gilt für das Lebesgue-Integral und -Differential im allgemeinen nicht mehr. ([38], I §2, §4, §15; [20] V, §17 Sätze 17.12 auf S. 264 und 17.17 auf S. 267)

Relevant hier ist das Ergebnis $\int_{y_0}^y h(\tilde{y}) d\tilde{y} = c_0 \mathbf{s}(y_0, y) + C$. Offensichtlich ist $C = 0$, da für $y = y_0$ die linke Seite verschwindet. So folgt schließlich

$$\boxed{\int_{y_0}^y h(\tilde{y}) d\tilde{y} = h_{\min} \mathbf{s}(y_0, y)} \quad (134)$$

als Rektifikationsbedingung für ein stabiles Sohlenquerprofil. Geometrisch interpretiert lautet diese Bedingung: *Die Fließquerschnittsfläche ist gleich dem Produkt Minimaltiefe mal Rektifikation des geschiefbeführenden Sohlenquerprofils.*

Interessant wäre zu klären, ob sich dieses für ein nur sehr einfaches Modell gewonnene Ergebnis zur Regularisierung numerischer Lösungen zu mehrdimensionalen komplexen Modellen verwerten lässt. Im folgenden Unterabschnitt soll zunächst untersucht werden, wieviel von dieser sehr grundlegenden Bedingung in einem realitätsnäheren, gegenüber dem bislang behandelten, verfeinerten Modell erhalten bleibt.

6.3 Stabile Querprofile aufgrund von Kräftegleichgewichten

In der Literatur finden sich Ansätze, um stabile Querprofile zu beschreiben, indem die an einem Sedimentkorn angreifenden Kräfte in ein Gleichgewicht gesetzt werden. ([42] 4.56, S. 161) Auf ein Geschiebekorn wirkt nicht nur die vom treibenden Wasser ausgehende Schubspannung, sondern auch seine Gewichtskraft. Sie kann sowohl ein bereits aus der Sohle gelöstes Korn entlang einer Neigung der Sohle in Querrichtung beschleunigen als auch ein noch in der Sohle verankertes Korn stabilisieren. Als Gegenkräfte wirken Lift- und Reibungskräfte. Um sie näher zu beschreiben, legen die Autoren jeweils spezielle Transportmechanismen zugrunde, so z. B. Bretting den nach Einstein zur Bestimmung einer Liftkraft ([4] 2.2, S. 5).

Bei diesen Modellen befinden sich die Körner stabiler Sohlenprofile in einem kritischen Zustand, bewegen sich aber noch nicht. Problematisch erscheint das gegenüber der Tatsache, wie bereits zu Beginn dieses Abschnittes erwähnt, dass sich gerade in natürlichen stabilen Fließgewässern zumindest bei erhöhtem Abfluss sehr wohl Geschiebe bewegen kann. Dessen ungeachtet gilt wiederum die Tatsache, dass steile unbefestigte Hänge oder Ufer, sogar ohne Einwirkung von Wasser, erodiert werden. Demnach wird das Korn auch durch die entlang einer Neigung quer zur Fließrichtung wirkende Komponente der eigenen Gewichtskraft mobilisiert.

Ziel dieser Arbeit sind Ergebnisse, denen möglichst wenig Information über den Mechanismus des Geschiebetransports zugrunde liegt. Nahe liegt somit, den Ansatz aus 6.2 zu verfeinern, indem die effektive Schubspannung um die Wirkung der Komponente der Gewichtskraft eines Kornes quer zur Fließrichtung korrigiert wird. Hierzu müssen zunächst Beziehungen zwischen der Schubspannung τ und der Feststoff-Froude-Zahl F_r^* bereitgestellt werden.

Das Eigengewicht F_g eines kugelförmigen Korbes vom Durchmesser d_m unter Wasser ergibt sich zu $F_g = \frac{\pi \varrho \varrho' \mathbf{g} d_m^3}{6}$. Dieses Gewicht wirkt auf eine Querschnittsfläche $A_s = \frac{4}{\pi d_m^3}$.

So ergibt sich aus dem Eigengewicht des Kornes eine Spannung $\tau_{subst} = \frac{2}{3} \varrho \varrho' \mathbf{g} d_m$.

Angenommen wird in diesem gegenüber den Ergebnissen aus 6.2 verfeinerten Modell, dass eine effektive Schubspannung τ_{eff} konstant ist, die sich als Summe der effektiven Schubspannung $\tau|\cos\alpha|$ und der effektiven Eigengewichtsschubspannung $\tau_{subst}|\sin\alpha|$ ergibt. Dem Anstellwinkel α kommt hier die gleiche Bedeutung wie in Abschnitt 6.2 zu, dort bereits erläutert anhand von Abb. 44. Nach Rechnungen im Anhang C.9 folgt

$$\boxed{h(y) = h_{\min} \cosh\left(F_r^*_{\min} \frac{y}{h_{\min}}\right)} \quad (135)$$

als differenzierbare nicht-triviale Lösung für das stabile Sohlenquerprofil.

Geht man von minimalen Feststoff-Froude-Zahlen $F_r^*_{\min}$ in Nähe der für viele Transportgesetze geltenden kritischen Feststoff-Froude-Zahlen $F_r^*_c$ in der Größenordnung 0,02 bis 0,1 aus, so ergeben sich Lösungen, für deren graphische Darstellung die y -Achse um einen Faktor 10 bis 50 skaliert werden müsste, damit sich ein Bild wie in Abb. 48 links aus 6.2 ergibt. Das kommt zwar der Realität natürlicher Fließgewässer wesentlich näher und klärt vom Ansatz her, warum wenig Transport in nicht-regulierten Gewässern ein breites Gerinne bevorzugt; doch ungelöst bleibt auch durch dieses verfeinerte Modell das Problem der Wanderosion.

Speziell für $y_0 = 0$ und $y = \frac{b}{2}$ ergeben sich aus (317) im Anhang C.9 die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 2 \mathbf{s}\left(0, \frac{b}{2}\right) &\leq b \left[1 + \frac{F_r^*_{\min}{}^2}{2} \max_{0 \leq t \leq b/2} \left(\frac{h(t)}{h_{\min}} \right)^2 \right] \\ &\leq b \left[1 + \frac{F_r^*_{\min}{}^2}{2} \cosh^2 \left(F_r^*_{\min} \frac{b}{2h_{\min}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (136)$$

Offensichtlich können sich nur bei Feststoff-Froude-Zahlen nahe bei oder größer als eins Sohlenquerprofile bilden, die merklich von einer horizontal glatten Sohle abweichen. Für große Feststoff-Froude-Zahlen lässt sich nach (318) aus Anhang C.9 abschätzen:

$$2 \mathbf{s}\left(0, \frac{b}{2}\right) \leq F_r^*_{\min} \frac{A}{h_{\min}} - \frac{b}{2 \cosh\left(F_r^*_{\min} b/(2h_{\min})\right)} \quad (137)$$

$$\iff 2h_{\min} \mathbf{s}\left(0, \frac{b}{2}\right) \leq F_r^*_{\min} A - \frac{A_{rect}}{2 \cosh\left(F_r^*_{\min} b/(2h_{\min})\right)}. \quad (138)$$

Hierbei bezeichnen A die Fließquerschnittsfläche und A_{rect} die Fläche des Rechteckes der Breite b und Höhe h_{min} . Aus dieser Abschätzung ersieht sich leicht, dass mit wachsender Feststoff-Froude-Zahl, also bei zunehmendem Transport, bei konstantem h_{min} die Rektifikation s ebenfalls wachsen darf, selbst wenn sich die Fließquerschnittsfläche A nicht vergrößert; d. h. die Sohloberfläche darf stärker oszillieren. Entsprechendes leuchtet auch ein in Anbetracht der geschlossenen, differenzierbaren Lösung (135).

Hydromechanisch interessant ist die Rektifikation s des Sohlenquerprofils vor allem deshalb, weil sie in Verbindung mit der Fließquerschnittsfläche A den für eindimensional-tiefengemittelte Modelle wesentlichen, hydraulischen Radius r_H bestimmt. Hiermit wird in den nun folgenden Unterabschnitt über die stationäre Hydraulik im freien Flussbett übergeleitet.

6.4 Die stationäre Hydraulik im freien Flussbett — Was folgt aus der Rektifikationsbedingung für das gekoppelte Transportgleichgewicht ?

Aus der Rektifikation s der Sohloberfläche ergibt sich der benetzte Gerinneumfang U über die Formel

$$U = 2h_{min} + s, \quad (139)$$

wenn vorausgesetzt wird, dass eine minimale Wassertiefe h_{min} an senkrechten Ufern erreicht wird. Dass sich aus den untersuchten Sohlstabilitätsmodellen zwangsläufig senkrechte Ufer ergeben, ist in den vorangegangenen zwei Unterabschnitten diskutiert worden.

Da sich der hydraulische Radius r_H aus dem Quotienten $\frac{A}{U}$ der Fließquerschnittsfläche A durch U errechnet, lassen sich aus (134) in 6.2 bzw. aus (137) in 6.3 Aussagen zu r_H in dynamisch stabilen Gerinnen gewinnen. Um (137) anzuwenden, muss allerdings starker Transport vorliegen.

Zu (134) ist äquivalent $\mathbf{s} = \frac{A}{h_{\min}}$. So ist nach (139) $U = 2h_{\min} + \frac{A}{h_{\min}} = \frac{2h_{\min}^2 + A}{h_{\min}}$ und

$$r_H = \frac{h_{\min} A}{2h_{\min}^2 + A} = \frac{h_{\min}}{1 + 2h_{\min}^2/A} \stackrel{(134)}{=} \frac{h_{\min}}{1 + 2h_{\min}/\mathbf{s}}. \quad (140)$$

Diesem Ergebnis entspricht die Formel für den hydraulischen Radius eines befestigten Rechteckgerinnes, wenn \mathbf{s} mit dessen Breite und h_{\min} mit dem in einem solchen in Querrichtung konstanten Wasserstand identifiziert wird. In dynamisch stabilen Gerinnen ist jedoch \mathbf{s} im allgemeinen größer als die Breite b . So besagt (140), dass in dynamisch stabilen Gerinnen näherungsweise $r_H \approx h_{\min}$ gerechnet werden kann und der Fehler im allgemeinen dabei kleiner ist, als wenn in einem festen Rechteckgerinne derselben Breite mit $r_H \approx h$ gerechnet würde.

Für große Feststoff-Froude-Zahlen ergibt (137) eine untere Schranke für die Fließquerschnittsfläche A zu

$$A \geq \frac{1}{F_{r^* \min}} \left(h_{\min} \mathbf{s} + \frac{A_{\min rect}}{2 \cosh\left(F_{r^* \min} b / (2h_{\min})\right)} \right). \quad (141)$$

Hierbei bezeichnen $A_{\min rect} = bh_{\min}$ den Flächeninhalt des Rechtecks der Breite b und der Höhe h_{\min} und $F_{r^* \min} = \frac{h_{\min} I}{g' d_m}$ das Minimum der Feststoff-Froude-Zahl entlang des Querschnitts. Werden beide Seiten der Ungleichung (141) durch U dividiert, ergibt sich eine untere Schranke für den hydraulischen Radius zu

$$\begin{aligned} r_H &\geq \frac{1}{F_{r^* \min} U} \left(h_{\min} \mathbf{s} + \frac{A_{\min rect}}{2 \cosh\left(F_{r^* \min} b / (2h_{\min})\right)} \right) \\ &\stackrel{(139)}{=} \frac{1}{F_{r^* \min} (2h_{\min} + \mathbf{s})} \left(h_{\min} \mathbf{s} + \frac{A_{\min rect}}{2 \cosh\left(F_{r^* \min} b / (2h_{\min})\right)} \right) \\ &= \frac{1}{F_{r^* \min}} \left(\frac{h_{\min} \mathbf{s}}{2h_{\min} + \mathbf{s}} + \frac{bh_{\min}}{2 \cosh\left(F_{r^* \min} b / (2h_{\min})\right) (2h_{\min} + \mathbf{s})} \right) \\ &= \frac{1}{F_{r^* \min}} \left(r_{H \text{ RectiRect}} + \frac{b}{2 \cosh\left(F_{r^* \min} b / (2h_{\min})\right) (2 + \mathbf{s}/h_{\min})} \right). \quad (142) \end{aligned}$$

$r_{H \text{ RectiRect}}$ ist der hydraulische Radius für ein Rechteckgerinne der Breite \mathbf{s} bei einem Wasserstand h_{\min} . Nach (142) kann sich also (Da eine untere, aber keine obere Schranke gegeben wird, tritt dieser Fall nicht notwendig ein!) der hydraulische Radius mit zunehmendem Transport, also wachsendem $F_{r^* \min}$ bei festem h_{\min} verringern.

7 Anwendung der Gleichung für das Transportgleichgewicht zur Beschreibung von Transportkörpern

Rein analytisch behandelte Beziehungen erlauben nur in einer Fließrichtung unter idealisierten Abflussbedingungen Gesetze zu Form und Wanderungsgeschwindigkeit von Transportkörpern der Sedimente in offenen Gerinnen herzuleiten. Ausgegangen wird zunächst von der Kontinuitätsbedingung (46). Beobachtet wird, dass Transportkörper im stationären Gleichgewicht formstabil wandern. Also lässt sich die Kontinuitätsbedingung mit der Wellengleichung verknüpfen und so die Zeit t eliminieren.

Für Sedimenttransportgesetze, bei denen die Transportintensität Φ oder eine Volumenschicht q_B je Breitereinheit von der Sohlform nur über das Sohlgefälle I abhängt, kommt man so auf explizite gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in einer Dimension. Mit diesen Gleichungen lassen sich jedoch keine differenzierbaren oszillierenden Funktionen beschreiben. Hierzu wäre eine Abhängigkeit der Fracht auch von der *Sohlkrümmung* notwendig.

Boys und Zanke modellieren analytisch den Sedimenttransport über ein Gleichgewicht angreifender und widerstehender Schubspannungen in der Sohle. Dieser Ansatz erlaubt zu berücksichtigen, dass eine gekrümmte Sohle dem Wasserkörper oberhalb der Sohle strömungsmechanisch größeren Widerstand entgegengesetzt als etwa eine in Richtung des Energiegefälles gerade verlaufende Sohle. An der Lee-Seite von Dünen wird überdies beobachtet, dass bei starkem Abfall der Sohle in Fließrichtung die Strömung sogar abreißt. Dann übt der Wasserkörper über der Sohle gar keine Schubspannung auf die Sohle aus, und es kommt zu lokaler Auflandung.

Durch die näherungsweise Berechnung der auf einen umströmten Zylinder angreifenden Drucke lässt sich über den Ansatz von Zanke ein Transportgesetz herleiten, in das auch die lokale Sohlenkrümmung eingeht. Damit lässt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Sohlform gewinnen, mit der sich in grober Näherung periodische Transportkörperbildung beschreiben lässt.

Bei den Überlegungen und Untersuchungen dieses Abschnittes wird von einem Gerinne konstanter Breite mit beweglicher Sohle unter Normalabfluss ausgegangen. So lassen sich transportierte Volumina stets 'pro Breitereinheit' auffassen. Die Gerinnebreite b tritt nur bei Zwischenüberlegungen der Form halber, in den Endergebnissen jedoch gar nicht auf.

7.1 Die Differentialgleichung für periodische Sedimenttransportkörper

Aus der Kontinuitäts- und der Wellengleichung lässt sich die für die analytische Behandlung des Transports in periodischen Transportkörpern grundlegende Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{1}{u_T} \cdot \frac{dq_B}{dx} = -I} \quad (143)$$

herleiten. Hierbei bezeichnen

- I das Sohlgefälle am reduzierten Ort x
 - q_B das transportierte Sedimentvolumen (incl. Hohlräume) je Zeit- und Breitereinheit
 - u_T die Wanderungsgeschwindigkeit der Transportkörper als Ganzem.
- Vorausgesetzt wird $u_T > 0$.
- x den reduzierten Ort durch Elimination der Zeit mit der Wellengleichung
($x = x_0 + u_T t$)

Damit diese Differentialgleichung auch unter Normalabfluss bei stationärem Transport nicht-triviale periodische Lösungen besitzt, hat die Volumenfracht q_B neben den üblichen hydraulischen und sedimentologischen Größen nicht nur vom Sohlgefälle I , sondern auch von dessen erster Ableitung $\frac{dI}{dx}$, der Sohlenkrümmung abzuhängen.

Erfahrungsgemäß 'wandern' Sohldünen im stationären Transportgleichgewicht über längere Fließstrecken mit einer von den hydraulischen und sedimentologischen Parametern abhängigen Geschwindigkeit u_T unter Erhaltung ihrer Form. Für die unregelmäßigen Transportkörper an Gerinneein- und Ausläufen gilt das im allgemeinen nicht. Vorausgesetzt wird hier $u_T > 0$.

Diese von Exner (1920, [13]) in einem Windkanal speziell untersuchten Formationen werden in dieser Arbeit nicht modelliert, weil die selbst bei stationärem Transport über lange Strecken periodisch auftretenden Transportkörper im mittleren Bereich der Shields-Kurve sehr viel wichtiger für das Verständnis des Geschiebetransports an sich sind als eher lokale Phänomene, die sich nur mit einem von vornherein instationären Modell erfassen lassen.

Unter diesen Einschränkungen wird $z = z(l, t)$ im Ort l und in der Zeit t als eine Wellenfunktion im reduzierten Ort x geschrieben. So gilt $z = z(x) = z(x(l, t))$ mit $x(l, t) = l - u_T t$ (Abb. 50).

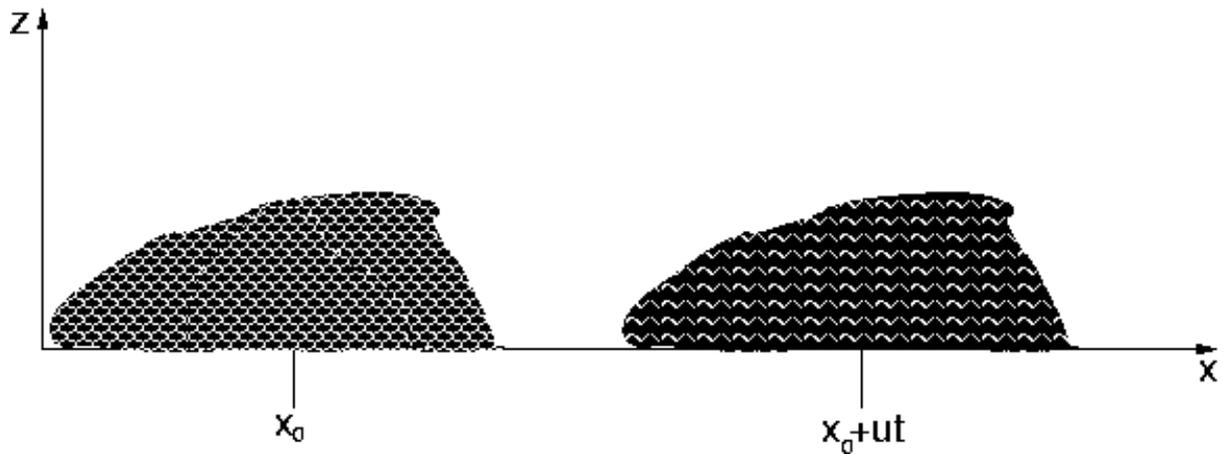


Abbildung 50: Herleitung der Wellengleichung: Am Ort $x = x_0 + l$ wird zu einer Zeit t die Sohlhöhe z gemessen, die in x_0 bereits zur Zeit $t - \frac{l}{u_T}$ gemessen wurde.

Aus $\frac{\partial x}{\partial l} = 1$ und $\frac{\partial x}{\partial t} = -u_T$ folgen $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{dz}{dx} \frac{\partial x}{\partial l} = \frac{dz}{dx}$ und $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dx} \frac{\partial x}{\partial t} = -u_T \frac{dz}{dx}$. So gilt:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = u_T I} \quad (144)$$

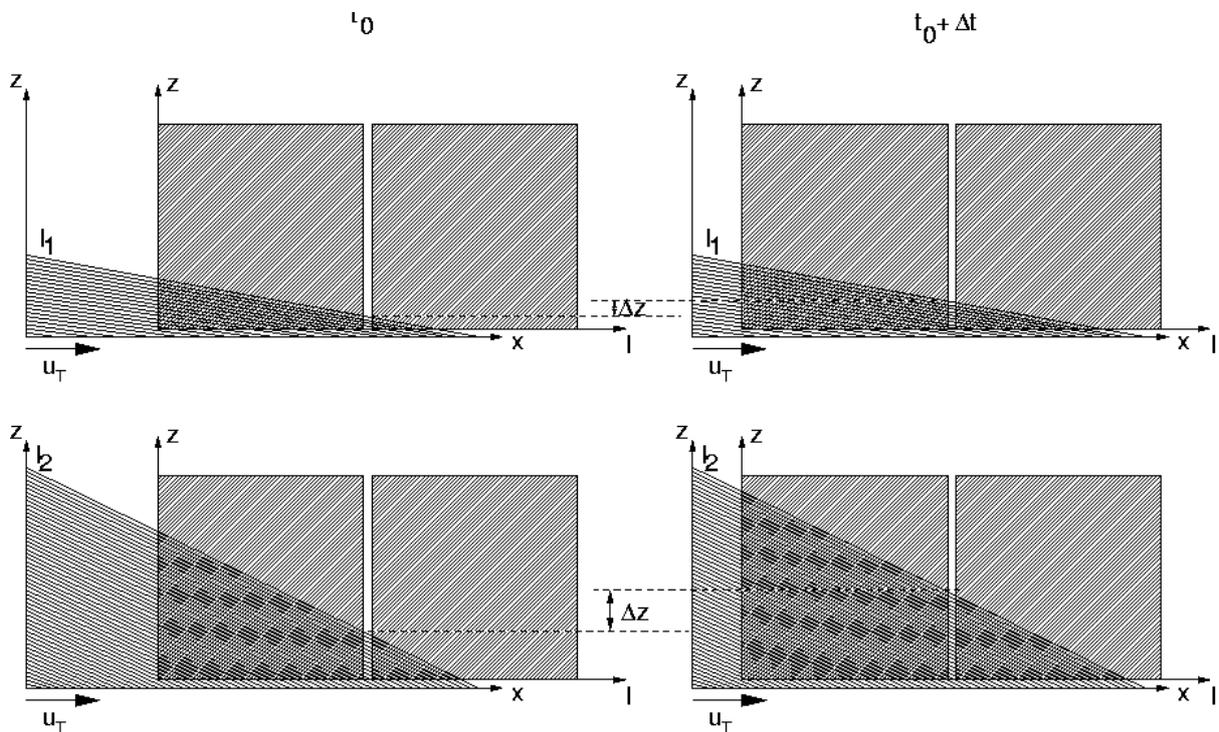


Abbildung 51: Illustration zu (144): Das l, z -Koordinatensystem ruht, während sich das x, z -Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit u_T bewegt. So ist die an einem festen Ort im Zeitintervall Δt beobachtete Änderung Δz einer im x, z -Koordinatensystem mitbewegten Sohle mit großem Gefälle I_2 größer als die einer Sohle kleinen Gefälles I_1 .

(Wird nochmals partiell differenziert, folgt mit $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{u_T^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ die in der Physik übliche Form der Wellengleichung.) Illustriert wird (144) mit Abb. 51.

Aus der eindimensionalen Kontinuitätsbedingung (46) für den Geschiebetransport folgt

$$u_T I = -\frac{dq_B}{dx}. \quad (145)$$

Division durch u_T führt zu (143), oder äquivalent dazu, zu

$$\frac{1}{u_T} \frac{dq_B}{dx} + I = 0. \quad (146)$$

Mit $q_B = q_B(I)$ folgt nach der Kettenregel $\frac{dq_B}{dx} = \frac{dq_B}{dI} \frac{dI}{dx}$. Wird in (145) eingesetzt, ergibt sich aus $u_T I = -\frac{dq_B}{dI} \frac{dI}{dx}$ schließlich

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = -\frac{u_T I}{\frac{dq_B}{dI}}}. \quad (147)$$

Aus physikalischen Gründen gilt $\frac{dq_B}{dI} > 0$. Auch bei einem Anfangsgefälle $I_0 \neq 0$ verschwindet I nach (147) für $x \rightarrow \infty$. Hier zeigt sich das in Abb. 52 illustrierte diffusive Verhalten des Sedimenttransports. Um die in der Natur und im hydromechanischen Experiment beobachteten andauernden Periodizitäten zu beschreiben, bietet sich daher nur ein Ansatz an, in dem q_B auch von der Ableitung $\frac{dI}{dx}$, und damit von der Sohlenkrümmung, abhängt.

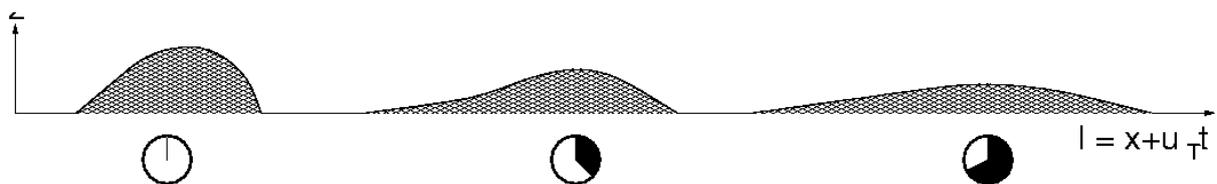


Abbildung 52: Hängt q_B in (147) nur von I ab, klingt die Kammhöhe der im ortsfesten l, z -Koordinatensystem vorbei wandernden Transportkörper ab.

7.2 Unmittelbare Folgerungen zu Transportkörpermodellen aus Fließgeschwindigkeits- oder Schubspannungsprofilen

Indem (143) in x integriert wird, folgt für q_B als Funktion in der Sohlhöhe z

$$q_B(z) = (z + z_0)u_T. \quad (148)$$

Demnach verhält sich q_B *linear* bezüglich einer reduzierten Sohlhöhe $\tilde{z} = z + z_0$. z_0 ist hier eine nicht näher bestimmte Konstante.

Einige Autoren beschreiben die Bildung von Transportkörpern auf Grund eines Fließgeschwindigkeitsprofils in z -Richtung, nach dem die Fließgeschwindigkeit $v = v(\tilde{z})$ des Wassers (oder der Luft, bei Winddünen) Funktion in \tilde{z} ist ([60] 3.3.3, S. 318, selbst zitiert in [58] 1.4.9, 3. S. 56; [37] 3.2, 3.3, 4.2, S. 37-59, hier sehr empirisch). Wird allein davon ausgegangen, dass q_B isoton, d. h. monoton wachsend, in v ist, v hier als tiefenaufgelöste, also nicht tiefengemittelte Fließgeschwindigkeit betrachtet, so folgt bereits:

Periodische Transportkörper können höchstens soweit anwachsen, bis ihre Kämme Höhen \tilde{z} annehmen, für die $v(\tilde{z})$ konstant wird (Abb. 53);

denn für höhere Transportkörper wäre (148) unter dieser Annahme generell verletzt. Analog lässt sich für Transportkörpermodelle schließen, denen ein tiefenaufgelöstes Schubspannungsprofil $\tau = \tau(\tilde{z})$ zugrunde liegt ([57], zitiert in [58] 1.4.9, 4. S. 57).

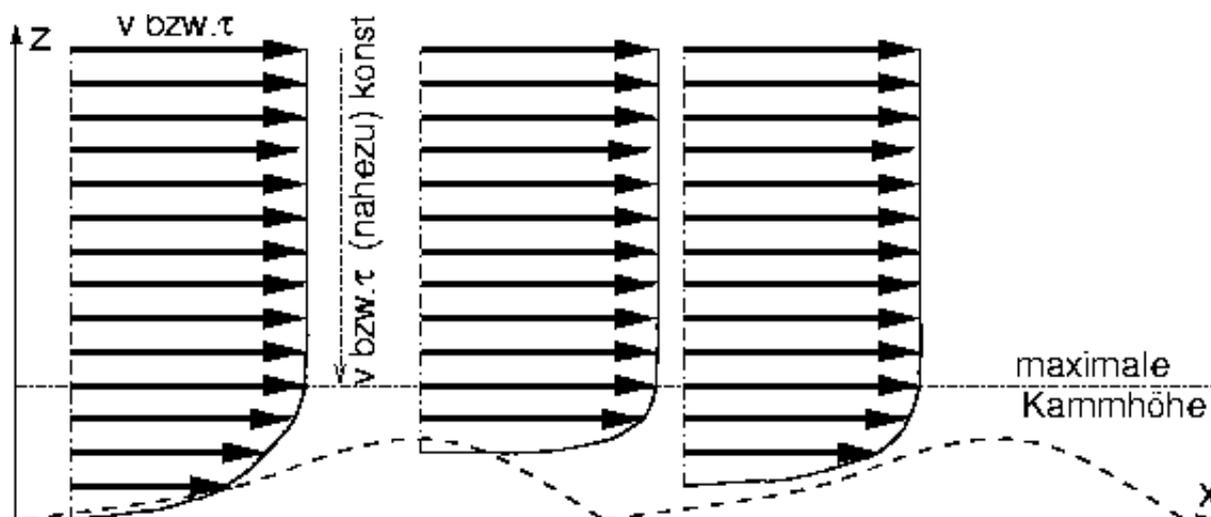


Abbildung 53: Fließgeschwindigkeits- bzw. Schubspannungsprofil (schematisch, zu quantitativen Grafiken vgl. [60] 3.3.3, Abb. 9, S. 318, selbst zitiert in [58] 1.4.9, 3. Abb. 1.4.9/4, S. 56; [37] 3.2, Fig. 3.10, S. 41; [55] 5.3, Abb. 5.16, S. 79)

Bezeichnet L die Länge der Transportkörper, so folgt aus der Transportkontinuität im Mittel die Integralbeziehung

$$\underbrace{\frac{1}{L} \int_x^{x+L} q_B(x') dx'}_{\text{mittlere Volumenfrachtrate}} = \frac{u_T}{L} \underbrace{\int_x^{x+L} z(x') dx'}_{\text{Volumen des Transportkörpers}} \quad (149)$$

$$\Leftrightarrow \int_x^{x+L} q_B(x') dx' = u_T \int_x^{x+L} z(x') dx',$$

in der die betrachteten Volumina jeweils 'pro Breitereinheit' aufzufassen (physikalisch im Grunde also Flächeninhalte) sind.

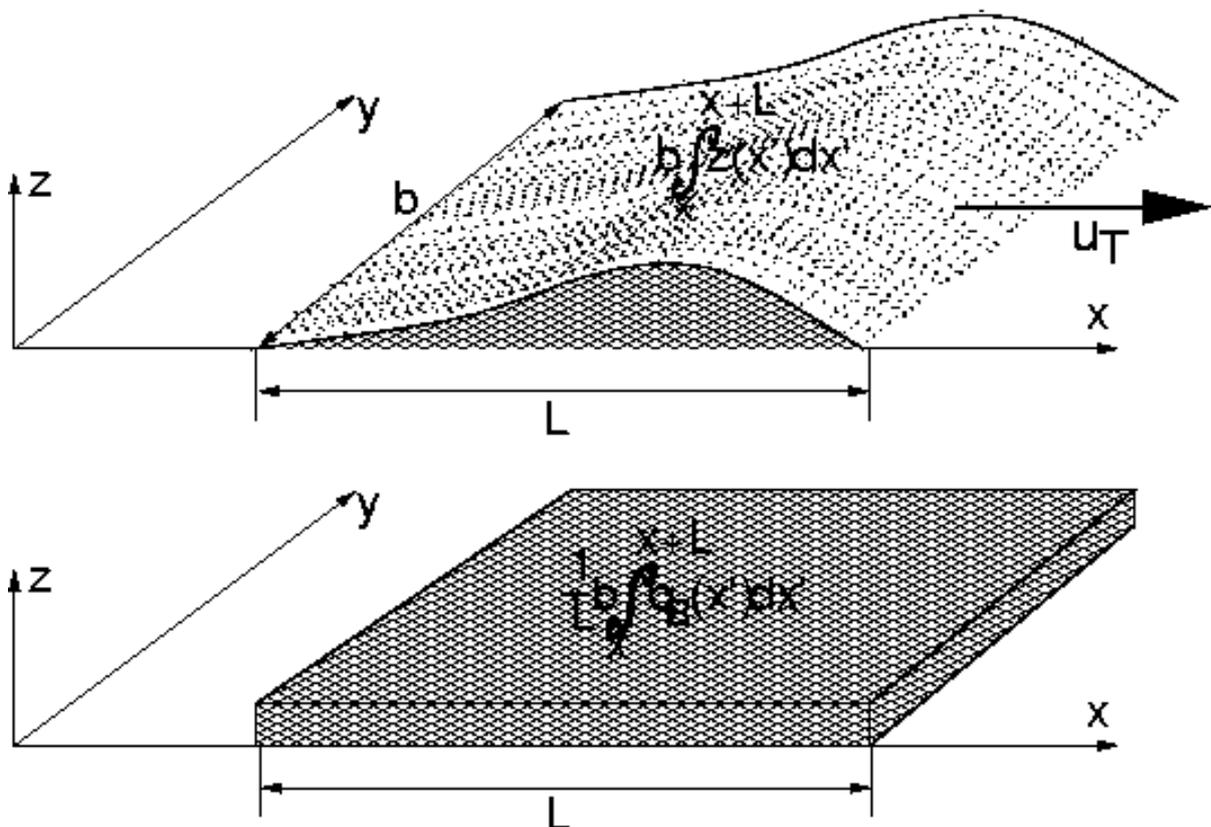


Abbildung 54: Kontinuität des Transports durch Transportkörper im Mittel: Bei einer Wanderungsgeschwindigkeit u_T wird von einem Transportkörper der Länge L das $\frac{u_T}{L}$ -fache seines Volumens transportiert. Diese sich so ergebende Volumenfrachtrate muss dem Mittel der orts aufgelösten Transportraten q_B entsprechen.

Über $q_B(x) = q_B(\tilde{z}(x))$ mit

$$\begin{aligned}
 \int_x^{x+L} q_B(x') dx' &= \int_x^{x+L} q_B(\tilde{z}(x')) dx' \\
 (148) \quad u_T \int_x^{x+L} (z(x') + z_0) dx' & \\
 &= u_T \left(\int_x^{x+L} z(x') dx' + z_0 L \right) \\
 (149) \quad u_T \int_x^{x+L} z(x') dx' & \qquad (150)
 \end{aligned}$$

folgt weiter, dass $z_0 = 0$ gilt, soweit in $z = 0$ die Täler der Transportkörper liegen. Sonst lässt sich die letzte Gleichung in (150) nicht erfüllen. Demnach gilt also

$$\boxed{q_B(z) = u_T z} \qquad (151)$$

Für die Volumenfrachtrate am Kamm von Transportkörpern mit dreieckigem Längs- querschnitt geht eine entsprechende Gleichung bereits auf Führböter und Exner zurück ([37] 5.2.1 Gl. (5.78) S. 95; [58] 7.1 Gl. (7.1-1) S. 285; [60] 3.1.3 Gl. 15 S. 309). Durch die Kopplung der Kontinuitäts- mit der Wellengleichung folgt hier (151) für beliebige periodische Transportkörper an jedem Punkt der Körper.

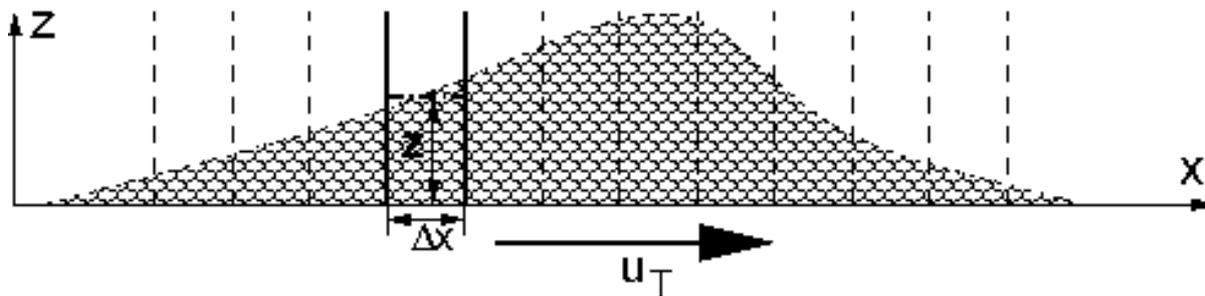


Abbildung 55: Erläuterung zu (151): Stellt man sich einen Transport des Sediments in Compartiments der Länge Δx vor, folgt (151) sofort.

Ohne zunächst (143) herzuleiten, gelangt leuchtet (151) sofort anhand der Abb. 55 ein:

Weder mathematisch sauber noch physikalisch der Realität entsprechend stellt man sich Unterteilungen des Transportkörpers in Compartiments der Länge Δx vor. Sie bewegen sich mit der Wanderungsgeschwindigkeit u_T . Hat die Sohle in einem Compartment die mittlere Höhe z , so umfasst das Compartment ein Volumen von $z\Delta x$ pro Sohlenbreiteneinheit. Transportiert wird das $\frac{u_T}{\Delta x}$ -fache dieses Volumens pro Zeiteinheit. Demnach ergibt sich über das Intervall der Breite Δx gemittelt die Volumenfrachtrate $u_T z$. Für Δx gegen Null wird — ohne mathematisch sauberen Beweis! — (151) sofort plausibel.

Nicht hinwegtäuschen darf (151) jedoch darüber, dass messtechnisch bislang im allgemeinen nur die in (149) betrachtete mittlere Frachtrate $\bar{q}_B = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} q_B(x') dx'$ zugänglich ist. Um diese mit u_T in Beziehung zu setzen, muss sich der Längsquerschnittsflächeninhalt der Transportkörper bestimmen lassen.

Rein hydraulisch lassen sich tiefenaufgelöste Geschwindigkeitsprofile nur über (ggf. vereinfachte) Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen behandeln. Auf letztere wird in dieser Arbeit nicht eingegangen. Bevor stattdessen jedoch versucht wird, die Bildung von Transportkörpern durch flächenhaft angreifende Schubspannungen zu beschreiben, werden bisherige Folgerungen mit experimentell gewonnenen Ergebnissen verglichen.

7.3 Diskussion der Folgerungen in Anbetracht experimenteller Ergebnisse aus der Literatur

Messergebnisse zu tiefenaufgelösten Geschwindigkeitsprofilen über Transportkörpern liegen u. a. aus Laborversuchen von Zanke, Raudkivi und Wieprecht vor.

- Aus der Grafik von Zanke ([60] 3.3.3, Abb. 9, S. 318, selbst zitiert in [58] 1.4.9, 3. Abb. 1.4.9/4, S. 56) lassen sich an (leider) nicht äquidistanten Messpunkten Fließgeschwindigkeiten nach Tabellen 7 bis 9 entnehmen. Die periodischen Transportkörper besitzen eine Kammhöhe von 20cm. Ihre Länge beträgt 260cm, der mittlere Wasserstand über den Transportkörpertälern 69cm. Insgesamt sind über zwei Transportkörpern 11 Geschwindigkeitsprofile aufgenommen worden, jeweils drei in Nähe der zwei Käme und drei in Nähe des Tales zwischen beiden Körpern. Zwei weitere Profile liegen etwa in Mitte zwischen Kamm und Tal. An jeweils entsprechenden Punkten aufgenommene Profile stimmen in den Messwerten überein, so dass sie hier in den Tabellen 7 und 9 nicht als getrennte Messungen wiedergegeben werden. Durch einen Querstrich abgetrennt sind die in $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ angegebenen Geschwindigkeitswerte, die jeweils oberhalb bzw. unterhalb der Kammhöhe von 20cm aufgenommen worden sind.

Tabelle 7: Strömungsprofil nach Zanke — Messungen in Kammnähe

Abstand vom Kamm ↓, $z \rightarrow$ [cm]	18	19	20	22	25	30	32	35	50	66
0	—	—	67	80	90	100	—	101	101	103
25	—	57	84	—	89	—	—	101	104	103
50	56	70	—	86	—	—	94	101	101	101

Tabelle 8: Strömungsprofil nach Zanke — Messungen in Mitte der Transportkörper

z	cm	14	15	20	25	35	45	50	66
v	$\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	40	57	69	76	94	98	100	101

Tabelle 9: Strömungsprofil nach Zanke — Messungen im Tal

vom Tal \rightarrow , $z \downarrow$ [cm]	0	30	60
4	-12	-10	0
5	—	—	11
10	0	—	20
12	—	26	—
15	40	—	45
17	—	40	—
20	87	—	—
25	—	—	66
27	—	86	—
30	97	—	—
32	—	96	—
35	—	—	96
40	98	—	—
50	98	104	104
66	97	101	101

In Kammnähe, aber auch in der Mitte zwischen Kamm und Tal wird direkt an der Oberfläche des Transportkörpers keine Geschwindigkeit gemessen, im Tal dagegen negative Werte. Das spricht für Turbulenz in den Tälern wie sie in Versuchsrinnen beobachtet wird. Für Höhen z von mehr als 35cm oberhalb dem Talniveau zeigen alle Profile eine annähernd konstante Fließgeschwindigkeit von etwa einem Meter pro Sekunde. Demnach steigt die Fließgeschwindigkeit über den Kämmen deutlich schneller an als über den Tälern. So wird die These gestützt, dass unter den (zu diesem Versuch nicht veröffentlichten) hydromechanischen Parametern auch bei glatter Sohle ein durch *hydraulische* Grenzschichtphänomene bedingtes Geschwindigkeitsprofil vorliegt, das erst seinerseits die Bildung von Transportkörpern auslöst.

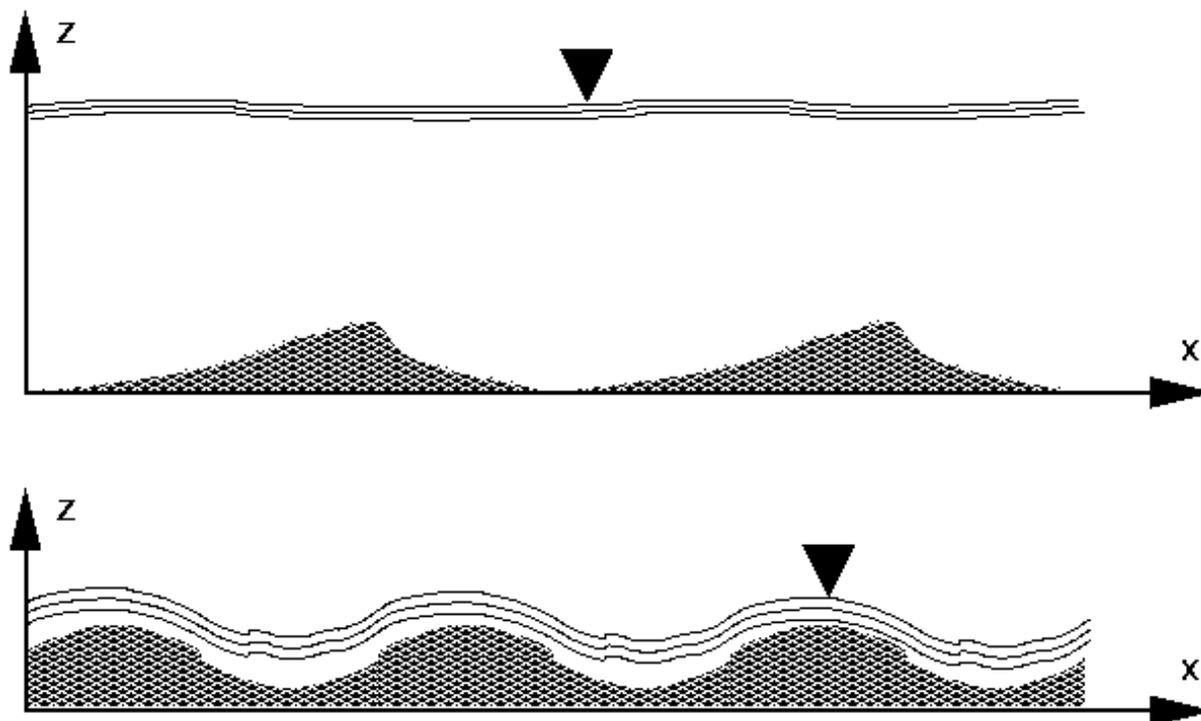


Abbildung 56: Grenzfälle der Rückkopplung von Transportkörpern auf die Hydraulik. *Oben:* Die Spiegellinie bleibt bei einem bezüglich der Höhe der Transportkörper hohen Wasserstand infolge der Transportkörper nahezu unverändert. Typisch ist hier im Fall von Dünen die Asymmetrie mit einem spitzen Kamm (Laboraufnahme in [55] 5.3.3 Abb. 5.20, S. 84). Schon allein wegen der Kontinuität bei konstanter mittlerer Fließgeschwindigkeit müssen sich im Lee der Transportkörper Totzonen ausbilden. *Unten:* Nahezu sinusoidale stehende Wellen bei einem bezüglich der Höhe der Transportkörper niedrigen Wasserstand und steilen Gefällen im Prozentbereich sind typisch für eine starke Rückkopplung. (Laboraufnahmen in [55] 5.3.3 Abb. 5.22, S. 85, 5.4.3, Abb. 5.30, S. 93, Abb. 5.22, S. 94)

- Die im Grafiken von Raudkivi zu Geschwindigkeitsprofilaufnahmen an festen Transportkörpermodellen ([37] 3.2, Fig. 3.10, S. 41) lassen keine quantitative Auswertung zu. Die reinen Geschwindigkeitsprofile scheinen sich im Verlauf mit denen von Zanke zu decken; die zusätzlich erfassten Daten zur Turbulenz bestätigen die auch leicht in Versuchsrinnen visuell zu beobachtenden Turbulenzen im Lee der Dünen.

- Die von Wieprecht exemplarisch grafisch dargestellten Geschwindigkeitsprofile ([55] 5.3, Abb. 5.16, S. 79) verhalten sich — mit Ausnahme eines unmittelbar über einem Dünentäl aufgenommene Profils — translationsinvariant in z -Richtung in dem Sinn, dass sich bezogen auf den Abstand zum Punkt der Dünenoberfläche, über dem das Profil aufgenommen wird, sich das stets ein annähernd gleiches Profil ergibt. Sie widersprechen demnach den Ergebnissen der zuvor genannten Autoren. Wieprecht schließt daher auf eine Rückwirkung der Transportkörper auf die Hydraulik ([55] 5.4, S. 89). Durch sie wird die Grenzschicht über den Kämmen der Dünen angehoben. Offensichtlich wird das in Versuchen, bei denen sich stehende Wellen ausbilden ([55] 5.3, 5.4, 6.). Sie lassen vermuten, dass Vorgänge innerhalb des transportierten Sediments Oszillationen auslösen können.

In keinem Fall erreichen die Kämmen der Transportkörper ein Niveau über den Tälern, in dem die Fließgeschwindigkeit bereits konstante Werte annimmt. Die Ergebnisse von Wieprecht in Verbindung mit der experimentell belegten Tatsache, dass Transportkörper auch bei nicht-kritischen Abflüssen auftreten, legen nahe, die Ursache periodischer Transportkörper in oszillatorischen Lösungen zu (143) zu suchen und hydraulische Vorgänge als Folge dieser zu betrachten.

Problematisch bei dem Ansatz $u_s = u$ ist die Unstetigkeit $u_s(z') = 0$ für $z' \leq z - s(z)$ und $u_s(z') = u$ für $z' > z - s(z)$. Für dickere Schichten scheint wenig plausibel, warum u_s in z' nicht weiter wächst. Realistisch scheint dieser Ansatz allenfalls, wenn eine sehr dünne Schicht bei Transportbeginn mit einer kritischen Geschwindigkeit u_c bewegt wird.

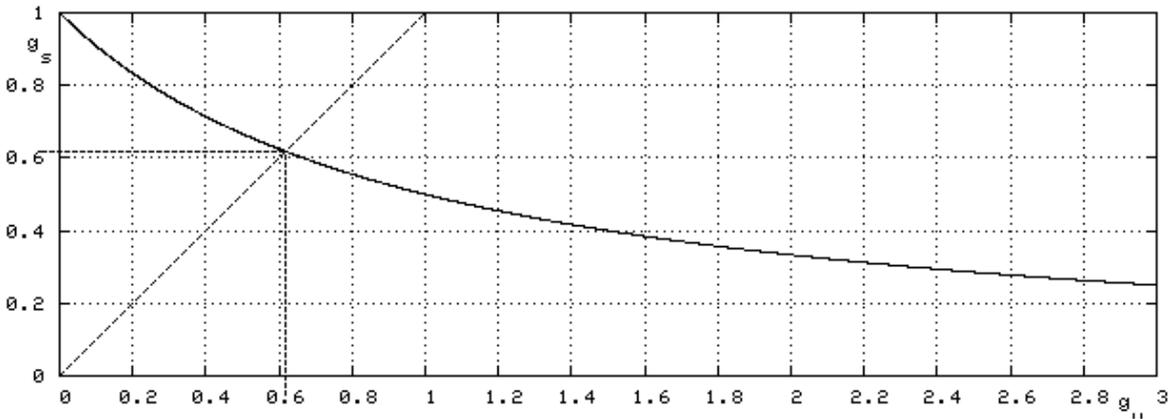


Abbildung 58: γ_s als Funktion von γ_u :

Allgemeinere Ansätze ergeben sich aus einem Potenzgesetz für u_s und s als Funktionen in q_B und damit, wegen (151), auch als Funktionen in z . Angenommen, es gelten, im folgenden durch \sim bezeichnete, lineare Proportionalitäten

$$s(z) \sim z^{\gamma_s}$$

$$u_s(z') \sim \begin{cases} (z' + z - s(z))^{\gamma_u} & \text{falls } z' \geq z - s(z) \\ 0 & \text{falls } z' < z - s(z) \end{cases} \quad (154)$$

noch nicht näher bestimmte $\gamma_s, \gamma_u \geq 0$, so folgt mit

$$q_B(z) \stackrel{(153)}{=} \int_{z-s(z)}^z u_s(z') dz' \stackrel{(154)}{\sim} \int_{z-s(z)}^z (z' + z - s(z))^{\gamma_u} dz'$$

$$= \int_0^{s(z)} \zeta^{\gamma_u} d\zeta = \left[\frac{\zeta^{\gamma_u+1}}{\gamma_u+1} \right]_0^{s(z)} \quad (155)$$

$$\stackrel{(154)}{\sim} \left[\frac{\zeta^{\gamma_u+1}}{\gamma_u+1} \right]_0^{z^{\gamma_s}} = \frac{z^{\gamma_s(\gamma_u+1)}}{\gamma_u+1}$$

$$\begin{aligned} \text{aus (151)} \quad \gamma_s(\gamma_u + 1) &= 1 \\ \iff \gamma_s &= \frac{1}{1 + \gamma_u}. \end{aligned} \quad (156)$$

Demnach gilt $\gamma_s = 1$ für $\gamma_u = 0$ — Hier handelt es sich um den bereits diskutierten Fall $u_s = u$ konstant. — und $0 < \gamma_s < 1$ für $\gamma_u > 0$. $\gamma_u = \gamma_s$ gilt, falls $\gamma_u = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \gamma_s$ gilt. γ_s als Funktion $\gamma_s = \gamma_s(\gamma_u)$ zeigt die Grafik in Abb. 58.

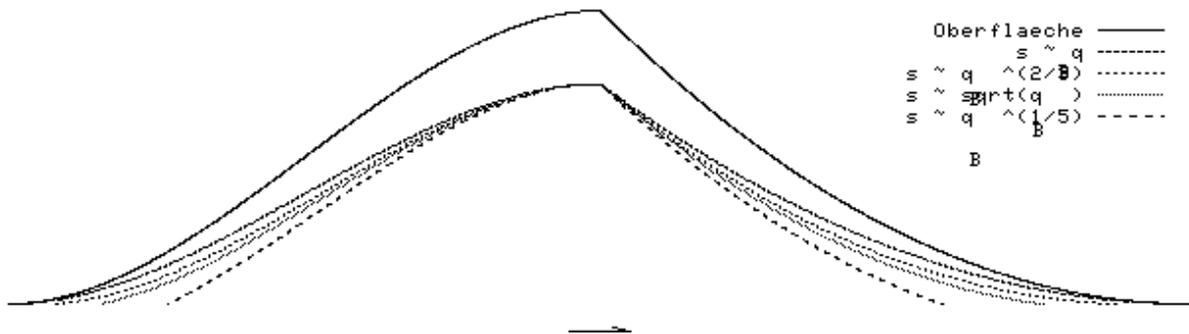


Abbildung 59: Schichtdicken s , die als Funktion von q_B (bzw. von z) Potenzgesetzen genügen: Die für den Transportkörper gewählte Form ist schematisch! Eine mobile Schicht, deren Dicke s in einer Potenz von q_B niedriger als mit der Quadratwurzel anwüchse, wäre auch nahe der Täler bereits fast so dick wie am Kamm.

Abb. 59 zeigt den Verlauf der beweglichen Schicht auf einem schematischen Transportkörper für die Fälle $\gamma_s = \frac{1}{5}$, $\gamma_s = \frac{1}{2}$, $\gamma_s = \frac{2}{3}$ und $\gamma_s = 1$. Die Grafik ist so skaliert, dass am Kamm $u_s = 5u_T$ gilt. So deckt sich der Graph für $\gamma_s = 1$ mit dem Graphen für $u = 5u_T$ in Abb. 57. Für γ_u gilt nach (156) jeweils $\gamma_u = 4$, $\gamma_u = 1$, $\gamma_u = \frac{1}{2}$ und $\gamma_u = 0$.

Der Graph für $\gamma_s = \frac{1}{5}$ zeigt, dass bereits nahe dem Tal die bewegliche Schicht fast sprunghaft nahezu so dick wie am Kamm wird. Dass die Schichtdicke in derart niedriger Potenz von z anwächst, scheint demnach wenig plausibel. Um die Frage zu klären, welche Potenzgesetze realistisch sind, wird im Anhang C.10 eine logarithmische Verteilung für u_s untersucht. Hier zeigen kleine Schichtdicken s ein annähernd lineares Anwachsen mit z .

7.5 Welche mathematischen Schlüsse erlaubt (143), wenn q_B von der Sohlenkrümmung abhängt?

Am Schluss des einleitenden Teilabschnittes 7.1 wird bereits darauf eingegangen, dass q_B neben dem Wasserstand h nicht allein von einem, ggf. lokal betrachteten Gefälle I abhängen kann, wenn sich periodische Transportkörper bilden. So wird in dieser Arbeit untersucht, ob und welche Transportkörper sich bilden, wenn q_B von der Sohlenkrümmung $\frac{dI}{dx}$ abhängt. Mathematisch lässt sich bereits auf einiges schließen, ohne dass ein Transportgesetz für q_B bereits näher bekannt ist.

Ein solches Transportgesetz ist physikalischer Natur. Erwarten darf man, dass q_B positiv und stetig ist. Unter diesen und ggf. weiteren Voraussetzungen wie Symmetrieeigenschaften werden in diesem Unterabschnitt Lösungsansätze zu (143) entwickelt. Hierzu wird verstärkt mathematisch argumentiert. Letztlich ergeben sich jedoch grundlegende Fragen und Antworten dazu, ob und wann die Sohlenkrümmung periodische Transportkörper erklären kann. Deshalb wird dieser Abschnitt nicht in den Anhang ausgelagert.

Über die Kettenregel folgt

$$\frac{dq_B}{dx} = \frac{\partial q_B}{\partial h} \underbrace{\frac{dh}{dx}}_{=0 \text{ bei NF}} + \frac{\partial q_B}{\partial I} \frac{dI}{dx} + \frac{\partial q_B}{\partial \frac{dI}{dx}} \frac{d^2 I}{dx^2} = \frac{\partial q_B}{\partial I} \frac{dI}{dx} + \frac{\partial q_B}{\partial \frac{dI}{dx}} \frac{d^2 I}{dx^2} \quad (157)$$

bei in diesem Abschnitt generell vorausgesetztem Normalabfluss. Eingesetzt in (143) ergibt sich

$$\begin{aligned} -I &= \frac{1}{u_T} \frac{\partial q_B}{\partial I} \frac{dI}{dx} + \frac{\partial q_B}{\partial \frac{dI}{dx}} \frac{d^2 I}{dx^2} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{1}{\frac{\partial q_B}{\partial \frac{dI}{dx}}} \left(\frac{\partial q_B}{\partial I} \frac{dI}{dx} + u_T I \right) \end{aligned} \quad (158)$$

Wenn $\frac{\partial q_B}{\partial I} > 0$ gilt, handelt es sich, wie bereits in 7.1 diskutiert, bei $\frac{\partial q_B}{\partial I} \frac{dI}{dx}$ um einen Dämpfungsterm, der periodische Oszillationen abklingen lässt. Um periodische Transportkörper zu beschreiben, darf q_B demnach nur von einem mittleren Energiegefälle I_E abhängen, das in die folgenden Differentialgleichungen ggf. als konstanter Parameter, jedoch nicht als ortsveränderliche Größe eingeht. So gelangt man zu

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = -\frac{u_T I}{\frac{dq_B}{d\frac{dI}{dx}}}. \quad (159)$$

Im Fall positiver, konstanter $\frac{dq_B}{d\frac{dI}{dx}}$ gibt es für Lösungen zu (159) ein Fundamentalsystem aus trigonometrischen Funktionen.

Im allgemeinen tritt jedoch im Term $\frac{dq_B}{d\frac{dI}{dx}}$ die Ableitung $\frac{dI}{dx}$ selbst auf. So liegt auch in (159) eine i. a. nichtlineare Differentialgleichung mit gemischten Termen vor. Da der Ort x in dieser Gleichung nicht explizit auftritt, lässt sich (159) auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen, indem man

$$\boxed{p := \frac{dI}{dx}} \quad (160)$$

setzt und p als Funktion $p = p(I)$ in I betrachtet ([23] 4.14, **4.17 (a)**). Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dI} \frac{dI}{dx} = p \frac{dp}{dI}. \quad (161)$$

(161) lässt sich in (159) einsetzen und ergibt

$$p \frac{dp}{dI} = -\frac{u_T I}{\frac{dq_B}{dp}} \quad (162)$$

$$\iff_{p \neq 0} \frac{dp}{dI} = -\frac{u_T I}{p \frac{dq_B}{dp}}$$

So gelangt man schließlich zu einer Differentialgleichung erster Ordnung für $I = I(p)$ in einer Darstellung mit dem Parameter p zu

$$\frac{dI}{dp} = -\frac{p}{u_T I} \frac{dq_B}{dp}. \quad (163)$$

In (163) werden die Differentiale getrennt und anschließend integriert. Für das Integral in p lässt sich über partielle Integration und den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung die Ableitung $\frac{dq_B}{dp}$ eliminieren. So folgt

$$\int I dI = -\frac{1}{u_T} \int p \frac{dq_B}{dp} dp \quad (164)$$

$$\begin{aligned} &= \underset{\text{part. Int.}}{-\frac{1}{u_T} \left\{ p \int \frac{dq_B}{dp} dp - \int \left(\int \frac{dq_B}{dp} d\bar{p} \right) dp \right\}} \\ &= \underset{\text{Hauptsatz}}{\frac{1}{u_T} \left(\int q_B(p) dp - p q_B(p) \right)}. \end{aligned} \quad (165)$$

Mit der Parameterdarstellung in p werden dank der Integraldarstellung (165) ohne eine Ableitung von q_B auch Lösungen zu (143), speziell zu (159), für Funktionen $q_B = q_B(p)$ erfasst, bei denen $\frac{dq_B}{dp}$ nicht existiert. In (143) ist nur die Ableitung $\frac{dq_B}{dx}$ von q_B nach dem Ort x relevant. Eine zur Heuristik in (157) eingeführte Verkettung in differenzierte Funktionen muss nicht immer vorliegen. Die nach (165) bestimmten Lösungen erfüllen jedoch (159) ggf. nur fast überall im Sinn der Lebesgue-Theorie.

Ist q_B stetig in p , bedeutet das praktisch, dass auf jedem kompakten Intervall endlich viele Ausnahmepunkte x liegen können, für die (159) nicht erfüllt wird. Die Integrale werden weiter aufgelöst, indem eine Anfangsbedingung

$$I(p_0) = I_0 \quad (166)$$

vorgegeben wird. Randbedingungen für die ursprüngliche Gleichung (159) zweiter Ordnung müssen dazu transformiert werden. Zunächst wird jedoch davon ausgegangen, dass eine Anfangsbedingung (166) vorliegt.

Bezeichnet

$$\Lambda_{p_0}(p) := \frac{1}{u_T} \left(\int_{p_0}^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} - \left[\tilde{p} q_B(\tilde{p}) \right]_{p_0}^p \right), \quad (167)$$

(Λ ist hier *nicht* die Periodenlänge der Transportkörper!) so ist Λ_{p_0} stetig in p , wenn q_B in p stetig ist; ist q_B sogar differenzierbar in p , so Λ_{p_0} ebenfalls in p . Weiter ist $\Lambda_{p_0}(p_0) = 0$. Ist q_B konstant in p , so verschwindet $\Lambda_{p_0}(p)$ für alle p_0 und p . Vorausgesetzt wird, dass $q_B \geq 0$ gilt. Im Anhang C.11 werden weitere Eigenschaften von Λ untersucht.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe (163), (166) ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{I^2(p) - I_0^2}{2} &= \Lambda_{p_0}(p) \\ \Leftrightarrow I(p) &= \pm \sqrt{I_0^2 + 2\Lambda_{p_0}(p)}. \end{aligned} \quad (168)$$

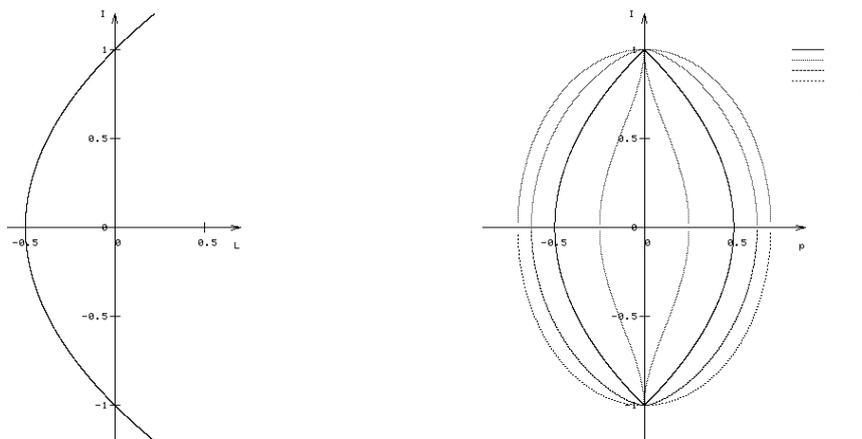


Abbildung 60: Relation zwischen I und p . *Links*: Als Funktion in Λ ergibt sich keine geschlossene Kurve für eine Relation zwischen I und Λ nach (168). *Rechts*: Geschlossene Kurven ergeben sich für die Relation zwischen I und p , wenn sich $-\Lambda$ proportional zu einer positiven Potenz von $|p|$ verhält. Gilt $\Lambda = -p^2$, ergibt sich eine Ellipse.

Doch wann gibt es periodische Transportkörper? Um das zu beantworten, werden Monotonieeigenschaften der Funktion Λ untersucht. Zur Darstellung einer Lösung $I = I(x)$ zu (159) als Lösung $(x(p), I(p))$ im Parameter p zu (163) sind nur solche p zulässig, für die $I_0^2 + 2\Lambda_{p_0}(p) \geq 0$ in (168) erfüllt wird. In Abb. 60 links wird die durch (168) gegebene Relation zwischen I und Λ für $I_0 = 1$ skizziert. $\Lambda < -\frac{1}{2}$ sind nicht zulässig.

Ist die Funktion $\Lambda = \Lambda_{p_0}(p)$ nach (167) bekannt, lässt sich eine Relation zwischen Λ und p bestimmen. Der Graph letzterer Relation ist das sog. Phasendiagramm des Systems aus (160) und der Gleichung $\frac{dp}{dx} = -\frac{u_T I}{\frac{dq_B}{dp}}$, die sich unmittelbar aus (159) durch Einsetzen von p als Zwischenschritt zur Gewinnung von (163) ergibt. Periodische Lösungen zu einem solchen gekoppelten System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen gibt es genau dann, wenn das Phasendiagramm geschlossene Kurven aufweist. Die Relationen zwischen I und p für $\Lambda_0(p) = -|p|^\gamma$ und $\gamma = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ in Abb. 60 rechts ergeben solche geschlossenen Kurven.

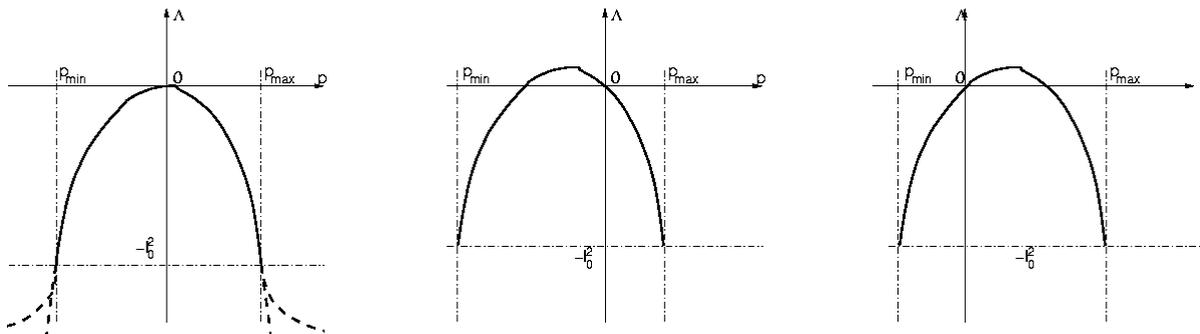


Abbildung 61: Für periodische Lösungen zu (163) notwendige stückweise Monotonie der Funktion Λ_{p_0} , hier im Fall $p_0 = 0$. *Links:* Λ_{p_0} besitzt eine Nullstelle in $p = p_0$. Weiter gibt ein $p_{\min} < p_0$ und ein $p_{\max} > p_0$ so, dass (169) gilt. Der Verlauf von Λ_{p_0} für $p < p_{\min}$ und $p > p_{\max}$ wird nicht weiter durch notwendige Bedingungen beschrieben (gestrichelte Linien). Λ_{p_0} besitzt ein Maximum zwischen p_{\min} und p_{\max} . *Mitte und rechts:* Das Minimum muss jedoch nicht notwendig in p_0 , hier in 0, liegen. Λ_{p_0} kann so durchaus positive Werte annehmen.

Auf notwendige Eigenschaften stückweiser Monotonie für die Existenz geschlossener Kurven wird in Anhang C.11 eingegangen. Anhand der Abb. 61 werden diese Eigenschaften skizziert. Hinreichend für ihre Existenz ist generell, dass es für stetige Λ ein p_0 gibt so, dass sich ein geeignetes kompaktes Intervall J_{p_0} mit $p_0 \in J_{p_0}$ durch Λ_{p_0} surjektiv auf $\left[-\frac{I_0^2}{2}, 0\right]$ abbilden lässt und sich Λ_{p_0} zu $p = p_0$ achsensymmetrisch verhält. In diesem Fall gibt es zwei Punkte p_{\min} und p_{\max} so, dass $J_{p_0} = [p_{\min}; p_{\max}]$ und $p_0 = \frac{p_{\min} + p_{\max}}{2}$ gilt. Ist Λ_{p_0} obendrein streng monoton, um bisherige Voraussetzungen zu erfüllen somit streng antiton, in $|p + p_0|$, so gilt

$$\Lambda_{p_0}(p_{\min}) = -\frac{I_0^2}{2} = \Lambda_{p_0}(p_{\max}). \quad (169)$$

Wird die Monotonie verletzt, kann es zu Schleifen, d. h. mehrfach geschlossenen Kurven, kommen.

Im Anhang C.11 wird weiter gezeigt, dass für die Achsensymmetrie von Λ_{p_0} hinreichend ist, dass sich $\frac{dq_B}{dp}$, falls existent, ebenfalls zu $p = p_0$ achsensymmetrisch verhält und $p_0 = 0$ gewählt wird oder $\frac{dq_B}{dp}(p_0) = 0$ ist. Für die Achsensymmetrie von $\frac{dq_B}{dp}$ ist hinreichend und notwendig die Punktsymmetrie von q_B selbst in $(p_0 | q_B(p_0))$. Demnach hat q_B im Fall $p_0 \neq 0$ in $(p_0 | q_B(p_0))$ kein Extrem, sondern einen Sattelpunkt.

Weiter ist (162) äquivalent zu

$$-I = \frac{p}{u_T} \frac{dq_B}{dp} \frac{dp}{dI}. \quad (170)$$

Über $dx = \frac{dx}{dI} dI = \frac{dI}{p} = \frac{dp}{p} \frac{dI}{dp}$ ergibt die Sohlhöhe z zu

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_{x_0}^x -I(x) dx \\ &= z_0 + \frac{1}{u_T} \int_{p(x_0)}^{p(x)} \tilde{p} \frac{dq_B}{dp} \frac{dp}{dI} \frac{1}{\tilde{p}} \frac{dI}{dp} d\tilde{p} \\ &\stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} z_0 + \left[\frac{q_B(\tilde{p})}{u_T} \right]_{p(x_0)}^{p(x)} \end{aligned} \quad (171)$$

Dass es eine solche Darstellung der Sohlhöhe als Quotient $\frac{\text{Volumenfrachtrate}}{\text{Wanderungsgeschwindigkeit}}$ geben muss, folgt bereits aus (148) bzw. (151).

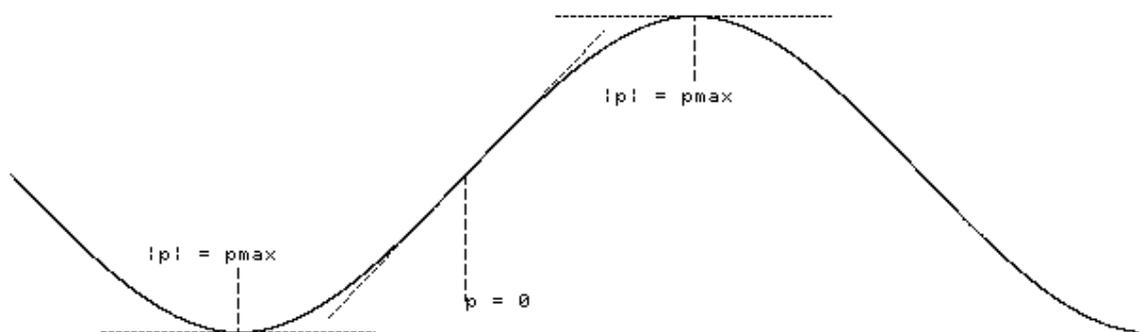


Abbildung 62: Eine zweifach nach dem Ort x differenzierbare Sohlhöhe $z = z(x)$ besitzt an Stellen mit $p = \frac{dI}{dx} = 0$ einen Wendepunkt. In dieser Grafik ist z zu diesem Wendepunkt symmetrisch. So hat der Graph in beiden Extrema dem Betrag nach die gleiche, maximale Krümmung.

Ist die Sohlhöhe z zweimal differenzierbar, liegt an einem Ort mit $p = \frac{dI}{dx} = 0$ ein Wendepunkt des Sohlenprofils, während auf Kämmen bzw. in Tälern extremale Sohlkrümmungen angenommen werden. Für den in Abb. 62 dargestellten Fall, dass das Sohlenprofil zu einem Wendepunkt symmetrisch ist, sind die Beträge der Krümmungen am Kamm und im Tal gleich.



Abbildung 63: Durch die Näherung der Ortsfunktion $x = x(p)$ werden dreieckige Dünen beschrieben. Der Anstieg bzw. Abfall der Schenkel beträgt I_0 . Dieser Wert wird in der nicht approximierten Form (durchgezogene Linie) an den Wendepunkten bei $p = 0$ erreicht. Durch Pfeile werden die Extrempunkte markiert.

Nach (342) im Anhang C.12 ergibt sich weiter die Ortsfunktion $x = x(p)$ im Parameter p zu

$$x(p) = x_0 + \left[\frac{I(\tilde{p})}{\tilde{p}} \right]_{p_0}^p + \int_{p_0}^p \frac{I(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} d\tilde{p}. \quad (172)$$

I hängt von Λ nach (168) über eine Quadratwurzel ab. Im allgemeinen lässt sich das Integral $\int_{p_0}^p \frac{\pm \sqrt{I_0^2 + 2\Lambda_{p_0}(\tilde{p})}}{\tilde{p}^2} d\tilde{p}$ über diesen Wurzelterm nur geschlossen auswerten, indem

nach (343) $\sqrt{1 + 2\frac{\Lambda(p)}{I_0^2}} \approx 1 - \frac{\Lambda(p)}{I_0^2}$ linearisiert wird. Die Näherung ergibt mit (348)

$$\boxed{x(p) \approx x_0 \mp \frac{z(p) - z_0}{I_0}} \quad (173)$$

Sofort erkennt man, dass mit dieser Näherung nur gleichschenkelig-dreiecksförmige Transportkörper beschrieben werden. Der Gradient der Schenkel beträgt I_0 (Abb. 63). Hier noch nicht klären lässt sich welcher Natur eine mögliche Singularität der nicht approximierten Ortsfunktion ist, wenn $p_0 = 0$ gilt. Im Anhang C.12 wird eine Approximation in zweiter Ordnung entwickelt.

Sind p_{\min} und p_{\max} bestimmt, so dass (169) erfüllt wird und besitzt Λ die für die Existenz periodischer Lösungen geforderten, hinreichenden Stetigkeits- und Symmetrieeigenschaften, ergibt sich die Kammhöhe z_{\max} über $z_0 = 0$ zu

$$z_{\max} = \frac{|q_B(p_{\max}) - q_B(p_{\min})|}{u_T}. \quad (174)$$

Um Verwechslungen mit dem Widerstandsbeiwert auszuschließen, wird im folgenden die Periodenlänge mit $\frac{1}{\omega}$ bezeichnet. Als Näherung ergibt sich

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{2z_{\max}}{I_0} \quad (175)$$

$$= \frac{2|q_B(p_{\max}) - q_B(p_{\min})|}{I_0 u_T} \quad (176)$$

Da $I(p_{\min}) = 0 = I(p_{\max})$ gilt, liegen zumindest im Fall $p_0 = 0$, d. h. im Fall eines Wendepunktes von z in $x(p_0)$, Extrema der Sohlhöhe z in $x(p_{\min})$ und $x(p_{\max})$ vor. Nach (148) verschwindet q_B im Minimum $z_0 = 0$ von z . So folgt o. B. d. A. (ggf. werden p_{\min} und p_{\max} vertauscht.)

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{2q_B(p_{\max})}{I_0 u_T} \quad (177)$$

Das Integral im Definitionsterm (167) für die Funktion Λ lässt sich durch die Trapezregel näherungsweise abschätzen. Mit den Rechnungen im Anhang C.12 folgt über (332)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} &\approx \frac{2q_B(p_{\max})}{u_T \sqrt{\frac{p_{\max} q_B(p_{\max})}{2u_T}}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{2q_B(p_{\max})}{p_{\max} u_T}}, \end{aligned} \quad (178)$$

wenn sich $q_B = q_B(p)$ in $p_0 = 0$ punktsymmetrisch verhält. So lässt sich die Periodenlänge nur scheinbar ohne die Anfangsbedingung I_0 ausdrücken; denn I_0 legt weiterhin p_{\max} fest.

Abschließend muss noch geklärt werden welche mathematischen Eigenschaften zwei Funktionen $q_B = q_B(B)$ und $B = B(p)$ besitzen, mit denen sich $q_B = q_B(B(p))$ als Verkettung darstellen lässt. B kommt später eine physikalische Bedeutung zu wie Schubspannung, Feststoff-Froude-Zahl, Sohlenbelastung o. a.

Für einen Wendepunkt von q_B ist hinreichend, dass $\frac{d^2 q_B}{dp^2}$ verschwindet, $\frac{dq_B}{dp}$ jedoch nicht. Aus (334) im Anhang C.11 folgt

$$\frac{d^2 q_B}{dB^2} \left(\frac{dB}{dp} \right)^2 = - \frac{dq_B}{dB} \frac{d^2 B}{dp^2} \quad (179)$$

demnach als hinreichend für einen Wendepunkt, wenn die Seiten der Gleichung (179) nicht verschwinden. Verschwinden sie doch, ist dennoch hinreichend, wenn nur $\frac{d^2 q_B}{dB^2}$ und $\frac{d^2 B}{dp^2}$ verschwinden, $\frac{dB}{dp}$ und $\frac{dq_B}{dB}$ jedoch nicht.

In Zusammenfassung ergibt dieser Unterabschnitt:

- (143) für periodische Transportkörper ist äquivalent zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in I als Funktion $I = I(p)$ mit $p = \frac{dI}{dx}$.
- Ist q_B als Funktion $q_B = q_B(p)$ linear in p , so ergibt sich über $\frac{dq_B}{dp} = \text{const}$ ein Fundamentalsystem aus trigonometrischen Funktionen.
- Im allgemeinen ergeben sich jedoch aus mathematischer Sicht enge Anforderungen an q_B und eine q_B bestimmende Größe B . Diesen muss ein physikalischer Ansatz gerecht werden, damit sich periodische Transportkörper überhaupt beschreiben lassen, indem q_B über B von der Sohlenkrümmung p abhängt.

7.6 Transportkörper durch Schubspannungen

In dieser Arbeit werden Ansätze untersucht, nach denen die Bildung von Transportkörpern durch Transport infolge einer flächenhaft wirkenden Schubspannung bestimmt wird. Weiter wird, wie bereits eingangs erwähnt, von Normalabfluss ausgegangen. Damit liegt ein konstantes mittleren Energiegefälle I_E vor. Der Ansatz für eine nicht nur vom Wasserstand h und dem Energiegefälle I_E abhängige effektive Schubspannung τ_{eff} auf Grund der Sohlenkrümmung wird erst im nächsten Unterabschnitt entwickelt. Hierzu dienen strömungsmechanische Überlegungen.

Als Funktionen $q_B = q_B(\tau)$ bieten sich an die für den Transport im langzeitigen Mittel experimentell validierten Geschiebeformeln. Wegen (151) wird in den Tälern der Transportkörper $q_B = 0$ grundsätzlich erreicht. Mathematisch kommen deshalb Formeln, für die $\frac{dq_B}{d\tau}$ in $q_B = 0$ singular wird, nicht in Betracht.

Boys ([3], S. 153 unten - S. 154 oben, *Conditions d'équilibre du fond*) bestimmt den Beginn des Transports als den, wenn die auf ein Korn einwirkenden treibenden Schubspannungen widerstehende Schubspannungen übersteigen. Dann überschreitet die Orientierung der Resultierenden dieser zwei Spannungsvektoren einen kritischen Winkel α ([3], S. 154-155, *Hypothèses restrictives*).

Die widerstehende Schubspannung ergibt sich aus der Gewichtskraft F_G aufeinander liegender Körner. Bei einer Grundfläche A ergibt sich für eine Säule der Höhe s von Sedimentkörnern der Dichte ϱ_S bei einer relativen Packungsdichte μ unter Wasser ein Druck

$$\tau_r = \frac{F_G}{A} = sg(1 - \mu)(\varrho_S - \varrho_W). \quad (180)$$

Für den Orientierungswinkel ϕ der Resultierenden aus τ_z und τ_r ergibt sich nach Boys

$$\tan \phi = \frac{\tau_z}{\tau_r} \quad (181)$$

und unter Vernachlässigung treibender Schubspannungen durch Masse innerhalb der Sohle und der Wechselwirkungen an Grenzschichten, also $\tau_z = \tau_0$, speziell ([3], S.154)

$$\tan \phi = \frac{1}{s(1 - \mu)} \frac{\varrho_W}{\varrho_S - \varrho_W} h I_E = \frac{h I_E}{s \rho' (1 - \mu)}. \quad (182)$$

Idee von Boys ist nun, dass sich aus dem Ansatz $\tan \phi(\tau_z) \geq \tan \alpha$ eine bei unbekanntem Hebelwinkel α nicht näher bestimmbare kritische Schubspannung $\tau_{z',c}$ ergibt (Abb. 64 links). Unter seiner Annahme $\tau_z = \tau_0$ gilt speziell $\tau_{z',c} = \tau_c$ mit τ_c nach (25).

Weiter folgert Boys nun, dass die vorhandene treibende Schubspannung τ_z durch einzelne 'Quanta' τ_c sukzessive abgebaut wird, indem schichtenweise immer tiefer liegende Körner in Bewegung gesetzt werden. So wird zur Bestimmung der kritischen Schubspannung $s = d_m$ gesetzt. Es folgt

$$\tau_c = \frac{d_m}{\tan \alpha} \mathbf{g}(1 - \mu)(\varrho_S - \varrho_W) \quad (183)$$

Kräfte werden nur durch die relative Bewegung der Schichten zueinander übertragen.

Damit ergibt sich eine lineare Schubspannungs- und Geschwindigkeitsverteilung (Abb. 64 rechts, [3], S. 159) in einer bewegten Schicht der Dicke

$$s = n d_m. \quad (184)$$

Wird die tiefste bewegte Sohlschicht mit der Geschwindigkeit u_c bewegt, ist $\bar{u} = u_c \frac{n-1}{2}$ und so ergibt sich das Transportvolumen q_B pro Zeit- und Längeneinheit

$$\begin{aligned} q_B &= s \bar{u} = d_m u_c \frac{n(n-1)}{2} = d_m u_c \frac{\frac{\tau_0}{\tau_c} \left(\frac{\tau_0}{\tau_c} - 1 \right)}{2} \\ &= \frac{d_m u_c}{2 \tau_c^2} \tau_0 (\tau_0 - \tau_c) = \frac{d_m}{2 \sqrt{\varrho_S \tau_c}} \left(\frac{\tau_0}{\tau_c} \right) (\tau_0 - \tau_c) \end{aligned} \quad (185)$$

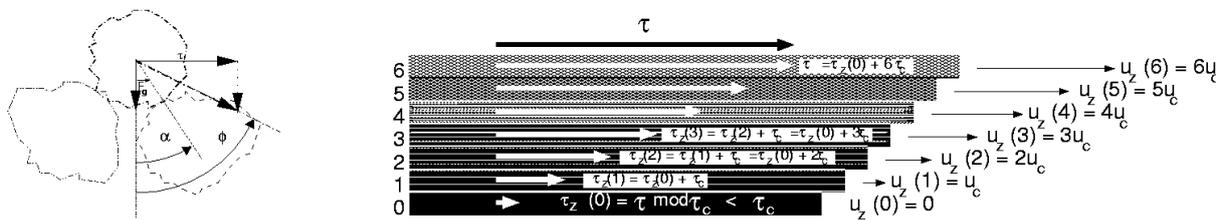


Abbildung 64: Der Geschiebetransport nach Boys. *Links*: Der Winkel ϕ der Resultierenden aus Gewichtskraft und Schubspannung überschreitet einen kritischen Hebelwinkel α , damit sich ein Korn bewegt. *Rechts*: Durch den diskret quantisierten Abbau der Schubspannung ergibt sich eine lineare Schubspannungs- und Geschwindigkeitsverteilung. Die Dicke der bewegten Schicht ist linear proportional zur Schubspannung.

([16] (7.5) S. 125; [37] 7.1.1 Gl. (7.1) S. 144) als Formel von Boys (1879). Der Vorfaktor $\frac{d_m}{2\sqrt{\varrho_S\tau_c}}$ trägt die Dimension $\frac{\text{Zeit}}{\text{Dichte}}$. Experimentelle Ergebnisse von Meyer-Peter zeigen

$$\tau_c = \frac{\mathbf{g}\varrho_W\varrho'd_m}{20} \quad (186)$$

setzen. Übersichtlicher schreibt sich (185) mit der Sohlenbelastungszahl $\eta_0 := \frac{\tau_0}{\tau_c}$ zu

$$\begin{aligned} q_B &= \frac{d_m}{2\sqrt{\varrho_S\tau_c}} \eta_0 (\tau_0 - \tau_c) \\ &= \frac{d_m^{3/2} \sqrt{\mathbf{g}\varrho'}}{4\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\varrho_W}{\varrho_S}} \eta_0 (\eta_0 - 1) \end{aligned} \quad (187)$$

Damit sich unter Annahme der Geschiebeformel (185) von Boys periodische Transportkörper bilden können, muss (151) erfüllt werden. So folgt

$$\begin{aligned} u_T z &\stackrel{(151), (185)}{=} \frac{d_m}{2\sqrt{\varrho_S\tau_c}} \left(\frac{\tau_0}{\tau_c} \right) (\tau_0 - \tau_c) = \frac{d_m}{2\tau_c\sqrt{\varrho_S\tau_c}} (\tau_0^2 - \tau_c\tau_0) \\ \iff 0 &= \tau_0^2 - \tau_c\tau_0 - \frac{2\tau_c\sqrt{\varrho_S\tau_c}}{d_m} u_T z \\ \iff_{\tau_0 > 0} \tau_0(z) &= \frac{\tau_c}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4u_T \frac{z}{d_m} \sqrt{\frac{\varrho_S}{\tau_c}}} \right) \end{aligned} \quad (188)$$

für das Profil $\tau_0 = \tau_0(z)$ der Schubspannung des Wasserkörpers als Funktion in der Höhe z über den Tälern der Transportkörper. In $z = 0$ wird noch die kritische Schubspannung τ_c erreicht. An wächst τ_0 mit der Quadratwurzel von z . Nach dem Ansatz von Boys wächst die Schichtdicke s linear in τ_0 ; so wächst auch sie mit der Quadratwurzel von z .

Mit den Bezeichnungen aus dem vorigen Unterabschnitt 7.4 liegt also hier der Fall $\gamma_s = \frac{1}{2}$, $\gamma_u = 1$ vor. Dem Ansatz nach fällt die Schubspannung linear in der bewegten Sedimentschicht. An der Oberfläche des Transportkörpers muss jedoch die anhand der Abb. 65 erläuterte Schubspannungskontinuität gewahrt werden.

Für Transportkörper mit nicht in diesem Sinn singulären Verlauf ihrer Oberfläche lassen Isotonen, Linien gleicher Schubspannung, nach Abb. 7.6 berechnen. Welche Bedeutung der Verlauf der Isotonen für Verhalten und Form der Transportkörper hat, lässt sich jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht klären. Auf fällt in Abb. 7.6 jedoch der steile Gradient der Schubspannung in Talnähe direkt an der Oberfläche (Linien dicht beieinander) im Gegensatz zu dem flachen Gradienten am Kamm. Er lässt am Ansatz der Formel von Boys eher zweifeln.

Mit Φ nach (52) gilt nach Meyer-Peter und Müller

$$\Phi = \left(F_r^* - \frac{1}{20} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (189)$$

Als Funktion von τ_0 ergibt sich mit (55)

$$\begin{aligned} q_B &\stackrel{(52)}{=} \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \Phi \\ &\stackrel{(189)}{=} \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \left(F_r^* - \frac{1}{20} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &\stackrel{(55)}{=} \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \left(\frac{\tau_0}{\varrho_W \varrho' \mathbf{g} d_m} - \frac{1}{20} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{\varrho_W^{\frac{3}{2}} \mathbf{g} \varrho'} (\tau_0 - \tau_c)^{\frac{3}{2}} \quad \text{mit } \tau_c \text{ nach (186)} \end{aligned} \quad (190)$$

Dem Ansatz der Geschiebeformeln von Meyer-Peter liegt zugrunde, dass eine Sedimentschicht der Dicke s nach dem Fließgesetz von Manning-Strickler bewegt wird. So gibt es eine mittlere Geschwindigkeit \bar{u} mit $s \sim \bar{u}^{\frac{3}{2}}$. Innerhalb der bewegten Schicht muss demnach ein Geschwindigkeitsprofil $u(z) \sim \sqrt{z - z_0}$ vorliegen. Mit den Bezeichnungen aus dem vorigen Unterabschnitt 7.4 liegt zur Diskussion periodischer Transportkörpers bei Transport in Schichten der Fall $\gamma_u = \frac{1}{2}$, $\gamma_s = \frac{2}{3}$ vor.

7.7 Schubspannung des Wasserkörpers über der Sohle auf die Sohle, die Reynolds-Zahl für die Sohlform, der c_W -Wert

Nur sehr schwer lässt sich die Frage beantworten, ob die Schubspannung des Wasserkörpers über der Sohle mikroskopisch auf einzelne Geschiebekörner direkt übertragen wird oder ob durch eine Grenzschicht auf größeren Flächen Druck aufgebaut wird, die nur mittelbar über die Grenzschicht auf die Körner wirken. Die Ansatz, Transport in der Sohle erfolge in ganzen Schichten, begünstigt eher letztere Annahme. Von einer Übertragung der Schubspannung des Wasserkörpers über der Sohle ohne eine Grenzschicht kann nur ausgegangen werden, wenn die Verteilung der Fließgeschwindigkeit des Wassers über der Sohle *stetig* in die des Wassers in der Sohle übergeht. Das wäre erst der Fall, wenn eine Sedimentschicht der Sohle so schnell mitbewegt wird, dass die eigentliche Sohlreibung des Wassers erst in tieferen Schichten erfolgt.

Natürlich bestimmt die mikroskopische Physik am einzelnen Korn, ob und wie sich das Korn auf eine Schubspannung hin bewegt. Doch erlaubt erst die Betrachtung makroskopischer Wasserspiegel- und Sohlagen die wirkenden Schubspannungen zu bestimmen.

Zunächst stellt selbst bei ungekrümmter Sohle deren Rauheit sicher, dass Schubspannung auf sie übertragen wird. An einer Grenzschicht über der Sohle kann jedoch eine von der lokalen Sohlform abhängige sehr variable Druckverteilung auftreten. In der folgenden eindimensionalen Betrachtung wird ein Fluss des Wassers über eine lokal gekrümmte Sohle wie die asymmetrische Umspülung eines Zylinders behandelt (Abb. 67).

Analytisch behandeln lässt sich hier nur eine laminare Anströmung, bei der sich eine bezüglich Luv- und Leerichtung asymmetrische Druckverteilung ergibt, wenn sich die Strömung ‘irgendwo hinter dem Kamm’ ablöst. Den Ablösepunkt genau zu berechnen ist bis heute selbst bei glatten analytischen Formen nahezu unmöglich! Mit empirischen Korrekturen lassen sich die Näherungen für die asymmetrische Druckverteilung bei einer laminaren Anströmung und Ablösung im Lee auch im Fall schwach turbulenter Anströmung und völliger Ablösung im Lee weiter verwenden.

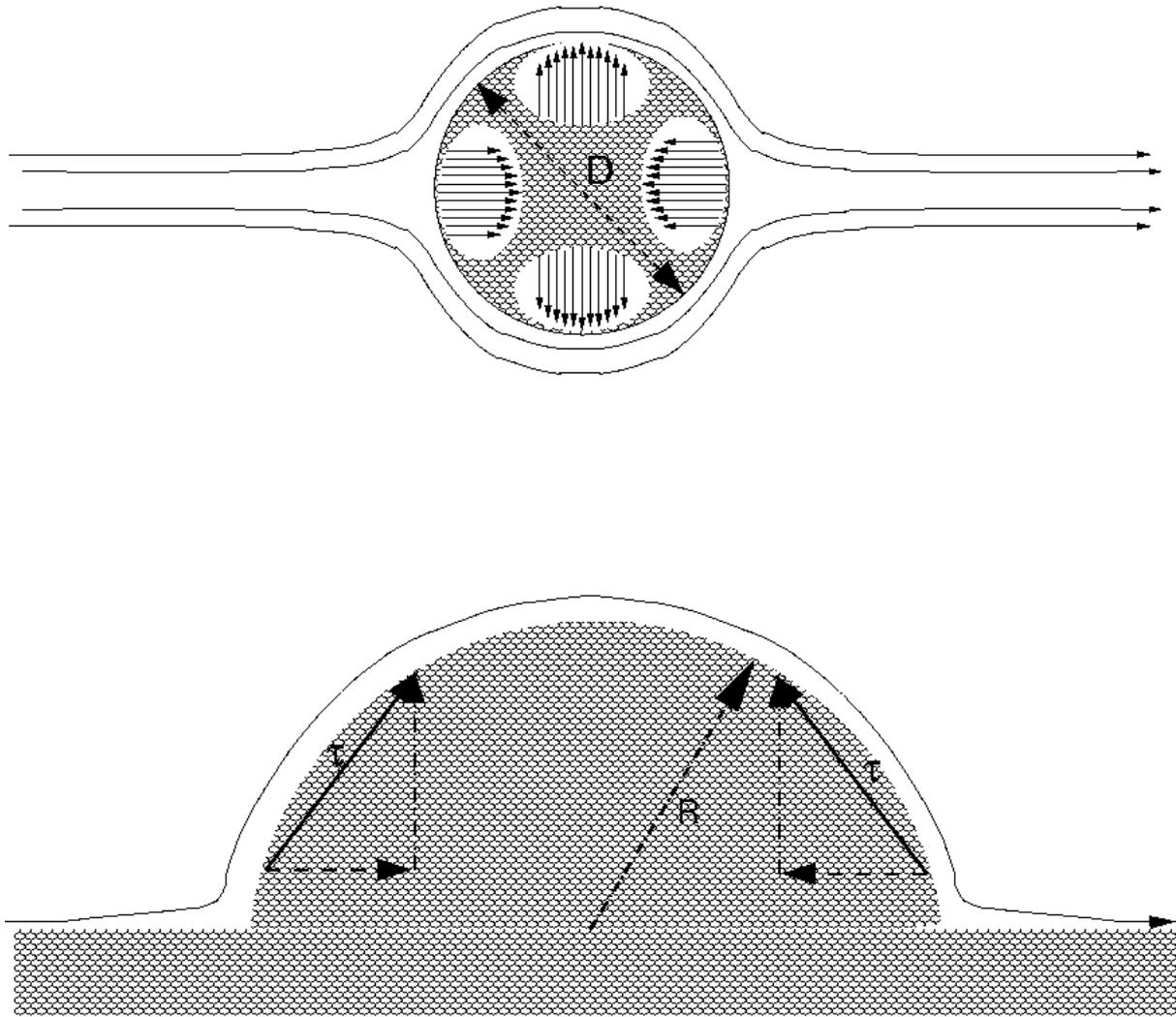


Abbildung 67: *Oben*: Wirbelfreie inkompressible Umströmung eines Zylinders des Durchmessers D Skizze der auf dem Zylindermantel erzeugten Druckfelder. *Unten*: Übertragung des Modells der asymmetrischen Umströmung eines Zylinders auf eine idealisierte Düne mit Krümmungsradius R . Die Druckverteilung erzeugt auf *beiden* Seiten eine kammwärts treibende Schubspannung τ . In diesem turbulenzfreien Idealfall verhalten sich selbst asymmetrische Dünen transportneutral.

Für die Sohlform wird an einer lokalen Krümmung mit dem Radius R die physikalisch dimensionslose Reynolds-Zahl Re_T zu

$$Re_T = \frac{2Ru^*}{\nu} = \frac{2R}{\nu} \sqrt{\frac{\tau}{\varrho_W}} \quad (191)$$

bestimmt (nicht zu verwechseln mit der in der Literatur viel verwendeten *Korn*-Reynolds-Zahl!). Hierbei ist ν die kinematische Viskosität des Wassers.

In welcher Größenordnung liegen die Reynolds-Zahlen für die Form der in der Natur oder im Laborversuch beobachteten Transportkörper? Diese Frage muss zunächst geklärt werden, um eine geeignete geschlossene Näherungsformel für den c_W -Wert auszuwählen. Über den c_W -Wert lässt sich dann die flächenhaft auf einen Transportkörper angreifende Schubspannung τ_0 quantisieren zu

$$\tau_0 = c_W \tau . \quad (192)$$

Nach Helmholtz-Poiseuille ergibt sich ν für reines Wasser bei einer Temperatur T_C in Grad Celsius zu

$$\nu = \frac{0,0178}{(1 + 0,0337T_C + 0,00022T_C^2)\varrho_W} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \quad (193)$$

([58] (4.1.3.3-10), S. 126; [24] F.I.1, S. 84). Daraus ergeben sich bei $\varrho_W = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ die Werte

Tabelle 10: Kinematische Viskosität ν reinen Wassers in $\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ und in $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

T_C [°C]		0	5	10	15	20	25	30
ν $\left[\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}\right]$		0,018	0,015	0,013	0,011	0,01	0,009	0,008
ν $\cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$		1,8	1,5	1,3	1,1	1	0,9	0,8

nach Tabelle 10 (Zur dynamischen Viskosität $\varrho_W \nu$ siehe auch [37] 11.2, Table 11.2, S. 350; dort auch Werte für Salzwasser.) Die Schubspannungsgeschwindigkeit $u_* = \sqrt{ghI}$ wird auf das den Normalabfluss erzeugende mittlere Gefälle I bezogen. Für die Abschätzung von Größenordnungen reicht hier $\mathbf{g} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10000 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$. So ergeben sich für mittlere Gefälle I von einem Promille bis einem Prozent bei Wasserständen von 10cm bis 10m Schubspannungsgeschwindigkeiten u_* von $10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ bis einem Meter pro Sekunde. Für Krümmungsradien R zwischen 10cm und 10m ergeben sich somit Reynolds-Zahlen der Größenordnung 10000 bis 10^7 .

Die Beobachtungen bei Laborversuchen bestätigen diese mit einem reinen Kugelmodell durchgeführte Berechnung nur zum Teil. Bei derart hohen Reynolds-Zahlen löst sich die Strömung bereits an der Luvseite der Transportkörper ab. Typisch ist jedoch die Ablösung im Lee. Doch ergeben Geschwindigkeitsmessungen mit einer Heißfilmsonde ([41] 8.2 Abb. 8.2 bis 8.5 S. 148-151) für $Re = 3 \cdot 10^4$ und $Re = 10^5$ an Kreiszyklindern Geschwindigkeitsprofile, die den in Anhang 7.3 diskutierten Geschwindigkeitsprofilen über Transportkörpern entsprechen.

Die in Anhang 7.3 diskutierten Geschwindigkeitsprofile von Raudkivi und Zanke sprechen, im Gegensatz zu den Messungen von Wieprecht, für eine a priori vorhandene hydraulische Grenzschicht im turbulenten Bereich. Ihre Dicke δ liegt zwischen dem ein- und eineinhalbfachen der Kammhöhen, für einen (hier als Zylindersegment aufgefassten) Transportkörper mit einem Krümmungsradius R demnach maximal $\frac{3}{2}R$. Über $\frac{\delta}{R} = \frac{0,37}{\sqrt[5]{Re}}$ ([41] 2.2, Gl. (2.6) S. 12) ergeben sich allerdings wiederum sehr kleine Werte um $Re \approx 0,2^5$.

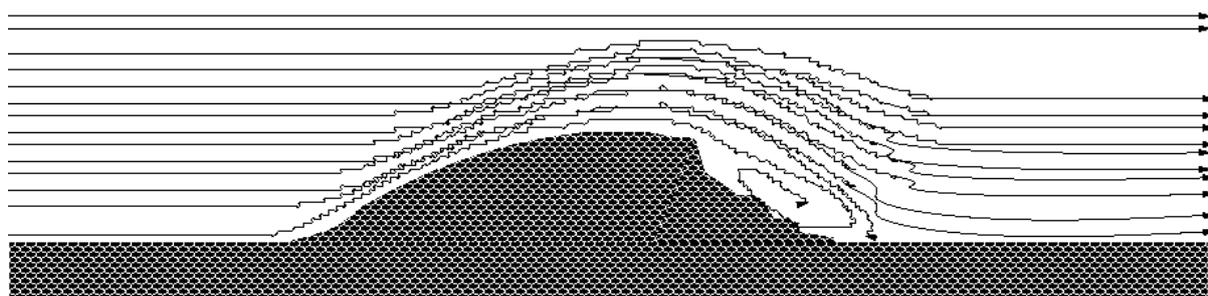


Abbildung 68: Realistische, turbulente Umströmung der Düne. Der Punkt der Ablösung der Strömung lässt sich zum Wohl der Wasser- und Windkanalbauer nicht sicher berechnen. Er führt jedoch im Prinzip dazu, dass nur die luvseitige Schubspannungskomponente wirksam bleibt.

Welche Werte für die Reynolds-Zahl der Sohlform letztlich zuzuordnen sind, bleibt aus experimenteller Sicht noch zu klären. Lässt sich hierauf keine Antwort finden, muss das in dieser Arbeit präsentierte Modell zur Beschreibung der Bildung der Transportkörper durch flächenhaft angreifende Schubspannungen verworfen werden zugunsten solcher Modelle, die Transportkörper nur über die Navier-Stokes-Gleichungen und direkt am einzelnen Korn angreifende Kräfte beschreiben.

Auch den Bereich kleinerer Reynolds-Zahlen für die Sohlform gibt es nur noch empirische Gebrauchsformeln, mit denen sich der c_W -Wert bestimmen lässt. Für Reynolds-Zahlen Re ergibt in erster Näherung die Formel von Oseen ([35], [26] §20, S. 61-64, Gl. (20.18) S. 62, [43] 5. Aufl. VI b. S. 99-100, Gl. (6,13) S. 100, [49] 2. Aufl. 2.5.3.4 (2.133b) S. 134, [58], 4.1.3.2, 1. *Theoretische Ansätze*, S. 121 unten, in neuerer Literatur zur Strömungsmechanik nur noch schwer zu finden!):

$$c_W = \frac{24}{Re} + \frac{9}{2} \quad (194)$$

aus einer Potenzreihenentwicklung, die nur für $Re \in]0; 2[$ konvergiert. Für $Re \rightarrow \infty$ ergibt (194) obendies $c_W \rightarrow \frac{9}{2}$ entgegen der Tatsache, dass $c_W \rightarrow 0,4$ experimentell bestimmt worden ist.

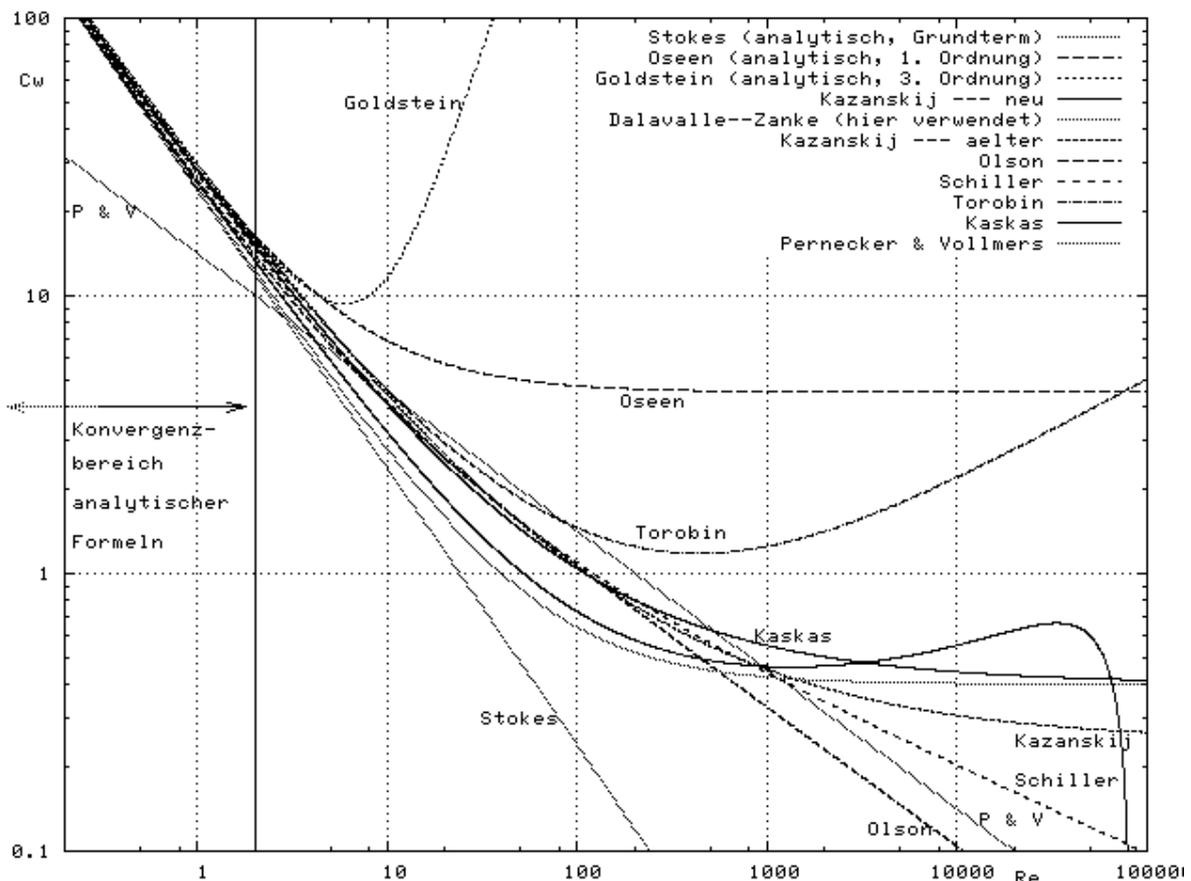


Abbildung 69: Graphen zu empirischen und analytischen Formeln für den c_W -Wert: Zu den Formeln selbst siehe [58] 4.1.3.2, S. 120ff. Die neue Formel von Kazanskij gibt auch das Einbrechen des c_W -Wertes bei sehr hohen Reynolds-Zahlen wieder. Sie dient wegen ihrer experimentell erwiesenen hohen Genauigkeit als Referenz.

Viele der empirischen Gebrauchsformeln (siehe hierzu [58] 4.1.3.2, 2. *empirische Ansätze*, S. 122; [37] 2.2 Gl. (2.13) und (2.14) S. 16) passen sich dem asymptotischen Verhalten für große Reynolds-Zahlen durch Terme mit gebrochenen Potenzen von Re an (Grafik in Abb. 69). Nach Dallavalle und Zanke ist eine Berechnung von c_W grob zu

$$c_W = \frac{24}{Re} + \frac{2}{5} \quad (195)$$

jedoch praktisch hinnehmbar ([58] 4.1.3.3, S. 124). Eine genauere Formel soll hier deshalb nicht verwendet werden, weil sich die letztendlich mit solchen Formeln aus dem hier verfolgten Ansatz ergebenden Differentialgleichungen nicht mehr geschlossen lösen ließen.

Nach der Grafik in Abb. 69 zeigen sich allerdings bei (195) Mängel in der Wiedergabe des durch Kazanskij experimentell bestimmten relativen Minimums des c_W -Wertes für Reynolds-Zahlen um 1000. Hier ergäbe die Formel von Torobin ein, obwohl quantitativ um Größenordnungen falsches, doch qualitativ besseres Bild. Durch keine der Näherungsformeln wird das Einbrechen des c_W -Wertes für Reynolds-Zahlen um 100000 beschrieben. Im Experiment zeigt sich dies für Wasser bei Quarzkugeln mit einem Durchmesser von 10cm ([58] 4.1.3.2, S. 123). Experimentell zeigt sich an Transportkörpern jedoch nicht die für derart hohe Reynolds-Zahlen typische Verkleinerung des Wirbelfeldes.

Die lokale Krümmung der Sohle R ergibt sich zu $R = \frac{1}{\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|}$. Aus $\frac{dz}{dx} = -I$ folgt $R = \frac{1}{\left|\frac{dI}{dx}\right|}$ und so aus (194)

$$c_W = \frac{2}{5} + 12\nu \left|\frac{dI}{dx}\right| \sqrt{\frac{\varrho_W}{\tau}} \quad (196)$$

Der c_W -Wert wird also konstant zu $c_W = \frac{2}{5}$ für eine glatte Sohle ($\frac{dI}{dx} = 0$).

Die auf die Sohloberfläche durch den Wasserkörper über ihr lokal wirksame Schubspannung τ_0 ergibt sich zu

$$\tau_0 = c_W \tau = \left(\frac{2}{5} + 12\nu \left|\frac{dI}{dx}\right| \sqrt{\frac{\tau}{\varrho_W}}\right) \tau. \quad (197)$$

für die wirkende Schubspannung des Wassers auf den Transportkörper.

7.8 Lösung von (143) – Ein Modell für den Transport durch Dünen

(197) gilt analog für die aus der Schubspannung abgeleiteten Sohlenbelastungszahl η und der Feststoff-Froude-Zahl F_r^* . Wie bereits in den Überlegungen am Schluss des Unterabschnitts 7.5 bezeichnet B im folgenden wieder eine dieser drei Größen. Über das im vorangegangenen Unterabschnitt entwickelte Turbulenzmodell lässt sich ihnen nun eine effektive Größe B_0 zuordnen durch

$$B_0 = \left(\frac{2}{5} + Z_1 \left| \frac{dI}{dx} \right| \right) B \quad \text{mit} \quad (198)$$

$$\begin{aligned} Z_1 &:= 12\nu \sqrt{\frac{\rho W}{\tau}} \\ &= 12 \frac{\nu}{\sqrt{ghI_E}} \end{aligned} \quad (199)$$

$$= 12 \frac{\nu}{u^*} \quad (\text{in physikalischer Dimension Länge}). \quad (200)$$

Bezeichnet $p := \frac{dI}{dx}$ nach (160) die Sohlenkrümmung als Parameter zur Darstellung von Lösungen zu (143), so ist $B_0(p) = \left(\frac{2}{5} + Z_1 |p| \right) B$ achsensymmetrisch in $p = 0$. Daher kann eine Verkettung von B_0 mit einer isotonen Funktion $q_B = q_B(B_0)$, wie sie z. B. durch die im vorletzten Unterabschnitt besprochenen Transportformeln von Boys und von Meyer-Peter gegeben wird, niemals die für periodische Lösungen notwendigen Monotoniegeschweige denn für solche Lösungen hinreichenden Symmetrieeigenschaften aufweisen. Auf die Bildung des Absolutbetrages muss verzichtet werden. Da auf jeden Fall $B, B_0 \geq 0$ zu gelten haben, ist das mathematisch zulässig, solange auch für $p < 0$

$$\begin{aligned} Z_1 p &\geq -\frac{2}{5} \\ \iff p &\geq -\frac{2}{5Z_1} \end{aligned} \quad (201)$$

erfüllt wird. Jedoch ist hiermit noch nicht physikalisch geklärt, warum für negative Krümmungen, d. h. Sohlmulden, eine Reduktion der effektiven Schubspannung zugelassen wird. Sicher wird gerade das im Experiment beobachtet (vgl. nochmals Abb. 68!); doch der Ansatz über den c_W -Wert gibt das nicht unmittelbar her.

Mit

$$E_0 = \left(\frac{2}{5} + Z_1 p \right) B \quad (202)$$

folgt

$$\frac{dB_0}{dp} = Z_1 B. \quad (203)$$

Hierbei sind, wie bisher, Z_1 und B konstant. Demnach wird $\frac{dq_B(B_0(p))}{dp}$ konstant, wenn q_B linear in B_0 ist. In diesem Fall gibt es nach den Überlegungen aus Teilabschnitt 7.5 zu der Lösung $I = I(x)$ von (159) ein Fundamentalsystem aus trigonometrischen Funktionen. Also:

Sinusförmige Transportkörper gibt es genau dann, wenn die Volumenfrachtrate q_B linear von der Schubspannung abhängt.

Die Periodenlänge $\frac{1}{\omega}$ der sinusförmigen Transportkörper ergibt sich über

$$\omega = \sqrt{\frac{u_T}{\frac{dq_B}{dp}}} \quad \left(\text{Dimension } \frac{1}{\text{Länge}} \right) \quad (204)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{\frac{dq_B}{dp}}{u_T}} \quad (205)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{Z_1 B \frac{dq_B}{dB_0}}{u_T}} \quad \text{zu} \\ &= \sqrt{12\nu \frac{dq_B}{dp}} \sqrt{\frac{u}{u_T}}; \end{aligned} \quad (206)$$

doch lässt sich (206) nicht weiter auswerten, solange keine Transportformel bekannt ist, nach der q_B linear von B_0 abhängt. Leicht sieht man allerdings bereits hier, dass $\frac{1}{\omega}$ in niedriger Potenz von der dynamischen Viskosität ν des Wassers abhängt.

Im Experiment beobachtet werden annähernd sinusförmige Transportkörper als Riffel oder als stehende Wellen ([55]). Typisch für stehende Wellen sind hohe Abflüsse bei starkem Gefälle und niedrigem Wasserstand. Auf Einzelheiten hierzu wird näher eingegangen, sobald im nächsten Unterabschnitt Ergebnisse diskutiert werden.

Um im Fall in p nicht linearer q_B (143) über (163) zu lösen, liegt es nahe $p_0 = 0$ zu wählen. Bestimmt werden müssen $p_{\min} < 0$ und $p_{\max} > 0$ zum einen so, dass (169) für ein vorgegebenes I_0 erfüllt wird. Andererseits soll aber $q_B(E_0(p_{\min})) = 0$ gelten. Aus letzterem folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{5} + Z_1 p_{\min}\right) \tau &= \tau_c \\ \Leftrightarrow p_{\min} &= \frac{\frac{\tau_c}{\tau} - \frac{2}{5}}{Z_1} \\ &= \frac{5 - 2\eta}{5Z_1\eta}, \end{aligned} \quad (207)$$

falls eine kritische Schubspannung $\tau_c > 0$ existiert. Schubspannungen und Sohlenbelastungen $\tau, \eta < 0$ lässt die Physik nicht zu. Liegt eine kritische Schubspannung vor, findet für $\eta < 1$ noch kein Transport statt. Offenbar gilt jedoch $p_{\min} > 0$ solange $\eta < \frac{5}{2}$ ist. Betrachtet man

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\frac{2}{5} + Z_1 p_{\min}\right) \eta \\ &= \frac{1}{5} \left(2 - \frac{2\eta - 5}{\eta}\right) \eta \\ &= \frac{4\eta}{5} - 1 \end{aligned} \quad (208)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq \eta, \quad (209)$$

so stellt man fest, dass auch Vertauschen von p_{\min} und p_{\max} — im Fall, dass überhaupt $p_{\min} = -p_{\max}$ gilt! — nicht zu einem sinnvollen Parameterintervall $[p_{\min}; p_{\max}]$ führen würde. Für Transportgesetze mit einer kritischen Schubspannung kann es daher erst ab $\eta \geq \frac{5}{2}$ eine Lösung zu dem Transportkörpermodell geben.

Für hohe Sohlenbelastungen η gilt der Grenzwert

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} p_{\min} = -\frac{2}{5Z_1}. \quad (210)$$

Gibt es keine kritische Schubspannung, d. h. gilt $\tau_c = 0$, so gilt ohnehin

$$p_{\min} = -\frac{2}{5Z_1}. \quad (211)$$

Der Absolutbetrag $|p_{\min}|$ ist demnach umgekehrt proportional zur dynamischen Viskosität ν des Wassers. I_0 wird jetzt im nachhinein so bestimmt, dass (169) erfüllt wird. Berechnen lässt sich aber erst zu I_0 einer vorgegebenen Transportformel. Ergebnisse folgen nun im nächsten Unterabschnitt. In der Literatur gibt es bereits Ergebnisse experimenteller Untersuchungen zur sog. Transportkörpersteilheit ([37] 5.2 S. 90, [55], 3.6.2.3 S. 29-32). Sie bezeichnet den Quotienten $\frac{\text{Kammhöhe}}{\text{Länge}}$ der Transportkörper und lässt sich für dreieckige Transportkörper mit I_0 gleichsetzen.

7.9 Ergebnisse des Modells in Verbindung mit Geschiebeformeln und deren Diskussion

Zu konkreten Ergebnissen zu Steilheiten I_0 , Kammhöhen z_{\max} und Periodenlängen $\frac{1}{\omega}$ der Transportkörper gelangt man erst, indem für q_B Ausdrücke aus Geschiebeformeln eingesetzt werden. In vorletzten Abschnitt 7.6 sind bereits die Formeln von Boys und von Meyer-Peter hergeleitet bzw. angegeben worden. Sie besitzen beide eine kritische Schwelle für den Transportbeginn. Unter den Abschnitten C.13, C.14 und C.15 werden diese zwei Formeln sowie die Formel von Engelund-Hansen als Vertreter einer solchen ohne kritische Schwelle für den Transportbeginn ausgewertet.

a) Ergebnisse aus Anhang C.13 nach der Formel (187) von Boys

$$I_0 = \sqrt{\frac{q_{\text{Boys}}}{Z_1 u_T} \frac{\sqrt{16\eta^3 - 100\eta^2 + 125}}{5\sqrt{15\eta}}} \quad \text{nach (369)}$$

$$z_{\max} = \frac{q_{\text{Boys}}}{4u_T} \left(\frac{34}{25}\eta^2 - \frac{14}{5}\eta + \frac{\sqrt{(12\eta+15)(12\eta-25)}}{2} \left(\frac{\eta}{5} - \frac{1}{4} \right) + \frac{9}{16} \right) \quad \text{nach (368)}$$

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{5}{2} \sqrt{\frac{15}{2}} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \sqrt{q_{\text{Boys}} \eta} \frac{\frac{34}{25}\eta^2 - \frac{14}{5}\eta + \frac{\sqrt{(12\eta+15)(12\eta-25)}}{2} \left(\frac{\eta}{5} - \frac{1}{4} \right) + \frac{9}{16}}{\sqrt{16\eta^3 - 100\eta^2 + 125}} \quad \text{nach (370)}$$

$$\text{mit } q_{\text{Boys}} = \frac{\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{4\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\varrho W}{\varrho S}} \quad \text{nach (356).}$$

b) Ergebnisse aus Anhang C.14 nach der Formel (190) von Meyer-Peter

$$I_0 = \frac{1}{5\sqrt[4]{5}} \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{\sqrt{Z_1 u_T}} \sqrt{4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*}} \sqrt[4]{2F_r^* - \frac{1}{4}} \quad \text{nach (378)}$$

$$z_{\max} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \frac{\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{u_T} \left(\frac{14}{5} F_r^* - \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{q_B(14F_r^*)}{\sqrt{5}u_T}$$

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{\sqrt[4]{20}}{10\sqrt{50}} \sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \frac{56F_r^* - 5}{\sqrt[4]{8F_r^* - 1}} \sqrt{\frac{56F_r^* - 5}{4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*}}} \quad \text{nach (381)}$$

Bei starkem Transport gilt nach (383) näherungsweise

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{\sqrt[4]{20}}{10} \sqrt{\frac{7}{25}} \sqrt[4]{\mathbf{g}\varrho'd_m^3} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \frac{56F_r^* - 5}{\sqrt[4]{8F_r^* - 1}}$$

c) Ergebnisse aus Anhang C.15 nach der Formel von Engelund-Hansen

$$I_0 = \frac{4}{25\sqrt{5}} \sqrt[4]{\frac{2}{5}} F_r^{*\frac{5}{4}} \frac{\sqrt[4]{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{\sqrt{Z_1 u_T}} \quad \text{nach (386)}$$

$$z_{\max} = \frac{18}{3125} \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{u_T} F_r^{*\frac{5}{2}} = \frac{18}{3125} \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{q_B}{u_T}$$

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{9\sqrt{61}}{125} \sqrt[4]{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \sqrt[4]{\mathbf{g}\varrho'd_m^3} F_r^{*\frac{5}{4}} \quad \text{nach (389)}$$

Jeweils den Ergebnissen für die drei untersuchten Transportformeln gemeinsam sind

der Faktor	$\frac{\sqrt[4]{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{\sqrt{Z_1 u_T}}$	für I_0	(dimensionslos)
der Faktor	$\frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{u_T}$	für z_{\max}	(Länge)
der Faktor	$\sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \sqrt[4]{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}$	für $\frac{1}{\omega}$	(Länge)

mit $Z_1 = 12\nu \sqrt{\frac{\varrho_W}{\tau}}$ nach (199). Diese Faktoren bestimmen die jeweilige physikalische Dimension und ihre Größenordnung.

Durch (14) und der kritischen Fließgeschwindigkeit $c = \sqrt{\mathbf{g}h}$ lässt sich der dimensionslose Faktor $\frac{\sqrt[4]{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{\sqrt{Z_1 u_T}}$ für die Steilheit I_0 der Transportkörper auch durch den dimensions-

losen, sedimentologischen Korndurchmesser $D^* = d_m \sqrt[3]{\frac{\varrho' \mathbf{g}}{\nu^2}}$ nach Shields ([58] 5.3.2.1 Gl. (5.3.2.1-12) S. 215, [55] (3.2) S. 16) ausdrücken zu

$$\frac{\sqrt[4]{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{\sqrt{Z_1 u_T}} = \frac{D^*}{12} \sqrt{\frac{c}{u_T}} \sqrt{I_E} \quad (212)$$

So ergibt sich die Steilheit I_0 der Transportkörper nach den untersuchten Formeln zu

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{D^{*\frac{3}{4}}}{60\eta} \sqrt{16\eta^3 - 100\eta^2 + 125} \sqrt{\frac{c}{u_T} \sqrt{I_E}} && \text{(Boys)} \\
 I_0 &= \frac{D^{*\frac{3}{4}}}{60\sqrt[4]{5}} \sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*}} \sqrt[4]{2F_r^* - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{c}{u_T} \sqrt{I_E}} \\
 &= \frac{D^{*\frac{3}{4}}}{60\sqrt[4]{5}} \sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{80\eta - 1 + \frac{1}{320\eta}} \sqrt[4]{40\eta - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{c}{u_T} \sqrt{I_E}} && \text{(Meyer-Peter)} \\
 I_0 &= \frac{D^{*\frac{3}{4}}}{75\sqrt[4]{5}} \sqrt[4]{\frac{2}{5}} F_r^{*\frac{5}{4}} \sqrt{\frac{c}{u_T} \sqrt{I_E}} && \text{(Engelund-Hansen)}
 \end{aligned}
 \tag{213}$$

in dimensionslosen Größen. Wird der Quotient $\frac{c}{u_T}$ in η als konstant betrachtet, decken sich die Ergebnisse zu den Formeln von Boys und Meyer-Peter nicht mit den experimentellen Untersuchungen zur Transportkörpersteilheit als Funktion der Sohlenbelastung von Yalin ([55] 3.6.2.3, S. 32, Abb. 3.23), wie die Grafik in Abb. 70 zeigt, und von Rijn ([37] 5.2, S. 90, Gl. (5.70), Abb. 5.16). Auch eine bei hoher Sohlenbelastung konstante, von D^* und anderen sedimentologischen Parametern unabhängige Steilheit wird so nicht erklärt. Vielmehr wächst mit η die Steilheit I_0 in der Ordnung $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{5}{4}$ an.

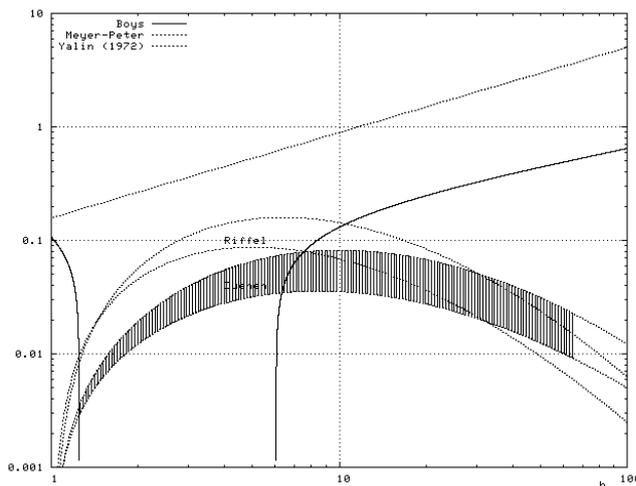


Abbildung 70: $\frac{I_0}{D^{*\frac{3}{4}}} \sqrt{\frac{u_T}{c\sqrt{I_E}}}$ nach (213) zu den Formeln von Boys und Meyer-Peter im Vergleich zur experimentell bestimmten Transportkörpersteilheit I_0 nach Yalin für Riffel und Dünen, jeweils als Funktion der Sohlenbelastungszahl η .

Bei einer Temperatur von 15°C gilt für Wasser nach (193) $\nu \approx 0,0114 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ ([24] F.I.1, S. 84, Tabelle unten, Werte für 10°C und 20°C). Mit $\tau = \rho_W \mathbf{g} h I_E$ nach (14), $\mathbf{g} \approx 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ und $\varrho' = 1,6$ ergeben sich

$$Z_1 \approx \frac{0,00436 \text{cm}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{h I_E}} \quad (214)$$

$$\frac{\sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{\sqrt{Z_1 u_T}} \approx \frac{95,32}{\sqrt{\text{cm}} \sqrt{\text{s}}} \cdot \frac{\sqrt[4]{h I_E d_m^3}}{\sqrt{u_T}} \quad (215)$$

$$\frac{\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{u_T} \approx 40 \frac{\sqrt{\text{cm}}}{\text{s}} \cdot \frac{d_m^{\frac{3}{2}}}{u_T} \quad (216)$$

$$\sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \approx \frac{2,616 \text{cm}}{\sqrt{\text{s}} \cdot \sqrt{u_T}} \cdot \sqrt[4]{\frac{d_m^3}{h I_E}} \quad (217)$$

Bei einem Wasserstand h zwischen 1cm und 10m und Gefällen I zwischen 0,5‰ und 2‰ ergeben sich für \sqrt{hI} Werte zwischen 0,22 $\sqrt{\text{cm}}$ und 4,47 $\sqrt{\text{cm}}$ und so für Z_1 Werte zwischen 97,5 μm und 1,94 cm. Bei maßgebenden Korndurchmessern d_m zwischen 2mm und 5cm liegen Werte für $\sqrt[4]{d_m^3 h I_E}$ zwischen 0,44cm und 7cm, Werte für $\sqrt[4]{\frac{d_m^3}{h I_E}}$ zwischen 0,14 $\sqrt{\text{cm}}$ und 22,36 $\sqrt{\text{cm}}$. Hieraus erhält man Werte für

- $\frac{\sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{\sqrt{Z_1 u_T}}$ zwischen $\frac{42}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}}$ und $\frac{667}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}}$,
- $\sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}$ zwischen $\frac{0,37 \text{cm}}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}}$ und $\frac{14 \text{cm}}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}}$.

Bei Wanderungsgeschwindigkeiten u_T in der Größenordnung von einem bis zehn Zentimetern pro Sekunde liegt so der die Transportkörpersteilheit I_0 bestimmende Vorfaktor um ein bis zwei Zehnerpotenzen zu hoch; der die Periodenlänge bestimmende Vorfaktor um ein bis zwei Zehnerpotenzen zu klein, um den beobachteten Werten zu entsprechen.

- Als erstes Beispiel hier ein Szenario mit folgenden Parametern:

$$I_E = 0,003$$

$$d_m = 5 \text{mm}$$

$$h = 50 \text{cm}$$

So ist $c = 221,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Als dimensionslose Größen ergeben sich weiter

$$F_r^* = 0,1875$$

$$\eta = 3,75$$

$$D^* = 114,72 .$$

Da der Term $16\eta^3 - 100\eta^2 + 125$ hier negativ ist, ergibt sich aus (213) keine Lösung für die Steilheit I_0 nach der Formel von Boys, jedoch gilt

$$I_0 = \frac{0,1141}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Meyer-Peter} \tag{218}$$

$$I_0 = \frac{0,0714}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Engelund-Hansen}$$

für die zwei weiteren untersuchten Transportformeln. Aus $\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} = 14,0 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ ergibt sich für die Kammhöhe z_{\max} der Transportkörper weiter

$$z_{\max} = \frac{0,18}{u_T} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \quad \text{nach Meyer-Peter} \tag{219}$$

$$z_{\max} = \frac{0,011}{u_T} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \quad \text{nach Engelund-Hansen}$$

und schließlich aus $Z_1 = 0,029 \text{cm}$ für die Periodenlänge

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{0,075 \text{cm}}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Meyer-Peter} \tag{220}$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{0,028 \text{cm}}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Engelund-Hansen}$$

Leider liegen unter diesen Parametern zu u_T keine Werte vor. Realistische Werte für I_0 wären jedoch nur für u_T der Größenordnung von $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. z_{\max} ist bei einer derart hohen Wanderungsgeschwindigkeit jedoch viel zu klein. Damit z_{\max} , wie üblicherweise beobachtet, im Zentimeterbereich liegt, müsste u_T in der Größenordnung von $0,002 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ liegen.

- Als zweites Beispiel hier die Parameter:

$$I_E = 0,005$$

$$d_m = 2\text{mm}$$

$$h = 100\text{cm}$$

Unter diesen Bedingungen werden im Laborversuch deutliche Dünen mit Kammhöhen im Zentimeterbereich bei starkem Transport beobachtet, die sich mit einer Geschwindigkeit von etwa $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ fortbewegen. Die kritische Fließgeschwindigkeit c beträgt $c = 313,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Als dimensionslose Größen ergeben sich weiter

$$F_r^* = 1,5625$$

$$\eta = 31,25$$

$$D^* = 45,887.$$

Hier lassen sich Werte zu allen drei untersuchten Formeln bestimmen. Für die Steilheit I_0 ergibt sich jeweils

$$I_0 = \frac{27,66}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Boys}$$

$$I_0 = \frac{2,2}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Meyer-Peter} \quad (221)$$

$$I_0 = \frac{0,69}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Engelund-Hansen.}$$

Aus $\sqrt{\mathbf{g} \rho' d_m^3} = 3,54 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ ergeben sich die Kammhöhen z_{\max} der Transportkörper zu

$$\begin{aligned} z_{\max} &= \frac{3398}{u_T} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \quad \text{nach Boys} \\ z_{\max} &= \frac{2,65}{u_T} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \quad \text{nach Meyer-Peter} \\ z_{\max} &= \frac{0,17}{u_T} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \quad \text{nach Engelund-Hansen} \end{aligned} \quad (222)$$

und in diesem Beispiel aus $Z_1 = 0,00617 \text{cm}$ die Periodenlängen zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} &\approx \frac{27,16 \text{cm}}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Boys} \\ \frac{1}{\omega} &\approx \frac{1,5 \text{cm}}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Meyer-Peter} \\ \frac{1}{\omega} &= \frac{0,34 \text{cm}}{\sqrt{u_T}} \sqrt{\frac{\text{cm}}{\text{s}}} \quad \text{nach Engelund-Hansen .} \end{aligned} \quad (223)$$

Mit Beobachtungen in Verbindung bringen lassen sich zu diesem Beispiel bei den experimentell gemessenen Wanderungsgeschwindigkeiten am ehesten noch die Ergebnisse zu der Formel von Meyer-Peter, und zwar mit besonders steilen Riffeln. Solche Riffel sind zwar der Sohlformation überlagert; doch dominiert wird diese durch weitaus längere Dünen.

Offenbar liefert dieses Modell für die Entstehung periodischer Transportkörper Ergebnisse, die zum Teil gegenüber experimentell bestimmten Werten um Größenordnungen abweichen. So mag man fragen, ob hier ein Fehler im prinzipiellen Ansatz des Modells liegt oder ob Fehler in der Wahl der Parameter vorliegen. Zunächst wird geprüft, ob die Ergebnisse mit dem Ansatz des Modells konsistent sind. Gegenüber den experimentellen Ergebnissen ergeben sich kürzere Periodenlängen und höhere Steilheiten und so kleinere Reynolds-Zahlen der Sohlform, als nach den Abschätzungen für die experimentell bestimmten Werte in 7.7. So ergeben sich nach Modell Werte, für die die Näherungsformel (195) für den c_W -Wert zulässig ist.

Die Überlegungen aus den vorangegangenen Teilabschnitten haben zu einem Modell geführt, nach dem die lokale Sohlschubspannung linear von der Ortsableitung des Gefälles abhängt. Diese Ortsableitung ist der Kehrwert der Sohlenkrümmung. Eine Abwandlung dieses Modells in den dimensionslosen Konstanten würde sich in den Ergebnissen nicht wesentlich unterscheiden.

Besondere Bedeutung kommt jedoch der dynamischen Viskosität ν des Wassers zu. Experimentell belegt ist eine Abhängigkeit der Periodenlängen der Transportkörper von der Temperatur des Wassers ([37] 5.2), die auf die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität zurückgeführt wird. Man mag fragen, ob eine hochkonzentrierte Sedimentkorn-Wasser-Suspension nicht eine weitaus höhere dynamische Viskosität als reines Wasser besitzt. Ein um Größenordnungen höherer Wert für ν als der für Wasser ergäbe für die Periodenlängen und Steilheiten realistischere Werte. Dann werden für die Sohlform nicht so hohe Reynolds-Zahlen angenommen, dass die Voraussetzungen des Modells nicht mehr erfüllt werden. Hier besteht noch experimenteller Klärungsbedarf.

8 Physikalische Experimente zum stationären Transportgleichgewicht

Durch physikalische Modellversuche müssen die aufgrund theoretischer Untersuchungen in dieser Arbeit erlangten Ergebnisse nicht nur bestätigt, sondern darüber hinaus auch neu aufgeworfene Fragen geklärt werden danach, wie der Geschiebetransport durch Sohlenkrümmung und Quergefälle beeinflusst wird. Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, dass neue, nur experimentell zu gewinnende Erkenntnisse wesentlich sind, um das stationäre Transportgleichgewicht so zu beschreiben, dass auch die im Gleichgewicht oszillatorischen Vorgänge später durch numerische Modelle befriedigend erfasst werden können.

Ein in 8.1 vorgeschlagener Modellversuch, um die Ergebnisse für das eindimensional-tiefengemittelte Transportgleichgewicht, insbesondere das in 5 berechnete Sohlenprofil und asymptotische Gefälle für schubspannungsbestimmte Transportformeln, zu überprüfen, orientiert sich im Aufbau noch sehr an klassischen Modellversuchen. Messgrößen sind hier im wesentlichen der Wasserstand h und die technisch inzwischen ebenfalls leicht zugängliche Sohlhöhe z . Technisch immer noch nicht befriedigend gelöst ist hingegen die Messung von Frachtraten. Diese müssen jedoch gemessen und verglichen werden, um den Einfluss eines Sohlquergefalles auf den Transport zu untersuchen. Hierfür wird in 8.4 eine für hydromechanische Modellversuche neue, differentielle Messtechnik vorgeschlagen.

Sedimente unterschiedlicher Korngrößen verhalten sich beim Transport wie eine eigene Phase. Insbesondere werden sie entmischt. Um solchen Mehrphasenphänomenen, die in dieser Arbeit überhaupt nicht diskutiert werden, vorzubeugen, sollte bei allen Versuchen zunächst mit Einkornsediment gearbeitet werden.

Andererseits hängt, nach den Ergebnissen dieser Arbeit, bei konstanter Breite die Form der Sohle im Gleichgewichtszustand nur über den Widerstandsbeiwert von der Korngröße ab. Somit dürften nur geringe Verunreinigungen des, zwecks schnellem Erreichen des Gleichgewichtszustandes, groben Materials durch feine Sedimente die Ergebnisse nicht wesentlich verändern.

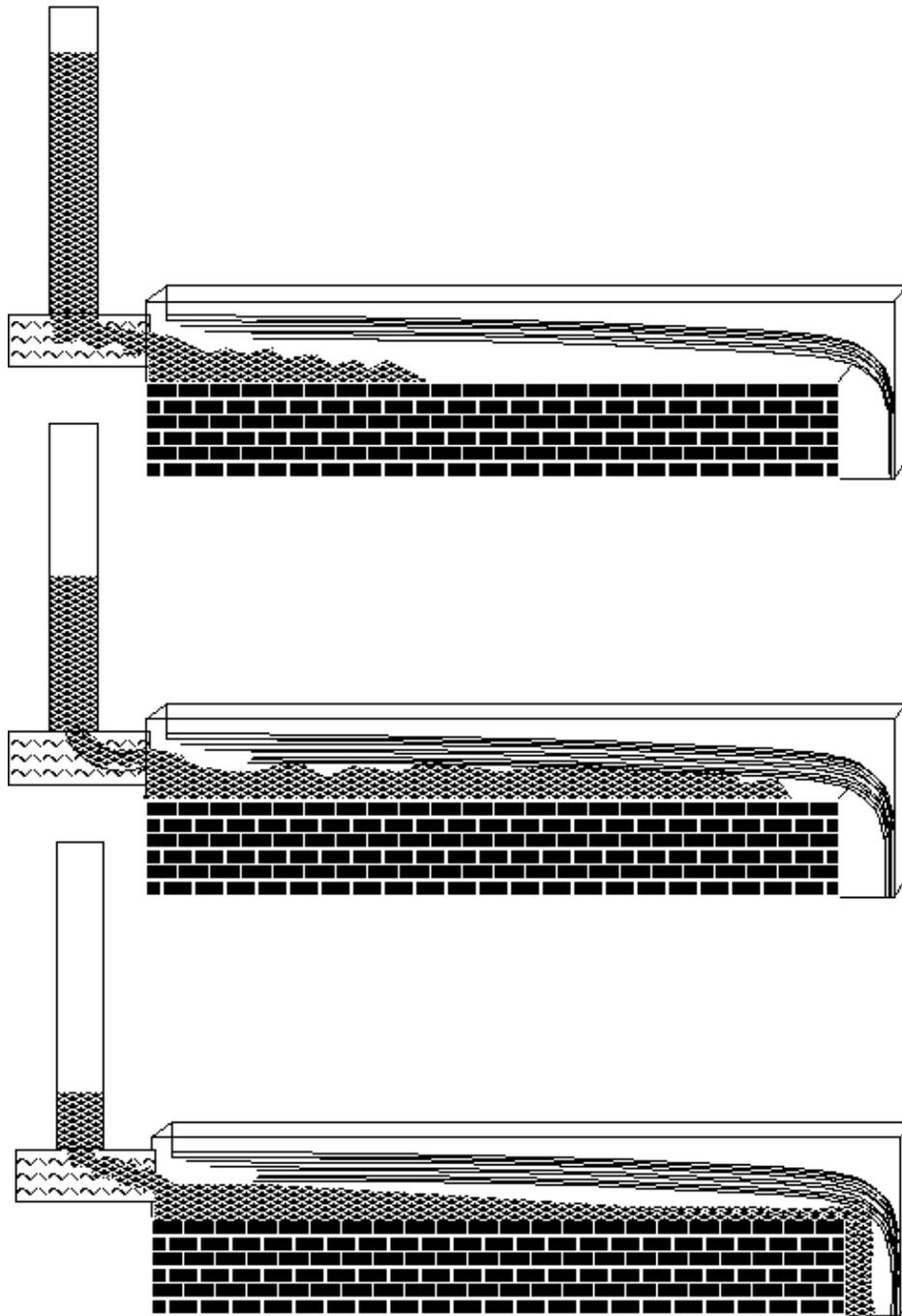


Abbildung 71: Schema eines Versuchs zur experimentellen Validierung der Ergebnisse für ein gekoppeltes Transportgleichgewicht bei stationär-ungleichförmigem Abfluss. Geregelt werden ein konstanter Zufluss und eine konstante Feststoff-Zugaberate. Begonnen wird auf einer glatten, horizontalen Sohle (*oben*). Der Ausfluss über eine Kante stellt sicher, dass dort die kritische Wassertiefe h_g erreicht wird. Auch der Absatz vom Feststoff hinter dieser Kante wird ermöglicht (*mitte*). Transportgleichgewicht besteht, sobald die Rate der Feststoffabfuhr die der Zufuhr erreicht hat (*unten*).

8.1 Versuch zur Validierung des eindimensionalen Modells

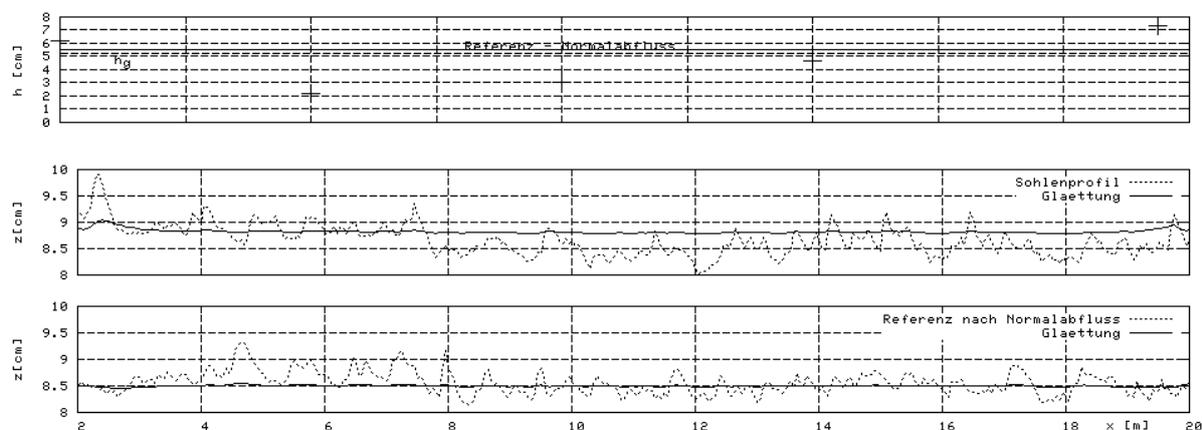
Abb. 71 zeigt schematisch Aufbau und Ablauf eines Versuches, an dem ein stationäres Transportgleichgewicht bei stationär-ungleichförmigem Abfluss beobachtet werden soll, um die Ergebnisse zu dem in dieser Arbeit untersuchten eindimensional-tiefengemittelten Modell zu untersuchen. Geregelt werden an einer Modellrinne konstanter Breite die Wasserzufuhr und die Sedimentzugabe. Der Einlauf muss auch bei zunehmender Auflandung erlauben, den konstanten Durchfluss und die konstante Rate an Feststoff zuzuleiten; denn erst durch die Auflandung (Abb. 71 mitte und unten) stellt sich ggf. das Gleichgewichtsgefälle ein. Am Auslauf wird stets die kritische Wassertiefe erreicht. Der Versuch wird bewusst nicht auf Normalabfluss hin geregelt! Messgröße ist im wesentlichen das Sohlenprofil.

Bestätigt sich die These dieser Arbeit eines eindeutig nur durch den Widerstandsbeiwert festgelegten Sohlenprofils bei einem schubspannungsbestimmten Transportgleichgewicht, gibt es zu einem einmal eingestellten und konstant gehaltenen Abfluss nur eine Feststoffzugaberate, bei der sich überhaupt ein stationäres Gleichgewicht einstellt. Selbst wenn Ein- und Austrag gleich sind, muss noch kein Transportgleichgewicht erreicht sein.

Wird in einem solchen Versuch überhaupt eine langfristig stabile Sohlform erreicht? Hinweise hierauf geben bereits bisherige Laborversuche am Institut für Wasserwesen der Universität der Bundeswehr München, in denen nicht, wie ursprünglich geplant, auf Normalabfluss geregelt worden ist. Dennoch stellt sich in solchen Versuchen ein Transportgleichgewicht ein.

Abb. 72 zeigt die Ergebnisse zweier Versuche unter gleichen Parametern der bereits 5.8 beschriebenen Versuchsreihe an einem Modell für einen Abschnitt der Weissach. Am 17.10.2002 ist ein Versuch vom 09.07.2002 wiederholt worden. Bei dieser Wiederholung hat sich kein stabiler Normalabfluss einstellen lassen offensichtlich deshalb, weil sich im Sohlenprofil Transportkörper derart ausgeprägt, dass lokale Fließwechsel eingetreten sind. Das zeigen die aufgenommenen Pegelstände. Beide Versuche zeigen auch in Hinblick auf ihren zeitlichen Verlauf vergleichbare Frachtraten (Abb. 72 unten).

Pegelstände und Sohlenprofil in Längsrichtung
(x -Achse in folgenden drei Grafiken identisch.)



Frachtrate als Funktion der Zeit nach Versuchsbeginn

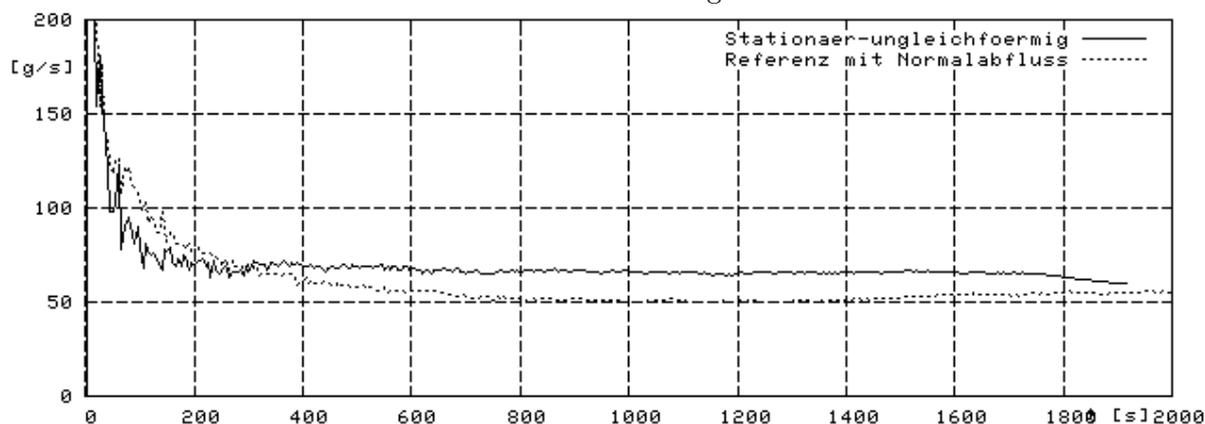


Abbildung 72: Versuch mit stationär-ungleichförmiger Spiegellinie am Weissach-Modell. Versuchsdaten: $d_m = 0,65\text{mm}$; $I = 0,006$; $Q = 30\text{l/s}$. *Oben*: Pegelstände während und Sohlenprofil am Ende der Versuche. *Unten*: Zeitlicher Verlauf des Transports.

Demnach sind für die vorgeschlagenen Versuche zu stationär-ungleichförmigem Abfluss lange Versuchsrinnen wesentlich. Um Gefälle zu berechnen, muss das gemessene Sohlenprofil stark glättet werden. Die Grafiken zu den Sohlenprofilen in Abb. 72 mitte zeigen wie sich eine Glättung der in Abständen von 5cm aufgenommenen Messwerte über jeweils 16 solcher Messwerte auswirkt. Die Hydraulik reagiert offenbar weitaus empfindlicher auf *lokale* Gefälleänderungen als das Transportgleichgewicht. Demnach versprechen die vorgeschlagenen neuen Versuche bei stationär-ungleichförmigem nur Erfolg, wenn zunächst die Bildung von Transportkörpern, die in ihrer Größe Riffel übersteigen, weitestgehend vermieden wird.

In Versuchen, bei denen sich keine langfristig stabile Sohlform einstellt, – Von Transportkörpern wird hierbei abgesehen. – stellt sich die Frage nach einer im langen Zeitmittel stabilen Sohlform. Bei oszillatorischem Gleichgewicht schwankt der Austrag trotz konstanter Zugabe. So wird in diesem Fall nur das langzeitige Mittel des Austrages dem Eintrag entsprechen. Offen bleibt allerdings wie sich die Frachtraten mit sowohl hoher zeitlich als auch mengenmäßig ausreichender Auflösung messen lassen.

8.2 Der Kippsohlenversuch zur Klärung des Einflusses einer Sohlenquerneigung auf die Transportrate

Um zu klären wie sich ein Neigung der beweglichen Sohle quer zur Fließ- und Transportrichtung auf die Transportrate auswirkt, werden Versuche notwendig mit einer Rinne, in der sich die Sohle quer zur Fließ- und Transportrichtung neigen lässt. Schwierig dabei ist, dass die Sohle während des Transportvorganges dazu tendiert, sich im Mittel wieder zu ebenen. Neigungen quer zur Fließrichtung gibt es im stationären Gleichgewicht ja nur bei den periodisch-oszillatorischen Vorgängen.

Abb. 73 zeigt schematisch Ausführungen des Kippsohlenversuchs. Da eine in Querrichtung geneigte Sohle zu entlang dem Querschnitt unterschiedlichen Wasserständen über der Sohle führt, wird in einer schmalen Rinne mit vergleichsweise hohem Wasserstand h gearbeitet, damit die relative Änderung $\frac{\Delta z}{h}$ entlang des Querschnitts gering bleibt.

Dieses Verhältnis gibt eine untere Grenze der relativen Auflösung, mit der Änderungen der Transportrate signifikant sind. Da Δz linear im Quergefälle ist, wächst diese relative Auflösungsgrenze linear mit dem Quergefälle. Zuverlässig nachweisen lässt sich demnach nur eine Abhängigkeit der Transportrate vom Quergefälle, wenn diese superlinear mit dem Quergefälle wächst oder fällt. Diese Einschränkung entfällt, wenn mit den sedimentologischen Parametern in einem Bereich gearbeitet wird, in dem die Transportrate linear proportional zum Wasserstand h ist. In diesem Fall kann davon ausgegangen werden, dass der Mehr-Transport am Ende mit höherem Wasserstand ausgeglichen wird durch das Weniger an dem Ende mit geringerem Wasserstand.

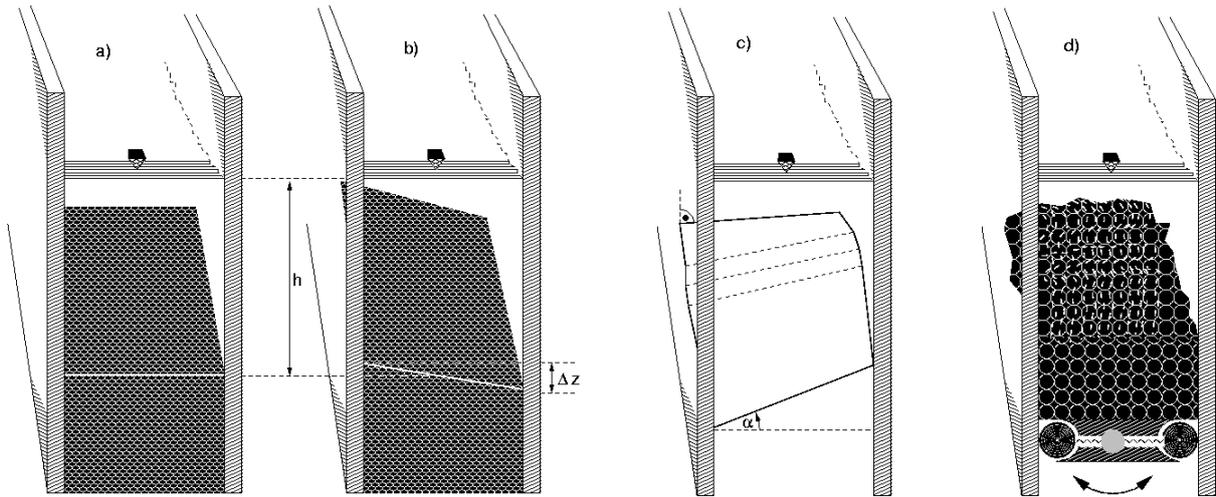


Abbildung 73: Ausführungen des Kippsohlenveruchs. Grundsätzlich wird in einer schmalen Rinne gearbeitet, in der der Wasserstand h hoch ist im Vergleich zu dem Höhenunterschied Δz zwischen den Kanten der geneigten Sohle. *a)* und *b)*: Eine ebene und eine in Querrichtung geneigte Sandsohle lassen sich durch geeignetes Abziehen gewinnen. Mit diesem Verfahren lässt sich die Transportrate jedoch nur über kurze Zeiträume vergleichen, weil sich im Verlauf des Versuches die geneigte Sohle horizontal ausrichtet. *c)* Ein qualitativer Vergleich zwischen der Transportrate einer in Querrichtung ebenen und einer in Querrichtung geneigten Sohle wird möglich, indem eine Sandsohle oberstrom gerade und unterstrom nach einem stetigen Übergang quer geneigt abgezogen wird. Je nachdem, ob es unterstrom zu Auflandung oder Erosion kommt, ist die Transportrate kleiner bzw. größer als oberstrom. *d)* Langzeitversuche ermöglicht die Kippsohle, indem der Trend zur Selbstebnung einer anfangs geneigten Sohle durch Gegenkippen ausgeglichen wird.. Nur schwierig lässt sich eine Kippmechanik vor Sand schützen. Deshalb sollte hier mit möglichst grobem Geschiebe gearbeitet werden.

Nach Meyer-Peter ist die Einsteinsche Transportintensität $\Phi = (F_r^* - F_{r^*c})^{3/2}$. Die Ableitung $\frac{d\Phi}{dh} = \frac{3}{2}\sqrt{h} \left(\frac{I}{\varrho'd_m}\right)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{F_{r^*c}\varrho'd_m}{2hI}}$ wächst für große hI nur langsam. (Grafik Abb. 74) Da $F_{r^*c} \ll 1$ gilt, kann hierfür $\frac{\varrho'd_m}{2hI} < 1$ angesetzt werden. Mit $\varrho' \approx 1,6$ erweisen sich Verhältnisse $\frac{d_m}{h} < \frac{5}{4}I$ zwischen maßgebendem Korndurchmesser d_m und Wasserstand h als günstig für diese Versuche.

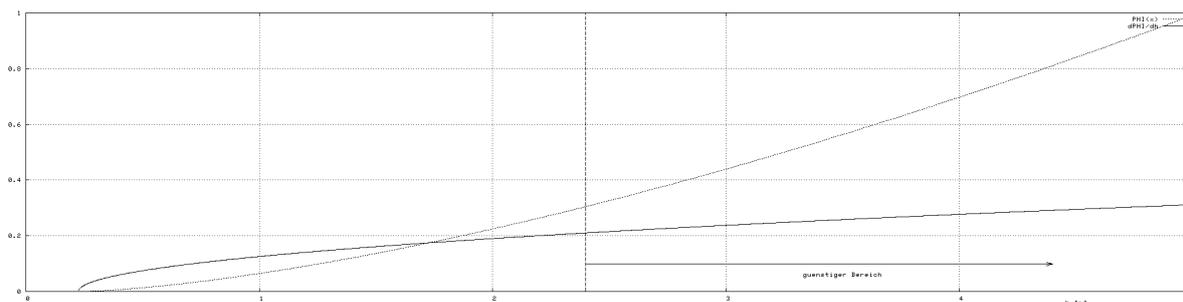


Abbildung 74: Dimensionslose Transportintensität Φ (gestrichelt) nach Meyer-Peter als Funktion $\Phi = \Phi(h)$ im Wasserstand h in Metern und deren Ableitung bei einem Gefälle $I = 0,001$ und einem maßgebendem Korndurchmesser $d_m = 3$ mm.

Wird eine quer geneigte Sohle zu Beginn eines Versuchs hergestellt, indem entsprechend abgezogen wird, kann nur über kurze Zeit gemessen werden, bis sich die Sohle ebnet. Da die Transportrate über längere Zeiträume gemittelt gemessen wird, kann diese dann auch nicht einem Quergefälle zugeordnet werden. Nahe liegt daher, den Versuch so aufzubauen, dass die Sohle während der Versuchsdauer nachgekippt wird. Die Mechanik hierfür muss jedoch vor Sand geschützt werden. Hierzu lassen sich die Spalte zwischen den Seiten der gekippten Kippsohle und den Versuchsrinnenwänden abdichten. Besonderen Schutz bietet jedoch Geschiebe, das so grob ist, dass es durch diese Spalte nicht mehr hindurch passt.

Eher in einer experimentellen Arbeit lässt sich klären ob trotz dieser Forderung noch hinreichend gut auflösbare Transportraten erzielt werden. Zwei gleichartig gebaute Versuchsrinnen verhalten sich im allgemeinen hydraulisch so verschieden, dass nicht gleichzeitig mit einer Versuchsrinne zur Referenz mit ebener und einer zweiten Rinne mit gekippter Sohle gemessen werden kann. Deshalb werden Referenz- und Kippversuch in einer Versuchsrinne nacheinander ausgeführt. Um die Ergebnisse zu vergleichen, müssen beide Male absolute Frachtraten gemessen werden.

8.3 Der relative Volumenanteil transportierten Geschiebes

In welcher Größenordnung liegt der zum Abfluss relative Volumenanteil transportierten Geschiebes?

Sei Q_B der (mittlere) Abfluss pro Sohlenbreiteneinheit. (Wie q_B trägt er die physikalische Dimension $\frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}}$.) Im Rechteckgerinne gilt $Q_B = hv$. Bei Normalabfluss im breiten

Rechteckgerinne folgt aus dem quadratischen Fließgesetz $Q_B = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \sqrt{gh^3I}$.

Die Chézy-Konstante $C_{Chézy} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$ ist Funktion des Quotienten $\zeta = \frac{h}{d_m}$. Als Potenz-Näherungslösung lautet sie $C_{Chézy} \approx c_1 \zeta^{c_2}$ mit $c_1 = 5,03$ und $c_2 = 0,268$ ([40], 3.2.2 Gl. 3.24, S. 26). So folgt

$$Q_B = c_1 \zeta^{c_2} \sqrt{gh^3I}. \quad (224)$$

Mit der Volumentransportrate $q_B = \sqrt{g\varrho' d_m^3} \Phi$ pro Sohlenbreiteneinheit ergibt sich für

das gesuchte Verhältnis $\frac{q_B}{Q_B}$ allgemein $\frac{q_B}{Q_B} = \zeta^{\frac{3}{2}+c_2} \frac{\Phi}{c_1} \sqrt{\frac{\varrho'}{I}}$.

Mit $F_{r^*c} \approx \frac{1}{20}$ ist nach Meyer-Peter $\Phi = \left(\frac{\zeta I}{\varrho'} - F_{r^*c} \right)^{3/2}$.

So folgt schließlich mit $\varrho' \approx 1,6$ für Silikat in Wasser

$$\boxed{\frac{q_B}{Q_B} = \frac{\zeta^{\frac{3}{2}+c_2}}{c_1} \sqrt{\frac{\varrho'}{I}} \left(\frac{\zeta I}{\varrho'} - F_{r^*c} \right)^{3/2} \approx \frac{\zeta^{-1,768}}{15,9\sqrt{I}} \left(\frac{5\zeta I}{2} - \frac{1}{5} \right)^{3/2}}. \quad (225)$$

Graphisch dargestellt wird dieses Verhältnis in Abb. 75. Die Verhältnisse liegen zwischen wenigen p.p.m ('parts per million') und höchstens wenigen Promillen. Eine hohe Trennleistung fordert also die Technik zur Messung der Frachtraten. Sehr schwer wäre eine Dichteänderung des gesamten Wasser-Geschiebe-Gemisches zu messen. Auch diese läge nur im p.p.m- bis Promille-Bereich.

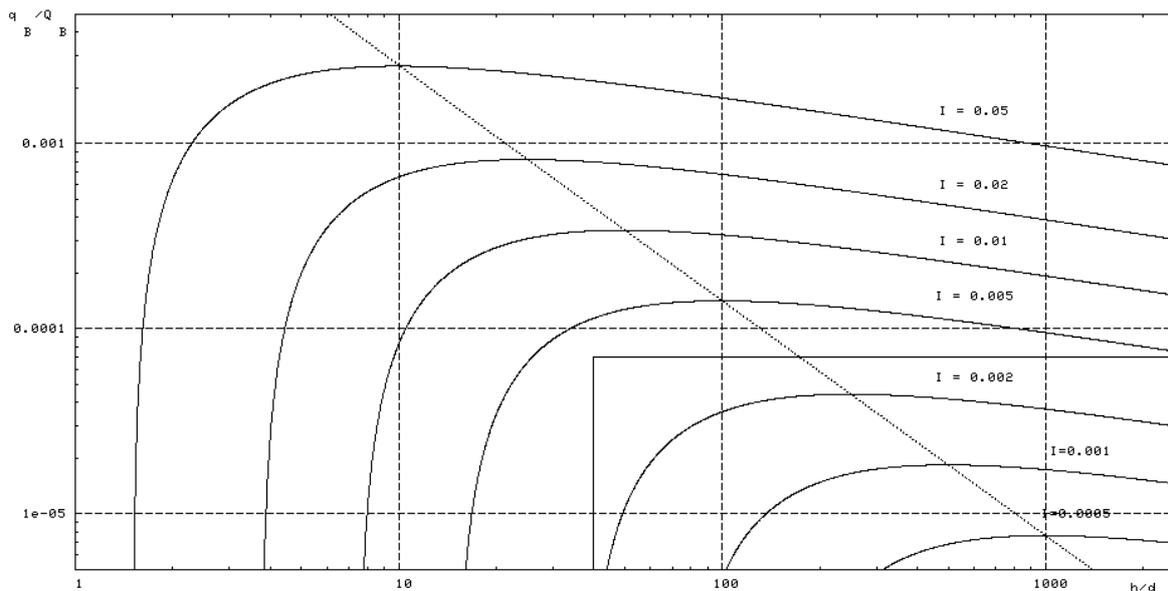


Abbildung 75: Das Verhältnis Geschiebe-Volumenfrachtrate zu Abfluss nach (225) für die Formel von Meyer-Peter als Funktion $\frac{q_B}{Q_B} = \frac{q_B}{Q_B} \left(\frac{h}{d_m} \right)$ unter Annahme eines Potenzgesetzes für den Widerstandsbeiwert λ bei Normalabfluss. Die durchgezogenen Graphen beziehen sich jeweils auf feste Gefälle von einem Halben Promille bis zwei Prozent. Gestrichelt ist die Kurve, entlang der die Maxima verlaufen.

Um die Transportrate über Dichten zu messen, müssen Fluss und Dichte einer mit Sediment angereicherten Suspension gemessen werden. (Zum praktischen Einsatz siehe [55], 4.1 und 4.2, S. 43-49.) Wesentlich dabei ist, dass die Variabilität der Dichte nicht die (z. B. elektrisch-induktive) Messung des Flusses beeinträchtigt.

Der Anreicherung der Suspension mit Geschiebe liegt ein physikalischer Trennvorgang zugrunde, etwa durch Filtration oder Sedimentation. Um aus der Geschiebefracht in der angereicherten Suspension die Gesamtfracht zu bestimmen, muss das 'Eingangsverhältnis' bei der Anreicherung bekannt sein. Dieses ist im allgemeinen nicht 1:1, weil ein Teil des Geschiebes durch Filter nicht zurückgehalten wird oder das Absetzbecken passiert. Hierdurch kommt es zu relativ hohen Messfehlern. Aus verschiedenen Versuchen lassen sich nur schwer absolute Frachtraten vergleichen.

Versuche lassen sich jedoch auch so aufzubauen, dass ein Referenzversuch gleichzeitig abläuft. Frachtraten werden differentiell bestimmt, indem z. B. das in zwei Absetzbecken sedimentierte Geschiebe differentiell gewogen wird. Allgemein sind dafür zwei Rinnen erforderlich, die sich wieder zu sehr in ihren hydraulischen Eigenschaften unterscheiden können.

8.4 Die differentielle Messung von Transportraten

Um auch kleine Änderungen der Transportrate zu messen, die weder auf Änderung der Kornzusammensetzung noch auf Änderung des Abflusses beruhen, bietet sich die in Abb. 76 schematisch dargestellte differentielle Frachtratenmesstechnik an.

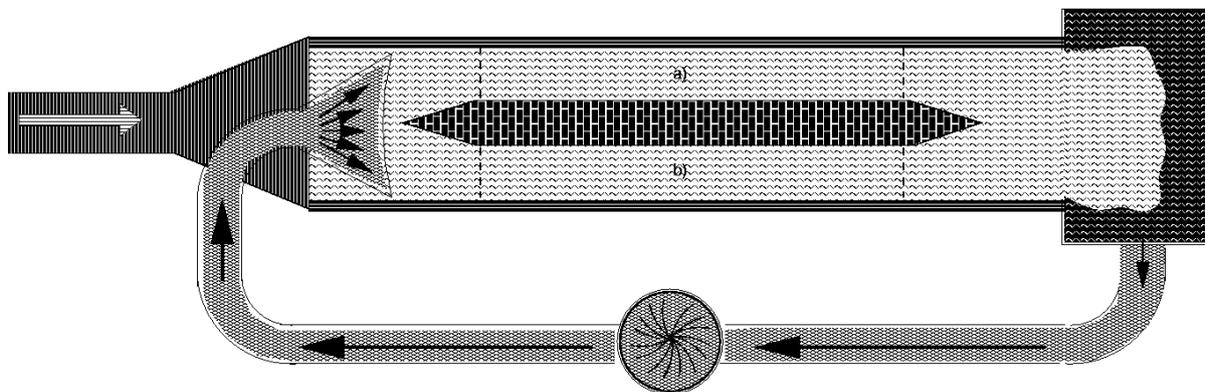


Abbildung 76: Die differentielle Messung einer Transportrate durch ein symmetrisch geteiltes Gerinne. Die unbewegliche Trennwand muss die Sohle zwar teilen, darf aber vom Wasser überströmt werden. Um den Einfluss einer Sohlenquerneigung auf den Transport zu messen, muss jede Sohlhälfte zwischen den gestrichelten Linien individuell zu kippen sein. Das aus beiden Hälften abtransportierte Sediment wird vermischt über einen Feststoffsuspensionspumpenkreislauf an den Einlauf zurück geleitet. Kritisch ist die symmetrische Rückgabe auf beide Gerinnehälften.

Messtechnisch leicht zugänglich ist heute das Sohlhöhenprofil. (Zu praktischem Einsatz elektrokapazitiver Profilaufnahmeverfahren siehe [55] 4.2.7, S. 53-55, zu sonographischen Verfahren [18] III.3.4.2, S. 66 ff.) Recht schwierig lässt sich hingegen abtransportiertes Sediment bei laufendem Versuch abfangen und auswiegen. So bietet sich an, die Messung der Differenz von Frachtraten auf den Vergleich von Sohlhöhenprofilen zurückzuführen. Möglich wird das, indem man durch solche Differenzen der Frachtraten Auflandung oder Erosion herbeiführt.

Der Differentialrinne liegt der Gedanke zugrunde, die Sohle symmetrisch durch feste Einbauten in einen Versuchs- und in einen Referenzbereich zu teilen. Aus beiden Sohlhälften abtransportiertes Geschiebe wird am Auslauf vermischt abgefangen und über einen Feststoffkreislauf (Zum technischen Aufbau siehe [55] 4.2.3, S. 46-47.) rückgeführt und auf die gesamte Gerinnebreite gleichverteilt am Einlauf zugegeben. Werden jeder Versuch doppelt ausgeführt und dabei Versuchs- und Referenzbereich vertauscht, lässt sich die hier sehr kritische Symmetrie der Zugabe validieren.

Werden die trennenden feste Einbauten vom Wasser überströmt, darf davon ausgegangen werden, dass beide Sohlhälften den gleichen hydraulischen Bedingungen unterworfen sind. Durch Einbauten, die auch den Wasserstrom trennen, lassen sich hingegen Phänomene untersuchen, bei denen auch eine Rückkopplung auf die Hydraulik mit einfließen soll.

Diese Messtechnik birgt den Vorteil, dass Erosion auf der einen Sohlhälfte jeweils zu Auf-
landung auf der anderen führt. Das bringt aber auch den Nachteil, dass sich die Sohlhälfte zur Referenzmessung verändert. Entscheidend ist jedoch, dass sich das Leckverhältnis beim Auffangen des abtransportierten Sediments sowohl auf die Referenz- als auch auf die Versuchsrinnenhälfte auswirkt. Damit verfälscht es den Vergleich nicht.

9 Als Ergebnis dieser Arbeit zu vertretende Thesen

1. Transportkörper, alternierende Kolke und Bänke sowie der Mäander sind in der Natur beobachtete oszillatorische Vorgänge im stationär-eindimensionalen bzw. mehrdimensionalen Transportgleichgewicht. Sie lassen sich nicht durch lineare Modelle mit Transportformeln beschreiben, die nur in einer Dimension validiert worden sind.
2. Speziell Transportkörper (Riffel und Dünen) lassen sich in einer Raumdimension nur durch ein nichtlineares Modell beschreiben.
3. Das Längsprofil und das asymptotische Gefälle der Sohle im Rechteckgerinne konstanter Breite bei stationärem schubspannungsbestimmtem Transportgleichgewicht hängen nur von dem Widerstandsbeiwert ab.
4. Bei noch instationärem Transport in Nähe des stationären Gleichgewichtes verhält sich schubspannungsbestimmter Transport diffusiv, d. h. wie die Wärmeleitung, fließgeschwindigkeitsbestimmter Transport dagegen advektiv, d. h. oszillatorisch.
5. Im stabilen Querprofil ist die Fließquerschnittsfläche proportional dem Produkt Minimaltiefe mal Rektifikation des Querprofils der geschiebeführenden Sohle.

10 Zusammenfassung einiger Formelergebnisse

1. Transportgleichgewicht in offenen Gerinnen mit beweglicher Sohle und konstanter Sohlenbreite impliziert

$$bq_B = \text{const}$$

Speziell für das Transportgleichgewicht bei schubspannungsbestimmten Transportgesetzen im Gerinne konstanter Breite bei stationär-ungleichförmigem Abfluss gilt zwischen Wasserstand h und Gefälle I das Reziprozitätsgesetz (54)

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{s}_0}{\mathbf{h}} .$$

2. Für die stationäre Spiegellinie im offenen Rechteckgerinne konstanter Breite im Transportgleichgewicht der beweglichen Sohle gilt die allgemeine Differentialgleichung (65)

$$\frac{dh}{dx} = \frac{s_0 h^2 - (\lambda/8) h_g^3}{h^3 - h_g^3} .$$

3. Bei konstantem Widerstandsbeiwert λ lautet die implizit geschlossene Lösung (91) zu (65)

$$x = \frac{4h_g}{\lambda\sqrt{\chi^*}} \left(\frac{h^{*2} - 1/\chi^*}{\sqrt{\chi^*}} + 2 \operatorname{arctanh} (h^* \sqrt{\chi^*}) + \frac{\log |\chi^* h^{*2} - 1|}{\chi^{*3/2}} \right)$$

mit $h^* = \frac{h(x)}{h_g}$ bei der Anfangsbedingung $h(0) = h_g$. Die Konstante χ^* wird numerisch bestimmt zu $\chi^* \approx 0,727639715$.

Folglich stellt sich bei konstanter Breite und strömendem Zufluss an den Querschnitt $x = 0$ mit der kritischen Wassertiefe $h(0) = h_g$ ein asymptotischer Wasserstand h_∞ bei einem asymptotischen Gefälle I_∞ nach (97) mit

$$h_\infty = \frac{h_g}{\sqrt{\chi^*}} \approx 1,17h_g \quad \text{und} \quad I_\infty = \frac{\lambda}{\chi^{*3/2}} \approx \frac{\lambda}{5}$$

im Transportgleichgewicht ein. Im Querschnitt $x = 0$ wird das Gefälle $I_0 = \frac{\lambda}{\chi^{*2}}$ angenommen.

4. Näherungsweise lässt sich eine Senkungslinie bei schubspannungsbestimmtem Transportgleichgewicht im Rechteckgerinne konstanter Breite schreiben als (103)

$$\boxed{\frac{h(x)}{h_g} = h^*(x) \approx 1 + \tilde{x} \left(\sqrt{\frac{\tilde{x}^2}{4} + \frac{1}{6}} - \frac{\tilde{x}}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \tilde{x} = \left(\frac{3}{10} \lambda \frac{x}{h_g} \right)^{\frac{4}{5}}}$$

bei einer Grenztiefe h_g .

5. Für die stationäre Spiegellinie im offenen Rechteckgerinne veränderlicher Breite im Transportgleichgewicht der beweglichen Sohle gilt allgemein die Differentialgleichung (74)

$$\frac{dh}{dx} = \frac{(b/b_0)s_v(x)h^2 - (\lambda/8)h_g^3}{(b/b_0)h^3 - h_g^3},$$

wenn an Querschnitten mit der kritischen Wassertiefe h_g die Breite b_0 angenommen wird. $s_v = s_v(x)$ bezeichnet nach (73) die Funktion $s_v(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathbf{g}}} \left(\frac{\varrho' \mathbf{v}_0}{bG^*} \right)^{2/3}$.

6. Bei dem Vorgang des Einstellens eines Normalabflussgefälles vor dem Erreichen eines Schubspannungsgleichgewichtes gilt (119) analog zur Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial I^\Delta}{\partial t} = -I_n \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\varrho'}} \cdot \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2} = -I_n \cdot \frac{dh^\Delta}{dI} \cdot \frac{dq_B}{d(hI)} \cdot \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2}$$

für die Abweichung I^Δ vom Normalabflussgefälle in Gerinnen konstanter Breite.

7. In Nähe des Transportgleichgewichtes gilt für fließgeschwindigkeitsbestimmte Transportformeln eine nichtlineare Advektionsgleichung (123)

$$\frac{\partial I^\Delta}{\partial t} = -\Theta_1 \frac{dI^\Delta}{dx} \left(1 + \Theta_2 \frac{dI^\Delta}{dx} \right)$$

für die Abweichung I^Δ vom Normalabflussgefälle mit

$$\Theta_1 = 4h \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \sqrt{(\mathbf{g}d_m)^3 \varrho'} \frac{h^2}{h^3 - h_g^3}$$

$$\Theta_2 = \frac{2}{I^2} \left(\frac{h_g}{h} \right) \frac{h^3 - h_g^3}{h^2}$$

bei einer Grenztiefe h_g .

Abbildungsverzeichnis

1	Gedämpftes Pendel	8
2	Der Mensch und der Fluss	10
3	Oszillatorische Vorgänge im Transportgleichgewicht der Fließgewässer	12
4	Korrelation zwischen Breite, Widerstandsbeiwert, Gefälle und Wasserstand	15
5	Gleichgewicht der Stützkkräfte bei stationärer Strömung	19
6	Relativer Linearisierungsfehler	23
7	Schubspannung bei Normalabfluss	25
8	Schubspannung bei waagrechter Sohle	26
9	Schubspannung bei Einstauung	26
10	Schema des Modellversuchs zur rauhen Rampe	31
11	Widerstandsbeiwerte λ zu den Versuchen Nr. 502, 503, 604 und 805	32
12	Grafik zu (27)	34
13	Numerische Spiegellinien zu den Versuchreihen 5 und 6	35
14	Numerische Spiegellinien zu den Versuchreihen 7 und 8	36
15	Widerstandsbeiwerte zu den Spiegellinien	37
16	Widerstandsbeiwerte aus dem Mittel der Pegel P3 und P4	38
17	Grafiken zur Lösung der Spiegellinie nach Bresse	40
18	Bresse-Kurven im Vergleich zu Messungen an der rauhen Rampe	41
19	Kontinuitätsbedingung für den zweidimensionalen Geschiebetransport	42
20	Symmetrieeigenschaften der Funktion $G_{qB}(I_1, I_2)$	45
21	Stationärer Transport in zwei Raumdimensionen	47
22	Erhaltung des Transportvolumens nach (46)	49
23	Kopplung der Flachwassergleichungen mit der Kontinuitätsgleichung	57
24	Kopplung über Schubspannung \longleftrightarrow Kopplung über Fließgeschwindigkeit	58
25	Grafik zu (65)	59
26	Beispiele für Randbedingungen	61
27	Asymptotische Zustände bei beweglicher Sohle	62
28	Gefälle an abflusskritischen Punkten	63
29	Variation der Gerinnebreite	65
30	Zusammenhang zwischen h , λ und b	66
31	Graph von $X(\chi)$	71
32	Graphen der Lösung $x^*(h^*)$	73
33	Spiegellinie und Sohlenprofil im gekoppelten stationären Transportgleichgewicht eines Rechteckgerinnes konstanter Breite und beweglicher Sohle	75
34	Potenzreihenentwicklung der Spiegellinie	77

35	Geschlossen umkehrbare Näherungslösung	78
36	Geschlossene Umkehrung (103)	78
37	h^* als Funktion von λ bei stationär-ungleichförmigem Abfluss	82
38	Lösung der Spiegellinie über (116)	86
39	Schematischer Aufbau des Weissach-Modells	92
40	Trapezprofil der Weissach-Rinne	92
41	Transportgleichgewicht bei Versuchen am Weissach-Modell, $I = 0,004$	93
42	Transportgleichgewicht bei Versuchen am Weissach-Modell, $I = 0,006$	95
43	Effektive Schubspannung	98
44	Modell für eine konstante effektive Schubspannung	99
45	Seitenerosion und -auflandung	101
46	Wanderosion	102
47	Zusammenhang zwischen den Ansätzen zu (129) und (132)	104
48	Nicht-triviale Lösungen	105
49	Stückweise differenzierbare Lösungen zu (129)	106
50	Herleitung der Wellengleichung	115
51	Illustration zu (144)	115
52	Abklingende Kammhöhe	116
53	Fließgeschwindigkeits- bzw. Schubspannungsprofil	117
54	Transportkontinuität im Mittel	118
55	Erläuterung zu (151)	119
56	Grenzfälle der Rückkopplung von Transportkörpern auf die Hydraulik	123
57	Schichtdicken bei konstanter Transportgeschwindigkeit	125
58	γ_s als Funktion von γ_u	126
59	Schichtdicken nach Potenzgesetzen	127
60	Relation zwischen I und p	131
61	Für periodische Lösungen notwendige stückweise Monotonie der Funktion Λ	132
62	Sohlenkrümmung an Extremen	134
63	Dreiecksdünen	135
64	Der Geschiebetransport nach Boys	139
65	Prinzip der Schubspannungskontinuität	141
66	Schubspannungsprofil und Isotonen nach der Formel von Boys	141
67	Wirbelfreie inkompressible Umströmung eines Zylinders	144
68	Turbulente Umströmung der Düne	146
69	Formeln für den c_W -Wert	147
70	Transportkörpersteilheit nach Yalin	155
71	Schema eines Versuchs zur experimentellen Validierung der Ergebnisse	162
72	Versuch mit stationär-ungleichförmiger Spiegellinie am Weissach-Modell	164

73	Der Kippsohlenversuch	166
74	Transportintensität nach Meyer-Peter und Ableitung	167
75	Relativer Volumenanteil des Geschiebes zum Abfluss	169
76	Differentialrinne	170
77	Bogensegment zur Lösung der 2D-Flachwassergleichungen	197
78	Strudelfreies Geschwindigkeitsfeld als Anfangsbedingung	199
79	Symmetrie der Pegel	213
80	Spiegellinie über der Rampe	216
81	Absoluter Fehler bei Integration nach (344) anstelle von (342)	247
82	Beispiel zum Korrekturterm zu dreieckigen Transportkörpern	251
83	Grafik zu f_{\approx} und $f_{=}$	254
84	Λ_0 nach der Formel von Boys	256

Literatur

- [1] Arnold, H.: *Bericht über das Forschungsvorhaben Damm- Versagen Ho 808/10 - 1*, Universität Hannover, Institut für Strömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen, August 1993, 53 S.
- [2] Bloß, Siegfried: Flüsse. Kapitel 6 in [64], S. 205-251.
- [3] Du Boys, M. P.: Le Rhône et les Rivières à Lit affoliable – Étude du Régime du Rhône et de l'Action exercée par les Eaux sur un Lit à Fond de Gravier indéfiniment affouillable, *Annales des Ponts et Chaussées* Série 5, Tome XVIII, 1879, Aufsatz N°49, S. 141-195, Signatur der Bibliothek des Deutschen Museum München: ZA 2412
- [4] Bretting, A. E.: Stable Channels. *Acta Polytechnica Scandinavica* Ci 1 (**245**/1958), Stockholm, Danish Contribution No. 3, Danish Academy of Sciences Copenhagen 1958
- [5] Broich, Karl: *Computergestützte Analyse des Dammerosionsbruchs*, Dissertation veröffentlicht in Heft 61/1997 der *Mitteilungen des Institut für Wasserwesen*, Universität der Bundeswehr München, 152 S. ISSN 0720-1273
- [6] Chanson, Hubert: *The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction*, Arnold Publishing London, John Wiley & Sons New York, 1999, xlv, 495 S. ISBN 0-340-74067-1 (Arnold, Europa), ISBN 0-470-36103-4 (Wiley, Nordamerika).
- [7] Collatz, Lothar: *Differentialgleichungen: Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen*, B. G. Teubner Stuttgart 1966, 226 S. 136 Abb.
- [8] Czirwitzky, Hans-Joachim: *Dämpfungsfreie numerische Verfahren für lineare hyperbolische Dgl-Systeme zur Simulation von Flachwasserströmungen in natürlichen Gerinnen*[sic], am 06.02.1986 eingereichte und am 10.07.1986 an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Technischen Universität München unter Betreuung durch Prof. Dr. Johann Edenhofer genehmigte Dissertation, 117 S. 8 graphische Anlagen, 1 beigelegter Trickfilm.
- [9] Dudley, Richard M.: *Real Analysis and Probability*, Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Advanced Books & Software, Pacific Grove, Kalifornien 1989, xi, 436 S. ISBN 0-534-10050-3

- [10] Dwight, Herbert Bristol: *Tables of Integrals and other Mathematical Data*, MacMillan Publishing, New York, 1. Auflage 1934, 4. Auflage 1961, x, 336 S. ISBN 0-02-331170-3
- [11] Eisner, Franz: Offene Gerinne. *Handbuch der Experimentalphysik*, Herg. Wilhelm Wien und Friedrich Harms, Band IV Hydro- und Aerodynamik, 4. Teil, S. 211 - 459. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1932.
- [12] Erwe, Friedhelm; Ernst Peschl: *Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Band 87 der Reihe *B.I.-Hochschultaschenbücher*, Bibliographisches Institut Mannheim 1973, 133 S. ISBN 3-411-00087-2
- Exner, Felix M.:
- [13] Zur Physik der Dünen, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien* 129 (1920), S. 929-952,
- [14] Über die Wechselwirkung von Wasser und Geschiebe in Flüssen, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien* 134 (1925), S. 165-205, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa (Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik) Wien, Signatur der Bibliothek des Deutschen Museum München: ZA 535
- [15] Falk, Gottfried; Ruppel, Wolfgang: *Energie und Entropie: Eine Einführung in die Thermodynamik*, zweiter Band der Reihe *Die Physik des Naturwissenschaftlers*, (Julius) Springer Heidelberg 1976, xiv, 408 S. ISBN 3-540-07814-2 (D), ISBN 0-387-07814-2 (Nordamerika)
- [16] Graf, Walter Hans: *Hydraulics of Sediment Transport*, McGraw-Hill, 1971, ISBN 07-023900-2
- [17] Hale, Jack K.: *Ordinary Differential Equations* Band 21 der Reihe *Interscience Series on Pure and Applied Mathematics* John Wiley & Sons New York 1969, xvi, 332 S. ISBN (0-)471-34090-1

- [18] Hartmann, Sven (Herg.), Bechteler Wilhelm, Wieprecht Silke:
Wasserwirtschaftliche Rahmenuntersuchung Salzach, Fachbericht 7, Morphologische Auswirkung von Aufweitungen in der Salzach — ingenieurpraktische Berechnung und physikalische Modellierung, ad-hoc Arbeitsgruppe der Ständigen Gewässerkommission nach dem Regensburger Vertrag, März 2002, 123 S.
- [19] Henderson, Francis Martin: *Open Channel Flow*, (Collier-)MacMillan New York/London 1966, xxii, 522 S.
- [20] Hewitt, Edwin; Stromberg, Karl Robert: (bekannt als ‘Hewitt & Stromberg’) *Real and Abstract Analysis — A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable*. Band 25 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics* (Julius) Springer New York, Heidelberg, 3. Aufl. 1975, x, 476 S. ISBN 0-387-90138 (Nordamerika), ISBN 3-540-90138-8 (D).
- [21] Jaeger, Charles: *Technische Hydraulik*, Band 8 der Reihe *Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften* Birkhäuser Basel 1949, xvi, 464 S. 303 Abb.
- [22] Jeffrey, Allan: *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*, Academic Press, San Diego, 1995, xxiv, 410 S. ISBN 0-12-382580-6 Hierbei handelt es sich um eine vereinfachte Neuausgabe der Integraltafeln von Gradstein und Ryshik.
- [23] Kamke, Erich: *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Band I. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B.G. Teubner Stuttgart, 9. Auflage 1977, ISBN 3-519-02017-3
- [24] Kozeny, Josef: *Hydraulik: Ihre Grundlagen und praktische Anwendung*, (Julius) Springer, Wien, 1953, xi, 588 S. 544 Abb.
- [25] Kulikovskii, Andrei Gennadievich, Nikolai V. Pogorelov Andrei Yurievich Semenov: *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Original auf Englisch!) Chapman & Hall/CRC Boca Raton, Florida 2001, xiv, 540 S. ISBN 0-8493-0608-6

- [26] Ландау, Лев Давидович; Евгений Михайлович Лифшиц ('Landau & Lifshitz'): Гидродинамика. Наука, Moskau, 3. Auflage 1986. Englische Ausgabe dieser Auflage: *Fluid Mechanics*. Pergamon Press Oxford, 2. Auflage 1987, xiii, 539 S. ISBN 0-08-033932-8. Es handelt sich um Band 6 des Kurses von Landau und Lifschitz in theoretischer Physik.
- [27] Maddock, Thomas Jr.: Equations for Resistance to Flow and Sediment Transport in Alluvial Channels. *Water Resources Research* **12** (1), 1976, S. 11-21.
- [28] Mahmood, Khalid; Yevjevich, Vujica (Herg.): *Unsteady Flow in Open Channels* Volume I, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado 1975
- [29] Malcherek, Andreas: Numerische Methoden. Kapitel 3 in [64] S. 83-122
- [30] Mangulis, V.: *Handbook of Series for Scientists and Engineers*, Academic Press, New York 1965, viii, 134 S.
- [31] Maurer, Markus: *Zuverlässigkeit von Berechnungen des Feststofftransports*. Dissertation an der Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Bau- und Vermessungswesen, Institut für Wasserwesen (Prof. Bechteler)
- Mizohata, Sigeru:
- [32] *The theory of partial differential equations* [sic!], japanische Originalausgabe bei Iwanami Shoten, Tokyo, englische Übersetzung in Lizenzausgabe bei Cambridge University Press, Cambridge 1973, xii, 490 S. ISBN 0-521-08727-9
- [33] *On the Cauchy Problem*, Band 3 der Reihe *Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering*, Science Press, Peking 1985; Lizenzausgabe durch Academic Press, 177 S. ISBN 0-12-501660-3
- [34] *Hyperbolic Equations and Related Topics: Proceedings of the Taniguchi International Symposium Katata and Kyoto, 1984*, Academic Press, Tokyo 1986, xxxiv, 423 S. ISBN 0-12-501658-1
- [35] Oseen, Carl Wilhelm: *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1927, Band 1 in der Reihe *Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern* (Herg. E. Hilb)

- [36] Press, Heinrich; Schröder, Ralph: *Hydromechanik im Wasserbau*, Wilhelm Ernst & Sohn Berlin 1966
- [37] Raudkivi, Arved Jaan: *Loose Boundary Hydraulics*, Pergamon Press, 1. Auflage 1967, 3. Auflage, hier zitiert, 1990, xvii, 538 S. ISBN 0-08-034074-1
- [38] Riesz, Frigyes (Friedrich Rieß); Szökefalvi-Nagy, Béla (Adalbert): (bekannt als ‘Riesz-Nagy’) *Leçons d’analyse fonctionnelle*. Budapest, 1. Auflage 1952, 448 S. 2. Auflage 1955. Übersetzungen dieses Werkes liegen vor
- ins Deutsche unter dem Titel *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (Ost-)Berlin, 1. Auflage 1956, 3. Auflage 1973, 4. Auflage 1982, 518 S.
 - von der 2. Auflage durch Leo F. Boron ins Englische unter dem Titel *Functional Analysis*
 - Frederick Ungar Publishing New York 1955, mit getrenntem Anhang 1960.
 - mit dem Anhang vereint bei Dover, New York, 1990, xii, 504 S. ISBN 0-486-66289-6
- [39] Rössert, Robert: *Hydraulik im Wasserbau*, R. Oldenbourg München, 1. Auflage 1964, 180 S.
- [40] Rosport, Michael: *Fließwiderstand und Sohlstabilität steiler Fließgewässer unter Berücksichtigung gebirgsbachtypischer Sohlstrukturen*, Heft **196** der *Mitteilungen des Instituts für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik der Universität Karlsruhe ‘Theodor-Rehbock-Laboratorium’* Herg. Prof. Franz Nestmann, 1998, ix, 144 S. und Anhang mit Fotos, ISSN 0176-5078
- [41] Sattel, Heinrich: *Wandschubspannung an umströmten Körpern*, Dissertation veröffentlicht in Heft 50/1994 der *Mitteilungen des Institut für Wasserwesen*, Universität der Bundeswehr München, Kommissionsverlag Oldenbourg, xiv, 191 S.
- [42] Scheidegger, Adrian E.: *Theoretical Geomorphology*, (Julius) Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961, xii, 133 S. 163 Abb.

[43] Schlichting, Hermann: *Grenzschicht-Theorie*, G. Braun Karlsruhe, 5. Auflage 1965, xvi, 732 S. 386 Abb. 34 Tab. 1997 ist (nach dem Tod von Hermann Schlichting 1985) eine '9. , völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage' des Werkes erschienen, herausgegeben durch Gersten, Klaus; unter Mitarbeit von Egon Krause und Herbert Oertel Jr.: bei (Julius) Springer Berlin, xxii, 851 S. 282 Abb. 22 Tab. ISBN 3-540-55744-X. Die Oseensche Formel wird in dieser Auflage ohne weitere Erläuterung nur noch in der Unterschrift zu Bild 1.19 auf S. 24 gegeben.

Schoklitsch, Armin:

[44] Der Geschiebetrieb und die Geschiebefracht. *Wasserkraft und Wasserwirtschaft* **29** Heft 4, 1934, S. 37-43

[45] *Handbuch des Wasserbaues*, erster Band, (Julius) Springer, Wien, 1. Aufl. 1930, 2. Aufl. 1950, 3. gegenüber der 2. unveränderte Auflage 1962, x, 475 S. 722 Abb. 87 Tab.

[46] Schröder, Peter-Michael; Forkel, Christian: Mathematische Beschreibung der physikalischen Prozesse. Kapitel 2 in [64], S. 47-81.

[47] Smerdon, Beasley: *The tractive Force Theory Applied to Stability of Open Channels in Cohesive Soils*. Research Bulletin **715**, University of Missouri, Columbia, Oct. 1959

[48] Stelczer, Karoly: *Bed-Load Transport: Theory and Practice*, Water Resources Publications, Littleton, Colorado 1981, viii, 295 S. ISBN 0-918334-39-X

[49] Truckenbrodt, Erich: *Strömungsmechanik* (Julius) Springer Berlin und Heidelberg, (1. Auflage) 1968, vi, 532 S. 285 Abb. (noch keine ISBN. Eine zweite Auflage ist bei Springer 1980 in zwei Bänden unter dem Titel *Fluidmechanik* erschienen mit ISBN 3-540-09433-7)

Vetter, Martin:

- [50] *Gesamttransport von Sedimenten in offenen Gerinnen*, Band **26** der *Mitteilungen des Institut für Wasserwesen*, Universität der Bundeswehr München 1988, Neubiberg bei München, ISSN 0720-1273
- [51] *Ein Beitrag zur Berechnung des Feststofftransports in offenen Gerinnen*, Dissertation an der Universität der Bundeswehr München vom 30. April 1992 mit mündlicher Prüfung vom 30. Juni 1992, vii, 243 S. erschienen als Heft **42** der *Mitteilungen des Institut für Wasserwesen* der Universität der Bundeswehr München
- [52] Vogel, Susanne: *Rampen in aufgelöster Bauweise: Grundsatzuntersuchung*, Bericht im Jahr 2002 des Institut für Wasserwesender Universität der Bundeswehr München für das Wasserwirtschaftsamt Rosenheim, 50 S. und Anlagen.
- [53] Vollmers, Hans; Pernecker, Leopold: Beginn des Feststofftransportes [sic!] für feinkörnige Materialien in einer richtungskonstanten Strömung. *Die Wasserwirtschaft* **6**, 1967, S. 236-241.
- [54] Wesseling, Pieter: *Principles of Computational Fluid Dynamics*, Band 29 der Reihe *Springer Series in Computational Mathematics* (ISSN 0179-3632) (Julius) Springer 2000, xii, 644 S. 150 Abb. ISBN 3-54067853-0.
- [55] Wieprecht, Silke: *Entstehung und Verhalten von Transportkörpern bei grobem Sohlmaterial*, Dissertation veröffentlicht in Heft **75/2001** der *Mitteilungen des Institut für Wasserwesen*, Universität der Bundeswehr München, Kommissionsverlag Oldenbourg, 142 S. ISBN 3-486-26518-0
- [56] Wittman; Vollmers, Hans: Gutachten über die Stabilisierung des Transportverhaltens eines Flussabschnittes für das Landgericht München II, unveröffentlicht, Karlsruhe, 1962.
- [57] Yalin, M. E.: *Mechanics of Sediment Transport*, Pergamon Press, 1972

Zanke, Ulrich C. E.:

- [58] *Grundlagen der Sedimentbewegung*, (Julius) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982, Reihe *Hochschultext*, xii, 402 S. ISBN 3-540-11672-9 (D) und ISBN 0-387-11672-9 (Nordamerika).

In den *Mitteilungen des Franzius-Instituts der Universität Hannover*, Heft 44/1976 erschienen sind die beiden Aufsätze

- [59] *Über den Einfluß von Kornmaterial, Strömungen und Wasserständen auf die Kenngrößen von Transportkörpern in offenen Gerinnen*, S. 1-111
- [60] *Über die Naturähnlichkeit von Geschiebeversuchen bei einer Gewässersohle mit Transportkörpern*, S. 295-324
- [61] Lösungen für das universelle Geschwindigkeitsverteilungsgesetz und die Shields-Kurve, *Wasser & Boden* **48** (1996) Heft 9 (September), S. 21-26, Paul Parey, Blackwell Wissenschafts-Verlag Berlin ISSN 0043-0951
- [62] *Zur Physik von strömungsgetriebenem Sediment (Geschiebetrieb)*, Heft 106, der *Mitteilungen des Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft Technische Universität Darmstadt* 1999, 59 S. ISSN 1430-3434

gekürzt (Kap. 4-7) erschienen als

Analytische Lösung für den Geschiebetrieb, *Wasser & Boden* **51** (1999) Heft 6 (Juni), S. 46-52, Paul Parey, Blackwell Wissenschafts-Verlag Berlin ISSN 0043-0951

- [63] Zarn, Benno: *Einfluss der Flussbettbreite auf die Wechselwirkung zwischen Abfluss Morphologie und Geschiebetransportkapazität*, Band 154 der *Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich* (ETH), Herg. D. Vischer, Zürich 1997, 240 S.
- [64] Zielke, Werner (Herg.): *Numerische Modelle von Flüssen, Seen und Küstengewässern*, Band 127 der Reihe *DVWK Schriften* des Deutschen Verbandes für Wasserwirtschaft und Kulturbau (DVWK) Bonn, im Kommissionsvertrieb der Wirtschafts- und Verlagsgesellschaft Gas und Wasser, Bonn 1999, ix, 440 S. ISBN 3-89554-099-4

11 Symboltabelle

Die Notation für den Abschnitt 7 orientiert sich weitestgehend an der der Aufsätze und des Buches von Zanke. Um diese durch weitere Symbole zu ergänzen und Kollisionen mit bereits eingeführten Symbolen oder Standardkonventionen zu vermeiden, sind einige der Symbole durch ein Subscript ergänzt worden.

Symbol	Bezeichnung	Dimension
A	Fließquerschnittsfläche, soweit ad hoc nicht anders eingeführt	[Länge ²]
b	Breite des Gerinnes	[Länge]
b_0	Breite eines Rechteckgerinnes örtlich veränderlicher Breite in dem Querschnitt, an dem die kritische Wassertiefe h_g erreicht wird	[Länge]
C	Integrationskonstante	
$C_{Chézy}$	Chézy-Konstante $C_{Chézy} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$	
c	kritische Fließgeschwindigkeit, Oberflächenwellengeschwindigkeit $c = \sqrt{gh}$	$\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \right]$
d_m	maßgebender Korndurchmesser	[Länge]
D_T	Krümmungsdurchmesser der Transportkörper	[Länge]
F_G	Gewichtskraft einer Säule Sedimentkörner	$\left[\frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}^2} \right]$
F_r	Froude-Zahl $F_r = \frac{v}{c}$	[dimensionslos]
F_r^*	Feststoff-Froude-Zahl $F_r^* = \frac{hI}{\rho' d_m}$	[dimensionslos]
F_{r^*c}	kritische Feststoff-Froude-Zahl	[dimensionslos]

\mathbf{g}	Schwerebeschleunigung	$\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}^2} \right]$
h	Wasserstand über der Sohle = Wassertiefe	[Länge]
h^*	dimensionsloser Wasserstand über der Sohle $h^* = \frac{h}{h_g}$	[dimensionslos]
\bar{h}	Wasserstand im Gleichgewichtszustand, Wasserstand im ungestörten Gerinne	[Länge] [Länge]
h^Δ	Wasserstandsabweichung durch Nichtgleichgewicht	[Länge]
h^\perp	Wasserstands-Störgroße	[Länge]
h_c	im Punkt x der Breite $b = b(x)$ entsprechende kritische Wassertiefe $h_c = \sqrt[3]{\frac{b_0}{b}} h_g$	[Länge]
h_n	Normalabflusstiefe	[Länge]
h_g	kritische Wassertiefe, bei variabler Breite für $b = b_0$	[Länge]
h_{\min}	minimale Wassertiefe im Bereich] - x x [des gestörten Abflusses, minimale Wassertiefe im Schnitt quer zur Fließrichtung	[Länge] [Länge]
h_∞	asymptotischer Wasserstand bei ungleichförmigem Abfluss	[Länge]
I	Gefälle des offenen Gerinnes in Fließrichtung	[dimensionslos]
I_x	Gefälle in x -Richtung	[dimensionslos]
I_y	Gefälle in y -Richtung	[dimensionslos]
I_E	Energiegefälle	[dimensionslos]
I_F	Reibungsgefälle	[dimensionslos]
\bar{I}	Gefälle im Gleichgewichtszustand, Gefälle im ungestörten Gerinne	[dimensionslos] [dimensionslos]
I^Δ	Gefälleabweichung durch Nichtgleichgewicht	[dimensionslos]
I^\perp	Gefälle-Störgroße	[dimensionslos]
I_n	Normalabflussgefälle	[dimensionslos]
I_∞	asymptotisches Gefälle bei Transportgleichgewicht und ungleichförmigem Abfluss	[dimensionslos]

l	Ortskoordinate in Fliessrichtung in Abschnitt 7	[Länge]
L	(Perioden)Länge der Transportkörper	[Länge]
m_G	Massefracht je Zeit- und Breitereinheit	$\left[\frac{\text{Masse}}{\text{Länge} \cdot \text{Zeit}} \right]$
q_B	transportiertes Sedimentvolumen (incl. Hohlräume)	$\left[\frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}} \right]$
q_B^x	transportiertes Sedimentvolumen in x -Richtung	$\left[\frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}} \right]$
q_B^y	transportiertes Sedimentvolumen in y -Richtung	$\left[\frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}} \right]$
	alle q jeweils je Zeit- und Breitereinheit	
Q	Abfluss (Volumen pro Zeiteinheit) $Q = Av$	$\left[\frac{\text{Länge}^3}{\text{Zeit}} \right]$
Q_B	Abfluss pro Sohlenbreitereinheit	$\left[\frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}} \right]$
Re_T	Reynolds-Zahl eines Transportkörpers	[dimensionslos]
s	Dicke der bewegten Sedimentschicht	[Länge]
\mathbf{s}	Rektifikation (Länge) der Sohloberfläche in Querrichtung	[Länge]
s_0	konstantes Produkt aus Gefälle I und Wasserstand h bei Schubspannungsgleichgewicht im Gerinne konstanter Breite	[Länge]
s_v	in 4.2 durch (73) definierter Term	[Länge]
t	Zeit	

u_s	Geschwindigkeit der Körner	$\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \right]$
u_T	Wanderungsgeschwindigkeit der Transportkörper	$\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \right]$
u^*	Schubspannungsgeschwindigkeit $u^* = \sqrt{ghI} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_w}}$	$\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \right]$
v	Fliessgeschwindigkeit des Wassers	$\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \right]$
x	Ort in Fliessrichtung, reduzierter Ort durch Elimination der Zeit mit der Wellengleichung ($x = x_0 + u_T t$)	[Länge]
x_0	Ortskoordinaten-Nullpunkt, der sich als Integrationskonstante ergibt	[Länge]
x'	Lauf- und Integrationsvariable, falls Grenzen Terme in x sind	[Länge]
y	Wandabstand = Ortskoordinate quer zur Fließrichtung	[Länge]
y_0	Nullpunkt der Ortskoordinaten quer zur Fließrichtung, der sich durch Integration nach Trennung von Ortsdifferentialen ergibt	[Länge]
y'	Lauf- und Integrationsvariable, falls eine Integrationsgrenze Term in y sind	[Länge]
Z_1	Term in den Differentialgleichungen zum Transportkörpermodell	[Länge]
z	Höhe der Sohle (über einem Koordinatensystem-Nullpunkt in der Sohle)	[Länge]

Hier nicht aufgeführte griechische und kyrillische Symbole, insbesondere die Buchstaben α , β und γ , werden mit wechselnder Bedeutung kontextbezogen ad hoc eingeführt.

B	Platzhalter für eine der Größen τ , F_r^* oder η in Abschnitt 7	
B_0	lokal wirksamer Anteil der durch B vertretenen Größe.	
Δ	ggf. indiziert, ad hoc für Differenzen	
Δ	Laplace-Operator	
η	in Abschnitt 7 Sohlenbelastungszahl $\eta = \frac{F_r^*}{F_{r^*c}}$	[dimensionslos]
Θ_1	Termzusammenfassung in 5.7	$\left[\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} \right]$
Θ_2	Termzusammenfassung in 5.7	[Länge]
κ	ad hoc als Exponent kontextbezogen	
λ	Widerstandsbeiwert	[dimensionslos]
λ_0	konstanter Anteil eines veränderlichen Widerstandsbeiwertes	[dimensionslos]
ν	dynamische Viskosität (des Wassers)	
Ξ	Substitutionsvariable	
ξ	Quotient $\xi = \frac{h}{h_n}$ in der dimensionslosen Darstellung (32) der Lösung zur Bresse-Gleichung	[dimensionslos]
ϱ_w	Dichte des Wassers (bei Zanke ϱ)	$\left[\frac{\text{Masse}}{\text{Länge}^3} \right]$
ϱ_s	Dichte der Sedimente	$\left[\frac{\text{Masse}}{\text{Länge}^3} \right]$
ϱ'	relative Dichte der Sedimente im Wasser	[dimensionslos]

τ	Schubspannung des Wasserkörpers über der Sohle	
τ_{eff}	effektive Schubspannung an der Sohle in Abschnitt 6	
τ_0	lokal wirksamer Anteil der Schubspannung τ in Abschnitt 7	
τ_c	kritische Schubspannung	
Φ	Transportintensität, $q_B = \Phi \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}$	[dimensionslos]
X	(griech. Chi) Funktion, aus der χ^* bestimmt wird	
χ^*	numerische Konstante aus 5.1	[dimensionslos]
ω	Transportkörperperiodenzahl	$\left[\frac{1}{\text{Länge}} \right]$

Mathematischer und experimenteller Anhang

Für eine nicht differenzierbare Gerinnebreite b ist die Integraldarstellung (13) der stationären Spiegellinie h nicht mehr zu einer Differentialgleichung äquivalent. So lassen sich Aussagen zur Existenz einer Lösung h zu (13) unter solch allgemeineren Voraussetzungen nicht mehr aus den Existenz- und Eindeutigkeitsätzen für gewöhnliche Differentialgleichungen gewinnen. Integrale können als Abbildungen auf geeigneten Funktionenräumen aufgefasst werden. Über die Fixpunktsätze der Analysis lässt sich so die Existenz von Lösungen zu Integralgleichungen zeigen.

Über die Integraldarstellung (25) der Spiegellinie zwischen zwei Querschnitten mit symmetrischen hydraulischen Zuständen aus 2.3 lassen sich aus geeigneten Messdaten auch Widerstandsbeiwerte zu stationär-ungleichförmigem Abfluss bestimmen. Zu einem Modellversuch einer rauhen Rampe am Institut für Wasserwesen der UniBwM wird erläutert, wie dabei vorgegangen wird.

Nachdem bislang oft nur die Richtigkeit von Lösungen in dieser Arbeit vorgestellter Differentialgleichungen verifiziert worden ist, stellt sich die Frage, wie solche Lösungen durch Integration gewonnen werden. Um die Präsentation der Ergebnisse nicht durch die teils etwas aufwendigeren Rechnungen zur ihrer Herleitung zu belasten, sind diese Rechnungen in den zweiten Abschnitt ausgelagert worden. Geachtet worden ist hierbei darauf, dass die Arbeit auch ohne die in diesen Anhang ausgelagerten Rechnungen logisch schlüssig bleibt.

A Zur mathematischen Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen

A.1 Zu den Flachwassergleichungen (6)

Die Flachwassergleichungen (6) $\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{div}(h\vec{v}) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h v_x}{\partial t} + \frac{\partial h v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial(h v_x^2 + \mathbf{g}h^2/2)}{\partial x} &= \mathbf{g}h(I - I_F)_x \\ \frac{\partial h v_y}{\partial t} + \frac{\partial h v_x v_y}{\partial x} + \frac{\partial(h v_y^2 + \mathbf{g}h^2/2)}{\partial y} &= \mathbf{g}h(I - I_F)_y \end{aligned}$$

lassen sich über

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \mathbf{g}h(I - I_F)_x &= v_x \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ &+ v_x v_y \frac{\partial h}{\partial y} + h v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + h v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ &+ (v_x^2 + \mathbf{g}h) \frac{\partial h}{\partial x} + 2h v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \mathbf{g}h(I - I_F)_y &= v_y \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ &+ v_x v_y \frac{\partial h}{\partial x} + h v_y \frac{\partial v_x}{\partial x} + h v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ &+ (v_y^2 + \mathbf{g}h) \frac{\partial h}{\partial y} + 2h v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

auf ein System dreier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in den Funktionen h , v_x und v_y reduzieren.

Gilt $v_x, v_y \neq 0$, ist die Kontinuitätsbedingung $\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{div}(h\vec{v}) = 0$ äquivalent zu

$$0 = v_x \frac{\partial h}{\partial t} + v_x^2 \frac{\partial h}{\partial x} + h v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x v_y \frac{\partial h}{\partial y} + h v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (227)$$

$$0 = v_y \frac{\partial h}{\partial t} + v_x v_y \frac{\partial h}{\partial x} + h v_y \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y^2 \frac{\partial h}{\partial y} + h v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (228)$$

Indem (227) bzw. (228) jeweils von der Impulsgleichung für die x - bzw. y -Richtung subtrahiert wird, ergibt sich das zu den Flachwassergleichungen (6) und (226) äquivalente Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned}
0 &= \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v_y}{\partial y} \\
\mathbf{g}h(I - I_F)_x &= h \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{g}h \frac{\partial h}{\partial x} + hv_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + hv_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\
\mathbf{g}h(I - I_F)_y &= h \frac{\partial v_y}{\partial t} + \mathbf{g}h \frac{\partial h}{\partial y} + hv_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + hv_y \frac{\partial v_y}{\partial y}
\end{aligned} \right\} \quad (229)$$

Da die mit (227) bzw. (228) eliminierten Terme im Fall $v_x = 0$ bzw. $v_y = 0$ ohnehin entfallen, stellt die Voraussetzung bei Umformung der Kontinuitätsbedingung zu (227) bzw. (228) keine Einschränkung für die Äquivalenz von (229) zu (6) dar.

Mit

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} h \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad \vec{F} := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{g}h(I - I_F)_x \\ \mathbf{g}h(I - I_F)_y \end{pmatrix}, \quad A_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & h & 0 \\ h & 0 & h \end{pmatrix}$$

und

$$A_x := \begin{pmatrix} v_x & h & 0 \\ \mathbf{g}h & hv_x & 0 \\ 0 & 0 & hv_x \end{pmatrix}, \quad A_y := \begin{pmatrix} v_y & 0 & h \\ 0 & hv_y & 0 \\ \mathbf{g}h & 0 & hv_y \end{pmatrix}$$

([54] 8.3 (8.51) S. 324) besitzt (6) die Matrixdarstellung

$$A_t(\vec{u}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A_x(\vec{u}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + A_y(\vec{u}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \vec{F}. \quad (230)$$

Da die Matrizen A_t , A_x und A_y von der Lösung \vec{u} abhängen, ist das System partieller Differentialgleichungen nur quasi-linear ([12], Abschnitt 2, S. 35-54).

Da zu $(v - \lambda)(hv - \lambda) - \mathbf{g}h^2 = \lambda^2 - \lambda v(h + 1) + h(v^2 - \mathbf{g}h)$ für die Diskriminante

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \frac{v^2(h+1)^2}{4} + h(\mathbf{g}h - v^2) = v^2 \left[\frac{(h+1)^2}{4} + h \left(\frac{\mathbf{g}h}{v^2} - 1 \right) \right] \\
&\geq v^2 \left(\frac{(h+1)^2}{4} - h \right) = v^2 \frac{h^2 + 2h + 1 - 4h}{4} = v^2 \frac{h^2 - 2h + 1}{4} \\
&= \frac{v^2(h-1)^2}{4} \geq 0
\end{aligned}$$

gilt, besitzen die charakteristischen Polynome

$$\begin{aligned}
P_t(\lambda) &= (1 - \lambda)(h - \lambda)(h - \lambda) \\
P_x(\lambda) &= (hv_x - \lambda)[(v_x - \lambda)(hv_x - \lambda) - \mathbf{g}h^2] \\
P_y(\lambda) &= (hv_y - \lambda)[(v_y - \lambda)(hv_y - \lambda) - \mathbf{g}h^2]
\end{aligned}$$

durchweg ausschließlich reelle Lösungen. Doch fallen für A_t und A_x zwei Eigenwerte zusammen. Demnach sind die Flachwassergleichungen (6) zwar hyperbolisch, jedoch nicht streng hyperbolisch.

Folglich sind Lösungen zur den Flachwassergleichungen (6) im allgemeinen nicht beliebig oft differenzierbar im Gegensatz zu Lösungen streng hyperbolischer Systeme. ([33] Lectures I, II und IV, Übersicht in der Einleitung zu [34]) Entsprechendes gilt auch für die im allgemeinen nur einmal schwach differenzierbaren Lösungen zur stationären Spiegellinie.

In einer Raumdimension x ergeben sich speziell die Flachwassergleichungen zu

$$\begin{aligned}
& 0 = \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} \\
& \mathbf{g}h(I - I_F) = h \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{g}h \frac{\partial h}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial x} \\
& 0 = v \frac{\partial h}{\partial t} + v^2 \frac{\partial h}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial x} \\
& \mathbf{g}h(I - I_F) = h \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{g}h \frac{\partial h}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial x} \\
& \implies \mathbf{g}h(I - I_F) = h \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial h}{\partial t} + (\mathbf{g}h - v^2) \frac{\partial h}{\partial x} \\
& \qquad \qquad \qquad = h \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial h}{\partial t} + (v + c)(v - c) \frac{\partial h}{\partial x}
\end{aligned} \tag{231}$$

mit der kritischen Fließgeschwindigkeit $c = \sqrt{\mathbf{g}h}$. Aus $h = \frac{c^2}{\mathbf{g}}$ folgt

$$c \frac{dh}{dt} = \frac{2c^2}{\mathbf{g}} \frac{dc}{dt} = 2h \frac{dc}{dt} . \tag{232}$$

Auf den Charakteristiken $\frac{dx}{dt} = v \pm c$ ([26], §103 (103.1) S. 391, hier analog für die Gasdynamik) folgt aus (231)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}h(I - I_F) & \stackrel{(231)}{=} h \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial h}{\partial t} + (v + c)(v - c) \frac{\partial h}{\partial x} \\
 & = h \frac{dv}{dt} - v \frac{dh}{dt} + (v + c)(v - c) \frac{dh}{dt} \frac{dt}{dx} \\
 & = h \frac{dv}{dt} - v \frac{dh}{dt} + (v \mp c) \frac{dh}{dt} \\
 & = h \frac{dv}{dt} \mp c \frac{dh}{dt} \stackrel{(232)}{=} h \frac{dv}{dt} \mp 2h \frac{dc}{dt} \\
 & = h \frac{d(v \mp 2c)}{dt}. \tag{233}
 \end{aligned}$$

So ergibt sich in einer Raumdimension x für die Flachwassergleichungen die Darstellung über Charakteristiken zu

$$\boxed{\frac{d(v \mp 2c)}{dt} = \mathbf{g}(I - I_F) \quad \text{auf} \quad \frac{dx}{dt} = v \pm c} \tag{234}$$

([29] 3.9 (3.42) und (3.43) S. 109, ohne Quell- und Senkterm, [19] 8.3 (8-13b) und (8-14b) S. 289, [54] 8.2 S. 306-307 in Parameterdarstellung).

Wegen ihrer Darstellbarkeit durch zwei reelle Charakteristiken werden hyperbolische Differentialgleichungssysteme erster Ordnung als Anfangs-Randwertprobleme gestellt:

Zur Zeit $t = 0$ müssen die Spiegellinie $h = h(x, 0)$ und die Geschwindigkeitsverteilung $v = v(x, 0)$ als Funktionen auf dem gesamten Ortsbereich bekannt sein. Für spätere Zeiten $t > 0$ werden Werte $h(0, t)$ und $v(0, t)$ am Anfangspunkt $x = 0$ vorgegeben.

Um (234) nach v und c zu lösen, muss für jeden Zeitschritt sowohl vorwärts als auch rückwärts im Ort gerechnet werden. Nur so ergibt sich in jedem Punkt x ein System zweier Gleichungen, aus dem sich $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dc}{dt}$ gewinnen und so ein neues v und c für den nächsten Zeitschritt bereitstellen lassen.

Die Gleichungen in zwei Raumdimensionen x und y auf einer charakteristischen Fläche werden in der Literatur nur wenig diskutiert ([29] 3.9 S. 110). Die charakteristische Fläche wird durch eine Kurvenschar gegeben. Jede Kurve s dieser Schar läuft entlang der Fließgeschwindigkeitsvektoren.

Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ lässt sich aus kartesischen in polare Koordinaten transformieren. Bezeichnet hierzu

$$\mu := \frac{v_y}{v_x} \quad (235)$$

den Tangens des Orientierungswinkels des Fließgeschwindigkeitsvektors \vec{v} , so gilt

$$\left. \begin{aligned} v &:= |\vec{v}| = v_x \sqrt{1 + \mu^2} \\ \Leftrightarrow v_x &= \frac{v}{\sqrt{1 + \mu^2}} \\ \Rightarrow v_y &= \frac{\mu v}{\sqrt{1 + \mu^2}} \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

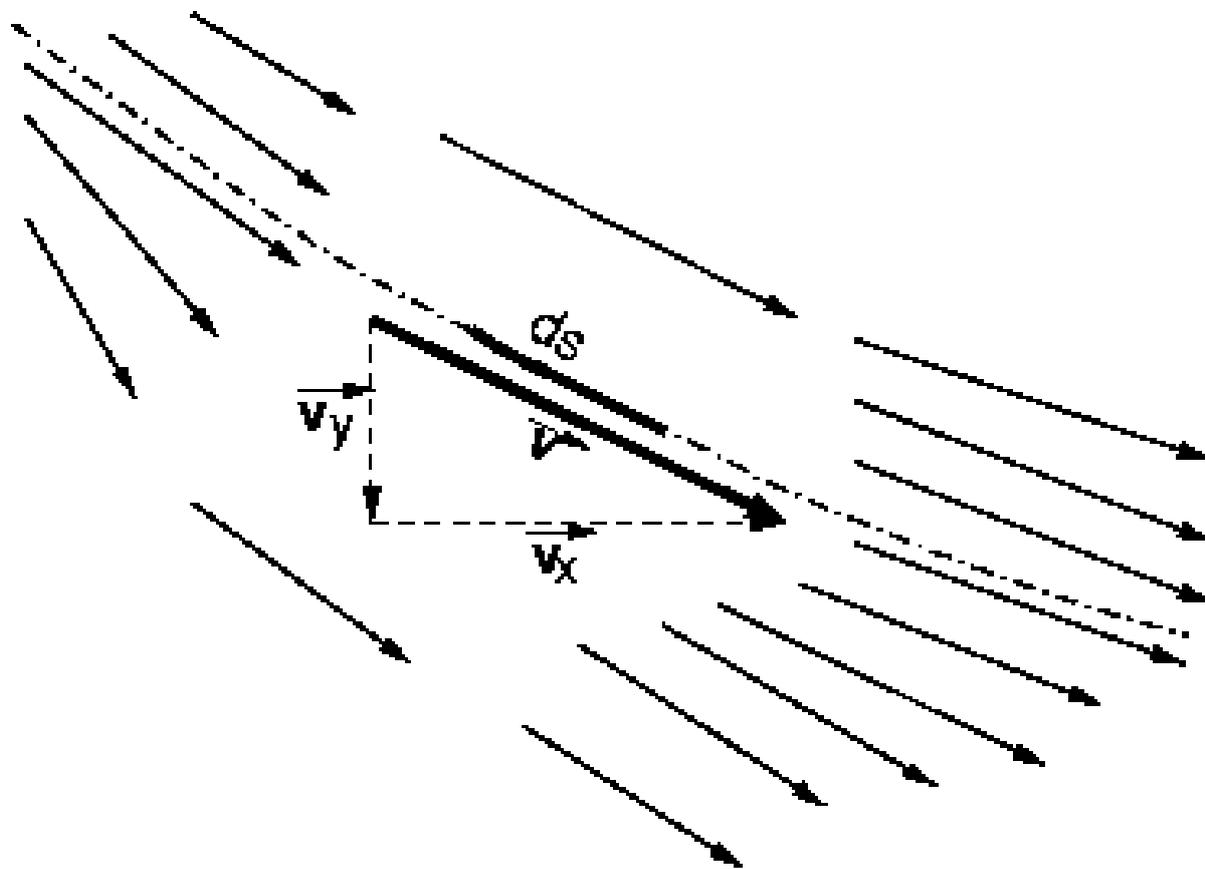


Abbildung 77: Ansatz für das Bogensegment ds zur Lösung der 2D-Flachwassergleichungen.

Lokale Koordinaten werden durch eine Abbildung $\begin{pmatrix} s \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eingeführt. Sie wird differentiell gegeben durch

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (237)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (238)$$

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = \mu \quad ([26] \text{ §117 (117.1) S. 445, hier für die Gasdynamik}) \quad (239)$$

Kurvensegmente ds sollen stets in Richtung des lokalen Geschwindigkeitsvektors \vec{v} verlaufen. (Abb. 77)

Erreicht wird das, indem, analog dem eindimensionalen Fall,

$$\frac{ds}{dt} := v \pm c \quad (240)$$

gesetzt wird. Da Volumenelemente lokal ebenfalls in Richtung des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} betrachtet werden, vereinfacht sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{div} h\vec{v} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial s} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s} \end{aligned} \quad (241)$$

auf die Kontinuitätsbedingung in (231) bei nur einer Raumdimension. Entsprechendes gilt für die Impulsgleichungen, hier allerdings mit der Besonderheit, dass in Quell- und Senkterme μ eingeht. So folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d(v \mp 2c)}{dt} = \mathbf{g}(I - I_F) \\ \text{auf } \frac{ds}{dt} = v \pm c \\ \text{mit } I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} \\ \text{und } \mu = \frac{I_y}{I_x} \end{array} \right\} \quad (242)$$

Praktisch schwierig ist hier, dass zur Lösung der Gleichungen ein strudelfreies Geschwindigkeitsfeld als Anfangsbedingung bekannt sein muss. Erläutert wird dies anhand der Abb. 78. Geschlossene Trajektorien (Wirbel) sind zulässig, jedoch keine Trajektorien, die nur als Grenzzustand eine geschlossene Trajektorie besitzen. Bei letzteren würde im zweidimensionalen Modell die Kontinuitätsbedingung verletzt.



Abbildung 78: Um die Flachwassergleichungen (231) und (242) auf Charakteristiken in zwei Raumdimensionen zu lösen, muss ein strudelfreies Geschwindigkeitsfeld als Anfangsbedingung bekannt sein. In sich geschlossene Trajektorien sind zulässig, jedoch keine, die asymptotisch in solche laufen.

Damit sich aus den Charakteristiken $\frac{dx}{dt} = v \pm c$ durch Integration ein Ort x in stetiger Abhängigkeit von der Zeit t bestimmen lässt, müssen v und c , also v und h (Lebesgue-) integrierbar sein. Ein schwächerer Differentiationsbegriff als die Absolutstetigkeit macht für die Gleichung der Charakteristiken daher wenig Sinn, allenfalls noch ein solcher, nach dem sich der Ort x in t so ergibt, dass kompakte Zeitintervalle surjektiv auf kompakte Ortsintervalle abgebildet werden.

Hingegen lässt sich die auf den Charakteristiken zu erfüllende Differentialgleichung durchaus unter einem allgemeineren Ableitungsbegriff betrachten, solange sich integrierbare Lösungen ergeben. Wird aus physikalischen Gründen davon ausgegangen, dass der Term $I - I_F$ beschränkt ist, gibt der Sobolev-Raum $W^{1,1}$ einen sinnvollen Lösungsraum unter Verwendung der Distributionsableitung.

A.2 Stationär-oszillatorische Lösungen der Flachwassergleichungen

Offene Gerinne verhalten sich hydraulisch stationär, wenn der mittlere Fluss Q zu jeder Zeit in jedem Fließquerschnitt konstant ist. In eindimensionaler Betrachtung verschwinden demnach die Zeitableitungen des (querschnittsgemittelten) Wasserstandes h und der sowohl tiefen- als auch querschnittsgemittelten Fließgeschwindigkeit v . Stationär-oszillatorische Vorgänge lassen sich hingegen bei einer Betrachtung in zwei Raumdimensionen untersuchen. Wird Q in einem Gerinne der Breite b in x -Richtung gemessen, gilt demnach

$$Q = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} h v_x dy \quad (243)$$

$$= \int_{-\sigma}^{\sigma} h \frac{v}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{dy}{ds} ds$$

$$\stackrel{(238)}{=} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\mu h v ds}{1+\mu^2} \quad (244)$$

mit $\sigma =$ Bogenlänge der Kurve von Gerinnemitte bis zum Rand

mit der Kurvenparametrisierung aus (239). Nicht erfüllen lässt sich (244), falls \vec{v} konstant in x -Richtung ($\mu = 0$) oder in y -Richtung ($|\mu| = \infty$) verläuft.

Periodisch-oszillatorische Vorgänge mit einer in y -Richtung konstanten Wanderungsgeschwindigkeit $c_y = \frac{\mu c_s}{\sqrt{1+\mu^2}}$ lassen sich beschreiben, indem die Zeit t durch den reduzierten Ort s über $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c_s}$ eliminiert wird. Man ersetzt $\frac{\partial}{\partial t} = c_s \frac{d}{ds}$ und erhält so die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial s} + h \frac{\partial v}{\partial s}$$

$$= (v + c_s) \frac{dh}{ds} + h \frac{dv}{ds}. \quad (245)$$

Aus (245) ergibt sich

$$\frac{dv}{dh} = -\frac{v + c_s}{h} \quad \text{integriert zu} \quad (246)$$

$$v(h) = \frac{q_s}{h} - c_s \quad \text{mit einer Konstanten } q_s. \quad (247)$$

Die Konstante q_s kann hierbei zunächst von der gewählten Kurve abhängen. In (244) lässt sich v durch (247) eliminieren zu

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\mu(q_s - hc_s) ds}{1 + \mu^2} \\ &= \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\mu q_s ds}{1 + \mu^2} - c_s \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\mu h ds}{1 + \mu^2} \end{aligned} \quad (248)$$

Ist μ konstant in s , gilt $\sigma = \frac{b}{2\mu} \sqrt{1 + \mu^2}$. Die gewählte Kurve ist eine Gerade und hängt von μ ab. Somit kann auch q_s von μ abhängen. (248) ergibt speziell

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\mu}{1 + \mu^2} \left(2\sigma q_s - c_s \int_{-\sigma}^{\sigma} h ds \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left(bq_s - c_s \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} h dy' \right) \quad \text{mit } y' = \frac{s}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2} \\ &= \frac{bq_s}{\sqrt{1 + \mu^2}} - \frac{c_y}{\mu} A \quad (A \text{ Fließquerschnittsfläche}) \end{aligned} \quad (249)$$

$$\Leftrightarrow q_s = \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{b} \left(Q + \frac{c_y}{\mu} A \right) \quad (250)$$

Aus (247) folgt somit für konstante μ

$$v(h) = \sqrt{1 + \mu^2} \left[\frac{Q}{bh} + \frac{c_y}{\mu} \left(\frac{A}{bh} - 1 \right) \right] \quad (251)$$

Offenbar entartet (251) für $h(y) = \text{const}$ (Rechteckquerprofil) in die Kontinuitätsgleichung für den eindimensionalen Fall.

Die Impulsgleichung lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(I - I_F) &= \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{g} \frac{\partial h}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} \\ &= (v + c_s) \frac{dv}{ds} + \mathbf{g} \frac{dh}{ds}. \end{aligned} \quad (252)$$

Verschwindet $I - I_F$, sind v und h notwendig konstant; denn sonst müssten sowohl $v + c_s$ als auch h selbst verschwinden. Also müssen Quell- und Senkterm näher betrachtet werden. Gilt ein quadratisches Fließgesetz, setzt man $I_F = \frac{\lambda v^2}{8\mathbf{g}h}$. Mit (245) lässt sich $\frac{dv}{ds}$ eliminieren; so folgt aus (252) zunächst

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \left(I - \frac{\lambda v^2}{8\mathbf{g}h} \right) &= \left(\mathbf{g} - \frac{(v + c_s)^2}{h} \right) \frac{dh}{ds} \\ \Leftrightarrow \quad I - \frac{\lambda v^2}{8\mathbf{g}h} &= \left(1 - \frac{(v + c_s)^2}{\mathbf{g}h} \right) \frac{dh}{ds} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{ds} &= \frac{\mathbf{g}h \left(I - \frac{\lambda v^2}{8\mathbf{g}h} \right)}{\mathbf{g}h - (v + c_s)^2} \\ &= \frac{\mathbf{g}h \left(I - \frac{\lambda \left(\frac{q_s}{h} - c_s \right)^2}{8\mathbf{g}h} \right)}{\mathbf{g}h - \left(\frac{q_s}{h} \right)^2} \\ &= \frac{\mathbf{g}h^3 I - (\lambda/8)(q_s - hc_s)^2}{\mathbf{g}h^3 - q_s^2}. \end{aligned} \quad (253)$$

Im Fall in s konstanter μ gilt mit (250) speziell

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= \frac{\mathbf{g}h^3 I - (\lambda/8) \left[\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{b} \left(Q + \frac{c_y}{\mu} A \right) - hc_y \sqrt{1+\mu^2} \right]^2}{\mathbf{g}h^3 - \frac{1+\mu^2}{b^2} \left(Q + \frac{c_y}{\mu} A \right)^2} \\ &= \frac{\mathbf{g}b^2 h^3 I - (\lambda/8)(1+\mu^2) [\mu Q + c_y A - \mu b h c_y]^2}{\mu \mathbf{g} b^2 h^3 - (1+\mu^2)(\mu Q + c_y A)^2} \\ &= \frac{\mathbf{g}b^2 h^3 I - (\lambda/8)(1+\mu^2) [\mu Q + c_y (A - \mu b h)]^2}{\mu \mathbf{g} b^2 h^3 - (1+\mu^2)(\mu Q + c_y A)^2}. \end{aligned} \quad (254)$$

Im Fall in s konstanter μ oder in s konstanter q_s auch im Fall nicht konstanter μ ergeben sich bei konstanten Gefällen I in Richtung der vorab gewählten Integrationskurve mit der Bogenlänge s Gleichungen vom Typ Bresse. Nicht zu erwarten sind demnach oszillatorische Lösungen $h = h(s)$. Lösungen der separierbaren Differentialgleichungen (253) bzw. (254) gewinnt man in Form der Umkehrfunktion $s = s(h)$ als Integral aus

$$\frac{ds}{dh} = \frac{\mathbf{g}h^3 - q_s^2}{\mathbf{g}h^3 I - (\lambda/8)(q_s - hc_s)^2}, \quad (255)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{ds}{dh} = \frac{\mu \mathbf{g} b^2 h^3 - (1 + \mu^2)(\mu Q + c_y A)^2}{\mathbf{g} b^2 h^3 I - (\lambda/8)(1 + \mu^2)[\mu Q + c_y(A - \mu b h)]^2}. \quad (256)$$

Wenn $h = h(s)$ periodisch ist, ist die Umkehrfunktion $s = s(h)$ nur auf einem kompakten Intervall $H \subset \mathbb{R}$ definiert. Welche weiteren mathematischen Eigenschaften der Funktion $h = h(s)$, ihrer Ableitung $\frac{dh}{ds}$, ihrer Umkehrfunktion $s = s(h)$ und derer Ableitung $\frac{ds}{dh}$ ergeben sich notwendig aus einer, welche sind hinreichend für eine Periodizität einer mindestens einmal differenzierbaren Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Es gebe ein $\Sigma \neq 0$ so, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ gelte $h(s) = h(s + \Sigma)$, d. h. h sei periodisch mit Periode $|\Sigma|$. Folglich sind auch alle existierenden n -ten Ableitungen $h^{(n)}$ für $n \in \mathbb{N}$ von h periodisch mit Periode $|\Sigma|$. Wähle $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit dem Satz von Rolle folgt:

Soweit für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ $h^{(n)}$ dem offenen Intervall $]s; s + |\Sigma|[$ existiert, gibt es ein $\sigma_n \in]s; s + |\Sigma|[$ mit $h^{(n)}(\sigma_n) = 0$.

Sei $\check{S} := \left] -\frac{|\Sigma|}{2}; \frac{|\Sigma|}{2} \right]$. h wird als mindestens einmal differenzierbar vorausgesetzt. Demnach gibt es insbesondere ein $\sigma_0 \in \check{S}$ mit $\frac{dh}{ds}(\sigma_0) = 0$.

Sei $\bar{S} := \left[-\frac{|\Sigma|}{2}; \frac{|\Sigma|}{2} \right]$. Da h insbesondere stetig ist, gibt es zwei Punkte $\sigma_1, \sigma_2 \in \bar{S}$, in denen h auf S jeweils ein Maximum bzw. Minimum annimmt. Aus der Periodizität folgt, dass es sich hierbei, selbst wenn es sich zugleich um Randextrema handelt, relative Extrema vorliegen. Ist, wie gefordert, h insbesondere auf \bar{S} differenzierbar, so liegen in σ_1 und σ_2 waagrechte Tangenten vor; d. h. es gilt $\frac{dh}{ds}(\sigma_1) = 0 = \frac{dh}{ds}(\sigma_2)$.

Ist o. B. d. A. $\sigma_1 = -\frac{|\Sigma|}{2}$ (durch Verkettung von h mit einer geeigneten Translation ist das möglich, ohne die Eigenschaften von h zu beeinträchtigen.) so ist $h\left(\frac{|\Sigma|}{2}\right) = h(\sigma_1)$.

Also wird an beiden Grenzen von \bar{S} das gleiche relative Extrem (Maximum oder Minimum) durch h angenommen. σ_2 muss notwendig im Inneren von S liegen, d. h. $\sigma_2 \in \check{S}$. Ob $\sigma_2 = \sigma_0$ gilt, ist damit nicht geklärt. Ist h symmetrisch, so gilt $\sigma_2 = 0$ und es können durchaus in \check{S} noch genau zwei Sattelpunkte auftreten, an denen $\frac{dh}{ds}$ verschwindet.

Werden in den lokalen Extrema σ_1 und/oder σ_2 Singularitäten der Ableitung $\frac{dh}{ds}$ zugelassen, so muss an diesen das Vorzeichen der Ableitung wechseln.

Lässt sich h auf dem Intervall zwischen σ_1 und σ_2 umkehren, — Strenge Monotonie auf diesem Abschnitt ist neben der Stetigkeit hierzu notwendige und hinreichende Voraussetzung. — so hat die Ableitung g der Umkehrfunktion zu h jeweils in den Punkten $h(\sigma_1)$ bzw. $h(\sigma_2)$ eine *integrierbare Singularität*, in denen h im jeweiligen Extrem (mit waagrechter) Tangente differenzierbar ist.

Bezogen auf (255) bzw. (256) bedeutet das: Zwei integrierbare Singularitäten der jeweiligen Terme für $\frac{ds}{dh}$ sind notwendig für die Existenz eines durchweg differenzierbaren periodischen h . Ein hinreichendes Kriterium gibt

Satz 1 Sei $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ mit $h_2 > h_1$, $H := [h_1; h_2]$ und $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Es gelte $g(h) > 0$ oder $g(h) < 0$ für $h \in H$ fast überall und $|g(h)| \rightarrow \infty$ für $h \searrow h_1$ und für $h \nearrow h_2$. Sei $h_f \in]h_1; h_2[$. Dann wird durch

$$G(h) := \int_{h_f}^h g(h') dh' \quad (257)$$

eine absolutstetige streng monotone Funktion $G : H \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt, deren Umkehrfunktion $G^{-1} : G(H) \rightarrow H$ sich zu einer absolutstetigen periodischen Funktion $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow H$ fortsetzen lässt.

Beweis. G ist nach Konstruktion absolutstetig. G ist insbesondere stetig; so gibt es ein kompaktes Intervall $S = [s_{\min}; s_{\max}]$, auf das G das kompakte Intervall H surjektiv abbildet.

Die strenge Monotonie von G ergibt sich aus $g > 0$ bzw. $g < 0$. So gilt o. B. d. A. $s_{\min} = G(h_1)$ und $s_{\max} = G(h_2)$.

Die Ableitung $\frac{dG}{dh}$ existiert fast überall mit $\frac{dG}{dh} = g$. Für die dank der strengen Monotonie von G auf $S = G(H)$ existierende Umkehrfunktion G^{-1} gibt es ebenfalls eine Ableitung $\frac{dG^{-1}}{ds}$ fast überall mit $\frac{dG^{-1}}{ds}(s) = \frac{1}{g(G^{-1}(s))}$ für fast alle $s \in S$. Da $G^{-1}(s_{\min}) = h_1$ und $G^{-1}(s_{\max}) = h_2$ ist, besitzt G^{-1} in s_{\min} und s_{\max} ein Minimum bzw. Maximum mit waagrechter Tangente. So wird die Fortsetzung von G^{-1} zu einer periodischen Funktion möglich.

Sei $\Sigma := s_{\max} - s_{\min}$. Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s < s_{\min}$ und $s_{\min} - s \leq \Sigma$ oder $s > s_{\max}$ und $s - s_{\max} \leq \Sigma$ setzt man zunächst

$$\bar{h}(s) := \begin{cases} G^{-1}(2s_{\min} - s) & \text{falls } s < s_{\min} \\ G^{-1}(2s_{\max} - s) & \text{falls } s > s_{\max} \end{cases}$$

und erhält so durch ‘Anknüpfen des Spiegelbildes’ eine Funktion $\bar{h}(s)$ auf dem Intervall $[s_{\min} - \Sigma; s_{\max} + \Sigma]$ mit der Intervalllänge 3Σ . Die Funktion $\bar{h}(s)$ umfasst bereits eine gesamte Periode. Durch $\tilde{h}(s) := \bar{h}(s \bmod 2\Sigma)$ wird sie zu einer periodischen Funktion $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow H$ fortgesetzt, die Gewünschtes leistet. \square

Die in h kubischen Polynome der Zähler und Nenner in (255) bzw. in (256) zerfallen in Linearfaktoren. Da Zähler und Nenner jeweils teilerfremd sind, besitzt $\frac{ds}{dh}$ eine, ggf. auch drei reelle Singularitäten in h . Ihre explizit geschlossene Darstellung ist jedoch nur über die Cardanische Lösungsformel möglich, wenn bereits gesichert ist, dass genau eine bzw. drei reelle Lösungen vorliegen.

Ist $(h_s - h)$ der bzw. ein reeller Linearfaktor des kubischen Nennerpolynoms, dann liegt mit einem in h konstanten h_s keine integrierbare Singularität der Funktion $\frac{ds}{dh}$ vor. Um doch eine integrierbare Singularität aus einem solchen Linearfaktor zu gewinnen, muss eine integrierbare Funktion $h_s = h_s(h)$ bestimmt werden, für die es ein $0 < \gamma < 1$, einen reellen Fixpunkt h_γ und eine offene Umgebung \check{H}_γ gibt so, dass für $h \in \check{H}_\gamma$ gilt

$$\boxed{|h_s(h) - h| \geq |h_\gamma - h|^\gamma .} \quad (258)$$

Natürlich müssen hierzu I und/oder λ in geeigneter Weise von h abhängen. Im Nenner des Quotienten der rechten Seite in (255) folgt durch Umformung des kubischen Polynoms $\mathbf{g}h^3I - \frac{\lambda}{8}(q_s - hc_s)^2 = \mathbf{g}Ih^3 - \frac{\lambda c_s^2}{8}h^2 + \frac{\lambda c_s q_s}{4}h + \frac{\lambda q_s^2}{8}$ mit den Sätzen für die Nullstellen h_1, h_2 und h_3

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{\lambda c_s^2}{8\mathbf{g}I} . \quad (259)$$

Die Imaginärteile zweier ggf. komplexer Nullstellen heben sich hierbei weg. Demnach gibt es für jede reelle Nullstelle h_s eine dimensionslose Konstante α_s so, dass $h_s = \frac{\alpha_s \lambda c_s^2}{8\mathbf{g}I}$ gilt.

Eine Funktion $h_s = h_s(h)$ liegt demnach dann vor, wenn der Quotient $\frac{\lambda}{I} = \left(\frac{\lambda}{I}\right)(h)$ eine Funktion in h ist. Integrierbare Singularitäten, gibt es also letztendlich dann, wenn es zu h_s eine konstante Länge h_α und ein $0 < \gamma < 1$ gibt so, dass

$$\left| h_\alpha \left(\frac{\lambda}{I}\right)(h) - h_s \right| \geq |h - h_s|^\gamma \quad (260)$$

gilt. Oszillatorische Lösungen zu (255) gibt es allerdings auch dann erst, wenn das Nennerpolynom mindestens *zwei* verschiedene reelle Nullstellen besitzt, die diese Voraussetzungen erfüllen.

Zusammenfassend erkennt man, dass in stationär-oszillatorischen Lösungen h der Flachwassergleichungen die Extrema, zwischen denen die Lösungen oszillieren, notwendig kritische Wasserstände sind. Der Quotient $\frac{\lambda}{I}$ ist hierbei direkt oder indirekt Funktion in h , die in Nähe kritischer Abflüsse einer speziellen Abschätzung nach unten genügen muss. In letzterem, indirekten Fall können λ und I als Funktion des Ortes durch ein festes Gerinne gegeben sein. Zu ersterem, den in dieser Arbeit interessanteren, direkten Fall führt ein ‘aktives’ Gerinne. Zum Beispiel durch eine bewegliche Sohle werden λ und I erst durch hydraulische Rückkopplung bestimmt.

A.3 Zur Klassifikation der Transport-Kontinuitätsgleichung (33)

In 3.2 wird erläutert, dass sich die Frachtrate $q_B^{I_1} = q_B^{I_1}(I_1, I_2)$ in Richtung des Gefälles I_1 in ein Produkt $G_{q_B}^{I_1}(I_1, I_2) = \bar{G}_{q_B}(I_1) G_{q_B}^\perp(I_2)$ zerlegen lässt. \bar{G}_{q_B} ist punkt-, $G_{q_B}^\perp$ achsensymmetrisch. Für die partiellen Ableitungen von G_{q_B} folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_1}(I_1, I_2) &= G_{q_B}^\perp(I_2) \frac{d\bar{G}_{q_B}}{dI}(I_1) \\ &= G_{q_B}^\perp(I_2) \frac{d\bar{G}_{q_B}}{dI}(-I_1) = \frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_1}(-I_1, I_2) \\ \frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_2}(I_1, -I_2) &= \bar{G}_{q_B}(I_1) \frac{dG_{q_B}^\perp}{dI}(-I_2) \\ &= -\bar{G}_{q_B}(I_1) \frac{dG_{q_B}^\perp}{dI}(I_2) = -\frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_2}(I_1, I_2) \end{aligned} \right\} \quad (261)$$

Nach der verallgemeinerten Kettenregel ergibt (33) so

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial q_B^x}{\partial x} + \frac{\partial q_B^y}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_1}(I_x, I_y) \frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_2}(I_x, I_y) \frac{\partial I_y}{\partial x} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_1}(I_y, I_x) \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_2}(I_y, I_x) \frac{\partial I_x}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_1}(-I_x, -I_y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_1}(-I_y, -I_x) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &+ \left(\frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_2}(-I_x, -I_y) + \frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_2}(-I_y, -I_x) \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ &= -\frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_1} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_1} \left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &+ \left[\frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial G_{q_B}}{\partial I_2} \left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ &= -\underbrace{G_{q_B}^\perp \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{d\bar{G}_{q_B}}{dI} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}_A \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \underbrace{G_{q_B}^\perp \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \frac{d\bar{G}_{q_B}}{dI} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}_\Gamma \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &+ \underbrace{\left[\bar{G}_{q_B} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \frac{dG_{q_B}^\perp}{dI} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \bar{G}_{q_B} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{dG_{q_B}^\perp}{dI} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right]}_B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad (262) \end{aligned}$$

also die in 3.2 diskutierte, im linearen Fall parabolische Gleichung (38).

B Die stationäre Spiegellinie im Laborversuch am Beispiel einer rauhen Rampe

Der Nullpunkt des im Laborversuch festgelegten Längskoordinatensystems in Fließrichtung liegt am oberen Knickpunkt der Rampe (Abb. 10, vgl. auch [52] 4.3 S. 13 mit Abb. 16). Um symmetrische hydraulische Zustände zu untersuchen, wird der Nullpunkt um 300 cm in die Rampenmitte nach vorne verschoben. Tabelle 11 gibt die ursprünglichen und bezüglich des verschobenen Nullpunktes neuen Koordinaten der Pegel. Um die Integrale in (25) zu berechnen, müssen jedoch obendrein die nicht völlig äquidistanten Positionen korrigiert werden. Hierzu nun Tabelle 11:

Tabelle 11: Pegelpositionen

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P'3	P'4
cm ab Oberkante Rampe	-480	-260	-40	618	840	1050	-40	618
cm ab Mitte der Rampe	-780	-560	-340	318	540	750	-340	318
äquidistante Näherung	-765	-550	-330	330	550	765	-330	330

Aus (11) lässt sich bei bekanntem Rinnenquerschnittsprofil zu gegebenem Abfluss Q die kritische Wassertiefe h_g bestimmen, bei der $F_r = 1$ gilt. Für Rechteckgerinne folgt aus $A = bh$ sofort

$$h_g = \sqrt[3]{\frac{1}{g} \left(\frac{Q}{b}\right)^2} \quad (263)$$

([39] 3.4.2.1 (71) S. 55, hier ohne Korrekturfaktor α). In der Trapezrinne des Modellversuchs ergibt sich bei einem Böschungswinkel von 45° die Fließquerschnittsfläche $A = h(b + h)$. So ergibt sich die h_g als Lösung der Gleichung 5. Ordnung

$$h^5 + 2bh^4 + b^2h^3 - \frac{Q^2}{g} = 0 \quad (264)$$

(äquivalent hierzu [39] 3.4.2.1 (77) S. 56 im Fall $m = n$). Für die Abflüsse in den Versuchsreihen 5 — 8 ergeben sich so kritische Wassertiefen nach

Tabelle 12: kritische Wassertiefen h_g in cm zu den Abflüssen in den Versuchsreihen 5 — 8

Q [cm ³ /s]	nach (263)	nach (264)
5000	1,2828	1,2720
17000	2,8983	2,8493
26000	3,8474	3,7621
51000	6,0288	5,8249
52000	6,1073	5,8983
53000	6,1854	5,9712
102000	9,5701	9,0773
104000	9,6948	9,1898
105000	9,7568	9,2457
168000	13,3471	12,4279
169000	13,4000	12,4740
173000	13,6107	12,6574
214000	15,6840	14,4485
255000	17,6282	16,0943

Hier zeigen sich bei der Berechnung nach einem Rechteckprofil aus der geschlossenen Formel (263) Fehler zwischen ca. 1% bei niedrigen und ca. 6% bei hohen Abflüssen gegen über der numerischen Nullstellensuche in (264). Von den im folgenden tabellierten Wasserständen sind zur Rampenmitte annähernd symmetrische Pegel *kursiv* gesetzt. Verhalten sich alle Pegel symmetrisch, auch die zugehörige Versuchsnummer. Die erste Ziffer dieser Nummer ist die Versuchsreihe.

Tabelle 13: Versuchsreihe 5, Neigung der Rampe: 1:30 ($I_r \approx 0,033$)

VNr	Q	h_g	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P'3	P'4
502	5	1,3	<i>2,9</i>	<i>2,7</i>	<i>2,3</i>	<i>2,2</i>	<i>2,5</i>	<i>2,8</i>	2,3	1,9
503	17	2,8	<i>5,1</i>	<i>4,7</i>	<i>4,1</i>	<i>4,2</i>	<i>4,4</i>	<i>4,5</i>	4,0	3,6
504	26	3,8	6,3	5,8	5,1	7,0	5,8	5,6	5,0	6,3
505	52	5,9	8,9	8,0	7,3	9,8	8,3	7,6	7,8	9,7
506	102	9,0	13,0	10,9	11,6	10,4	11,9	10,9	12,7	10,3
507	169	12,5	17,4	15,3	16,0	15,7	16,2	15,2	26,5	15,4
508	255	16,1	21,4	18,6	19,0	23,7	20,3	18,0	35,6	23,7

Aus einer Symmetrie der Pegelstände P1 — P3 zu P4 — P6 darf nicht generell auf eine Symmetrie des Abschnitts der Spiegellinie von P1 bis P3 zu dem Abschnitt von P4 bis P6 an sich geschlossen werden! In den Versuchen 502 und 503 wird zwischen keinen Pegelquerschnitten h_g unterschritten (Grafik mit Froude-Zahlen in [52] Anlage 33, 8-3(2) unten). So ist die Spiegellinie hier in beiden Abschnitten stetig. Weiter verläuft sie in beiden Abschnitten bei konstantem λ glatt und monoton. Für eine Symmetrie reicht das jedoch nicht hin. Sie widerspräche auch (31). Doch verhalten sich quadratische Interpolationskurven der Spiegellinie zwischen P1 und P3 und zwischen P4 und P6 hier symmetrisch. (Abb. 79 oben)

Tabelle 14: Versuchsreihe 6, Neigung der Rampe: 1:20 ($I_r = 0,05$)

VNr	Q	h_g	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P'3	P'4
602	5	1,3	2,0	1,9	0,7	1,0	2,1	2,2	1,4	0,9
603	17	2,8	3,9	3,6	2,0	4,6	5,3	5,7	1,4	4,5
604	26	3,8	5,0	4,3	2,9	4,5	5,1	5,4	4,0	4,5
605	51	5,8	7,4	6,5	5,6	8,1	7,4	7,4	7,4	8,2
606	105	9,2	11,8	9,7	11,0	12,3	12,7	11,6	4,2	12,3
607	168	12,4	16,0	13,6	16,1	15,7	16,0	16,4	18,9	17,1
608	214	14,4	18,0	15,7	19,2	18,7	15,8	16,1	36,2	18,8

Hingegen zeigen die Versuche Nr. 702 und 704 aus der im folgenden tabellierten 7. Versuchsreihe ebenfalls zur Rampenmitte annähernd symmetrische Pegelstände. Doch wird jeweils zwischen P2 und P3 die kritische Wassertiefe h_g stetig unterschritten. Zwischen P4 und P5 liegt daher ein Wechselsprung (Grafik mit Froude-Zahlen in [52] Anlage 37, 8-3(2) unten). Die Spiegellinie an sich ist daher nicht annähernd symmetrisch! (Abb. 79 unten) Laut Abschlussbericht ([52] 8.2.1 S. 42) beobachtet worden ist ein Wechselsprung hinter der Rampe in Versuch Nr. 706.

Tabelle 15: Versuchsreihe 7, Neigung der Rampe: 1:15 ($I_r \approx 0,067$)

VNr	Q	h_g	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P'3	P'4
702	5	1,3	2,0	2,2	0,5	0,8	2,1	2,4	0,7	0,8
703	17	2,8	4,3	4,6	2,0	2,2	5,7	6,1	2,2	2,1
704	26	3,8	5,0	5,2	2,9	2,8	5,6	6,3	2,9	3,0
705	53	6,0	7,2	6,4	5,8	4,0	7,5	8,2	7,2	3,8
706	104	9,1	11,5	9,7	10,4	9,4	13,2	12,3	13,7	9,3
707	173	12,7	15,7	14,0	7,0	17,6	19,0	18,9	25,6	11,5

In Versuch Nr. 805 aus der 8. Versuchsreihe stellt sich auch über einer steilen Rampe dank eines höheren Abflusses eine Spiegellinie mit stetigen, symmetrisch interpolierbaren Abschnitten von P1 – P3 zu P4 — P6 ein.

Tabelle 16: Versuchsreihe 8, Neigung der Rampe: 1:10 ($I_r = 0,1$)

VNr	Q	h_g	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P'3	P'4
802	5	1,3	1,8	2,2	2,1	0,9	2,9	3,5	2,4	0,9
803	17	2,8	4,0	4,4	3,9	2,6	4,2	4,5	4,0	2,5
804	26	3,8	5,1	5,5	4,7	3,8	6,2	6,6	4,7	4,1
805	52	5,9	7,6	7,9	6,5	6,4	7,6	7,5	7,9	6,2
806	104	9,1	11,0	9,9	2,9	13,4	12,3	11,7	6,3	13,3

Für (25) in 2.3 wird nur gefordert, dass die hydraulischen Zustände an den Orten x und $-x$ gleich sind. Was 'dazwischen' passiert interessiert nicht. Seien nun $-x_r = -330$ cm und $x_r = 330$ cm aus Tabelle 11 näherungsweise die Koordinaten der Pegel P3 bzw. P4 in Nähe der Rampenober- bzw. der Rampenunterkante bezüglich eines Nullpunktes in der Rampenmitte.

Die Integrale in (25) lassen sich so in Teilintegrale zerlegen:

$$\int_{-x}^x h I dx' = I \int_{-x}^{-x_r} h dx' + I_r \int_{-x_r}^{x_r} h dx' + I \int_{x_r}^x h dx' \quad (265)$$

$$\frac{b_0 h_g^3}{8} \int_{-x}^x \frac{\lambda dx'}{b h^2} = \frac{h_g^3}{8} \int_{-x}^x \frac{\lambda dx'}{h^2}$$

$$= \frac{h_g^3}{8} \left(\lambda \int_{-x}^{-x_r} \frac{dx'}{h^2} + \lambda_r \int_{-x_r}^{x_r} \frac{dx'}{h^2} + \lambda \int_{x_r}^x \frac{dx'}{h^2} \right) \quad (266)$$

Bei den Versuchen Nr. 502, 503, 604, 702, 805 sind die Pegel in P3 bzw. P3' und P4 bzw. P4' annähernd gleich. Da sich diese Querschnitte nahe an der Rampenober- bzw. -unterkante befinden, darf so davon ausgegangen werden, dass die hydraulischen Zustände in $-x_r$ und x_r gleich sind. So folgt aus (25)

$$I_r \int_{-x_r}^{x_r} h dx' = \frac{\lambda_r h_g^3}{8} \int_{-x_r}^{x_r} \frac{dx'}{h^2}. \quad (267)$$

und weiter

$$I \left(\int_{-x}^{-x_r} h dx' + \int_{x_r}^{-x} h dx' \right) = \frac{\lambda h_g^3}{8} \left(\int_{-x}^{-x_r} \frac{dx'}{h^2} + \int_{x_r}^x \frac{dx'}{h^2} \right). \quad (268)$$

Die Integrale in (268) lassen sich aus den Pegelständen P1, P2, P3/P3' bzw. P4/P4', P5, P6 näherungsweise berechnen. Für eine geeignete Quadraturformel muss jedoch darauf geachtet werden, dass die Spiegellinie im Auslauf ggf. nicht stetig ist. Die 'Keplersche Fassregel' (Interpolation eines stetigen Integranden durch eine quadratische Funktion) ist dann unbrauchbar! Falls der Abschnitt der Spiegellinie zwischen P4 und P6 stetig verläuft, ist die quadratische Interpolation dieses Abschnitts das Spiegelbild der Interpolation des Abschnittes zwischen P1 und P3, wie bereits zuvor erläutert wurde. Bei den Versuchen Nr. 502, 503, 604, 805 darf von solchen Symmetrieeigenschaften ausgegangen werden.

Für $-x = -765$ cm und $x = 765$ cm ergeben sich so die Integrale $\pm \int_{\mp x}^{\mp x_r} h dx'$ und $\pm \int_{\mp x_r}^{\mp x} \frac{dx'}{h^2}$ numerisch durch quadratische Interpolation nach Tabelle 17. Da das Gefälle $I = 0,002$ der Vor- und Nachlaufstrecke, sowie für jeden Versuch die Kritische Wassertiefe h_g nach Tabelle 12 bekannt sind, lässt sich zu jedem Versuch mit (268) ein Widerstandsbeiwert λ für die Vor- und Nachlaufstrecke berechnen.

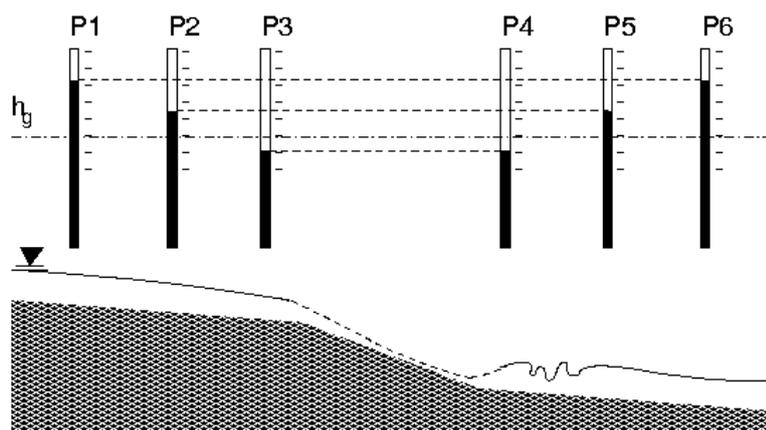
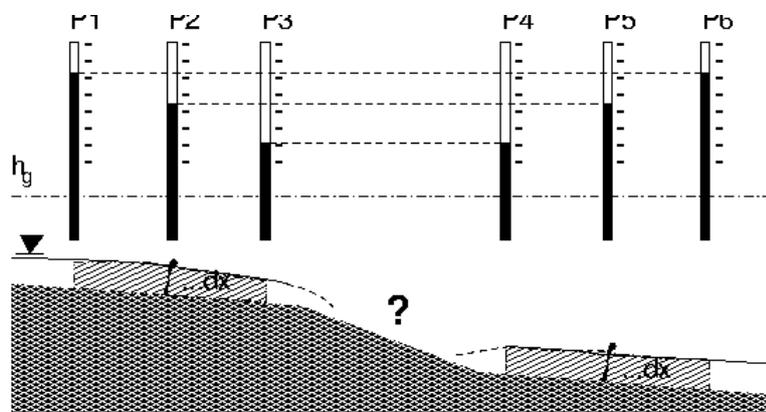


Abbildung 79: Symmetrie der Pegel: Aus symmetrischen Pegelständen darf nicht generell auf einander spiegelbildliche Abschnitte der Spiegellinie zwischen den Pegeln geschlossen werden. *Oben:* Die Situation in den Versuchen Nr. 502, 503, 604, 805. Hier werden an den Pegeln nur überkritische Wasserstände gemessen. Hier verläuft die Spiegellinie zwischen P1 und P3 sowie zwischen P4 und P6 stetig. Um λ zu nach (268) ermitteln, darf mittels Interpolation integriert werden. Was auf der Rampe selbst passiert bleibt allerdings unklar. *Unten:* Bei den Versuchen Nr. 702 und 704 wird der Abfluss im Vorlauf bereits so beschleunigt, dass zwischen P2 und P3 der kritische Wasserstand unterschritten wird. Das Wasser schießt in die Rampe. ‘Symmetrisch’ hierzu wird der Wasserstand erst zwischen P4 und P5 wieder überkritisch — mit einem Wechselsprung. Im eindimensionalen Modell sind Wechselsprünge unstetig. Ohne dass die Lage des Wechselsprunges bekannt wäre, kann hier nicht integriert werden. Doch klar ist, dass hier über der Rampe nur ein schießender Fließzustand bei unterkritischen Wasserständen herrscht.

h_1 bezeichne im folgenden den Wasserstand am Pegel P1, h_2 den an P2 u.s.w. Aus der Keplerschen Fassregel folgt

$$\int_{-x}^{-x_r} h dx' \approx \frac{x - x_r}{6} (h_1 + 4h_2 + h_3) \quad (269)$$

$$\int_{x_r}^x h dx' \approx \frac{x - x_r}{6} (h_4 + 4h_5 + h_6) \quad (270)$$

$$\int_{-x}^{-x_r} \frac{dx'}{h^2} \approx \frac{x - x_r}{6} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} \right) \quad (271)$$

$$\int_{x_r}^x \frac{dx'}{h^2} \approx \frac{x - x_r}{6} \left(\frac{1}{h_4^2} + \frac{4}{h_5^2} + \frac{1}{h_6^2} \right) \quad (272)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \frac{8I}{h_g^3} \cdot \frac{h_1 + 4h_2 + h_3 + h_4 + 4h_5 + h_6}{\frac{1}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} + \frac{4}{h_5^2} + \frac{1}{h_6^2}} \\ &= \frac{1}{62,5h_g^3} \cdot \frac{h_1 + h_3 + 4(h_2 + h_5) + h_4 + h_6}{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_3^2} + 4\left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_5^2}\right) + \frac{1}{h_4^2} + \frac{1}{h_6^2}}. \end{aligned} \quad (273)$$

Aus dem quadratischen Widerstandsgesetz $8gr_H I_F = \lambda v^2$ und dem Manning-Strickler-Fließgesetz $v = k_s r_H^{2/3} \sqrt{I_F}$ ergeben sich der Strickler-Beiwert k_s abhängig von λ und dem hydraulischen Radius r_H sowie λ abhängig von k_s und r_H zu

$$k_s = r_H^{-1/6} \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad \lambda = \frac{8g}{k_s^2 r_H^{1/3}} \quad (274)$$

Die nicht-quadratischen Potenzgesetze (Manning-Strickler, Forchheimer) werden üblicherweise bei Normalabfluss validiert. Bei ungleichförmigem Abfluss ergeben sich aus einem konstanten Widerstandsbeiwert λ örtlich veränderliche Strickler-Beiwerte. In Tabelle 17 werden zwei aus λ errechnete Strickler-Beiwerte angegeben, ein Beiwert bezüglich des Mittels \bar{h} der Wasserstände an den Pegeln P1 bis P6 und ein weiterer bezüglich der kritischen Wassertiefe h_g . Um 'echte' Strickler-Beiwerte zu ungleichförmigem Abfluss zu erhalten, müsste bereits in 2.1 der Ansatz zu (3) modifiziert werden. In den Integralen würden gebrochene Potenzen von h auftreten.

In den Versuchen Nr. 604 und 805 bei höheren Abflüssen werden so realistische Werte für den Widerstandsbeiwert bestimmt. Hierzu die Grafik in Abb. 11 in 2.3. Zu den Versuchen Nr. 702 und 704 lässt sich trotz Symmetrie der Pegelstände der Widerstandsbeiwert λ mit (268) durch Integration nicht bestimmen, wenn nicht bekannt ist, wo im Nachlauf zwischen P4 und P5 der Wechselsprung liegt.

Tabelle 17: Integrale zu (268) durch quadratische Interpolation und daraus nach (273) bestimmte Widerstandsbeiwerte λ für die Vor- und Nachlaufstrecke. Strickler-Beiwerte aus λ bezüglich dem Pegelmittel \bar{h} und der kritischen Abflusstiefe h_g .

Vers.	$\pm \int_{\mp x_r}^{\mp x} h dx'$	$\pm \int_{\mp x_r}^{\mp x} \frac{dx'}{h^2}$	h_g^3	λ	\bar{h}	h_g	k_s bzgl. \bar{h}	k_s bzgl. h_g
Nr.	[cm ²]	[cm ⁻¹]	[cm ³]	—	[m]	[m]	[m ^{1/3} /s]	[m ^{1/3} /s]
502	1123,750	63,8243	2,1	0,1341	0,026	0,013	44,5	49,9
503	1968,375	21,4490	23,1	0,0636	0,045	0,028	58,9	63,7
604	2135,125	17,7606	53,2	0,0362	0,047	0,038	77,5	80,3
805	2277,000	7,8488	205,2	0,0326	0,073	0,059	76,0	78,6

Was lässt sich mit (268) zum Widerstandsbeiwert λ_r der Rampe sagen? Problematisch ist hier, dass außer $h(-x_r) \approx h(x)$ in Versuchen mit symmetrischen Pegelständen über die Spiegellinie über der Rampe nichts bekannt ist. Da die Rampe ein konstantes Gefälle hat, folgt aus der Bresse-Gleichung (31), entweder dass der Wasserstand streng monoton ist (d. h. streng wächst bzw. fällt) oder dass über der gesamten Rampe Normalabfluss vorliegt, wenn keine Fließwechsel auftreten. Ein streng monoton wachsender oder fallender Wasserstand über der Rampe widerspräche gleichen Pegeln in P3 und P4. Demnach stehen nur Normalabfluss oder Fließwechsel zur Diskussion. (Abb. 80) Beobachtet wird eher letzteres. Fließwechsel sind Zweck hydraulisch wirksamer Rampen ([52] 8.2 S. 37ff).

Läge Normalabfluss vor, dann ergäbe sich aus (30) $\lambda_r = 8I_r \left(\frac{h}{h_g} \right)^3$. Zu den Versuchen mit annähernd gleichen Pegeln h in P3 und P4 folgen Widerstandsbeiwerte λ_r nach Tabelle 18. Zunächst fallen die so ermittelten Widerstandsbeiwerte nicht, wie erwartet, generell mit wachsendem Abfluss. Vielmehr ergeben sich um eine Größenordnung kleinere λ_r bei schießendem Ein- und Auslauf. Die Widerstandsbeiwerte durchweg unter Annahme von Normalabfluss über der Rampe zu berechnen befriedigt somit nicht.

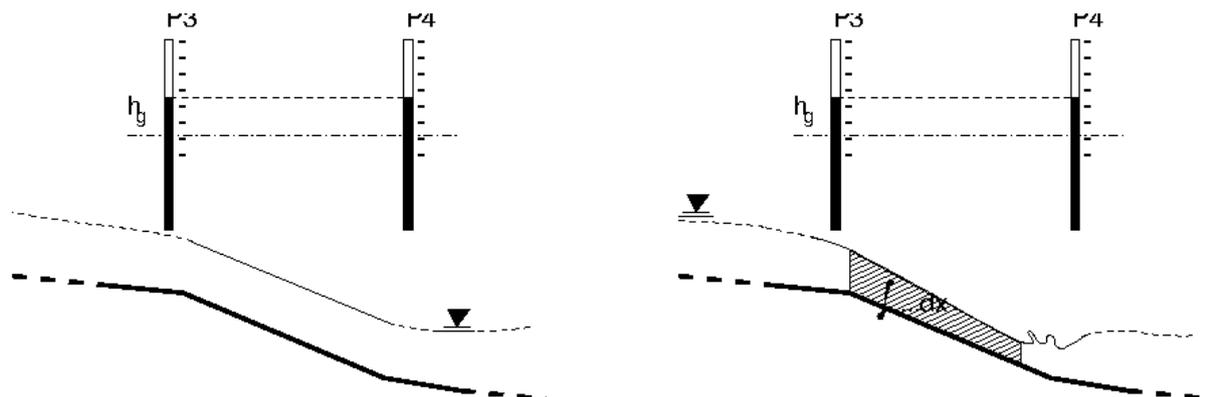


Abbildung 80: Mutmaßungen zur Spiegellinie über der Rampe: Da über der Rampe keine Messdaten zur Spiegellinie vorliegen, kann zu deren Verlauf nur im Rahmen dessen, was nach einem eindimensionalen hydromechanischen Modell bei einem konstanten Gefälle I_r und bei einem als konstant angenommenen Widerstandsbeiwert λ_r möglich ist, gemutmaßt werden. *Links*: Normalabfluss über der Rampe. Nahe liegt dieses Verhalten bei den Versuchen Nr. 702 und 704 mit schießendem Ein- und Auslauf. *Rechts*: Fließwechsel. Bei strömendem Ein- und Auslauf sind Fließwechsel über der Rampe nicht ausgeschlossen. Der Wechselsprung ereignet sich nahe der Unterkante. Um λ_r mit (267) grob zu bestimmen, lässt sich über den Abschnitt von P3 bis zu dem nahe der Rampenunterkante gelegenen Wechselsprung nach der Trapezregel integrieren. Unbekannt ist jedoch die genaue unterkritische Tiefe, die vor dem Wechselsprung erreicht wird! Hier kann ohne verlässliche Daten nur mit ihrer oberen Schranke, h_g selbst, gerechnet werden.

Tabelle 18: Widerstandsbeiwerte λ_r für die Rampe zu den Versuchen mit annähernd gleichen Pegeln in P3 und P4 bei Annahme von Normalabfluss über der Rampe, Strickler-Beiwerte nach (274).

Vers.	I_r	h_g	h	λ_r	k_s
Nr.	—	[cm]	[cm]	—	[m ^{1/3} /s]
502	0,033	1,3	2,3	1,48	13,7
503	0,033	2,8	4,1	0,84	16,5
507	0,033	12,5	15,8	0,54	19,1
602	0,050	1,3	0,9	0,09	64,7
604	0,050	3,8	4,5	0,44	22,4
607	0,050	12,4	15,9	0,56	16,1
702	0,067	1,3	0,7	0,04	101,3
703	0,067	2,8	2,1	0,11	50,9
704	0,067	3,8	2,8	0,11	48,5
805	0,100	5,9	6,4	0,34	24,0

Um den möglichen Fall, dass in den Versuchen Nr. 502, 503, 507, 604, 805 der Abfluss auf der Rampe hinter P3 kritisch wird, aber schon vor P4 wieder ein Wechselsprung eintritt (Abb. 80 rechts), zu untersuchen, sind weitere Daten zum Verlauf der Spiegellinie über der Rampe unerlässlich. Weil solche Daten fehlen, wird nur der Fall untersucht, dass der Abfluss unmittelbar vor der Rampenunterkante knapp unterkritisch wird. Die Deckwalze eines Wechselsprunges müsste dann allerdings an P3 bemerkbar werden. Die Integrale in (267) lassen sich aus Werten von $h(x')$ an nur zwei Stützstellen — davon einer mit seiner Stützstelle nur gemutmaß! — nach der Trapezregel berechnen. Die Stützstellen sind etwa (nur wenig kürzer als) $2x_r$ von einander entfernt. Die Wassertiefe fällt in besagten Versuchen von h in P3 auf — schätzungsweise! — h_g (nur wenig darunter!) ab. So folgt:

$$\int_{-x_r}^{x_r} h dx' \approx x_r(h + h_g) \quad (275)$$

$$\begin{aligned} \int_{-x_r}^{x_r} \frac{dx'}{h^2} &\approx x_r \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_g} \right) \\ &= \frac{x_r(h + h_g)}{h_g h} \end{aligned} \quad (276)$$

$$\lambda_r \approx 8I_r \frac{h}{h_g} \quad (277)$$

In Tabelle 19 finden sich so, im Vergleich zu den unter Annahme von Normalabfluss errechneten, weitaus stabilere Widerstandsbeiwerte für besagte Versuche mit $\lambda_r \approx 0,4$.

Tabelle 19: Widerstandsbeiwerte λ_r nach (277) für die Rampe zu den Versuchen mit annähernd gleichen Pegeln in P3 und P4 bei Annahme eines Wechselsprunges nach knappem Unterschreiten von h_g an der Unterkante. Strickler-Beiwerte aus λ bezüglich h in P3 und P4 sowie der kritischen Abflusstiefe h_g .

Vers.	I_r	h_g	h	λ_r	k_s bzgl. h	k_s bzgl. h_g
Nr.	—	[cm]	[cm]	—	[m ^{1/3} /s]	[m ^{1/3} /s]
502	0,033	1,3	2,3	0,47	24,2	26,6
503	0,033	2,8	4,1	0,39	24,2	25,7
507	0,033	12,5	15,8	0,33	21,0	21,8
604	0,050	3,8	4,5	0,34	25,5	26,2
607	0,050	12,4	15,9	0,51	16,9	17,6
805	0,100	5,9	6,4	0,43	21,4	21,7

Die für die Vor- und Nachlaufstrecke ermittelten Widerstandsbeiwerte aus Tabelle 17 sind um eine Zehnerpotenz kleiner. Insofern darf tatsächlich von einer ‘rauhem Rampe’ gesprochen werden! Ihre hydraulische Wirksamkeit liegt jedoch tatsächlich in den über ihr stattfindenden Fließwechseln.

C Heuristik zu analytischen Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen dieser Arbeit und Hilfsrechnungen

Soweit die Ergebnisse dieser Arbeit analytisch dargestellt werden, handelt es sich u. a. um Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Differentialgleichungen, die sich lösen lassen, indem ihre Differentiale getrennt werden, führen teils zu Integralen, die noch eine geschlossen darstellbare Stammfunktion besitzen. Um sie zu bestimmen, muss jedoch in vielen Teilschritten gerechnet werden. Soweit sich zu den Lösungen nicht bereits Hinweise in der hydromechanischen Literatur finden, werden die Lösungen bereits im Hauptteil dieser Arbeit verifiziert, indem sie in die jeweilige Differentialgleichung eingesetzt werden.

Umfangreichere Hilfsrechnungen zum Hauptteil dieser Arbeit sind ebenfalls in diesen Abschnitt ausgelagert worden. Hierbei handelt es sich um

- eine Untersuchung des Fehlers bei der Verwendung von Näherungen für das Sohlgefälle
- die Potenzreihenentwicklung für die stationär-ungleichförmige Spiegellinie im schubspannungsbestimmten Transportgleichgewicht bei konstanter Breite.
- eine gebrochen rationale Näherungslösung für diese Spiegellinie
- die rechnerische Herleitung des diffusiven Verhaltens des schubspannungsbestimmten, des advektiven Verhaltens des fließgeschwindigkeitsbestimmten Transports
- Hilfsrechnungen zur Herleitung der Gleichungen für stabile Sohlenquerprofile bei Kräftegleichgewichten unter Berücksichtigung der hier eingeführten effektiven Schubspannung.

C.1 Fehler bei der Linearisierung des Sohlgefälles

Als Gefälle I wird in dieser Arbeit der Sinus des lokalen Sohlneigungswinkels verwendet. So gilt nur bei kleinen Gefällen näherungsweise $I \approx -\frac{dz}{dx}$.

Äquivalent zu (8) ist die exakte Formel

$$I = -\frac{dz/dx}{\sqrt{1 + (dz/dx)^2}}. \quad (278)$$

Bei Approximation mit $I_{\sim} = -\frac{dz}{dx}$ ergibt sich der Fehler

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= I - I_{\sim} = \frac{I^2 - I_{\sim}^2}{I + I_{\sim}} = \frac{1}{I + I_{\sim}} \left(\frac{I_{\sim}^2}{1 + I_{\sim}^2} - I_{\sim}^2 \right) \\ &= \frac{I_{\sim}^2}{I + I_{\sim}} \left(\frac{1}{1 + I_{\sim}^2} - 1 \right) = -\frac{I_{\sim}^2}{I + I_{\sim}} \frac{I_{\sim}^2}{1 + I_{\sim}^2} \\ &= -\frac{I^2 I_{\sim}^2}{I + I_{\sim}} = -\frac{I^2 (I + \Delta_1)^2}{2I + \Delta_1} = -\frac{I^2 (I + \Delta_1)}{1 + \frac{I}{I + \Delta_1}} \\ &= -\frac{I^3}{1 + \frac{I}{I + \Delta_1}} - \frac{\Delta_1 I^2}{1 + \frac{I}{I + \Delta_1}} \rightarrow -\frac{I^3}{2} \end{aligned} \quad (279)$$

von dritter Ordnung in I . Nun stellt sich die Frage, ob I besser als durch $I \approx I_{\sim}$ approximiert werden kann, indem der Quadratwurzelterm $\sqrt{1 + (dz/dx)^2}$ in (278) linearisiert wird. Hierfür folgt näherungsweise

$$I_{\approx} = -\frac{dz/dx}{1 + (dz/dx)^2/2} = -\frac{2 dz/dx}{2 + (dz/dx)^2}. \quad (280)$$

Der Fehler Δ_2 ergibt sich hier mit

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= I - I_{\approx} = \frac{I^2 - I_{\approx}^2}{I + I_{\approx}} = \frac{1}{I + I_{\approx}} \left(\frac{I_{\approx}^2}{1 + I_{\approx}^2} - \frac{I_{\approx}^2}{(1 + I_{\approx}^2/2)^2} \right) \\ &= \frac{I_{\approx}^2}{I + I_{\approx}} \frac{(1 + I_{\approx}^2/2)^2 - (1 + I_{\approx}^2)}{(1 + I_{\approx}^2)(1 + I_{\approx}^2/2)^2} = \frac{I_{\approx}^2}{I + I_{\approx}} \frac{I_{\approx}^4}{4(1 + I_{\approx}^2)(1 + I_{\approx}^2/2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{I_{\approx}^2}{I + I_{\approx}} I_{\approx}^2 I_{\approx}^2 = \frac{I_{\approx}^2}{4} \frac{I_{\approx}^2 I_{\approx}^2}{I + I_{\approx}} = \frac{I_{\approx}^2}{4} \frac{I^2 (I + \Delta_2)^2}{2I + \Delta_2} \rightarrow -\frac{I^5}{8} \end{aligned} \quad (281)$$

von fünfter Ordnung. Doch auch hier ist $|\Delta_2| < I$ nur für $|I_{\sim}| = \left| \frac{dz}{dx} \right| < 1$. Im Fall $\left| \frac{dz}{dx} \right| > 1$ wächst er mit $\left| \frac{dz}{dx} \right|$ stärker als bei der Approximation von I durch $I_{\sim} = -\frac{dz}{dx}$.

Die Näherung (280) wird daher nur verwendet, um Untersuchungen unter der für die in natürlichen Fließgewässern und entsprechenden Versuchsmodellen beobachteten Gefälle noch ausreichenden Näherung $I \approx I_{\sim}$ zu verfeinern.

C.2 Die Lösung der Spiegelliniengleichung (31) von Bresse

Die Gleichung (31) von Bresse nimmt mit der Substitution $\xi = \frac{h}{h_n}$ und $\xi_g = \frac{h_g}{h_n}$ an die Form $h_n \frac{d\xi}{dx} = \frac{dh}{dx} = I_n \frac{\xi^3 - 1}{\xi^3 - \xi_g^3}$. Die Differentiale lassen sich trennen, da x in der rechten Seite nicht auftritt. So folgt

$$I_n \frac{x + x_0}{h_n} = \int \frac{\xi^3 - \xi_g^3}{\xi^3 - 1} d\xi = \int \left(1 + \frac{1 - \xi_g^3}{\xi^3 - 1} \right) d\xi = \xi + (1 - \xi_g^3) \int \frac{d\xi}{\xi^3 - 1} \quad (282)$$

$$= \xi + (1 - \xi_g^3) \int \frac{d\xi}{(\xi - 1)(\xi^2 + \xi + 1)}$$

$$= \xi + \frac{1 - \xi_g^3}{3} \left(\int \frac{d\xi}{\xi - 1} - \int \frac{\xi + 2}{\xi^2 + \xi + 1} d\xi \right) \quad \text{als Partialbruchzerlegung}$$

$$= \xi + \frac{1 - \xi_g^3}{3} \left(\int \frac{d\xi}{\xi - 1} - \int \frac{\xi + 1/2}{\xi^2 + \xi + 1} d\xi - \frac{3}{2} \int \frac{d\xi}{\xi^2 + \xi + 1} \right)$$

$$= \xi + \frac{1 - \xi_g^3}{3} \left(\log |\xi - 1| - \frac{\log(\xi^2 + \xi + 1)}{2} - \frac{3}{2} \int \frac{d\xi}{(\xi + 1/2)^2 + 3/4} \right)$$

$$= \xi + \frac{1 - \xi_g^3}{3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{(\xi - 1)^2}{\xi^2 + \xi + 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{3} \int \frac{d\xi}{1 + ((2/\sqrt{3})(\xi + 1/2))^2} \right)$$

$$= \xi + \frac{1 - \xi_g^3}{3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{(\xi - 1)^2}{\xi^2 + \xi + 1} - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{d\xi}{1 + u^2} \right)$$

$$= \xi + \frac{1 - \xi_g^3}{3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{(\xi - 1)^2}{\xi^2 + \xi + 1} \mp \sqrt{3} \begin{cases} \arctan u \\ \operatorname{arccot} u \end{cases} \right)$$

$$= \xi + \frac{1 - \xi_g^3}{3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{(\xi - 1)^2}{\xi^2 + \xi + 1} \mp \sqrt{3} \begin{cases} \arctan \\ \operatorname{arccot} \end{cases} \left(\frac{2\xi + 1}{\sqrt{3}} \right) \right) \quad (283)$$

$$= \xi - \frac{1 - \xi_g^3}{3} \left[\frac{1}{2} \log \frac{\xi^2 + \xi + 1}{(\xi - 1)^2} \pm \sqrt{3} \begin{cases} \arctan \\ \operatorname{arccot} \end{cases} \left(\frac{2\xi + 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (284)$$

$$= \xi - (1 - \xi_g^3) \left[\frac{1}{6} \log \frac{\xi^2 + \xi + 1}{(\xi - 1)^2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{cases} \arctan \\ \operatorname{arccot} \end{cases} \left(\frac{2\xi + 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (285)$$

Für das Integral $\int \frac{d\xi}{\xi^3 - 1}$ siehe [22], **4.2.6.1** 1. S. 151. Hier finden sich Terme, die unmittelbar von (282) auf (283) bzw. (284) führen. In der hydromechanischen Literatur ist hingegen die Form (285) üblich.

C.3 Integration von (85)

Die Differentialgleichung (65) für den Wasserstand h bei stationär-ungleichförmigem Abfluss und Transportgleichgewicht im Rechteckgerinne großer, konstanter Breite, nimmt durch die Substitution $h^* = \frac{h}{h_g}$ die Form (85) an. In letzter werden die Differentiale zu

$\frac{h^{*3} - 1}{h^{*'}h^{*2} - (\lambda/8)} dh^* = dx$ getrennt. So lässt sich integrieren zu

$$\begin{aligned} x + x_0 &= h_g \int \frac{h^{*3} - 1}{h^{*'}h^{*2} - (\lambda/8)} dh^* = h_g \left(\int \frac{h^{*3}}{h^{*'}h^{*2} - (\lambda/8)} dh^* - \int \frac{dh^*}{h^{*'}h^{*2} - (\lambda/8)} \right) \\ &= \frac{8h_g}{\lambda} \left(\int \frac{h^{*3}}{\Xi h^{*2} - 1} dh^* - \int \frac{dh^*}{\Xi h^{*2} - 1} \right) \quad \text{mit } \Xi = \frac{8h^{*'}}{\lambda} \end{aligned} \quad (286)$$

$$= \frac{8h_g}{\lambda\sqrt{\Xi}} \left(\frac{1}{\Xi^{3/2}} \int \frac{u^3 du}{u^2 - 1} - \int \frac{du}{u^2 - 1} \right) \quad \text{mit } u = h^* \sqrt{\Xi} \quad (287)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8h_g}{\sqrt{\lambda h^{*'}}} \left(\frac{1}{\Xi^{3/2}} \int \frac{u^2}{2} \cdot \frac{2u du}{u^2 - 1} + \operatorname{arctanh} u \right) \\ &= \frac{8h_g}{\sqrt{\lambda h^{*'}}} \left(\frac{1}{\Xi^{3/2}} \left(\frac{u^2}{2} \log |u^2 - 1| - \int u \log |u^2 - 1| du \right) + \operatorname{arctanh} u \right) \\ &= \frac{4h_g}{\sqrt{\lambda h^{*'}}} \left(\frac{u^2 \log |u^2 - 1| - (u^2 - 1)(\log |u^2 - 1| - 1)}{\Xi^{3/2}} + 2 \operatorname{arctanh} u \right) \\ &= \frac{4h_g}{\sqrt{\lambda h^{*'}}} \left(\frac{\log |u^2 - 1| + u^2 - 1}{\Xi^{3/2}} + 2 \operatorname{arctanh} u \right) \\ &= \frac{4h_g}{\sqrt{\lambda h^{*'}}} \left(\frac{u^2 - 1}{\Xi^{3/2}} + 2 \operatorname{arctanh} u + \frac{\log |u^2 - 1|}{\Xi^{3/2}} \right) \\ &= \frac{4h_g}{\sqrt{\lambda h^{*'}}} \left(\left(\frac{\lambda}{8h^{*'}} \right)^{3/2} (u^2 - 1) + 2 \operatorname{arctanh} u + \frac{\log |u^2 - 1|}{\Xi^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (288)$$

Wird in (288) für u wieder $h^* \sqrt{\Xi} = h^* \sqrt{\frac{8h^{*'}}{\lambda}}$ eingesetzt, ergibt sich (86). Offenbar gilt $\Xi = \chi^*$ in (286) wegen (88).

C.4 Integration von (129) für das stabile Querschnittsprofil

Nahe liegt der Gedanke, hier zunächst ein Randwertproblem zu stellen, und zwar

$$h\left(\pm\frac{b}{2}\right) = 0, \quad (289)$$

wobei b die Breite des Gerinnes auf Höhe des Wasserspiegels wäre. Alternativ hierzu wären aus Symmetriegründen aber auch die Bedingungen

$$h(0) = h_{\max} \quad (290)$$

$$\frac{dh}{dy}(0) = 0 \quad (291)$$

denkbar. Sie erlaubt auch Lösungen $h = h(y)$, nach denen das Gerinne an der Wasseroberfläche unendlich breit wäre. Hydromechanisch ist das zulässig, solange die Fließquerschnittsfläche

A , in diesem Fall mit $A = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) dy$ ein uneigentliches Integral, beschränkt ist.

In (129) lassen sich die Differentiale trennen:

$$\begin{aligned} y + y_0 &= \pm \int \frac{dh}{\sqrt{\left(\frac{h}{c_0}\right)^2 - 1}} \\ &= \pm c_0 \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \pm c_0 \int \frac{dz}{z} \quad \text{mit } z = u + \sqrt{u^2 - 1} \quad (292) \\ &= \pm c_0 \log |z| = \pm c_0 \log |u + \sqrt{u^2 - 1}| \\ &= \pm c_0 \log \left| \frac{h}{c_0} + \sqrt{\left(\frac{h}{c_0}\right)^2 - 1} \right| = \pm c_0 \operatorname{arccosh} \left(\frac{h}{c_0} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cosh \left(\mp \frac{y + y_0}{c_0} \right) = \frac{h}{c_0} \Leftrightarrow h = c_0 \cosh \left(\mp \frac{y + y_0}{c_0} \right)$$

mit (292) aus $dz = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \right) du = \frac{\sqrt{u^2 - 1} + u}{\sqrt{u^2 - 1}} du = z \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$.

C.5 Potenzreihenentwicklung zu (65) für die stationäre Spiegellinie im gekoppelten Transportgleichgewicht

Zunächst folgt mit der Substitution $z = u^2$ unter der Bedingung $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
 x + x_0 &= \frac{h_g}{2\lambda\sqrt{\chi^*}} \int \left(\frac{u^3}{\chi^{*3/2}} - 1 \right) \frac{du}{u^2 - 1} \\
 &= \frac{h_g}{2\lambda\sqrt{\chi^*}} \int \left(1 - \frac{u^3}{\chi^{*3/2}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n} du \\
 &= \frac{h_g}{2\lambda\sqrt{\chi^*}} \left(u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{\chi^{*3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n+4}}{2(2n+1)} \right) \\
 &= \frac{h_g}{2\lambda\sqrt{\chi^*}} \left(u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n+1} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{u^3}{2\chi^{*3/2}(n+2)} \right) \right) \quad (293)
 \end{aligned}$$

Sei $y = 2x^*\sqrt{\chi^*} - u_0$, so lässt sich also die Funktion $y = y(u) = y(h^*\sqrt{\chi^*})$ für $|u| < 1$ in eine Potenzreihe entwickeln zu

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n+1} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{u^3}{2\chi^{*3/2}(n+2)} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{u^3}{4\chi^{*3/2}} \right) u + \left(\frac{1}{3} - \frac{u^3}{6\chi^{*3/2}} \right) u^3 + \left(\frac{1}{5} - \frac{u^3}{8\chi^{*3/2}} \right) u^5 + \dots \\
 &= u + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4\chi^{*3/2}} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6\chi^{*3/2}} + \frac{u^7}{7} - \frac{u^8}{8\chi^{*3/2}} + \dots \\
 &= \gamma_1 u + \gamma_2 u^2 + \gamma_3 u^3 + \gamma_4 u^4 + \gamma_5 u^5 + \gamma_6 u^6 + \gamma_7 u^7 + \gamma_8 u^8 + \dots \quad (294)
 \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_4 = -\frac{1}{4\chi^{*3/2}}, \quad \gamma_5 = \frac{1}{5}, \quad \gamma_6 = -\frac{1}{6\chi^{*3/2}}, \\
 \gamma_7 &= \frac{1}{7}, \quad \gamma_8 = -\frac{1}{8\chi^{*3/2}}, \quad \vdots = \vdots.
 \end{aligned}$$

Für $0 < h^* < 1/\sqrt{\chi^*}$ lässt sich die Funktion $\lambda x^*(h^*)$ nach (93) umkehren, so auch $y(u) = (2\lambda x^*\sqrt{\chi^*})(h^*\sqrt{\chi^*})$ für $0 < u < 1$. Für die Umkehrfunktion $u = u(y)$ gibt es nach dem Satz von Cauchy über die Umkehrbarkeit von Potenzreihen eine Potenzreihenentwicklung

$$u(y) = \Gamma_1 y + \Gamma_2 y^2 + \Gamma_3 y^3 + \Gamma_4 y^4 + \Gamma_5 y^5 + \Gamma_6 y^6 + \Gamma_7 y^7 + \Gamma_8 y^8 + \dots$$

Die ersten sieben Koeffizienten $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_7$ berechnen sich zu ([10], 50. S. 15):

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \frac{1}{\gamma_1} = 1, \quad \Gamma_2 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1^3} = 0, \quad \Gamma_3 = \frac{2\gamma_2 - \gamma_1\gamma_3}{\gamma_1^5} = -\frac{\gamma_3}{\gamma_1^4} = -\gamma_3 = -\frac{1}{3}, \\ \Gamma_4 &= \frac{5\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1^2\gamma_4 - 5\gamma_2^3}{\gamma_1^7} = -\frac{\gamma_4}{\gamma_1^5} = -\gamma_4 = \frac{1}{4\chi^{*3/2}}, \\ \Gamma_5 &= \frac{6\gamma_1^2\gamma_2\gamma_4 + 3\gamma_1^2\gamma_3^2 + 14\gamma_2^4 - \gamma_1^3\gamma_5 - 21\gamma_1\gamma_2^2\gamma_3}{\gamma_1^9} = 3\gamma_3^2 - \gamma_5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}, \\ \Gamma_6 &= \frac{7\gamma_1^3\gamma_2\gamma_5 + 7\gamma_1^3\gamma_3\gamma_4 + 84\gamma_1\gamma_2^3\gamma_3 - \gamma_1^4\gamma_6 - 28\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_4 - 28\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3^2 - 42\gamma_2^5}{\gamma_1^{11}} \\ &= 7\gamma_3\gamma_4 - \gamma_6 = -\frac{7}{12\chi^{*3/2}} + \frac{1}{6\chi^{*3/2}} = -\frac{5}{12\chi^{*3/2}}, \\ \Gamma_7 &= \frac{1}{\gamma_1^{13}} (8\gamma_1^4\gamma_2\gamma_6 + 8\gamma_1^4\gamma_3\gamma_5 + 4\gamma_1^4\gamma_4^2 + 120\gamma_1^2\gamma_2^3\gamma_4 + 180\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2 \\ &\quad + 132\gamma_2^6 - \gamma_1^5\gamma_7 - 36\gamma_1^3\gamma_2^2\gamma_5 - 72\gamma_1^3\gamma_2\gamma_3\gamma_4 - 12\gamma_1^3\gamma_3^3 - 330\gamma_1\gamma_2^4\gamma_3) \\ &= 4(\gamma_3\gamma_5 + \gamma_4^2) - \gamma_7 - 12\gamma_3^4 \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{16\chi^{*3/2}} \right) - \frac{1}{7} - \frac{12}{27} = \frac{1}{4\chi^{*3/2}} - \frac{101}{315}.\end{aligned}$$

Zu der expliziten Berechnung weiterer Koeffizienten findet sich nur wenig Literatur aus den letzten Jahrzehnten des vorletzten und den ersten des letzten Jahrhunderts.

Am Ort $x = 0$ mit der kritischen Wassertiefe $h(0) = h_g$ gilt $y_0 = -u_0$. Demnach muss $u(y_0) = \sqrt{\chi^*}$ gelten. Also folgt:

$$\begin{aligned}\sqrt{\chi^*} &= -u_0 + \frac{u_0^3}{3} + \frac{u_0^4}{4\chi^{*3/2}} - \frac{2u_0^5}{15} - \frac{5u_0^6}{12\chi^{*3/2}} - \left(\frac{1}{4\chi^{*3/2}} - \frac{101}{315} \right) u_0^7 + \dots \quad (295) \\ &= u_0 \left(-1 + \frac{u_0^2}{3} + \frac{u_0^3}{4\chi^{*3/2}} - \frac{2u_0^4}{15} - \frac{5u_0^5}{12\chi^{*3/2}} - \left(\frac{1}{4\chi^{*3/2}} - \frac{101}{315} \right) u_0^6 + \dots \right)\end{aligned}$$

Durch Rückeinsetzen von $y = 2\lambda x^* \sqrt{\chi^*} - u_0$ und $u = h^* \sqrt{\chi^*}$ ergibt sich mit

$$u(y) = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4\chi^{*3/2}} + \frac{2y^5}{15} - \frac{5y^6}{12\chi^{*3/2}} + \left(\frac{1}{4\chi^{*3/2}} - \frac{101}{315} \right) y^7 + \dots \quad (296)$$

$$= y \left(1 - \frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{4\chi^{*3/2}} + \frac{2y^4}{15} - \frac{5y^5}{12\chi^{*3/2}} + \left(\frac{1}{4\chi^{*3/2}} - \frac{101}{315} \right) y^6 + \dots \right) \quad (297)$$

die Reihenentwicklung (101).

Leichter als in (101) lassen sich ihre Konvergenzeigenschaften in (296) und in (297) untersuchen, wo die Substitution noch beibehalten wird. Wird davon ausgegangen, dass die Absolutbeträge $|\Gamma_i|$ auch für die Koeffizienten Γ_i höherer Potenzen beschränkt sind, ist absolute Konvergenz der Potenzreihe für $|y| < 1$ gesichert. Wegen der Vorzeichenwechsel könnte Konvergenz auch unter weniger scharfen Voraussetzungen gegeben sein. Doch ohne eine allgemeine Vorschrift zur Bildung der Koeffizienten sind hier zu keine weiteren Aussagen möglich.

C.6 Gebrochen rationale Näherungslösung zu (65) für die stationäre Spiegellinie im gekoppelten Transportgleichgewicht

Eine gebrochen rationale Funktion ergibt sich aus dem Ansatz

$$\lambda x^*(h^*) = \alpha \left(\frac{h^* - 1}{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^n} \right)^\beta \quad (298)$$

für $n = 1/2$, $n = 1$ oder $n = 2$, damit allenfalls eine quadratische Gleichung zu lösen bleibt, um nach h^* aufzulösen. Einer Näherungslösung optimal angepasst werden sollen die Parameter α , β , γ und n . Zu (298) sind äquivalent

$$\frac{1}{\lambda x^*(h^*)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{h^* - 1}{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^n} \right)^{-\beta} \quad (299)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} x^* \right)^{\frac{1}{\beta}} = \frac{h^* - 1}{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^n}. \quad (300)$$

Indem (300) nach h^* differenziert wird, folgt

$$\begin{aligned} \beta \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} x^{*\frac{1}{\beta}-1} &= \frac{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^n - n(h^* - 1)(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^{n-1}}{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^{2n}} \cdot \frac{dh^*}{dx^*} \\ \stackrel{(299)}{\iff} \beta \left(\frac{\lambda}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} &\cdot \frac{h^* - 1}{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^n} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{h^* - 1}{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^n} \right)^{-\beta} \\ &= \frac{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^n - n(h^* - 1)(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^{n-1}}{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^{2n}} \cdot \frac{dh^*}{dx^*} \\ \iff \frac{dh^*}{dx^*} &= \frac{\alpha^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta \lambda^{\frac{1}{\beta}}} \cdot \frac{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^{n(\beta+1)} (h^* - 1)^{1-\beta}}{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^n - n(h^* - 1)(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^{n-1}} \end{aligned}$$

im Vergleich zur Ableitung der exakten Lösung

$$\frac{\lambda dx^*}{8 dh^*} = \frac{h^{*3} - 1}{\chi^* h^{*2} - 1} = \frac{h^{*3} - 1}{\chi^* (h^* - 1/\sqrt{\chi^*})(h^* + 1/\sqrt{\chi^*})}.$$

Für $n = \frac{1}{2}$ besitzen die Terme $(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^n$ und $(h^* - 1)(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^{n-1}$ beide die Ordnung $\frac{1}{2}$ in h^* . So wird durch diese Wahl auch die Differenz im Nenner der Näherungsableitung von der Ordnung $\frac{1}{2}$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{1}{\beta}} \frac{dh^*}{dx^*} &= \frac{\alpha^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta} \cdot \frac{(h^* - 1)^{1-\beta} \sqrt{(h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^{\beta+1}}}{\sqrt{h^* - 1/\sqrt{\chi^*}} - \frac{h^*-1}{2\sqrt{h^*-1/\sqrt{\chi^*}}}} \\ &= \frac{2\alpha^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta} \cdot \frac{(h^* - 1)^{1-\beta} (h^* - 1/\sqrt{\chi^*})^{\beta+1}}{h^* - 2/\sqrt{\chi^*} - 1} \end{aligned} \quad (301)$$

Für die Senkungslinie numerisch anpassen lassen sich α zu $\alpha = -\frac{4}{\sqrt{\chi^*}} \cdot \frac{5}{7} \approx -\frac{10}{3}$ und $\beta = \frac{5}{4}$.

C.7 Die zeitliche Änderung des Sohlenprofils in Nähe eines Gleichgewichtszustandes bei schubspannungsbestimmtem Transport

Die Zeitableitung des Gefälles aus (118) ergibt sich als

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I}{\partial t} &= -\frac{\partial z}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d\Phi}{dF_r^*} \frac{\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{\varrho' d_m} \left(I \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial I}{\partial x} \right) \right] \\
 &= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g} d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial I}{\partial x} \right). \tag{302}
 \end{aligned}$$

Nahe liegt hier wieder, den Wasserstand h in eine Summe $h = \bar{h} + h^\Delta$ und das Gefälle I in die Summe $I = \bar{I} + I^\Delta$ zu zerlegen. \bar{h} und \bar{I} beschreiben das erwartete Transportgleichgewicht. h^Δ und I^Δ sind die Differenzen hierzu im Nicht-Gleichgewichtszustand.

Aus $\bar{h}\bar{I} = \text{const}$ ergibt sich $\bar{h} \frac{d\bar{I}}{dx} = -\bar{I} \frac{d\bar{h}}{dx}$. So folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial I^\Delta}{\partial t} &= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g} d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left((\bar{I} + I^\Delta) \left(\frac{d\bar{h}}{dx} + \frac{\partial h^\Delta}{\partial x} \right) + (\bar{h} + h^\Delta) \left(\frac{d\bar{I}}{dx} + \frac{\partial I^\Delta}{\partial x} \right) \right) \\
 &= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g} d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left(I^\Delta \frac{d\bar{h}}{dx} + \bar{I} \frac{\partial h^\Delta}{\partial x} + h^\Delta \frac{d\bar{I}}{dx} + \bar{h} \frac{\partial I^\Delta}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g} d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left(I^\Delta \frac{d\bar{h}}{dx} + \bar{I} \frac{\partial h^\Delta}{\partial x} - \frac{h^\Delta}{\bar{h}} \frac{d\bar{h}}{dx} + \bar{h} \frac{\partial I^\Delta}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g} d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(I^\Delta - \frac{h^\Delta}{\bar{h}} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} + \bar{I} \frac{\partial h^\Delta}{\partial x} + \bar{h} \frac{\partial I^\Delta}{\partial x} \right] \tag{303}
 \end{aligned}$$

Kleine I^Δ erlauben den Ansatz $h^\Delta = \frac{dh}{dI} I^\Delta$.

Aus $\frac{d\bar{h}}{d\bar{I}} = \frac{d}{d\bar{I}} \left(\frac{s_0}{\bar{I}} \right) = -\frac{s_0}{\bar{I}^2} = -\frac{\bar{h}}{\bar{I}}$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I^\Delta}{\partial t} &= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left[I^\Delta \left(1 - \frac{1}{\bar{h}} \frac{dh}{dI} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} + \left(\bar{I} \frac{dh}{dI} + \bar{h} \right) \frac{\partial I^\Delta}{\partial x} \right] \\
&= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ I^\Delta \left[1 - \frac{1}{\bar{h}} \left(\frac{d\bar{h}}{dI} + \frac{dh^\Delta}{dI} \right) \right] \frac{d\bar{h}}{dx} + \left[\bar{I} \left(\frac{d\bar{h}}{dI} + \frac{dh^\Delta}{dI} \right) + \bar{h} \right] \frac{\partial I^\Delta}{\partial x} \right\} \\
&= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\varrho'}} \frac{\partial}{\partial x} \left[I^\Delta \left(1 - \frac{1}{\bar{I}} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dh^\Delta}{dI} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} - \bar{I} \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{\partial I^\Delta}{\partial x} \right] \tag{304}
\end{aligned}$$

Für ein Transportgleichgewicht bei stationär-ungleichförmigem Abfluss wird (65) in (304) eingesetzt; denn lässt sich verifizieren, dass Gefälleänderungen nur langsam gegenüber den hydraulischen Vorgängen ablaufen, können bei konstantem Abfluss die Formeln für die stationäre Hydraulik verwendet werden. Mit

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\bar{h}}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{s_0\bar{h}^2 - (\lambda/8)h_g^3}{\bar{h}^3 - h_g^3} \right) \\
&= \frac{2s_0h(\bar{h}^3 - h_g^3) - 3h^2[s_0\bar{h}^2 - (\lambda/8)h_g^3]}{(\bar{h}^3 - h_g^3)^2} \cdot \frac{d\bar{h}}{dx} \\
&= \frac{\bar{h}}{\bar{h}^3 - h_g^3} \left(2s_0 - 3\bar{h} \frac{d\bar{h}}{dx} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} \tag{305}
\end{aligned}$$

ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I^\Delta}{\partial t} &= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\varrho'}} \cdot \left[\frac{dI^\Delta}{dx} \left(1 - \frac{1}{\bar{I}} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dh^\Delta}{dI} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} + \left(\frac{1}{\bar{I}^2} \frac{d\bar{I}}{dx} - \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{d\bar{h}}{dx} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} \right. \\
&+ \left. I^\Delta \left(1 - \frac{1}{\bar{I}} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dh^\Delta}{dI} \right) \frac{\bar{h}}{\bar{h}^3 - h_g^3} \left(2s_0 - 3\bar{h} \frac{d\bar{h}}{dx} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} - \bar{I} \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2} \right] \\
&= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\varrho'}} \left[\frac{dI^\Delta}{dx} \left(1 - \frac{1}{\bar{I}} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dh^\Delta}{dI} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} - \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{dh^\Delta}{dI} \right) \left(\frac{d\bar{h}}{dx} \right)^2 \right. \\
&+ \left. I^\Delta \left(1 - \frac{1}{\bar{I}} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dh^\Delta}{dI} \right) \frac{\bar{h}}{\bar{h}^3 - h_g^3} \left(2s_0 - 3\bar{h} \frac{d\bar{h}}{dx} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} - \bar{I} \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2} \right] \\
&= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\varrho'}} \left[\frac{dI^\Delta}{dx} \left(1 - \frac{1}{\bar{I}} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} + \frac{dh^\Delta}{dI} \left(\frac{2s_0 I^\Delta}{\bar{h}^3 - h_g^3} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dI^\Delta}{dx} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} \right. \\
&- \left. \left\{ \frac{1}{s_0} + \frac{1}{\bar{h}^2} \frac{dh^\Delta}{dI} - \frac{3\bar{h}^2 I^\Delta}{\bar{h}^3 - h_g^3} \left(1 - \frac{1}{\bar{I}} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dh^\Delta}{dI} \right) \right\} \left(\frac{d\bar{h}}{dx} \right)^2 \right. \\
&+ \left. \frac{2s_0 \bar{h} I^\Delta}{\bar{h}^3 - h_g^3} \left(1 - \frac{1}{\bar{I}} \right) - \bar{I} \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2} \right] \tag{306}
\end{aligned}$$

Für kleine Gleichgewichtsgefälle \bar{I} dominiert in den Termen $\left(1 - \frac{1}{\bar{I}}\right)$ und $\left(1 - \frac{1}{\bar{I}} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dh^\Delta}{dI}\right)$ dessen Reziproke $\frac{1}{\bar{I}}$, so dass die anderen Glieder in den jeweiligen Summen zu vernachlässigen sind. Ebenso lassen sich auch die Terme mit dem Vorfaktor $\left(\frac{d\bar{h}}{dx}\right)^2$ vernachlässigen. So verbleibt aus (306)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I^\Delta}{\partial t} &= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\varrho'}} \left[\frac{dh^\Delta}{dI} \left(\frac{2s_0 I^\Delta}{\bar{h}^3 - h_g^3} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dI^\Delta}{dx} \right) \frac{d\bar{h}}{dx} - \frac{1}{\bar{I}} \frac{dI^\Delta}{dx} \frac{d\bar{h}}{dx} \right. \\
&\quad \left. - \frac{I^\Delta}{\bar{I}} \frac{2s_0 \bar{h}}{\bar{h}^3 - h_g^3} - \bar{I} \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2} \right] \\
&= \frac{d\Phi}{dF_r^*} \sqrt{\frac{\mathbf{g}d_m}{\varrho'}} \left\{ \frac{dh^\Delta}{dI} \left[\left(\frac{2s_0 I^\Delta}{\bar{h}^3 - h_g^3} + \frac{1}{\bar{h}} \frac{dI^\Delta}{dx} \right) - \frac{1}{\bar{I}} \frac{dI^\Delta}{dx} \right] \frac{d\bar{h}}{dx} \right. \\
&\quad \left. - \frac{I^\Delta}{\bar{I}} \frac{2s_0 \bar{h}}{\bar{h}^3 - h_g^3} - \bar{I} \frac{dh^\Delta}{dI} \frac{\partial^2 I^\Delta}{\partial x^2} \right\} \tag{307}
\end{aligned}$$

C.8 Die zeitliche Änderung des Sohlenprofils in Nähe eines Gleichgewichtszustandes bei fließgeschwindigkeitsbestimmtem Transport

Aus einer Zerlegung des Wasserstandes h in eine Summe $h = \bar{h} + h^\Delta$ und des Gefälle I in $I = \bar{I} + I^\Delta$ für die Ortsableitungen $\frac{dh}{dx} = \frac{dh^\Delta}{d}$ und $\frac{dI}{dx} = \frac{dI^\Delta}{d}$ ergibt sich in Gerinnen konstanter Breite für die partielle Ableitung des Gefälles nach der Zeit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &\stackrel{(118)}{=} -\frac{\partial z}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{d(v^2)}{dx} \right) \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \\
&= -\frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d}{dx} (\mathbf{g} h F_r^2) \right] \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \\
&\stackrel{(28)}{=} -\frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{h_g^3}{h^2} \right) \right] \sqrt{(\mathbf{g} d_m)^3 \varrho'} = 2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{dh}{dx} \right] \sqrt{(\mathbf{g} d_m)^3 \varrho'} \\
&= 2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left[\left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{d^2 h}{dx^2} - 3 \frac{h_g}{h^2} \left(\frac{h_g}{h} \right)^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] \sqrt{(\mathbf{g} d_m)^3 \varrho'} \\
&= 2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \left[\frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{3}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] \sqrt{(\mathbf{g} d_m)^3 \varrho'} \\
&\stackrel{(27)}{=} 2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{h^3 I - (\lambda/8) h_g^3}{h^3 - h_g^3} \right) - \frac{3}{h} \left(\frac{h^3 I - (\lambda/8) h_g^3}{h^3 - h_g^3} \right)^2 \right] \sqrt{(\mathbf{g} d_m)^3 \varrho'} \\
&= 2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \sqrt{(\mathbf{g} d_m)^3 \varrho'} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{[3h^2 I (dh/dx) + h^3 (dI/dx)] (h^3 - h_g^3) - 3h^2 (h^3 I - (\lambda/8) h_g^3) (dh/dx)}{(h^3 - h_g^3)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{h} \left(\frac{h^3 I - (\lambda/8) h_g^3}{h^3 - h_g^3} \right)^2 \right] \\
&= 2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \sqrt{(\mathbf{g} d_m)^3 \varrho'} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{h^2}{h^3 - h_g^3} \left(3I \frac{dh}{dx} + h \frac{dI}{dx} \right) - 3 \left(\frac{h^2}{h^3 - h_g^3} + \frac{1}{h} \right) \left(\frac{h^3 I - (\lambda/8) h_g^3}{h^3 - h_g^3} \right)^2 \right] \\
&= 2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \sqrt{(\mathbf{g} d_m)^3 \varrho'} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{h^2}{h^3 - h_g^3} \left(3I \frac{dh}{dx} + h \frac{dI}{dx} \right) - \frac{3}{h} \frac{2h^3 - h_g^3}{h^3 - h_g^3} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] \tag{308} \\
&= 2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h} \right)^3 \frac{\sqrt{(\mathbf{g} d_m)^3 \varrho'}}{h^3 - h_g^3} \left[h^2 \left(3I \frac{dh}{dx} + h \frac{dI}{dx} \right) - \frac{3}{h} (2h^3 - h_g^3) \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] \cdot
\end{aligned}$$

Mit $\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dI} \cdot \frac{dI}{dx} = \frac{dh}{dI} \cdot \frac{dI^\Delta}{dx}$ folgt aus (308) unter Voraussetzung hinreichend langsamer Gefälleänderung, damit mit stationärer Hydraulik gerechnet werden kann.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^\Delta}{\partial t} &= 2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h}\right)^3 \frac{\sqrt{(\mathbf{g}d_m)^3 \varrho'}}{h^3 - h_g^3} \cdot \\ &\cdot \left[h^2 \left(3I \frac{dh}{dI} + h \right) - \frac{3}{h} (2h^3 - h_g^3) \left(\frac{dh}{dI} \right)^2 \frac{dI^\Delta}{dx} \right] \frac{dI^\Delta}{dx}. \end{aligned} \quad (309)$$

Bereits in (309) ist zu sehen, dass das Gefälle starken zeitlichen Änderungen unterliegt dort, wo der Wasserstand h nahe der kritischen Wassertiefe h_g liegt. Um (309) weiter auszuwerten, muss zwischen h , I und h_g auch für den noch nicht erreichten Gleichgewichtszustand die Normalabflussbeziehung angenommen werden. Nach dieser ergibt sich über $h = \frac{h_g}{2} \sqrt[3]{\frac{\lambda}{I}}$ nach (30) für die Ableitung $\frac{dh}{dI} = -\frac{h_g}{6} \frac{\sqrt[3]{\lambda}}{I^{4/3}}$; und (309) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^\Delta}{\partial t} &= -2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h}\right)^3 \frac{\sqrt{(\mathbf{g}d_m)^3 \varrho'}}{h^3 - h_g^3} \cdot \\ &\cdot \left[h^2 \left(\frac{h_g}{2} \sqrt[3]{\frac{\lambda}{I}} + h \right) + \frac{h_g^2}{2hI^2} (2h^3 - h_g^3) \left(\frac{\lambda}{I} \right)^{2/3} \frac{dI^\Delta}{dx} \right] \frac{dI^\Delta}{dx} \\ &= -2 \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h}\right)^3 \frac{\sqrt{(\mathbf{g}d_m)^3 \varrho'}}{h^3 - h_g^3} \cdot \\ &\cdot \left[2h^3 + \frac{2h}{I^2} (2h^3 - h_g^3) \left(\frac{\lambda}{I} \right)^{-1/3} \frac{dI^\Delta}{dx} \right] \frac{dI^\Delta}{dx} \\ &= -4h \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h}\right)^3 \frac{\sqrt{(\mathbf{g}d_m)^3 \varrho'}}{h^3 - h_g^3} \left[h^2 + \frac{h^3 - h_g^3}{I^2} \sqrt[3]{\frac{I}{\lambda}} \frac{dI^\Delta}{dx} \right] \frac{dI^\Delta}{dx} \\ &= -4h \frac{d\Phi}{d(v^2)} \left(\frac{h_g}{h}\right)^3 \sqrt{(\mathbf{g}d_m)^3 \varrho'} \left[\frac{h^2}{h^3 - h_g^3} + \frac{2}{I^2} \left(\frac{h_g}{h}\right) \frac{dI^\Delta}{dx} \right] \frac{dI^\Delta}{dx}. \end{aligned} \quad (310)$$

C.9 Stabile Sohlenquerprofile

Bezeichnet τ_{subst} die Schubspannung durch das Eigengewicht des Kornes unter Wasser, ergibt sich eine effektive Schubspannung

$$\begin{aligned}
 \tau_{eff} &= \sqrt{(\tau \cos \alpha)^2 + (\tau_{subst} \sin \alpha)^2} \\
 &= \varrho \mathbf{g} \sqrt{(hI \cos \alpha)^2 + \left(\frac{2}{3} \varrho' d_m \sin \alpha\right)^2} \\
 &= \frac{2}{3} \varrho \varrho' d_m \mathbf{g} \sqrt{\frac{9}{4} \left(\frac{I}{\varrho' d_m}\right)^2 h^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \\
 &= \frac{2}{3} \varrho \varrho' d_m \mathbf{g} \sqrt{f^2 h^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \tag{311}
 \end{aligned}$$

mit $f = \frac{I}{\varrho' d_m}$. Da ϱ , ϱ' , d_m und \mathbf{g} als konstant behandelt werden, wird nun davon ausgegangen, dass ein Sohlenquerprofil $h = h(y)$ stabil ist, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{const} = \phi_0^2 &= f^2 h^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\
 &= f^2 \frac{h^2(y)}{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} + \frac{\left(\frac{dh}{dy}\right)^2}{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} \\
 &= \frac{(fh(y))^2 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2}{1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2} \tag{312}
 \end{aligned}$$

Zu (312) sind folgende quadratische Gleichungen und ihre Lösungsgleichung äquivalent:

$$\begin{aligned}
 \phi_0^2 \left[1 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 \right] &= (fh(y))^2 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow (\phi_0^2 - 1) \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 &= (fh(y))^2 - \phi_0^2 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 &= \frac{(fh(y))^2 - \phi_0^2}{\phi_0^2 - 1} = \frac{\phi_0^2}{\phi_0^2 - 1} \left[\left(1 - \frac{1}{\phi_0^2}\right) (fh(y))^2 - 1 \right] \\
 \Leftrightarrow \frac{dh}{dy} &= \pm \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 - 1}} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\phi_0^2}\right) (fh(y))^2 - 1}
 \end{aligned}$$

Setzt man $c_0 := \frac{\phi_0}{f \sqrt{\phi_0^2 - 1}}$, so liegt demnach mit

$$\frac{dh}{dy} = c_0 f \sqrt{\left(\frac{h}{c_0}\right)^2 - 1} = c_0 \frac{I}{\varrho' d_m} \sqrt{\left(\frac{h}{c_0}\right)^2 - 1} \quad (313)$$

eine Gleichung vor, die sich nur um den Faktor $c_0 f = \frac{c_0 I}{d_m \varrho'}$ von (129) in 6.2 unterscheidet. Offensichtlich wird c_0 bei einer nicht-trivialen Lösung $h = h(y)$ wieder durch einen minimalen Wasserstand $c_0 = h_{\min}$ an Sohlscheiteln festgelegt. So ist $c_0 f = \frac{h_{\min} I}{\varrho' d_m} = F_{r^* \min}$ die minimale Feststoff-Froude-Zahl in Querrichtung.

$$\boxed{\frac{dh}{dy} = F_{r^* \min} \sqrt{\left(\frac{h}{h_{\min}}\right)^2 - 1}} \quad (314)$$

Eine triviale Lösung zu (313) bzw. (314) ist, ebenso wie zu (129) das Rechteckgerinne.

$$\text{Mit } \tilde{h} = \frac{h}{F_{r^* \min}} \text{ wird } h \text{ zu } h = F_{r^* \min} \tilde{h} \text{ und } \frac{dh}{dy} = F_{r^* \min} \frac{d\tilde{h}}{dy} = F_{r^* \min} \sqrt{\left(\frac{F_{r^* \min} \tilde{h}}{h_{\min}}\right)^2 - 1}.$$

Die hierzu bei $F_{r^* \min} \neq 0$ äquivalente Gleichung $\frac{d\tilde{h}}{dy} = \sqrt{\left(\frac{F_{r^* \min} \tilde{h}}{h_{\min}}\right)^2 - 1}$ hat analog zu (130) die nicht-triviale differenzierbare Lösung $\tilde{h} = \frac{h_{\min}}{F_{r^* \min}} \cosh\left(\frac{F_{r^* \min}}{h_{\min}}(y + y_0)\right)$; und Rücksubstitution ergibt mit $y_0 = 0$ (135)

$$h(y) = h_{\min} \cosh\left(F_{r^* \min} \frac{y}{h_{\min}}\right)$$

Um allgemeine Lösungen zu diskutieren, soll wieder die Rektifikation des Sohlenquerprofils untersucht werden. Aus (314) folgt zunächst

$$\begin{aligned} \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 + 1 &= F_{r^* \min}^2 \left[\left(\frac{h}{h_{\min}}\right)^2 - 1\right] + 1 = F_{r^* \min}^2 \left[\left(\frac{h}{h_{\min}}\right)^2 + \frac{1}{F_{r^* \min}^2} - 1\right] \\ \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{dh}{dy}\right)^2 + 1} &= F_{r^* \min} \sqrt{\left(\frac{h}{h_{\min}}\right)^2 + \frac{1}{F_{r^* \min}^2} - 1} = F_{r^* \min} \sqrt{\left(\frac{h}{h_{\min}}\right)^2 + \frac{1 - F_{r^* \min}^2}{F_{r^* \min}^2}} \end{aligned}$$

und weiter für die Rektifikation $s(y_0, y)$ des Sohlenquerschnittsprofils

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(y_0, y) &= \int_{y_0}^y \sqrt{\left(\frac{dh}{dy}\right)^2 + 1} dy' = F_{r^* \min} \int_{y_0}^y \sqrt{\left(\frac{h(y')}{h_{\min}}\right)^2 + \frac{1 - F_{r^* \min}^2}{F_{r^* \min}^2}} dy' \quad (315) \\
&= F_{r^* \min} \sqrt{\frac{1 - F_{r^* \min}^2}{F_{r^* \min}^2}} \int_{y_0}^y \sqrt{\frac{F_{r^* \min}^2}{1 - F_{r^* \min}^2} \left(\frac{h(y')}{h_{\min}}\right)^2 + 1} dy' \\
&= \sqrt{1 - F_{r^* \min}^2} \int_{y_0}^y \sqrt{\frac{F_{r^* \min}^2}{1 - F_{r^* \min}^2} \left(\frac{h(y')}{h_{\min}}\right)^2 + 1} dy'. \quad (316)
\end{aligned}$$

Für kleine F_{r^*} ist $\sqrt{1 - F_{r^* \min}^2} \approx 1$ und $\sqrt{1 - F_{r^* \min}^2} \leq 1$, ebenso $\frac{F_{r^* \min}^2}{1 - F_{r^* \min}^2} \leq F_{r^* \min}^2$.

Weiter lässt sich in (316) die Quadratwurzel in eins linearisieren. Hierdurch wird $\mathbf{s}(y_0, y)$ nach oben abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(y_0, y) &\leq \int_{y_0}^y \sqrt{F_{r^* \min}^2 \left(\frac{h(y')}{h_{\min}}\right)^2 + 1} dy' \\
&\leq \int_{y_0}^y \left[1 + \frac{F_{r^* \min}^2}{2} \left(\frac{h(y')}{h_{\min}}\right)^2\right] dy' \\
&= y - y_0 + \frac{F_{r^* \min}^2}{2} \int_{y_0}^y \left(\frac{h(y')}{h_{\min}}\right)^2 dy' \\
&\leq (y - y_0) \left[1 + \frac{F_{r^* \min}^2}{2} \max_{y_0 \leq t \leq y} \left(\frac{h(t)}{h_{\min}}\right)^2\right]. \quad (317)
\end{aligned}$$

Eine obere Schranke zu $\mathbf{s}(y_0, y)$ bei großen Feststoff-Froude-Zahlen ergibt sich aus (315)

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(y_0, y) &\leq F_{r^* \min} \int_{y_0}^y \sqrt{\left(\frac{h(y')}{h_{\min}}\right)^2 - 1} dy' \\
&\leq F_{r^* \min} \int_{y_0}^y \left(\frac{h(y')}{h_{\min}} - \frac{h_{\min}}{2h(y')}\right) dy' \\
&= F_{r^* \min} \left(\int_{y_0}^y \frac{h(y')}{h_{\min}} dy' - \frac{1}{2} \int_{y_0}^y \frac{h_{\min}}{h(y')} dy' \right) \\
&\leq F_{r^* \min} \left(\frac{1}{h_{\min}} \int_{y_0}^y h(y') dy' - (y - y_0) \min_{y_0 \leq y' \leq y} \frac{h_{\min}}{2h(y')} \right) \\
&\leq F_{r^* \min} \left(\frac{1}{h_{\min}} \int_{y_0}^y h(y') dy' - \frac{h_{\min}(y - y_0)}{2 \max_{y_0 \leq y' \leq y} h(y')} \right) \quad (318)
\end{aligned}$$

C.10 Schichtdicke in Transportkörpern bei einer logarithmischen Geschwindigkeitsverteilung in der beweglichen Sedimentschicht

Im folgenden wird davon ausgegangen, dass

$$u_s(z') \sim \begin{cases} \log\left(\frac{z'}{z-s(z)}\right) & \text{falls } z' \geq z-s(z) \\ 0 & \text{falls } z' < z-s(z) \end{cases} \quad (319)$$

gilt. Die Schichtdicke $s = s(z)$ ist hier noch nicht näher bestimmt. Die Volumenfrachtrate q_B bestimmt sich zu

$$\begin{aligned} q_B(z) &\stackrel{(153)}{=} \int_{z-s(z)}^z u_s(z') dz' && \stackrel{(319)}{\sim} \int_{z-s(z)}^z \log\left(\frac{z'}{z-s(z)}\right) dz' \\ &= (z-s(z)) \int_1^{\frac{z}{z-s(z)}} \log \zeta d\zeta && = (z-s(z)) \left[\zeta (\log \zeta - 1) \right]_1^{\frac{z}{z-s(z)}} \\ & && = \left(\log\left(\frac{z}{z-s(z)}\right) - 1 \right) + 1 \\ & && = z \log\left(\frac{z}{z-s(z)}\right) - s(z). \end{aligned} \quad (320)$$

Wegen (151) muss es nun eine Konstante $u_{\log} > 0$ geben, mit der sich aus

$$\begin{aligned} q_B(z) &= u_T z = u_{\log} \left(z \log\left(\frac{z}{z-s(z)}\right) - s(z) \right) \\ \iff \frac{u_T}{u_{\log}} &= \log\left(\frac{z}{z-s(z)}\right) - \frac{s(z)}{z} \end{aligned} \quad (321)$$

eine implizite Gleichung zur Bestimmung der Schichtdicke $s = s(z)$ ergibt. Eine zu (321) äquivalente explizite Gleichung gibt es nicht. Falls s gegenüber z klein ist, lässt sich der Logarithmus jedoch linearisieren zu

$$\log\left(\frac{z}{z-s(z)}\right) = \log\left(1 + \frac{s(z)}{z-s(z)}\right) \approx \frac{s(z)}{z-s(z)} \quad (322)$$

um mit

$$\begin{aligned}
 \frac{u_T}{u_{\log}} &= \log\left(\frac{z}{z-s(z)}\right) - \frac{s(z)}{z} \\
 &\approx \frac{s(z)}{z-s(z)} - \frac{s(z)}{z} = \frac{s^2(z)}{z(z-s(z))} \\
 \Leftrightarrow s^2(z) &= z \frac{u_T}{u_{\log}} (z-s(z))
 \end{aligned} \tag{323}$$

$$\Leftrightarrow 0 = s^2(z) + \frac{u_T z}{u_{\log}} s(z) - \frac{u_T}{u_{\log}} z^2$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \\
 s > 0 \quad s(z) &= \frac{u_T}{u_{\log}} \left(\sqrt{1 + \frac{4u_{\log}}{u_T}} - 1 \right) \frac{z}{2}
 \end{aligned}$$

eine Näherungslösung explizit zu gewinnen. Die Schichtdicke s wächst für kleine s demnach zunächst linear. Für etwas größere Schichtdicken s ergibt Approximation des Integrales $\int \frac{d\zeta}{\zeta}$ durch die Trapezregel

$$\begin{aligned}
 \log\left(\frac{z}{z-s(z)}\right) &= \int_1^{\frac{z}{z-s(z)}} \frac{1}{\zeta} d\zeta \approx \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z-s(z)} - 1 \right) \left(1 + \frac{z-s(z)}{z} \right) \\
 &= \left(\frac{z}{z-s(z)} - 1 \right) \left(1 - \frac{s(z)}{2z} \right).
 \end{aligned} \tag{324}$$

Die Approximation $\log x \approx \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$ ist für $x \in \left[\frac{1}{e}; e \right]$ recht genau; außerhalb dieses Intervalls wird der Fehler nicht mehr annehmbar. Doch gelangt man hier noch zu einer expliziten Näherungslösung von (321) durch

$$\begin{aligned}
\frac{u_T}{u_{\log}} &= \log\left(\frac{z}{z-s(z)}\right) - \frac{s(z)}{z} \\
&\approx \left(\frac{z}{z-s(z)} - 1\right) \left(1 - \frac{s(z)}{2z}\right) - \frac{s(z)}{z} \\
&= \frac{z}{z-s(z)} - \frac{s(z)}{2z} - \frac{s(z)}{2(z-s(z))} - 1 = \frac{s^2(z)}{2z(z-s(z))} \quad (325) \\
\iff s^2(z) &= 2z \frac{u_T}{u_{\log}} (z-s(z)) \\
\iff 0 &= s^2(z) + 2 \frac{u_T z}{u_{\log}} s(z) - 2 \frac{u_T}{u_{\log}} z^2 \\
\iff s(z) &= \frac{u_T}{u_{\log}} \left(\sqrt{1 + \frac{u_{\log}}{u_T}} - 1 \right) z \\
s > 0 &
\end{aligned}$$

Auch in dieser Approximation wächst s mit z linear an.

C.11 Zur Integration von (143), Eigenschaften der Funktion Λ

Bereits zu (168) in 7.5 erläutert worden ist, dass für periodische Lösungen zu (143) neben Stetigkeit und Surjektivitätseigenschaften die Achsensymmetrie von Λ_{p_0} in $p = p_0$ hinreichend ist. Notwendig für einfach geschlossene Kurven im Phasendiagramm zu I und p , und damit für die Periodizität, sind

- Stetigkeit von Λ_{p_0} auf einem Intervall J_{p_0} mit $p_0 \in J_{p_0}$, das durch Λ_{p_0} surjektiv auf $\left[-\frac{I_0^2}{2}; 0\right]$ abgebildet wird,
- ein absolutes Maximum von Λ_{p_0} in $(p_0 | 0)$ und
- strenge Isotonie von Λ_{p_0} für $p < p_0$ und strenge Antitonie für $p > p_0$, jeweils $p \in J_{p_0}$

Da im Definitionsausdruck (167) zu Λ_{p_0} der Integralterm $\int_{p_0}^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p}$ für in p integrierbare q_B absolutstetig, also insbesondere stetig ist, muss, damit Λ_{p_0} stetig bleibt, $pq_B(p)$ in p stetig sein. Hierfür ist wiederum Stetigkeit von q_B in p notwendig, jedoch auch hinreichend.

Aus (165) folgt:

$$\Lambda_{p_0}(p) = \frac{1}{u_T} \int_{p_0}^p p \frac{dq_B}{dp}(\tilde{p}) d\tilde{p}, \quad (326)$$

wenn $\frac{dq_B}{dp}$ im klassischen Sinn fast überall existiert. Λ ist in diesem Fall generell absolutstetig.

Unter genannten Stetigkeits- und Monotonievoraussetzungen an Λ_{p_0} für die Existenz periodischer Lösungen ist Λ_{p_0} auf dem Intervall J_{p_0} fast überall im Sinn der Lebesgue-Theorie differenzierbar, d. h. es gibt auf J_{p_0} mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmepunkten eine Ableitung $\frac{d\Lambda_{p_0}}{dp}$. Für sie ist i. a. der Hauptsatz der Differential- und

Integralrechnung nicht mehr erfüllt. Der Integralterm $\int_{p_0}^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p}$ in (167) ist, wie bereits oben erwähnt, absolutstetig. Analog obiger Argumentation zur Stetigkeit folgt hier die Lebesgue-Differenzierbarkeit von q_B in p . Auf eine Absolutstetigkeit von q_B in p lässt sich jedoch nicht schließen.

Λ_{p_0} verhält sich zu $p = p_0$ achsensymmetrisch, d. h. Λ_{p_0} hängt nur von $|p - p_0|$ ab, wenn $p \frac{dq_B}{dp}$ punktsymmetrisch in $\left(p_0 \mid p_0 \frac{dq_B}{dp}(p_0)\right)$ ist. Ist $p_0 = 0$ oder gilt $\frac{dq_B}{dp}(p_0) = 0$, so ist für letzteres notwendig und hinreichend, dass $\frac{dq_B}{dp}$ achsensymmetrisch zu $p = 0$ ist. Allgemein, d. h. auch im Fall $p_0 \neq 0$, lautet die Punktsymmetrie von $p \frac{dq_B}{dp}$ in $\left(p_0 \mid p_0 \frac{dq_B}{dp}(p_0)\right)$:

$$\begin{aligned}
 p_0 \frac{dq_B}{dp}(p_0) - (p_0 - p) \frac{dq_B}{dp}(p_0 - p) &= (p - p_0) \frac{dq_B}{dp}(p - p_0) - p_0 \frac{dq_B}{dp}(p_0) \\
 \iff 2p_0 \frac{dq_B}{dp}(p_0) &= (p - p_0) \left(\frac{dq_B}{dp}(p - p_0) - \frac{dq_B}{dp}(p_0 - p) \right) \quad (327) \\
 \iff p_0 \frac{dq_B}{dp}(p_0) &= \frac{p - p_0}{2} \left(\frac{dq_B}{dp}(p - p_0) - \frac{dq_B}{dp}(p_0 - p) \right)
 \end{aligned}$$

Zwar verschwindet zwar $\frac{dq_B}{dp}(p - p_0) - \frac{dq_B}{dp}(p_0 - p)$, wenn sich $\frac{dq_B}{dp}$ achsensymmetrisch zu $p = p_0$ verhält; doch wird (327) nicht erfüllt, wenn nicht auch das Produkt $p_0 \frac{dq_B}{dp}(p_0)$ verschwindet. Verschwindet dieses Produkt nicht und ist $\frac{dq_B}{dp}$ dennoch auf einem Intervall $[p_0 - \delta, p_0 + \delta]$ beschränkt, so lässt sich p so nahe an p_0 wählen, dass (327) verletzt wird, indem die rechte Seite die linke dem Betrag nach unterschreitet. Somit ließe sich (327) im Fall $p_0 \frac{dq_B}{dp}(p_0) \neq 0$ nur erfüllen, wenn $\frac{dq_B}{dp}$ in $p_0 \neq 0$ singulär wird. Dann ist aber auch $p_0 \frac{dq_B}{dp}(p_0)$ nicht definiert. So folgt also:

p_0 lässt sich festlegen zu $p_0 = 0$ und q_B ist in $(0 \mid q_B(p))$ punktsymmetrisch, (denn dann ist $\frac{dq_B}{dp}$ achsensymmetrisch; ein Wendepunkt des Sohlenprofils z liegt vor!) oder q_B hat im Fall $p_0 \neq 0$ einen Sattelpunkt in $(p_0 \mid q_B(p_0))$.

Λ_{p_0} lässt sich über die Trapezregel näherungsweise bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{p_0}(p) &= \frac{1}{u_T} \left(\int_{p_0}^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} - \left[\tilde{p}q_B(\tilde{p}) \right]_{p_0}^p \right) \\
 &\approx \frac{1}{u_T} \left(\frac{q_B(p_0) + q_B(p)}{2} (p - p_0) - \left[\tilde{p}q_B(\tilde{p}) \right]_{p_0}^p \right) \\
 &= \frac{(p - p_0) (q_B(p_0) - q_B(p))}{2u_T}
 \end{aligned} \tag{328}$$

Erfüllen p_{\min} und p_{\max} (169) und gilt $p_0 = 0$, so folgt

$$\frac{p_{\min} (q_B(0) - q_B(p_{\min}))}{u_T} \approx -I_0^2 \tag{329}$$

$$\frac{p_{\max} (q_B(0) - q_B(p_{\max}))}{u_T} \approx -I_0^2 \tag{330}$$

Verhält sich $q_B = q_B(p)$ symmetrisch in $p_0 = 0$, gilt $p_{\min} = -p_{\max}$. So folgt aus (335) speziell

$$q_B(p_{\max}) = 2q_B(0) \quad (331)$$

und durch Einsetzen in (329) oder in (330)

$$I_0 \approx \sqrt{\frac{p_{\max} q_B(p_{\max})}{2u_T}} \quad (332)$$

Bezeichnet B wahlweise die Schubspannung τ , die Feststoff-Froude-Zahl F_r^* oder die Sohlenbelastungszahl η , so ist

$$\frac{dq_B(B(p))}{dp} = \frac{dq_B}{dB} \frac{dB}{dp} \quad (333)$$

$$\frac{d^2 q_B(B(p))}{dp^2} = \frac{d^2 q_B}{dB^2} \left(\frac{dB}{dp}\right)^2 + \frac{dq_B}{dB} \frac{d^2 B}{dp^2} \quad (334)$$

Ist o. B. d. A. $x(p_{\min})$ die Abszisse eines Tales, demnach also $x(p_{\max})$ die eines Kamms, so gilt wegen (148) $q_B(p_{\min}) = 0$. (329) und (330) werden gleichgesetzt. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} p_{\min} q_B(0) &= p_{\max} (q_B(0) - q_B(p_{\max})) \\ \Leftrightarrow q_B(0) &= \frac{p_{\max}}{p_{\min} - p_{\max}} q_B(p_{\max}) \\ \Leftrightarrow q_B(p_{\max}) &= \frac{p_{\min} - p_{\max}}{p_{\max}} q_B(0) \end{aligned} \right\} \quad (335)$$

Da $p_{\min} < 0 = p_0 < p_{\max}$ gilt, ist $p_{\max} - p_{\min} > p_{\max} > 0$ und so $q_B(0) < q_B(p_{\max})$ wie wegen (148) nicht anders erwartet wird. Doch lässt sich mit der Näherung (329) bei $p_{\min} < 0$ und $q_B(p_{\min}) = 0$ kein I_0 bestimmen! Die linke Seite von (329) wird negativ.

C.12 Zur Integration von (143), Parameterdarstellung für den reduzierten Ort $x = x(p)$

Um eine Parameterdarstellung für den reduzierten Ort $x = x(p)$ zu gewinnen, gibt es prinzipiell drei Möglichkeiten:

- a) Aus (162) wird eine explizite Darstellung von p als Funktion $p = p(I)$ in I gewonnen. Mit $p = \frac{dI}{dx}$ folgt $x + x_0 = \int \frac{dI}{p(I)}$. Der reduzierte Ort x ergibt sich dann als Funktion $x = x(I)$ in I !

Beispiel: Hängt q_B linear von B , d. h. von der Schubspannung τ oder den daraus abgeleiteten Größen η bzw. F_r^* ab, so nach (202) auch von p . q_B lässt sich darstellen als $q_B = q_{B0} + \mu p$, wobei q_{B0} und $\mu = \frac{dq_B}{dp}$ konstant sind. Aus (167) ergibt sich hier $\Lambda = \frac{\mu}{2u_T}(p_0^2 - p^2)$, aus (168) weiter

$$\begin{aligned}
 I(p) &= \sqrt{I_0^2 + \frac{\mu}{u_T}(p_0^2 - p^2)} \\
 \Leftrightarrow p(I) &= \pm \sqrt{\frac{u_T}{\mu}(I_0^2 - I^2) + p_0^2}
 \end{aligned} \tag{336}$$

und die Funktion $x = x(I)$ für den reduzierten Ort x zu

$$\begin{aligned}
x(I) &= \int_{I_0}^I \frac{\pm d\tilde{I}}{\sqrt{\frac{u_T}{\mu}(I_0^2 - \tilde{I}^2) + p_0^2}} - x_0 \\
&= \int_{I_0}^I \frac{\pm d\tilde{I}}{\sqrt{\frac{u_T I_0^2 + \mu p_0^2}{\mu} - \frac{u_T}{\mu} \tilde{I}^2}} - x_0 \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{u_T I_0^2 + \mu p_0^2}} \int_{I_0}^I \frac{\pm d\tilde{I}}{\sqrt{1 - \frac{u_T}{u_T I_0^2 + \mu p_0^2} \tilde{I}^2}} - x_0 \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{u_T}} \int_{u(I_0)}^{u(I)} \frac{\pm du}{\sqrt{1 - u^2}} - x_0 \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{u_T}} \left\{ \begin{array}{l} \left[\arccos u \right]_{u(I_0)}^{u(I)} \\ \left[\arcsin u \right]_{u(I_0)}^{u(I)} \end{array} \right\} - x_0 \\
&= \sqrt{\frac{\mu}{u_T}} \left\{ \begin{array}{l} \left[\arccos \left(\sqrt{\frac{u_T}{u_T I_0^2 + \mu p_0^2}} \tilde{I} \right) \right]_{I_0}^I \\ \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{u_T}{u_T I_0^2 + \mu p_0^2}} \tilde{I} \right) \right]_{I_0}^I \end{array} \right\} - x_0 . \tag{337}
\end{aligned}$$

Als Umkehrfunktion $I = I(x)$ ergibt sich

$$I - I_0 = \sqrt{I_0^2 + \frac{\mu}{u_T} p_0^2} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\sqrt{\frac{u_T}{\mu}} (x - x_0) \right) \\ \sin \left(\sqrt{\frac{u_T}{\mu}} (x - x_0) \right) \end{array} \right. , \tag{338}$$

also das Fundamentalsystem aus trigonometrischen Funktionen.

Im allgemeinen lässt sich jedoch I nicht mehr nach p auflösen. Schwierigkeiten ergeben sich aber auch bei den für eine geschlossene Integration nach folgenden beiden Alternativen b) und c) erforderlichen Substitutionen:

b) Die Funktion $I = I(p)$ in (168) wird nach p abgeleitet. Der reduzierte Ort x ergibt sich als Funktion $x = x(p)$ als das Integral ([23] 4.14, **4.17 (a)**)

$$x(p) = \int_{p_0}^p \left(\frac{dI(p)}{dp} \right) (\tilde{p}) \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}} - x_0 ; \quad (339)$$

denn es gilt: $x + x_0 = \int \frac{dI}{p(I)} = \int \frac{dI(p)}{dp} \frac{dp}{p}$. So wird b) auf a) zurückgeführt.

Beispiel: Hängt wie im Beispiel zu a) q_B wieder linear von B ab, ergibt sich aus (336) die Ableitung $\frac{dI(p)}{dp} = -\frac{\mu}{u_T} \frac{p}{\sqrt{I_0^2 + \frac{\mu}{u_T}(p_0^2 - p^2)}}$, und man erhält zu (339)

$$\begin{aligned} x(p) &= -\frac{\mu}{u_T} \int_{p_0}^p \frac{d\tilde{p}}{\sqrt{I_0^2 + \frac{\mu}{u_T}(p_0^2 - \tilde{p}^2)}} - x_0 \\ &= -\sqrt{\frac{\mu}{u_T}} \int_{p_0}^p \frac{d\tilde{p}}{\sqrt{\frac{u_T I_0^2 - \mu p_0^2}{\mu} - \tilde{p}^2}} - x_0 \\ &= -\frac{\mu}{\sqrt{u_T(u_T I_0^2 - \mu p_0^2)}} \int_{p_0}^p \frac{d\tilde{p}}{\sqrt{1 - \frac{\mu}{u_T I_0^2 - \mu p_0^2} \tilde{p}^2}} - x_0 \\ &= -\sqrt{\frac{\mu}{u_T}} \int_{u(p_0)}^{u(p)} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} - x_0 \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{u_T}} \left[\arcsin u \right]_{u(p_0)}^{u(p)} - x_0 \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{u_T}} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{\mu}{u_T I_0^2 - \mu p_0^2}} \tilde{p} \right) \right]_{p_0}^p - x_0 . \end{aligned}$$

Als Umkehrfunktion $p = p(x)$ ergibt sich hier

$$p - p_0 = \sqrt{\frac{u_T}{\mu} I_0^2 - p_0^2} \sin \left(\sqrt{\frac{u_T}{\mu}} (x - x_0) \right) , \quad (340)$$

also wieder eine trigonometrische Funktionen.

Aus (163) folgt so zwar

$$x(p) = x_0 + \frac{1}{u_T} \int_{p_0}^p \frac{dq_B}{dp}(\tilde{p}) \frac{d\tilde{p}}{I(\tilde{p})}; \quad (341)$$

doch wird zur Auswertung des Integrales in (341) (wieder) die Ableitung $\frac{dq_B}{dp}$ benötigt. Für die Bestimmung von Λ hat sie sich durch partielle Integration durch q_B ersetzen lassen.

Direkt aus

c) (339) ergibt partielle Integration

$$x(p) = x_0 + \left[\frac{I(\tilde{p})}{\tilde{p}} \right]_{p_0}^p + \int_{p_0}^p \frac{I(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} d\tilde{p}. \quad (342)$$

Um die Quadratwurzel im Term für $I(p)$ nach (168) mit der Wichtung $\frac{1}{p^2}$ zu geschlossen integrieren, muss in der Regel der Radikand substituiert werden. Mit der Auflösung von p nach I stellen sich damit die gleichen Schwierigkeiten ein wie sie bei der Integration nach a) bestehen. An bietet sich daher, bei der Integration die Quadratwurzel über

$$I(p) = \pm I_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\Lambda(p)}{I_0^2}} \approx \pm I_0 \left(1 - \frac{\Lambda(p)}{I_0^2} \right) = \pm I_0 \mp \frac{\Lambda(p)}{I_0} \quad (343)$$

zu linearisieren.

So ergibt sich

$$\int_{p_0}^p \frac{I(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} d\tilde{p} \approx \pm I_0 \int_{p_0}^p \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}^2} \mp \frac{1}{I_0} \int_{p_0}^p \frac{\Lambda_{p_0}(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} d\tilde{p} = \left[\mp \frac{I_0}{\tilde{p}} \right]_{p_0}^p \mp \frac{1}{I_0} \int_{p_0}^p \frac{\Lambda_{p_0}(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} d\tilde{p}$$

und aus (342) die Lösung

$$x(p) \approx x_0 + \left[\frac{I(\tilde{p}) \mp I_0}{\tilde{p}} \right]_{p_0}^p \mp \frac{1}{I_0} \int_{p_0}^p \frac{\Lambda_{p_0}(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} d\tilde{p}. \quad (344)$$

Abb. 81 zeigt den Linearisierungsfehler bei der Bestimmung von x für den Fall $\Lambda(p) = \frac{p^2}{2}$, also $I(p) = \sqrt{1-p^2}$. Die richtige Lösung ist hier $x(p) = \arccos(p)$.

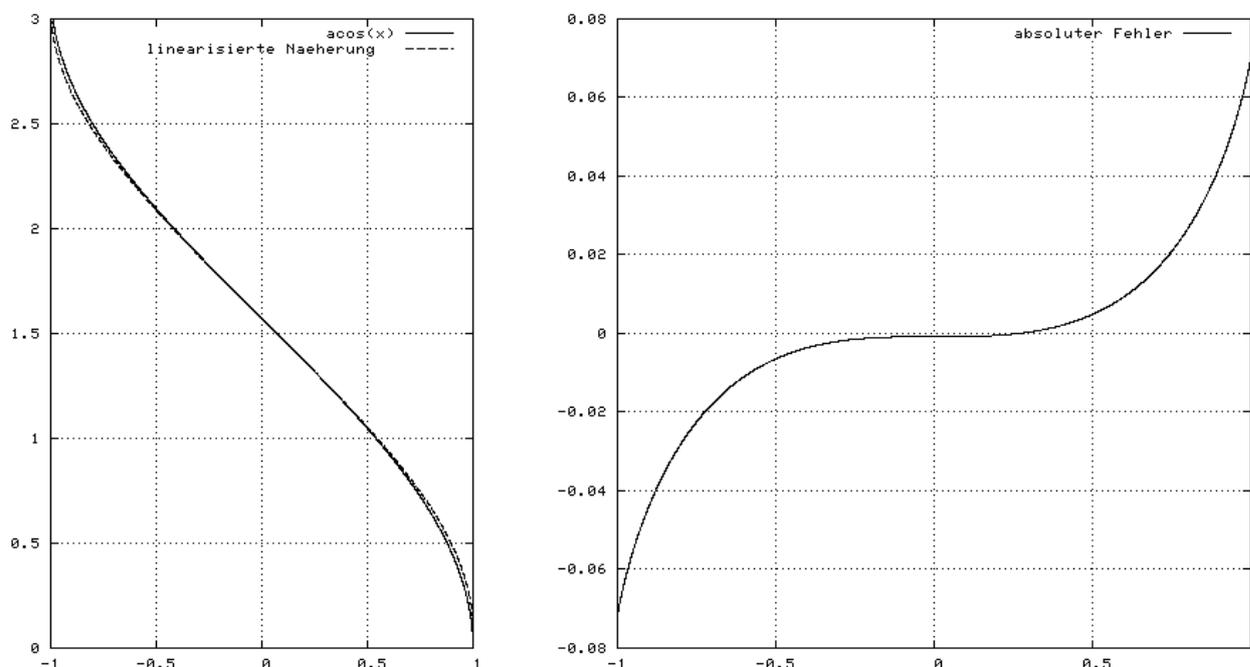


Abbildung 81: Absoluter Fehler bei näherungsweise Integration nach (344) anstelle von (342) für $I(p) = \sqrt{1-p^2}$. *Links*: Graphen der der exakten Lösung (durchgezogen) und der Näherung (gestrichelt); *rechts*: Differenz zwischen Näherung und exakter Lösung.

Durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int_{p_0}^p \frac{\Lambda_{p_0}(p)}{p^2} dp &= \frac{1}{u_T} \int \left(\int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} - \left[\tilde{p} q_B(\tilde{p}) \right]_{p_0}^{\tilde{p}} \right) \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}^2} \\
&= \frac{1}{u_T} \int \left(\frac{1}{\tilde{p}^2} \int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} - \frac{q_B(\tilde{p})}{\tilde{p}} + \frac{p_0 q_B(p_0)}{\tilde{p}^2} \right) d\tilde{p} \\
&= \frac{1}{u_T} \left\{ \int_{p_0}^p \underbrace{\left(\frac{1}{\tilde{p}^2} \int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right)}_{\text{partiell integrierbar}} d\tilde{p} - \int_{p_0}^p \frac{q_B(\tilde{p})}{\tilde{p}} d\tilde{p} - p_0 q_B(p_0) \left[\frac{1}{\tilde{p}} \right]_{p_0}^p \right\} \\
&= \frac{1}{u_T} \left\{ - \left[\underbrace{\frac{1}{\tilde{p}} \int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p}}_{\text{verschwindet in } \tilde{p}=p_0} \right]_{p_0}^p + \int_{p_0}^p \frac{q_B(\tilde{p})}{\tilde{p}} d\tilde{p} \right. \\
&\quad \left. - \int_{p_0}^p \frac{q_B(\tilde{p})}{\tilde{p}} d\tilde{p} - p_0 q_B(p_0) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{u_T} \left\{ p_0 \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right) q_B(p_0) - \frac{1}{p} \int_{p_0}^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right\} \\
&= \frac{1}{u_T p} \left((p - p_0) q_B(p_0) - \int_{p_0}^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right) \tag{345}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{u_T p} \left(p q_B(p_0) - p q_B(p) + p q_B(p) - p_0 q_B(p_0) - \int_{p_0}^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right) \\
&= \frac{1}{u_T p} \left(p q_B(p_0) - p q_B(p) + \left[\tilde{p} q_B(\tilde{p}) \right]_{p_0}^p - \int_{p_0}^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right) \\
&= - \left[\frac{q_B(\tilde{p})}{u_T} \right]_{p_0}^p - \frac{\Lambda_{p_0}(p)}{p} \tag{346}
\end{aligned}$$

So ergibt sich für den Ort x

$$\begin{aligned}
 x(p) &\approx x_0 + \left[\frac{I(\tilde{p}) \mp I_0}{\tilde{p}} \right]_{p_0}^p \mp \frac{1}{I_0} \int_{p_0}^p \frac{\Lambda_{p_0}(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} d\tilde{p} \\
 &= \left[\frac{I(\tilde{p}) \mp I_0}{\tilde{p}} \pm \frac{q_B(\tilde{p})}{u_T I_0} \right]_{p_0}^p \pm \frac{\Lambda_{p_0}(p)}{I_0 p} \\
 &\approx \left[\frac{I(\tilde{p}) \mp I_0}{\tilde{p}} \pm \frac{q_B(\tilde{p})}{u_T I_0} \right]_{p_0}^p \pm \frac{1}{p} (I_0 \mp I(p)) \\
 &= \frac{I(p) \mp I_0}{p} \pm \left[\frac{q_B(\tilde{p})}{u_T I_0} \right]_{p_0}^p \pm \frac{1}{p} (I_0 \mp I(p)) \\
 &= \pm \left[\frac{q_B(\tilde{p})}{u_T I_0} \right]_{p_0}^p \tag{347}
 \end{aligned}$$

$$= \pm \frac{z(p) - z_0}{I_0} \tag{348}$$

Einen Korrekturterm zu der Approximation durch dreiecksförmige Transportkörper erhält man, indem $\sqrt{I_0^2 + 2\Lambda}$ in zweiter Ordnung approximiert wird.

$$\begin{aligned}
 I(p) &= \pm I_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\Lambda(p)}{I_0^2}} \\
 &\approx \pm I_0 \left(1 - \frac{\Lambda(p)}{I_0^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda(p)}{I_0^2} \right)^2 \right) \tag{349}
 \end{aligned}$$

$$= \pm I_0 \mp \frac{\Lambda(p)}{I_0} \pm \frac{\Lambda^2(p)}{2I_0^3} \tag{350}$$

So ergibt sich der Ort $x = x(p)$ in zweiter Näherung zu

$$\begin{aligned}
 x(p) &\approx x_0 + \underbrace{\left[\frac{I(\tilde{p}) \mp I_0}{\tilde{p}} \right]_{p_0}^p \mp \frac{1}{I_0} \int_{p_0}^p \frac{\Lambda_{p_0}(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} d\tilde{p}}_{= \pm \frac{z(p) - z_0}{I_0} \text{ nach (348)}} \pm \frac{1}{I_0^3} \int_{p_0}^p \left(\frac{\Lambda_{p_0}(\tilde{p})}{\tilde{p}} \right)^2 d\tilde{p}. \tag{351}
 \end{aligned}$$

Gegenüber (348) ergibt sich so der Korrekturterm

$$\begin{aligned}
& \int_{p_0}^p \left(\frac{\Lambda_{p_0}(\tilde{p})}{\tilde{p}} \right)^2 d\tilde{p} \\
&= \int_{p_0}^p \left(\int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} - \left[\tilde{p} q_B(\tilde{p}) \right]_{p_0}^{\tilde{p}} \right)^2 \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}^2} \\
&= \int_{p_0}^p \left\{ \left(\int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right)^2 - 2 \left[\tilde{p} q_B(\tilde{p}) \right]_{p_0}^{\tilde{p}} \int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} + \left(\left[\tilde{p} q_B(\tilde{p}) \right]_{p_0}^{\tilde{p}} \right)^2 \right\} \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}^2} \\
&= \int_{p_0}^p \left(\int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right)^2 \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}^2} \\
&\quad - 2 \int_{p_0}^p \left(\frac{q_B(\tilde{p})}{\tilde{p}} - \frac{p_0 q_B(p_0)}{\tilde{p}^2} \right) \left(\int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right) d\tilde{p} \\
&\quad + \int_{p_0}^p \left(q_B^2(\tilde{p}) - 2 \frac{p_0 q_B(p_0) q_B(\tilde{p})}{\tilde{p}} + \frac{p_0^2 q_B^2(p_0)}{\tilde{p}^2} \right) d\tilde{p} \\
&= \int_{p_0}^p \left\{ q_B^2(\tilde{p}) - 2 \frac{q_B(\tilde{p})}{\tilde{p}} \int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} + \frac{1}{\tilde{p}^2} \left(\int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right)^2 \right\} d\tilde{p} \tag{352}
\end{aligned}$$

$$+ p_0 q_B(p_0) \int_{p_0}^p \frac{1}{\tilde{p}} \left\{ \frac{1}{\tilde{p}} \left(p_0 q_B(p_0) + 2 \int_{p_0}^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right) - 2 q_B(\tilde{p}) \right\} d\tilde{p} . \tag{353}$$

Der Term in (353) verschwindet, falls $p_0 = 0$ gilt. Dann gilt

$$\int_0^p \left(\frac{\Lambda_0(\tilde{p})}{\tilde{p}} \right)^2 d\tilde{p} = \int_0^p \left(q_B(\tilde{p}) - \frac{1}{\tilde{p}} \int_0^{\tilde{p}} q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} \right)^2 d\tilde{p} . \tag{354}$$

Beispiel: Zu $\Lambda = \frac{\mu}{2u_T}(p_0^2 - p^2)$ im Beispiel zu a) (q_B linear in p) ergibt sich der Korrekturterm

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{I_0^3} \int_{p_0}^p \left(\frac{\Lambda_{p_0}(\tilde{p})}{\tilde{p}} \right)^2 d\tilde{p} &= \frac{\mu}{2u_T I_0^3} \int_{p_0}^p \left(\frac{p_0^2}{\tilde{p}} - \tilde{p} \right)^2 d\tilde{p} \\
 &= \frac{\mu}{2u_T I_0^3} \int_{p_0}^p \left(\frac{p_0^4}{\tilde{p}^2} - 2p_0^2 + \tilde{p}^2 \right) d\tilde{p} \\
 &= \frac{\mu}{2u_T I_0^3} \left[\frac{\tilde{p}^3}{3} - \frac{p_0^4}{\tilde{p}} - 2p_0^2 \tilde{p} \right]_{p_0}^p \\
 &= \frac{\mu}{2u_T I_0^3} \left(\frac{p^3 + 8p_0^3}{3} - \frac{p_0^4}{p} - 2p_0^2 p \right) \tag{355}
 \end{aligned}$$

Im Fall $p_0 = 0$ ist der Korrekturterm ein kubisches Polynom. Anhand der Abb. 82 werden die exakte Lösung, ihre lineare Approximation und die Approximation zweiter Ordnung skizziert.



Abbildung 82: Im Fall $p_0 = 0$ ergibt sich zu obigem Beispiel ein kubisches Polynom als Approximation des Arcus-Sinus in zweiter Ordnung (*links*). Da diese Approximation jedoch an den Enden des Definitionsintervalls keine singuläre Ableitung besitzt, gibt die zu einer periodischen Funktion stückweise fortgesetzte Umkehrfunktion (*rechts*) jedoch nicht die Extrema mit horizontaler Tangente richtig wieder.

C.13 Das Transportmodell (163) in Verbindung mit der Formel von Boys

Im folgenden bezeichnet

$$q_{\text{Boys}} := \frac{d_m^{3/2} \sqrt{\mathbf{g}\varrho'}}{4\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\varrho_W}{\varrho_S}} \quad (356)$$

einen Vorfaktor, mit dem sich Rechnungen einfacher schreiben lassen. Für $p = 0$ ergibt sich nach der Formel (187) von Boys

$$\begin{aligned} q_B \left(\frac{2}{5}\eta \right) &= \frac{d_m^{3/2} \sqrt{\mathbf{g}\varrho'}}{4\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\varrho_W}{\varrho_S}} \frac{2}{5}\eta \left(\frac{2}{5}\eta - 1 \right) \\ &= q_{\text{Boys}} \frac{2}{5}\eta \left(\frac{2}{5}\eta - 1 \right). \end{aligned} \quad (357)$$

Boys beschreibt den Transport mit Hilfe einer kritischen Schwelle. So folgt aus (207) $p_{\min} = \frac{5-2\eta}{5Z_1\eta}$ für den unteren Endwert des Parameterintervalls für p in (163). Mit der Näherung (329) durch Approximation von Λ mit der Trapezregel erhält man

$$\begin{aligned} I_0^2 &\stackrel{(329)}{\approx} -\frac{p_{\min} q_B(0)}{u_T} \\ &= -\frac{q_{\text{Boys}}}{u_T} \frac{5-2\eta}{5Z_1\eta} \frac{2}{5}\eta \left(\frac{2}{5}\eta - 1 \right) \\ &= -\frac{2q_{\text{Boys}}}{125Z_1u_T} (5-2\eta)(2\eta-5) \\ &= \frac{2q_{\text{Boys}}}{125Z_1u_T} \underbrace{(5-2\eta)^2}_{f_{\approx}(\eta)}. \end{aligned} \quad (358)$$

Die Lösung $I_0 = 0$ im Fall $\eta = \frac{5}{2}$ lässt die Transportkörper in eine ebene Sohle entarten.

Mit $\sigma := Z_1 p$ ergibt exakte Rechnung $\int_0^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p}$ zu

$$\begin{aligned}
\int_0^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} &= q_{\text{Boys}} \int_0^p \left(\frac{2}{5} + Z_1 p \right) \eta \left[\left(\frac{2}{5} + Z_1 p \right) \eta - 1 \right] d\tilde{p} \\
&= \frac{q_{\text{Boys}}}{Z_1 \eta} \int_{2\eta/5}^{(\frac{2}{5} + \sigma)\eta} \tilde{\eta} (\tilde{\eta} - 1) d\tilde{\eta} \\
&= \frac{q_{\text{Boys}}}{6Z_1 \eta} \left[\tilde{\eta}^2 (2\tilde{\eta} - 3) \right]_{2\eta/5}^{(\frac{2}{5} + \sigma)\eta} \\
&= \frac{1}{6Z_1 \eta} \left[\tilde{\eta} (2q_B(\tilde{\eta}) - q_{\text{Boys}} \tilde{\eta}) \right]_{2\eta/5}^{(\frac{2}{5} + \sigma)\eta} \\
&= \frac{1}{6Z_1} \left\{ \frac{4}{5} (q_B(p) - q_B(0)) + Z_1 p \left[2q_B(p) - \left(\frac{4}{5} + Z_1 p \right) q_{\text{Boys}} \eta \right] \right\} \quad (359)
\end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(p) &= \frac{1}{u_T} \left(\int_0^p q_B(\tilde{p}) d\tilde{p} - p q_B(p) \right) \\
&= \frac{1}{6Z_1 u_T} \left\{ \frac{4}{5} (q_B(p) - q_B(0)) - Z_1 p \left[4q_B(p) + \left(\frac{4}{5} + Z_1 p \right) q_{\text{Boys}} \eta \right] \right\} \quad (360)
\end{aligned}$$

Für $p = p_{\min}$ ergibt sich speziell

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(p_{\min}) &= \frac{-1}{6Z_1 u_T} \left\{ \frac{4}{5} q_B(0) + \left(\frac{1}{\eta} - \frac{2}{5} \right) q_{\text{Boys}} \eta \right\} \\
&= -\frac{q_{\text{Boys}} \eta}{6Z_1 u_T} \left\{ \frac{8}{25} \left(\frac{2}{5} \eta - 1 \right) + \frac{1}{\eta^2} - \frac{4}{25} \right\} \\
&= -\frac{q_{\text{Boys}}}{Z_1 u_T} \left(\frac{8\eta^2}{375} - \frac{2\eta}{25} + \frac{1}{6\eta} \right) \quad (361)
\end{aligned}$$

Seien $f_{\approx}(\eta) := \frac{(5-2\eta)^2}{125}$ und $f_{=}(\eta) := \frac{8\eta^2}{375} - \frac{2\eta}{25} + \frac{1}{6\eta}$, so gilt nach der zuvor betrachteten Näherung $\Lambda_0(p_{\min}) \approx \frac{q_{\text{Boys}}}{Z_1 u_T} f_{\approx}(\eta)$ über (329) und jetzt für die exakte Rechnung nach (361) $\Lambda_0(p_{\min}) = \frac{q_{\text{Boys}}}{Z_1 u_T} f_{=}(\eta)$. Anhand der Abb. 83 werden f_{\approx} und $f_{=}$ skizziert.

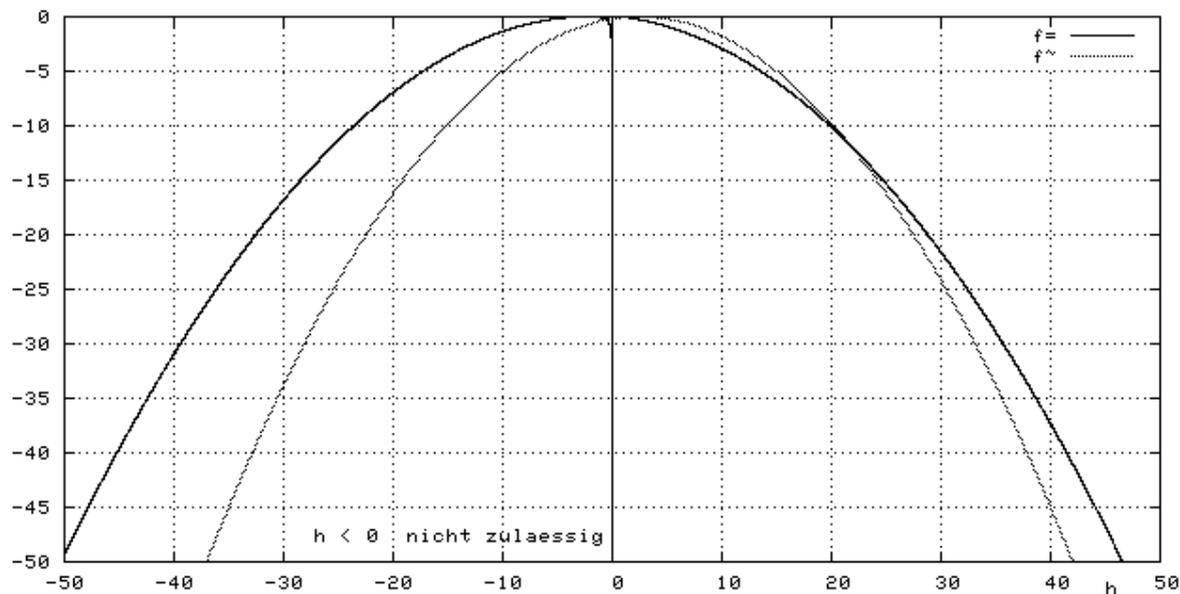


Abbildung 83: Grafik zu der Näherung f_{\approx} und zu $f_{=}$ aus der exakten Rechnung. $f > 0 \implies \Lambda_0(p_{\min}) > 0 \implies I_0^2 < 0$. Demnach kommen nur Werte $f < 0$ in Betracht. Sohlenbelastungen $\eta < 0$ sind physikalisch unzulässig; für $\eta < 1$ findet nach der Formel von Boys kein Transport statt. Relevant ist daher nur der eingerahmte Bereich des Graphen von $f_{=}$.

Explizit als Funktion in p ergibt sich $\Lambda_0 = \Lambda_0(p)$ aus (360) zu

$$\begin{aligned}
& \Lambda_0(p) \\
(360) \quad &= \frac{1}{6Z_1u_T} \left\{ \frac{4}{5} (q_B(p) - q_B(0)) - \sigma \left[4q_B(p) + \left(\frac{4}{5} + \sigma \right) q_{\text{Boys}}\eta \right] \right\} \\
&= \frac{1}{6Z_1u_T} \left\{ 4 \left(\frac{1}{5} - \sigma \right) q_B(p) - \frac{4}{5} q_B(0) - \sigma \left(\frac{4}{5} + \sigma \right) q_{\text{Boys}}\eta \right\} \\
&= \frac{q_{\text{Boys}}\eta}{6Z_1u_T} \left\{ 4 \left(\frac{1}{5} - \sigma \right) \left(\frac{2}{5} + \sigma \right) \left[\left(\frac{2}{5} + \sigma \right) \eta - 1 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{8}{25} \left(\frac{2}{5}\eta - 1 \right) - \sigma \left(\frac{4}{5} + \sigma \right) \right\} \\
&= \frac{q_{\text{Boys}}\eta}{6Z_1u_T} \left\{ 4 \left(\frac{2}{25} - \frac{\sigma}{5} - \sigma^2 \right) \left(\frac{2}{5}\eta + \sigma\eta - 1 \right) - \frac{16\eta}{125} + \frac{8}{25} - \frac{4}{5}\sigma - \sigma^2 \right\} \\
&= \frac{q_{\text{Boys}}\eta}{6Z_1u_T} \left(-4\sigma^3\eta - \frac{12}{5}\sigma^2\eta + 3\sigma^2 \right) \\
&= \frac{Z_1q_{\text{Boys}}\eta p^2}{u_T} \left(-\frac{2}{3}Z_1p + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{5}\eta \right) \right) \tag{362}
\end{aligned}$$

In Abb. 84 wird $\Lambda_0(p)$ für $\frac{Z_1q_{\text{Boys}}}{u_T} = 1$ in den Fällen $\eta = 5$, $\eta = 7,5$ und $\eta = 10$ graphisch dargestellt.

Die Funktion

$$\Delta_0(p) := \Lambda_0(p) - \Lambda_0(p_{\min}) \tag{363}$$

$$= -\frac{q_{\text{Boys}}\eta}{Z_1u_T} \left(\frac{2}{3}(Z_1p)^3 + \frac{(Z_1p)^2}{2} \left(1 - \frac{4}{5}\eta \right) - \frac{8\eta}{375} + \frac{2}{25} - \frac{1}{6\eta^2} \right) \tag{364}$$

$$= -\frac{q_{\text{Boys}}\eta}{Z_1u_T} \left(\frac{2}{3}\sigma^3 + \frac{\sigma^2}{2} \left(1 - \frac{4}{5}\eta \right) - \frac{8\eta}{375} + \frac{2}{25} - \frac{1}{6\eta^2} \right) \tag{365}$$

besitzt nach ihrer Konstruktion eine Nullstelle in $p = p_{\min}$.

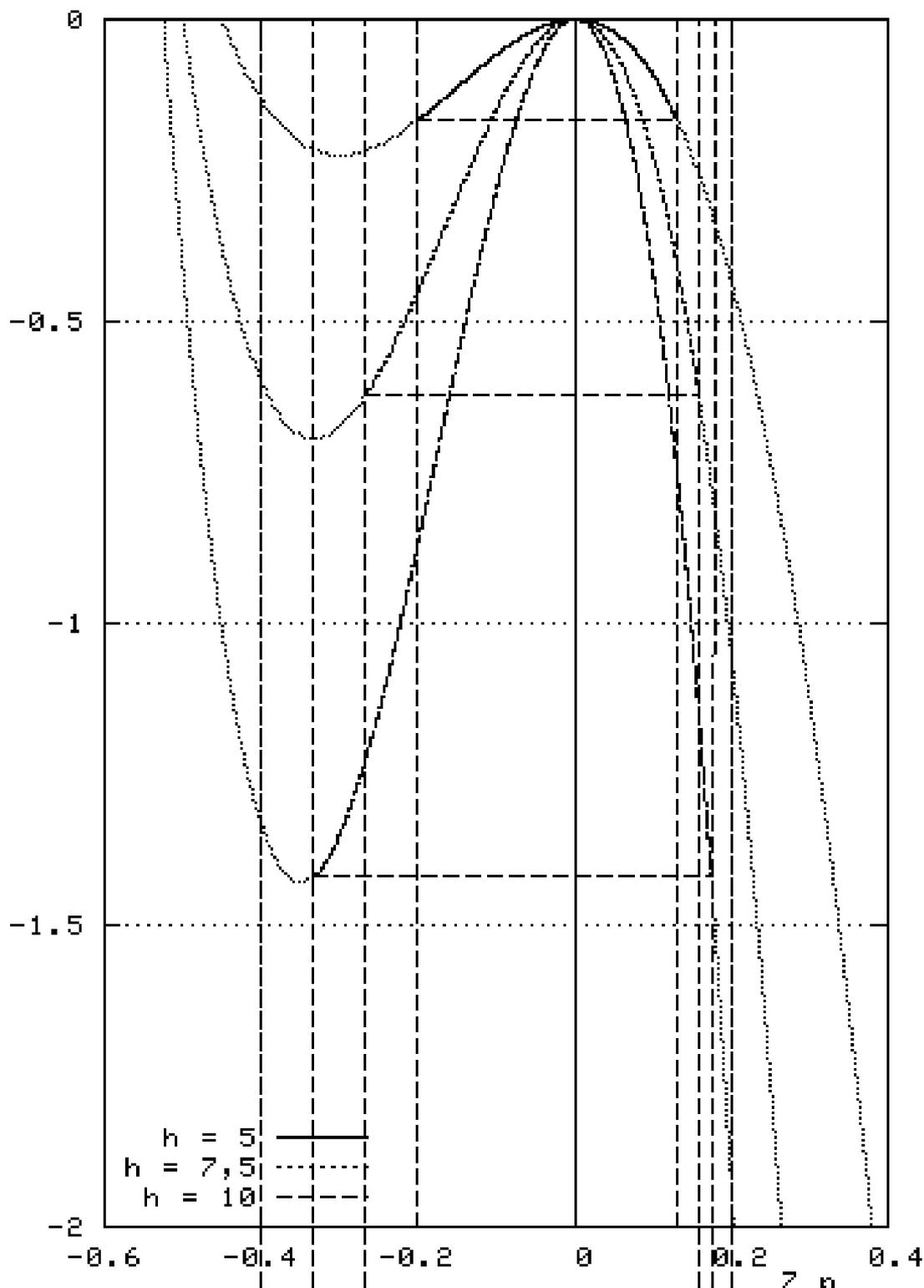


Abbildung 84: Nach der Formel von Boys ergibt sich für Λ_0 die Kubische Funktion (362) in p . Neben der Nullstelle in im lokalen Maximum $p = 0$ nimmt sie, abhängig von η lokale Minima an. Diese Minima liegen jedoch bei Abszissen $p < p_{\min}$. Für $p > 0$ fällt Λ_0 streng in p unbeschränkt. Demnach gibt es ein $p_{\max} > 0$ mit $\Lambda_0(p_{\max}) = \Lambda_0(p_{\min})$.

Division des kubischen Polynoms $\sigma^3 + \frac{3\sigma^2}{4\eta} \left(1 - \frac{4}{5}\eta\right) - \frac{4}{125} + \frac{3}{25\eta} - \frac{1}{4\eta^3}$ durch $\sigma - \frac{1}{\eta} + \frac{2}{5}$ ergibt das Binom $\sigma^2 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4\eta}\right)\sigma + \frac{1}{4\eta^2} + \frac{1}{10\eta} - \frac{2}{25}$ in σ . Für $\eta \geq \frac{25}{12}$ und $\eta \leq -\frac{15}{12}$ besitzt letzteres die Nullstelle(n)

$$\sigma_{1/2} = \frac{-4\eta - 5 \pm \sqrt{144\eta^2 - 120\eta - 375}}{40\eta} \quad (366)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-4\eta - 5 \pm \sqrt{(12\eta - 5)^2 - 400}}{40\eta} \\ &= \frac{-4\eta - 5 \pm \sqrt{(12\eta + 15)(12\eta - 25)}}{40\eta}. \end{aligned} \quad (367)$$

Wird eine Sohlenbelastungszahl $\eta \geq \frac{25}{12}$ vorausgesetzt, besitzt demnach $\Delta_0(p)$ eine positive Nullstelle p_{\max} mit $p_{\max} = \frac{-4\eta - 5 \pm \sqrt{(12\eta + 15)(12\eta - 25)}}{40\eta}$. Analog zu dem Grenzwert von p_{\min} nach (210) ergibt sich hier für hohe Sohlenbelastungen $\lim_{\eta \rightarrow \infty} p_{\max} = \frac{1}{5Z_1}$.

Aus $\left(\frac{2}{5} + Z_1 p_{\max}\right)\eta = \frac{1}{2} \left(\eta + \frac{\sqrt{(12\eta + 15)(12\eta - 25)}}{20} - \frac{1}{4}\right)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & q_B(p_{\max}) \\ &= \frac{q_{\text{Boys}}}{4} \left(\eta + \frac{\sqrt{(12\eta + 15)(12\eta - 25)}}{20} - \frac{1}{4}\right) \left(\eta + \frac{\sqrt{(12\eta + 15)(12\eta - 25)}}{20} - \frac{9}{4}\right) \\ &= \frac{q_{\text{Boys}}}{4} \left(\frac{34}{25}\eta^2 - \frac{14}{5}\eta + \frac{\sqrt{(12\eta + 15)(12\eta - 25)}}{2} \left(\frac{\eta}{5} - \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{16}\right). \end{aligned} \quad (368)$$

Weiter ergibt sich aus (361) I_0^2 exakt zu $I_0^2 = \frac{q_{\text{Boys}}}{Z_1 u_T} \frac{16\eta^3 - 100\eta^2 + 125}{375\eta}$ und so

$$I_0 = \sqrt{\frac{q_{\text{Boys}}}{Z_1 u_T} \frac{\sqrt{16\eta^3 - 100\eta^2 + 125}}{5\sqrt{15\eta}}}. \quad (369)$$

Aus (177) folgt schließlich

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{5}{2} \sqrt{\frac{15}{2}} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \sqrt{q_{\text{Boys}} \eta} \frac{\frac{34}{25}\eta^2 - \frac{14}{5}\eta + \frac{\sqrt{(12\eta+15)(12\eta-25)}}{2} \left(\frac{\eta}{5} - \frac{1}{4}\right) + \frac{9}{16}}{\sqrt{16\eta^3 - 100\eta^2 + 125}}. \quad (370)$$

C.14 Das Transportmodell (163) in Verbindung mit der Formel von Meyer-Peter

Bei der Formel (189) von Meyer-Peter rechnet es sich am einfachsten mit den dimensionslosen Zahlen Φ und F_r^* . Hier soll demnach $\Phi(B_0(p_{\min})) = 0$ gelten. Der Ansatz mit (207) wird hier nochmals — mutatis mutandis — mit F_r^* anstelle von τ wiederholt. τ_c wird durch den von Meyer-Peter ermittelten Zahlenwert von $\frac{1}{20}$ für die kritische Feststoff-Froude-Zahl ersetzt, also

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{5} + Z_1 p_{\min}\right) F_r^* &= \frac{1}{20} \\ \Leftrightarrow p_{\min} &= \frac{\frac{1}{20F_r^*} - \frac{2}{5}}{Z_1} \\ &= \frac{1 - 8F_r^*}{20Z_1 F_r^*}. \end{aligned} \quad (371)$$

Offensichtlich gilt $p_{\min} < 0$ erst, wenn $F_r^* > \frac{1}{8}$ ist. Für $p = 0$ ergibt sich nach der Formel (189) von Meyer-Peter

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{2}{5}F_r^*\right) &= \left(\frac{2}{5}F_r^* - \frac{1}{20}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{5\sqrt{5}} \left(2F_r^* - \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (372)$$

Für Transportformeln, die nach (52) über das dimensionslose Φ ausgedrückt werden, lässt sich Λ ausdrücken mit

$$\Lambda_{p_0}(p) = \frac{\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{u_T} \left(\int_{p_0}^p \Phi(\tilde{p}) d\tilde{p} - \left[\tilde{p} \Phi(\tilde{p}) \right]_{p_0}^p \right) \quad (373)$$

Setzt man $p_0 = 0$ und entnimmt für (373) Φ aus der Formel (189) von Meyer-Peter, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \Lambda_0(p) \\
&= \frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{u_T} \left\{ \frac{1}{Z_1 F_r^*} \int_{\frac{2}{5}F_r^* - \frac{1}{20}}^{(\frac{2}{5} + Z_1 p)F_r^* - \frac{1}{20}} \tilde{F}_r^{*\frac{3}{2}} d\tilde{F}_r^* - p \left(\left(\frac{2}{5} + Z_1 p \right) F_r^* - \frac{1}{20} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \\
&= \frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{u_T} \left\{ \frac{2}{5Z_1 F_r^*} \left[\tilde{F}_r^{*\frac{5}{2}} \right]_{\frac{2}{5}F_r^* - \frac{1}{20}}^{(\frac{2}{5} + Z_1 p)F_r^* - \frac{1}{20}} - p \left(\left(\frac{2}{5} + Z_1 p \right) F_r^* - \frac{1}{20} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \\
&= \frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{Z_1 u_T} \left\{ \frac{2}{5} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} + Z_1 p - \frac{1}{20F_r^*} \right) - Z_1 p \right] \Phi(p) - \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{20F_r^*} \right) \Phi(0) \right\} \\
&= \frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{5Z_1 u_T} \left\{ \left(\frac{4}{5} - 3Z_1 p - \frac{1}{10F_r^*} \right) \Phi(p) - 2 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{20F_r^*} \right) \Phi(0) \right\} \quad (374)
\end{aligned}$$

Da $q_B(p_{\min})$ und somit auch $\Phi(p_{\min})$ verschwinden, folgt speziell

$$\begin{aligned}
& \Lambda_0(p_{\min}) \\
&= -\frac{2}{5} \frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{Z_1 u_T} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{20F_r^*} \right) \Phi(0) \quad (375)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(372)}{=} -\frac{2}{125\sqrt{5}} \frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{Z_1 u_T} \left(2 - \frac{1}{4F_r^*} \right) \left(2F_r^* - \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{2}{125\sqrt{5}} \frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{Z_1 u_T} \left(4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*} \right) \sqrt{2F_r^* - \frac{1}{4}} \quad (376)
\end{aligned}$$

und so

$$I_0^2 = \frac{2}{125\sqrt{5}} \frac{\sqrt{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{Z_1 u_T} \left(4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*} \right) \sqrt{2F_r^* - \frac{1}{4}} \quad (377)$$

$$I_0 = \frac{1}{5\sqrt[4]{5}} \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\sqrt[4]{\mathbf{g}\varrho'd_m^3}}{\sqrt{Z_1 u_T}} \sqrt{4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*}} \sqrt[4]{2F_r^* - \frac{1}{4}}. \quad (378)$$

Nach (374) ergibt sich weiter die Differenz $\Delta_0(p) := \Lambda_0(p) - \Lambda_0(p_{\min})$ zu

$$\Delta_0(p) = \frac{\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{5Z_1 u_T} \left(\frac{4}{5} - 3Z_1 p - \frac{1}{10F_r^*} \right) \Phi(p) \quad (379)$$

Neben p_{\min} mit $\Phi(p_{\min}) = 0$ besitzt Δ_0 eine weitere Nullstelle p_{\max} , für die gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4}{5} - 3Z_1 p_{\max} - \frac{1}{10F_r^*} \\ \Leftrightarrow p_{\max} &= \frac{1}{15Z_1} \left(4 - \frac{1}{2F_r^*} \right) \end{aligned} \quad (380)$$

Hier ist offenbar $\lim_{F_r^* \rightarrow \infty} p_{\max} = \frac{4}{15Z_1}$. Mit $\Phi(p_{\max}) = \frac{1}{5\sqrt{5}} \left(\frac{14}{5} F_r^* - \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}}$ ergibt (177) näherungsweise die Periodenlänge

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} &\approx \frac{2\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} q_B(p_{\max})}{I_0 u_T} \\ &= 2\sqrt[4]{5} \sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \frac{\left(\frac{14}{5} F_r^* - \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*}} \sqrt[4]{2F_r^* - \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{20}}{10\sqrt{50}} \sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \frac{56F_r^* - 5}{\sqrt[4]{8F_r^* - 1}} \sqrt{\frac{56F_r^* - 5}{4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*}}} \end{aligned} \quad (381)$$

$$\approx \frac{\sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{35} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \frac{56F_r^* - 5}{\sqrt[4]{8F_r^* - 1}} \sqrt{\frac{56F_r^* - 5}{4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*}}} \quad (382)$$

Wegen $\lim_{F_r^* \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{56F_r^* - 5}{4F_r^* - 1 + \frac{1}{16F_r^*}}} = \sqrt{14}$ lässt sich bei starkem Transport auch mit

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{\sqrt[4]{20}}{10} \sqrt{\frac{7}{25}} \sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \frac{56F_r^* - 5}{\sqrt[4]{8F_r^* - 1}} \quad (383)$$

rechnen.

C.15 Das Transportmodell (163) in Verbindung mit der Formel von Engelund-Hansen

Wie zur Formel (189) von Meyer-Peter im vorigen Teilabschnitt wird auch hier mit den dimensionslosen Zahlen Φ und F_r^* gerechnet. Als Funktion in F_r^* , bzw. hier als Funktion in $B_0 = \left(\frac{2}{5} + Z_1 p\right) F_r^*$ lautet nach Engelund-Hansen $\Phi = \frac{B_0^{\frac{5}{2}}}{10}$. Analog zu (374) lässt sich hier Λ_0 berechnen zu

$$\Lambda_0(p) = \frac{\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{7Z_1 u_T} \left\{ \left(\frac{4}{5} - 5Z_1 p \right) \Phi(p) - \frac{4}{5} \Phi(0) \right\} \quad (384)$$

Weiter ergibt sich I_0^2 zu

$$\begin{aligned} I_0^2 &= 2\Lambda_0(p_{\min}) \\ &= \frac{8}{35} \frac{\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{Z_1 u_T} \Phi(0) \\ &= \frac{16}{38125} \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{F_r^{*\frac{5}{2}} \sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{Z_1 u_T}, \end{aligned} \quad (385)$$

und so

$$I_0 = \frac{4}{25\sqrt{5}} \sqrt[4]{\frac{2}{5}} \frac{F_r^{*\frac{5}{4}} \sqrt[4]{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{\sqrt{Z_1 u_T}}. \quad (386)$$

Die Differenzfunktion

$$\begin{aligned} \Delta_0(p) &:= \Lambda_0(p) - \Lambda_0(p_{\min}) \\ &= \frac{\sqrt{\mathbf{g} \varrho' d_m^3}}{7Z_1 u_T} \left(\frac{4}{5} - 5Z_1 p \right) \Phi(p) \end{aligned} \quad (387)$$

besitzt neben der Nullstelle in $p = p_{\min}$ eine weitere in $p = p_{\max}$ mit $p_{\max} = \frac{4}{25Z_1}$.

So wie bei den Geschiebformeln ohne kritische Schwelle nach (211) $p_{\min} = -\frac{2}{5Z_1}$ nur mittelbar über Z_1 von der Schubspannung abhängt, so hängt hier auch p_{\max} nur mittelbar über Z_1 von ihr ab. Aus

$$\begin{aligned}\Phi(p_{\max}) &= \frac{1}{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{25} \right)^{\frac{5}{2}} F_r^{*\frac{5}{2}} \\ &= \frac{18}{3125} \sqrt{\frac{6}{5}} F_r^{*\frac{5}{2}}\end{aligned}\quad (388)$$

folgt mit (386)

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{9\sqrt{61}}{125} \sqrt[4]{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{Z_1}{u_T}} \sqrt[4]{\mathbf{g} \rho' d_m^3} F_r^{*\frac{5}{4}}\quad (389)$$

analog zu den Rechnungen zu (381).