

# SCHRIFTENREIHE

## GEOINFORMATIONSDIENST DER BUNDESWEHR

Herausgeber: Leiter GeoInfoDBw

### Rechenzeitoptimierung, Robustifizierung und Tuning eines Kalmanfilters zur Datenfusion für Navigationsanwendungen

Andreas Dachs



Heft 3, 2010



Heft 3, 2010

**UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR MÜNCHEN**  
**FAKULTÄT FÜR LUFT- UND RAUMFAHRTTECHNIK**

Thema der Dissertation:           Rechenzeitoptimierung, Robustifizierung und Tuning  
eines Kalmanfilters zur Datenfusion für Navigationsanwendungen

Verfasser:                           Andreas Dachs

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:                   Univ.-Prof. Dr. Axel Schulte, UniBw München

1. Berichterstatter:           Univ.-Prof. Dr. Bernd Eissfeller, UniBw München

2. Berichterstatter:           Univ.-Prof. Dr. Bernhard Hofmann-Wellenhof, TU Graz

Tag der Prüfung:                23. Juli 2010

Mit der Promotion erlangter akademischer Grad:   Doktor der Ingenieurwissenschaften  
(Dr.-Ing.)

Neubiberg, den 23. Juli 2010

---

Herausgeber: Leiter Geoinformationsdienst der Bundeswehr  
Bearbeitung und Herstellung: Amt für Geoinformationswesen der Bundeswehr Euskirchen 2010

ISSN 1865-6978

Druck: D01-IX.10-6-G101096



## Vorwort

*Effektive militärische Führung ist ohne genaue Kenntnis über die aktuelle und zukünftige Gesamtlage nur eingeschränkt möglich.*

*Das Wissen über die Position der eigenen und feindlichen Kräfte ist integraler Bestandteil dieser Gesamtlage.*

*Navigation gehört aus diesem Grund zu den militärischen Kernfähigkeiten.*

*Die fortschreitende Technologisierung im Rahmen der vernetzten Gefechtsführung hat jedoch Auswirkungen auf die militärische Navigation.*

*Zum Einen besteht die Notwendigkeit immer kleinere Bestandteile des modernen Gefechtsfeldes, bis hin zum einzelnen Soldaten, unabhängig betrachten zu können.*

*Zum Anderen sind durch die Existenz des „Navigation Warfare“ oder der Möglichkeit zum „Precision Strike“ Bedingungen erforderlich, die deutlich erhöhte Anforderungen hinsichtlich Genauigkeit, Kontinuität, Verfügbarkeit und Integrität an die Navigation stellen.*

*Die Leistung integrierter Navigationssysteme muss dazu durch optimale Kombination unterschiedlicher Navigationsverfahren unter Ausnutzung alternativer physikalischer Prinzipien maximiert werden.*

*Hauptaugenmerk liegt dabei neben der Leistung des autonomen, oftmals inertialen Navigationssystems im Kern jedes integrierten Navigationssystems, auf der optimalen Anbindung der weiteren, zumeist nichtautonomen Sensorik.*



Schmidt-Bleker  
Brigadegeneral

Euskirchen, September 2010



# Motivation

Diese Arbeit verfolgt drei grundlegende Ziele. Erstens werden Navigationsdifferentialgleichungssysteme für drei unterschiedliche Parametrisierungen ohne Vereinfachungen oder Vernachlässigungen und in einheitlicher Art und Weise hergeleitet sowie beurteilt. Der Grund dafür ist die nicht gegebene objektive Vergleichbarkeit der unterschiedlichen Parametrisierungen in der Standardliteratur, da dort stets andere Annahmen oder Reihenfolgen verwendet werden. Die Herleitung erfolgt innerhalb dieser Arbeit dabei konsequenterweise aus Newtonscher Physik über eine Störungsrechnung bis hin zur Linearisierung. Bei den gewählten Parametrisierungen handelt es sich um die drei üblicherweise benutzten Parametrisierungen der Navigation. Die erste Parametrisierung in erdfesten kartesischen Parametern für Position und Geschwindigkeit bietet sich dabei auf Grund der einfachen Struktur vor allem für die Integration mit Satellitennavigation an. Die zweite Parametrisierung mit erdfesten ellipsoidischen Positionsparametern und horizontfesten kartesischen Geschwindigkeitsparametern wird normalerweise in der Luftfahrt verwendet. Die dritte Parametrisierung in erdfesten ellipsoidischen Parametern für Position und Geschwindigkeit bietet im Gegenzug dazu Vorteile durch die beinahe ausschließliche Verwendung von Winkeln beziehungsweise deren zeitliche Ableitungen als Zustände. Dies führt zu gleichmäßiger Größenordnung der Einträge in der Jacobimatrix und verbessert deren Kondition. Die Orientierungsparameter werden dabei in absoluten Zuständen in Quaternionen und in Zustandsstörungen in multiplikativen Eulerwinkelstörungen parametrisiert. Dies verhindert zum einen Singularitäten in den absoluten Zuständen und zum anderen Näherungsfehler bei den Rotationsmatrizen in Zustandsstörungen. Die hergeleiteten Navigationsdifferentialgleichungssysteme werden mit den Navigationsdifferentialgleichungssystemen der jeweiligen Standardliteratur verglichen und interpretiert und zusätzlich in einer fehlerfreien Simulation verifiziert. Die Auswertung der fehlerfreien Simulation ergibt eine Unabhängigkeit der Navigationsgenauigkeit von der gewählten Parametrisierung für praktische Anwendungen und dient damit gleichzeitig als Nachweis der Herleitung.

***Als erstes Ergebnis liefert diese Arbeit verifizierte Templates zur direkten und einfachen Verwendung für jede der drei genannten Parametrisierungsansätze in den Ausbaustufen: nichtlinear in absoluten Zuständen, nichtlinear in Zustandsstörungen, linearisiert in Zustandsstörungen und zusätzlich vereinfacht in Zustandsstörungen für praktische Anwendungen.***

Zweitens beschäftigt sich diese Arbeit mit der analytischen Beobachtbarkeitsanalyse inertialer Sensorfehler. Es werden allgemeingültige Aussagen entwickelt, die, bezogen auf die vorliegende Dynamik, Rückschlüsse auf die Modellierung des inertialen Sensorfehlermodells erlauben. Ziel ist es dabei, von vornherein nicht beobachtbare inertielle Sensorfehler im Zustandsvektor zu identifizieren und sich auf die, für die vorliegende Anwendung wesentlichen, inertialen Sensorfehler zu fokussieren. Dies ist insbesondere für die gezielte Spezifikation der Inertialsensorik vor Projektbeginn und für die Abschätzung der zu erwartenden Konvergenz der Sensorfehlerschätzung in einer speziellen Anwendung von besonderer Bedeutung. Die theoretischen Aussagen werden wiederum im Rahmen einer Simulation bestätigt.

***Als zweites Ergebnis liefert diese Arbeit übersichtliche Templates, mit denen die beobachtbaren inertialen Sensorfehler dynamikbezogen beziehungsweise manöverbezogen direkt ausgewählt werden können.***

Auf Grund der immer noch beschränkten Rechenkapazität moderner Avionikrechner muss zwingend der Kalmanfilteralgorithmus optimiert werden. Die Arbeit diskutiert dabei mehrere Ansätze wie beispielsweise Sparse Matrix Techniken oder Blockmatrixzerlegung. Nach Abwägung der Vor- und Nachteile der einzelnen Methoden wird ein blockpartitionierter optimaler Kalmanfilter entwickelt. Durch Aufspaltung der beteiligten Matrizen und unter zusätzlicher Beachtung ihrer besonderen Eigenschaften (Diagonalmatrix, Dreiecksmatrix, etc.) gelingt es, den Rechenzeitbedarf zumindest in dem Maße zu senken, dass die Echtzeitfähigkeit des im Rahmen der gesamten Arbeit entwickelten Kalmanfilters mit bis zu 39 Zuständen auf konventionellen Prozessorkarten erhalten bleibt. Durch eine Simulation wird die Leistung des blockpartitionierten Kalmanfilters im Vergleich zum konventionellen Kalmanfilter nachgewiesen.

***Als drittes Ergebnis dieser Arbeit ist der Algorithmus eines blockpartitionierten optimalen Kalmanfilters für generelle Anwendungen, der die direkte Einbindung von Satellitenrohdaten beziehungsweise barometrischen Höhendaten zulässt und eine inertielle Sensorfehlerschätzung beinhaltet, wiederum im Rahmen eines Templates übersichtlich dargestellt.***

Durch ein eigenständiges Testkonzept wird eine systematische und vollständige Überprüfung der oben angesprochenen Ergebnisse sichergestellt. So wird vermieden, dass sich im Verlauf der Herleitungen Fehler einschleichen können. Die Verifikation der wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit ist damit gewährleistet.

***Alle Ergebnisse dieser Arbeit werden im Rahmen eines unabhängigen und systematischen Testkonzepts in einer kinematischen Simulation verifiziert.***

Neben den genannten drei Hauptzielen werden zudem die zur Demonstration eines Navigationssystems nötigen Grundlagen dargestellt und erklärt. Dies sind beispielsweise die Herleitung der Beobachtungsgleichungen für die Kalmanfilterkorrektur für Satellitenrohdaten und barometrische Höhendaten sowie die analytische Herleitung zweier Erdschwerefeldmodelle inklusive deren partiellen Ableitungen. Abschließend werden im Rahmen einer Simulation alle bisherigen theoretischen Ergebnisse praktisch bestätigt. Die Richtigkeit der Simulation selbst wurde im Rahmen fehlerfreier Simulationsläufe getestet. Die auftretenden Fehler sind auf die begrenzte Genauigkeit von Gleitpunktzahlen in digitalen Rechneranlagen zurückzuführen. Abschließend werden alle Ergebnisse in Form einer dynamischen Simulation evaluiert.

# Motivation

This dissertation pursues three fundamental objectives. Firstly, navigation differential equations are derived and assessed in a unified way for three different parameterizations without any simplifications or omissions. The reason for this is the non given objective comparison between the different parameterizations from standard literature, because there are always other assumptions made or another calculation order is used. For that reason, the derivation during this dissertation starts from Newton's laws of mechanics, consequently goes on with the computation of error states and finally ends with a linearization. The chosen parameterizations are the most commonly used parameterizations in navigation. The first parameterization in earth-centred-earth-fixed Cartesian parameters for position and velocity is normally used for satellite navigation applications because of its simple structure. The second parameterization in earth-centred-earth-fixed ellipsoidal parameters for position and local-level Cartesian parameters for velocity is generally needed in aircraft applications. In comparison, the third parameterization in earth-centred-earth-fixed ellipsoidal parameters for position and velocity has advantages because of the nearly complete use of angles and its derivatives as states. This leads to a similar order of magnitude of the entries in the Jacobian matrix and because of this improves its condition number. The parameters of rotation are parameterized in quaternions for total states and in multiplicative Euler angles for error states. This prevents, on the one hand, singularity in total state space and, on the other hand, linearization errors in the rotation matrices in error state space. The navigation differential equations of this work are interpreted, compared with the ones from standard literature and additionally tested against each other in an inertial error free simulation. The analysis of the simulation testifies the independency of the navigation accuracy from the chosen parameterization for practical purposes and for that reason serves as a verification of the presented theoretic derivation.

***This dissertation provides verified templates for further easier use for the three main navigation differential equations mentioned above in the versions: nonlinear in total state space, nonlinear in error state space, linearized in error state space and, in addition, simplified in error state space for practical purposes.***

Secondly, this work focuses on the analytic observability of inertial sensor errors. Universally applicable rules are derived based on given dynamics and they allow conclusions for the modelling of the inertial sensor error model. Thereby, the objective is to identify non observable inertial sensor errors from the start and to focus on the essential inertial sensor errors for the given application. This is particularly important for the definition of the inertial system of sensors at the beginning of a project and the evaluation of the convergence of the sensor error estimation for special applications. The theoretic statements are also verified in a simulation.

***The second result of this dissertation are clear templates which allow, based on certain dynamics or manoeuvres, the direct selection of the observable inertial sensor errors.***

Thirdly, due to the still restricted computation power of modern avionics processor cards it is necessary to optimize the conventional Kalman filter algorithm. In this dissertation different approaches are discussed, for example, sparse matrix techniques or block matrix reduction. The pros and cons of the methods are weighed against each other and, finally, a block partitioned optimal Kalman filter is developed. Due to the reduction of the involved matrices and the additional consideration of their special characteristics (diagonal matrix, triangle matrix, etc.) the computational need of the block partitioned Kalman filter with up to 39 states is reduced in a way that the real time capability is still guaranteed on conventional processor cards. The block partitioned Kalman filter is tested against the conventional Kalman filter in a simulation and its performance is verified.

***Finally the complete algorithm for a block partitioned optimal Kalman filter for general purposes is presented in a template. This algorithm takes into account the direct integration of raw satellite data and barometric height data and includes an inertial sensor error estimation.***

An autonomous test concept ensures the systematic and complete review of the above mentioned results. Because of this, the occurrence of errors during the derivations is prohibited. Therefore, the verification of the results of this work is guaranteed.

***The results of this work are verified in a kinematic simulation within the framework of an independent and systematic test concept.***

Besides the three main objectives this dissertation explains the necessary additional basics for the demonstration of a navigation system. These are, for example, the derivation of the observation equations for the Kalman filter correction for raw satellite data and barometric height data or the analytic development of two earth gravity models including their partial derivatives. Finally, the theoretic results are practically confirmed in a simulation. The verification of the simulation itself is done in an error free environment. The resulting simulation accuracy can be tracked back to the limited numeric accuracy of floating point operations in digital applications. Finally, all results are evaluated in a dynamical simulation.

# Inhaltsverzeichnis

MOTIVATION .....	5
INHALTSVERZEICHNIS.....	7
ABKÜRZUNGS- UND SYMBOLVERZEICHNIS .....	11
<b>I EINLEITUNG .....</b>	<b>13</b>
<b>II GRUNDLAGEN .....</b>	<b>15</b>
1. BEZUGSSYSTEME.....	15
1.1. <i>Raumfestes Bezugssystem</i> .....	15
1.2. <i>Erdfestes Bezugssystem</i> .....	16
1.3. <i>Horizontfestes Bezugssystem</i> .....	16
1.4. <i>Körperfestes Bezugssystem</i> .....	17
2. BEZUGSACHSENTRANSFORMATION .....	17
2.1. <i>zwischen dem raumfesten und dem erdfesten Bezugssystem</i> .....	18
2.2. <i>zwischen dem erdfesten und dem horizontfesten Bezugssystem</i> .....	19
2.3. <i>zwischen dem horizontfesten und dem körperfesten Bezugssystem</i> .....	20
2.4. <i>zwischen dem raumfesten und dem horizontfesten Bezugssystem</i> .....	21
2.5. <i>zwischen dem raumfesten und dem körperfesten Bezugssystem</i> .....	22
3. ZUSAMMENFASSUNG .....	22
A TRANSFORMATION ELLIPSOIDISCHER PARAMETER.....	23
<b>III KINEMATIK.....</b>	<b>26</b>
1. NICHTLINEARE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN IN ABSOLUTEN ZUSTÄNDEN .....	27
1.1. <i>Orientierungsdifferentialgleichungssystem</i> .....	28
1.1.1 in Eulerwinkeln.....	28
1.1.2 in Quaternionen .....	30
1.2. <i>Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungssystem</i> .....	31
1.3. <i>Navigationsdifferentialgleichungssystem</i> .....	34
1.3.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten .....	34
1.3.2 in gemischten Koordinaten .....	35
1.3.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten.....	35
2. NICHTLINEARE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN IN ZUSTANDSSTÖRUNGEN .....	35
2.1. <i>Orientierungsdifferentialgleichungssystem</i> .....	36
2.2. <i>Geschwindigkeitsdifferentialgleichungssystem</i> .....	37
2.3. <i>Positionsdifferentialgleichungssystem</i> .....	39
2.4. <i>Navigationsdifferentialgleichungssystem</i> .....	40
2.4.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten .....	40
2.4.2 in gemischten Koordinaten .....	40
2.4.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten.....	41
3. LINEARISIERTE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN IN ZUSTANDSSTÖRUNGEN .....	41
3.1. <i>Orientierungsdifferentialgleichungssystem</i> .....	42
3.2. <i>Geschwindigkeitsdifferentialgleichungssystem</i> .....	42
3.3. <i>Positionsdifferentialgleichungssystem</i> .....	44
3.4. <i>Navigationsdifferentialgleichungssystem</i> .....	45
3.4.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten .....	45
3.4.2 in gemischten Koordinaten .....	45
3.4.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten.....	46
4. LITERATURVERGLEICH DER LINEARISIERTEN BEWEGUNGSGLEICHUNGEN IN ZUSTANDSSTÖRUNGEN .....	46
4.1. <i>in erdfesten kartesischen Koordinaten</i> .....	47
4.2. <i>in gemischten Koordinaten</i> .....	48
4.3. <i>in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten</i> .....	49
5. VEREINFACHTE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN IN ZUSTANDSSTÖRUNGEN .....	51
5.1. <i>für Navigation-Grade IMU</i> .....	51
5.2. <i>für Tactical-Grade IMU</i> .....	52
5.3. <i>für Rate-Grade IMU</i> .....	53
6. ZUSAMMENFASSUNG .....	53
A BEWEGUNGSGLEICHUNGEN ZU ANSATZ 1 .....	55
B BEWEGUNGSGLEICHUNGEN ZU ANSATZ 2 .....	59
C BEWEGUNGSGLEICHUNGEN ZU ANSATZ 3 .....	66

<b>IV</b>	<b>MODELLBILDUNG</b> .....	<b>74</b>
1.	ERDSCHWEREMODELLE .....	74
1.1.	WGS84-Normalschwereformel.....	74
1.2.	Erdschwerefeld als Reihenentwicklung .....	75
2.	BEOBACHTUNGSGLEICHUNGEN .....	78
2.1.	für Positionsbeobachtungen .....	79
2.1.1	in erdfesten kartesischen Koordinaten.....	79
2.1.2	in gemischten Koordinaten.....	79
2.1.3	in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten .....	80
2.2.	für Geschwindigkeitsbeobachtungen.....	80
2.2.1	in erdfesten kartesischen Koordinaten.....	80
2.2.2	in gemischten Koordinaten.....	80
2.2.3	in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten .....	81
2.3.	für Pseudorangebeobachtungen .....	81
2.3.1	in erdfesten kartesischen Koordinaten.....	81
2.3.2	in gemischten Koordinaten.....	82
2.3.3	in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten .....	82
2.4.	für Rangeratebeobachtungen .....	82
2.4.1	in erdfesten kartesischen Koordinaten.....	83
2.4.2	in gemischten Koordinaten.....	83
2.4.3	in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten .....	84
2.5.	für barometrische Höhenbeobachtungen .....	85
2.5.1	in erdfesten kartesischen Koordinaten.....	85
2.5.2	in gemischten Koordinaten.....	85
2.5.3	in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten .....	86
3.	FEHLERMODELLIERUNG.....	86
3.1.	Algebraische Fehlermodelle.....	86
3.1.1	Kreisel.....	86
3.1.2	Beschleunigungsmesser .....	87
3.1.3	Erdschweremodell.....	87
3.1.4	Global Navigation Satellite System .....	88
3.1.5	Barometrischer Höhenmesser .....	88
3.2.	Dynamische Verhaltensmodelle .....	88
3.2.1	Weißes Rauschen .....	89
3.2.2	Random Constant.....	89
3.2.3	Random Walk .....	89
3.2.4	Gauß-Markov-Prozess 1. Ordnung.....	89
4.	MODELLBILDUNG .....	90
4.1.	Erweiterung des Zustandsvektors.....	90
4.2.	Dynamisches Modell .....	91
4.3.	Beobachtungsmodell.....	93
5.	ZUSAMMENFASSUNG .....	93
A	BEOBACHTUNGSGLEICHUNGEN ZU ANSATZ 1.....	95
B	BEOBACHTUNGSGLEICHUNGEN ZU ANSATZ 2.....	99
C	BEOBACHTUNGSGLEICHUNGEN ZU ANSATZ 3.....	105
<b>V</b>	<b>SYSTEMTHEORIE</b> .....	<b>111</b>
1.	BEOBACHTBARKEITSANALYSE .....	111
1.1.	Nichtlineare Beobachtbarkeitsgleichungen.....	111
1.1.1	Herleitung der nichtlinearen unparametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen.....	111
1.1.2	Multiplikative Zerlegung in Näherungsrotation und Rotationsfehler.....	114
1.1.3	Formulierung der nichtlinearen unparametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen in Zustandsstörungen.....	116
1.1.4	Herleitung von nichtlinearen parametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen.....	116
1.1.5	Nichtlinearer Spezialfall „Stationary Maneouvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias.....	120
1.1.6	Nichtlinearer Spezialfall „Stationary Maneouvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler .....	121
1.1.7	Nichtlinearer Spezialfall „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias .....	122
1.1.8	Nichtlinearer Spezialfall „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler .....	123
1.1.9	Nichtlinearer Spezialfall „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias.....	124
1.1.10	Nichtlinearer Spezialfall „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler.....	125
1.2.	Linearisierte Beobachtbarkeitsgleichungen.....	125
1.2.1	Herleitung der linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen .....	125
1.2.2	Einführung von Eulerwinkelstörungen.....	128
1.2.3	Linearisierter Spezialfall „Stationary Maneouvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias .....	129
1.2.4	Linearisierter Spezialfall „Stationary Maneouvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler .....	132
1.2.5	Linearisierter Spezialfall „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias.....	134
1.2.6	Linearisierter Spezialfall „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler.....	136
1.2.7	Linearisierter Spezialfall „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias .....	137
1.2.8	Linearisierter Spezialfall „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler .....	138

1.3.	<i>Beobachtbarkeit bei mehreren Arbeitspunkten</i> .....	139
1.3.1	Zwei Arbeitspunkte mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias .....	140
1.3.2	Drei Arbeitspunkte mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler .....	142
1.3.3	Drei Arbeitspunkte mit IMU-Bias und IMU-Skalenfaktorfehler .....	143
2.	ZUSAMMENFASSUNG .....	145
A	ÜBERSICHT ZUR BEOBACHTBARKEITSANALYSE .....	146
B	BERECHNUNGEN ZUR BEOBACHTBARKEITSANALYSE .....	147
<b>VI</b>	<b>DATENFUSION UND KALMANFILTEROPTIMIERUNG</b> .....	<b>164</b>
1.	DATENFUSION .....	164
1.1	<i>Zeitdiskretisierung</i> .....	164
1.2	<i>Konventioneller Kalmanfilter</i> .....	165
2.	RECHENZEITOPTIMIERUNG .....	166
2.1	<i>Blockmatrixzerlegung</i> .....	166
2.1.1	Speichermethoden .....	166
2.1.2	Rechenmethoden .....	167
2.1.3	Bewertung .....	169
2.2	<i>Nutzung von Matrixeigenschaften</i> .....	169
2.2.1	Speichermethoden .....	169
2.2.2	Rechenmethoden .....	170
2.2.3	Bewertung .....	171
2.3	<i>Sparse Matrix Techniken</i> .....	172
2.3.1	Speichermethoden .....	172
2.3.2	Rechenmethoden .....	173
2.3.3	Bewertung .....	175
2.4	<i>Kombinierte Methoden</i> .....	175
2.4.1	Kombination Blockstruktur .....	175
2.4.2	Kombination Sparseblock .....	175
3.	ANWENDUNG DER RECHENZEITOPTIMIERUNG .....	176
3.1	<i>Kalmanprädiktion</i> .....	178
3.1.1	Zustandsprädiktion .....	179
3.1.2	Kovarianzprädiktion .....	179
3.2	<i>Kalmankorrektion</i> .....	182
3.2.1	Kalmangewinnmatrix .....	183
3.2.2	Zustandskorrektur .....	184
3.2.3	Kovarianzkorrektur .....	184
3.3	<i>Analyse des Optimierungspotentials</i> .....	186
3.3.1	Zustandsprädiktion .....	187
3.3.2	Kovarianzprädiktion .....	188
3.3.3	Kalmangewinnmatrix .....	189
3.3.4	Zustandskorrektur .....	190
3.3.5	Kovarianzkorrektur .....	190
3.4	<i>Gesamtübersicht</i> .....	191
4.	ZUSAMMENFASSUNG .....	193
A	TEMPLATE ZUM BLOCK PARTITIONED KALMAN FILTER (BPKF) .....	194
<b>VII</b>	<b>KINEMATISCHE VERIFIZIERUNG</b> .....	<b>197</b>
1.	KINEMATISCHE REFERENZTRAJEKTORIE (ANHANG A) .....	197
2.	VERIFIZIERUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN .....	199
2.1.	<i>Fehlerfreie Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen (Anhang B)</i> .....	199
2.2.	<i>Nichtlineare Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen (Anhang C)</i> .....	202
2.3.	<i>Linearisierte Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen (Anhang D)</i> .....	205
2.4.	<i>Vereinfachte Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern</i> .....	210
2.4.1	für Navigation-Grade IMU .....	210
2.4.2	für Tactical-Grade IMU (Anhang E) .....	210
2.4.3	für Rate-Grade IMU (Anhang F) .....	212
3.	VERIFIZIERUNG DER BEOBACHTBARKEITSANALYSE .....	213
3.1.	<i>Beobachtbarkeit einzelner Manöver</i> .....	213
3.1.1	Geradeausflug .....	213
3.1.2	Kursänderung mit skid-to-turn .....	215
3.1.3	Kursänderung mit bank-to-turn .....	216
3.1.4	Geschwindigkeitsänderung .....	218
3.1.5	Höhenänderung .....	220
3.2.	<i>Gesamtmanöver</i> .....	221
3.3.	<i>Beobachtbarkeit im Gesamtmanöver mit skid-to-turn</i> .....	222
3.3.1	der Kreiselfehlerparameter .....	222
3.3.2	der Beschleunigungsfehlerparameter .....	223

3.4.	<i>Beobachtbarkeit im Gesamtmanöver mit bank-to-turn</i> .....	225
3.4.1	der Kreiselfehlerparameter .....	225
3.4.2	der Beschleunigungsfehlerparameter .....	226
4.	VERIFIZIERUNG DES BPKF (ANHANG G).....	227
4.1.	<i>Verifizierung der Kalmanprädiktion</i> .....	227
4.2.	<i>Verifizierung der Kalmankorrektion</i> .....	228
5.	ZUSAMMENFASSUNG .....	229
A	ABBILDUNGEN ZU KAPITEL 1 .....	230
B	ABBILDUNGEN ZU KAPITEL 2.1 .....	231
C	ABBILDUNGEN ZU KAPITEL 2.2 .....	232
D	ABBILDUNGEN ZU KAPITEL 2.3 .....	234
E	ABBILDUNGEN ZU KAPITEL 2.4.2 .....	235
F	ABBILDUNGEN ZU KAPITEL 2.4.3 .....	237
G	ABBILDUNGEN ZU KAPITEL 4 .....	239
<b>VIII</b>	<b>DYNAMISCHE SIMULATION.....</b>	<b>243</b>
1.	SIMULATIONSUMGEBUNG .....	243
1.1.	<i>Aerodynamische Flugzeugsimulation</i> .....	243
1.2.	<i>Navigationssystemsimulation</i> .....	245
1.3.	<i>FlightGear Interface</i> .....	247
2.	REFERENZDATENGENERIERUNG .....	247
2.1.	<i>Beispieltrajektorie geringer Dynamik</i> .....	248
2.1.1	Trajektorie .....	248
2.1.2	Navigationenzustände .....	248
2.1.3	Inertiale Sensordaten .....	249
2.2.	<i>Beispieltrajektorie hoher Dynamik</i> .....	249
2.2.1	Trajektorie .....	249
2.2.2	Navigationenzustände .....	250
2.2.3	Inertiale Sensordaten .....	250
3.	SIMULATION .....	251
3.1.	<i>Simulationsparameter</i> .....	251
3.1.1	Inertiale Messeinheit .....	251
3.1.2	GNSS-Raumsegment und GNSS-Empfänger .....	251
3.1.3	Barometrischer Höhenmesser .....	252
3.1.4	Anfangsstandardabweichung .....	252
3.1.5	Kalmanfilertuning .....	253
3.2.	<i>Simulationsevaluation bei geringer Dynamik</i> .....	253
3.2.1	Navigationenzustände .....	253
3.2.2	Empfängeruhr- und barometrischer Höhendifferenzfehler .....	254
3.2.3	Kreiselfehler .....	255
3.2.4	Beschleunigungs- und Erdschwerermodellfehler .....	255
3.3.	<i>Simulationsevaluation bei hoher Dynamik</i> .....	257
3.3.1	Navigationenzustände .....	257
3.3.2	Empfängeruhr- und barometrischer Höhendifferenzfehler .....	258
3.3.3	Kreiselfehler .....	258
3.3.4	Beschleunigungs- und Erdschwerermodellfehler .....	258
4.	ZUSAMMENFASSUNG .....	259
<b>IX</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG .....</b>	<b>260</b>
	<b>ABBILDUNGS- UND TABELLENVERZEICHNIS .....</b>	<b>263</b>
	<b>LITERATURVERZEICHNIS .....</b>	<b>266</b>

# Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

## Abkürzungsverzeichnis

BPKF	Block Partitioned Kalman Filter
CAI	Cold Atom Interferometer
CIO	Conventional International Origin for Polar Motion
CKF	Conventional Kalman Filter
CCS	Compressed Column Storage
CDS	Compressed Diagonal Storage
CRS	Compressed Row Storage
ECEF	Earth-Centered Earth-Fixed
ECI	Earth-Centered Inertial
EKF	Extended Kalman Filter
ENU	East North Up
ESG	Electrically Suspended Gyrometer
FLOP	Floating Point Operation
FOG	Fibre Optic Gyroscope
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
IERS	International Earth Rotation Service
IMU	Inertial Measuring Unit
INS	Inertial Navigation System
KF	Kalman Filter
LGV	Local Geodetic Vertical
MEMS	Micro Electro-Mechanical Sensor
NED	North East Down
RPY	Roll Pitch Yaw
RLG	Ring Laser Gyroscope
SNU84	Standard Navigation Unit 84
UAV	Unmanned Aerial Vehicle
VB	Vehicle Body
WGS84	World Geodetic System 1984

## Symbolverzeichnis

$A$	Dynamikmatrix
$b$	Bias
$B$	Koeffizientenmatrix des Prozessrauschens
$d$	Drift
$f_b = (f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3})^T$	Beschleunigungsvektor im Bezugssystem $(P_a, \mathbf{a})$
$H$	Beobachtungsmatrix
$k$	Skalenfaktorfehler
$K$	Kalmangewinnmatrix
$ma$	Misalignment
$P$	Kovarianzmatrix
$\tilde{q}_{ab} = (q_{ab_0} \quad q_{ab_1} \quad q_{ab_2} \quad q_{ab_3})^T$	Rotationsquaternion zwischen den Bezugssystemen $(P_b, \mathbf{b})$ und $(P_a, \mathbf{a})$
$Q$	Prozessrauschen
$r$	Residuen
$R$	Beobachtungsrauschen
$R_{ab}$	Rotationsmatrix zwischen den Bezugssystemen $(P_b, \mathbf{b})$ und $(P_a, \mathbf{a})$
$s$	Eingangsvektor
$t$	Zeit
$v_a = (v_{a_1} \quad v_{a_2} \quad v_{a_3})^T$	Geschwindigkeit im Bezugssystem $(P_a, \mathbf{a})$
$x_a = (x_{a_1} \quad x_{a_2} \quad x_{a_3})^T$	Position im Bezugssystem $(P_a, \mathbf{a})$
$z$	Zustandsvektor
$\Phi$	Transitionsmatrix der Zustände
$\Gamma$	Transitionsmatrix des Prozessrauschens
$\lambda = (\lambda \quad \phi \quad h)^T$	Vektor der ellipsoidischen Koordinaten

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^b = \left( \omega_{ab_1}^b \quad \omega_{ab_2}^b \quad \omega_{ab_3}^b \right)^T$$

Winkelgeschwindigkeitsvektor zwischen den Bezugssystemen  $(P_b, \mathbf{b})$  und  $(P_a, \mathbf{a})$

$$\Omega_{ab}^b$$

Zusammenhangsmatrix zwischen den Bezugssystemen  $(P_b, \mathbf{b})$  und  $(P_a, \mathbf{a})$

$$\boldsymbol{\psi}_{ab} = \left( \varphi_{ab} \quad \vartheta_{ab} \quad \psi_{ab} \right)^T$$

Eulerwinkelvektor zwischen den Bezugssystemen  $(P_b, \mathbf{b})$  und  $(P_a, \mathbf{a})$

### Verzeichnis der Superskripte

<i>a</i>	Beschleunigungsmesserfehler (accelerometer)
<i>B</i>	barometrische Höhe (extern)
<i>c</i>	Empfängeruhrfehler (clock)
<i>e</i>	Erdschweremodellfehler
<i>g</i>	Kreismesserfehler (gyro)
<i>h</i>	barometrischer Höhendifferenzfehler
<i>n</i>	Navigation
<i>p</i>	Position
<i>P</i>	Position (extern)
<i>PR</i>	Pseudorange (extern)
<i>r</i>	Orientierung (rotation)
<i>RR</i>	Rangerate (extern)
<i>s</i>	Sensorfehler
<i>v</i>	Geschwindigkeit (velocity)
<i>V</i>	Geschwindigkeit (extern)
<i>z</i>	alle Zustände
1	Parametrisierung des Ansatzes 1
2	Parametrisierung des Ansatzes 2
3	Parametrisierung des Ansatzes 3

### Verzeichnis der Subskripte

<i>b</i>	im körperfesten Bezugssystem (body)
<i>e</i>	im erdfesten Bezugssystem (earth-fixed)
<i>h</i>	im horizontfesten Bezugssystem (horizontal)
<i>i</i>	im raumfesten Bezugssystem (inertial)
<i>k</i>	zum Zeitpunkt <i>k</i>

# I Einleitung

Inertiale Navigationssysteme (Inertial Navigation System – INS) lassen sich in verschiedene Anwendungskategorien unterteilen. Die Unterteilung orientiert sich an der benötigten Navigationsgenauigkeit in diesen Anwendungen und beinhaltet beispielsweise die Kategorien Marine-Grade, Navigation-Grade, Tactical-Grade oder Rate-Grade. In jeder allgemeinen Kategorie werden dabei typischerweise andere Approximationen vorgenommen und in jeder speziellen Anwendung werden jeweils angepasste Mechanisierungen verwendet. Diese Arbeit verfolgt nun einen unabhängigen Ansatz, bei dem aus Newtonscher Physik und aus einer fehlerfreien Umgebung heraus allgemeingültige Algorithmen entwickelt werden. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden anschließend mit aus der Standardliteratur bekannten Erkenntnissen verglichen und es werden gegebenenfalls Unterschiede aufgezeigt und diskutiert. Die Arbeit ist dazu wie folgt gegliedert:

In Abschnitt II GRUNDLAGEN werden die benutzten Bezugssysteme definiert und die benötigten Bezugsachsentransformationen hergeleitet. Dies ist nötig, da im Allgemeinen nicht in dem Bezugssystem navigiert werden soll, in dem die Sensordaten einer inertialen Messeinheit (Inertial Measuring Unit – IMU) vorliegen.

Anschließend erfolgt im Abschnitt III KINEMATIK die Herleitung der Bewegungsgleichungen aus Newtonscher Physik. Die Bewegungsgleichungen werden zur Beschreibung der sechs translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade eines beliebigen Starrkörpers im dreidimensionalen Raum benötigt. Es werden die drei gängigsten Parametrisierungen der Navigation unabhängig von einer spezifischen Anwendung und ausgehend vom fehlerfreien Fall hergeleitet. Die erste Parametrisierung - im folgenden Ansatz 1 genannt - in erdfesten kartesischen Parametern für Position und Geschwindigkeit bietet sich dabei auf Grund der einfachen Struktur vor allem für die Integration mit Satellitennavigation an. Die zweite Parametrisierung oder Ansatz 2 mit erdfesten ellipsoidischen Positionsparametern und horizontfesten kartesischen Geschwindigkeitsparametern hat im Gegensatz dazu Vorteile in allgemeinen Luftfahrtanwendungen. Die dritte Parametrisierung, auch Ansatz 3, in erdfesten ellipsoidischen Parametern für Position und Geschwindigkeit bietet im Gegenzug dazu Vorteile durch die beinahe ausschließliche Verwendung von Winkeln beziehungsweise deren zeitliche Ableitungen als Zustände. Die Orientierungsparameter werden in absoluten Zuständen in Quaternionen und in Zustandsstörungen in multiplikativen Eulerwinkelstörungen parametrisiert. Als Ergebnisse erhält man die fehlerfreien Bewegungsgleichungen in drei Ausbaustufen. Die fehlerfreien nichtlinearen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen können in eine Strapdownrechnung integriert werden. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen können im Rahmen eines erweiterten Kalmanfilters (Extended Kalman Filter – EKF) implementiert werden und die linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern dienen der Verwendung in einem konventionellen Kalmanfilter (Conventional Kalman Filter – CKF). Für praktische Anwendungen werden die linearisierten Bewegungsgleichungen für drei gängige Anwendungskategorien bereits vorbereitet.

Abschnitt IV MODELLBILDUNG beinhaltet die Herleitung der Beobachtungsgleichungen analog zur Vorgehensweise bei den Bewegungsgleichungen. Da die Messfehler einer realen IMU zu unbegrenzten Navigationsfehlern führen, müssen die Ergebnisse der Bewegungsgleichungen durch externe Beobachtungen gestützt werden. Die Beobachtungsgleichungen erlauben neben einer Stützung durch Positions- beziehungsweise Geschwindigkeitsbeobachtungen aus einem globalen Satellitennavigationssystem (Global Navigation Satellite System – GNSS), wie dem US-amerikanischen Global Positioning System (GPS), auch eine Stützung über GNSS-Rohdaten oder die Anbindung eines barometrischen Höhenmessers. Anschließend werden in der Modellbildung die analytischen und stochastischen Fehlermodelle für die Kreisel, die Beschleunigungsmesser, das Erdschweremodell und die Stützinformationen definiert. Die inertialen Sensorfehlermodelle beinhalten dabei neben Bias und Skalenfaktorfehler auch Misalignment. Die Sensorfehlermodellierung ist vorgesehen, um durch eine Kalibration der verschiedenen Sensorfehler die resultierende Navigationsgenauigkeit, gerade in späteren ungestützten Phasen, zu verbessern. Abschließend erfolgt eine Kombination der Bewegungsgleichungen, der Beobachtungsgleichungen und der Sensorfehlermodellierung zu einem Gesamtsystem mit 39 Zuständen.

In Abschnitt V SYSTEMTHEORIE werden Aussagen zur Beobachtbarkeit dieses Gesamtsystems getroffen, wobei sich diese Arbeit hauptsächlich mit der Beobachtbarkeit der inertialen Sensorfehler beschäftigt. Grund hierfür ist die Frage, ob sich die bis zu 39 Zustände noch einzeln beobachten lassen oder ob die Hinzunahme einer Vielzahl inertialer Sensorfehlermodellparameter keine weitere Genauigkeitsverbesserung mehr mit sich bringt. Hier wird ausgehend von den bereits existierenden Erkenntnissen in der Literatur die Beobachtbarkeit von Bias, Skalenfaktorfehler und Misalignment untersucht. Dazu werden zuerst die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen auf Basis einer Positionsbeobachtung definiert. Ausgehend von sechs Spezialfällen wird die Beobachtbarkeit der Sensorfehlermodellparameter bezüglich einer vorgegebenen Dynamik interpretiert. Die Interpretation bezogen auf die Dynamik ist erforderlich, da die Beobachtbarkeit fast ausschließlich von den gemessenen IMU-Sensordaten abhängt. Im weiteren Verlauf werden die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen linearisiert und die linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen erneut anhand der sechs Spezialfälle untersucht und bewertet. Abschließend erfolgt eine Betrachtung der Beobachtbarkeit bei mehreren unabhängigen Arbeitspunkten.

Ziele des Abschnitts VI DATENFUSION UND KALMANFILTEROPTIMIERUNG sind die Diskretisierung des bereits aus Abschnitt IV vorliegenden Gesamtsystems und die Rechenzeitoptimierung des Algorithmus des CKF. Ohne eine Diskretisierung kann das noch kontinuierliche Gesamtsystem nicht effizient rechnergestützt prozessiert werden. Eine Optimierung ist notwendig, da der Rechenzeitbedarf des CKF in dritter Potenz von der Anzahl der Zustände abhängt und sich das Gesamtsystem auf Grund dessen nicht mehr in Echtzeit auf herkömmlichen, für die Luftfahrt

zertifizierten Prozessorkarten verarbeiten lässt. Optimierungspotential bietet dabei hauptsächlich die schwache Besetzung der Dynamikmatrix. Nach einem Literaturvergleich über gängige Optimierungsmöglichkeiten wird ein eigenständiger Ansatz verfolgt. Die Vektoren und Matrizen des CKF werden in Subvektoren und Submatrizen zerlegt und der Kalmanfilteralgorithmus wird auf Basis dieser Subblöcke formuliert. Die Zerlegung der Vektoren und Matrizen wird dabei so gewählt, dass möglichst viele Nullmatrizen oder Matrizen mit ausgezeichneten Eigenschaften, wie beispielsweise Diagonalmatrizen, entstehen. Alle Multiplikationen mit Nullmatrizen können aus dem blockpartitionierten Kalmanfilter (Block Partitioned Kalman Filter – BPKF) entfernt werden. Die Voraussetzungen zur Simulation des Gesamtsystems sind damit geschaffen.

In Abschnitt VII KINEMATISCHE VERIFIZIERUNG werden die bereits angesprochenen Ergebnisse dieser Arbeit verifiziert. Auf Grund der teilweise mathematisch komplexen Herleitungen dieser Ergebnisse ist deren Nachvollziehbarkeit oftmals nicht trivial. Ein unabhängiges und systematisches Testkonzept soll den Leser in die Lage versetzen, die Ergebnisse dieser Arbeit ohne eigene detaillierte und langwierige Berechnungen zu übernehmen. Die Verifizierung wird dabei über kinematische Trajektorien realisiert, da diese im Gegensatz zu dynamischen Trajektorien über eine analytische Referenz verfügen und somit zur Beurteilung der Ergebnisse optimal geeignet sind. Das Testkonzept verfolgt eine sukzessive Vorgehensweise, bei dem auf bereits verifizierte Anteile aufgebaut wird. In der kinematischen Verifizierung werden zunächst die Bewegungsgleichungen in den drei Parametrisierungen und in den drei Ausbaustufen bestätigt. Anschließend erfolgt die Verifizierung der Ergebnisse der Beobachtbarkeitsanalyse anhand spezieller Manöver. Zuletzt wird noch die Richtigkeit des Algorithmus des BPKF nachgewiesen.

Im letzten inhaltlichen Abschnitt VIII DYNAMISCHE SIMULATION sind die nun verifizierten Ergebnisse des Gesamtsystems aus Abschnitt VI in einer dynamischen Simulation miteinander verknüpft. Diese gewährleistet realitätsnahe Simulationsergebnisse. Die dynamische Simulation besteht aus einer aerodynamischen Flugzeugsimulation und einer Navigationssystemssimulation und wird in Simulink in Verbindung mit dem Open Source Flugsimulator FlightGear realisiert. Sie bildet den Abschluss dieser Arbeit.

All diese Abschnitte sind jeweils als unabhängige und eigenständige Einheiten aufgebaut. Ergebniszusammenfassungen und den Lesefluss störende größere Abbildungsübersichten sind dabei stets direkt am Ende des jeweiligen Abschnitts in Anhänge und Templates ausgegliedert. Die Templates sollen dabei als übersichtliche Kurzzusammenfassungen der wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit dienen und können ohne die Herleitungen direkt verwendet werden.

Diese Arbeit ist in Zusammenarbeit zwischen dem Institut für Erdmessung und Navigation aus der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik an der Universität der Bundeswehr München und der LFK-Lenkflugkörpersysteme GmbH (MBDA Deutschland) aus Schrobenhausen entstanden. Ich möchte mich hiermit zum einen bei Prof. Dr.-Ing. Bernd Eissfeller für sein Vertrauen bedanken, welches eine enge Kooperation mit der Industrie ermöglichte. Zum anderen möchte ich mich bei Dr.-Ing. Johann Dambeck für die Betreuung seitens der Industrie bedanken. Ohne seinen großen persönlichen Einsatz wäre diese Arbeit in dieser Form nicht möglich gewesen.

## II Grundlagen

Bevor mit der Herleitung der kinematischen Bewegungsgleichungen in Abschnitt III begonnen werden kann, müssen innerhalb dieses Abschnittes noch die Grundlagen in Bezug auf benutzte Koordinatensysteme und deren Koordinaten- und Bezugsachsentransformationen gegeben werden. Die physikalischen Grundprinzipien einer IMU und eines GNSS-Empfängers verlangen in der Prozessierung unterschiedliche Bezugssysteme. Die gemessenen Drehraten der Kreisel werden bei Strapdownsystemen zwischen dem körperfesten und dem raumfesten Bezugssystem gemessen, während die Beschleunigungsmesser stets die Beschleunigungen im körperfesten Bezugssystem ermitteln. Die verschiedenen gängigen Parametrisierungen basieren jedoch auf dem erdfesten oder dem horizontfesten Bezugssystem. Deshalb ist es notwendig, die später benutzten Koordinatensysteme und Koordinaten- und Bezugsachsentransformationen vorab zu definieren.

### 1. Bezugssysteme

Jedes Bezugssystem ist definiert durch seinen Ursprung und die Koordinatenachsen. Wir beschränken uns hier auf die für unsere Anwendung benötigten Koordinatensysteme. Bei den folgenden Bezugssystemen handelt es sich ausschließlich um orthonormale Referenzsysteme. Vorgestellt werden neben dem raumfesten Bezugssystem  $(P_i, \mathbf{i})$  das erdfeste Bezugssystem  $(P_e, \mathbf{e})$ , das horizontfeste Bezugssystem  $(-, \mathbf{h})$  und das körperfeste Bezugssystem  $(P_b, \mathbf{b})$ .

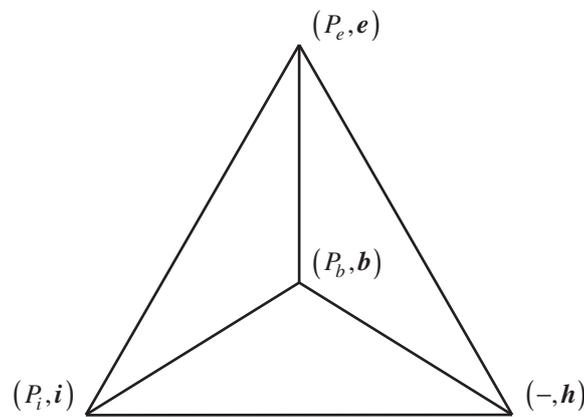


Abbildung 1: Bezugssysteme

#### 1.1. Raumfestes Bezugssystem

Die Orientierung der raumfesten Koordinatenachsen ist beliebig. Idealerweise liegt der Ursprung jedes inertialen Systems im Massenmittelpunkt des Universums. Dieser ist im Allgemeinen nicht bekannt. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Orientierung zu Beginn der Navigation mit der Orientierung des erdfesten kartesischen Koordinatensystems übereinstimmen. Zu jedem späteren Zeitpunkt nach Beginn der Navigation sollen die raumfesten Koordinaten in einer festen Orientierung im inertialen Raum bleiben, während sich der Ursprung mit der Erde mitbewegen soll (Earth Centered Inertial – ECI).

$P_i$	: Geozentrum
$i_1$	: in der terrestrischen Äquatorebene in Richtung Nullmeridian (IERS) zur initialen Epoche $t_0$
$i_2$	: komplettiert rechtshändiges System
$i_3$	: in Richtung Nordpol (CIO)

Für die Definition des Nullmeridians und des Nordpols wird auf die Festlegungen des International Earth Rotation Service (IERS) und des Conventional International Origin for Polar Motion (CIO) zurückgegriffen. Eine solche Realisierung eines raumfesten Bezugssystems wird auch als quasiinertiales Bezugssystem bezeichnet. Die entstehenden Navigationsfehler auf Grund der Wahl des Ursprungs im Geozentrum und auf Grund der Nichtberücksichtigung von

Präzession, Nutation und Polbewegung in der Definition der Nordrichtung sind vernachlässigbar klein.<sup>1</sup> Somit stellt das raumfeste Bezugssystem per Definition ein unbeschleunigtes Referenzsystem dar, das sich nicht, beziehungsweise nur mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegt. Nur in solchen Referenzsystemen gelten die Gesetze Newtonscher Mechanik.

## 1.2. Erdfestes Bezugssystem

Das erdfeste kartesische Koordinatensystem ist fest mit der rotierenden Erde verbunden (Earth Centered Earth Fixed – ECEF). Deshalb bleibt die Orientierung der einzelnen Koordinatenachsen während einer Navigationsperiode konstant. Einziger Unterschied zum raumfesten Bezugssystem besteht in der Berücksichtigung der Erddrehrate.

$P_e$	: Geozentrum
$e_1$	: in der terrestrischen Äquatorebene in Richtung Nullmeridian (IERS)
$e_2$	: komplettiert rechtshändiges System
$e_3$	: in Richtung Nordpol (CIO)

Neben der Formulierung des erdfesten Bezugssystems in kartesischen Koordinaten besteht die Möglichkeit, dieses System auch in ellipsoidischen oder geodätischen Koordinaten darzustellen.

$P_e$	: Geozentrum
$\lambda$	: ellipsoidische Länge
$\phi$	: ellipsoidische Breite
$h$	: ellipsoidische Höhe

Es handelt sich dabei lediglich um eine alternative Parametrisierung des erdfesten Bezugssystems. Für den algebraischen Zusammenhang zwischen erdfesten ellipsoidischen Parametern und erdfesten kartesischen Parametern wird auf Anhang A dieses Abschnittes verwiesen. Als Referenzellipsoid wird im Rahmen dieser Arbeit stets das WGS84 Ellipsoid verwendet.<sup>2</sup>

## 1.3. Horizontfestes Bezugssystem

Das Bezugssystem, in dem normalerweise die Navigation eines Objektes beschrieben wird, ist ein lokales horizontfestes Bezugssystem (North East Down – NED). Die Besonderheit dieses Bezugssystems besteht darin, dass es ständig mit dem körperfesten Bezugssystem mitgeführt wird. Auf Grund der fehlenden Definition der Translation vom erdfesten ins horizontfeste Bezugssystem gemäß Kapitel 2 dieses Abschnittes sind in ihm auch keine Position, sondern nur Geschwindigkeit und Orientierung definiert.

$P_h$	: nicht definiert
$h_1$	: Ellipsoidische Nordrichtung
$h_2$	: Ellipsoidische Ostrichtung
$h_3$	: Ellipsoidische Nadirrichtung

<sup>1</sup> Kayton, Myron; Fundamental Limitations on Inertial Measurements, in Robertson, Robert E. (Ed.); Progress in Astronautics and Rocketry Vol.8 Guidance and Control, Academic Press, London 1962, S.375

<sup>2</sup> National Imagery and Mapping Agency, World Geodetic System 1984 - its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems - Third Edition - Amendment 1, Department of Defense, Reston 2000

## 1.4. Körperfestes Bezugssystem

Das körperfeste System ist mit dem Objekt, auf dem sich das Navigationssystem befindet, verbunden (Vehicle Body – VB). Für Strapdownanwendungen ist es normalerweise mit dem Bezugssystem der Kreisel und der Beschleunigungsmesser identisch. Die Achsen dieses Systems sind die orthogonalisierten Achsen der Kreisel und der Beschleunigungsmesser. Zur Vereinfachung werden die körperfesten Koordinatenachsen mit der Roll-, Nick- und Kursachse des zu navigierenden Objektes zusammengelegt.

$P_b$	: Triadenzentrum der Kreisel und Beschleunigungsmesser
$b_1$	: parallel zur Rollachse des Trägers und "nach vorn" positiv
$b_2$	: parallel zur Nickachse des Trägers und "nach rechts" positiv
$b_3$	: parallel zur Kursachse des Trägers und "nach unten" positiv

## 2. Bezugsachsentransformation

Bei der Herleitung der kinematischen Bewegungsgleichungen muss zwischen den einzelnen Bezugssystemen gewechselt werden. Dazu sollen im Folgenden die in der Herleitung benutzten Basistransformationen definiert werden. Falls es sich bei den betroffenen Bezugssystemen um orthonormale Koordinatensysteme handelt, können die rotatorischen Anteile der Transformationen über orthonormale Rotationsmatrizen beschrieben werden.<sup>3</sup> Deren Bestimmung und Rückführung auf die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten ist das Ziel dieses Kapitels. Da die Position eines Körpers im Rahmen dieser Arbeit stets im erdfesten Bezugssystem angegeben wird und dieses per Definition ursprungsgleich mit dem raumfesten Bezugssystem ist, können die translatorischen Anteile vernachlässigt werden. Ausgangspunkt bildet die Vektoraddition zwischen einem beliebigen Bezugssystem  $(P_a, \mathbf{a})$  und dem körperfesten Bezugssystem  $(P_b, \mathbf{b})$ .

$$\begin{aligned}
 \overline{P_a P} &= \overline{P_a P_b} + \overline{P_b P} \\
 \mathbf{ax}_a(P) &= \mathbf{ax}_a(P_b) + \mathbf{bx}_b(P) \\
 \mathbf{ax}_a(P) &= \mathbf{ax}_a(P_b) + \mathbf{a}R_{ab}\mathbf{x}_b(P) \\
 \mathbf{ax}_a(P) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}_a(P_b) + R_{ab}\mathbf{x}_b(P))
 \end{aligned} \tag{II.2.1}$$

Bildung der zeitlichen Ableitung führt nach Vereinfachung zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}\dot{\mathbf{x}}_a(P) &= \mathbf{a}(\dot{\mathbf{x}}_a(P_b) + \dot{R}_{ab}\mathbf{x}_b(P) + R_{ab}\dot{\mathbf{x}}_b(P)) \\
 \mathbf{a}\dot{\mathbf{x}}_a(P) &= \mathbf{a}(\dot{\mathbf{x}}_a(P_b) + R_{ab}(\mathbf{R}_{ab}^T \dot{R}_{ab}\mathbf{x}_b(P) + \dot{\mathbf{x}}_b(P)))
 \end{aligned} \tag{II.2.2}$$

Der in dieser Gleichung vorkommende Ausdruck  $R_{ab}^T \dot{R}_{ab}$  ist als Zusammenhangsmatrix  $\Omega_{ab}^b$  definiert.<sup>4</sup>

$$\Omega_{ab}^b = R_{ab}^T \dot{R}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ab_3}^b & \omega_{ab_2}^b \\ \omega_{ab_3}^b & 0 & -\omega_{ab_1}^b \\ -\omega_{ab_2}^b & \omega_{ab_1}^b & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}_{ab}^b \times \tag{II.2.3}$$

Durch Einsetzen der Definition (II.2.3) in die zeitliche Ableitung (II.2.2) ergibt sich die Bezugsachsentransformation:

$$\mathbf{a}\dot{\mathbf{x}}_a(P) = \mathbf{a}(\dot{\mathbf{x}}_a(P_b) + R_{ab}(\boldsymbol{\omega}_{ab}^b \times \mathbf{x}_b(P) + \dot{\mathbf{x}}_b(P))) \tag{II.2.4}$$

Dabei beschreibt  $\boldsymbol{\omega}_{ab}^b \times \mathbf{x}_b(P)$  die Scheingeschwindigkeit aufgrund der zeitlichen Lageänderung des Bezugssystems  $(P_b, \mathbf{b})$  relativ zum Bezugssystem  $(P_a, \mathbf{a})$ .  $\boldsymbol{\omega}_{ab}^b$  ist damit gerade der gesuchte Vektor der Winkelgeschwindigkeiten zwischen den beiden Bezugssystemen.

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^b = \begin{pmatrix} \omega_{ab_1}^b \\ \omega_{ab_2}^b \\ \omega_{ab_3}^b \end{pmatrix} \tag{II.2.5}$$

<sup>3</sup> Chatfield, A. B.; Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston 1997, S.23

<sup>4</sup> Titterton, D.H.; Weston, J.L.; Strapdown inertial navigation technology, The Institute of Electrical Engineers, Peter Peregrinus, London 1997, S.28

Für die Bezugsachsentransformation zwischen drei beliebigen Bezugssystemen gilt unter Hinzunahme des raumfesten Bezugssystems  $(P_i, \mathbf{i})$ :

$$\begin{aligned}\Omega_{ib}^b &= R_{ib}^T \dot{R}_{ib} \\ \Omega_{ib}^b &= (R_{ia} R_{ab})^T \frac{d}{dt} (R_{ia} R_{ab}) \\ \Omega_{ib}^b &= R_{ab}^T R_{ia}^T (\dot{R}_{ia} R_{ab} + R_{ia} \dot{R}_{ab}) \\ \Omega_{ib}^b &= R_{ab}^T \Omega_{ia}^a R_{ab} + \Omega_{ab}^b\end{aligned}\quad (\text{II.2.6})$$

Des Weiteren sind die Vektoren der relativen Winkelgeschwindigkeiten zwischen den Bezugssystemen von Interesse. Sie können aus den beteiligten Rotationsmatrizen und deren zeitlichen Ableitungen nach Definition (II.2.3) bestimmt werden. Die Transformation der ellipsoidischen Parameter erfolgt aus den genannten Gründen separat in Anhang A.

## 2.1. zwischen dem raumfesten und dem erdfesten Bezugssystem

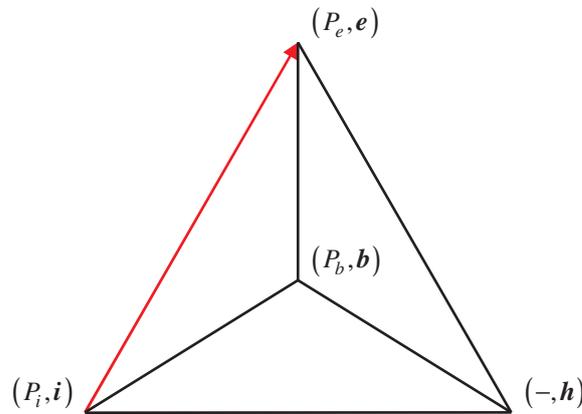


Abbildung 2: Bezugsachsentransformation zwischen dem raumfesten und dem erdfesten Bezugssystem

Aus den Definitionen des raumfesten Bezugssystems und des erdfesten Bezugssystems folgt unmittelbar, dass die beiden Bezugsachsensysteme durch eine Drehung um die dritte Achse in Übereinstimmung gebracht werden können. Da das erdfeste Bezugssystem bezüglich des raumfesten Bezugssystems eine positive Drehung um die gemeinsame dritte Achse vollführt, gilt:

$$R_{ie} = R_3(\omega_{ie}^e(t-t_0)) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_{ie}^e(t-t_0)) & -\sin(\omega_{ie}^e(t-t_0)) & 0 \\ \sin(\omega_{ie}^e(t-t_0)) & \cos(\omega_{ie}^e(t-t_0)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (\text{II.2.7})$$

Die Umkehrabbildung  $R_{ei}$  lautet auf Grund der Orthogonalität der Rotationsmatrizen:

$$R_{ei} = R_{ie}^T = R_3^T(\omega_{ie}^e(t-t_0)) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_{ie}^e(t-t_0)) & \sin(\omega_{ie}^e(t-t_0)) & 0 \\ -\sin(\omega_{ie}^e(t-t_0)) & \cos(\omega_{ie}^e(t-t_0)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (\text{II.2.8})$$

Zur Berechnung der Zusammenhangsmatrix muss zuerst die zeitliche Änderung der Rotationsmatrix  $\dot{R}_{ie}$  bestimmt werden.

$$\dot{R}_{ie} = \frac{d}{dt} R_{ie} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega_{ie}^e(t-t_0)) \omega_{ie}^e & -\cos(\omega_{ie}^e(t-t_0)) \omega_{ie}^e & 0 \\ \cos(\omega_{ie}^e(t-t_0)) \omega_{ie}^e & -\sin(\omega_{ie}^e(t-t_0)) \omega_{ie}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (\text{II.2.9})$$

In der Herleitung des Zusammenhangs zwischen dem raumfesten und dem erdfesten Bezugssystem wird von einer konstanten Erddrehrate  $\omega_{ie}^e$  ausgegangen. Weitere physikalische Effekte auf die Erddrehrate, wie Gezeitenreibung und jahreszeitliche Veränderungen, können auf Grund ihrer sehr begrenzten Auswirkungen auf die Rotationsmatrix  $R_{ie}$

vernachlässigt werden.<sup>5</sup> Die Zusammenhangsmatrix  $\Omega_{ie}^e$  lässt sich nun aus der Definition (II.2.7) und ihrer zeitlichen Ableitung (II.2.9) bestimmen.

$$\Omega_{ie}^e = R_{ie}^T \dot{R}_{ie} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ie}^e & 0 \\ \omega_{ie}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.10})$$

Für den Vektor der relativen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{ie}^e$  folgt somit:

$$\omega_{ie}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{ie}^e \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.11})$$

Zahlenwert für die Erddrehrate ist:<sup>6</sup>

$$\omega_{ie}^e = 7,292115 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (\text{II.2.12})$$

## 2.2. zwischen dem erdfesten und dem horizontfesten Bezugssystem

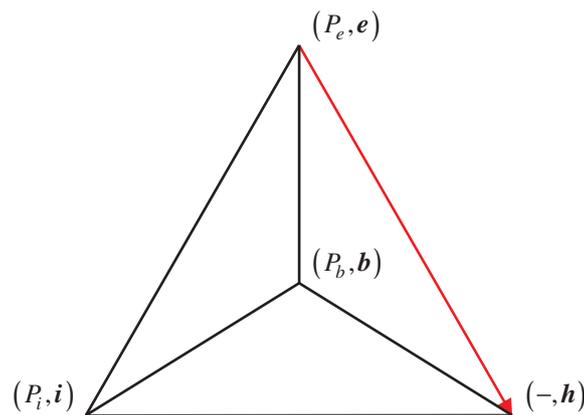


Abbildung 3: Bezugsachsentransformation zwischen dem erdfesten und dem horizontfesten Bezugssystem

Das erdfeste Koordinatensystem lässt sich in Abhängigkeit von der Position auf der Erdoberfläche mit zwei Drehungen ins horizontfeste Koordinatensystem überführen. Parameter der Rotationsmatrix  $R_{eh}$  bilden dabei  $\lambda$  und  $\phi$ , die ellipsoidische Länge und Breite.

$$R_{eh} = R_3(\lambda) R_2\left(-\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda) \sin(\phi) & -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda) \cos(\phi) \\ -\sin(\lambda) \sin(\phi) & \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.13})$$

Die Umkehrabbildung  $R_{he}$  lautet:

$$R_{he} = R_{eh}^T = R_2^T\left(-\frac{\pi}{2} - \phi\right) R_3^T(\lambda) = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda) \sin(\phi) & -\sin(\lambda) \sin(\phi) & \cos(\phi) \\ -\sin(\lambda) & \cos(\lambda) & 0 \\ -\cos(\lambda) \cos(\phi) & -\sin(\lambda) \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.14})$$

<sup>5</sup> Schröder, Dietrich; Genauigkeitsanalyse inertialer Vermessungssysteme mit fahrzeugfesten Sensoren, Deutsche Geodätische Kommission Reihe C Dissertation Heft Nr. 391, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1992, S.66ff

<sup>6</sup> National Imagery and Mapping Agency, World Geodetic System 1984 - its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems - Third Edition - Amendment 1, Department of Defense, Reston 2000, S.3-5

Bildung der zeitlichen Ableitung  $\dot{R}_{eh}$  führt zu:

$$\dot{R}_{eh} = \frac{d}{dt} R_{eh} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos(\lambda) \cos(\phi) + \dot{\lambda} \sin(\lambda) \sin(\phi) & -\dot{\lambda} \cos(\lambda) & \dot{\phi} \cos(\lambda) \sin(\phi) + \dot{\lambda} \sin(\lambda) \cos(\phi) \\ -\dot{\phi} \sin(\lambda) \cos(\phi) - \dot{\lambda} \cos(\lambda) \sin(\phi) & -\dot{\lambda} \sin(\lambda) & \dot{\phi} \sin(\lambda) \sin(\phi) - \dot{\lambda} \cos(\lambda) \cos(\phi) \\ -\dot{\phi} \sin(\phi) & 0 & -\dot{\phi} \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.15})$$

Für die Zusammenhangsmatrix  $\Omega_{eh}^h$  ergibt sich folglich:

$$\Omega_{eh}^h = R_{eh}^T \dot{R}_{eh} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\lambda} \sin(\phi) & -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda} \sin(\phi) & 0 & -\dot{\lambda} \cos(\phi) \\ \dot{\phi} & \dot{\lambda} \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.16})$$

Der Vektor der Drehraten zwischen dem erdfesten und dem horizontfesten Bezugssystem  $\omega_{eh}^h$  lautet somit in erdfesten ellipsoidischen Parametern:

$$\omega_{eh}^h = \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \cos(\phi) \\ -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda} \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.17})$$

Obiger Vektor wird im weiteren Verlauf auch in horizontfester kartesischer Parametrisierung benötigt. Dazu müssen die Ableitungen der ellipsoidischen Parameter durch horizontfeste Geschwindigkeiten nach Definition (II.A.11) aus Anhang A ersetzt werden.

$$\omega_{eh}^h = \begin{pmatrix} \frac{v_{h_2}}{N(\phi) + h} \\ -\frac{v_{h_1}}{M(\phi) + h} \\ \frac{v_{h_2} \tan(\phi)}{N(\phi) + h} \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.18})$$

Zu beachten bleibt, dass es sich immer noch um eine orthogonale Bezugsachsentransformation handelt, auch wenn die eingesetzten Parameter teilweise krummlinige Koordinaten sind.

### 2.3. zwischen dem horizontfesten und dem körperfesten Bezugssystem

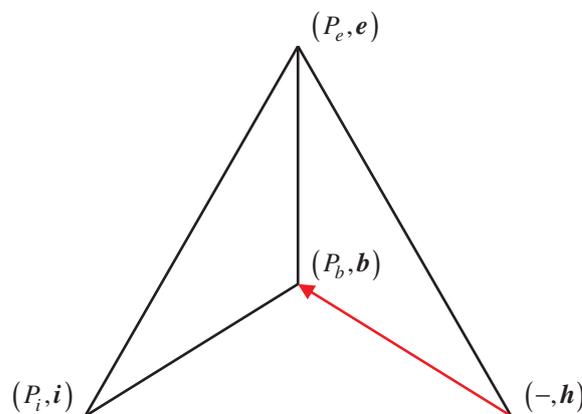


Abbildung 4: Bezugsachsentransformation zwischen dem horizontfesten und dem körperfesten Bezugssystem

Die Transformation zwischen dem horizontfesten und dem körperfesten Bezugssystem beschreibt die Lage des zu navigierenden Objektes im Bezug zur Erdoberfläche und ist durch geeignete Parameter zu belegen. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei alternative Parametrisierungen für die entsprechende Rotationsmatrix  $R_{hb}$  verwendet. Die Parametrisierungen in Eulerwinkeln oder in Quaternionen werden ausführlich in Abschnitt III behandelt.

## 2.4. zwischen dem raumfesten und dem horizontfesten Bezugssystem

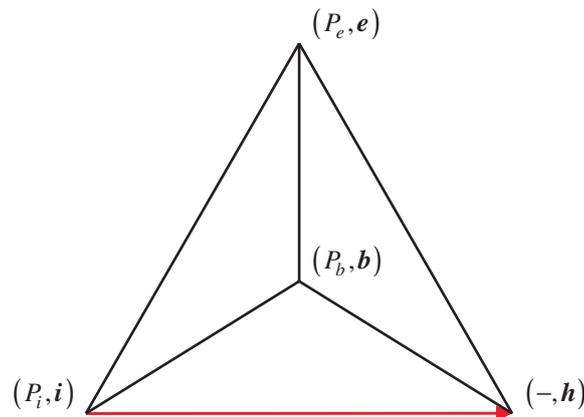


Abbildung 5: Bezugsachsentransformation zwischen dem raumfesten und dem horizontfesten Bezugssystem

Mit den drei bisher präsentierten Transformationen lassen sich prinzipiell alle benutzten Bezugsachsensysteme durch Kombination ineinander überführen. Eine dieser Kombinationen ist jedoch ein wesentlicher Bestandteil zweier, in Abschnitt III folgender Parametrisierungsansätze und wird somit vorab ausführlich präsentiert. Aus obigen Beziehungen lässt sich die Zusammenhangsmatrix zwischen dem raumfesten und dem horizontfesten Bezugssystem  $\Omega_{ih}^h$  analog zu Herleitung (II.2.6) berechnen.

$$\Omega_{ih}^h = R_{eh}^T \Omega_{ie}^e R_{eh} + \Omega_{eh}^h = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\lambda} \sin(\phi) + \omega_{ie}^e \sin(\phi) & -\dot{\phi} \\ -\dot{\lambda} \sin(\phi) - \omega_{ie}^e \sin(\phi) & 0 & -\dot{\lambda} \cos(\phi) - \omega_{ie}^e \cos(\phi) \\ \dot{\phi} & \dot{\lambda} \cos(\phi) + \omega_{ie}^e \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.19})$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{ih}^h$  lautet somit:

$$\omega_{ih}^h = \begin{pmatrix} (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \cos(\phi) \\ -\dot{\phi} \\ -(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.20})$$

Unter Verwendung von Gleichung (II.2.18) kommt man in horizontfester kartesischer Parametrisierung der Geschwindigkeit zu:

$$\omega_{ih}^h = \begin{pmatrix} \frac{v_{h_2}}{N(\phi) + h} + \omega_{ie}^e \cos(\phi) \\ -\frac{v_{h_1}}{M(\phi) + h} \\ -\frac{v_{h_2} \tan(\phi)}{N(\phi) + h} - \omega_{ie}^e \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.21})$$

## 2.5. zwischen dem raumfesten und dem körperfesten Bezugssystem

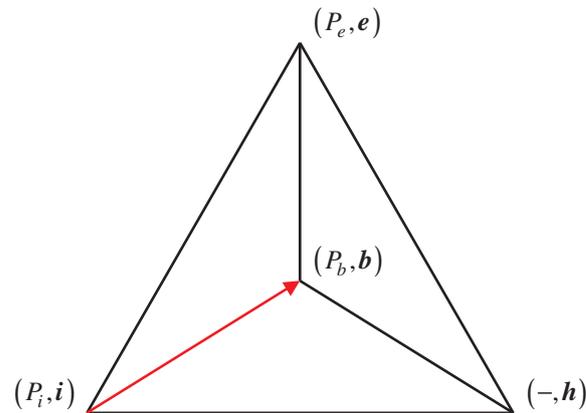


Abbildung 6: Bezugsachsentransformation zwischen dem raumfesten und dem körperfesten Bezugssystem

Eine weitere Besonderheit stellt der direkte Zusammenhang zwischen dem raumfesten und dem körperfesten Bezugssystem dar. Die gemessenen Drehraten der Kreisel beschreiben gerade diese Transformation.

$$\Omega_{ib}^b = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ib_3}^b & \omega_{ib_2}^b \\ \omega_{ib_3}^b & 0 & -\omega_{ib_1}^b \\ -\omega_{ib_2}^b & \omega_{ib_1}^b & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.22})$$

Der Vektor der gemessenen Drehraten  $\omega_{ib}^b$  heißt demnach:

$$\omega_{ib}^b = \begin{pmatrix} \omega_{ib_1}^b \\ \omega_{ib_2}^b \\ \omega_{ib_3}^b \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.23})$$

## 3. Zusammenfassung

Ziel dieses Abschnittes war die Definition der benötigten Bezugssysteme und deren gegenseitige Transformationsvorschriften. Die Bezugssysteme wurden im ersten Kapitel dieses einführenden Abschnittes dargestellt. Eine Besonderheit stellt die Definition des horizontfesten Bezugssystems als rein rotatorisches Bezugssystem ohne Ursprung und somit ohne Möglichkeit der Positionierung dar. Da in der Navigation die Position stets im erdfesten Bezugssystem angegeben wird und die beteiligten Bezugssysteme alle orthonormal sind, können die Transformationen über orthonormale Rotationsmatrizen beschrieben werden. Die jeweiligen Rotationsmatrizen wurden im zweiten Kapitel hergeleitet und auf die Vektoren der entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten zurückgeführt. Die Besonderheit in der Transformation ellipsoidischer Parameter wurde in Anhang A beschrieben. Die Grundlagen zur Herleitung der kinematischen Bewegungsgleichungen im nächsten Abschnitt sind somit gegeben.

## A Transformation ellipsoidischer Parameter

Da es sich beim erdfesten ellipsoidischen Koordinatensystem um ein krummliniges Koordinatensystem handelt, muss eine gesonderte Betrachtung der Transformation erfolgen. Die erdfesten ellipsoidischen Parameter sind über die Definition des zu Grunde liegenden Referenzellipsoids fest mit den erdfesten kartesischen Parametern verbunden.<sup>7</sup>

$$\mathbf{x}_e(\lambda, \phi, h) = \begin{pmatrix} (N(\phi) + h) \cos(\phi) \cos(\lambda) \\ (N(\phi) + h) \cos(\phi) \sin(\lambda) \\ \left(\frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h\right) \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{II.A.1})$$

$N(\phi)$  ist der Normalkrümmungshalbmesser des Referenzellipsoids.

$$N(\phi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\phi)}} \quad (\text{II.A.2})$$

Umgekehrt gilt für die Berechnung der geographischen Länge  $\lambda$  aus den erdfesten kartesischen Parametern:

$$\lambda = \arctan \frac{x_{e_2}}{x_{e_1}} \quad (\text{II.A.3})$$

Für  $\phi$  und  $h$  lässt sich diese Berechnung über folgenden Formelapparat lösen:<sup>8</sup>

1.  $F = 54b^2 x_{e_3}^2$
2.  $r = \sqrt{x_{e_1}^2 + x_{e_2}^2}$
3.  $G = r^2 + (1 - e^2) x_{e_3}^2 - e^2 (a^2 - b^2)$
4.  $c = \frac{e^4 F r^2}{G^3}$
5.  $s = \sqrt[3]{1 + c + \sqrt{c^2 + 2c}}$
6.  $P = \frac{F}{3 \left( s + \frac{1}{s} + 1 \right)^2 G^2}$
7.  $Q = \sqrt{1 + 2e^4 P}$
8.  $r_0 = -\frac{Pe^2 r}{1 + Q} + \sqrt{\frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{Q} \right) - \frac{P(1 - e^2) x_{e_3}^2}{Q(1 + Q)} - \frac{Pr^2}{2}}$
9.  $U = \sqrt{(r - e^2 r_0)^2 + x_{e_3}^2}$
10.  $V = \sqrt{(r - e^2 r_0)^2 + (1 - e^2) x_{e_3}^2} \quad (\text{II.A.4})$
11.  $x_{e_3}^2 = \frac{b^2 x_{e_3}}{aV}$

<sup>7</sup> Moritz, Helmut; The Figure of the Earth, Wichmann Verlag, Karlsruhe 1990, S.120

<sup>8</sup> Heikkinen, M.; Geschlossene Formeln zur Berechnung räumlicher geodätischer Koordinaten aus rechtwinkligen Koordinaten, in Zeitschrift für Vermessungswesen, 107. Jahrgang 1982, S.207ff

Die Reihenfolge der Formeln ist zu beachten.  $\phi$  und  $h$  ergeben letztendlich:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi &= \arctan\left(\frac{x_{e_3} + e'^2 x_{e_3,0}^2}{r}\right) \\ h &= U\left(1 - \frac{b^2}{aV}\right)\end{aligned}} \quad (\text{II.A.5})$$

$a$  und  $b$  sind dabei die große und kleine Halbachse, beziehungsweise  $e$  und  $e'$  die erste und zweite numerische Exzentrizität des Referenzellipsoids. Diese Parameter sind der Definition des jeweils gewünschten Referenzellipsoids zu entnehmen. Auf Geschwindigkeitsebene definieren wir folgende Transformation, die den Übergang vom erdfesten Bezugssystem in das horizontfeste Bezugssystem erlaubt:

$$\mathbf{v}_h = R_{he} \mathbf{v}_e \quad (\text{II.A.6})$$

Diese Definition stellt einen Unterschied zu den anderen Transformationen dar, da sie auf Geschwindigkeitsebene und nicht auf Positionsebene definiert ist. Aus diesem Grund sind im horizontfesten Bezugssystem keine absolute Position, sondern nur Positionsunterschiede und Richtungen definiert. Für Details wird auf die Literatur verwiesen.<sup>9</sup> Zeitliche Ableitung der Definition (II.A.1) führt zur erdfesten kartesischen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_e$ .

$$\mathbf{v}_e(\lambda, \phi, h) = \begin{pmatrix} (N'(\phi)\dot{\phi} + \dot{h})\cos(\phi)\cos(\lambda) - (N(\phi) + h)\dot{\phi}\sin(\phi)\cos(\lambda) - (N(\phi) + h)\dot{\lambda}\cos(\phi)\sin(\lambda) \\ (N'(\phi)\dot{\phi} + \dot{h})\cos(\phi)\sin(\lambda) - (N(\phi) + h)\dot{\phi}\sin(\phi)\sin(\lambda) + (N(\phi) + h)\dot{\lambda}\cos(\phi)\cos(\lambda) \\ \left(\frac{b^2}{a^2}N'(\phi)\dot{\phi} + \dot{h}\right)\sin(\phi) + \left(\frac{b^2}{a^2}N(\phi) + h\right)\dot{\phi}\cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (\text{II.A.7})$$

Einsetzen der Rotationsmatrix  $R_{he}$  aus Gleichung (II.2.14) und obiger Gleichung (II.A.7) in die Definition (II.A.6) ergibt die Beziehung zwischen den horizontfesten Geschwindigkeiten und den Ableitungen der erdfesten ellipsoidischen Parameter.

$$\boxed{\begin{aligned}v_{h_1} &= (M(\phi) + h)\dot{\phi} \\ v_{h_2} &= (N(\phi) + h)\cos(\phi)\dot{\lambda} \\ v_{h_3} &= -\dot{h}\end{aligned}} \quad (\text{II.A.8})$$

In vektorieller Schreibweise lautet der Zusammenhang unter Einführung einer Koeffizientenmatrix  $D(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_h &= D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \\ \begin{pmatrix} v_{h_1} \\ v_{h_2} \\ v_{h_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & M(\phi) + h & 0 \\ (N(\phi) + h)\cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\phi} \\ \dot{h} \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (\text{II.A.9})$$

$M(\phi)$  stellt dabei den Meridiankrümmungshalbmesser des Referenzellipsoids dar.

$$M(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{\left(\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\phi)}\right)^3} \quad (\text{II.A.10})$$

Die Umkehrabbildung ergibt:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{v_{h_2}}{(N(\phi) + h)\cos(\phi)} \\ \dot{\phi} &= \frac{v_{h_1}}{M(\phi) + h} \\ \dot{h} &= -v_{h_3}\end{aligned}} \quad (\text{II.A.11})$$

<sup>9</sup> Jekeli, Christopher; Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications, Walter de Gruyter, New York 2001, S.127

In vektorieller Schreibweise lautet der inverse Zusammenhang:

$$\dot{\lambda} = D^{-1}(\lambda) \cdot v_h$$
$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\phi} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(N(\phi)+h)\cos(\phi)} & 0 \\ \frac{1}{M(\phi)+h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{h_1} \\ v_{h_2} \\ v_{h_3} \end{pmatrix} \quad (\text{II.A.12})$$

## III Kinematik

Ziel dieses Abschnitts ist es Gleichungen zu entwickeln, die die Kinematik eines beliebigen Objekts im dreidimensionalen Raum genügend beschreiben. Es müssen Aussagen zur Position, Geschwindigkeit und Orientierung dieses Objektes getroffen und mit Parametern belegt werden. Da in der gängigen Literatur verschiedene konkurrierende Parametrisierungen für diese kinematischen Bewegungsgleichungen benutzt werden, vergleicht und diskutiert diese Arbeit drei unterschiedliche Ansätze. Ansatz 1 beinhaltet die Parametrisierung von Position und Geschwindigkeit in erdfesten kartesischen Koordinaten.<sup>10</sup>

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{v}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{e_1} \\ x_{e_2} \\ x_{e_3} \\ v_{e_1} \\ v_{e_2} \\ v_{e_3} \end{pmatrix}$$

Ansatz 1 bietet sich dabei auf Grund der einfachen Struktur vor allem für die Integration mit Satellitennavigation an. Ansatz 2 verfolgt die klassische Parametrisierung der Position in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten und der Geschwindigkeit in horizontfesten kartesischen Koordinaten.<sup>11</sup>

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{v}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \phi \\ h \\ v_{h_1} \\ v_{h_2} \\ v_{h_3} \end{pmatrix}$$

Ansatz 2 wird üblicherweise in der Luftfahrt verwendet. Für Ansatz 3 werden Position und Geschwindigkeit in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten parametrisiert.<sup>12</sup>

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \phi \\ h \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\phi} \\ \dot{h} \end{pmatrix}$$

Ansatz 3 bietet Vorteile durch die beinahe ausschließliche Verwendung von Winkeln beziehungsweise deren zeitliche Ableitungen als Zustände. Die Höhe wird dabei oftmals in der Einheit Kilometer angegeben. Dies führt in den linearisierten Bewegungsgleichungen zu gleichmäßiger Größenordnung der Einträge in der Jacobimatrix und verbessert deren Kondition in Systemen mit eingeschränkter Mantissenlänge. Die Orientierung wird unabhängig vom gewählten Ansatz entweder in Eulerwinkeln<sup>13</sup>

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vartheta \\ \psi \end{pmatrix}$$

oder in Quaternionen<sup>14</sup>

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

parametrisiert, so dass sich ein Zustandsvektor der Länge neun beziehungsweise zehn ergibt. In der Herleitung werden dazu zunächst die nichtlinearen kinematischen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen aus der Newtonschen

<sup>10</sup> Wei, M. & Schwarz, K.P.; A Strapdown Inertial Algorithm Using an Earth-Fixed Cartesian Frame, in Journal of The Institute of Navigation Vol. 37 No.2, Calgary 1990, S.154ff

<sup>11</sup> Farrell, Jay A. & Barth, Matthew; The Global Positioning System & Inertial Navigation, McGraw-Hill Companies, New York 1999, S.187ff

<sup>12</sup> Britting, Kenneth R.; Inertial Navigation Systems Analysis, John Wiley & Sons, New York 1971, S.109ff

<sup>13</sup> Farrell, James L.; Integrated Aircraft Navigation, Academic Press, San Diego 1976, S.38ff

<sup>14</sup> Kuipers, Jack B.; Quaternions and Rotation Sequences, Princeton University Press, Princeton 1999, S.268ff

Physik angesetzt. Diese sind fehlerfrei und beinhalten noch keinerlei Vereinfachungen oder Vernachlässigungen. Da alle real gemessenen oder geschätzten Größen jedoch fehlerbehaftet sind, ergibt die Anwendung einer Störungsrechnung die nichtlinearen kinematischen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen. Dabei erfolgt ein Übergang in den Zustandsparametern von absoluten Zustandsgrößen auf Zustandsstörungen. Eine abschließende Linearisierung führt zu den linearisierten kinematischen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen.

*1. Newtonsche Physik  $\Rightarrow$   
Nichtlineare Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen*

*2. Störungsrechnung  $\Rightarrow$   
Nichtlineare Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen*

*3. Linearisierung  $\Rightarrow$   
Linearisierte Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen*

Ein Unterschied dieser Arbeit im Vergleich zur angegebenen Literatur besteht darin, dass in der gesamten Berechnung der kinematischen Bewegungsgleichungen keine Vereinfachungen oder Vernachlässigungen vor oder während der Herleitung vorgenommen werden, da sich erst in den endgültigen kinematischen Bewegungsgleichungen die Effekte diverser Vernachlässigungen und Vereinfachungen qualitativ und quantitativ beurteilen lassen. Diese Arbeit liefert somit fehlerfreie linearisierte kinematische Bewegungsgleichungen in einheitlicher Notation und in gemeinsamer Herleitung für drei unterschiedliche Parametrisierungen. Dadurch entsteht die Möglichkeit, die drei wichtigsten Parametrisierungen der Navigation einander gegenüberzustellen zu können, da in der angegebenen Referenzliteratur für jede der drei Parametrisierungen andere Rahmenbedingungen festgelegt und andere Vereinfachungen getroffen wurden und diese bisher so miteinander nur schwer vergleichbar waren. Im Anschluss an die Herleitung der kinematischen Bewegungsgleichungen soll in einem Literaturvergleich gezeigt werden, ob und mit welchen Einschränkungen die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten fehlerfreien kinematischen Bewegungsgleichungen mit denen der Standardliteratur in Übereinstimmung gebracht werden können. Dies soll zugleich als Kontrolle der in dieser Arbeit entwickelten kinematischen Bewegungsgleichungen dienen. Da die im bisherigen Verlauf entwickelten kinematischen Bewegungsgleichungen auf Grund des Fehlens jeglicher Vereinfachungen und Vernachlässigungen und der daraus resultierenden Komplexität eine sofortige Weiterverwendung im Rahmen moderner Navigationssysteme nicht unbedingt zulassen, erfolgen abschließend Vereinfachungen durch klar definierte und inhaltlich nachvollziehbare Annahmen basierend auf gängigen IMU-Genauigkeitsklassen. Als Endergebnis des gesamten Kapitels werden universell verwendbare kinematische Bewegungsgleichungen in den drei Standardparametrisierungen der Navigation präsentiert. In der Herleitung innerhalb dieses Abschnitts werden aus Gründen der Übersichtlichkeit alle Gleichungen nur in Vektorform dargestellt. Die skalar ausformulierte Darstellung aller kinematischen Gleichungen findet sich am Ende dieses Abschnitts in Form übersichtlicher Templates.

## 1. Nichtlineare Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen

Ziel dieses Kapitels ist die Bestimmung der nichtlinearen kinematischen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen nach Newtonscher Physik.

*1. Newtonsche Physik  $\Rightarrow$   
Nichtlineare Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen*

*2. Störungsrechnung  $\Rightarrow$   
Nichtlineare Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen*

*3. Linearisierung  $\Rightarrow$   
Linearisierte Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen*

Die nichtlinearen kinematischen Bewegungsgleichungen werden dazu getrennt nach Position, Geschwindigkeit und Orientierung hergeleitet und im Anschluss zu einem Navigationsdifferentialgleichungssystem zusammengestellt. Für die Parametrisierung der Orientierung werden zwei alternative Ansätze vorgestellt.

## 1.1. Orientierungsdifferentialgleichungssystem

Im Folgenden wird die Differentialgleichung der Orientierung aufgestellt und insbesondere auf die inertialen Winkelgeschwindigkeiten zurückgeführt, da dies Voraussetzung für eine spätere Transformation der gemessenen Beschleunigungen vom körperfesten Bezugssystem in das jeweilige Bezugssystem der Navigationsparameter ist. Aus der Definition der Zusammenhangsmatrix aus Abschnitt II ergibt sich die Orientierungsdifferentialgleichung zwischen dem frei wählbaren Bezugssystemen  $(P_a, \mathbf{a})$  und dem körperfesten Bezugssystem  $(P_b, \mathbf{b})$ .

$$\begin{aligned}\dot{R}_{ab} &= R_{ab} \Omega_{ab}^b \\ R_{ab}(t_0) &= R_{ab_0}\end{aligned}\quad (\text{III.1.1})$$

Die Koordinatentransformation lautet nach Hinzunahme des raumfesten Bezugssystems  $(P_i, \mathbf{i})$ :

$$\Omega_{ab}^b = \Omega_{ib}^b - R_{ab}^T \Omega_{ia}^a R_{ab} \quad (\text{III.1.2})$$

Durch Einsetzen in Beziehung (III.1.1) erhält man die Matrixorientierungsdifferentialgleichung im allgemeinen Bezugssystem  $(P_a, \mathbf{a})$ .

$$\begin{aligned}\dot{R}_{ab} &= R_{ab} \Omega_{ib}^b - \Omega_{ia}^a R_{ab} \\ R_{ab}(t_0) &= R_{ab_0}\end{aligned}\quad (\text{III.1.3})$$

Es werden nun zwei alternative Parametrisierungen dieser Matrixdifferentialgleichung vorgeschlagen.

### 1.1.1 in Eulerwinkeln

Da jede Rotationsmatrix durch sequentielles Drehen um drei Achsen beschrieben werden kann, definieren wir die Rotationsmatrix  $R_{ab}$  zwischen den Bezugssystemen  $(P_a, \mathbf{a})$  und  $(P_b, \mathbf{b})$  wie folgt:<sup>15</sup>

$$R_{ab} = R_3(\psi_{ab}) R_2(\vartheta_{ab}) R_1(\varphi_{ab})$$

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} \cos(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) & \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) & \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) & -\sin(\psi_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) & +\sin(\psi_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ \sin(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) & \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) & \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) & +\cos(\psi_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) & -\cos(\psi_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ -\sin(\vartheta_{ab}) & \cos(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) & \cos(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \end{pmatrix} \quad (\text{III.1.4})$$

Diese Parametrisierung wird auch als Eulerparametrisierung bezeichnet. Für die Umkehrung  $R_{ba}$  gilt dementsprechend:

$$R_{ba} = R_{ab}^T = R_1^T(\varphi_{ab}) R_2^T(\vartheta_{ab}) R_3^T(\psi_{ab})$$

$$R_{ba} = \begin{pmatrix} \cos(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) & \sin(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) & -\sin(\vartheta_{ab}) \\ \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) & \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) & \cos(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ -\sin(\psi_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) & +\cos(\psi_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) & \\ \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) & \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) & \cos(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ +\sin(\psi_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) & -\cos(\psi_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) & \end{pmatrix} \quad (\text{III.1.5})$$

<sup>15</sup> Farrell, J.L.; Integrated Aircraft Navigation, Academic Press, San Diego 1976, S.38

Durch Bildung der zeitlichen Ableitung erhält man  $\dot{R}_{ab}$ .

$$\dot{R}_{ab} = \frac{d}{dt} R_{ab} \quad (III.1.6)$$

$$\dot{R}_{ab} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} -\dot{\vartheta}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \\ -\dot{\psi}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) \end{array} & \begin{array}{c} \dot{\varphi}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\varphi}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\vartheta}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\psi}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\psi}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \end{array} & \begin{array}{c} -\dot{\varphi}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\varphi}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\vartheta}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\psi}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\psi}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \end{array} \\ \begin{array}{c} -\dot{\vartheta}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \\ +\dot{\psi}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) \end{array} & \begin{array}{c} \dot{\varphi}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\varphi}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\vartheta}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\psi}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\psi}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \end{array} & \begin{array}{c} -\dot{\varphi}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\varphi}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\vartheta}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \cos(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\psi}_{ab} \cos(\psi_{ab}) \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\psi}_{ab} \sin(\psi_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \end{array} \\ -\dot{\vartheta}_{ab} \cos(\vartheta_{ab}) & \begin{array}{c} \dot{\varphi}_{ab} \cos(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\vartheta}_{ab} \sin(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \end{array} & \begin{array}{c} -\dot{\varphi}_{ab} \cos(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\vartheta}_{ab} \sin(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \end{array} \end{pmatrix}$$

Die Zusammenhangsmatrix  $\Omega_{ab}^b$  wird zu:

$$\Omega_{ab}^b = R_{ab}^T \dot{R}_{ab} \quad (III.1.7)$$

$$\Omega_{ab}^b = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ -\dot{\vartheta}_{ab} \sin(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\psi}_{ab} \cos(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \end{array} & \begin{array}{c} \dot{\vartheta}_{ab} \sin(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\psi}_{ab} \cos(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \end{array} & \begin{array}{c} \dot{\vartheta}_{ab} \cos(\varphi_{ab}) \\ +\dot{\psi}_{ab} \cos(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \end{array} \\ \begin{array}{c} -\dot{\vartheta}_{ab} \cos(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\psi}_{ab} \cos(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \dot{\varphi}_{ab} - \dot{\psi}_{ab} \sin(\vartheta_{ab}) \end{array} & \begin{array}{c} -\dot{\varphi}_{ab} + \dot{\psi}_{ab} \sin(\vartheta_{ab}) \\ 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

Der Vektor der Drehwinkel  $\omega_{ab}^b$  lautet folglich:

$$\omega_{ab}^b = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{ab} - \dot{\psi}_{ab} \sin(\vartheta_{ab}) \\ \dot{\vartheta}_{ab} \cos(\varphi_{ab}) + \dot{\psi}_{ab} \cos(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ -\dot{\vartheta}_{ab} \sin(\varphi_{ab}) + \dot{\psi}_{ab} \cos(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \end{pmatrix} \quad (III.1.8)$$

$$\omega_{ab}^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin(\vartheta_{ab}) \\ 0 & \cos(\varphi_{ab}) & \cos(\vartheta_{ab}) \sin(\varphi_{ab}) \\ 0 & -\sin(\varphi_{ab}) & \cos(\vartheta_{ab}) \cos(\varphi_{ab}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{ab} \\ \dot{\vartheta}_{ab} \\ \dot{\psi}_{ab} \end{pmatrix}$$

$$\omega_{ab}^b = C_{ab}(\psi_{ab}) \cdot \dot{\psi}_{ab}$$

Umschreiben der Gleichung (III.1.2) von Zusammenhangsmatrizen auf Vektoren gemäß Abschnitt II führt zu:

$$\omega_{ab}^b = \omega_{ib}^b - R_{ab}^T \omega_{ia}^a \quad (III.1.9)$$

Einsetzen von Beziehung (III.1.8) und Auflösen nach den zeitlichen Ableitungen der Drehwinkel  $\dot{\psi}_{ab}$  ergibt:

$$\dot{\psi}_{ab} = C_{ab}^{-1}(\psi_{ab}) \cdot \omega_{ib}^b - C_{ab}^{-1}(\psi_{ab}) \cdot R_{ab}^T(\psi_{ab}) \cdot \omega_{ia}^a \quad (III.1.10)$$

Die inverse Koeffizientenmatrix  $C_{ab}^{-1}(\psi_{ab})$  lässt sich aus Gleichung (III.1.8) ableiten.

$$C_{ab}^{-1}(\psi_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & \sin(\varphi_{ab}) \tan(\vartheta_{ab}) & \cos(\varphi_{ab}) \tan(\vartheta_{ab}) \\ 0 & \cos(\varphi_{ab}) & -\sin(\varphi_{ab}) \\ 0 & \frac{\sin(\varphi_{ab})}{\cos(\vartheta_{ab})} & \frac{\cos(\varphi_{ab})}{\cos(\vartheta_{ab})} \end{pmatrix} \quad (III.1.11)$$

Die ausformulierte Differentialgleichung für absolute Orientierungsparameter lautet somit:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{ab} &= \omega_{ib_1}^b + \sin(\varphi_{ab}) \tan(\vartheta_{ab}) \cdot \omega_{ib_2}^b + \cos(\varphi_{ab}) \tan(\vartheta_{ab}) \cdot \omega_{ib_3}^b - \frac{\cos(\psi_{ab})}{\cos(\vartheta_{ab})} \cdot \omega_{ia_1}^a - \frac{\sin(\psi_{ab})}{\cos(\vartheta_{ab})} \cdot \omega_{ia_2}^a \\ \dot{\vartheta}_{ab} &= \cos(\varphi_{ab}) \cdot \omega_{ib_2}^b - \sin(\varphi_{ab}) \cdot \omega_{ib_3}^b + \sin(\psi_{ab}) \cdot \omega_{ia_1}^a - \cos(\psi_{ab}) \cdot \omega_{ia_2}^a \\ \dot{\psi}_{ab} &= \frac{\sin(\varphi_{ab})}{\cos(\vartheta_{ab})} \cdot \omega_{ib_2}^b + \frac{\cos(\varphi_{ab})}{\cos(\vartheta_{ab})} \cdot \omega_{ib_3}^b - \cos(\psi_{ab}) \tan(\vartheta_{ab}) \cdot \omega_{ia_1}^a - \sin(\psi_{ab}) \tan(\vartheta_{ab}) \cdot \omega_{ia_2}^a - \omega_{ia_3}^a \end{aligned} \quad (\text{III.1.12})$$

Obiges Differentialgleichungssystem ist für einen Nickwinkel von  $\vartheta_{ab} = \pm\pi/2$  singular. Für die Parametrisierung des Ansatzes 1 ist das allgemeine Bezugssystem  $(P_a, \mathbf{a})$  mit dem erdfesten Bezugssystem  $(P_e, \mathbf{e})$  und für die Parametrisierungen der Ansätze 2 und 3 mit dem horizontfesten Bezugssystem  $(-, \mathbf{h})$  zu ersetzen.

### 1.1.2 in Quaternionen

Neben der oben genannten minimalen Parametrisierung mit drei Parametern lassen sich Rotationsmatrizen auch durch höherdimensionale redundante Parametrisierungen darstellen. Dazu wird eine vierdimensionale Parametrisierung mittels Quaternionen betrachtet. Quaternionen erhält man, indem man die komplexe Zahlenebene um zwei Dimensionen erweitert.

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{ab} &= q_{ab_0} + q_{ab_1}i + q_{ab_2}j + q_{ab_3}k \\ \tilde{q}_{ab} &= (q_{ab_0}, \mathbf{q}_{ab}) \end{aligned} \quad (\text{III.1.13})$$

$q_{ab_0}$  wird Skarteil und  $\mathbf{q}_{ab}$  Vektorteil des Quaternion  $\tilde{q}_{ab}$  genannt. Die Quaternionmultiplikation ist allgemein definiert als:

$$\tilde{q}\tilde{p} = (q_0, \mathbf{q})(p_0, \mathbf{p}) = (q_0p_0 - \mathbf{q}\mathbf{p}, q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{q}\times\mathbf{p}) \quad (\text{III.1.14})$$

Für eine detaillierte Beschreibung der Quaternionen wird auf die Literatur verwiesen.<sup>16</sup> Die zugehörige Parametrisierung der Rotationsmatrix  $R_{ab}$  lautet in Quaternionenschreibweise:

$$R_{ab}(\tilde{q}_{ab}) = \begin{pmatrix} q_{ab_0}^2 + q_{ab_1}^2 - q_{ab_2}^2 - q_{ab_3}^2 & 2(q_{ab_1}q_{ab_2} - q_{ab_0}q_{ab_3}) & 2(q_{ab_1}q_{ab_3} + q_{ab_0}q_{ab_2}) \\ 2(q_{ab_1}q_{ab_2} + q_{ab_0}q_{ab_3}) & q_{ab_0}^2 - q_{ab_1}^2 + q_{ab_2}^2 - q_{ab_3}^2 & 2(q_{ab_2}q_{ab_3} - q_{ab_0}q_{ab_1}) \\ 2(q_{ab_1}q_{ab_3} - q_{ab_0}q_{ab_2}) & 2(q_{ab_2}q_{ab_3} + q_{ab_0}q_{ab_1}) & q_{ab_0}^2 - q_{ab_1}^2 - q_{ab_2}^2 + q_{ab_3}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.1.15})$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Rotationsmatrix  $R_{ab}$  orthogonal und  $\det(R_{ab})=1$  bleiben muss. Daher ist das für die Parametrisierung verwendete Quaternion  $\tilde{q}_{ab}$  stets zu normieren.

$$|\tilde{q}_{ab}| = q_{ab_0}^2 + q_{ab_1}^2 + q_{ab_2}^2 + q_{ab_3}^2 = 1 \quad (\text{III.1.16})$$

Die Matrixorientierungsdifferentialgleichung lautet nach Einsetzen der Rotationsmatrix in Quaternionenparametrisierung gemäß Kapitel 1.1 dieses Abschnitts:

$$\dot{R}_{ab}(\tilde{q}_{ab}) = R_{ab}(\tilde{q}_{ab})\Omega_{ib}^b - \Omega_{ia}^a R_{ab}(\tilde{q}_{ab}) \quad (\text{III.1.17})$$

Die Orientierungsdifferentialgleichung in Quaternionen lässt sich wie folgt formulieren:<sup>17</sup>

$$\dot{\tilde{q}}_{ab} = \frac{1}{2}(\tilde{q}_{ab}\tilde{\omega}_{ib}^b - \tilde{\omega}_{ia}^a\tilde{q}_{ab}) \quad (\text{III.1.18})$$

<sup>16</sup> Kuipers, Jack B.; Quaternions and Rotation Sequences, Princeton University Press, Princeton 1999

<sup>17</sup> Dambeck, Johann H.; Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Stuttgart 1999, S.39

Die ausformulierte Differentialgleichung für absolute Orientierungsparameter lautet:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_{ab_0} &= \frac{1}{2} \left( -(\omega_{ib_1}^b - \omega_{ia_1}^a) q_{ab_1} - (\omega_{ib_2}^b - \omega_{ia_2}^a) q_{ab_2} - (\omega_{ib_3}^b - \omega_{ia_3}^a) q_{ab_3} \right) \\
 \dot{q}_{ab_1} &= \frac{1}{2} \left( (\omega_{ib_1}^b - \omega_{ia_1}^a) q_{ab_0} + (\omega_{ib_3}^b + \omega_{ia_3}^a) q_{ab_2} - (\omega_{ib_2}^b + \omega_{ia_2}^a) q_{ab_3} \right) \\
 \dot{q}_{ab_2} &= \frac{1}{2} \left( (\omega_{ib_2}^b - \omega_{ia_2}^a) q_{ab_0} - (\omega_{ib_3}^b + \omega_{ia_3}^a) q_{ab_1} + (\omega_{ib_1}^b + \omega_{ia_1}^a) q_{ab_3} \right) \\
 \dot{q}_{ab_3} &= \frac{1}{2} \left( (\omega_{ib_3}^b - \omega_{ia_3}^a) q_{ab_0} + (\omega_{ib_2}^b + \omega_{ia_2}^a) q_{ab_1} - (\omega_{ib_1}^b + \omega_{ia_1}^a) q_{ab_2} \right)
 \end{aligned} \tag{III.1.19}$$

Das allgemeine Bezugssystem  $(P_a, \mathbf{a})$  muss analog zu Kapitel 1.1.1 entsprechend der jeweiligen Parametrisierung ansatzbezogen ersetzt werden. Bei den nichtlinearen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen wird die Parametrisierung in Quaternionen favorisiert, da diese im Vergleich zur Parametrisierung mit Eulerwinkeln wie in Kapitel 1.1.1 gezeigt keine Singularität aufweist. Im Übergang zu den Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern in den beiden folgenden Kapiteln erweist sich die Formulierung in Eulerwinkeln jedoch als vorteilhafter, da diese eine multiplikative Aufdatierung zulassen. Somit wird die Gruppe der Rotationsmatrizen nicht verlassen und zudem wird ein Parameter eingespart.

## 1.2. Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungssystem

Nach der Herleitung der Orientierungsdifferentialgleichung werden in diesem Kapitel die Differentialgleichungen für Position und Geschwindigkeit bestimmt. Diese werden ausgehend vom raumfesten Bezugssystem hergeleitet, da nur dieses ein unbeschleunigtes Referenzsystem darstellt und somit die Gesetze Newtonscher Mechanik Anwendung finden.<sup>18</sup> Im Anschluss folgen Erweiterungen auf erdfeste und horizontfeste Bezugssysteme. Ausgangspunkt bildet das zweite Newtonsche Gesetz.

$$F = ma \tag{III.1.20}$$

$F$  ist die einwirkende Kraft,  $m$  die Masse und  $a$  die resultierende Beschleunigung. Falls zusätzlich Gravitation  $g$  auf den Körper einwirkt, erweitert sich das zweite Newtonsche Gesetz.

$$ma = F + mg \tag{III.1.21}$$

Division durch die Masse führt zu folgender fundamentalen Ausgangsgleichung:

$$\boxed{a = f + g} \tag{III.1.22}$$

Für unseren speziellen Fall der Navigation lässt sich obige Fundamentalgleichung im raumfesten Bezugssystem - und nur dort - wie folgt substituieren:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i(P_b) = \mathbf{i} \left( R_{ib} \mathbf{f}_b(P_b) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_i(P_b), t) \right) \tag{III.1.23}$$

Für die Vektoraddition zwischen den Bezugssystemen gilt:

$$\begin{aligned}
 \overline{P_i P_b} &= \overline{P_i P_e} + \overline{P_e P_b} \\
 \mathbf{i} \mathbf{x}_i(P_b) &= \mathbf{i} \left( \mathbf{x}_i(P_e) + R_{ie} \mathbf{x}_e(P_b) \right)
 \end{aligned} \tag{III.1.24}$$

Erste Ableitung nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{i}} \mathbf{x}_i(P_b) &= \mathbf{i} \left( \dot{\mathbf{x}}_i(P_e) + \dot{R}_{ie} \mathbf{x}_e(P_b) + R_{ie} \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) \right) \\
 \ddot{\mathbf{i}} \mathbf{x}_i(P_b) &= \ddot{\mathbf{i}} \mathbf{x}_i(P_e) + \dot{\mathbf{i}} R_{ie} \left( \Omega_{ie}^e \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) \right)
 \end{aligned} \tag{III.1.25}$$

Zweite Ableitung nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{i}} \mathbf{x}_i(P_b) &= \mathbf{i} \left( \ddot{\mathbf{x}}_i(P_e) + \dot{R}_{ie} \left( \Omega_{ie}^e \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) \right) + R_{ie} \left( \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{x}_e(P_b) + \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) \right) \right) \\
 \ddot{\mathbf{i}} \mathbf{x}_i(P_b) &= \mathbf{i} \left( \ddot{\mathbf{x}}_i(P_e) + R_{ie} \left( \ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) + 2\Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \Omega_{ie}^{e^2} \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{x}_e(P_b) \right) \right)
 \end{aligned} \tag{III.1.26}$$

Einsetzen in Beziehung (III.1.23):

$$\mathbf{i} \left( R_{ib} \mathbf{f}_b(P_b) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V(\mathbf{x}_i(P_b), t) \right) = \mathbf{i} \left( \ddot{\mathbf{x}}_i(P_e) + R_{ie} \left( \ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) + 2\Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \Omega_{ie}^{e^2} \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{x}_e(P_b) \right) \right) \tag{III.1.27}$$

<sup>18</sup> Hofmann-Wellenhof, B., Legat, K. & Wieser, M.; Navigation – Principles of Positioning and Guidance, Springer Verlag, Wien 2003, S.20

Additive Zerlegung des Gesamtgravitationspotentials in einen terrestrischen und einen extraterrestrischen Anteil:

$$V(\mathbf{x}_i(P_b, t)) = V_{terra}(\mathbf{x}_i(P_b, t)) + V_{exterra}(\mathbf{x}_i(P_b, t)) \quad (III.1.28)$$

Einsetzen in Gleichung (III.1.27) ergibt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{i} \left( R_{ib} \mathbf{f}_b(P_b) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V_{terra}(\mathbf{x}_i(P_b, t)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V_{exterra}(\mathbf{x}_i(P_b, t)) \right) \\ &= \mathbf{i} \left( \ddot{\mathbf{x}}_i(P_e) + R_{ie} \left( \ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) + 2\Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \Omega_{ie}^e{}^2 \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{x}_e(P_b) \right) \right) \end{aligned} \quad (III.1.29)$$

Der Ausdruck  $V_{exterra}(\mathbf{x}_i(P_b, t)) - \ddot{\mathbf{x}}_i(P_e)$  repräsentiert eine durch die Abweichung von  $P_b$  vom Geozentrum bedingte Beschleunigung, die als Gezeitenbeschleunigung  $V_{tidal}(\mathbf{x}_i(P_b, t))$  definiert ist.<sup>19</sup>

$$V_{exterra}(\mathbf{x}_i(P_b, t)) - \ddot{\mathbf{x}}_i(P_e) = V_{tidal}(\mathbf{x}_i(P_b, t)) \quad (III.1.30)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{i} \left( R_{ib} \mathbf{f}_b(P_b) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V_{terra}(\mathbf{x}_i(P_b, t)) + \text{grad}_{\mathbf{x}_i} V_{tidal}(\mathbf{x}_i(P_b, t)) \right) \\ &= \mathbf{i} R_{ie} \left( \ddot{\mathbf{x}}_e(P_b) + 2\Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{x}}_e(P_b) + \Omega_{ie}^e{}^2 \mathbf{x}_e(P_b) + \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{x}_e(P_b) \right) \end{aligned} \quad (III.1.31)$$

Da sich die Koordinaten nun ausschließlich auf das Beobachtungszentrum  $P_b$  beziehen, lassen wir den Klammerausdruck  $(P_b)$  weg. Mittels Vektortransformation  $\mathbf{e} = \mathbf{i} R_{ie}$  ins erdfeste Bezugssystem folgt:

$$\mathbf{e} \left( R_{eb} \mathbf{f}_b + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{terra}(\mathbf{x}_e, t) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{tidal}(\mathbf{x}_e, t) \right) = \mathbf{e} \left( \ddot{\mathbf{x}}_e + 2\Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{x}}_e + \Omega_{ie}^e{}^2 \mathbf{x}_e + \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{x}_e \right) \quad (III.1.32)$$

Auflösen nach der Beschleunigung:

$$\mathbf{e} \ddot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{e} \left( R_{eb} \mathbf{f}_b - 2\Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{x}}_e - \Omega_{ie}^e{}^2 \mathbf{x}_e - \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{x}_e + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{terra}(\mathbf{x}_e, t) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{tidal}(\mathbf{x}_e, t) \right) \quad (III.1.33)$$

Die nichtlinearen Differentialgleichungen für die Position und Geschwindigkeit ergeben sich durch Zerlegung von Gleichung (III.1.33) in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e &= \mathbf{v}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_e &= R_{eb} \mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_e - \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{terra}(\mathbf{x}_e, t) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{tidal}(\mathbf{x}_e, t) \end{aligned} \quad (III.1.34)$$

Der Zahlenwert für die Ungleichmäßigkeit der Erddrehrate lautet dabei:<sup>20</sup>

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e = -4,6 \pm 0,4 \cdot 10^{-22} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad (III.1.35)$$

Obwohl die Ungleichmäßigkeit der Erddrehrate in der Definition der Bezugsachsentransformationen bereits vernachlässigt wurde, soll sie in der weiteren Herleitung der kinematischen Bewegungsgleichungen nicht vorab weggelassen werden. Bei der Vereinfachung der Rotationsmatrix  $R_{ie}$  in Abschnitt II handelt es sich um die Vereinfachung eines Parameters speziell für unsere Anwendung. Für andere Anwendungen kann jedoch auch eine weniger vereinfachte Rotationsmatrix  $R_{ie}$  definiert und eingesetzt werden. Aus diesem Grund bleibt die Ungleichförmigkeit der Erddrehrate in den Navigationsdifferentialgleichungssystemen erhalten, um deren Fehlerfreiheit zu garantieren. Die Geschwindigkeitsdifferentialgleichung im horizontfesten Bezugssystem leitet sich durch zeitliche Ableitung der Geschwindigkeitstransformation gemäß Anhang A des Abschnitts II ab.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_h &= \frac{d}{dt} (R_{he} \mathbf{v}_e) = \dot{R}_{he} \mathbf{v}_e + R_{he} \dot{\mathbf{v}}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_e &= R_{he}^T \dot{\mathbf{v}}_h - R_{he}^T \dot{R}_{he} \mathbf{v}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_e &= R_{he}^T \dot{\mathbf{v}}_h - \Omega_{he}^e R_{he}^T \mathbf{v}_h \end{aligned} \quad (III.1.36)$$

<sup>19</sup> Dambeck, J.H.; Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Stuttgart 1999, S.45

<sup>20</sup> Chovitz, B.H.; Parameters of Common Relevance of Astronomy, Geodesy and Geodynamics, Bulletin Geodesique: The Geodesists Handbook Vol. 62 No. 3, 1988, S.363

Gleichsetzen der Gleichung (III.1.34) mit der Gleichung (III.1.36) und Umstellen auf die Ableitung der horizontfesten Geschwindigkeiten ergibt:

$$\begin{aligned}
R_{he}^T \dot{\mathbf{v}}_h - \Omega_{he}^e R_{he}^T \mathbf{v}_h &= R_{eb} \mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_e - \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e) - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e \\
&\quad + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{terra}(\mathbf{x}_e, t) + \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{tidal}(\mathbf{x}_e, t) \\
R_{he} R_{he}^T \dot{\mathbf{v}}_h &= R_{he} R_{eb} \mathbf{f}_b - R_{he} 2\Omega_{ie}^e \mathbf{v}_e + R_{he} \Omega_{he}^e R_{he}^T \mathbf{v}_h - R_{he} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e)) \\
&\quad - R_{he} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e) + R_{he} \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{terra}(\mathbf{x}_e, t) + R_{he} \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{tidal}(\mathbf{x}_e, t) \\
\dot{\mathbf{v}}_h &= R_{he} R_{eb} \mathbf{f}_b + (R_{he} \Omega_{he}^e R_{he}^T - 2R_{he} \Omega_{ie}^e R_{he}^T) \mathbf{v}_h - R_{he} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e)) \\
&\quad - R_{he} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e) + R_{he} \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{terra}(\mathbf{x}_e, t) + R_{he} \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{tidal}(\mathbf{x}_e, t)
\end{aligned} \tag{III.1.37}$$

Die Position im erdfesten Bezugssystem wird im weiteren Verlauf gemäß Anhang A des Abschnitts II durch ellipsoidische Parameter ausgedrückt. Durch Ersetzen der Zusammenhangsmatrizen durch Winkelgeschwindigkeitsvektoren kommt man zur Geschwindigkeitsdifferentialgleichung in horizontfesten Koordinaten.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_h &= R_{he} R_{eb} \mathbf{f}_b - (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h + 2R_{he} \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times \mathbf{v}_h - R_{he} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}))) - R_{he} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda})) \\
&\quad + R_{he} \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{terra}(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}), t) + R_{he} \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{tidal}(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}), t)
\end{aligned} \tag{III.1.38}$$

Abschließend muss noch die Beziehung zwischen den horizontfesten Geschwindigkeiten und den ellipsoidischen Parametern gemäß Anhang A des Abschnitts II eingeführt werden, um eine Formulierung der Positionsdifferentialgleichung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten zu ermöglichen. Zusammen ergeben sich die Differentialgleichungen für Position und Geschwindigkeit in kombinierten erdfesten ellipsoidischen und horizontfesten Koordinaten.

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v}_h \\
\dot{\mathbf{v}}_h &= R_{hb} \mathbf{f}_b - (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h) + 2R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times \mathbf{v}_h - R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}))) - R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda})) \\
&\quad + R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{terra}(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}), t) + R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{tidal}(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}), t)
\end{aligned} \tag{III.1.39}$$

Die inverse Koeffizientenmatrix  $D^{-1}(\boldsymbol{\lambda})$  ist dem Anhang A des Abschnitts II zu entnehmen. Zeitliche Ableitung der Transformation der ellipsoidischen Parameter gemäß Anhang A des Abschnitts II und Auflösen nach den zweiten Ableitungen führen zu:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_h &= \dot{D}(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} + D(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\lambda}} \\
\ddot{\boldsymbol{\lambda}} &= -D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \dot{D}(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} + D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_h
\end{aligned} \tag{III.1.40}$$

Die erste zeitliche Ableitung der Koeffizientenmatrix  $\dot{D}(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}})$  heißt demnach:

$$\dot{D}(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) = \begin{pmatrix} 0 & M'(\phi) \dot{\phi} + \dot{h} & 0 \\ (N'(\phi) \dot{\phi} + \dot{h}) \cos(\phi) - (N(\phi) + h) \sin(\phi) \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{III.1.41}$$

Durch Einsetzen der Geschwindigkeitsdifferentialgleichung von Beziehung (III.1.39) in Gleichung (III.1.40) erhält man die Geschwindigkeitsdifferentialgleichung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten.

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{\lambda}} &= -D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \dot{D}(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} + D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{hb} \mathbf{f}_b - D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) + 2R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times D(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} \\
&\quad - D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}))) - D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda})) \\
&\quad + D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{terra}(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}), t) + D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}_e} V_{tidal}(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}), t)
\end{aligned} \tag{III.1.42}$$

Die nichtlineare Differentialgleichung für die Position und die Geschwindigkeit folgt durch Zerlegung von Gleichung (III.1.42) in ein System erster Ordnung. Um Verwechslungen mit Zuständen zu vermeiden, sind deren zeitliche Ableitungen auf der linken Seite der Differentialgleichung nicht durch einen zusätzlichen Punkt, sondern durch den Differentialoperator  $d/dt$  gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \lambda &= \dot{\lambda} \\
 \frac{d}{dt} \dot{\lambda} &= -D^{-1}(\lambda) \cdot \dot{D}(\lambda, \dot{\lambda}) \cdot \dot{\lambda} + D^{-1}(\lambda) \cdot R_{hb} f_b - D^{-1}(\lambda) \cdot \left( \omega_{eh}^h(\lambda, \dot{\lambda}) + 2R_{he}(\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \right) \times D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \\
 &\quad - D^{-1}(\lambda) \cdot R_{he}(\lambda) \cdot \left( \omega_{ie}^e \times \left( \omega_{ie}^e \times x_e(\lambda) \right) \right) - D^{-1}(\lambda) \cdot R_{he}(\lambda) \cdot \left( \dot{\omega}_{ie}^e \times x_e(\lambda) \right) \\
 &\quad + D^{-1}(\lambda) \cdot R_{he}(\lambda) \cdot \text{grad}_{x_e} V_{terra}(x_e(\lambda), t) + D^{-1}(\lambda) \cdot R_{he}(\lambda) \cdot \text{grad}_{x_e} V_{tidal}(x_e(\lambda), t)
 \end{aligned} \tag{III.1.43}$$

### 1.3. Navigationsdifferentialgleichungssystem

Die Differentialgleichungen für Position, Geschwindigkeit und Orientierung werden nun zu einem Gesamtsystem kombiniert. Dabei erfolgt ein Übergang vom Gradienten des terrestrischen Gravitationspotentials  $\text{grad}_{x_e} V_{terra}(x_e, t)$  auf den zeitunabhängigen Erdschwerevektor  $g_e(x_e)$ . Es ist zu beachten, dass die Zentrifugalbeschleunigung  $\omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times x_e)$  bereits im Erdschwerevektor  $g_e(x_e)$  enthalten ist. Die zeitabhängigen Einflüsse des Erdschwerevektors können ebenso wie die Gezeitenbeschleunigung  $\text{grad}_{x_e} V_{tidal}(x_e, t)$  auf Grund ihrer geringen Größe vernachlässigt werden.<sup>21</sup> Innerhalb dieses Kapitels werden für die Erdschwere beziehungsweise deren Modellierung Platzhalter verwendet. Für eine detaillierte Behandlung wird auf Abschnitt IV verwiesen. Die Orientierungsdifferentialgleichung wird auf Grund der Singularität in der absoluten Eulerwinkelparametrisierung in Quaternionen formuliert. Bei allen Variablen handelt es sich hier in Kapitel 1 noch um absolute fehlerfreie Größen. Es müssen noch keine Annahmen getroffen werden. Die Darstellung erfolgt wie dargelegt in den drei vorgestellten Ansätzen. Die skalar ausformulierten Bewegungsgleichungen sind in einem Template am Ende dieses Abschnitts zusammengefasst.

#### 1.3.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten

Der Zustandsvektor der dem Ansatz 1 zu Grunde liegenden Parametrisierung lautet:

$$z = \left( x_{e_1} \quad x_{e_2} \quad x_{e_3} \quad v_{e_1} \quad v_{e_2} \quad v_{e_3} \quad q_{eb_0} \quad q_{eb_1} \quad q_{eb_2} \quad q_{eb_3} \right)^T \tag{III.1.44}$$

Der Eingangsvektor der dem Ansatz 1 zu Grunde liegenden Parametrisierung ist:

$$s = \left( \omega_{ib_1}^b \quad \omega_{ib_2}^b \quad \omega_{ib_3}^b \quad f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3} \right)^T \tag{III.1.45}$$

Die Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen können aus Gleichung (III.1.34) übernommen werden. Die Orientierungsdifferentialgleichung in Quaternionen folgt durch Umstellen von Gleichung (III.1.18) auf das erdfeste Bezugssystem. Zusammengefasst erhält man die nichtlinearen fehlerfreien Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten in Vektorschreibweise.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_e &= v_e \\
 \dot{v}_e &= R_{eb}(\tilde{q}_{eb}) \cdot f_b - 2\omega_{ie}^e \times v_e - \dot{\omega}_{ie}^e \times x_e + g_e(x_e) \\
 \dot{q}_{eb} &= \frac{1}{2} \left( \tilde{q}_{eb} \tilde{\omega}_{ib}^b - \tilde{\omega}_{ie}^e \tilde{q}_{eb} \right)
 \end{aligned} \tag{III.1.46}$$

<sup>21</sup> Schröder, Dietrich; Genauigkeitsanalyse inertialer Vermessungssysteme mit fahrzeugfesten Sensoren, Deutsche Geodätische Kommission Reihe C Dissertation Heft Nr. 391, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1992, S.66ff

### 1.3.2 in gemischten Koordinaten

Der Zustandsvektor der dem Ansatz 2 zu Grunde liegenden Parametrisierung lautet:

$$\mathbf{z} = \left( \lambda \quad \phi \quad h \quad v_{h_1} \quad v_{h_2} \quad v_{h_3} \quad q_{hb_0} \quad q_{hb_1} \quad q_{hb_2} \quad q_{hb_3} \right)^T \quad (\text{III.1.47})$$

Der Eingangsvektor der dem Ansatz 2 zu Grunde liegenden Parametrisierung ist:

$$\mathbf{s} = \left( \omega_{ib_1}^b \quad \omega_{ib_2}^b \quad \omega_{ib_3}^b \quad f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3} \right)^T \quad (\text{III.1.48})$$

Die Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen können aus Beziehung (III.1.39) übernommen werden. Die Orientierungsdifferentialgleichung lässt sich aus Gleichung (III.1.18) ableiten. Zusammengefasst erhält man die nichtlinearen fehlerfreien Bewegungsgleichungen im horizontfesten Bezugssystem in Vektorschreibweise.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= D^{-1}(\lambda) \cdot \mathbf{v}_h \\ \dot{\mathbf{v}}_h &= R_{hb}(\tilde{q}_{hb}) \cdot \mathbf{f}_b - \left( \omega_{eh}^h(\lambda, \mathbf{v}_h) + 2R_{he}(\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \right) \times \mathbf{v}_h - R_{he}(\lambda) \cdot \left( \dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\lambda) \right) + R_{he}(\lambda) \cdot \mathbf{g}_e(\mathbf{x}_e(\lambda)) \\ \dot{\tilde{q}}_{hb} &= \frac{1}{2} \left( \tilde{q}_{hb} \tilde{\omega}_{ib}^b - \tilde{\omega}_{ih}^h(\lambda, \mathbf{v}_h) \cdot \tilde{q}_{hb} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.1.49})$$

### 1.3.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

Der Zustandsvektor der dem Ansatz 3 zu Grunde liegenden Parametrisierung lautet:

$$\mathbf{z} = \left( \lambda \quad \phi \quad h \quad \dot{\lambda} \quad \dot{\phi} \quad \dot{h} \quad q_{hb_0} \quad q_{hb_1} \quad q_{hb_2} \quad q_{hb_3} \right)^T \quad (\text{III.1.50})$$

Der Eingangsvektor der dem Ansatz 3 zu Grunde liegenden Parametrisierung ist:

$$\mathbf{s} = \left( \omega_{ib_1}^b \quad \omega_{ib_2}^b \quad \omega_{ib_3}^b \quad f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3} \right)^T \quad (\text{III.1.51})$$

Die Positions- und Geschwindigkeitsdifferentialgleichungen können aus Gleichung (III.1.43) übernommen werden. Die Orientierungsdifferentialgleichung aus Beziehung (III.1.49) bleibt quasi unverändert. Letztendlich bedeutet der Übergang von horizontfesten Geschwindigkeiten auf Ableitungen der ellipsoidischen Koordinaten nur eine vorangestellte Gewichtung mit der Koeffizientenmatrix  $D^{-1}(\lambda)$  unter Berücksichtigung einer Führungsänderung  $\dot{D}(\lambda, \dot{\lambda})$ . Zusammengefasst lauten die nichtlinearen fehlerfreien Bewegungsgleichungen in ellipsoidischen Koordinaten in Vektorschreibweise:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \lambda &= \dot{\lambda} \\ \frac{d}{dt} \dot{\lambda} &= -D^{-1}(\lambda) \cdot \dot{D}(\lambda, \dot{\lambda}) \cdot \dot{\lambda} + D^{-1}(\lambda) \cdot R_{hb}(\tilde{q}_{hb}) \cdot \mathbf{f}_b - D^{-1}(\lambda) \cdot \left( \left( \omega_{eh}^h(\lambda, \dot{\lambda}) + 2R_{he}(\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \right) \times D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \right) \\ &\quad - D^{-1}(\lambda) \cdot R_{he}(\lambda) \cdot \left( \dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\lambda) \right) + D^{-1}(\lambda) \cdot R_{he}(\lambda) \cdot \mathbf{g}_e(\mathbf{x}_e(\lambda)) \\ \dot{\tilde{q}}_{hb} &= \frac{1}{2} \left( \tilde{q}_{hb} \tilde{\omega}_{ib}^b - \tilde{\omega}_{ih}^h(\lambda, \dot{\lambda}) \cdot \tilde{q}_{hb} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.1.52})$$

## 2. Nichtlineare Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen

Da alle gemessenen oder geschätzten Größen in der Realität fehlerbehaftet sind, müssen die im vorigen Kapitel präsentierten Navigationsdifferentialgleichungen erweitert werden.

$$\begin{aligned} &1. \text{ Newtonsche Physik} \Rightarrow \\ &\text{Nichtlineare Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen} \\ &2. \text{ Störungsrechnung} \Rightarrow \\ &\text{Nichtlineare Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen} \\ &3. \text{ Linearisierung} \Rightarrow \\ &\text{Linearisierte Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen} \end{aligned}$$

Die bisher als fehlerfrei angenommenen wahren Größen werden in eine Summe aus geschätztem oder gemessenem Wert und einer Schätz- beziehungsweise Messstörung zerlegt.

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \tilde{\mathbf{z}} + \delta\mathbf{z} \\ \mathbf{s} &= \tilde{\mathbf{s}} + \delta\mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{III.2.1})$$

Definition einer allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichung:

$$\dot{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}, \mathbf{s}) \quad (\text{III.2.2})$$

Einsetzen der Definition (III.2.1) in die allgemeine Differentialgleichung (III.2.2) ergibt:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} + \delta\dot{\mathbf{z}} = f(\tilde{\mathbf{z}} + \delta\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{s}} + \delta\mathbf{s}) \quad (\text{III.2.3})$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird angenommen, dass die Näherungswerte den jeweiligen funktionalen Zusammenhang identisch erfüllen.

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = f(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{s}}) \quad (\text{III.2.4})$$

Im Umkehrschluss ergibt sich damit die Einschränkung, dass die Störungsgrößen nicht unbegrenzt, sondern als betragsmäßig „kleine“ Größen definiert sind. Als Vorgriff auf die kommenden Abschnitte bedeutet dies, dass die Gleichungen dieser Arbeit nur bei hinreichender Fehlerrückführung Einsatz im Kalmanfilter eines INS finden dürfen, um ein unbegrenztes Anwachsen der Systemzustände im Kalmanfilter zu verhindern. Einsetzen von Gleichung (III.2.4) in Gleichung (III.2.3) ergibt allgemein eine nichtlineare Differentialgleichung in Zustandsfehlern mit additiver Aufdatierung der Störungsgrößen.

$$\delta\dot{\mathbf{z}} = f(\tilde{\mathbf{z}} + \delta\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{s}} + \delta\mathbf{s}) - f(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{s}}) \quad (\text{III.2.5})$$

An Stelle der absoluten Parameter treten nun die Störungen der Parameter als direkte Einflussgrößen in diesem nichtlinearen System.

## 2.1. Orientierungsdifferentialgleichungssystem

In der Orientierungsdifferentialgleichung beschränken wir uns ab hier auf die Parametrisierung in Eulerwinkeln. Im Gegensatz zu allen anderen Größen soll der Zusammenhang zwischen absoluter Größe und Störung bei den Orientierungsparametern nicht additiv, sondern multiplikativ definiert werden. Ausgangspunkt bildet dabei die allgemeine Orientierungsdifferentialgleichung aus (III.1.3).

$$\dot{R}_{ab} = R_{ab}\Omega_{ib}^b - \Omega_{ia}^a R_{ab} \quad (\text{III.2.6})$$

Normalerweise sind die in den Zusammenhangsmatrizen enthaltenen Winkelgeschwindigkeiten mit Fehlern behaftet.

$$\begin{aligned} \omega_{ib}^b &= \tilde{\omega}_{ib}^b + \delta\omega_{ib}^b \\ \omega_{ia}^a &= \tilde{\omega}_{ia}^a + \delta\omega_{ia}^a \end{aligned} \quad (\text{III.2.7})$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_{ib}^b &= \tilde{\Omega}_{ib}^b + \delta\Omega_{ib}^b \\ \Omega_{ia}^a &= \tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a \end{aligned} \quad (\text{III.2.8})$$

Aufspalten der Rotationsmatrix  $R_{ab}$  in eine Näherungsrotationsmatrix  $R_{\tilde{a}\tilde{b}}$  und eine Störungsrotationsmatrix  $R_{a\tilde{a}}$  mit multiplikativem Zusammenhang:

$$R_{ab} = R_{a\tilde{a}} R_{\tilde{a}\tilde{b}} \quad (\text{III.2.9})$$

Durch diese Definition wird die Gruppe der Rotationsmatrizen im Gegensatz zur oftmals in der Literatur verwendeten additiven Zerlegung nicht verlassen. Setzt man nur die Messwerte und Schätzwerte als bekannt voraus, so ergibt sich durch Einsetzen von Aussage (III.2.8) in Beziehung (III.2.6) folgende Definition der zeitlichen Veränderung der Näherungsrotationsmatrix:

$$\dot{R}_{\tilde{a}\tilde{b}} = R_{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{\Omega}_{ib}^b - \tilde{\Omega}_{ia}^a R_{\tilde{a}\tilde{b}} \quad (\text{III.2.10})$$

Einsetzen von (III.2.8) und (III.2.9) in (III.2.6) ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R_{a\tilde{a}} R_{\tilde{a}\tilde{b}}) &= (R_{a\tilde{a}} R_{\tilde{a}\tilde{b}}) (\tilde{\Omega}_{ib}^b + \delta\Omega_{ib}^b) - (\tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a) (R_{a\tilde{a}} R_{\tilde{a}\tilde{b}}) \\ \dot{R}_{a\tilde{a}} R_{\tilde{a}\tilde{b}} + R_{a\tilde{a}} \dot{R}_{\tilde{a}\tilde{b}} &= (R_{a\tilde{a}} R_{\tilde{a}\tilde{b}}) (\tilde{\Omega}_{ib}^b + \delta\Omega_{ib}^b) - (\tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a) (R_{a\tilde{a}} R_{\tilde{a}\tilde{b}}) \end{aligned} \quad (\text{III.2.11})$$

Einsetzen der Beziehung (III.2.10) für  $\dot{R}_{\bar{a}b}$ :

$$\begin{aligned}
\dot{R}_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b} + R_{\bar{a}\bar{a}}(R_{\bar{a}b}\tilde{\Omega}_{ib}^b - \tilde{\Omega}_{ia}^a R_{\bar{a}b}) &= R_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b}(\tilde{\Omega}_{ib}^b + \delta\Omega_{ib}^b) - (\tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a)R_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b} \\
\dot{R}_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b} &= R_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b}(\tilde{\Omega}_{ib}^b + \delta\Omega_{ib}^b) - (\tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a)R_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b} - R_{\bar{a}\bar{a}}(R_{\bar{a}b}\tilde{\Omega}_{ib}^b - \tilde{\Omega}_{ia}^a R_{\bar{a}b}) \\
\dot{R}_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b} &= R_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b}\delta\Omega_{ib}^b - (\tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a)R_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b} + R_{\bar{a}\bar{a}}\tilde{\Omega}_{ia}^a R_{\bar{a}b} \\
\dot{R}_{\bar{a}\bar{a}} &= R_{\bar{a}\bar{a}}R_{\bar{a}b}\delta\Omega_{ib}^b R_{\bar{a}b}^T - (\tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a)R_{\bar{a}\bar{a}} + R_{\bar{a}\bar{a}}\tilde{\Omega}_{ia}^a \\
\dot{R}_{\bar{a}\bar{a}} &= R_{\bar{a}\bar{a}}(R_{\bar{a}b}\delta\Omega_{ib}^b R_{\bar{a}b}^T + \tilde{\Omega}_{ia}^a) - (\tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a)R_{\bar{a}\bar{a}} \\
R_{\bar{a}\bar{a}}^T \dot{R}_{\bar{a}\bar{a}} &= R_{\bar{a}\bar{a}}^T R_{\bar{a}\bar{a}}(R_{\bar{a}b}\delta\Omega_{ib}^b R_{\bar{a}b}^T + \tilde{\Omega}_{ia}^a) - R_{\bar{a}\bar{a}}^T(\tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a)R_{\bar{a}\bar{a}} \\
\Omega_{\bar{a}\bar{a}}^{\tilde{a}} &= (R_{\bar{a}b}\delta\Omega_{ib}^b R_{\bar{a}b}^T + \tilde{\Omega}_{ia}^a) - R_{\bar{a}\bar{a}}^T(\tilde{\Omega}_{ia}^a + \delta\Omega_{ia}^a)R_{\bar{a}\bar{a}}
\end{aligned} \tag{III.2.12}$$

Übergang von den Zusammenhangsmatrizen auf Drehraten führt zu:

$$\begin{aligned}
\omega_{\bar{a}\bar{a}}^{\tilde{a}} &= (R_{\bar{a}b}\delta\omega_{ib}^b + \tilde{\omega}_{ia}^a) - R_{\bar{a}\bar{a}}^T \cdot (\tilde{\omega}_{ia}^a + \delta\omega_{ia}^a) \\
\omega_{\bar{a}\bar{a}}^{\tilde{a}} &= (\delta\omega_{ib}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia}^a) - R_{\bar{a}\bar{a}}^T \cdot (\tilde{\omega}_{ia}^a + \delta\omega_{ia}^a)
\end{aligned} \tag{III.2.13}$$

Die Definition der Orientierungsdifferentialgleichung für die Eulerwinkelstörung lautet unter Verwendung von Gleichung (III.1.8):

$$\dot{\psi}_{\bar{a}\bar{a}} = C_{\bar{a}\bar{a}}^{-1}(\psi_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\delta\omega_{ib}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia}^a) - C_{\bar{a}\bar{a}}^{-1}(\psi_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot R_{\bar{a}\bar{a}}^T(\psi_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\tilde{\omega}_{ia}^a + \delta\omega_{ia}^a) \tag{III.2.14}$$

Ausformuliert ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{\bar{a}\bar{a}} &= (\delta\omega_{ib_1}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia_1}^a) + \sin(\varphi_{\bar{a}\bar{a}}) \tan(\vartheta_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\delta\omega_{ib_2}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia_2}^a) + \cos(\varphi_{\bar{a}\bar{a}}) \tan(\vartheta_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\delta\omega_{ib_3}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia_3}^a) \\
&\quad - \frac{\cos(\psi_{\bar{a}\bar{a}})}{\cos(\vartheta_{\bar{a}\bar{a}})} \cdot (\tilde{\omega}_{ia_1}^a + \delta\omega_{ia_1}^a) - \frac{\sin(\psi_{\bar{a}\bar{a}})}{\cos(\vartheta_{\bar{a}\bar{a}})} \cdot (\tilde{\omega}_{ia_2}^a + \delta\omega_{ia_2}^a) \\
\dot{\vartheta}_{\bar{a}\bar{a}} &= \cos(\varphi_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\delta\omega_{ib_2}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia_2}^a) - \sin(\varphi_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\delta\omega_{ib_3}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia_3}^a) \\
&\quad + \sin(\psi_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\tilde{\omega}_{ia_1}^a + \delta\omega_{ia_1}^a) - \cos(\psi_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\tilde{\omega}_{ia_2}^a + \delta\omega_{ia_2}^a) \\
\dot{\vartheta}_{\bar{a}\bar{a}} &= \frac{\sin(\varphi_{\bar{a}\bar{a}})}{\cos(\vartheta_{\bar{a}\bar{a}})} \cdot (\delta\omega_{ib_2}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia_2}^a) + \frac{\cos(\varphi_{\bar{a}\bar{a}})}{\cos(\vartheta_{\bar{a}\bar{a}})} \cdot (\delta\omega_{ib_3}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia_3}^a) \\
&\quad - \cos(\psi_{\bar{a}\bar{a}}) \tan(\vartheta_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\tilde{\omega}_{ia_1}^a + \delta\omega_{ia_1}^a) - \sin(\psi_{\bar{a}\bar{a}}) \tan(\vartheta_{\bar{a}\bar{a}}) \cdot (\tilde{\omega}_{ia_2}^a + \delta\omega_{ia_2}^a) - (\tilde{\omega}_{ia_3}^a + \delta\omega_{ia_3}^a)
\end{aligned} \tag{III.2.15}$$

Die Singularität dieser Parametrisierung bei  $\vartheta_{\bar{a}\bar{a}} = \pm\pi/2$  ist weiterhin vorhanden. Diese bezieht sich nun jedoch nicht mehr auf den absoluten Nickwinkel  $\vartheta_{\bar{a}b}$  wie in Kapitel 1.1.1, sondern nur noch auf die Nickwinkelstörung  $\vartheta_{\bar{a}\bar{a}}$ . Bei Verwendung dieser Orientierungsdifferentialgleichungen muss somit sichergestellt sein, dass die Eulerwinkelstörung  $\vartheta_{\bar{a}\bar{a}}$  stets kleiner  $\pi/2$  bleibt. Dies kann durch eine Fehlerrückführung im INS verhindert werden.

## 2.2. Geschwindigkeitsdifferentialgleichungssystem

Ausgehend von Gleichung (III.1.46) lautet die Geschwindigkeitsdifferentialgleichung des Ansatzes 1 in absoluten Parametern:

$$\dot{v}_e = R_{eb}f_b - 2\omega_{ie}^e \times v_e - \dot{\omega}_{ie}^e \times x_e + g_e(x_e) \tag{III.2.16}$$

Zerlegen aller Größen in eine Summe aus wahren Wert und Störung nach Gleichung (III.2.1). Aufspalten des Erdschwerevektors  $g_e$  in ein Erdschweremodell  $\tilde{g}_e$  und eine zugehörige Erdschweremodellstörung  $\delta g_e$ . Der Parameter der Erdrotation wird dabei als hinreichend genau bekannt und somit fehlerfrei vorausgesetzt. Zerlegen der Rotationsmatrix nach Gleichung (III.2.9):

$$\begin{aligned}
\dot{v}_e + \delta\dot{v}_e &= R_{e\bar{e}}R_{\bar{e}b} \cdot (\tilde{f}_b + \delta f_b) - 2\omega_{ie}^e \times (\tilde{v}_e + \delta v_e) - \dot{\omega}_{ie}^e \times (\tilde{x}_e + \delta x_e) \\
&\quad + \tilde{g}_e(\tilde{x}_e + \delta x_e) + \delta g_e(\tilde{x}_e + \delta x_e)
\end{aligned} \tag{III.2.17}$$

Eine Näherungslösung für obige Gleichung ergibt sich nach Gleichung (III.2.4):

$$\dot{v}_e = R_{e\bar{e}}\tilde{f}_b - 2\omega_{ie}^e \times \tilde{v}_e - \dot{\omega}_{ie}^e \times \tilde{x}_e + \tilde{g}_e(\tilde{x}_e) \tag{III.2.18}$$

Einsetzen von (III.2.18) in (III.2.17) führt zu:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}_e = & R_{e\bar{e}} R_{\bar{e}b} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) - R_{\bar{e}b} \tilde{\mathbf{f}}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\tilde{\mathbf{v}}_e + \delta \mathbf{v}_e) + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \tilde{\mathbf{v}}_e - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times (\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta \mathbf{x}_e) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \tilde{\mathbf{x}}_e \\ & + \tilde{\mathbf{g}}_e (\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta \mathbf{x}_e) - \tilde{\mathbf{g}}_e (\tilde{\mathbf{x}}_e) + \delta \mathbf{g}_e (\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta \mathbf{x}_e) \end{aligned} \quad (\text{III.2.19})$$

Da die Erdschwerermodellstörung nicht analytisch bestimmbar ist, wird sie im weiteren Verlauf als unabhängige Größe behandelt. Somit lautet die nichtlineare Differentialgleichung der Geschwindigkeitsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten:

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_e = (R_{e\bar{e}} - I) \cdot R_{\bar{e}b} \tilde{\mathbf{f}}_b + R_{e\bar{e}} R_{\bar{e}b} \delta \mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_e - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \delta \mathbf{x}_e + \tilde{\mathbf{g}}_e (\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta \mathbf{x}_e) - \tilde{\mathbf{g}}_e (\tilde{\mathbf{x}}_e) + \delta \mathbf{g}_e \quad (\text{III.2.20})$$

Für die Geschwindigkeitsdifferentialgleichung des Ansatzes 2 kommt man nach Gleichung (III.1.49) zu:

$$\dot{\mathbf{v}}_h = R_{hb} \mathbf{f}_b - (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h) + 2R_{he} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times \mathbf{v}_h - R_{he} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e (\boldsymbol{\lambda})) + R_{he} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{g}_e (\mathbf{x}_e (\boldsymbol{\lambda})) \quad (\text{III.2.21})$$

Zerlegen und Aufspalten aller Größen analog Gleichung (III.2.17) führt zu:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_h + \delta \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_h = & R_{h\tilde{h}} R_{\tilde{h}b} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) - (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) + 2R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times (\tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) \\ & - R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda})) + \tilde{\mathbf{g}}_h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) + \delta \mathbf{g}_h \end{aligned} \quad (\text{III.2.22})$$

Die Näherungslösung lautet:

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_h = R_{h\tilde{h}} \tilde{\mathbf{f}}_b - (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + 2R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times \tilde{\mathbf{v}}_h - R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e (\tilde{\boldsymbol{\lambda}})) + \tilde{\mathbf{g}}_h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \quad (\text{III.2.23})$$

Kombination der Gleichungen (III.2.22) und (III.2.23) ergibt die nichtlineare Differentialgleichung der Geschwindigkeitsstörung in horisontfesten Koordinaten.

$$\begin{aligned} \delta \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_h = & (R_{h\tilde{h}} - I) \cdot R_{\tilde{h}b} \tilde{\mathbf{f}}_b + R_{h\tilde{h}} R_{\tilde{h}b} \delta \mathbf{f}_b - (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) + 2R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times (\tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) \\ & + (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + 2R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times \tilde{\mathbf{v}}_h - R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda})) + R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e (\tilde{\boldsymbol{\lambda}})) \\ & + \tilde{\mathbf{g}}_h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\mathbf{g}}_h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) + \delta \mathbf{g}_h \end{aligned} \quad (\text{III.2.24})$$

Für den Ansatz 3 kann die Geschwindigkeitsdifferentialgleichung in absoluten Parametern aus (III.1.52) entnommen werden.

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\lambda}} = & -D^{-1} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot \dot{D} (\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} + D^{-1} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{hb} \mathbf{f}_b - D^{-1} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot \left( (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h (\boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}) + 2R_{he} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times D (\boldsymbol{\lambda}) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right) \\ & - D^{-1} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{he} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e (\boldsymbol{\lambda})) + D^{-1} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{he} (\boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{g}_e (\mathbf{x}_e (\boldsymbol{\lambda})) \end{aligned} \quad (\text{III.2.25})$$

Zerlegen führt zu:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \delta \ddot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = & -D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \dot{D} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \delta \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) \cdot (\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \delta \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) + D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{h\tilde{h}} R_{\tilde{h}b} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) \\ & - D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \left( (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \delta \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) + 2R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times D (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \delta \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) \right) \\ & - D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda})) \\ & + D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \tilde{\mathbf{g}}_h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) + D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \mathbf{g}_h \end{aligned} \quad (\text{III.2.26})$$

Die Näherungslösung lautet:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = & -D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \dot{D} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot R_{h\tilde{h}} \tilde{\mathbf{f}}_b - D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \left( (\boldsymbol{\omega}_{eh}^h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) + 2R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e) \times D (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot (\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) \right) \\ & - D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot R_{he} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e (\tilde{\boldsymbol{\lambda}})) + D^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \tilde{\mathbf{g}}_h (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \end{aligned} \quad (\text{III.2.27})$$

Durch Einsetzen von (III.2.27) in (III.2.26) und Auflösen erhält man die nichtlineare Differentialgleichung der Geschwindigkeitsstörung in erdfesten ellipsoidischen Parametern.

$$\begin{aligned}
\delta\ddot{\lambda} = & -D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \dot{D}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda, \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) \cdot (\dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{D}(\tilde{\lambda}, \dot{\tilde{\lambda}}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \\
& + D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot R_{hh} R_{hb}^{-1} \cdot (\tilde{f}_b + \delta f_b) - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{hb} \tilde{f}_b \\
& - D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \left( \left( \omega_{eh}^h(\tilde{\lambda} + \delta\lambda, \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) + 2R_{he}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \right) \times D(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) \right) \\
& + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \left( \left( \omega_{eh}^h(\tilde{\lambda}, \dot{\tilde{\lambda}}) + 2R_{he}(\tilde{\lambda}) \cdot \omega_{ie}^e \right) \times D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \right) \\
& - D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot R_{he}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\dot{\omega}_{ie}^e \times x_e(\tilde{\lambda} + \delta\lambda)) + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{he}(\tilde{\lambda}) \cdot (\dot{\omega}_{ie}^e \times x_e(\tilde{\lambda})) \\
& + D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \tilde{g}_h(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{g}_h(\tilde{\lambda}) + D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \delta g_h
\end{aligned} \tag{III.2.28}$$

### 2.3. Positionsdifferentialgleichungssystem

Die Differentialgleichung der Position des Ansatzes 1 lautet nach (III.1.46):

$$\dot{x}_e = v_e \tag{III.2.29}$$

Zerlegen führt zu:

$$\dot{\tilde{x}}_e + \delta\dot{x}_e = \tilde{v}_e + \delta v_e \tag{III.2.30}$$

Die Näherungslösung lautet:

$$\dot{\tilde{x}}_e = \tilde{v}_e \tag{III.2.31}$$

Die Differentialgleichung der Positionsstörung im erdfesten kartesischen System heißt demnach:

$$\delta\dot{x}_e = \delta v_e \tag{III.2.32}$$

Für den Ansatz 2 ist die Ausgangsgleichung in absoluten Parametern gemäß (III.1.49):

$$\dot{\lambda} = D^{-1}(\lambda) \cdot v_h \tag{III.2.33}$$

Zerlegen führt zu:

$$\dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda} = D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\tilde{v}_h + \delta v_h) \tag{III.2.34}$$

Für die Näherungslösung kommt man zu:

$$\dot{\tilde{\lambda}} = D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{v}_h \tag{III.2.35}$$

Nach Kombination der Gleichungen (III.2.34) und (III.2.35) lautet die Differentialgleichung der Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten:

$$\delta\dot{\lambda} = D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\tilde{v}_h + \delta v_h) - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{v}_h \tag{III.2.36}$$

Die Positionsdifferentialgleichung des Ansatzes 3 lautet nach Gleichung (III.1.52):

$$\frac{d}{dt} \lambda = \dot{\lambda} \tag{III.2.37}$$

Zerlegen ergibt:

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\lambda} + \delta\lambda) = \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda} \tag{III.2.38}$$

Die Näherungslösung heißt demnach:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\lambda} = \dot{\tilde{\lambda}} \tag{III.2.39}$$

Die Differentialgleichung der Positionsstörung in ellipsoidischen Parametern des Ansatzes 3 lautet somit:

$$\frac{d}{dt} \delta\lambda = \delta\dot{\lambda} \tag{III.2.40}$$

## 2.4. Navigationsdifferentialgleichungssystem

Die Kombination der Differentialgleichungen für Position, Geschwindigkeit und Orientierung ergibt die nichtlineare Bewegungsgleichung in Zustandsstörungen. Auf Grund der starken Nichtlinearitäten in den Ansätzen 2 und 3 erscheinen diese etwas unübersichtlich. Im Endeffekt handelt es sich jedoch nur um Differenzgleichungen des Näherungswertes vom wahren Wert. Aus Gründen der Vollständigkeit und zur Überprüfung möglicher späterer Linearisierungsfehler sollen die Ansätze 2 und 3 trotz ihrer Länge präsentiert werden. Die komplett ausformulierten Bewegungsgleichungen sind wiederum in den Templates am Ende dieses Abschnitts zusammengefasst.

### 2.4.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten

Der Zustandsvektor der dem Ansatz 1 zu Grunde liegenden Parametrisierung lautet:

$$z = \left( \delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3} \quad \delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3} \quad \varphi_{e\bar{e}} \quad \vartheta_{e\bar{e}} \quad \psi_{e\bar{e}} \right)^T \quad (\text{III.2.41})$$

Der Eingangsvektor der dem Ansatz 1 zu Grunde liegenden Parametrisierung ist:

$$s = \left( \delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{e_1} \quad \delta g_{e_2} \quad \delta g_{e_3} \right)^T \quad (\text{III.2.42})$$

Die Positionsdifferentialgleichung ergibt sich gemäß Beziehung (III.2.32). Die Geschwindigkeitsdifferentialgleichung ist in (III.2.20) hergeleitet. Als Orientierungsdifferentialgleichung wird die linksmultiplikative Eulerwinkelparametrisierung aus (III.2.14) umformuliert auf das erdfeste kartesische Bezugssystem angewendet. Die Beziehung vereinfacht sich dabei etwas, da die Erddrehrate als fehlerfrei und bekannt vorausgesetzt wird. Zusammengefasst erhält man die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern in kartesischen Koordinaten in Vektorschreibweise.

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}}_e &= \delta \mathbf{v}_e \\ \delta \dot{\mathbf{v}}_e &= \left( R_{e\bar{e}}(\psi_{e\bar{e}}) - I_{3 \times 3} \right) \cdot R_{\bar{e}b}(\psi_{\bar{e}b}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_b + R_{e\bar{e}}(\psi_{e\bar{e}}) \cdot R_{\bar{e}b}(\psi_{\bar{e}b}) \cdot \delta \mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_e - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \delta \mathbf{x}_e \\ &\quad + \tilde{\mathbf{g}}_e(\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta \mathbf{x}_e) - \tilde{\mathbf{g}}_e(\tilde{\mathbf{x}}_e) + \delta \mathbf{g}_e \\ \dot{\psi}_{e\bar{e}} &= C_{e\bar{e}}^{-1}(\psi_{e\bar{e}}) \cdot \left( R_{\bar{e}b}(\psi_{\bar{e}b}) \cdot \delta \omega_{ib}^b + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right) - C_{e\bar{e}}^{-1}(\psi_{e\bar{e}}) \cdot R_{e\bar{e}}^T(\psi_{e\bar{e}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \end{aligned} \quad (\text{III.2.43})$$

### 2.4.2 in gemischten Koordinaten

Der Zustandsvektor der dem Ansatz 2 zu Grunde liegenden Parametrisierung lautet:

$$z = \left( \delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h \quad \delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3} \quad \varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}} \right)^T \quad (\text{III.2.44})$$

Für den Eingangsvektor der dem Ansatz 2 zu Grunde liegenden Parametrisierung kommt man zu:

$$s = \left( \delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3} \right)^T \quad (\text{III.2.45})$$

Die Positionsdifferentialgleichung erhält man aus Gleichung (III.2.36). Die Geschwindigkeitsdifferentialgleichung ist nach (III.2.24) bestimmt. Für die Orientierungsdifferentialgleichung wird die linksmultiplikative Eulerwinkelaufrüstung aus (III.2.14) verwendet. Zusammengefasst erhält man die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern in kombinierten erdfesten ellipsoidischen und horizontfesten kartesischen Koordinaten in Vektorschreibweise.

$$\begin{aligned} \delta \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) - D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h \\ \delta \dot{\mathbf{v}}_h &= \left( R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) - I_{3 \times 3} \right) \cdot R_{\tilde{h}b}(\psi_{\tilde{h}b}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_b + R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot R_{\tilde{h}b}(\psi_{\tilde{h}b}) \cdot \delta \mathbf{f}_b \\ &\quad - \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) + 2R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right) \times (\tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) + \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + 2R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right) \times \tilde{\mathbf{v}}_h \\ &\quad - R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \right) + R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \right) + \tilde{\mathbf{g}}_h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\mathbf{g}}_h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) + \delta \mathbf{g}_h \\ \dot{\psi}_{h\tilde{h}} &= C_{h\tilde{h}}^{-1}(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot \left( R_{\tilde{h}b}(\psi_{\tilde{h}b}) \cdot \delta \omega_{ib}^b + \boldsymbol{\omega}_{ih}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{v}}_h) \right) - C_{h\tilde{h}}^{-1}(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot R_{h\tilde{h}}^T(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ih}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) \end{aligned} \quad (\text{III.2.46})$$

### 2.4.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

Der Zustandsvektor der dem Ansatz 3 zu Grunde liegenden Parametrisierung lautet:

$$\mathbf{z} = \left( \delta\lambda \quad \delta\phi \quad \delta h \quad \delta\dot{\lambda} \quad \delta\dot{\phi} \quad \delta\dot{h} \quad \varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}} \right)^T \quad (\text{III.2.47})$$

Der Eingangsvektor der dem Ansatz 3 zu Grunde liegenden Parametrisierung ist:

$$\mathbf{s} = \left( \delta\omega_{ib_1}^b \quad \delta\omega_{ib_2}^b \quad \delta\omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3} \right)^T \quad (\text{III.2.48})$$

Die Differentialgleichung der Positionsstörungen findet man in Gleichung (III.2.40). Die Geschwindigkeitsdifferentialgleichung wurde in Gleichung (III.2.28) bestimmt. Für die Orientierungsdifferentialgleichung wird die linksmultiplikative Eulerwinkelaufdatierung aus (III.2.14) verwendet. Zusammengefasst erhält man die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten in Vektorschreibweise.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta\lambda &= \delta\dot{\lambda} \\ \frac{d}{dt} \delta\dot{\lambda} &= -D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \dot{D}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda, \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) \cdot (\tilde{\lambda} + \delta\lambda) + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{D}(\tilde{\lambda}, \dot{\tilde{\lambda}}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \\ &\quad + D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot R_{\tilde{h}b}(\psi_{\tilde{h}b}) \cdot (\tilde{f}_b + \delta f_b) - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{\tilde{h}b}(\psi_{\tilde{h}b}) \cdot \tilde{f}_b \\ &\quad - D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \left( \omega_{eh}^h(\tilde{\lambda} + \delta\lambda, \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) + 2R_{he}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \right) \times D(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \\ &\quad + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \left( \omega_{eh}^h(\tilde{\lambda}, \dot{\tilde{\lambda}}) + 2R_{he}(\tilde{\lambda}) \cdot \omega_{ie}^e \right) \times D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \\ &\quad - D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot R_{he}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda} + \delta\lambda)) + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{he}(\tilde{\lambda}) \cdot (\dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda})) \\ &\quad + D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \tilde{g}_h(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{g}_h(\tilde{\lambda}) + D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \delta\mathbf{g}_h \\ \dot{\psi}_{h\tilde{h}} &= C_{h\tilde{h}}^{-1}(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot \left( R_{\tilde{h}b}(\psi_{\tilde{h}b}) \cdot \delta\omega_{ib}^b + \tilde{\omega}_{ih}^h(\tilde{\lambda}, \dot{\tilde{\lambda}}) \right) - C_{h\tilde{h}}^{-1}(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot R_{h\tilde{h}}^T(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot \omega_{ih}^h(\tilde{\lambda} + \delta\lambda, \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{III.2.49})$$

## 3. Linearisierte Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen

Im vorigen Kapitel wurden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern bestimmt. In vielen Anwendungen, wie beispielsweise dem konventionellen Kalmanfilter, sind jedoch nur linearisierte Systemgleichungen implementierbar. Deshalb ist das Ziel dieses Kapitels die Linearisierung der vorab bestimmten noch nichtlinearen Navigationsdifferentialgleichung in den drei Ansätzen.

1. Newtonsche Physik $\Rightarrow$
<i>Nichtlineare Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen</i>
2. Störungsrechnung $\Rightarrow$
<i>Nichtlineare Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen</i>
3. Linearisierung $\Rightarrow$
<b><i>Linearisierte Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen</i></b>

Übernahme der allgemeinen nichtlinearen Bewegungsgleichung in Zustandsstörungen aus Gleichung (III.2.5):

$$\delta\dot{\mathbf{z}} = f(\tilde{\mathbf{z}} + \delta\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{s}} + \delta\mathbf{s}) - f(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{s}}) \quad (\text{III.3.1})$$

Linearisierung ergibt die linearisierte Bewegungsgleichung in Zustandsstörungen.

$$\delta\dot{\mathbf{z}} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{s}})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\tilde{\mathbf{z}}} \cdot \delta\mathbf{z} + \left. \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} \right|_{\tilde{\mathbf{s}}} \cdot \delta\mathbf{s} + O^2 \quad (\text{III.3.2})$$

### 3.1. Orientierungsdifferentialgleichungssystem

Die Orientierungsdifferentialgleichung in Eulerwinkeln lautet nach Gleichung (III.2.14):

$$\dot{\psi}_{a\tilde{a}} = C_{a\tilde{a}}^{-1} \cdot (\delta\omega_{ib}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia}^a) - C_{a\tilde{a}}^{-1} R_{a\tilde{a}}^T \cdot (\tilde{\omega}_{ia}^a + \delta\omega_{ia}^a) \quad (\text{III.3.3})$$

Die Rotationsmatrix der Eulerwinkelstörungen lässt sich nach (III.1.4) schreiben als:

$$R_{a\tilde{a}} = \begin{pmatrix} \cos(\psi_{a\tilde{a}}) \cos(\vartheta_{a\tilde{a}}) & \cos(\psi_{a\tilde{a}}) \sin(\vartheta_{a\tilde{a}}) \sin(\varphi_{a\tilde{a}}) & \cos(\psi_{a\tilde{a}}) \sin(\vartheta_{a\tilde{a}}) \cos(\varphi_{a\tilde{a}}) \\ -\sin(\psi_{a\tilde{a}}) \cos(\vartheta_{a\tilde{a}}) & -\sin(\psi_{a\tilde{a}}) \sin(\vartheta_{a\tilde{a}}) \sin(\varphi_{a\tilde{a}}) & -\sin(\psi_{a\tilde{a}}) \sin(\vartheta_{a\tilde{a}}) \cos(\varphi_{a\tilde{a}}) \\ \sin(\psi_{a\tilde{a}}) \cos(\vartheta_{a\tilde{a}}) & \sin(\psi_{a\tilde{a}}) \sin(\vartheta_{a\tilde{a}}) \sin(\varphi_{a\tilde{a}}) & \sin(\psi_{a\tilde{a}}) \sin(\vartheta_{a\tilde{a}}) \cos(\varphi_{a\tilde{a}}) \\ -\sin(\vartheta_{a\tilde{a}}) & \cos(\vartheta_{a\tilde{a}}) \sin(\varphi_{a\tilde{a}}) & \cos(\vartheta_{a\tilde{a}}) \cos(\varphi_{a\tilde{a}}) \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.4})$$

Unter der Annahme kleiner Drehwinkelstörungen lässt sich obige Rotationsmatrix elementweise in Reihe entwickeln.<sup>22</sup>

$$R_{a\tilde{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\psi_{a\tilde{a}} & \vartheta_{a\tilde{a}} \\ \psi_{a\tilde{a}} & 0 & -\varphi_{a\tilde{a}} \\ -\vartheta_{a\tilde{a}} & \varphi_{a\tilde{a}} & 0 \end{pmatrix} + O^2 \quad (\text{III.3.5})$$

Als Linearisierung der Rotationsmatrix erhält man somit:

$$R_{a\tilde{a}} = \begin{pmatrix} I + \Psi_{a\tilde{a}} \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.6})$$

Die Umkehrung lautet nach analoger Vorgehensweise:

$$R_{a\tilde{a}}^T = \begin{pmatrix} I - \Psi_{a\tilde{a}} \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.7})$$

Die Koeffizientenmatrix aus Gleichung (III.1.11) heißt in linearisierter Form unter der Annahme kleiner Winkel demnach:

$$C_{a\tilde{a}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vartheta_{a\tilde{a}} \\ 0 & 1 & -\varphi_{a\tilde{a}} \\ 0 & \varphi_{a\tilde{a}} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.3.8})$$

Da diese Koeffizientenmatrix nur in bilinearen Anteilen auftritt, welche in einem linearisierten Modell nicht erlaubt sind, kann sie im weiteren Verlauf durch die Einheitsmatrix ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{a\tilde{a}} &= C_{a\tilde{a}}^{-1} \cdot (\delta\omega_{ib}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia}^a) - C_{a\tilde{a}}^{-1} R_{a\tilde{a}}^T \cdot (\tilde{\omega}_{ia}^a + \delta\omega_{ia}^a) \\ \dot{\psi}_{a\tilde{a}} &= C_{a\tilde{a}}^{-1} \cdot (\delta\omega_{ib}^{\tilde{a}} + \tilde{\omega}_{ia}^a) - C_{a\tilde{a}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I - \Psi_{a\tilde{a}} \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} \cdot (\tilde{\omega}_{ia}^a + \delta\omega_{ia}^a) \\ \dot{\psi}_{a\tilde{a}} &= C_{a\tilde{a}}^{-1} \delta\omega_{ib}^{\tilde{a}} + C_{a\tilde{a}}^{-1} \tilde{\omega}_{ia}^a - C_{a\tilde{a}}^{-1} \tilde{\omega}_{ia}^a - C_{a\tilde{a}}^{-1} \delta\omega_{ia}^a + C_{a\tilde{a}}^{-1} \Psi_{a\tilde{a}} \cdot (\tilde{\omega}_{ia}^a + \delta\omega_{ia}^a) \\ \dot{\psi}_{a\tilde{a}} &= \Psi_{a\tilde{a}} \cdot (\tilde{\omega}_{ia}^a + \delta\omega_{ia}^a) + \delta\omega_{ib}^{\tilde{a}} - \delta\omega_{ia}^a \end{aligned} \quad (\text{III.3.9})$$

Die linearisierte Orientierungsdifferentialgleichung lautet nach Vereinfachen unter der Annahme kleiner Winkel und Vernachlässigen aller bilinearen und höherwertigen Terme damit:

$$\dot{\psi}_{a\tilde{a}} = -\tilde{\omega}_{ia}^a \times \Psi_{a\tilde{a}} + \delta\omega_{ib}^{\tilde{a}} - \delta\omega_{ia}^a \quad (\text{III.3.10})$$

### 3.2. Geschwindigkeitsdifferentialgleichungssystem

Die nichtlineare Geschwindigkeitsdifferentialgleichung in Zustandsstörungen lautet für den Ansatz 1 nach Gleichung (III.2.43):

$$\delta\dot{\mathbf{v}}_e = \begin{pmatrix} R_{e\tilde{e}} - I \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} \cdot R_{\tilde{e}b} \tilde{\mathbf{f}}_b + R_{e\tilde{e}} R_{\tilde{e}b} \delta\mathbf{f}_b - 2\tilde{\omega}_{ie}^e \times \delta\mathbf{v}_e - \dot{\omega}_{ie}^e \times \delta\mathbf{x}_e + \tilde{\mathbf{g}}_e (\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta\mathbf{x}_e) - \tilde{\mathbf{g}}_e (\tilde{\mathbf{x}}_e) + \delta\mathbf{g}_e \quad (\text{III.3.11})$$

Einsetzen der linearisierten Rotationsmatrix der Eulerwinkelstörungen aus Beziehung (III.3.6):

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{v}}_e &= \begin{pmatrix} I + \Psi_{e\tilde{e}} \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I + \Psi_{e\tilde{e}} \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} \cdot R_{\tilde{e}b} \tilde{\mathbf{f}}_b + \begin{pmatrix} I + \Psi_{e\tilde{e}} \\ 3 \times 3 \end{pmatrix} \cdot R_{\tilde{e}b} \delta\mathbf{f}_b - 2\tilde{\omega}_{ie}^e \times \delta\mathbf{v}_e - \dot{\omega}_{ie}^e \times \delta\mathbf{x}_e \\ &\quad + \tilde{\mathbf{g}}_e (\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta\mathbf{x}_e) - \tilde{\mathbf{g}}_e (\tilde{\mathbf{x}}_e) + \delta\mathbf{g}_e \end{aligned} \quad (\text{III.3.12})$$

<sup>22</sup> Dambeck, Johann H.; Error Propagation, GPS / INS- Integration and Multisensor Navigation, Carl Cranz Gesellschaft, München 2005, S.24

Auflösen ergibt:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}_e = & -R_{\tilde{e}b} \tilde{\mathbf{f}}_b \times \boldsymbol{\psi}_{e\tilde{e}} + R_{\tilde{e}b} \delta \mathbf{f}_b - R_{\tilde{e}b} \delta \mathbf{f}_b \times \boldsymbol{\psi}_{e\tilde{e}} - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_e - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \delta \mathbf{x}_e \\ & + \tilde{\mathbf{g}}_e(\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta \mathbf{x}_e) - \tilde{\mathbf{g}}_e(\tilde{\mathbf{x}}_e) + \delta \mathbf{g}_e \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

Vernachlässigen aller bilinearen und höherwertigen Terme führt zur linearisierten Differentialgleichung der Geschwindigkeitsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten.

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_e = -R_{\tilde{e}b} \tilde{\mathbf{f}}_b \times \boldsymbol{\psi}_{e\tilde{e}} + R_{\tilde{e}b} \delta \mathbf{f}_b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_e - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \delta \mathbf{x}_e + \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_e(\mathbf{x}_e)}{\partial \mathbf{x}_e^T} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_e} \cdot \delta \mathbf{x}_e + \delta \mathbf{g}_e \quad (\text{III.3.14})$$

Die nichtlineare Geschwindigkeitsdifferentialgleichung des Ansatzes 2 wurde in Gleichung (III.2.46) bestimmt.

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}_h = & \left( R_{h\tilde{h}} - I_{3 \times 3} \right) \cdot R_{\tilde{h}b} \tilde{\mathbf{f}}_b + R_{h\tilde{h}} R_{\tilde{h}b} \delta \mathbf{f}_b \\ & - \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) + 2R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right) \times (\tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) + \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + 2R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right) \times \tilde{\mathbf{v}}_h \\ & - R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \right) + R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \right) + \tilde{\mathbf{g}}_h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\mathbf{g}}_h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) + \delta \mathbf{g}_h \end{aligned} \quad (\text{III.3.15})$$

Auch hier ergibt sich nach Einführung der linearisierten Rotationsmatrix aus Beziehung (III.3.6):

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}_h = & \left( \left( I_{3 \times 3} + \Psi_{h\tilde{h}} \right) - I_{3 \times 3} \right) \cdot R_{\tilde{h}b} \tilde{\mathbf{f}}_b + \left( I_{3 \times 3} + \Psi_{h\tilde{h}} \right) \cdot R_{\tilde{h}b} \delta \mathbf{f}_b \\ & - \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) + 2R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right) \times (\tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \mathbf{v}_h) + \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + 2R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right) \times \tilde{\mathbf{v}}_h \\ & - R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \right) + R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \right) + \tilde{\mathbf{g}}_h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\mathbf{g}}_h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) + \delta \mathbf{g}_h \end{aligned} \quad (\text{III.3.16})$$

Linearisieren führt zur linearisierten Differentialgleichung der Geschwindigkeitsstörung im horizontfesten Bezugssystem.

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}}_h = & - \left( R_{\tilde{h}b} \tilde{\mathbf{f}}_b \right) \times \boldsymbol{\psi}_{h\tilde{h}} + R_{\tilde{h}b} \delta \mathbf{f}_b - \left. \frac{\partial \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{v}}_h) \times \tilde{\mathbf{v}}_h \right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} \right|_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} - \left. \frac{\partial \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{v}}_h) \times \tilde{\mathbf{v}}_h \right)}{\partial \tilde{\mathbf{v}}_h^T} \right|_{\tilde{\mathbf{v}}_h} \cdot \delta \mathbf{v}_h \\ & - \left. \frac{\partial \left( 2R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \tilde{\mathbf{v}}_h \right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} \right|_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} - 2R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{v}_h \\ & - \left. \frac{\partial \left( R_{he}(\boldsymbol{\lambda}) \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\boldsymbol{\lambda}) \right) \right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} \right|_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} + \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_h(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} \right|_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} + \delta \mathbf{g}_h \end{aligned} \quad (\text{III.3.17})$$

Die nichtlineare Geschwindigkeitsdifferentialgleichung für den Ansatz 3 kann aus Gleichung (III.2.49) entnommen werden.

$$\begin{aligned} \delta \ddot{\boldsymbol{\lambda}} = & -D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \dot{D}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \delta \dot{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot (\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \delta \dot{\boldsymbol{\lambda}}) + D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \dot{D}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \\ & + D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{h\tilde{h}} R_{\tilde{h}b} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) - D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot R_{h\tilde{h}} \tilde{\mathbf{f}}_b \\ & - D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \left( \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \delta \dot{\boldsymbol{\lambda}}) + 2R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right) \times D(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot (\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \delta \dot{\boldsymbol{\lambda}}) \right) \\ & + D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \left( \left( \boldsymbol{\omega}_{eh}^h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) + 2R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \right) \times D(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \right) \\ & - D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \right) + D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot R_{he}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{x}_e(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \right) \\ & + D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \tilde{\mathbf{g}}_h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) - D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \tilde{\mathbf{g}}_h(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) + D^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \delta \boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \mathbf{g}_h \end{aligned} \quad (\text{III.3.18})$$

Einfügen der linearisierten Rotationsmatrix aus Gleichung (III.3.6):

$$\begin{aligned}
\delta \ddot{\lambda} = & -D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \dot{D}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda, \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) \cdot (\tilde{\lambda} + \delta\lambda) + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{D}(\tilde{\lambda}, \dot{\tilde{\lambda}}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \\
& + D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \left( I + \Psi_{hh} \right)_{3 \times 3} \cdot R_{hb} \cdot (\tilde{f}_b + \delta f_b) - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{hb} \tilde{f}_b \\
& - D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \left( \left( \omega_{eh}^h(\tilde{\lambda} + \delta\lambda, \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) + 2R_{he}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \right) \times D(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda}) \right) \\
& + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \left( \left( \omega_{eh}^h(\tilde{\lambda}, \dot{\tilde{\lambda}}) + 2R_{he}(\tilde{\lambda}) \cdot \omega_{ie}^e \right) \times D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \right) \\
& - D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot R_{he}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\dot{\omega}_{ie}^e \times x_e(\tilde{\lambda} + \delta\lambda)) + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{he}(\tilde{\lambda}) \cdot (\dot{\omega}_{ie}^e \times x_e(\tilde{\lambda})) \\
& + D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \tilde{g}_h(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{g}_h(\tilde{\lambda}) + D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot \delta g_h
\end{aligned} \tag{III.3.19}$$

Eine Taylorreihenentwicklung ergibt die linearisierte Differentialgleichung der Geschwindigkeitsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten.

$$\begin{aligned}
\delta \ddot{\lambda} = & - \left. \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot \dot{D}(\lambda, \dot{\lambda}) \right)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda - \left. \frac{\partial \left( D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{D}(\tilde{\lambda}, \dot{\tilde{\lambda}}) \right)}{\partial \dot{\lambda}^T} \right|_{\dot{\tilde{\lambda}}} \cdot \delta\dot{\lambda} + \left. \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot R_{hb} \cdot \tilde{f}_b \right)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda \\
& - \left( D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{hb} \tilde{f}_b \right) \times \Psi_{hh} + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{hb} \delta f_b \\
& - \left. \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot \omega_{eh}^h(\lambda, \dot{\lambda}) \times D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \right)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda - \left. \frac{\partial \left( D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \omega_{eh}^h(\tilde{\lambda}, \dot{\tilde{\lambda}}) \times D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \right)}{\partial \dot{\lambda}^T} \right|_{\dot{\tilde{\lambda}}} \cdot \delta\dot{\lambda} \\
& - \left. \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot 2R_{he}(\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \times D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \right)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot 2R_{he}(\tilde{\lambda}) \cdot \omega_{ie}^e \times D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \\
& - \left. \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot R_{he}(\lambda) \cdot \dot{\omega}_{ie}^e \times x_e(\lambda) \right)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda + \left. \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot \tilde{g}_h(\lambda) \right)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \delta g_h
\end{aligned} \tag{III.3.20}$$

### 3.3. Positionsdifferentialgleichungssystem

Die Positionsdifferentialgleichung in erdfesten kartesischen Koordinaten aus Gleichung (III.2.43) ist schon linear und kann direkt übernommen werden.

$$\boxed{\delta \dot{x}_e = \delta v_e} \tag{III.3.21}$$

Für Ansatz 2 steht die entsprechende nichtlineare Positionsdifferentialgleichung in Gleichung (III.2.46).

$$\delta \dot{\lambda} = D^{-1}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\tilde{v}_h + \delta v_h) - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{v}_h \tag{III.3.22}$$

Linearisieren führt dabei zur linearisierten Differentialgleichung der Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten des Ansatzes 2.

$$\boxed{\delta \dot{\lambda} = \left. \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot \tilde{v}_h \right)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \delta v_h} \tag{III.3.23}$$

Die Positionsdifferentialgleichung des Ansatzes 3 ist analog zum Ansatz 1 schon linear und wird direkt aus Beziehung (III.2.49) übernommen.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \delta \lambda = \delta \dot{\lambda}} \tag{III.3.24}$$

### 3.4. Navigationsdifferentialgleichungssystem

Die linearisierten Navigationsdifferentialgleichungen ergeben sich wiederum durch Kombination der einzelnen vorab hergeleiteten Differentialgleichungen für Position, Geschwindigkeit und Orientierung. Die jeweilige Orientierungsdifferentialgleichung muss noch um eine partielle Ableitung erweitert werden, da sich in ihr Abhängigkeiten der Positions- und Geschwindigkeitszustände verbergen. Alle Gleichungen sind zu Übersichtszwecken bewusst in Vektorschreibweise gehalten. Die komplett ausformulierten Gleichungen unter Berücksichtigung der partiellen Ableitungen sind im Template am Ende dieses Abschnitts zusammengestellt.

#### 3.4.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten

Der Zustandsvektor der dem Ansatz 1 zu Grunde liegenden Parametrisierung lautet:

$$z = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3} \quad \delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3} \quad \varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}})^T \quad (\text{III.3.25})$$

Der Eingangsvektor der dem Ansatz 1 zu Grunde liegenden Parametrisierung ist:

$$s = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{e_1} \quad \delta g_{e_2} \quad \delta g_{e_3})^T \quad (\text{III.3.26})$$

Die Positionsdifferentialgleichung ist in Gleichung (III.3.21) gegeben. In Beziehung (III.3.14) wurde die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit bestimmt. Die Orientierungsdifferentialgleichung ist eine Erweiterung von Gleichung (III.3.10). Fehlerfrei bekannt sei wiederum die Erddrehrate. Zusammengefasst erhält man die linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen in erdfesten kartesischen Koordinaten in Vektorschreibweise.

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_e &= \delta v_e \\ \delta \dot{v}_e &= -R_{\tilde{e}b}(\psi_{\tilde{e}b}) \cdot \tilde{f}_b \times \psi_{e\tilde{e}} + R_{\tilde{e}b}(\psi_{\tilde{e}b}) \cdot \delta f_b - 2\omega_{ie}^e \times \delta v_e - \dot{\omega}_{ie}^e \times \delta x_e + \left. \frac{\partial \tilde{g}_e(x_e)}{\partial x_e^T} \right|_{\tilde{x}_e} \cdot \delta x_e + \delta g_e \\ \dot{\psi}_{e\tilde{e}} &= -\omega_{ie}^e \times \psi_{e\tilde{e}} + R_{\tilde{e}b}(\psi_{\tilde{e}b}) \cdot \delta \omega_{ib}^b \end{aligned} \quad (\text{III.3.27})$$

#### 3.4.2 in gemischten Koordinaten

Der Zustandsvektor der dem Ansatz 2 zu Grunde liegenden Parametrisierung lautet:

$$z = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h \quad \delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3} \quad \varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T \quad (\text{III.3.28})$$

Der Eingangsvektor der dem Ansatz 2 zu Grunde liegenden Parametrisierung ist:

$$s = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T \quad (\text{III.3.29})$$

Linearisierung der Positionsdifferentialgleichung ergibt sich nach Beziehung (III.3.23). Die linearisierte Geschwindigkeitsdifferentialgleichung wurde nach Gleichung (III.3.17) bestimmt. Die Orientierungsdifferentialgleichung erhält man mit Gleichung (III.3.10). Zusammengefasst ergeben sich die linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen in kombinierten erdfesten ellipsoidischen und horizontfesten kartesischen Koordinaten in Vektorschreibweise.

$$\begin{aligned} \delta \dot{\lambda} &= \left. \frac{\partial (D^{-1}(\lambda) \cdot \tilde{v}_h)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \delta v_h \\ \delta \dot{v}_h &= -\left( R_{\tilde{h}b}(\psi_{\tilde{h}b}) \cdot \tilde{f}_b \right) \times \psi_{h\tilde{h}} + R_{\tilde{h}b}(\psi_{\tilde{h}b}) \cdot \delta f_b - \left. \frac{\partial (\omega_{eh}^h(\lambda, \tilde{v}_h) \times \tilde{v}_h)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda \\ &\quad - \left. \frac{\partial (\omega_{eh}^h(\tilde{\lambda}, v_h) \times v_h)}{\partial v_h^T} \right|_{\tilde{v}_h} \cdot \delta v_h - \left. \frac{\partial (2R_{he}(\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \times \tilde{v}_h)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda - 2R_{he}(\tilde{\lambda}) \cdot \omega_{ie}^e \times \delta v_h \\ &\quad - \left. \frac{\partial (R_{he}(\lambda) \cdot (\omega_{ie}^e \times x_e(\lambda)))}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda + \left. \frac{\partial \tilde{g}_h(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda + \delta g_h \\ \dot{\psi}_{h\tilde{h}} &= -\omega_{ih}^h(\tilde{\lambda}, \tilde{v}_h) \times \psi_{h\tilde{h}} + R_{\tilde{h}b}(\psi_{\tilde{h}b}) \cdot \delta \omega_{ib}^b - \left. \frac{\partial \omega_{ih}^h(\lambda, \tilde{v}_h)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda - \left. \frac{\partial \omega_{ih}^h(\tilde{\lambda}, v_h)}{\partial v_h^T} \right|_{\tilde{v}_h} \cdot \delta v_h \end{aligned} \quad (\text{III.3.30})$$

### 3.4.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

Der Zustandsvektor der dem Ansatz 3 zu Grunde liegenden Parametrisierung lautet:

$$z = \left( \delta\lambda \quad \delta\phi \quad \delta h \quad \delta\dot{\lambda} \quad \delta\dot{\phi} \quad \delta\dot{h} \quad \varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}} \right)^T \quad (\text{III.3.31})$$

Der Eingangsvektor der dem Ansatz 3 zu Grunde liegenden Parametrisierung ist:

$$s = \left( \delta\omega_{ib_1}^b \quad \delta\omega_{ib_2}^b \quad \delta\omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3} \right)^T \quad (\text{III.3.32})$$

Die Positionsdifferentialgleichung ist in Gleichung (III.3.24) gegeben. Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit wurde in Beziehung (III.3.20) bestimmt. Die Orientierungsdifferentialgleichung ist eine Erweiterung von Gleichung (III.3.10). Zusammengefasst erhält man die linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten in Vektorschreibweise.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta\lambda &= \delta\dot{\lambda} \\ \frac{d}{dt} \delta\dot{\lambda} &= - \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot \dot{D}(\lambda, \dot{\lambda}) \right)}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda - \frac{\partial \left( D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{D}(\tilde{\lambda}, \dot{\lambda}) \right)}{\partial \dot{\lambda}^T} \Big|_{\dot{\lambda}} \cdot \delta\dot{\lambda} + \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot R_{hb} \cdot \tilde{f}_b \right)}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda \\ &\quad - \left( D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{hb}(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot \tilde{f}_b \right) \times \psi_{h\tilde{h}} + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot R_{hb}(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot \delta f_b \\ &\quad - \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot \omega_{eh}^h(\lambda, \dot{\lambda}) \times D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \right)}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda - \frac{\partial \left( D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \omega_{eh}^h(\tilde{\lambda}, \dot{\lambda}) \times D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\lambda} \right)}{\partial \dot{\lambda}^T} \Big|_{\dot{\lambda}} \cdot \delta\dot{\lambda} \\ &\quad - \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot 2R_{he}(\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \times D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \right)}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda - D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot 2R_{he}(\tilde{\lambda}) \cdot \omega_{ie}^e \times D(\tilde{\lambda}) \cdot \delta\dot{\lambda} \\ &\quad - \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot R_{he}(\lambda) \cdot \dot{\omega}_{ie}^e \times x_e(\lambda) \right)}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda + \frac{\partial \left( D^{-1}(\lambda) \cdot \tilde{g}_h(\lambda) \right)}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda + D^{-1}(\tilde{\lambda}) \cdot \delta g_h \\ \dot{\psi}_{h\tilde{h}} &= -\omega_{ih}^h(\tilde{\lambda}, \dot{\lambda}) \times \psi_{h\tilde{h}} + R_{hb}(\psi_{h\tilde{h}}) \cdot \delta\omega_{ib}^b - \frac{\partial \omega_{ih}^h(\lambda, \dot{\lambda})}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda - \frac{\partial \omega_{ih}^h(\tilde{\lambda}, \dot{\lambda})}{\partial \dot{\lambda}^T} \Big|_{\dot{\lambda}} \cdot \delta\dot{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{III.3.33})$$

## 4. Literaturvergleich der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen

Anschließend erfolgt ein Abgleich der zuvor hergeleiteten Bewegungsgleichungen mit den Navigationsgleichungen aus der jeweiligen Standardliteratur. Da die Herleitungen dieser Arbeit nur mit genau definierten Vereinfachungen und Vernachlässigungen durchgeführt wurden, lassen sich spezielle Unterschiede und Vereinfachungen bewerten. Dies ist sehr hilfreich, da benutzte Vereinfachungen und Vernachlässigungen in der Standardliteratur meist unvollständig beschrieben und deshalb nur sehr umständlich nachvollzogen werden können. Für Ansatz 1 werden die linearisierten kinematischen Bewegungsgleichungen aus „A Strapdown Inertial Algorithm Using an Earth-Fixed Cartesian Frame“ von Wei und Schwarz als Referenz der Standardliteratur verwendet. Ansatz 2 wird sich im Vergleich auf „The Global Positioning System & Inertial Navigation“ von Farrell und Barth stützen. Die Gleichungen des Ansatzes 3 werden mit der Literaturquelle „Inertial Navigation Systems Analysis“ von Britting verglichen. Ausgehend von Britting finden sich diese Gleichungen zusätzlich noch in „Strapdown Inertial Systems Theory and Applications Introduction and Overview“ von Schmidt und in „Navigation Systems with Geodetic Applications“ von Jekeli. Auf Grund der nicht einheitlichen Ausgangslage der Referenzen zu dieser Arbeit werden alle Unterschiede der Standardliteratur im Vergleich zu dieser Arbeit angesprochen und geklärt.

## 4.1. in erdfesten kartesischen Koordinaten

Die von Schwarz und Wei<sup>23</sup> entwickelte Dynamikmatrix lautet unter Weglassung der Anteile der Sensorfehlerschätzung:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & f_z & -f_y & N_{11} & N_{12} & N_{13} & 0 & 2\omega_e & 0 \\ -f_z & 0 & f_x & N_{21} & N_{22} & N_{23} & -2\omega_e & 0 & 0 \\ f_y & -f_x & 0 & N_{31} & N_{32} & N_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4.1})$$

Auf Grund einer anderen Aufteilung des Zustandsvektors erfolgt zum besseren Vergleich eine Umsortierung und Umbenennung der Dynamikmatrix von Schwarz und Wei aus (III.4.1) auf den Zustandsvektor und die Nomenklatur dieser Arbeit.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 2\omega_{ie}^e & 0 & 0 & \tilde{f}_{\tilde{e}_3} & -\tilde{f}_{\tilde{e}_2} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & -2\omega_{ie}^e & 0 & 0 & -\tilde{f}_{\tilde{e}_3} & 0 & \tilde{f}_{\tilde{e}_1} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & 0 & 0 & 0 & \tilde{f}_{\tilde{e}_2} & -\tilde{f}_{\tilde{e}_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{ie}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{ie}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4.2})$$

Obige Gleichungen sind bis auf die Vernachlässigung der Eulerbeschleunigung  $\dot{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{x}_e$  in der Geschwindigkeitsdifferentialgleichung mit den in dieser Arbeit präsentierten linearisierten Navigationsdifferentialgleichungen identisch. Auf die Tatsache, dass Schwarz und Wei eine Modellierung der Erdschwere über eine Kugelfunktionsentwicklung verwenden, wird in Abschnitt IV näher eingegangen. Auf die Struktur der Gleichungen hat dies keinen direkten Einfluss, da sich nur die Koeffizienten der Matrix  $G$  anders darstellen.

<sup>23</sup> Wei, M. & Schwarz, K.P.; A Strapdown Inertial Algorithm Using an Earth-Fixed Cartesian Frame, Journal of The Institute of Navigation Vol.37 No.2, Calgary 1990, S.165

## 4.2. in gemischten Koordinaten

Farrell und Barth<sup>24</sup> entwickelten folgende Dynamikmatrix:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & \frac{v_N}{R_e^2} & \frac{1}{R_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{v_E \tan(\lambda)}{R_e \cos(\lambda)} & 0 & -\frac{v_E}{R_e^2 \cos(\lambda)} & 0 & \frac{1}{R_e \cos(\lambda)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2\omega_e v_E \cos(\lambda) - \frac{v_E^2}{R_e \cos^2(\lambda)} & 0 & \frac{v_E^2 \tan(\lambda)}{R_e^2} & \frac{v_D}{R_e} & -2\omega_e \sin(\lambda) & \frac{v_N}{R_e} & 0 & f_D & -f_E \\ \hline \frac{v_N v_E}{R_e \cos^2(\lambda)} & 0 & -\frac{v_N v_E \tan(\lambda)}{R_e^2} & \frac{v_E \tan(\lambda)}{R_e} & \frac{v_N \tan(\lambda)}{R_e} & \frac{v_E}{R_e} & -f_D & 0 & f_N \\ \hline +2\omega_e (v_N \cos(\lambda) - v_D \sin(\lambda)) & 0 & -\frac{v_E v_D}{R_e^2} & +2\omega_e \sin(\lambda) & +\frac{v_D}{R_e} & +2\omega_e \cos(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2\omega_e v_E \sin(\lambda) & 0 & \frac{v_N^2}{R_e^2} + \frac{v_E^2}{R_e^2} - 2\frac{g}{R_e} & -\frac{2v_N}{R_e} & \frac{2v_E}{R_e} & 0 & f_E & -f_N & 0 \\ \hline \omega_e \sin(\lambda) & 0 & \frac{v_E}{R_e^2} & 0 & -\frac{1}{R_e} & 0 & 0 & -\frac{v_E \tan(\lambda)}{R_e} & \frac{v_N}{R_e} \\ \hline 0 & 0 & -\frac{v_N}{R_e^2} & \frac{1}{R_e} & 0 & 0 & \frac{v_E \tan(\lambda)}{R_e} & 0 & \frac{v_E}{R_e} \\ \hline \frac{v_E}{R_e \cos^2(\lambda)} + \omega_e \cos(\lambda) & 0 & -\frac{v_E \tan(\lambda)}{R_e^2} & 0 & \frac{\tan(\lambda)}{R_e} & 0 & -\frac{v_N}{R_e} & -\frac{v_E}{R_e} & 0 \end{array} \end{array} \quad (\text{III.4.3})$$

Zu beachten ist, dass bei Farrell und Barth die ellipsoidische Länge mit  $\phi$  und die ellipsoidische Breite mit  $\lambda$  parametrisiert sind. Dies ist genau umgekehrt als normalerweise üblich. Die zur obigen Dynamikmatrix gehörenden Navigationsdifferentialgleichungen weisen Vereinfachungen auf. So sind der Normal- und der Meridiankrümmungshalbmesser  $N(\phi)$  und  $M(\phi)$  durch einen mittleren Gaußschen Krümmungshalbmesser  $R_e$  ersetzt worden. Die in der Herleitung auftretende zeitliche Ableitung des Halbmessers  $R'(\phi)$  wird gemeinsam mit der Eulerbeschleunigung ebenfalls vernachlässigt. Gruppiert man die Matrix aus (III.4.3) unter Einhaltung der Nomenklatur dieser Arbeit auf den hier verwendeten Zustandsvektor um, so ergibt sich:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & \frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{R_e \cos(\tilde{\phi})} & -\frac{\tilde{v}_{h_2}}{R_e^2 \cos(\tilde{\phi})} & 1 & \frac{1}{R_e \cos(\tilde{\phi})} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{\tilde{v}_{h_2}}{R_e^2} & \frac{1}{R_e} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2\omega_e \tilde{v}_{h_2} \cos(\tilde{\phi}) - \frac{\tilde{v}_{h_2}^2}{R_e \cos^2(\tilde{\phi})} & \frac{\tilde{v}_{h_2}^2 \tan(\tilde{\phi})}{R_e^2} - \frac{\tilde{v}_{h_2} \tilde{v}_{h_3}}{R_e^2} & \frac{\tilde{v}_{h_3}}{R_e} & -2\omega_e \sin(\tilde{\phi}) & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{R_e} & 0 & \tilde{f}_{h_3} & -\tilde{f}_{h_2} \\ \hline 0 & \frac{\tilde{v}_{h_2} \tilde{v}_{h_3}}{R_e \cos^2(\tilde{\phi})} & -\frac{\tilde{v}_{h_2} \tilde{v}_{h_3} \tan(\tilde{\phi})}{R_e^2} - \frac{\tilde{v}_{h_2} \tilde{v}_{h_3}}{R_e^2} & \frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{R_e} & \frac{\tilde{v}_{h_3} \tan(\tilde{\phi})}{R_e} & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{R_e} & -\tilde{f}_{h_3} & 0 & \tilde{f}_{h_2} \\ \hline 0 & +2\omega_e (\tilde{v}_{h_3} \cos(\tilde{\phi}) - \tilde{v}_{h_2} \sin(\tilde{\phi})) & +2\omega_e \sin(\tilde{\phi}) & +\frac{\tilde{v}_{h_3}}{R_e} & +2\omega_e \cos(\tilde{\phi}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2\omega_e \tilde{v}_{h_2} \sin(\tilde{\phi}) & \frac{\tilde{v}_{h_2}^2}{R_e^2} + \frac{\tilde{v}_{h_3}^2}{R_e^2} - 2\frac{g}{R_e} & -\frac{2\tilde{v}_{h_2}}{R_e} & -2\omega_e \cos(\tilde{\phi}) & 0 & \tilde{f}_{h_2} & -\tilde{f}_{h_3} & 0 \\ \hline 0 & \omega_e \sin(\tilde{\phi}) & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{R_e^2} & 0 & -\frac{1}{R_e} & 0 & 0 & -\frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{R_e} & \frac{\tilde{v}_{h_3}}{R_e} \\ \hline 0 & 0 & -\frac{\tilde{v}_{h_3}}{R_e^2} & \frac{1}{R_e} & 0 & 0 & \frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{R_e} & 0 & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{R_e} \\ \hline 0 & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{R_e \cos^2(\tilde{\phi})} + \omega_e \cos(\tilde{\phi}) & -\frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{R_e^2} & 0 & \frac{\tan(\tilde{\phi})}{R_e} & 0 & -\frac{\tilde{v}_{h_3}}{R_e} & -\frac{\tilde{v}_{h_2}}{R_e} & 0 \end{array} \end{array} \quad (\text{III.4.4})$$

Als Koeffizient der Erdschwere wird bei Farrell und Barth lediglich das Glied  $-2g/R_e$  angeführt. Dies liegt an der Modellierung über eine kugelförmige Erdannahme. Auf die verschiedenen Möglichkeiten der Erdschwerefeldmodellierung wird im Rahmen dieser Arbeit erst in Abschnitt IV eingegangen. Deshalb können die Gleichungen von Farrell und Barth soweit bestätigt werden.

<sup>24</sup> Farrell, Jay A. & Barth, Matthew; The Global Positioning System & Inertial Navigation, McGraw-Hill Companies, New York 1999, S.204

### 4.3. in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

Die von Britting<sup>25</sup> entwickelten und von Schmidt<sup>26</sup> und Jekeli<sup>27</sup> weiter verwendeten linearisierten Bewegungsgleichungen weisen zu unseren Gleichungen einige Unterschiede auf. Wegen kleinerer Fehler in der Originalliteratur von Britting und der vollen Formulierung der Dynamikmatrix mit neun Zuständen bei Schmidt wurde bewusst Schmidt als Referenz der Standardliteratur verwendet. Die von Schmidt entdeckten Fehler in der Originalliteratur bei Britting betreffen die Berücksichtigung von Misalignment im Bereich der Kreisel und zeigen hier jedoch keinen Einfluss.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\lambda} \sin(L) & \dot{L} & 0 & \cos(L) & 0 & -\dot{\lambda} \sin(L) & 0 & 0 \\ \dot{\lambda} \sin(L) & 0 & \dot{\lambda} \cos(L) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{L} & -\dot{\lambda} \cos(L) & 0 & 0 & -\sin(L) & 0 & -\dot{\lambda} \cos(L) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-f_D}{R} & \frac{f_E}{R} & \frac{-2\dot{h}}{R} & -\dot{\lambda} \sin(2L) & \frac{-2\dot{L}}{R} & -i(i+2\omega_{ie})\cos(2L) & 0 & -\left[ \frac{\ddot{L} + \frac{i(i+2\omega_{ie})\sin(2L)}{2}}{R} \right] \\ \frac{f_D}{R\cos(L)} & 0 & \frac{-f_N}{R\cos(L)} & 2\dot{\lambda} \tan(2L) & -2\left[ \frac{\dot{h}}{R} - \dot{L} \tan(L) \right] & \frac{-2\dot{\lambda}}{R} & \left[ \ddot{i} + \frac{2}{R} \dot{\lambda} \dot{h} \right] \tan(L) + 2\dot{\lambda} \dot{L} & 0 & \frac{-(\ddot{i} - 2\dot{\lambda} \dot{L} \tan(L))}{R} \\ f_E & -f_N & 0 & 2R\dot{i} & 2R\dot{\lambda} \cos^2(L) & 0 & -R\dot{i}(i+2\omega_{ie})\sin(2L) & 0 & \dot{L}^2 + i(i+2\omega_{ie})\cos^2(L) + 2\frac{g}{R} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.4.5})$$

Auf Grund der Definition der Störung bei Schmidt

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} - \delta \mathbf{z} \quad (\text{III.4.6})$$

$$\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}} - \delta \mathbf{s}$$

im Vergleich zur Definition dieser Arbeit aus Definition (III.2.1)

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} + \delta \mathbf{z}$$

$$\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}} + \delta \mathbf{s} \quad (\text{III.4.7})$$

ergeben sich Vorzeichenunterschiede in den Koeffizienten. In den Koeffizienten der Position und Geschwindigkeit mit sich selbst und den Koeffizienten der Orientierung mit sich selbst eliminieren sich diese auf Grund des folgenden Zusammenhanges nach Gleichung (III.2.5):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= f(\tilde{\mathbf{z}} - \delta \mathbf{z}) & \dot{\mathbf{z}} &= f(\tilde{\mathbf{z}} + \delta \mathbf{z}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}} - \delta \dot{\mathbf{z}} &= f(\tilde{\mathbf{z}} - \delta \mathbf{z}) & \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + \delta \dot{\mathbf{z}} &= f(\tilde{\mathbf{z}} + \delta \mathbf{z}) \\ \delta \dot{\mathbf{z}} &= -f(\tilde{\mathbf{z}} - \delta \mathbf{z}) + f(\tilde{\mathbf{z}}) & \delta \dot{\mathbf{z}} &= f(\tilde{\mathbf{z}} + \delta \mathbf{z}) - f(\tilde{\mathbf{z}}) \\ \delta \dot{\mathbf{z}} &= -\left. \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\tilde{\mathbf{z}}} \cdot (-\delta \mathbf{z}) + O^2 & \delta \dot{\mathbf{z}} &= \left. \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\tilde{\mathbf{z}}} \cdot \delta \mathbf{z} + O^2 \end{aligned} \quad (\text{III.4.8})$$

Für die Einflüsse der Orientierungszustände auf die Positions- und Geschwindigkeitszustände und umgekehrt gilt dieser Zusammenhang wegen der multiplikativen Aufdatierung dieser Arbeit jedoch nicht. Diese Koeffizienten müssen mit dem Faktor  $-1$  multipliziert werden, um eine Vergleichbarkeit zu erreichen. Auf Grund einer anderen Aufteilung des Zustandsvektors ergibt sich zudem eine abweichende Matrizenstruktur. Die Vereinfachungen, die Schmidt in seiner Herleitung benutzt, sind die Einführung eines mittleren Abstandes  $R$  zum Erdmittelpunkt für die Summe aus Normalbeziehungswise Meridiankrümmungshalbmesser und der Höhe  $h$  unter zusätzlicher Vernachlässigung seiner Ableitung  $R'(\phi)$ . Die Eulerbeschleunigung wurde ebenfalls weggelassen. Zum Abschluss muss noch die Existenz der zweiten Ableitungen der geographischen Länge  $\ddot{L}$  und Breite  $\ddot{i}$  in den Koeffizienten von Schmidt erklärt werden, da diese normalerweise per Definition dort nicht auftreten dürften. Dies stellt einen Verstoß gegen die Struktur linearisierter Differentialgleichungssysteme dar. Bei diesen Koeffizienten handelt es sich jedoch nur um die zweiten Ableitungen der ellipsoidischen Länge und Breite an der Näherungsstelle. Diese können aus den Zustandsgrößen und ihren ersten Ableitungen nach Gleichung (III.1.52) entwickelt werden.

<sup>25</sup> Britting, Kenneth R.; Inertial Navigation Systems Analysis, John Wiley & Sons, New York 1971, S.122

<sup>26</sup> Schmidt, G.T.; Strapdown Inertial Systems Theory and Applications Introduction and Overview, in AGARD Lecture Series No.95 Strap-Down Inertial Systems, London 1978, S.1-8

<sup>27</sup> Jekeli, Christopher; Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications, Walter de Gruyter, New York 2001, S.156

Schmidt ermittelt für die betroffenen Koeffizienten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \phi} &= \left( \ddot{\lambda} + \frac{2}{R} (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \dot{h} \right) \tan(\phi) + 2(\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \dot{\phi} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} &= -\frac{\ddot{\lambda} - 2\dot{\phi}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \tan(\phi)}{R} \\ \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial h} &= -\frac{2\ddot{\phi} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}) \sin(2\phi)}{2R}\end{aligned}\quad (\text{III.4.9})$$

Durch Einsetzen des funktionalen Zusammenhanges für  $\ddot{\lambda}$  und  $\ddot{\phi}$  gemäß der Geschwindigkeitsdifferentialgleichung erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \phi} &= \left( 2\dot{\phi}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \tan(\phi) - \frac{2\dot{h}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)}{R} + \frac{2}{R} (\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \dot{h} \right) \tan(\phi) + 2(\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \dot{\phi} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} &= -\frac{1}{R} \left( 2\dot{\phi}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \tan(\phi) - \frac{2\dot{h}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)}{R} - 2\dot{\phi}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}) \tan(\phi) \right) \\ \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial h} &= -\frac{1}{R} \left( -\frac{4\dot{\phi}\dot{h}}{R} - \frac{2\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(2\phi)}{2R} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}) \sin(2\phi) \right)\end{aligned}\quad (\text{III.4.10})$$

Vereinfachen führt zu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \phi} &= \frac{2\dot{\phi}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)}{\cos^2(\phi)} \\ \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial h} &= \frac{2\dot{h}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)}{R^2} \\ \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial h} &= \frac{2\dot{\phi}\dot{h}}{R^2}\end{aligned}\quad (\text{III.4.11})$$

Setzt man diese Berechnungen in die Ausgangsmatrix aus Gleichung (III.4.5) ein und gruppiert die Matrix auf den Zustandsvektor dieser Arbeit um, so heißt es in dieser Nomenklatur für die Gleichungen nach Schmidt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\dot{\phi}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)}{\cos^2(\bar{\phi})} & \frac{2\dot{h}(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)}{R^2} & 2\dot{\phi} \tan(\bar{\phi}) & 2(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \tan(\bar{\phi}) & -\frac{2(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)}{R} & -\frac{\tilde{f}_{h_3}}{R \cos(\bar{\phi})} & 0 & \frac{\tilde{f}_{h_3}}{R \cos(\bar{\phi})} \\ 0 & -\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \cos(2\bar{\phi}) & \frac{2\dot{\phi}\dot{h}}{R^2} & -(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(2\bar{\phi}) & -\frac{2\dot{h}}{R} & -\frac{2\dot{\phi}}{R} & 0 & \frac{\tilde{f}_{h_3}}{R} & -\frac{\tilde{f}_{h_3}}{R} \\ 0 & -R\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \sin(2\bar{\phi}) & \dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \cos^2(\bar{\phi}) + \dot{\phi}^2 + 2\frac{g}{R} & 2(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) R \cos^2(\bar{\phi}) & 2\dot{\phi}R & 0 & -\tilde{f}_{h_2} & \tilde{f}_{h_1} & 0 \\ 0 & (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(\bar{\phi}) & 0 & -\cos(\bar{\phi}) & 0 & 0 & 0 & -(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(\bar{\phi}) & \dot{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(\bar{\phi}) & 0 & (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \cos(\bar{\phi}) \\ 0 & (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \cos(\bar{\phi}) & 0 & \sin(\bar{\phi}) & 0 & 0 & -\dot{\phi} & -(\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \cos(\bar{\phi}) & 0\end{pmatrix}\quad (\text{III.4.12})$$

Als Koeffizienten für das Schwerfeldmodell wird analog zur Parametrisierung in gemischten Koordinaten lediglich der Term  $2g/R_e$  angeführt. Vereinfacht man die im Rahmen dieser Arbeit ermittelten Koeffizienten aus dem entsprechenden Template im Anhang, so können obige Ergebnisse bestätigt werden. Bei den Parametern  $\ddot{L}$  und  $\ddot{I}$  handelt sich somit bei Schmidt nicht um wirkliche zweite Ableitungen, sondern nur um Platzhalter. Aus welchen Gründen die zweiten Ableitungen bei Schmidt in die Dynamikmatrix mit eingeführt wurden, kann nicht erklärt werden, da sich durch deren Einführung die Koeffizienten nur unnötig verkomplizieren.

## 5. Vereinfachte Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen

Es wurde gezeigt, dass die im Rahmen dieser Arbeit ohne direkte Vereinfachungen und Annahmen hergeleiteten Gleichungen mit den Bewegungsgleichungen der Literatur unter den gezeigten Einschränkungen korrespondieren. Die voll ausformulierten Bewegungsgleichungen in den drei Templates im Anhang sind jedoch auf Grund ihrer Komplexität für eine direkte Weiterverwendung in allgemeinen Navigationsanwendungen nicht direkt zu empfehlen. Sie sollen dazu dienen, für spezielle Anwendungen und Situationen auch die Terme identifizieren und berücksichtigen zu können, die in der Literatur meist von vornherein unterschlagen werden. Der Anwender kann die voll ausformulierten Bewegungsgleichungen für seine Bedürfnisse durch im Nachhinein gewählte Verallgemeinerungen optimieren. In diesem Kapitel sollen beispielhaft die Vereinfachungen für gängige IMU-Genauigkeitsklassen angeboten werden. Da keine allgemeingültigen Klassifizierungskriterien existieren, definieren wir folgende Genauigkeitsklassen:<sup>28</sup> Die genauesten, sogenannten Marine-Grade IMU werden momentan für Marine- und einige Weltraumanwendungen benötigt und besitzen eine Positionsgenauigkeit von circa einer nautischen Meile pro Tag. Diese Genauigkeitsklasse soll nicht weiter betrachtet werden. Die nächstschlechtere Genauigkeitsklasse stellen Navigation-Grade IMU dar, die hauptsächlich in der Luftfahrt verwendet werden. Deren Genauigkeit orientiert sich an der Genauigkeit der Standard Navigation Unit 84 (SNU84) Spezifikation<sup>29</sup> und liegt im Bereich von circa einer nautischen Meile pro Stunde. Für diese IMU-Genauigkeitsklasse müssen die linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern gemäß Kapitel 5.1 nur leicht modifiziert werden. Sogenannte Tactical-Grade IMU finden vor allem in Lenkflugkörpern und unbemannten Luftfahrzeugen (Unmanned Aerial Vehicle – UAV) Verwendung. Typische Genauigkeiten liegen in einem Bereich, in dem eine ausschließliche Inertialnavigation meist nur über einige Minuten brauchbare Positionsgenauigkeiten liefert. In dieser IMU-Genauigkeitsklasse wird die Inertialnavigation meist durch Satellitennavigation gestützt. Entsprechende Vereinfachungen der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern sind in Kapitel 5.2 zu finden. Abschließend sollen Rate-Grade IMU auf Basis Mikro-Elektromechanischer Sensoren (Micro Electro-Mechanical Sensor – MEMS) untersucht werden. Deren Navigationslösung kann ungestützt meist nicht mehr als eine Minute verwendet werden. Eine Stützung durch andere Sensoren ist somit zwingend notwendig. Die für diese Genauigkeitsklasse angepassten Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern werden in Kapitel 5.3 hergeleitet. Im Vorgriff auf Abschnitt IV werden hier die Schwerefeldmodellierungen im Allgemeinen mit betrachtet und an die jeweilige Vereinfachung mit angepasst. Die zugehörige Simulation ist in Abschnitt VII im Rahmen der kinematischen Verifikation zu finden. Alle Vereinfachungen wurden so gewählt, dass der zusätzliche Navigationsfehler durch die jeweiligen Vereinfachungen etwa eine Größenordnung kleiner ist als der generell vorhandene Linearisierungsfehler der nicht vereinfachten linearisierten Bewegungsgleichungen.

### 5.1. für Navigation-Grade IMU

Typische Genauigkeiten einer Navigation-Grade IMU für die Standardabweichungen der Kreiselbias  $b_g$  und der Beschleunigungsmesserbias  $b_a$  sind:

$$\begin{aligned}\sigma_{b_g} &\leq 0,01 \frac{^\circ}{h} \\ \sigma_{b_a} &\leq 0,01 mg\end{aligned}\tag{III.5.1}$$

Navigation-Grade IMU sind auf Grund ihrer Spezifikation dazu geeignet, über längere Zeit ungestützt zu navigieren. Für diese IMU-Genauigkeitsklasse wird eine maximale Operationsdauer von einer Stunde definiert und zusätzlich werden folgende generische IMU-Sensordatenstörungen angenommen:<sup>30</sup>

$$\begin{aligned}\delta\omega_{ib_i}^b &= 0,003 \frac{^\circ}{h} \\ \delta f_{b_i} &= 0,025 mg\end{aligned}\tag{III.5.2}$$

Die Sensordatenstörungen orientieren sich dabei an den Bias einer Litton LN-100G RLG IMU. Es werden nun all jene Terme betrachtet, deren Vernachlässigung oder Vereinfachung zu einem zusätzlichen Navigationsfehler führen, der kleiner ist als der grundsätzlich vorhandene Linearisierungsfehler der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen. Einige Terme können in diesem Zusammenhang immer vernachlässigt oder vereinfacht werden, da deren Einfluss mehrere Größenordnungen kleiner ist als der Linearisierungsfehler. Bei anderen Termen, deren Vernachlässigung oder Vereinfachung einen Einfluss auf die Navigationsgenauigkeit in etwa der Größenordnung des Linearisierungsfehlers hat, muss eine speziellere Betrachtung erfolgen. In diesen Fällen muss anwendungsbezogen je nach IMU-Spezifikation, Dynamik und Operationsdauer sorgfältig untersucht werden, ob die Auswirkungen durch die

<sup>28</sup> Groves, Paul D.; Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Artech House, Boston 2008, S.98

<sup>29</sup> Aeronautical Systems Division, Air Force Systems Command, Specification for USAF Standard Form, Fit, and Function Medium Accuracy Inertial Navigation Unit, Wright-Patterson AFB 1992

<sup>30</sup> Northrop Grumman, LN-100G Embedded GPS Inertial Navigation System Specification, www.es.northropgrumman.com (17.11.2009)

Vereinfachung oder Vernachlässigung dieser Terme für diese spezielle Anwendung hingenommen werden können. In Tabelle 1 können die für Navigation-Grade IMU möglichen Vereinfachungen und Vernachlässigungen abgelesen werden. Die sicheren Vereinfachungen können dabei stets verwendet werden. Für Anwendungen mit besserer IMU als der in Gleichung III.5.2 definierten generischen IMU, anderer Dynamik als der in Abschnitt VI simulierten Referenztrajektorie oder längerer Operationszeit als einer Stunde, müssen diese Terme nochmals betrachtet und die Auswirkungen dieser eventuellen Vereinfachungen ermittelt werden.

Ausgangsterm	Sicher	Eventuell
$\dot{\omega}_{ie}^e$	$\dot{\omega}_{ie}^e = 0$	
$N'(\phi)$		$N'(\phi) = 0$
$N''(\phi)$	$N''(\phi) = 0$	
$M'(\phi)$		$M'(\phi) = 0$
$M''(\phi)$	$M''(\phi) = 0$	

**Tabelle 1: Vereinfachungen für Navigation-Grade IMU**

Für die Schwerefeldmodellierung genügt für Navigation-Grade IMU im unteren Genauigkeitsspektrum die WGS84-Normalschwereformel beziehungsweise deren Umsetzung als Reihenentwicklung für die Parametrisierung in erdfesten kartesischen Koordinaten. Für Navigation-Grade IMU im oberen Genauigkeitsspektrum oder Marine-Grade IMU und vor allem bei längeren Operationszeiten als einer Stunde müssen in der Schwerefeldmodellierung zwingend Lotabweichungen berücksichtigt beziehungsweise reale Geoidmodelle verwendet werden.

## 5.2. für Tactical-Grade IMU

Typische Genauigkeiten einer Tactical-Grade IMU für die Standardabweichungen der Kreiselbias  $b_g$  und der Beschleunigungsmesserbias  $b_a$  liegen im Bereich von:

$$0,01 \frac{\circ}{h} \leq \sigma_{b_g} \leq 10 \frac{\circ}{h} \quad (\text{III.5.3})$$

$$0,01 \text{mg} \leq \sigma_{b_a} \leq 10 \text{mg}$$

Die Operationsdauer für diese IMU-Genauigkeitsklasse ist auf 15 Minuten beschränkt. Die IMU-Sensordatenstörungen sind dabei wie folgt festgelegt:

$$\delta \omega_{b_i}^b = 1 \frac{\circ}{h} \quad (\text{III.5.4})$$

$$\delta f_{b_i} = 1 \text{mg}$$

Diese Werte orientieren sich an den Bias gängiger FOG IMU-Spezifikationen.<sup>31</sup> In Tabelle 2 sind die sicheren und eventuellen Vereinfachungen für Tactical-Grade IMU ablesbar. Auch hier können die sicheren Vereinfachungen jederzeit durchgeführt werden. Die eventuellen Vereinfachungen müssen wieder separat für die jeweilige Anwendung geprüft werden. Die in der Literatur oftmals durchgeführte Vereinfachung der Krümmungshalbmesser mit einem mittleren Gaußschen Krümmungshalbmesser  $R(\phi) = \sqrt{N(\phi) \cdot M(\phi)}$  führt in diesem Zusammenhang meist zu zusätzlichen Navigationsfehlern, die deutlich größer sind als der Linearisierungsfehler und kann deshalb nicht bedenkenlos für jegliche Tactical-Grade IMU-Anwendungen empfohlen werden.

Ausgangsterm	Sicher	Eventuell
$\dot{\omega}_{ie}^e$	$\dot{\omega}_{ie}^e = 0$	
$N(\phi)$		$N(\phi) = R(\phi)$
$N'(\phi)$	$N'(\phi) = 0$	
$N''(\phi)$	$N''(\phi) = 0$	
$M(\phi)$		$M(\phi) = R(\phi)$
$M'(\phi)$	$M'(\phi) = 0$	
$M''(\phi)$	$M''(\phi) = 0$	

**Tabelle 2: Vereinfachungen für Tactical-Grade IMU**

<sup>31</sup> Northrop Grumman, LN-200 Fiber Optic Inertial Measurement Specification, www.es.northropgrumman.com (17.11.2009)

Die Schwerefeldmodellierung kann bei Tactical-Grade IMU im unteren Genauigkeitsspektrum mit einem Kugelmodell approximiert werden. Lediglich für Tactical-Grade IMU im oberen Genauigkeitsspektrum müssen die vollen ellipsoidischen Schwerefeldmodelle benutzt werden. Die Verwendung realer Geoidmodelle oder die Berücksichtigung von Lotabweichungen sind nicht nötig.

### 5.3. für Rate-Grade IMU

Typische Genauigkeiten einer Rate-Grade IMU für die Standardabweichungen der Kreiselbias  $b_g$  und der Beschleunigungsmesserbias  $b_a$  belaufen sich auf:

$$\begin{aligned}\sigma_{b_g} &> 10 \frac{^\circ}{h} \\ \sigma_{b_a} &> 10mg\end{aligned}\quad (\text{III.5.5})$$

Als übliche Operationszeit sind zwei Minuten definiert. Die angesetzten IMU Sensordatenstörungen sind der Spezifikation der Bias einer BAE / AIS SiIMU02 entnommen.<sup>32</sup>

$$\begin{aligned}\delta\omega_{b_i}^b &= 50 \frac{^\circ}{h} \\ \delta f_{b_i} &= 5mg\end{aligned}\quad (\text{III.5.6})$$

Die sicheren und eventuellen Vereinfachungen und Vernachlässigungen sind in Tabelle 3 nachzulesen. Die sicheren Vereinfachungen können stets gemacht werden. Bei den eventuellen Vereinfachungen ist erneut eine detaillierte Betrachtung, angepasst an IMU-Spezifikation, Dynamik und Operationszeit, durchzuführen. Die Vernachlässigung der Erddrehrate ist nur für sehr kurze Operationszeiten zu empfehlen.

Ausgangsterm	Sicher	Eventuell
$\dot{\omega}_{ie}^e$	$\dot{\omega}_{ie}^e = 0$	
$\omega_{ie}^e$		$\omega_{ie}^e = 0$
$N(\phi) + h$	$N(\phi) + h = \sqrt[3]{a^2 b}$	
$N'(\phi)$	$N'(\phi) = 0$	
$N''(\phi)$	$N''(\phi) = 0$	
$M(\phi) + h$	$M(\phi) + h = \sqrt[3]{a^2 b}$	
$M'(\phi)$	$M'(\phi) = 0$	
$M''(\phi)$	$M''(\phi) = 0$	

Tabelle 3: Vereinfachungen für Rate-Grade IMU

Auf die Schwerefeldmodellierung kann im unteren Genauigkeitsspektrum der Rate-Grade IMU und bei sehr kurzen Operationszeiten komplett verzichtet werden. Für Rate-Grade IMU im oberen Genauigkeitsspektrum und längerer Operationszeit kann bedenkenlos eine Kugelapproximation verwendet werden.

## 6. Zusammenfassung

Ausgehend von der Definition der Bezugssysteme und der zu Grunde liegenden physikalischen Zusammenhänge wurden in diesem Abschnitt die kinematischen Bewegungsgleichungen hergeleitet. Dabei wurde ein systematischer Ansatz ausgehend von Newtonscher Physik über eine Störungsrechnung und die anschließende Linearisierung gewählt.

1. Newtonsche Physik $\Rightarrow$
Nichtlineare Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen
2. Störungsrechnung $\Rightarrow$
Nichtlineare Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen
3. Linearisierung $\Rightarrow$
Linearisierte Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen

<sup>32</sup> Atlantic Inertial Systems, MEMS Inertial Measurement Unit SiIMU02 Specification, www.atlanticinertial.com (17.11.2009)

Als Ergebnis liegen die linearisierten kinematischen Grundgleichungen für die drei Standardparametrisierungen in einheitlicher Notation vor. Da die in der gesamten Herleitung benutzten Annahmen grundsätzlich auf alle drei Parametrisierungsansätze gemeinsam angewendet wurden, erhält man durch diese Arbeit die Möglichkeit, die kinematischen Bewegungsgleichungen in den drei Ausbaustufen qualitativ und quantitativ beurteilen zu können. Durch die detaillierte, ausformulierte Schreibweise innerhalb der definierten Templates soll den Nutzern eine möglichst leichte Verwendung der Gleichungen ermöglicht werden. Der Vergleich mit den in der Standardliteratur gebräuchlichen kinematischen Bewegungsgleichungen konnte zum einen Inkonsistenzen innerhalb der Standardquellen beschreiben und zum anderen die kinematischen Bewegungsgleichungen dieser Arbeit bestätigen. Eine weitere Bestätigung der Navigationsdifferentialgleichungssysteme wird im Rahmen der kinematischen Verifizierung in Abschnitt VII erfolgen. Abschließend wurden durch klar definierte Einschränkungen und Vernachlässigungen die im Rahmen der Templates verfügbaren linearisierten kinematischen Bewegungsgleichungen für Standardanwendungen verwendbar gemacht. Die in den drei Anhängen folgenden Templates sind dabei jeweils so aufgebaut, dass die entsprechenden Bewegungsgleichungen inklusive ihrer Legendenbeschreibung direkt entnommen werden können und auch ohne die Herleitung innerhalb der Kapitel dieses Abschnitts weiterverwendet werden können.

# A Bewegungsgleichungen zu Ansatz 1

## Nichtlineare kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton fehlerfrei in absoluten Zuständen

$$\dot{z} = f(z, s)$$

**Zustandsvektor in absoluten Navigationszuständen:**

$$z = (x_{e_1} \ x_{e_2} \ x_{e_3} \ v_{e_1} \ v_{e_2} \ v_{e_3} \ q_{eb_0} \ q_{eb_1} \ q_{eb_2} \ q_{eb_3})^T$$

**Eingangsvektor in absoluten IMU-Sensordaten:**

$$s = (\omega_{ib_1}^b \ \omega_{ib_2}^b \ \omega_{ib_3}^b \ f_{b_1} \ f_{b_2} \ f_{b_3})^T$$

**Navigationsdifferentialgleichungssystem:**

$$\dot{x}_{e_1} = v_{e_1}$$

$$\dot{x}_{e_2} = v_{e_2}$$

$$\dot{x}_{e_3} = v_{e_3}$$

$$\dot{v}_{e_1} = (q_{eb_0}^2 + q_{eb_1}^2 - q_{eb_2}^2 - q_{eb_3}^2) f_{b_1} + 2(q_{eb_1} q_{eb_2} - q_{eb_0} q_{eb_3}) f_{b_2} + 2(q_{eb_1} q_{eb_3} + q_{eb_0} q_{eb_2}) f_{b_3} + 2\omega_{ie}^e v_{e_2} + \dot{\omega}_{ie}^e x_{e_2} + g_{e_1}(x_{e_1}, x_{e_2}, x_{e_3})$$

$$\dot{v}_{e_2} = 2(q_{eb_1} q_{eb_2} + q_{eb_0} q_{eb_3}) f_{b_1} + (q_{eb_0}^2 - q_{eb_1}^2 + q_{eb_2}^2 - q_{eb_3}^2) f_{b_2} + 2(q_{eb_2} q_{eb_3} - q_{eb_0} q_{eb_1}) f_{b_3} - 2\omega_{ie}^e v_{e_1} - \dot{\omega}_{ie}^e x_{e_1} + g_{e_2}(x_{e_1}, x_{e_2}, x_{e_3})$$

$$\dot{v}_{e_3} = 2(q_{eb_1} q_{eb_3} - q_{eb_0} q_{eb_2}) f_{b_1} + 2(q_{eb_2} q_{eb_3} + q_{eb_0} q_{eb_1}) f_{b_2} + (q_{eb_0}^2 - q_{eb_1}^2 - q_{eb_2}^2 + q_{eb_3}^2) f_{b_3} + g_{e_3}(x_{e_1}, x_{e_2}, x_{e_3})$$

$$\dot{q}_{eb_0} = \frac{1}{2}(-\omega_{ib_1}^b q_{eb_1} - \omega_{ib_2}^b q_{eb_2} - (\omega_{ib_3}^b - \omega_{ie}^e) q_{eb_3})$$

$$\dot{q}_{eb_1} = \frac{1}{2}(\omega_{ib_1}^b q_{eb_0} + (\omega_{ib_3}^b + \omega_{ie}^e) q_{eb_2} - \omega_{ib_2}^b q_{eb_3})$$

$$\dot{q}_{eb_2} = \frac{1}{2}(\omega_{ib_2}^b q_{eb_0} - (\omega_{ib_3}^b + \omega_{ie}^e) q_{eb_1} + \omega_{ib_1}^b q_{eb_3})$$

$$\dot{q}_{eb_3} = \frac{1}{2}((\omega_{ib_3}^b - \omega_{ie}^e) q_{eb_0} + \omega_{ib_2}^b q_{eb_1} - \omega_{ib_1}^b q_{eb_2})$$

**Legende:**

absolute Navigationszustände

$$\mathbf{x}_e = (x_{e_1} \ x_{e_2} \ x_{e_3})^T$$

*Position in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_e = (v_{e_1} \ v_{e_2} \ v_{e_3})^T$$

*Geschwindigkeit in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\vec{q}_{eb} = (q_{eb_0} \ q_{eb_1} \ q_{eb_2} \ q_{eb_3})^T$$

*Rotationsquaternion vom körperfesten ins erdfeste Bezugssystem*

absolute IMU-Sensordaten

$$\omega_{ib}^b = (\omega_{ib_1}^b \ \omega_{ib_2}^b \ \omega_{ib_3}^b)^T$$

*Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Bezugssystem*

$$\mathbf{f}_b = (f_{b_1} \ f_{b_2} \ f_{b_3})^T$$

*Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem*

Erdschwereparameter

$$\mathbf{g}_e(\mathbf{x}_e) = (g_{e_1}(\mathbf{x}_e) \ g_{e_2}(\mathbf{x}_e) \ g_{e_3}(\mathbf{x}_e))^T$$

*Erdschwere im erdfesten Bezugssystem*

$$\omega_{ie}^e = (0 \ 0 \ \omega_{ie}^e)^T$$

*Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \ 0 \ \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

*Ungleichförmigkeit der Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

## Nichtlineare kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton in Zustandsstörungen

$$\delta \dot{z} = f(\tilde{z} + \delta z, \tilde{s} + \delta s) - f(\tilde{z}, \tilde{s})$$

### Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:

$$\delta z = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3} \quad \delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3} \quad \varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}})^T$$

### Eingangsvektor in IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen:

$$\delta s = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{e_1} \quad \delta g_{e_2} \quad \delta g_{e_3})^T$$

### Navigationsdifferentialgleichungssystem:

$$\delta \dot{x}_{e_1} = \delta v_{e_1}$$

$$\delta \dot{x}_{e_2} = \delta v_{e_2}$$

$$\delta \dot{x}_{e_3} = \delta v_{e_3}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_{e_1} = & \cos(\psi_{e\tilde{e}}) \cos(\vartheta_{e\tilde{e}}) (\tilde{f}_{\tilde{e}_1} + \delta f_{\tilde{e}_1}) - \tilde{f}_{\tilde{e}_1} + (\cos(\psi_{e\tilde{e}}) \sin(\vartheta_{e\tilde{e}}) \sin(\varphi_{e\tilde{e}}) - \sin(\psi_{e\tilde{e}}) \cos(\varphi_{e\tilde{e}})) (\tilde{f}_{\tilde{e}_2} + \delta f_{\tilde{e}_2}) \\ & + (\cos(\psi_{e\tilde{e}}) \sin(\vartheta_{e\tilde{e}}) \cos(\varphi_{e\tilde{e}}) + \sin(\psi_{e\tilde{e}}) \sin(\varphi_{e\tilde{e}})) (\tilde{f}_{\tilde{e}_3} + \delta f_{\tilde{e}_3}) + 2\omega_{ie} \delta v_{e_2} + \dot{\omega}_{ie} \delta x_{e_2} \\ & + \tilde{g}_{e_1} (\tilde{x}_{e_1} + \delta x_{e_1}, \tilde{x}_{e_2} + \delta x_{e_2}, \tilde{x}_{e_3} + \delta x_{e_3}) - \tilde{g}_{e_1} (\tilde{x}_{e_1}, \tilde{x}_{e_2}, \tilde{x}_{e_3}) + \delta g_{e_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_{e_2} = & \sin(\psi_{e\tilde{e}}) \cos(\vartheta_{e\tilde{e}}) (\tilde{f}_{\tilde{e}_1} + \delta f_{\tilde{e}_1}) + (\sin(\psi_{e\tilde{e}}) \sin(\vartheta_{e\tilde{e}}) \sin(\varphi_{e\tilde{e}}) + \cos(\psi_{e\tilde{e}}) \cos(\varphi_{e\tilde{e}})) (\tilde{f}_{\tilde{e}_2} + \delta f_{\tilde{e}_2}) - \tilde{f}_{\tilde{e}_2} \\ & + (\sin(\psi_{e\tilde{e}}) \sin(\vartheta_{e\tilde{e}}) \cos(\varphi_{e\tilde{e}}) - \cos(\psi_{e\tilde{e}}) \sin(\varphi_{e\tilde{e}})) (\tilde{f}_{\tilde{e}_3} + \delta f_{\tilde{e}_3}) - 2\omega_{ie} \delta v_{e_1} - \dot{\omega}_{ie} \delta x_{e_1} \\ & + \tilde{g}_{e_2} (\tilde{x}_{e_1} + \delta x_{e_1}, \tilde{x}_{e_2} + \delta x_{e_2}, \tilde{x}_{e_3} + \delta x_{e_3}) - \tilde{g}_{e_2} (\tilde{x}_{e_1}, \tilde{x}_{e_2}, \tilde{x}_{e_3}) + \delta g_{e_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_{e_3} = & -\sin(\vartheta_{e\tilde{e}}) (\tilde{f}_{\tilde{e}_1} + \delta f_{\tilde{e}_1}) + \cos(\vartheta_{e\tilde{e}}) \sin(\varphi_{e\tilde{e}}) (\tilde{f}_{\tilde{e}_2} + \delta f_{\tilde{e}_2}) + \cos(\vartheta_{e\tilde{e}}) \cos(\varphi_{e\tilde{e}}) (\tilde{f}_{\tilde{e}_3} + \delta f_{\tilde{e}_3}) - \tilde{f}_{\tilde{e}_3} \\ & + \tilde{g}_{e_3} (\tilde{x}_{e_1} + \delta x_{e_1}, \tilde{x}_{e_2} + \delta x_{e_2}, \tilde{x}_{e_3} + \delta x_{e_3}) - \tilde{g}_{e_3} (\tilde{x}_{e_1}, \tilde{x}_{e_2}, \tilde{x}_{e_3}) + \delta g_{e_3} \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi}_{e\tilde{e}} = \delta \omega_{ib_1}^{\tilde{e}} + \delta \omega_{ib_2}^{\tilde{e}} \sin(\varphi_{e\tilde{e}}) \tan(\vartheta_{e\tilde{e}}) + (\delta \omega_{ib_3}^{\tilde{e}} + \omega_{ie}^e) \cos(\varphi_{e\tilde{e}}) \tan(\vartheta_{e\tilde{e}})$$

$$\dot{\vartheta}_{e\tilde{e}} = \delta \omega_{ib_2}^{\tilde{e}} \cos(\varphi_{e\tilde{e}}) - (\delta \omega_{ib_3}^{\tilde{e}} + \omega_{ie}^e) \sin(\varphi_{e\tilde{e}})$$

$$\dot{\psi}_{e\tilde{e}} = \delta \omega_{ib_3}^{\tilde{e}} \frac{\sin(\varphi_{e\tilde{e}})}{\cos(\vartheta_{e\tilde{e}})} + (\delta \omega_{ib_3}^{\tilde{e}} + \omega_{ie}^e) \frac{\cos(\varphi_{e\tilde{e}})}{\cos(\vartheta_{e\tilde{e}})} - \omega_{ie}^e$$

### Legende:

#### Navigationszustandsstörungen

$$\delta \mathbf{x}_e = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3})^T$$

*Positionsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{v}_e = (\delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{e}} = (\varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}})^T$$

*Eulerwinkel vom erdfesten Näherungsbezugssystem ins erdfeste Bezugssystem*

#### IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b)^T$$

*Winkelgeschwindigkeitsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta \mathbf{f}_b = (\delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3})^T$$

*Beschleunigungsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta \mathbf{g}_e = (\delta g_{e_1} \quad \delta g_{e_2} \quad \delta g_{e_3})^T$$

*Erdschweremodellstörung im erdfesten Bezugssystem*

#### Gemessene IMU-Sensordaten

$$\tilde{\mathbf{f}}_b = (\tilde{f}_{b_1} \quad \tilde{f}_{b_2} \quad \tilde{f}_{b_3})^T$$

*Gemessene Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem*

#### Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\mathbf{x}}_e = (\tilde{x}_{e_1} \quad \tilde{x}_{e_2} \quad \tilde{x}_{e_3})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}} = (\varphi_{e\tilde{b}} \quad \vartheta_{e\tilde{b}} \quad \psi_{e\tilde{b}})^T$$

*Eulerwinkel vom körperfesten ins erdfeste Näherungsbezugssystem*

$$\mathbf{R}_{e\tilde{b}}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}})$$

*Rotationsmatrix vom körperfesten ins erdfeste Näherungsbezugssystem*

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^{\tilde{e}} = (\delta \omega_{ib_1}^{\tilde{e}}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}) \quad \delta \omega_{ib_2}^{\tilde{e}}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}) \quad \delta \omega_{ib_3}^{\tilde{e}}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}))^T = \mathbf{R}_{e\tilde{b}}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$$

*Winkelgeschwindigkeitsstörung im erdfesten Näherungsbezugssystem*

$$\delta \mathbf{f}_{\tilde{e}} = (\delta f_{\tilde{e}_1}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}) \quad \delta f_{\tilde{e}_2}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}) \quad \delta f_{\tilde{e}_3}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}))^T = \mathbf{R}_{e\tilde{b}}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}) \delta \mathbf{f}_b$$

*Beschleunigungsstörung im erdfesten Näherungsbezugssystem*

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\tilde{e}} = (\tilde{f}_{\tilde{e}_1}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{e}_2}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{e}_3}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}))^T = \mathbf{R}_{e\tilde{b}}(\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{b}}) \tilde{\mathbf{f}}_b$$

*Gemessene Beschleunigung im erdfesten Näherungsbezugssystem*

#### Erdschwereparameter

$$\tilde{\mathbf{g}}_e(\mathbf{x}_e) = (\tilde{g}_{e_1}(\mathbf{x}_e) \quad \tilde{g}_{e_2}(\mathbf{x}_e) \quad \tilde{g}_{e_3}(\mathbf{x}_e))^T$$

*Erdschweremodell im erdfesten Bezugssystem*

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

*Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\dot{\omega}}_{ie}^e)^T$$

*Ungleichförmigkeit der Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

## Linearisierte kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton in Zustandsstörungen

$$\delta \dot{z} = A \cdot \delta z + B \cdot \delta s$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3} \quad \delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3} \quad \varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}})^T$$

**Eingangsvektor in IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen:**

$$\delta s = (\delta \omega_{ib}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{e_1} \quad \delta g_{e_2} \quad \delta g_{e_3})^T$$

**Dynamikmatrix:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ G_{11} & \dot{\omega}_{ie} + G_{12} & G_{13} & 0 & 2\omega_{ie} & 0 & 0 & \tilde{f}_{e_3} & -\tilde{f}_{e_2} \\ -\dot{\omega}_{ie} + G_{21} & G_{22} & G_{23} & -2\omega_{ie} & 0 & 0 & -\tilde{f}_{e_3} & 0 & \tilde{f}_{e_1} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & 0 & 0 & 0 & \tilde{f}_{e_2} & -\tilde{f}_{e_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{ie}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{ie}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Kontrollmatrix:**

$$B = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_{\tilde{e}b}(\psi_{\tilde{e}b}) & I_{3 \times 3} \\ R_{\tilde{e}b}(\psi_{\tilde{e}b}) & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

**Legende:**

**Navigationszustandsstörungen**

$$\delta x_e = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3})^T$$

*Positionsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta v_e = (\delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{e\tilde{e}} = (\varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}})^T$$

*Eulerwinkel vom erdfesten Näherungsbezugssystem ins erdfeste Bezugssystem*

**IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen**

$$\delta \omega_{ib}^b = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b)^T$$

*Winkelgeschwindigkeitsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta f_b = (\delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3})^T$$

*Beschleunigungsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta g_e = (\delta g_{e_1} \quad \delta g_{e_2} \quad \delta g_{e_3})^T$$

*Erdschweremodellstörung im erdfesten Bezugssystem*

**Gemessene IMU-Sensordaten**

$$\tilde{f}_b = (\tilde{f}_{b_1} \quad \tilde{f}_{b_2} \quad \tilde{f}_{b_3})^T$$

*Gemessene Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem*

**Integrierte INS-Näherungsdaten**

$$\tilde{x}_e = (\tilde{x}_{e_1} \quad \tilde{x}_{e_2} \quad \tilde{x}_{e_3})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{\tilde{e}b} = (\varphi_{\tilde{e}b} \quad \vartheta_{\tilde{e}b} \quad \psi_{\tilde{e}b})^T$$

*Eulerwinkel vom körperfesten ins erdfeste Näherungsbezugssystem*

$$R_{\tilde{e}b}(\psi_{\tilde{e}b})$$

*Rotationsmatrix vom körperfesten ins erdfeste Näherungsbezugssystem*

$$\tilde{f}_{\tilde{e}} = (\tilde{f}_{\tilde{e}_1}(\psi_{\tilde{e}b}) \quad \tilde{f}_{\tilde{e}_2}(\psi_{\tilde{e}b}) \quad \tilde{f}_{\tilde{e}_3}(\psi_{\tilde{e}b}))^T = R_{\tilde{e}b}(\psi_{\tilde{e}b}) \tilde{f}_b$$

*Gemessene Beschleunigung im erdfesten Näherungsbezugssystem*

**Erdschwerereparameter**

$$G = \left. \frac{\partial \tilde{g}_e(\mathbf{x}_e)}{\partial \mathbf{x}_e^T} \right|_{\tilde{x}_e}$$

*Partielle Ableitung des Erdschweremodells im erdfesten Bezugssystem*

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \omega_{ie}^e)^T$$

*Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

*Ungleichförmigkeit der Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

## Vereinfachte kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton in Zustandsstörungen für **Navigation-Grade IMU**, **Tactical-Grade IMU** und **Rate-Grade IMU**

$$\delta \dot{z} = A \cdot \delta z + B \cdot \delta s$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3} \quad \delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3} \quad \varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}})^T$$

**Eingangsvektor in IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen:**

$$\delta s = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{e_1} \quad \delta g_{e_2} \quad \delta g_{e_3})^T$$

**Dynamikmatrix:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ G_{11} & G_{12} + \dot{\omega}_{ie} & G_{13} & 0 & 2\omega_{ie} & 0 & 0 & \tilde{f}_{e_3} & -\tilde{f}_{e_2} \\ G_{21} - \dot{\omega}_{ie} & G_{22} & G_{23} & -2\omega_{ie} & 0 & 0 & -\tilde{f}_{e_3} & 0 & \tilde{f}_{e_1} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & 0 & 0 & 0 & \tilde{f}_{e_2} & -\tilde{f}_{e_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{ie}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{ie}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Kontrollmatrix:**

$$B = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_{eb}(\psi_{eb}) & I_{3 \times 3} \\ R_{eb}(\psi_{eb}) & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

**Legende:**

**Navigationszustandsstörungen**

$$\delta x_e = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3})^T$$

*Positionsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta v_e = (\delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{e\tilde{e}} = (\varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}})^T$$

*Eulerwinkel vom erdfesten Näherungsbezugssystem ins erdfeste Bezugssystem*

**IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen**

$$\delta \omega_{ib}^b = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b)^T$$

*Winkelgeschwindigkeitsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta f_b = (\delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3})^T$$

*Beschleunigungsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta g_e = (\delta g_{e_1} \quad \delta g_{e_2} \quad \delta g_{e_3})^T$$

*Erdschweremodellstörung im erdfesten Bezugssystem*

**Gemessene IMU-Sensordaten**

$$\tilde{f}_b = (\tilde{f}_{b_1} \quad \tilde{f}_{b_2} \quad \tilde{f}_{b_3})^T$$

*Gemessene Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem*

**Integrierte INS-Näherungsdaten**

$$\tilde{x}_e = (\tilde{x}_{e_1} \quad \tilde{x}_{e_2} \quad \tilde{x}_{e_3})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{eb} = (\varphi_{eb} \quad \vartheta_{eb} \quad \psi_{eb})^T$$

*Eulerwinkel vom körperfesten ins erdfeste Näherungsbezugssystem*

$$R_{eb}(\psi_{eb})$$

*Rotationsmatrix vom körperfesten ins erdfeste Näherungsbezugssystem*

$$\tilde{f}_{\tilde{e}} = (\tilde{f}_{e_1}(\psi_{eb}) \quad \tilde{f}_{e_2}(\psi_{eb}) \quad \tilde{f}_{e_3}(\psi_{eb}))^T = R_{eb}(\psi_{eb}) \tilde{f}_b$$

*Gemessene Beschleunigung im erdfesten Näherungsbezugssystem*

**Erdschwereparameter**

$$G = \left. \frac{\partial \tilde{g}_e(x_e)}{\partial x_e^T} \right|_{\tilde{x}_e}$$

*Partielle Ableitung des Erdschweremodells im erdfesten Bezugssystem*

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

*Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

*Ungleichförmigkeit der Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

# B Bewegungsgleichungen zu Ansatz 2

## Nichtlineare kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton fehlerfrei in absoluten Zuständen

$$\dot{z} = f(z, s)$$

**Zustandsvektor in absoluten Navigationszuständen:**

$$z = (\lambda \quad \phi \quad h \quad v_{h_1} \quad v_{h_2} \quad v_{h_3} \quad q_{hb_0} \quad q_{hb_1} \quad q_{hb_2} \quad q_{hb_3})^T$$

**Eingangsvektor in absoluten IMU-Sensordaten:**

$$s = (\omega_{ib_1}^b \quad \omega_{ib_2}^b \quad \omega_{ib_3}^b \quad f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3})^T$$

**Navigationsdifferentialgleichungssystem:**

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{(N(\phi) + h) \cos(\phi)} v_{h_2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{M(\phi) + h} v_{h_1}$$

$$\dot{h} = -v_{h_3}$$

$$\dot{v}_{h_1} = (q_{hb_0}^2 + q_{hb_1}^2 - q_{hb_2}^2 - q_{hb_3}^2) f_{b_1} + 2(q_{hb_1} q_{eb_2} - q_{hb_0} q_{hb_3}) f_{b_2} + 2(q_{hb_1} q_{hb_3} + q_{hb_0} q_{hb_2}) f_{b_3} - 2\omega_{ie} v_{h_2} \sin(\phi) - \frac{v_{h_2}^2 \tan(\phi)}{N(\phi) + h} + \frac{v_{h_1} v_{h_3}}{M(\phi) + h} + g_{h_1}(\lambda, \phi, h)$$

$$\dot{v}_{h_2} = 2(q_{hb_1} q_{hb_2} + q_{hb_0} q_{hb_3}) f_{b_1} + (q_{hb_0}^2 - q_{hb_1}^2 + q_{hb_2}^2 - q_{hb_3}^2) f_{b_2} + 2(q_{hb_2} q_{hb_3} - q_{hb_0} q_{hb_1}) f_{b_3} + \frac{v_{h_1} v_{h_2} \tan(\phi)}{N(\phi) + h} + \frac{v_{h_2} v_{h_3}}{N(\phi) + h} - \dot{\omega}_{ie}^e (N(\phi) + h) \cos(\phi) + 2\omega_{ie}^e (v_{h_1} \sin(\phi) + v_{h_3} \cos(\phi)) + g_{h_2}(\lambda, \phi, h)$$

$$\dot{v}_{h_3} = 2(q_{hb_1} q_{hb_3} - q_{hb_0} q_{hb_2}) f_{b_1} + 2(q_{hb_2} q_{hb_3} + q_{hb_0} q_{hb_1}) f_{b_2} + (q_{hb_0}^2 - q_{hb_1}^2 - q_{hb_2}^2 + q_{hb_3}^2) f_{b_3} - \frac{v_{h_1}^2}{M(\phi) + h} - \frac{v_{h_2}^2}{N(\phi) + h} - 2\omega_{ie}^e v_{h_2} \cos(\phi) + g_{h_3}(\lambda, \phi, h)$$

$$\dot{q}_{hb_0} = -\frac{1}{2} \left( \omega_{ib_1}^b - \frac{v_{h_2}}{N(\phi) + h} - \omega_{ie}^e \cos(\phi) \right) q_{hb_1} - \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_2}^b + \frac{v_{h_1}}{M(\phi) + h} \right) q_{hb_2} - \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_3}^b + \frac{v_{h_2} \tan(\phi)}{N(\phi) + h} + \omega_{ie}^e \sin(\phi) \right) q_{hb_3}$$

$$\dot{q}_{hb_1} = \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_1}^b - \frac{v_{h_2}}{N(\phi) + h} - \omega_{ie}^e \cos(\phi) \right) q_{hb_0} + \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_3}^b - \frac{v_{h_2} \tan(\phi)}{N(\phi) + h} - \omega_{ie}^e \sin(\phi) \right) q_{hb_2} - \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_2}^b - \frac{v_{h_1}}{M(\phi) + h} \right) q_{hb_3}$$

$$\dot{q}_{hb_2} = \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_2}^b + \frac{v_{h_1}}{M(\phi) + h} \right) q_{hb_0} - \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_3}^b - \frac{v_{h_2} \tan(\phi)}{N(\phi) + h} - \omega_{ie}^e \sin(\phi) \right) q_{hb_1} + \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_1}^b + \frac{v_{h_2}}{N(\phi) + h} + \omega_{ie}^e \cos(\phi) \right) q_{hb_3}$$

$$\dot{q}_{hb_3} = \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_3}^b + \frac{v_{h_2} \tan(\phi)}{N(\phi) + h} + \omega_{ie}^e \sin(\phi) \right) q_{hb_0} + \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_2}^b - \frac{v_{h_1}}{M(\phi) + h} \right) q_{hb_1} - \frac{1}{2} \left( \omega_{ib_1}^b + \frac{v_{h_2}}{N(\phi) + h} + \omega_{ie}^e \cos(\phi) \right) q_{hb_2}$$

**Legende:**

absolute Navigationszustände

$$\lambda = (\lambda \quad \phi \quad h)^T$$

Position in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$v_h = (v_{h_1} \quad v_{h_2} \quad v_{h_3})^T$$

Geschwindigkeit in horizontfesten kartesischen Koordinaten

$$\tilde{q}_{hb} = (q_{hb_0} \quad q_{hb_1} \quad q_{hb_2} \quad q_{hb_3})^T$$

Rotationsquaternion vom körperfesten ins horizontfeste Bezugssystem

absolute IMU-Sensordaten

$$\omega_{ib}^b = (\omega_{ib_1}^b \quad \omega_{ib_2}^b \quad \omega_{ib_3}^b)^T$$

Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Bezugssystem

$$f_b = (f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3})^T$$

Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem

Erdschwereparameter

$$g_h(\lambda) = (g_{h_1}(\lambda) \quad g_{h_2}(\lambda) \quad g_{h_3}(\lambda))^T$$

Erdschwere im horizontfesten Bezugssystem

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \omega_{ie}^e)^T$$

Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

Ungleichförmigkeit der Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem

Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

Normalkrümmungshalbmesser

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

Meridiankrümmungshalbmesser

## Nichtlineare kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton in Zustandsstörungen

$$\delta \dot{z} = f(\tilde{z} + \delta z, \tilde{s} + \delta s) - f(\tilde{z}, \tilde{s})$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h \quad \delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3} \quad \varphi_{hh} \quad \vartheta_{hh} \quad \psi_{hh})^T$$

**Eingangsvektor in IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen:**

$$\delta s = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

**Navigationsdifferentialgleichungssystem:**

$$\delta \dot{\lambda} = \frac{\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}}{N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} \cos(\tilde{\phi} + \delta \phi) - \frac{\tilde{v}_{h_2}}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \cos(\tilde{\phi})$$

$$\delta \dot{\phi} = \frac{\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}}{M(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} - \frac{\tilde{v}_{h_1}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}}$$

$$\delta \dot{h} = -\delta v_{h_3}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_{h_1} = & \cos(\psi_{hh}) \cos(\vartheta_{hh}) (\tilde{f}_{h_1} + \delta f_{h_1}) - \tilde{f}_{h_1} + (\cos(\psi_{hh}) \sin(\vartheta_{hh}) \sin(\varphi_{hh}) - \sin(\psi_{hh}) \cos(\varphi_{hh})) (\tilde{f}_{h_2} + \delta f_{h_2}) \\ & + (\cos(\psi_{hh}) \sin(\vartheta_{hh}) \cos(\varphi_{hh}) + \sin(\psi_{hh}) \sin(\varphi_{hh})) (\tilde{f}_{h_3} + \delta f_{h_3}) - 2\omega_e (\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}) \sin(\tilde{\phi} + \delta \phi) + 2\omega_e \tilde{v}_{h_2} \sin(\tilde{\phi}) \\ & - \frac{(\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2})^2 \tan(\tilde{\phi} + \delta \phi)}{N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} + \frac{\tilde{v}_{h_2}^2 \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} + \frac{(\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1})(\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3})}{M(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} - \frac{\tilde{v}_{h_1} \tilde{v}_{h_3}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} + \tilde{g}_{h_1} (\tilde{\lambda} + \delta \lambda, \tilde{\phi} + \delta \phi, \tilde{h} + \delta h) - \tilde{g}_{h_1} (\tilde{\lambda}, \tilde{\phi}, \tilde{h}) + \delta g_{h_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_{h_2} = & \sin(\psi_{hh}) \cos(\vartheta_{hh}) (\tilde{f}_{h_1} + \delta f_{h_1}) + (\sin(\psi_{hh}) \sin(\vartheta_{hh}) \sin(\varphi_{hh}) + \cos(\psi_{hh}) \cos(\varphi_{hh})) (\tilde{f}_{h_2} + \delta f_{h_2}) - \tilde{f}_{h_2} \\ & + (\sin(\psi_{hh}) \sin(\vartheta_{hh}) \cos(\varphi_{hh}) - \cos(\psi_{hh}) \sin(\varphi_{hh})) (\tilde{f}_{h_3} + \delta f_{h_3}) + \frac{(\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1})(\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}) \tan(\tilde{\phi} + \delta \phi)}{N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} - \frac{\tilde{v}_{h_1} \tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ & + \frac{(\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2})(\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3})}{N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} - \frac{\tilde{v}_{h_2} \tilde{v}_{h_3}}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} - \dot{\omega}_{ie}^e (N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \dot{\omega}_{ie}^e (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \\ & + 2\omega_e^e ((\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}) \sin(\tilde{\phi} + \delta \phi) + (\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3}) \cos(\tilde{\phi} + \delta \phi)) - 2\omega_e^e (\tilde{v}_{h_1} \sin(\tilde{\phi}) + \tilde{v}_{h_3} \cos(\tilde{\phi})) + \tilde{g}_{h_2} (\tilde{\lambda} + \delta \lambda, \tilde{\phi} + \delta \phi, \tilde{h} + \delta h) - \tilde{g}_{h_2} (\tilde{\lambda}, \tilde{\phi}, \tilde{h}) + \delta g_{h_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_{h_3} = & -\sin(\vartheta_{hh}) (\tilde{f}_{h_1} + \delta f_{h_1}) + \cos(\vartheta_{hh}) \sin(\varphi_{hh}) (\tilde{f}_{h_2} + \delta f_{h_2}) + \cos(\vartheta_{hh}) \cos(\varphi_{hh}) (\tilde{f}_{h_3} + \delta f_{h_3}) - \tilde{f}_{h_3} - \frac{(\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1})^2}{M(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} + \frac{\tilde{v}_{h_1}^2}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ & - \frac{(\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2})^2}{N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} + \frac{\tilde{v}_{h_2}^2}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} - 2\omega_e^e (\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}) \cos(\tilde{\phi} + \delta \phi) + 2\omega_e^e \tilde{v}_{h_2} \cos(\tilde{\phi}) + \tilde{g}_{h_3} (\tilde{\lambda} + \delta \lambda, \tilde{\phi} + \delta \phi, \tilde{h} + \delta h) - \tilde{g}_{h_3} (\tilde{\lambda}, \tilde{\phi}, \tilde{h}) + \delta g_{h_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{hh} = & \left( \delta \omega_{ib_1}^b + \frac{\tilde{v}_{h_2}}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} + \omega_{ie}^e \cos(\tilde{\phi}) \right) + \left( \delta \omega_{ib_2}^b - \frac{\tilde{v}_{h_1}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \right) \sin(\varphi_{hh}) \tan(\vartheta_{hh}) + \left( \delta \omega_{ib_3}^b - \frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} - \omega_{ie}^e \sin(\tilde{\phi}) \right) \cos(\varphi_{hh}) \tan(\vartheta_{hh}) \\ & - \left( \frac{\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}}{N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} + \omega_{ie}^e \cos(\tilde{\phi} + \delta \phi) \right) \frac{\cos(\psi_{hh})}{\cos(\vartheta_{hh})} + \frac{\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}}{M(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} \frac{\sin(\psi_{hh})}{\cos(\vartheta_{hh})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_{hh} = & \left( \delta \omega_{ib_2}^b - \frac{\tilde{v}_{h_1}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \right) \cos(\varphi_{hh}) - \left( \delta \omega_{ib_3}^b - \frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} - \omega_{ie}^e \sin(\tilde{\phi}) \right) \sin(\varphi_{hh}) \\ & + \left( \frac{\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}}{N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} + \omega_{ie}^e \cos(\tilde{\phi} + \delta \phi) \right) \sin(\psi_{hh}) + \frac{\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}}{M(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} \cos(\psi_{hh}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{hh} = & \left( \delta \omega_{ib_2}^b - \frac{\tilde{v}_{h_1}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \right) \frac{\sin(\varphi_{hh})}{\cos(\vartheta_{hh})} + \left( \delta \omega_{ib_3}^b - \frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} - \omega_{ie}^e \sin(\tilde{\phi}) \right) \frac{\cos(\varphi_{hh})}{\cos(\vartheta_{hh})} - \left( \frac{\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}}{N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} + \omega_{ie}^e \cos(\tilde{\phi} + \delta \phi) \right) \cos(\psi_{hh}) \tan(\vartheta_{hh}) \\ & + \frac{\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}}{M(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} \sin(\psi_{hh}) \tan(\vartheta_{hh}) + \frac{(\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}) \tan(\tilde{\phi} + \delta \phi)}{N(\tilde{\phi} + \delta \phi) + \tilde{h} + \delta h} + \omega_{ie}^e \sin(\tilde{\phi} + \delta \phi) \end{aligned}$$

**Legende:**

## Navigationszustandsstörungen

$$\delta \lambda = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h)^T$$

*Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\delta v_h = (\delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in horizontfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

*Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem*

## IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen

$$\delta \omega_{ib}^b = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b)^T$$

*Winkelgeschwindigkeitsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta f_b = (\delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3})^T$$

*Beschleunigungsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta g_h = (\delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

*Erdschweremodellstörung im horizontfesten Bezugssystem*

## Gemessene IMU-Sensordaten

$$\tilde{f}_b = (\tilde{f}_{b_1} \quad \tilde{f}_{b_2} \quad \tilde{f}_{b_3})^T$$

*Gemessene Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem*

## Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\tilde{v}_h = (\tilde{v}_{h_1} \quad \tilde{v}_{h_2} \quad \tilde{v}_{h_3})^T$$

*Näherungsgeschwindigkeit in horizontfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

*Eulerwinkel vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem*

$$R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}})$$

*Rotationsmatrix vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem*

$$\delta \omega_{ib}^{\tilde{h}} = (\delta \omega_{ib_1}^{\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \delta \omega_{ib_2}^{\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \delta \omega_{ib_3}^{\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}))^T = R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \delta \omega_{ib}^b$$

*Winkelgeschwindigkeitsstörung im horizontfesten Näherungsbezugssystem*

$$\delta f_{\tilde{h}} = (\delta f_{\tilde{h}_1}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \delta f_{\tilde{h}_2}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \delta f_{\tilde{h}_3}(\psi_{h\tilde{h}}))^T = R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \delta f_b$$

*Beschleunigungsstörung im horizontfesten Näherungsbezugssystem*

$$\tilde{f}_{\tilde{h}} = (\tilde{f}_{\tilde{h}_1}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{h}_2}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{h}_3}(\psi_{h\tilde{h}}))^T = R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \tilde{f}_b$$

*Gemessene Beschleunigung im horizontfesten Näherungsbezugssystem*

## Erdschwereparameter

$$\tilde{g}_h(\lambda) = (\tilde{g}_{h_1}(\lambda) \quad \tilde{g}_{h_2}(\lambda) \quad \tilde{g}_{h_3}(\lambda))^T$$

*Erdschwere im horizontfesten Bezugssystem*

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \omega_{ie}^e)^T$$

*Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

*Ungleichförmigkeit der Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Meridiankrümmungshalbmesser*

## Linearisierte kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton in Zustandsstörungen

$$\delta \dot{z} = A \cdot \delta z + B \cdot \delta s$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h \quad \delta v_{\tilde{h}_1} \quad \delta v_{\tilde{h}_2} \quad \delta v_{\tilde{h}_3} \quad \varphi_{\tilde{h}_1} \quad \vartheta_{\tilde{h}_1} \quad \psi_{\tilde{h}_1})^T$$

**Eingangsvektor in IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen:**

$$\delta s = (\delta \omega_{i_{h_1}}^b \quad \delta \omega_{i_{b_2}}^b \quad \delta \omega_{i_{b_3}}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

**Dynamikmatrix:**

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_{11} \\ G_{21} \\ G_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \frac{\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi})} \left( \tan(\tilde{\phi}) - \frac{N'(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \right) \\ - \frac{M'(\tilde{\phi}) \tilde{v}_{h_1}}{(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ 0 \\ -2\omega_{ie}^e \tilde{v}_{h_2} \cos(\tilde{\phi}) + \frac{\tilde{v}_{h_2}^2 N'(\tilde{\phi}) \tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ - \frac{\tilde{v}_{h_2}^2}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos^2(\tilde{\phi})} - \frac{\tilde{v}_{h_1} \tilde{v}_{h_2} M'(\tilde{\phi})}{(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} + G_{12} \\ - \frac{\tilde{v}_{h_1} \tilde{v}_{h_2} N'(\tilde{\phi}) \tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} + \frac{\tilde{v}_{h_1} \tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos^2(\tilde{\phi})} \\ - \frac{\tilde{v}_{h_2} \tilde{v}_{h_1} N'(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} - \omega_{ie}^e N'(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\phi}) + \omega_{ie}^e (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\phi}) \\ + 2\omega_{ie}^e (\tilde{v}_{h_1} \cos(\tilde{\phi}) - \tilde{v}_{h_3} \sin(\tilde{\phi})) + G_{22} \\ \frac{\tilde{v}_{h_2}^2 M'(\tilde{\phi})}{(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} + \frac{\tilde{v}_{h_2}^2 N'(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} + 2\omega_{ie}^e \tilde{v}_{h_2} \sin(\tilde{\phi}) + G_{32} \\ \frac{\tilde{v}_{h_2} N'(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} + \omega_{ie}^e \sin(\tilde{\phi}) \\ - \frac{\tilde{v}_{h_1} M'(\tilde{\phi})}{(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ - \frac{\tilde{v}_{h_2} N'(\tilde{\phi}) \tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} + \frac{\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos^2(\tilde{\phi})} + \omega_{ie}^e \cos(\tilde{\phi}) \end{array} \begin{array}{c} - \frac{\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2 \cos(\tilde{\phi})} \\ - \frac{\tilde{v}_{h_1}}{(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ 0 \\ \frac{\tilde{v}_{h_2}^2 \tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ - \frac{\tilde{v}_{h_1} \tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ - \frac{\tilde{v}_{h_2} \tilde{v}_{h_1}}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ - \omega_{ie}^e \cos(\tilde{\phi}) + G_{23} \\ \frac{\tilde{v}_{h_2}^2}{(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ + \frac{\tilde{v}_{h_2}^2}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} + G_{33} \\ \frac{\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ - \frac{\tilde{v}_{h_1}}{(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \\ - \frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h})^2} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ 0 \\ \frac{\tilde{v}_{h_2}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ \frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ + 2\omega_{ie}^e \sin(\tilde{\phi}) \\ - \frac{2\tilde{v}_{h_1}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ 0 \\ - \frac{1}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ 0 \\ \frac{1}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ 0 \\ \frac{\tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi})} \\ 0 \\ 0 \\ -2\omega_{ie}^e \sin(\tilde{\phi}) \\ - \frac{2\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ \frac{\tilde{v}_{h_2}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ \frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ + \frac{\tilde{v}_{h_2}}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ 0 \\ - \frac{2\tilde{v}_{h_2}}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ - 2\omega_{ie}^e \cos(\tilde{\phi}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{f}_{h_3} \\ 0 \\ \tilde{f}_{h_2} \\ -\tilde{f}_{h_3} \\ 0 \\ \tilde{f}_{h_1} \\ \tilde{f}_{h_2} \\ -\tilde{f}_{h_1} \\ 0 \\ -\frac{\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ -\omega_{ie}^e \sin(\tilde{\phi}) \\ 0 \\ \frac{\tilde{v}_{h_2}}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ + \omega_{ie}^e \sin(\tilde{\phi}) \\ -\frac{\tilde{v}_{h_1}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \\ -\omega_{ie}^e \cos(\tilde{\phi}) \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\tilde{f}_{h_2} \\ 0 \\ -\tilde{f}_{h_1} \\ 0 \\ \tilde{f}_{h_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

**Kontrollmatrix:**

$$B = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times 3} & R_{hb}(\psi_{hb}) & I_{3 \times 3} \\ \hline R_{hb}(\psi_{hb}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{array} \end{pmatrix}$$

**Legende:****Navigationszustandsstörungen**

$$\delta \lambda = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h)^T$$

*Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\delta v_h = (\delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in horizontfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

*Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem*

**IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen**

$$\delta \omega_{ib}^b = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b)^T$$

*Winkelgeschwindigkeitsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta f_b = (\delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3})^T$$

*Beschleunigungsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta g_h = (\delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

*Erdschweremodellstörung im horizontfesten Bezugssystem*

**Gemessene IMU-Sensordaten**

$$\tilde{f}_b = (\tilde{f}_{b_1} \quad \tilde{f}_{b_2} \quad \tilde{f}_{b_3})^T$$

*Gemessene Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem*

**Integrierte INS-Näherungsdaten**

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\tilde{v}_h = (\tilde{v}_{h_1} \quad \tilde{v}_{h_2} \quad \tilde{v}_{h_3})^T$$

*Näherungsgeschwindigkeit in horizontfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

*Eulerwinkel vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem*

$$R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}})$$

*Rotationsmatrix vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem*

$$\tilde{f}_{\tilde{h}} = (\tilde{f}_{\tilde{h}_1}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{h}_2}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{h}_3}(\psi_{h\tilde{h}}))^T = R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \tilde{f}_b$$

*Gemessene Beschleunigung im horizontfesten Näherungsbezugssystem*

**Erdschwereparameter**

$$G = \left. \frac{\partial \tilde{g}_h(\lambda)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}}$$

*Partielle Ableitung des Erdschweremodells im horizontfesten Bezugssystem*

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \omega_{ie}^e)^T$$

*Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

*Ungleichförmigkeit der Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

**Ellipsoidparameter**

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Meridiankrümmungshalbmesser*

$$N'(\phi) = \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} = ae^2 \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Erste partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers*

$$M'(\phi) = \frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} = 3ae^2(1 - e^2) \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2}$$

*Erste partielle Ableitung des Meridiankrümmungshalbmessers*

**Vereinfachte kinematische Bewegungsgleichungen  
nach Sir Isaac Newton in Zustandsstörungen  
für Navigation-Grade IMU, Tactical-Grade IMU und Rate-Grade IMU**

$$\delta \dot{z} = A \cdot \delta z + B \cdot \delta s$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h \quad \delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3} \quad \varphi_{h\dot{h}} \quad \vartheta_{h\dot{h}} \quad \psi_{h\dot{h}})^T$$

**Eingangsvektor in IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen:**

$$\delta s = (\delta \omega_{h_1}^b \quad \delta \omega_{h_2}^b \quad \delta \omega_{h_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

**Dynamikmatrix:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})\cos(\tilde{\phi})} \left( \tan(\tilde{\phi}) - \frac{N'(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} \right) & -\frac{\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2 \cos(\tilde{\phi})} & 0 & \frac{1}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})\cos(\tilde{\phi})} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M'(\tilde{\phi})\tilde{v}_{h_1}}{(M(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & -\frac{\tilde{v}_{h_1}}{(M(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & \frac{1}{M(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ G_{11} & \frac{-2\alpha_{ie}^b \tilde{v}_{h_2} \cos(\tilde{\phi}) + \tilde{v}_{h_2}^2 N'(\tilde{\phi}) \tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2 \cos^2(\tilde{\phi})} + G_{12} & \frac{\tilde{v}_{h_2}^2 \tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{M(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & -\frac{2\tilde{v}_{h_2} \tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & \frac{\tilde{v}_{h_1}}{M(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & 0 & \tilde{f}_{h_3} & -\tilde{f}_{h_2} \\ & -\frac{\tilde{v}_{h_2}^2}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})\cos^2(\tilde{\phi})} - \frac{\tilde{v}_{h_1}\tilde{v}_{h_2}M'(\tilde{\phi})}{(M(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} + G_{13} & -\frac{\tilde{v}_{h_1}\tilde{v}_{h_2}}{(M(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} + G_{13} & & -2\alpha_{ie}^b \sin(\tilde{\phi}) & & & & \\ G_{21} & \frac{-\tilde{v}_{h_1}\tilde{v}_{h_2}N'(\tilde{\phi})\tan(\tilde{\phi}) + \tilde{v}_{h_1}\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2 \cos^2(\tilde{\phi})} + \frac{\tilde{v}_{h_1}\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})\cos^2(\tilde{\phi})} & \frac{-\tilde{v}_{h_1}\tilde{v}_{h_2}\tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & \frac{\tilde{v}_{h_2}\tan(\tilde{\phi})}{M(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & \frac{\tilde{v}_{h_1}\tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & & -\tilde{f}_{h_3} & \tilde{f}_{h_1} \\ & \frac{-\tilde{v}_{h_2}\tilde{v}_{h_1}N'(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} - \alpha_{ie}^b N'(\tilde{\phi})\cos(\tilde{\phi}) + \alpha_{ie}^b (N(\tilde{\phi})+\tilde{h})\sin(\tilde{\phi}) & -\frac{\tilde{v}_{h_1}\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & +2\alpha_{ie}^b \sin(\tilde{\phi}) & +\frac{\tilde{v}_{h_1}}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & +2\alpha_{ie}^b \cos(\tilde{\phi}) & & & \\ & +2\alpha_{ie}^b (\tilde{v}_{h_1}\cos(\tilde{\phi}) - \tilde{v}_{h_2}\sin(\tilde{\phi})) + G_{22} & -\alpha_{ie}^b \cos(\tilde{\phi}) + G_{23} & & & & & & \\ G_{31} & \frac{\tilde{v}_{h_2}^2 M'(\tilde{\phi})}{(M(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} + \frac{\tilde{v}_{h_2}^2 N'(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} + 2\alpha_{ie}^b \tilde{v}_{h_2} \sin(\tilde{\phi}) + G_{32} & \frac{\tilde{v}_{h_2}^2}{(M(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & -\frac{2\tilde{v}_{h_2}}{M(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & -\frac{2\tilde{v}_{h_2}}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & 0 & & \tilde{f}_{h_2} & -\tilde{f}_{h_1} \\ & & +\frac{\tilde{v}_{h_2}^2}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} + G_{33} & & -2\alpha_{ie}^b \cos(\tilde{\phi}) & & & & \\ 0 & \frac{\tilde{v}_{h_2}N'(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} + \alpha_{ie}^b \sin(\tilde{\phi}) & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & 0 & -\frac{1}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & 0 & & \frac{\tilde{v}_{h_2}\tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & \frac{\tilde{v}_{h_1}}{M(\tilde{\phi})+\tilde{h}} \\ & & & & & & & -\alpha_{ie}^b \sin(\tilde{\phi}) & \\ 0 & -\frac{\tilde{v}_{h_1}M'(\tilde{\phi})}{(M(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & -\frac{\tilde{v}_{h_1}}{(M(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & \frac{1}{M(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & 0 & 0 & & \frac{\tilde{v}_{h_2}\tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & \frac{\tilde{v}_{h_2}}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} \\ & & & & & & & +\alpha_{ie}^b \sin(\tilde{\phi}) & +\alpha_{ie}^b \cos(\tilde{\phi}) \\ 0 & \frac{\tilde{v}_{h_2}N'(\tilde{\phi})\tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} + \frac{\tilde{v}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})\cos^2(\tilde{\phi})} + \alpha_{ie}^b \cos(\tilde{\phi}) & -\frac{\tilde{v}_{h_2}\tan(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi})+\tilde{h})^2} & 0 & \frac{\tan(\tilde{\phi})}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & 0 & & -\frac{\tilde{v}_{h_2}}{M(\tilde{\phi})+\tilde{h}} & -\frac{\tilde{v}_{h_2}}{N(\tilde{\phi})+\tilde{h}} \\ & & & & & & & -\alpha_{ie}^b \cos(\tilde{\phi}) & 0 \end{pmatrix}$$

**Kontrollmatrix:**

$$B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & R_{hb}(\psi_{hb}) & I \\ 3 \times 3 & & 3 \times 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_{hb}(\psi_{hb}) & 0 & 0 \\ & 3 \times 3 & 3 \times 3 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

**Legende:**

## Navigationszustandsstörungen

$$\delta \lambda = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h)^T$$

Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\delta v_h = (\delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3})^T$$

Geschwindigkeitsstörung in horizontfesten kartesischen Koordinaten

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem

## IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen

$$\delta \omega_{ib}^b = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b)^T$$

Winkelgeschwindigkeitsstörung im körperfesten Bezugssystem

$$\delta f_b = (\delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3})^T$$

Beschleunigungsstörung im körperfesten Bezugssystem

$$\delta g_h = (\delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

Erdschweremodellstörung im horizontfesten Bezugssystem

## Gemessene IMU-Sensordaten

$$\tilde{f}_b = (\tilde{f}_{b_1} \quad \tilde{f}_{b_2} \quad \tilde{f}_{b_3})^T$$

Gemessene Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem

## Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\tilde{v}_h = (\tilde{v}_{h_1} \quad \tilde{v}_{h_2} \quad \tilde{v}_{h_3})^T$$

Näherungsgeschwindigkeit in horizontfesten kartesischen Koordinaten

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

Eulerwinkel vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem

$$R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}})$$

Rotationsmatrix vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem

$$\tilde{f}_{\tilde{h}} = (\tilde{f}_{\tilde{h}_1}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{h}_2}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{h}_3}(\psi_{h\tilde{h}}))^T = R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \tilde{f}_b$$

Gemessene Beschleunigung im horizontfesten Näherungsbezugssystem

## Erdschwereparameter

$$G = \left. \frac{\partial \tilde{g}_h(\lambda)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}}$$

Partielle Ableitung des Erdschweremodells im horizontfesten Bezugssystem

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \omega_{ie}^e)^T$$

Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

Ungleichförmigkeit der Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

Normalkrümmungshalbmesser

$$N(\phi) = R(\phi) = \sqrt{N(\phi) \cdot M(\phi)}$$

$$N(\phi) + h = \sqrt[3]{a^2 b}$$

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

Meridiankrümmungshalbmesser

$$M(\phi) = R(\phi) = \sqrt{N(\phi) \cdot M(\phi)}$$

$$M(\phi) + h = \sqrt[3]{a^2 b}$$

$$N'(\phi) = \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} = ae^2 \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

Erste partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers

$$N'(\phi) = 0$$

$$M'(\phi) = \frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} = 3ae^2(1 - e^2) \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2}$$

Erste partielle Ableitung des Meridiankrümmungshalbmessers

$$M'(\phi) = 0$$

# C Bewegungsgleichungen zu Ansatz 3

## Nichtlineare kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton fehlerfrei in absoluten Zuständen

$$\dot{z} = f(z, s)$$

**Zustandsvektor in absoluten Navigationszuständen:**

$$z = (\lambda \quad \phi \quad h \quad \dot{\lambda} \quad \dot{\phi} \quad \dot{h} \quad q_{nb_0} \quad q_{nb_1} \quad q_{nb_2} \quad q_{nb_3})^T$$

**Eingangsvektor in absoluten IMU-Sensordaten:**

$$s = (\omega_{ib_1}^b \quad \omega_{ib_2}^b \quad \omega_{ib_3}^b \quad f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3})^T$$

**Navigationsdifferentialgleichungssystem:**

$$\frac{d}{dt} \lambda = \dot{\lambda}$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt} h = \dot{h}$$

$$\frac{d}{dt} \dot{\lambda} = -\frac{(N'(\phi)\dot{\phi} + \dot{h})\cos(\phi) - (N(\phi) + h)\sin(\phi)\dot{\phi}}{(N(\phi) + h)\cos(\phi)} \dot{\lambda} + \frac{2(q_{nb_1}q_{nb_2} + q_{nb_0}q_{nb_3})f_{b_1}}{(N(\phi) + h)\cos(\phi)} + \frac{(q_{nb_0}^2 - q_{nb_1}^2 + q_{nb_2}^2 - q_{nb_3}^2)f_{b_2}}{(N(\phi) + h)\cos(\phi)} + \frac{2(q_{nb_2}q_{nb_3} - q_{nb_0}q_{nb_1})f_{b_3}}{(N(\phi) + h)\cos(\phi)}$$

$$+ \frac{M(\phi) + h}{N(\phi) + h} \dot{\phi} (\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \tan(\phi) - \frac{(\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e)\dot{h}}{N(\phi) + h} - \dot{\omega}_{ie}^e + \frac{g_{n_3}(\lambda, \phi, h)}{(N(\phi) + h)\cos(\phi)}$$

$$\frac{d}{dt} \dot{\phi} = -\frac{M'(\phi)\dot{\phi} + \dot{h}}{M(\phi) + h} \dot{\phi} + \frac{(q_{nb_0}^2 + q_{nb_1}^2 - q_{nb_2}^2 - q_{nb_3}^2)f_{b_1}}{M(\phi) + h} + \frac{2(q_{nb_1}q_{nb_2} - q_{nb_0}q_{nb_3})f_{b_2}}{M(\phi) + h} + \frac{2(q_{nb_1}q_{nb_3} + q_{nb_0}q_{nb_2})f_{b_3}}{M(\phi) + h}$$

$$- \frac{\dot{\phi}\dot{h}}{M(\phi) + h} - \frac{(N(\phi) + h)\cos(\phi)}{M(\phi) + h} \dot{\lambda} (\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \sin(\phi) + \frac{g_{n_3}(\lambda, \phi, h)}{M(\phi) + h}$$

$$\frac{d}{dt} \dot{h} = -2(q_{nb_1}q_{nb_3} - q_{nb_0}q_{nb_2})f_{b_1} - 2(q_{nb_2}q_{nb_3} + q_{nb_0}q_{nb_1})f_{b_2} - (q_{nb_0}^2 - q_{nb_1}^2 - q_{nb_2}^2 + q_{nb_3}^2)f_{b_3}$$

$$+ (N(\phi) + h)\dot{\lambda} (\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \cos^2(\phi) + (M(\phi) + h)\dot{\phi}^2 - g_{n_3}(\lambda, \phi, h)$$

$$\dot{q}_{nb_0} = -\frac{1}{2}(\omega_{ib_1}^b - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)\cos(\phi))q_{nb_1} - \frac{1}{2}(\omega_{ib_2}^b + \dot{\phi})q_{nb_2} - \frac{1}{2}(\omega_{ib_3}^b + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)\sin(\phi))q_{nb_3}$$

$$\dot{q}_{nb_1} = \frac{1}{2}(\omega_{ib_1}^b - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)\cos(\phi))q_{nb_0} + \frac{1}{2}(\omega_{ib_3}^b - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)\sin(\phi))q_{nb_2} - \frac{1}{2}(\omega_{ib_2}^b - \dot{\phi})q_{nb_3}$$

$$\dot{q}_{nb_2} = \frac{1}{2}(\omega_{ib_2}^b + \dot{\phi})q_{nb_0} - \frac{1}{2}(\omega_{ib_3}^b - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)\sin(\phi))q_{nb_1} + \frac{1}{2}(\omega_{ib_1}^b + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)\cos(\phi))q_{nb_3}$$

$$\dot{q}_{nb_3} = \frac{1}{2}(\omega_{ib_3}^b + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)\sin(\phi))q_{nb_0} + \frac{1}{2}(\omega_{ib_2}^b - \dot{\phi})q_{nb_1} - \frac{1}{2}(\omega_{ib_1}^b + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e)\cos(\phi))q_{nb_2}$$

**Legende:**

absolute Navigationszustände

$$\lambda = (\lambda \quad \phi \quad h)^T$$

*Position in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\dot{\lambda} = (\dot{\lambda} \quad \dot{\phi} \quad \dot{h})^T$$

*Geschwindigkeit in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\tilde{q}_{hb} = (q_{hb_0} \quad q_{hb_1} \quad q_{hb_2} \quad q_{hb_3})^T$$

*Rotationsquaternion vom körperfesten ins horizontfeste Bezugssystem*

absolute IMU-Sensordaten

$$\omega_{ib}^b = (\omega_{ib_1}^b \quad \omega_{ib_2}^b \quad \omega_{ib_3}^b)^T$$

*Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Bezugssystem*

$$f_b = (f_{b_1} \quad f_{b_2} \quad f_{b_3})^T$$

*Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem*

Erdschwereparameter

$$g_h(\lambda) = (g_{h_1}(\lambda) \quad g_{h_2}(\lambda) \quad g_{h_3}(\lambda))^T$$

*Erdschwere im horizontfesten Bezugssystem*

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \omega_{ie}^e)^T$$

*Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

$$\dot{\omega}_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \dot{\omega}_{ie}^e)^T$$

*Ungleichförmigkeit der Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Meridiankrümmungshalbmesser*

$$N'(\phi) = \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} = ae^2 \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Erste partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers*

$$M'(\phi) = \frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} = 3ae^2(1 - e^2) \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2}$$

*Erste partielle Ableitung des Meridiankrümmungshalbmessers*

## Nichtlineare kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton in Zustandsstörungen

$$\delta \ddot{z} = f(\ddot{z} + \delta \ddot{z}, \ddot{s} + \delta \ddot{s}) - f(\ddot{z}, \ddot{s})$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h \quad \delta \dot{\lambda} \quad \delta \dot{\phi} \quad \delta \dot{h} \quad \varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

**Eingangsvektor in IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen:**

$$\delta s = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

**Navigationsdifferentialgleichungssystem:**

$$\frac{d}{dt} \delta \lambda = \delta \dot{\lambda}$$

$$\frac{d}{dt} \delta \phi = \delta \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt} \delta h = \delta \dot{h}$$

$$\frac{d}{dt} \delta \lambda = - \frac{N'(\tilde{\phi} + \delta\phi)(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h}{(N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi)} (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda}) + \frac{(N'(\tilde{\phi})\tilde{\phi} + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\phi})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi})} \dot{\lambda}$$

$$+ \frac{\sin(\psi_{h\tilde{h}}) \cos(\vartheta_{h\tilde{h}}) (\tilde{f}_{h_1} + \delta f_{h_1})}{(N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi)} + \frac{(\sin(\psi_{h\tilde{h}}) \sin(\vartheta_{h\tilde{h}}) \sin(\varphi_{h\tilde{h}}) + \cos(\psi_{h\tilde{h}}) \cos(\varphi_{h\tilde{h}})) (\tilde{f}_{h_2} + \delta f_{h_2})}{(N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi)} - \frac{\tilde{f}_{h_2}}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi})}$$

$$+ \frac{(\sin(\psi_{h\tilde{h}}) \sin(\vartheta_{h\tilde{h}}) \cos(\varphi_{h\tilde{h}}) - \cos(\psi_{h\tilde{h}}) \sin(\varphi_{h\tilde{h}})) (\tilde{f}_{h_3} + \delta f_{h_3})}{(N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi)}$$

$$+ \frac{M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h}{N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h} (\dot{\phi} + \delta \dot{\phi}) (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \tan(\tilde{\phi} + \delta\phi) - \frac{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \dot{\phi} (\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \tan(\tilde{\phi}) - \frac{(\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e)(\tilde{h} + \delta h)}{N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h} + \frac{(\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e)\tilde{h}}{N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}}$$

$$+ \frac{\tilde{g}_{h_2}(\tilde{\lambda} + \delta \lambda, \tilde{\phi} + \delta\phi, \tilde{h} + \delta h)}{(N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi)} - \frac{\tilde{g}_{h_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{\phi}, \tilde{h})}{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi})} + \frac{\delta g_{h_2}}{(N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi)}$$

$$\frac{d}{dt} \delta \phi = - \frac{M'(\tilde{\phi} + \delta\phi)(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h}{M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h} (\dot{\phi} + \delta \dot{\phi}) + \frac{M'(\tilde{\phi})\tilde{\phi} + \tilde{h}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \dot{\phi}$$

$$+ \frac{\cos(\psi_{h\tilde{h}}) \cos(\vartheta_{h\tilde{h}}) (\tilde{f}_{h_1} + \delta f_{h_1})}{M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h} - \frac{\tilde{f}_{h_1}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} + \frac{(\cos(\psi_{h\tilde{h}}) \sin(\vartheta_{h\tilde{h}}) \sin(\varphi_{h\tilde{h}}) - \sin(\psi_{h\tilde{h}}) \cos(\varphi_{h\tilde{h}})) (\tilde{f}_{h_2} + \delta f_{h_2})}{M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h}$$

$$+ \frac{(\cos(\psi_{h\tilde{h}}) \sin(\vartheta_{h\tilde{h}}) \cos(\varphi_{h\tilde{h}}) + \sin(\psi_{h\tilde{h}}) \sin(\varphi_{h\tilde{h}})) (\tilde{f}_{h_3} + \delta f_{h_3})}{M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h} - \frac{(\dot{\phi} + \delta \dot{\phi})(\tilde{h} + \delta h)}{M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h} + \frac{\dot{\phi}\tilde{h}}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}}$$

$$- \frac{(N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi)}{M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h} (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda}) (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \frac{(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi})}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} \dot{\lambda} (\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \sin(\tilde{\phi})$$

$$+ \frac{\tilde{g}_{h_1}(\tilde{\lambda} + \delta \lambda, \tilde{\phi} + \delta\phi, \tilde{h} + \delta h)}{M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h} - \frac{\tilde{g}_{h_1}(\tilde{\lambda}, \tilde{\phi}, \tilde{h})}{M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}} + \frac{\delta g_{h_1}}{M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h}$$

$$\frac{d}{dt} \delta h = \sin(\vartheta_{h\tilde{h}}) (\tilde{f}_{h_1} + \delta f_{h_1}) - \cos(\vartheta_{h\tilde{h}}) \sin(\varphi_{h\tilde{h}}) (\tilde{f}_{h_2} + \delta f_{h_2}) - \cos(\vartheta_{h\tilde{h}}) \cos(\varphi_{h\tilde{h}}) (\tilde{f}_{h_3} + \delta f_{h_3}) + \tilde{f}_{h_3}$$

$$+ (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda}) (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \cos^2(\tilde{\phi} + \delta\phi) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \dot{\lambda} (\dot{\lambda} + 2\omega_{ie}^e) \cos^2(\tilde{\phi})$$

$$+ (M(\tilde{\phi}) + \tilde{h} + \delta h) (\dot{\phi} + \delta \dot{\phi})^2 - (M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \dot{\phi}^2 - \tilde{g}_{h_3}(\tilde{\lambda} + \delta \lambda, \tilde{\phi} + \delta\phi, \tilde{h} + \delta h) + \tilde{g}_{h_3}(\tilde{\lambda}, \tilde{\phi}, \tilde{h}) - \delta g_{h_3}$$

$$\dot{\varphi}_{h\tilde{h}} = (\delta \omega_{ib_1}^b + (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \cos(\tilde{\phi})) + (\delta \omega_{ib_2}^b - \dot{\phi}) \sin(\varphi_{h\tilde{h}}) \tan(\vartheta_{h\tilde{h}}) + (\delta \omega_{ib_3}^b - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(\tilde{\phi})) \cos(\varphi_{h\tilde{h}}) \tan(\vartheta_{h\tilde{h}})$$

$$- (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \frac{\cos(\psi_{h\tilde{h}})}{\cos(\vartheta_{h\tilde{h}})} + (\dot{\phi} + \delta \dot{\phi}) \frac{\sin(\psi_{h\tilde{h}})}{\cos(\vartheta_{h\tilde{h}})}$$

$$\dot{\vartheta}_{h\tilde{h}} = (\delta \omega_{ib_2}^b - \dot{\phi}) \cos(\varphi_{h\tilde{h}}) - (\delta \omega_{ib_3}^b - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(\tilde{\phi})) \sin(\varphi_{h\tilde{h}}) + (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\psi_{h\tilde{h}}) + (\dot{\phi} + \delta \dot{\phi}) \cos(\psi_{h\tilde{h}})$$

$$\dot{\psi}_{h\tilde{h}} = (\delta \omega_{ib_2}^b - \dot{\phi}) \frac{\sin(\varphi_{h\tilde{h}})}{\cos(\vartheta_{h\tilde{h}})} + (\delta \omega_{ib_3}^b - (\dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(\tilde{\phi})) \frac{\cos(\varphi_{h\tilde{h}})}{\cos(\vartheta_{h\tilde{h}})}$$

$$- (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\psi_{h\tilde{h}}) \tan(\vartheta_{h\tilde{h}}) + (\dot{\phi} + \delta \dot{\phi}) \sin(\psi_{h\tilde{h}}) \tan(\vartheta_{h\tilde{h}}) + (\dot{\lambda} + \delta \dot{\lambda} + \omega_{ie}^e) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi)$$

**Legende:**

## Navigationszustandsstörungen

$$\delta\lambda = (\delta\lambda \quad \delta\phi \quad \delta h)^T$$

*Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\delta\dot{\lambda} = (\delta\dot{\lambda} \quad \delta\dot{\phi} \quad \delta\dot{h})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\psi_{h\bar{h}} = (\varphi_{h\bar{h}} \quad \vartheta_{h\bar{h}} \quad \psi_{h\bar{h}})^T$$

*Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem*

## IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen

$$\delta\omega_{ib}^b = (\delta\omega_{ib_1}^b \quad \delta\omega_{ib_2}^b \quad \delta\omega_{ib_3}^b)^T$$

*Winkelgeschwindigkeitsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta f_b = (\delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3})^T$$

*Beschleunigungsstörung im körperfesten Bezugssystem*

$$\delta g_h = (\delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

*Erdschweremodellstörung im horizontfesten Bezugssystem*

## Gemessene IMU-Sensordaten

$$\tilde{f}_b = (\tilde{f}_{b_1} \quad \tilde{f}_{b_2} \quad \tilde{f}_{b_3})^T$$

*Gemessene Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem*

## Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\dot{\tilde{\lambda}} = (\dot{\tilde{\lambda}} \quad \dot{\tilde{\phi}} \quad \dot{\tilde{h}})^T$$

*Näherungsgeschwindigkeit in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\psi_{h\bar{b}} = (\varphi_{h\bar{b}} \quad \vartheta_{h\bar{b}} \quad \psi_{h\bar{b}})^T$$

*Eulerwinkel vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem*

$$R_{h\bar{b}}(\psi_{h\bar{b}})$$

*Rotationsmatrix vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem*

$$\delta\omega_{ib}^{\bar{h}} = (\delta\omega_{ib_1}^{\bar{h}}(\psi_{h\bar{b}}) \quad \delta\omega_{ib_2}^{\bar{h}}(\psi_{h\bar{b}}) \quad \delta\omega_{ib_3}^{\bar{h}}(\psi_{h\bar{b}}))^T = R_{h\bar{b}}(\psi_{h\bar{b}}) \delta\omega_{ib}^b$$

*Winkelgeschwindigkeitsstörung im horizontfesten Näherungsbezugssystem*

$$\delta f_{\bar{h}} = (\delta f_{\bar{h}_1}(\psi_{h\bar{b}}) \quad \delta f_{\bar{h}_2}(\psi_{h\bar{b}}) \quad \delta f_{\bar{h}_3}(\psi_{h\bar{b}}))^T = R_{h\bar{b}}(\psi_{h\bar{b}}) \delta f_b$$

*Beschleunigungsstörung im horizontfesten Näherungsbezugssystem*

$$\tilde{f}_{\bar{h}} = (\tilde{f}_{\bar{h}_1}(\psi_{h\bar{b}}) \quad \tilde{f}_{\bar{h}_2}(\psi_{h\bar{b}}) \quad \tilde{f}_{\bar{h}_3}(\psi_{h\bar{b}}))^T = R_{h\bar{b}}(\psi_{h\bar{b}}) \tilde{f}_b$$

*Gemessene Beschleunigung im horizontfesten Näherungsbezugssystem*

## Erdschwereparameter

$$G = \left. \frac{\partial \tilde{g}_h(\lambda)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}}$$

*Partielle Ableitung des Erdschweremodells im horizontfesten Bezugssystem*

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \omega_{ie}^e)^T$$

*Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem*

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Meridiankrümmungshalbmesser*

$$N'(\phi) = \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} = ae^2 \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Erste partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers*

$$M'(\phi) = \frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} = 3ae^2(1 - e^2) \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2}$$

*Erste partielle Ableitung des Meridiankrümmungshalbmessers*

## Linearisierte kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton in Zustandsstörungen

$$\delta \dot{z} = A \cdot \delta z + B \cdot \delta s$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h \quad \delta \dot{\lambda} \quad \delta \dot{\phi} \quad \delta \dot{h} \quad \varphi_{h\dot{h}} \quad \psi_{h\dot{h}})^T$$

**Eingangsvektor in IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen:**

$$\delta s = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

**Dynamikmatrix:**

0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$G_{11}$	$\frac{N'(\hat{\phi})(N'(\hat{\phi})\hat{\phi}+\hat{h})\dot{\lambda}}{(N(\hat{\phi})+\hat{h})^2} - \frac{N'(\hat{\phi})\dot{\phi}\dot{\lambda}}{N(\hat{\phi})+\hat{h}} + \frac{\dot{\phi}\dot{\lambda}}{\cos^2(\hat{\phi})}$ $\frac{N'(\hat{\phi})\dot{f}_{h_1}}{(N(\hat{\phi})+\hat{h})^2 \cos(\hat{\phi})} + \frac{\dot{f}_{h_1}}{(N(\hat{\phi})+\hat{h}) \cos^2(\hat{\phi})}$ $-\frac{N'(\hat{\phi})(M(\hat{\phi})+\hat{h})}{(N(\hat{\phi})+\hat{h})^2} \dot{\phi}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \tan(\hat{\phi})$ $+\frac{M'(\hat{\phi})}{N(\hat{\phi})+\hat{h}} \dot{\phi}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \tan(\hat{\phi})$ $+\frac{M(\hat{\phi})+\hat{h}}{(N(\hat{\phi})+\hat{h}) \cos^2(\hat{\phi})} \dot{\phi}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e)$ $+\frac{N'(\hat{\phi})\dot{h}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e)}{(N(\hat{\phi})+\hat{h})^2} + G_{12}$	$\frac{(N'(\hat{\phi})\hat{\phi}+\hat{h})\dot{\lambda}}{(N(\hat{\phi})+\hat{h})^2}$ $-\frac{\dot{f}_{h_2}}{(N(\hat{\phi})+\hat{h})^2 \cos(\hat{\phi})}$ $-\frac{M(\hat{\phi})+\hat{h}}{(N(\hat{\phi})+\hat{h})^2} \dot{\phi}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \tan(\hat{\phi})$ $+\frac{\dot{\phi}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \tan(\hat{\phi})}{N(\hat{\phi})+\hat{h}}$ $+\frac{\dot{h}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e)}{(N(\hat{\phi})+\hat{h})^2} + G_{13}$	$-\frac{N'(\hat{\phi})\hat{\phi}+\hat{h}}{N(\hat{\phi})+\hat{h}} + \dot{\phi} \tan(\hat{\phi})$ $+\frac{M(\hat{\phi})+\hat{h}}{N(\hat{\phi})+\hat{h}} \dot{\phi} \tan(\hat{\phi})$ $-\frac{\dot{h}}{N(\hat{\phi})+\hat{h}}$	$-\frac{N'(\hat{\phi})\dot{\lambda}}{N(\hat{\phi})+\hat{h}} + \dot{\lambda} \tan(\hat{\phi})$ $+\frac{M(\hat{\phi})+\hat{h}}{N(\hat{\phi})+\hat{h}} (\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \tan(\hat{\phi})$	$-\frac{2\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e}{N(\hat{\phi})+\hat{h}}$ $-\frac{\dot{f}_{h_3}}{(N(\hat{\phi})+\hat{h}) \cos(\hat{\phi})}$	0	$\frac{\dot{f}_{h_1}}{(N(\hat{\phi})+\hat{h}) \cos(\hat{\phi})}$		
$A =$	$\frac{M'(\hat{\phi})(N(\hat{\phi})+\hat{h})\dot{\lambda}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \sin(\hat{\phi}) \cos(\hat{\phi})}{(M(\hat{\phi})+\hat{h})^2}$ $+\frac{M^2(\hat{\phi})\dot{\phi}^2}{(M(\hat{\phi})+\hat{h})^2} + \frac{2M'(\hat{\phi})\dot{\phi}\dot{h}}{(M(\hat{\phi})+\hat{h})^2}$ $+\frac{\dot{f}_{h_1}M'(\hat{\phi})}{(M(\hat{\phi})+\hat{h})^2} - \frac{M'(\hat{\phi})\dot{\phi}^2}{M(\hat{\phi})+\hat{h}}$ $-\frac{N'(\hat{\phi})\dot{\lambda}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \sin(\hat{\phi}) \cos(\hat{\phi})}{M(\hat{\phi})+\hat{h}}$ $-\frac{(N(\hat{\phi})+\hat{h})\dot{\lambda}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \cos(2\hat{\phi})}{M(\hat{\phi})+\hat{h}} + G_{22}$	$\frac{(N(\hat{\phi})+\hat{h})\dot{\lambda}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \sin(\hat{\phi}) \cos(\hat{\phi})}{(M(\hat{\phi})+\hat{h})^2}$ $+\frac{M'(\hat{\phi})\dot{\phi}^2}{(M(\hat{\phi})+\hat{h})^2} + \frac{2\dot{\phi}\dot{h}}{(M(\hat{\phi})+\hat{h})^2}$ $-\frac{\dot{f}_{h_2}}{(M(\hat{\phi})+\hat{h})^2}$ $-\frac{\dot{\lambda}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \sin(\hat{\phi}) \cos(\hat{\phi})}{M(\hat{\phi})+\hat{h}} + G_{23}$	$-\frac{N(\hat{\phi})+\hat{h}}{M(\hat{\phi})+\hat{h}} (\dot{\lambda}+\omega_{fe}^e) \sin(2\hat{\phi})$	$-\frac{2M'(\hat{\phi})\dot{\phi}+2\dot{h}}{M(\hat{\phi})+\hat{h}}$	$-\frac{2\dot{\phi}}{M(\hat{\phi})+\hat{h}}$	0	$\frac{\dot{f}_{h_3}}{M(\hat{\phi})+\hat{h}}$	$-\frac{\dot{f}_{h_1}}{M(\hat{\phi})+\hat{h}}$	
$G_{31}$	$N'(\hat{\phi})\dot{\lambda}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \cos^2(\hat{\phi})$ $-(N(\hat{\phi})+\hat{h})\dot{\lambda}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \sin(2\hat{\phi})$ $+M'(\hat{\phi})\dot{\phi}^2 + G_{32}$	$\dot{\lambda}(\dot{\lambda}+2\omega_{fe}^e) \cos^2(\hat{\phi}) + \dot{\phi}^2 + G_{33}$	$2(\dot{\lambda}+\omega_{fe}^e)(N(\hat{\phi})+\hat{h}) \cos^2(\hat{\phi})$	$2\dot{\phi}(M(\hat{\phi})+\hat{h})$	0	$-\dot{f}_{h_2}$	$\dot{f}_{h_1}$	0	
0	$(\dot{\lambda}+\omega_{fe}^e) \sin(\hat{\phi})$	0	$-\cos(\hat{\phi})$	0	0	0	$-(\dot{\lambda}+\omega_{fe}^e) \sin(\hat{\phi})$	$\dot{\phi}$	
0	0	0	0	1	0	$(\dot{\lambda}+\omega_{fe}^e) \sin(\hat{\phi})$	0	$(\dot{\lambda}+\omega_{fe}^e) \cos(\hat{\phi})$	
0	$(\dot{\lambda}+\omega_{fe}^e) \cos(\hat{\phi})$	0	$\sin(\hat{\phi})$	0	0	$-\dot{\phi}$	$-(\dot{\lambda}+\omega_{fe}^e) \cos(\hat{\phi})$	0	

**Kontrollmatrix:**

$$B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \text{3x3} & \text{3x3} & \text{3x3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & D^{-1}(\tilde{\lambda})R_{hb}(\psi_{hb}) & D^{-1}(\tilde{\lambda}) \\ \text{3x3} & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_{hb}(\psi_{hb}) & 0 & 0 \\ \text{3x3} & \text{3x3} & \text{3x3} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

**Legende:**

## Navigationszustandsstörungen

$$\delta \lambda = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h)^T$$

Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\delta \dot{\lambda} = (\delta \dot{\lambda} \quad \delta \dot{\phi} \quad \delta \dot{h})^T$$

Geschwindigkeitsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\psi_{h\bar{h}} = (\varphi_{h\bar{h}} \quad \vartheta_{h\bar{h}} \quad \psi_{h\bar{h}})^T$$

Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem

## IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen

$$\delta \omega_{ib}^b = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b)^T$$

Winkelgeschwindigkeitsstörung im körperfesten Bezugssystem

$$\delta f_b = (\delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3})^T$$

Beschleunigungsstörung im körperfesten Bezugssystem

$$\delta g_h = (\delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

Erdschweremodellstörung im horizontfesten Bezugssystem

## Gemessene IMU-Sensordaten

$$\tilde{f}_b = (\tilde{f}_{b_1} \quad \tilde{f}_{b_2} \quad \tilde{f}_{b_3})^T$$

Gemessene Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem

## Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\dot{\tilde{\lambda}} = (\dot{\tilde{\lambda}} \quad \dot{\tilde{\phi}} \quad \dot{\tilde{h}})^T$$

Näherungsgeschwindigkeit in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\psi_{\bar{h}b} = (\varphi_{\bar{h}b} \quad \vartheta_{\bar{h}b} \quad \psi_{\bar{h}b})^T$$

Eulerwinkel vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem

$$R_{\bar{h}b}(\psi_{\bar{h}b})$$

Rotationsmatrix vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem

$$D^{-1}(\tilde{\lambda})$$

Inverse Koeffizientenmatrix zur Transformation ellipsoidischer Koordinaten

$$\tilde{f}_{\bar{h}} = (\tilde{f}_{\bar{h}_1}(\psi_{\bar{h}b}) \quad \tilde{f}_{\bar{h}_2}(\psi_{\bar{h}b}) \quad \tilde{f}_{\bar{h}_3}(\psi_{\bar{h}b}))^T = R_{\bar{h}b}(\psi_{\bar{h}b}) \tilde{f}_b$$

Gemessene Beschleunigung im horizontfesten Näherungsbezugssystem

## Erdschwerereparameter

$$G = \frac{\partial (D^{-1}(\lambda) \cdot \tilde{g}_h(\lambda))}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}}$$

Partielle Ableitung des Erdschweremodells im horizontfesten Bezugssystem

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \alpha_{ie}^e)^T$$

Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

Normalkrümmungshalbmesser

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

Meridiankrümmungshalbmesser

$$N'(\phi) = \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} = ae^2 \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

Erste partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers

$$M'(\phi) = \frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} = 3ae^2(1 - e^2) \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2}$$

Erste partielle Ableitung des Meridiankrümmungshalbmessers

$$N''(\phi) = \frac{\partial^2 N(\phi)}{\partial \phi^2} = ae^2 \left( \cos^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2} - \sin^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2} + 3e^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2} \right)$$

Zweite partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers

$$M''(\phi) = \frac{\partial^2 M(\phi)}{\partial \phi^2} = 3ae^2(1 - e^2) \left( \cos^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2} - \sin^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-7/2} + 5e^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-7/2} \right)$$

Zweite partielle Ableitung des Meridiankrümmungshalbmessers

## Vereinfachte kinematische Bewegungsgleichungen nach Sir Isaac Newton in Zustandsstörungen für **Navigation-Grade IMU**, **Tactical-Grade IMU** und **Rate-Grade IMU**

$$\delta \dot{z} = A \cdot \delta z + B \cdot \delta s$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h \quad \delta \dot{\lambda} \quad \delta \dot{\phi} \quad \delta \dot{h} \quad \varphi_{h\dot{h}} \quad \psi_{h\dot{h}})^T$$

**Eingangsvektor in IMU-Sensorstörungen und Erdschweremodellstörungen:**

$$\delta s = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b \quad \delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3} \quad \delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

**Dynamikmatrix:**

0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0
$G_{11}$	$\frac{N'(\hat{\phi})(N'(\hat{\phi})\hat{\phi} + \dot{h})\dot{\lambda} - N'(\hat{\phi})\hat{\phi}\dot{\lambda}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})^2 \cos^2(\hat{\phi})} + \frac{\hat{\phi}\dot{\lambda}}{\cos^2(\hat{\phi})}$ $\frac{N'(\hat{\phi})\dot{h}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})^2} + \frac{\dot{h}\sin(\hat{\phi})}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\cos^2(\hat{\phi})}$ $\frac{N'(\hat{\phi})(M(\hat{\phi}) + \dot{h})}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})^2} \dot{\phi}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\tan(\hat{\phi})$ $+ \frac{M'(\hat{\phi})}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})} \dot{\phi}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\tan(\hat{\phi})$ $+ \frac{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\cos^2(\hat{\phi})} \dot{\phi}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})$ $+ \frac{N'(\hat{\phi})\dot{h}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})^2} + G_{12}$	$\frac{(N'(\hat{\phi})\hat{\phi} + \dot{h})\dot{\lambda}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})^2}$ $\frac{\dot{h}\sin(\hat{\phi})}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\cos^2(\hat{\phi})}$ $- \frac{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})^2} \dot{\phi}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\tan(\hat{\phi})$ $+ \frac{\dot{\phi}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\tan(\hat{\phi})}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})}$ $+ \frac{\dot{h}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})^2} + G_{13}$	$- \frac{N'(\hat{\phi})\hat{\phi} + \dot{h}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})} + \dot{\phi}\tan(\hat{\phi})$ $+ \frac{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})} \dot{\phi}\tan(\hat{\phi})$ $- \frac{\dot{h}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})}$	$\frac{N'(\hat{\phi})\dot{\lambda}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})} + \dot{\lambda}\tan(\hat{\phi})$ $+ \frac{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\tan(\hat{\phi})$	$- \frac{2\dot{\lambda} + 2a_{fe}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})}$ $- \frac{\dot{h}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\cos(\hat{\phi})}$	0	$\frac{\dot{h}}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\cos(\hat{\phi})}$	
$A =$	$\frac{M'(\hat{\phi})(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\sin(\hat{\phi})\cos(\hat{\phi})}{(M(\hat{\phi}) + \dot{h})^2}$ $+ \frac{M^2(\hat{\phi})\dot{\phi}^2}{(M(\hat{\phi}) + \dot{h})^2} + \frac{2M'(\hat{\phi})\hat{\phi}\dot{h}}{(M(\hat{\phi}) + \dot{h})^2}$ $\frac{\dot{h}\sin(\hat{\phi})}{(M(\hat{\phi}) + \dot{h})} \frac{M'(\hat{\phi})\dot{\phi}^2}{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}$ $\frac{N'(\hat{\phi})\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\sin(\hat{\phi})\cos(\hat{\phi})}{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}$ $- \frac{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\cos(2\hat{\phi})}{M(\hat{\phi}) + \dot{h}} + G_{22}$	$\frac{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\sin(\hat{\phi})\cos(\hat{\phi})}{(M(\hat{\phi}) + \dot{h})^2}$ $+ \frac{M'(\hat{\phi})\dot{\phi}^2}{(M(\hat{\phi}) + \dot{h})^2} + \frac{2\dot{\phi}\dot{h}}{(M(\hat{\phi}) + \dot{h})^2}$ $\frac{\dot{h}\sin(\hat{\phi})}{(M(\hat{\phi}) + \dot{h})} \frac{\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\sin(\hat{\phi})\cos(\hat{\phi})}{M(\hat{\phi}) + \dot{h}} + G_{23}$	$- \frac{N(\hat{\phi}) + \dot{h}}{(M(\hat{\phi}) + \dot{h})}(\dot{\lambda} + a_{fe})\sin(2\hat{\phi})$	$- \frac{2M'(\hat{\phi})\hat{\phi}}{M(\hat{\phi}) + \dot{h}} + \frac{2\dot{h}}{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}$	$- \frac{2\dot{\phi}}{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}$	0	$\frac{\dot{h}\sin(\hat{\phi})}{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}$	$- \frac{\dot{h}\sin(\hat{\phi})}{M(\hat{\phi}) + \dot{h}}$
$G_{31}$	$\frac{N'(\hat{\phi})\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\cos^2(\hat{\phi})}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})^2}$ $- \frac{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\sin(2\hat{\phi})}{(N(\hat{\phi}) + \dot{h})^2} + M'(\hat{\phi})\dot{\phi}^2 + G_{32}$	$\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2a_{fe})\cos^2(\hat{\phi}) + \dot{\phi}^2 + G_{33}$	$2(\dot{\lambda} + a_{fe})(N(\hat{\phi}) + \dot{h})\cos^2(\hat{\phi})$	$2\dot{\phi}(M(\hat{\phi}) + \dot{h})$	0	$- \dot{h}$	$\dot{h}$	0
0	$(\dot{\lambda} + a_{fe})\sin(\hat{\phi})$	0	$- \cos(\hat{\phi})$	0	0	0	$- (\dot{\lambda} + a_{fe})\sin(\hat{\phi})$	$\dot{\phi}$
0	0	0	0	1	0	$(\dot{\lambda} + a_{fe})\sin(\hat{\phi})$	0	$(\dot{\lambda} + a_{fe})\cos(\hat{\phi})$
0	$(\dot{\lambda} + a_{fe})\cos(\hat{\phi})$	0	$\sin(\hat{\phi})$	0	0	$- \dot{\phi}$	$- (\dot{\lambda} + a_{fe})\cos(\hat{\phi})$	0

**Kontrollmatrix:**

$$B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & D^{-1}(\tilde{\lambda})R_{hb}(\psi_{hb}) & D^{-1}(\tilde{\lambda}) \\ \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_{hb}(\psi_{hb}) & 0 & 0 \\ \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times \end{matrix} \end{pmatrix}$$

**Legende:**

Navigationszustandsstörungen

$$\delta \lambda = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h)^T$$

Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\delta \dot{\lambda} = (\delta \dot{\lambda} \quad \delta \dot{\phi} \quad \delta \dot{h})^T$$

Geschwindigkeitsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem

IMU-Sensordatenstörungen und Erdschweremodellstörungen

$$\delta \omega_{ib}^b = (\delta \omega_{ib_1}^b \quad \delta \omega_{ib_2}^b \quad \delta \omega_{ib_3}^b)^T$$

Winkelgeschwindigkeitsstörung im körperfesten Bezugssystem

$$\delta f_b = (\delta f_{b_1} \quad \delta f_{b_2} \quad \delta f_{b_3})^T$$

Beschleunigungsstörung im körperfesten Bezugssystem

$$\delta g_h = (\delta g_{h_1} \quad \delta g_{h_2} \quad \delta g_{h_3})^T$$

Erdschweremodellstörung im horizontfesten Bezugssystem

Gemessene IMU-Sensordaten

$$\tilde{f}_b = (\tilde{f}_{b_1} \quad \tilde{f}_{b_2} \quad \tilde{f}_{b_3})^T$$

Gemessene Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem

Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\dot{\tilde{\lambda}} = (\dot{\tilde{\lambda}} \quad \dot{\tilde{\phi}} \quad \dot{\tilde{h}})^T$$

Näherungsgeschwindigkeit in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

Eulerwinkel vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem

$$R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}})$$

Rotationsmatrix vom körperfesten ins horizontfeste Näherungsbezugssystem

$$D^{-1}(\tilde{\lambda})$$

Inverse Koeffizientenmatrix zur Transformation ellipsoidischer Koordinaten

$$\tilde{f}_{\tilde{h}} = (\tilde{f}_{\tilde{h}_1}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{h}_2}(\psi_{h\tilde{h}}) \quad \tilde{f}_{\tilde{h}_3}(\psi_{h\tilde{h}}))^T = R_{h\tilde{h}}(\psi_{h\tilde{h}}) \tilde{f}_b$$

Gemessene Beschleunigung im horizontfesten Näherungsbezugssystem

Erdschwerereparameter

$$G = \frac{\partial (D^{-1}(\lambda) \cdot \tilde{g}_h(\lambda))}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}}$$

Partielle Ableitung des Erdschweremodells im horizontfesten Bezugssystem

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad \omega_{ie}^e)^T$$

Erddrehrate im erdfesten Bezugssystem

$$\omega_{ie}^e = (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

Normalkrümmungshalbmesser

$$N(\phi) = R(\phi) = \sqrt{N(\phi) \cdot M(\phi)}$$

$$N(\phi) + h = \sqrt[3]{a^2 b}$$

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

Meridiankrümmungshalbmesser

$$M(\phi) = R(\phi) = \sqrt{N(\phi) \cdot M(\phi)}$$

$$M(\phi) + h = \sqrt[3]{a^2 b}$$

$$N'(\phi) = \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} = ae^2 \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

Erste partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers

$$N''(\phi) = 0$$

$$M'(\phi) = \frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} = 3ae^2(1 - e^2) \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2}$$

Erste partielle Ableitung des Meridiankrümmungshalbmessers

$$M''(\phi) = 0$$

$$N''(\phi) = \frac{\partial^2 N(\phi)}{\partial \phi^2} = ae^2 \left( \cos^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2} - \sin^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2} + 3e^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2} \right)$$

Zweite partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers

$$N''(\phi) = 0$$

$$M''(\phi) = \frac{\partial^2 M(\phi)}{\partial \phi^2} = 3ae^2(1 - e^2) \left( \cos^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2} - \sin^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-7/2} + 5e^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-7/2} \right)$$

Zweite partielle Ableitung des Meridiankrümmungshalbmessers

$$M''(\phi) = 0$$

# IV Modellbildung

Im vorigen Abschnitt wurde der funktionale Zusammenhang zur Beschreibung der Dynamik eines beliebigen Starrkörpers im dreidimensionalen Raum bestimmt. Bei absolut bekannten Startbedingungen, fehlerfreien inertialen Messdaten und fehlerfreien Geodaten würden die nichtlinearen Gleichungen zur Navigation völlig ausreichen. Bei Verwendung des linearisierten Gleichungssystems summiert sich über die Zeit auch bei fehlerfreien inertialen Messdaten ein Linearisierungsfehler. Zusätzlich führt die Verwendung fehlerbehafteter inertialer Messdaten innerhalb des Gleichungssystems zu nicht begrenzten Fehlern in der Position, Geschwindigkeit und Orientierung. Aus diesen Gründen muss ein INS zumindest für Langzeitanwendungen durch andere Sensoren gestützt werden. Ausnahmen hierzu stellen lediglich INS mit definiert kurzer Operationszeit unter Verwendung einer geeigneten IMU dar, deren Messfehler sich über die Zeit nicht über einen definierten Grenzwert aufbauen können. Bei unbegrenzter Missionszeit oder der Verwendung von MEMS mit schlechter Fehlercharakteristik kann auf die Stützung durch andere Sensoren nicht verzichtet werden. Als am besten geeignete Stützmittel müssen GNSS betrachtet werden. Diese verfügen im Gegensatz zur IMU über eine hohe Langzeitstabilität der anfallenden und zudem begrenzten Navigationsfehler. Zusammen mit der Kurzzeitstabilität der inertialen Sensorfehler ergibt sich eine optimale Kombination. Neben der Stützung über ein GNSS soll die Möglichkeit der Stützung über einen barometrischen Höhenmesser mit berücksichtigt werden. Ziel dieses Kapitels ist somit zum einen die Definition des Erdschweremodells und des IMU-Sensorfehlermodells und zum anderen die Definition geeigneter Beobachtungsmethoden zur Stützung der kinematischen Bewegungsgleichungen. Das Ergebnis dieses Abschnitts ist ein ausformuliertes, aber noch kontinuierliches Dynamik- und Beobachtungsmodell in den drei Standardparametrisierungen für den weiteren Einsatz im Rahmen eines CKF.

## 1. Erdschweremodelle

In Abschnitt III wurden für das Erdschweremodell der Erde lediglich mathematische Modellbezeichnungen eingeführt. In diesem Kapitel sollen diese mathematischen Modellbezeichnungen mit entsprechenden Modellen befüllt werden. Dazu werden zwei gängige Modelle zur Erdschweremodellierung definiert. Auf Grund ihrer Parametrisierung sind diese Modelle jeweils für andere Ansätze mathematisch günstiger. Die Formulierung des Erdschweremodells über eine Reihenentwicklung lässt sich auf Grund der Darstellung in erdfesten kartesischen Koordinaten sehr gut im Ansatz 1 verwenden. Die WGS84-Normalschwereformel ist im Gegensatz dazu in horizontfesten Koordinaten formuliert und erleichtert somit die Verwendung in den Ansätzen 2 und 3. Die ebenfalls noch ausstehende Modellierung der Erdschweremodellstörung erfolgt gemeinsam mit der Modellierung aller Störungsgrößen in Kapitel 3 dieses Abschnitts.

### 1.1. WGS84-Normalschwereformel

Die Normalschwere auf der Ellipsoidoberfläche lautet nach Somigliana:<sup>33</sup>

$$\gamma_0(\phi) = \frac{a\gamma_e \cos^2(\phi) + b\gamma_p \sin^2(\phi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\phi) + b^2 \sin^2(\phi)}} = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2(\phi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\phi)}} \quad (\text{IV.1.1})$$

Eine Erweiterung unter Berücksichtigung der Höhe über dem Ellipsoid ergibt:

$$\gamma(\phi, h) = \gamma_0(\phi) \cdot \left( 1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2(\phi)) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right) \quad (\text{IV.1.2})$$

Die Parameter des WGS84-Rotationsellipoids lauten hierbei:<sup>34</sup>

$$\begin{aligned} a &= 6378137m \\ 1/f &= 298,257223563 \\ b &= 6356752,3142m \\ e^2 &= 6,69437999014 \cdot 10^{-3} \\ \gamma_e &= 9,7803253359 \frac{m}{s^2} \\ \gamma_p &= 9,8321849378 \frac{m}{s^2} \\ k &= 0,00193185265241 \\ m &= 0,00344978650684 \end{aligned} \quad (\text{IV.1.3})$$

<sup>33</sup> Heiskanen, W.A. & Moritz, H.: Physical Geodesy, Reprint Institute of Physical Geodesy, Technical University Graz, Graz 1990, S.70 & S.79

<sup>34</sup> National Imagery and Mapping Agency, World Geodetic System 1984 - its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems - Third Edition - Amendment 1, Department of Defense, Reston 2000, S.3-5ff

Unter Vernachlässigung der Lotabweichungen erhält man für den Gesamtschwerevektor im Horizontsystem:

$$\boldsymbol{\gamma}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma(\phi, h) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1.4})$$

Die in den linearisierten Störungsdifferentialgleichungen benutzten partiellen Ableitungen des Normalschwerevektors ergeben:

$$G = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_h(\phi, h)}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \gamma(\phi, h)}{\partial \phi} & \frac{\partial \gamma(\phi, h)}{\partial h} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1.5})$$

Die von Null verschiedenen Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma(\phi, h)}{\partial \phi} &= \gamma'_0(\phi) \cdot \left( 1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2(\phi)) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right) + \gamma_0(\phi) \cdot \frac{8}{a} h f \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \frac{\partial \gamma(\phi, h)}{\partial h} &= \gamma_0(\phi) \cdot \left( -\frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2(\phi)) + \frac{6}{a^2} h \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.6})$$

Die Ableitung der Normalschwere auf der Ellipsoidoberfläche ergibt:

$$\gamma'_0(\phi) = \frac{\partial \gamma_0(\phi)}{\partial \phi} = \gamma_e \sin(\phi) \cos(\phi) \cdot \left( \frac{2k}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\phi)}} + \frac{e^2 (1 + k \sin^2(\phi))}{\left( \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\phi)} \right)^3} \right). \quad (\text{IV.1.7})$$

Obige Größen lassen sich direkt in die Modellparameter der vereinfachten linearisierten Navigationsdifferentialgleichungssysteme in Zustandsfehlern für die Ansätze 2 und 3 in den Templates im Anhang zu Abschnitt III einsetzen.

## 1.2. Erdschwerefeld als Reihenentwicklung

Neben dem Modellansatz über die WGS84-Normalschwereformel ist es sinnvoll, vor allem bei einer Parametrisierung in erdfesten kartesischen Koordinaten das Erdschwerefeld über Legendre-Polynome zu realisieren. Zur detaillierten Beschreibung der Erdschweremodellierung über Legendre-Polynome wird auf die Literatur verwiesen.<sup>35</sup> Die dabei benutzte Vereinfachung eines rotationssymmetrischen und zum Äquator symmetrischen Erdschwerefeldes führt dazu, dass lediglich zonale harmonische Legendre-Koeffizienten, die ein Vielfaches von zwei sind, auftreten.

$$U(\mathbf{x}_e) = \frac{GM}{\|\mathbf{x}_e\|} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\mathbf{x}_e) \right) + \frac{1}{2} \omega_{ie}^2 (x_{e_1}^2 + x_{e_2}^2) \quad (\text{IV.1.8})$$

Die benötigten Parameter lauten hierbei:<sup>36</sup>

$$\begin{aligned} GM &= 3,986005 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{s^2} \\ J_2 &= 1,0826298213133 \cdot 10^{-3} \\ J_4 &= -2,370911200533 \cdot 10^{-6} \\ J_6 &= 6,0834649888056 \cdot 10^{-9} \\ a &= 6378137m \\ \omega_{ie}^e &= 7,292115 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s} \end{aligned} \quad (\text{IV.1.9})$$

Zur Abschätzung der Genauigkeit wird obige Reihe bis zur sechsten Ordnung entwickelt.

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}_e) &= \frac{GM}{\|\mathbf{x}_e\|} - \frac{GM}{\|\mathbf{x}_e\|} \left( \frac{a}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^2 J_2 \left( \frac{3}{2} \left( \frac{x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{GM}{\|\mathbf{x}_e\|} \left( \frac{a}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^4 J_4 \left( \frac{35}{8} \left( \frac{x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^4 - \frac{30}{8} \left( \frac{x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^2 + \frac{3}{8} \right) \\ &\quad - \frac{GM}{\|\mathbf{x}_e\|} \left( \frac{a}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^6 J_6 \left( \frac{231}{16} \left( \frac{x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^6 - \frac{315}{16} \left( \frac{x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^4 + \frac{105}{16} \left( \frac{x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|} \right)^2 - \frac{5}{16} \right) + \frac{1}{2} \omega_{ie}^2 (x_{e_1}^2 + x_{e_2}^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.10})$$

<sup>35</sup> Torge, Wolfgang; Geodäsie – 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin 2003, S.60

<sup>36</sup> National Imagery and Mapping Agency, World Geodetic System 1984 - its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems - Third Edition - Amendment 1, Department of Defense, Reston 2000, S.3-5ff

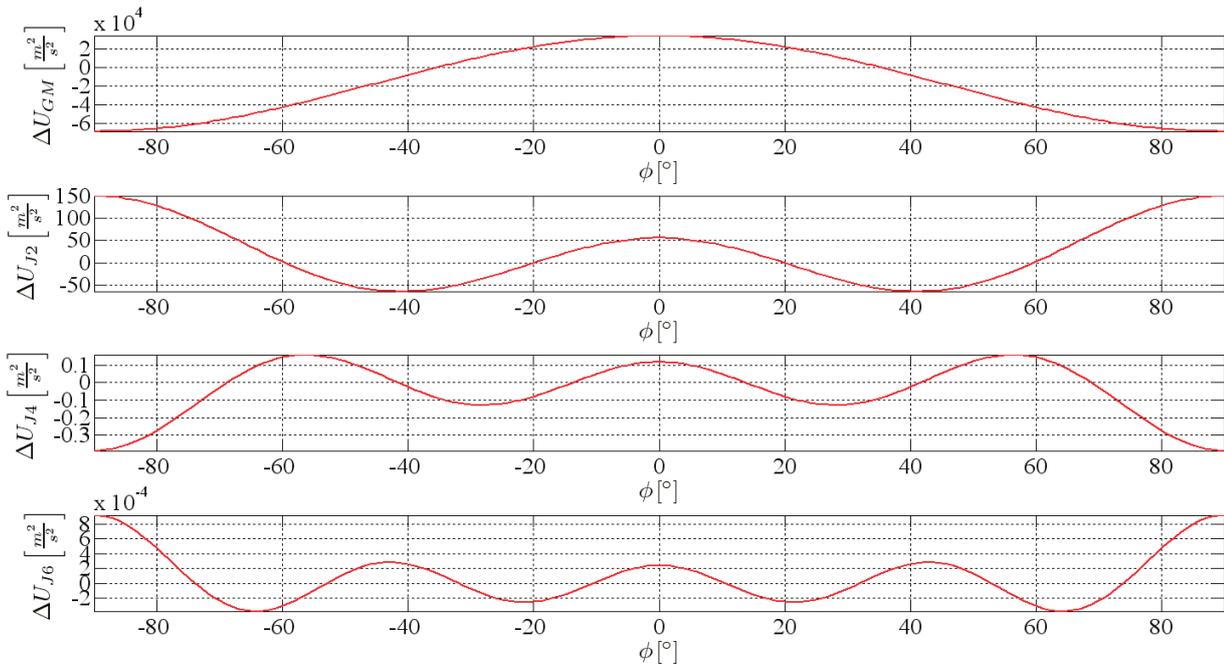


Abbildung 7: Restfehler des Erdschwerepotentials als Reihenentwicklung

Der Restfehler gegenüber der WGS84-Normalschwereformel auf der Ellipsoidoberfläche bei Abbruch der Reihenentwicklung nach sechster Ordnung beläuft sich gemäß Abbildung 7 auf  $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Der Erdschwerevektor ergibt sich als partielle Ableitung des Erdschwerepotentials nach den erdfesten kartesischen Koordinaten.

$$\mathbf{g}_e(\mathbf{x}_e) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_{e_1}} \\ \frac{\partial U}{\partial x_{e_2}} \\ \frac{\partial U}{\partial x_{e_3}} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1.11})$$

Als Ergebnis erhält man unter Vernachlässigung der Terme sechster Ordnung:

$$\mathbf{g}_e(\mathbf{x}_e) = \begin{pmatrix} GM \left( -\frac{x_{e_1}}{\|\mathbf{x}_e\|^3} + a^2 J_2 \left( -\frac{3}{2} \frac{x_{e_1}}{\|\mathbf{x}_e\|^5} + \frac{15}{2} \frac{x_{e_1} x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^7} \right) + a^4 J_4 \left( \frac{15}{8} \frac{x_{e_1}}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{210}{8} \frac{x_{e_1} x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^9} + \frac{315}{8} \frac{x_{e_1} x_{e_3}^4}{\|\mathbf{x}_e\|^{11}} \right) \right) + \omega_{ie}^2 x_{e_1} \\ GM \left( -\frac{x_{e_2}}{\|\mathbf{x}_e\|^3} + a^2 J_2 \left( -\frac{3}{2} \frac{x_{e_2}}{\|\mathbf{x}_e\|^5} + \frac{15}{2} \frac{x_{e_2} x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^7} \right) + a^4 J_4 \left( \frac{15}{8} \frac{x_{e_2}}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{210}{8} \frac{x_{e_2} x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^9} + \frac{315}{8} \frac{x_{e_2} x_{e_3}^4}{\|\mathbf{x}_e\|^{11}} \right) \right) + \omega_{ie}^2 x_{e_2} \\ GM \left( -\frac{x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|^3} + a^2 J_2 \left( -\frac{9}{2} \frac{x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|^5} + \frac{15}{2} \frac{x_{e_3}^3}{\|\mathbf{x}_e\|^7} \right) + a^4 J_4 \left( \frac{75}{8} \frac{x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{350}{8} \frac{x_{e_3}^3}{\|\mathbf{x}_e\|^9} + \frac{315}{8} \frac{x_{e_3}^5}{\|\mathbf{x}_e\|^{11}} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1.12})$$

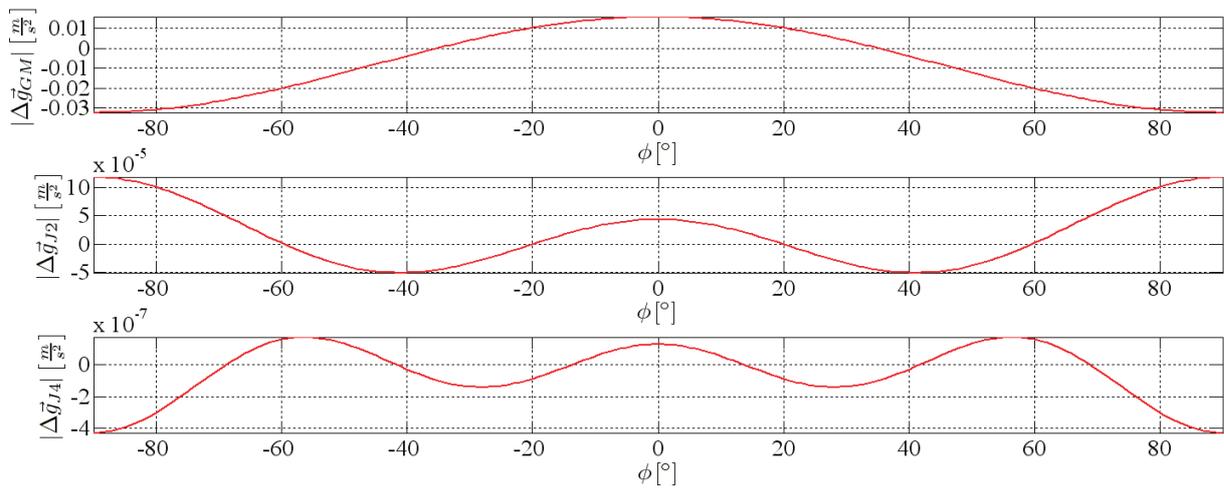


Abbildung 8: Restfehler des Erdschwerevektors als Reihenentwicklung

Der auftretende Restfehler beläuft sich gemäß Abbildung 8 bei Abbruch nach dem Term zweiter Ordnung auf  $10^{-4} \text{ m/s}^2$  und bei Abbruch nach dem Term vierter Ordnung auf  $10^{-7} \text{ m/s}^2$ . Zur Linearisierung des nichtlinearen Differentialgleichungssystems müssen die partiellen Ableitungen des Erdschwerevektors nach den erdfesten kartesischen Koordinaten gebildet werden.

$$G = \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial \mathbf{x}_e^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{e_1}}{\partial x_{e_1}} & \frac{\partial g_{e_1}}{\partial x_{e_2}} & \frac{\partial g_{e_1}}{\partial x_{e_3}} \\ \frac{\partial g_{e_2}}{\partial x_{e_1}} & \frac{\partial g_{e_2}}{\partial x_{e_2}} & \frac{\partial g_{e_2}}{\partial x_{e_3}} \\ \frac{\partial g_{e_3}}{\partial x_{e_1}} & \frac{\partial g_{e_3}}{\partial x_{e_2}} & \frac{\partial g_{e_3}}{\partial x_{e_3}} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1.13})$$

Ausformuliert ergibt sich unter Nichtbeachtung der Terme vierter Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{e_1}}{\partial x_{e_1}} &= GM \left( \left( -\frac{1}{\|\mathbf{x}_e\|^3} + 3 \frac{x_{e_1}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^5} \right) + a^2 J_2 \left( -\frac{3}{2} \frac{1}{\|\mathbf{x}_e\|^5} + \frac{15}{2} \frac{x_{e_1}^2 + x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{105}{2} \frac{x_{e_1}^2 x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^9} \right) \right) + \omega_{ie}^2 \\ \frac{\partial g_{e_1}}{\partial x_{e_2}} &= GM \left( \left( 3 \frac{x_{e_1} x_{e_2}}{\|\mathbf{x}_e\|^5} \right) + a^2 J_2 \left( \frac{15}{2} \frac{x_{e_1} x_{e_2}}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{105}{2} \frac{x_{e_1} x_{e_2} x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^9} \right) \right) \\ \frac{\partial g_{e_1}}{\partial x_{e_3}} &= GM \left( \left( 3 \frac{x_{e_1} x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|^5} \right) + a^2 J_2 \left( \frac{45}{2} \frac{x_{e_1} x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{105}{2} \frac{x_{e_1} x_{e_3}^3}{\|\mathbf{x}_e\|^9} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.14})$$

Die weiteren Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{e_2}}{\partial x_{e_1}} &= GM \left( \left( 3 \frac{x_{e_1} x_{e_2}}{\|\mathbf{x}_e\|^5} \right) + a^2 J_2 \left( \frac{15}{2} \frac{x_{e_1} x_{e_2}}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{105}{2} \frac{x_{e_1} x_{e_2} x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^9} \right) \right) \\ \frac{\partial g_{e_2}}{\partial x_{e_2}} &= GM \left( \left( -\frac{1}{\|\mathbf{x}_e\|^3} + 3 \frac{x_{e_2}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^5} \right) + a^2 J_2 \left( -\frac{3}{2} \frac{1}{\|\mathbf{x}_e\|^5} + \frac{15}{2} \frac{x_{e_2}^2 + x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{105}{2} \frac{x_{e_2}^2 x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^9} \right) \right) + \omega_{ie}^2 \\ \frac{\partial g_{e_2}}{\partial x_{e_3}} &= GM \left( \left( 3 \frac{x_{e_2} x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|^5} \right) + a^2 J_2 \left( \frac{45}{2} \frac{x_{e_2} x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{105}{2} \frac{x_{e_2} x_{e_3}^3}{\|\mathbf{x}_e\|^9} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.15})$$

Die Koeffizienten der dritten Komponente ergeben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{e_3}}{\partial x_{e_1}} &= GM \left( \left( 3 \frac{x_{e_1} x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|^5} \right) + a^2 J_2 \left( \frac{45 x_{e_1} x_{e_3}}{2 \|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{105 x_{e_1} x_{e_3}^3}{2 \|\mathbf{x}_e\|^9} \right) \right) \\ \frac{\partial g_{e_3}}{\partial x_{e_2}} &= GM \left( \left( 3 \frac{x_{e_2} x_{e_3}}{\|\mathbf{x}_e\|^5} \right) + a^2 J_2 \left( \frac{45 x_{e_2} x_{e_3}}{2 \|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{105 x_{e_2} x_{e_3}^3}{2 \|\mathbf{x}_e\|^9} \right) \right) \\ \frac{\partial g_{e_3}}{\partial x_{e_3}} &= GM \left( \left( -\frac{1}{\|\mathbf{x}_e\|^3} + 3 \frac{x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^5} \right) + a^2 J_2 \left( -\frac{9}{2} \frac{1}{\|\mathbf{x}_e\|^5} + 45 \frac{x_{e_3}^2}{\|\mathbf{x}_e\|^7} - \frac{105}{2} \frac{x_{e_3}^4}{\|\mathbf{x}_e\|^9} \right) \right)\end{aligned}\quad (\text{IV.1.16})$$

Die berechneten Größen lassen sich direkt in die Modellparameter des vereinfachten linearisierten Navigationsdifferentialgleichungssystems des Ansatzes 1 in den Templates im Anhang des Abschnitt III einsetzen. Die Reduzierung der Ordnung der jeweiligen Reihenentwicklung lässt sich dadurch rechtfertigen, dass jeder weiteren Ordnung der zusätzliche Faktor  $1/\|\mathbf{x}_e\|$  vorangestellt wird und sich allein dadurch die Fehlerordnung in der Größenordnung von  $10^{-7}$  reduziert.

## 2. Beobachtungsgleichungen

Auf Grund der driftenden Fehlercharakteristik einer IMU besteht innerhalb eines INS die Notwendigkeit der Stützung durch zusätzliche Sensoren. Neben der klassischen Variante der Stützung des INS über ein GNSS soll im Rahmen dieser Arbeit auch die Stützung über einen barometrischen Höhenmesser betrachtet werden. Vorteile sind dabei die verbesserte Beobachtbarkeit der Höhe und die Möglichkeit, wie in der Luftfahrt üblich, nach barometrischer Höhe zu navigieren. Im Folgenden werden vier mögliche GNSS-Beobachtungen eingeführt. Neben Positions- und Geschwindigkeitsbeobachtungen werden auch Pseudo- und Rangeratebeobachtungen berücksichtigt. Letztere liefern auch bei eingeschränkter Satellitenverfügbarkeit ausreichende Stützinformation. Die Beobachtungen des barometrischen Höhenmessers beschränken sich auf die barometrische Höhe. Als Kopplungsvariante des GNSS-Empfängers wird ein loosely coupling verwendet. Da auf Grund der gekapselten Struktur militärischer Satellitenempfänger nicht in deren Architektur eingegriffen werden kann, sind engere Kopplungsvarianten wie tightly coupling oder deeply integrated, bei denen die Regelkreise mehr oder weniger direkt in den Satellitenempfänger eingreifen, oftmals nicht möglich. Die Anbindung des barometrischen Höhenmessers erfolgt nicht, wie allgemein üblich, über einen so genannten baroinertialen Kanal, sondern als eigenständiger Sensor direkt an das INS. Ziel dieses Kapitels ist es, Beobachtungsgleichungen analog zum Rechengang der kinematischen Bewegungsgleichungen in Abschnitt III herzuleiten.

$$\begin{aligned} &1. \text{ Newtonsche Physik} \Rightarrow \\ &\text{Nichtlineare Beobachtungsgleichungen in absoluten Zuständen} \\ &2. \text{ Störungsrechnung} \Rightarrow \\ &\text{Nichtlineare Beobachtungsgleichungen in Zustandsfehlern} \\ &3. \text{ Linearisierung} \Rightarrow \\ &\text{Linearisierte Beobachtungsgleichungen in Zustandsfehlern}\end{aligned}$$

Die Herleitung innerhalb dieses Kapitels erfolgt in vektorieller Form. Am Ende dieses Abschnitts sind Templates, analog zu Abschnitt III, mit den skalar ausformulierten Beobachtungsgleichungen angehängt. Ausgehend vom nichtlinearen Zusammenhang der absoluten Beobachtungsgleichung

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{z}) \quad (\text{IV.2.1})$$

ergibt sich durch Anwendung einer generellen Störungsrechnung die nichtlineare Beobachtungsgleichung in Zustandsstörungen.

$$\mathbf{y} = h(\tilde{\mathbf{z}} + \delta\mathbf{z}) \quad (\text{IV.2.2})$$

Eine Taylorreihenentwicklung führt zur linearisierten Beobachtungsgleichung in Zustandsstörungen.

$$\mathbf{y} = h(\tilde{\mathbf{z}}) + \left. \frac{\partial h(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^T} \right|_{\tilde{\mathbf{z}}} \cdot \delta\mathbf{z} + O^2 \quad (\text{IV.2.3})$$

Umstellen ergibt:

$$\mathbf{y} - h(\tilde{\mathbf{z}}) = \left. \frac{\partial h(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^T} \right|_{\tilde{\mathbf{z}}} \cdot \delta\mathbf{z} + O^2 \quad (\text{IV.2.4})$$

Nach Einführen der Beobachtungsstörung

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - h(\tilde{\mathbf{z}}) \quad (\text{IV.2.5})$$

lautet die linearisierte Beobachtungsgleichung in Zustandsstörungen:

$$\delta \mathbf{y} = \left. \frac{\partial h(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}^T} \right|_{\tilde{\mathbf{z}}} \cdot \delta \mathbf{z} \quad (\text{IV.2.6})$$

Die fünf dargestellten Stützmethoden verlangen wegen der zu Grunde liegenden physikalischen Zusammenhänge teilweise die Einführung weiterer Zustandsgrößen. Diese werden im jeweiligen Kapitel genauer erläutert.

## 2.1. für Positionsbeobachtungen

Das Positionsupdate stellt die einfachste Möglichkeit zur Stützung des INS dar. Als Beobachtung liegt direkt die Position des Satellitenempfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten vor.

$$\mathbf{y}^P = \mathbf{x}_e \quad (\text{IV.2.7})$$

### 2.1.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten

Die mathematische Beziehung zur Beschreibung des Positionsupdates in erdfesten kartesischen Parametern kann direkt aus Gleichung (IV.2.7) übernommen werden.

$$\mathbf{y}^P = \mathbf{x}_e \quad (\text{IV.2.8})$$

Durch Einführung einer Störungsrechnung gelingt der Wechsel von absoluten Zustandsgrößen auf Zustandsfehler.

$$\mathbf{y}^P = \tilde{\mathbf{x}}_e + \delta \mathbf{x}_e \quad (\text{IV.2.9})$$

Eine Taylorreihenentwicklung zur Linearisierung muss nicht durchgeführt werden, da die Beziehung (IV.2.9) schon linear ist. Die Beobachtungsgleichung für Positionsbeobachtungen bei erdfester kartesischer Parametrisierung lautet unter Einführung der Beobachtungsstörung

$$\delta \mathbf{y}^P = \mathbf{y}^P - \tilde{\mathbf{x}}_e \quad (\text{IV.2.10})$$

somit:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{y}^P &= \delta \mathbf{x}_e \\ \delta \mathbf{y}^P &= {}^1H^{Pp} \cdot \delta \mathbf{x}_e \end{aligned} \quad (\text{IV.2.11})$$

### 2.1.2 in gemischten Koordinaten

Bei der Parametrisierung der Position in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten müssen die kartesischen Parameter durch die ellipsoidischen Parameter gemäß Abschnitt II ersetzt werden. Die nichtlineare Beobachtungsgleichung ergibt:

$$\mathbf{y}^P = \mathbf{x}_e(\lambda) \quad (\text{IV.2.12})$$

Die Einführung der Störungsrechnung muss abermals auf der Grundlage der jeweiligen Parametrisierung erfolgen. Dazu sind die ellipsoidischen Größen zu zerlegen.

$$\mathbf{y}^P = \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda} + \delta \lambda) \quad (\text{IV.2.13})$$

Beziehung (IV.2.13) muss auf Grund ihrer Nichtlinearität durch eine Taylorreihenentwicklung linearisiert werden.

$$\mathbf{y}^P = \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) + \left. \frac{\partial \mathbf{x}_e(\lambda)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda + O^2 \quad (\text{IV.2.14})$$

Die Beobachtungsstörung ist definiert als:

$$\delta \mathbf{y}^P = \mathbf{y}^P - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \quad (\text{IV.2.15})$$

Die Beobachtungsgleichung besteht aus den partiellen Ableitungen der erdfesten kartesischen nach den erdfesten ellipsoidischen Parametern.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{y}^P &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}_e(\lambda)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda \\ \delta \mathbf{y}^P &= {}^2H^{Pp} \cdot \delta \lambda \end{aligned} \quad (\text{IV.2.16})$$

### 2.1.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

Auf Grund der gleichen Parametrisierung der Position in den Ansätzen der gemischten und der erdfesten ellipsoidischen Koordinaten kann das Ergebnis direkt aus Kapitel 2.1.2 übernommen werden.

$$\boxed{\begin{aligned} \delta y^P &= \left. \frac{\partial x_e(\lambda)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda \\ \delta y^P &= {}^3H^{Pp} \cdot \delta \lambda \end{aligned}} \quad (\text{IV.2.17})$$

## 2.2. für Geschwindigkeitsbeobachtungen

Analog zum Positionsupdate wird beim Geschwindigkeitsupdate direkt die erdfeste kartesische Geschwindigkeit beobachtet.

$$y^V = v_e \quad (\text{IV.2.18})$$

### 2.2.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten

Die Beobachtungsgleichung ergibt sich direkt nach (IV.2.18).

$$y^V = v_e \quad (\text{IV.2.19})$$

Definition einer Störungsrechnung zur Einführung der nötigen Zustandsfehler:

$$y^V = \tilde{v}_e + \delta v_e \quad (\text{IV.2.20})$$

Die Linearisierung durch eine Taylorreihenentwicklung kann auf Grund der Linearität in Gleichung (IV.2.20) entfallen. Die Beobachtungsstörung heißt demnach:

$$\delta y^V = y^V - \tilde{v}_e \quad (\text{IV.2.21})$$

Die Beobachtungsgleichung für einen Geschwindigkeitsupdate in erdfesten kartesischen Koordinaten lautet somit:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta y^V &= \delta v_e \\ \delta y^V &= {}^1H^{Vv} \cdot \delta v_e \end{aligned}} \quad (\text{IV.2.22})$$

### 2.2.2 in gemischten Koordinaten

Die Geschwindigkeit wird bei der Parametrisierung in gemischten Koordinaten im horizontfesten kartesischen Bezugssystem realisiert. Die in Gleichung (IV.2.18) vorhandenen erdfesten kartesischen Geschwindigkeiten können durch eine Rotationsmatrix, die von den ellipsoidischen Positionsparametern abhängt, in dieses Bezugssystem gedreht werden.

$$y^V = R_{eh}(\lambda) \cdot v_h \quad (\text{IV.2.23})$$

Einführung einer Störungsrechnung auf Basis der Parameter:

$$y^V = R_{eh}(\tilde{\lambda} + \delta \lambda) \cdot (\tilde{v}_h + \delta v_h) \quad (\text{IV.2.24})$$

Die Entwicklung der nichtlinearen Beziehung in eine Taylorreihe führt zur benötigten Linearisierung der Beobachtungsgleichung.

$$y^V = R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{v}_h + \left. \frac{\partial (R_{eh}(\lambda) \cdot \tilde{v}_h)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda + \left. \frac{\partial (R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot v_h)}{\partial v_h^T} \right|_{\tilde{v}_h} \cdot \delta v_h + O^2 \quad (\text{IV.2.25})$$

Die Beobachtungsstörung lautet:

$$\delta y^V = y^V - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{v}_h \quad (\text{IV.2.26})$$

Die Beobachtungsgleichung in gemischten Koordinaten für das Geschwindigkeitsupdate ergibt sich aus den partiellen Ableitungen in Gleichung (IV.2.25).

$$\boxed{\begin{aligned} \delta y^V &= \left. \frac{\partial (R_{eh}(\lambda) \cdot \tilde{v}_h)}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda + \left. \frac{\partial (R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot v_h)}{\partial v_h^T} \right|_{\tilde{v}_h} \cdot \delta v_h \\ \delta y^V &= {}^2H^{Vp} \cdot \delta \lambda + {}^2H^{Vv} \cdot \delta v_h \end{aligned}} \quad (\text{IV.2.27})$$

### 2.2.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

Bei Verwendung erdfester ellipsoidischer Parameter müssen die horizontfesten kartesischen Geschwindigkeitsparameter mit einem positionsabhängigen Faktor multipliziert werden.

$$\mathbf{y}^V = R_{eh}(\lambda) \cdot D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \quad (\text{IV.2.28})$$

Die ellipsoidischen Parameter werden in eine Summe aus Näherungswert und Zustandsfehler zerlegt.

$$\mathbf{y}^V = R_{eh}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot D(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\tilde{\lambda} + \delta\dot{\lambda}) \quad (\text{IV.2.29})$$

Die Entwicklung in einer Taylorreihe führt zur Linearisierung.

$$\mathbf{y}^V = R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} + \left. \frac{\partial(R_{eh}(\lambda) \cdot D(\lambda) \cdot \dot{\lambda})}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda + \left. \frac{\partial(R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\lambda})}{\partial \dot{\lambda}^T} \right|_{\dot{\tilde{\lambda}}} \cdot \delta\dot{\lambda} + O^2 \quad (\text{IV.2.30})$$

Die Beobachtungsstörung ergibt:

$$\delta \mathbf{y}^V = \mathbf{y}^V - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \quad (\text{IV.2.31})$$

Die Beobachtungsgleichung lässt sich direkt aus Gleichung (IV.2.30) ableiten.

$$\boxed{\begin{aligned} \delta \mathbf{y}^V &= \left. \frac{\partial(R_{eh}(\lambda) \cdot D(\lambda) \cdot \dot{\lambda})}{\partial \lambda^T} \right|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda + \left. \frac{\partial(R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\lambda})}{\partial \dot{\lambda}^T} \right|_{\dot{\tilde{\lambda}}} \cdot \delta\dot{\lambda} \\ \delta \mathbf{y}^V &= {}^3H^{Vp} \cdot \delta\lambda + {}^3H^{Vv} \cdot \delta\dot{\lambda} \end{aligned}} \quad (\text{IV.2.32})$$

In der Praxis werden Positions- und Geschwindigkeitsupdate meist miteinander kombiniert, da sich von der Position durch Ableitung auf die Geschwindigkeit schließen lässt.

## 2.3. für Pseudorangebeobachtungen

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Beobachtungsgleichungen, bei denen eine Satellitenkonstellation aus mindestens vier beobachtbaren Satelliten bestehen muss, genügt beim Pseudo- und Deltarangeupdate jeweils bereits ein Satellit, um eine Stützung durchführen zu können. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom Rohdatenupdate. Es existiert nicht zwingend eine eigenständige Navigationslösung des Satellitenempfängers. Als Beobachtung findet die Strecke zwischen Satellit und Satellitenempfänger Eingang in den Stützprozess.<sup>37</sup>

$$y^{PR} = \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)^2} + c\Delta t \quad (\text{IV.2.33})$$

Beim Pseudorangeupdate ist es zwingend erforderlich, den Empfängeruhrfehler  $\Delta t$  mitzubestimmen, da sich im Empfänger im Gegensatz zum Satellit keine Atomuhr befindet.

### 2.3.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten

Der mathematische Zusammenhang für erdfeste kartesische Positionsparameter kann erneut direkt übernommen werden.

$$y^{PR} = \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)^2} + c\Delta t \quad (\text{IV.2.34})$$

Die Einführung einer Störungsrechnung erlaubt den Übergang auf Zustandsstörungen.

$$y^{PR} = \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - (\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta\mathbf{x}_e))^2} + c \cdot (\tilde{\Delta t} + \delta\Delta t) \quad (\text{IV.2.35})$$

Linearisierung per Taylorreihenentwicklung ergibt:

$$y^{PR} = \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)^2} + c\tilde{\Delta t} + \left. \frac{\partial \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)^2}}{\partial \mathbf{x}_e^T} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_e} \cdot \delta\mathbf{x}_e + c\delta\Delta t + O^2 \quad (\text{IV.2.36})$$

Die Beobachtungsstörung definiert sich folgendermaßen:

$$\delta y^{PR} = y^{PR} - \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)^2} - c\tilde{\Delta t} \quad (\text{IV.2.37})$$

<sup>37</sup> Seeber, Günter; Satellitengeodäsie, Walter de Gruyter, New York 1989, S.274

Die Beobachtungsgleichung für ein GNSS-Pseudorangeupdate in erdfesten kartesischen Koordinaten lässt sich aus obiger Gleichung direkt ableiten.

$$\begin{aligned} \delta y^{PR} &= \frac{\partial \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)^2}}{\partial \mathbf{x}_e^T} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}_e} \cdot \delta \mathbf{x}_e + c \delta \Delta t \\ \delta y^{PR} &= {}^1 H^{PRp} \cdot \delta \mathbf{x}_e + {}^1 H^{PRc} \cdot \delta \Delta t \end{aligned} \quad (IV.2.38)$$

### 2.3.2 in gemischten Koordinaten

Zur Beschreibung des Pseudorangeupdates in erdfesten ellipsoidischen Positionsparametern muss der entsprechende funktionale Zusammenhang eingeführt werden.

$$y^{PR} = \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))^2} + c \Delta t \quad (IV.2.39)$$

Zerlegung der bisher fehlerfreien Größen in Näherungswerte und Zustandsfehler führt zu:

$$y^{PR} = \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda} + \delta \lambda))^2} + c \cdot (\Delta \tilde{t} + \delta \Delta t) \quad (IV.2.40)$$

Linearisierung des obigen nichtlinearen Zusammenhangs in eine Taylorreihe erlaubt die Verwendung im Kalmanfilter.

$$y^{PR} = \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}))^2} + c \Delta \tilde{t} + \frac{\partial \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))^2}}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda + c \delta \Delta t + O^2 \quad (IV.2.41)$$

Die Beobachtungsstörung lautet:

$$\delta y^{PR} = y^{PR} - \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}))^2} - c \Delta \tilde{t} \quad (IV.2.42)$$

Die Beobachtungsgleichung im gemischten Ansatz ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung (IV.2.42) in (IV.2.41).

$$\begin{aligned} \delta y^{PR} &= \frac{\partial \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))^2}}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda + c \delta \Delta t \\ \delta y^{PR} &= {}^2 H^{PRp} \cdot \delta \lambda + {}^2 H^{PRc} \cdot \delta \Delta t \end{aligned} \quad (IV.2.43)$$

### 2.3.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

Da die Parametrisierung der Position in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten analog zu den gemischten Koordinaten erfolgt und unabhängig von den Geschwindigkeitsparametern ist, können die Beobachtungsgleichungen aus Kapitel 2.3.2 übernommen werden.

$$\begin{aligned} \delta y^{PR} &= \frac{\partial \sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))^2}}{\partial \lambda^T} \Big|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda + c \delta \Delta t \\ \delta y^{PR} &= {}^3 H^{PRp} \cdot \delta \lambda + {}^3 H^{PRc} \cdot \delta \Delta t \end{aligned} \quad (IV.2.44)$$

## 2.4. für Rangeratebeobachtungen

Beim Rangerateupdate wird nicht die absolute Entfernung zwischen Satellit und Satellitenempfängers zur Stützung benutzt, sondern deren zeitliche Änderung. Der funktionale Zusammenhang ergibt sich nach folgender Definition:<sup>38</sup>

$$y^{RR} = \frac{(\mathbf{v}_{sat} - \mathbf{v}_e)^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)^2}} + c \Delta t \quad (IV.2.45)$$

Analog zur Ermittlung des Empfängeruhrfehlers beim Pseudorangeupdate ist beim Rangerateupdate die zeitliche Variation des Empfängeruhrfehlers  $\Delta \tilde{t}$  zu berücksichtigen.

<sup>38</sup> Hofmann-Wellenhof, B., Legat, K. & Wieser, M.; Navigation Principles of Positioning and Guidance, Springer Verlag, Wien 2003, S.35

### 2.4.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten

Analog zu den bisher gezeigten Stützvarianten kann für die erdfesten kartesischen Parameter obige Gleichung wiederum direkt übernommen werden.

$$y^{RR} = \frac{(\mathbf{v}_e^{sat} - \mathbf{v}_e)^T (\mathbf{x}_e^{sat} - \mathbf{x}_e)}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)^2}} + c\Delta t \quad (IV.2.46)$$

Einführung einer Störungsrechnung führt zu:

$$y^{RR} = \frac{(\mathbf{v}_e^{sat} - (\tilde{\mathbf{v}}_e + \delta\mathbf{v}_e))^T (\mathbf{x}_e^{sat} - (\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta\mathbf{x}_e))}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - (\tilde{\mathbf{x}}_e + \delta\mathbf{x}_e))^2}} + c(\Delta\tilde{t} + \delta\Delta t) \quad (IV.2.47)$$

Durch eine Taylorreihenentwicklung wird die benötigte Linearisierung der Gleichung (IV.2.47) erreicht.

$$\begin{aligned} y^{RR} &= \frac{(\mathbf{v}_{sat} - \tilde{\mathbf{v}}_e)^T (\mathbf{x}_{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)^2}} + c\Delta\tilde{t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_e^T} \left( \frac{(\mathbf{v}_{sat} - \tilde{\mathbf{v}}_e)^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)^2}} \right) \Bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}_e} \cdot \delta\mathbf{x}_e \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e^T} \left( \frac{(\mathbf{v}_{sat} - \mathbf{v}_e)^T (\mathbf{x}_{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)^2}} \right) \Bigg|_{\tilde{\mathbf{v}}_e} \cdot \delta\mathbf{v}_e + c\delta\Delta t + O^2 \end{aligned} \quad (IV.2.48)$$

Die Beobachtungsstörung definiert sich erneut als:

$$\delta y^{RR} = y^{RR} - \frac{(\mathbf{v}_e^{sat} - \tilde{\mathbf{v}}_e)^T (\mathbf{x}_e^{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)^2}} - c\Delta\tilde{t} \quad (IV.2.49)$$

Die Beobachtungsgleichung für ein Rangerrateupdate in erdfester kartesischer Parametrisierung lautet somit:

$$\begin{aligned} \delta y^{RR} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_e^T} \left( \frac{(\mathbf{v}_{sat} - \tilde{\mathbf{v}}_e)^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e)^2}} \right) \Bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}_e} \cdot \delta\mathbf{x}_e + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_e^T} \left( \frac{(\mathbf{v}_{sat} - \mathbf{v}_e)^T (\mathbf{x}_{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \tilde{\mathbf{x}}_e)^2}} \right) \Bigg|_{\tilde{\mathbf{v}}_e} \cdot \delta\mathbf{v}_e + c\delta\Delta t \\ \delta y^{RR} &= {}^1H^{RRp} \cdot \delta\mathbf{x}_e + {}^1H^{RRv} \cdot \delta\mathbf{v}_e + {}^1H^{RRc} \cdot \delta\Delta t \end{aligned} \quad (IV.2.50)$$

### 2.4.2 in gemischten Koordinaten

Bei der Parametrisierung in gemischten Koordinaten müssen die horizontfesten Geschwindigkeiten positionsabhängig ins erdfeste Bezugssystem transformiert werden.

$$y^{RR} = \frac{(\mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\lambda) \cdot \mathbf{v}_h)^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))^2}} + c\Delta t \quad (IV.2.51)$$

Die Definition der Störungsrechnung auf Zustandsebene führt zu:

$$y^{RR} = \frac{(\mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_h + \delta\mathbf{v}_h))^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda} + \delta\lambda))}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda} + \delta\lambda))^2}} + c \cdot (\Delta\tilde{t} + \delta\Delta t) \quad (IV.2.52)$$

Eine Linearisierung erfolgt analog zu den vorangegangenen Beobachtungsgleichungen über eine Taylorreihenentwicklung.

$$\begin{aligned} y^{RR} &= \frac{(\mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h)^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}))}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}))^2}} + c\Delta\tilde{t} + \frac{\partial}{\partial \lambda^T} \left( \frac{(\mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\lambda) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h)^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))^2}} \right) \Bigg|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta\lambda \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_h^T} \left( \frac{(\mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot \mathbf{v}_h)^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}))}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}))^2}} \right) \Bigg|_{\tilde{\mathbf{v}}_h} \cdot \delta\mathbf{v}_h + c\delta\Delta t + O^2 \end{aligned} \quad (IV.2.53)$$

Die Beobachtungsstörung heißt demnach:

$$\delta y^{RR} = y^{RR} - \frac{\left( \mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h \right)^T \left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)}{\sqrt{\left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)^2}} - c \Delta \dot{t} \quad (\text{IV.2.54})$$

Die Beobachtungsgleichung im gemischten Ansatz lautet:

$$\begin{aligned} \delta y^{RR} &= \frac{\partial}{\partial \lambda^T} \left( \frac{\left( \mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\lambda) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h \right)^T \left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda) \right)}{\sqrt{\left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda) \right)^2}} \right) \Bigg|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_h^T} \left( \frac{\left( \mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot \mathbf{v}_h \right)^T \left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)}{\sqrt{\left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)^2}} \right) \Bigg|_{\tilde{\mathbf{v}}_h} \cdot \delta \mathbf{v}_h + c \delta \Delta \dot{t} \quad (\text{IV.2.55}) \\ \delta y^{RR} &= {}^2 H^{RRp} \cdot \delta \lambda + {}^2 H^{RRv} \cdot \delta \mathbf{v}_h + {}^2 H^{RRc} \cdot \delta \Delta \dot{t} \end{aligned}$$

### 2.4.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

Für eine Darstellung in erdfesten ellipsoidischen Parametern müssen die horizontfesten Geschwindigkeiten noch entsprechend der Position gewichtet werden.

$$y^{RR} = \frac{\left( \mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\lambda) \cdot D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \right)^T \left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda) \right)}{\sqrt{\left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda) \right)^2}} + c \Delta \dot{t} \quad (\text{IV.2.56})$$

Die Störungsrechnung führt zu folgendem Zusammenhang:

$$y^{RR} = \frac{\left( \mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda} + \delta \lambda) \cdot D(\tilde{\lambda} + \delta \lambda) \cdot (\dot{\tilde{\lambda}} + \delta \dot{\lambda}) \right)^T \left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda} + \delta \lambda) \right)}{\sqrt{\left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda} + \delta \lambda) \right)^2}} + c \cdot (\Delta \dot{t} + \delta \Delta \dot{t}) \quad (\text{IV.2.57})$$

Eine Linearisierung per Taylorreihenentwicklung ergibt:

$$\begin{aligned} y^{RR} &= \frac{\left( \mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \right)^T \left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)}{\sqrt{\left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)^2}} + c \Delta \dot{t} + \frac{\partial}{\partial \lambda^T} \left( \frac{\left( \mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\lambda) \cdot D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} \right)^T \left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda) \right)}{\sqrt{\left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda) \right)^2}} \right) \Bigg|_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda \\ &+ \frac{\partial}{\partial \dot{\lambda}^T} \left( \frac{\left( \mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \right)^T \left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)}{\sqrt{\left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)^2}} \right) \Bigg|_{\dot{\tilde{\lambda}}} \cdot \delta \dot{\lambda} + c \delta \Delta \dot{t} + O^2 \quad (\text{IV.2.58}) \end{aligned}$$

Für die Beobachtungsstörung erhält man:

$$\delta y^{RR} = y^{RR} - \frac{\left( \mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\tilde{\lambda}} \right)^T \left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)}{\sqrt{\left( \mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}) \right)^2}} - c \Delta \dot{t} \quad (\text{IV.2.59})$$

Die Beobachtungsgleichung ergibt sich durch Kombination der Gleichungen (IV.2.58) und (IV.2.59).

$$\delta y^{RR} = \frac{\partial}{\partial \lambda^T} \left( \frac{(\mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\lambda) \cdot D(\lambda) \cdot \dot{\lambda})^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\lambda))^2}} \right)_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \lambda$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \dot{\lambda}^T} \left( \frac{(\mathbf{v}_{sat} - R_{eh}(\tilde{\lambda}) \cdot D(\tilde{\lambda}) \cdot \dot{\lambda})^T (\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}))}{\sqrt{(\mathbf{x}_{sat} - \mathbf{x}_e(\tilde{\lambda}))^2}} \right)_{\tilde{\lambda}} \cdot \delta \dot{\lambda} + c \delta \Delta t$$

$$\delta y^{RR} = {}^3H^{RRp} \cdot \delta \lambda + {}^3H^{RRv} \cdot \delta \dot{\lambda} + {}^3H^{RRc} \cdot \delta \Delta t$$
(IV.2.60)

Mit dieser Gleichung sind die für die Stützung eines INS mittels eines GNSS benötigten Beobachtungsgleichungen vollständig hergeleitet. Eine ausformulierte Darstellung befindet sich wiederum im Anhang. Auch hier wurde bewusst auf Vereinfachungen verzichtet.

## 2.5. für barometrische Höhenbeobachtungen

Neben Beobachtungen aus einem GNSS werden in der Luftfahrt auch Höhenbeobachtungen von barometrischen Höhenmessern verwendet.<sup>39</sup> Dies ist besonders bei eingeschränkter Verfügbarkeit von GNSS-Beobachtungen zur Stützung des exponentiell instabilen Höhenkanals sehr nützlich. Zudem erfolgt die Navigation im Bereich der zivilen Luftfahrt ausschließlich auf Grundlage barometrischer Höhen. Da es sich bei der barometrischen Höhe im Gegensatz zur bisher verwendeten ellipsoidischen Höhe  $h$  um eine physikalische Höhe handelt, ist eine direkte Vergleichbarkeit nicht gegeben. Aus diesem Grund ist in die Beobachtungsgleichung ein Term für die Höhendifferenz  $\Delta h$  zwischen diesen beiden Höhen mit einzuführen.

$$y^B = h + \Delta h \quad (IV.2.61)$$

Da die physikalische Abhängigkeit der barometrischen Höhendifferenz  $\Delta h$  von der realen Umwelt im Allgemeinen nicht bekannt ist, ist sie im Kalmanfilter mit zu schätzen.

### 2.5.1 in erdfesten kartesischen Koordinaten

Da sich die ellipsoidische Höhe  $h$ , wie im Anhang des Abschnitts II gezeigt, nicht direkt durch erdfeste kartesische Positionsparameter  $\mathbf{x}_e$  darstellen lässt, soll für die praktische Anwendung und in den Templates im Anhang auf den barometrischen Positionsupdate im Ansatz der erdfesten kartesischen Koordinaten verzichtet werden.

### 2.5.2 in gemischten Koordinaten

Der mathematische Zusammenhang für erdfeste ellipsoidische Positionsparameter kann direkt aus Gleichung (IV.2.61) übernommen werden.

$$y^B = h + \Delta h \quad (IV.2.62)$$

Die Einführung einer Störungsrechnung erlaubt den Übergang auf Zustandsstörungen.

$$y^B = \tilde{h} + \delta h + \Delta \tilde{h} + \delta \Delta h \quad (IV.2.63)$$

Eine Taylorreihenentwicklung zur Linearisierung muss auf Grund der schon vorhandenen Linearität in Gleichung (IV.2.63) nicht durchgeführt werden. Die Beobachtungsstörung ist definiert als:

$$\delta y^B = y^B - \tilde{h} - \Delta \tilde{h} \quad (IV.2.64)$$

Die Beobachtungsgleichung für ein barometrisches Höhenupdate in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten lautet somit:

$$\delta y^B = \delta h + \delta \Delta h$$

$$\delta y^B = {}^2H^{Bp} \cdot \delta \lambda + {}^2H^{Bh} \cdot \delta \Delta h$$
(IV.2.65)

<sup>39</sup> Brockhaus, Rudolf; Flugregelung – 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin 2001, S.295

### 2.5.3 in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten

Da die Parametrisierung der Position in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten analog zu den gemischten Koordinaten erfolgt und unabhängig von den Geschwindigkeitsparametern ist, kann die Beobachtungsgleichung aus Kapitel 2.5.2 direkt übernommen werden.

$$\begin{aligned} \delta y^B &= \delta h + \delta \Delta h \\ \delta y^B &= {}^3H^{Bp} \cdot \delta \lambda + {}^3H^{Bh} \cdot \delta \Delta h \end{aligned} \quad (\text{IV.2.66})$$

## 3. Fehlermodellierung

Neben der Definition der Beobachtungsmethoden inklusive der zugehörigen Beobachtungsgleichungen folgt in diesem Kapitel die Definition der noch ausstehenden Sensorfehlergrößen für die Messstörungen der IMU und der Erdschweremodellstörung gemäß Abschnitt III und für die Messstörungen des GNSS-Empfängers und des barometrischen Höhenmessers gemäß Kapitel 2 dieses Abschnitts. Die Störungsgrößen werden im Folgenden in detailliertere Sensorfehlermodelle zerlegt. Neben der algebraischen Betrachtung der Sensorfehlergrößen erfolgt zusätzlich eine stochastische Betrachtung und Definition. Die Schätzung der hier definierten Sensorfehler stellt einen integralen Part jedes modernen Navigationssystems dar. Der Verlust jeglicher Stützinformation kann durch diese Maßnahme besser kompensiert werden, da das Driftverhalten der Navigationslösung des INS im Allgemeinen signifikant eingeschränkt wird. Zudem sind Stützvarianten über ein GNSS-Rohdatenupdate ohne Schätzung der Empfängeruhrfehler nicht möglich.

### 3.1. Algebraische Fehlermodelle

Die algebraische Modellierung der Messstörungen erlaubt den Übergang auf detailliertere Sensorfehlermodelle. Vor allem für die IMU ergeben sich in diesem Zusammenhang eine Fülle von Modellierungsvariationen. Für die Modellierung der algebraischen Fehlermodelle bieten sich zwei alternative Vorgehensweisen an. Zum einen können die Fehlermodelle direkt anhand der realen physikalischen Sensorprinzipien modelliert werden.<sup>40</sup> Andererseits bieten generische Fehlermodelle eine universellere Herangehensweise.<sup>41</sup> Der erste Ansatz bietet sich vor allem für Sensoren mit vorab bekanntem physikalischen Messprinzip an. Zudem ist dieser Ansatz in der Kalibration zwingend zu verwenden, da hier die physikalischen sensortypischen Einschränkungen berücksichtigt werden müssen. Für die Untersuchungen dieser Arbeit, in der die vorab durchzuführende Kalibration nicht behandelt wird, werden prinzipiell generische Sensorfehlermodelle verwendet, um die Simulation unterschiedlicher Sensortypen zu ermöglichen. Wichtig in diesem Zusammenhang bleibt zudem die Abschätzung des Rechenaufwandes, da jeder modellierte Sensorfehler im CKF im Zustandsvektor mit abgebildet sein muss. Da der Rechenaufwand des CKF in der dritten Potenz von der Größe des Zustandsvektors abhängt, verbietet sich eine zu detaillierte Modellierung. Andererseits muss die Beobachtbarkeit jedes Sensorfehlers zumindest lokal gegeben sein. Unbeobachtbare Sensorfehler tragen nicht zur Verbesserung der Navigationslösung bei. In der Praxis geschieht die Entwicklung der Sensorfehlermodellierung meist iterativ zwischen Fehlermodellierung, Rechenzeitabschätzung und Beobachtbarkeitsanalyse in Abhängigkeit der zu Grunde liegenden Dynamik. Im Rahmen dieser Arbeit soll das Ergebnis dieser Überlegungen linear präsentiert werden. Dazu folgt in diesem Kapitel die Sensorfehlermodellierung.

#### 3.1.1 Kreisel

In Abschnitt III wurde für die Daten der Kreisel folgendes Modell angesetzt:

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (\text{IV.3.1})$$

Dabei besteht der wahre Wert der inertialen Drehraten  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$  aus der Summe der gemessenen Winkelgeschwindigkeiten  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$  und der im Allgemeinen nicht bekannten Winkelgeschwindigkeitsstörung  $\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ . Zerlegt man obiges Modell nicht weiter, so könnte mit Gleichung (IV.3.1) die Fehlercharakteristik eines Bias dargestellt werden. Im Bereich der Kreisel liefert die reine Modellierung eines Bias, vor allem bei längeren Ausfällen der Stützsensoren und bei von einem konstanten Verhalten abweichender Fehlercharakteristik, nur unzureichende Ergebnisse.

<sup>40</sup> IEEE Std 529-1980; Supplement for Strapdown Applications to IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Degree-of-Freedom Rate-Integrating Gyros, The Institute of Electrical and Electronics Engineering, New York 1980, S.4

<sup>41</sup> Lawrence, Anthony; Modern Inertial Technology Navigation, Guidance and Control – Second Edition, Springer Verlag, New York 1998, S.60

Aus diesem Grund wird für die Winkelgeschwindigkeitsstörung folgendes generisches Sensorfehlermodell definiert:

$$\delta\omega_{ib}^b = \mathbf{b}_g + K_g \tilde{\omega}_{ib}^b + MA_g \tilde{\omega}_{ib}^b \quad (\text{IV.3.2})$$

Neben einem Bias  $\mathbf{b}_g$  werden auch Skalenfaktorfehler  $\mathbf{k}_g$  und Misalignment  $\mathbf{ma}_g$  mit berücksichtigt. In der Praxis werden die beiden letzten oftmals in einer Matrix zusammengefasst. Ausformuliert lautet das Kreiselfehlermodell:

$$\begin{pmatrix} \delta\omega_{ib_1}^b \\ \delta\omega_{ib_2}^b \\ \delta\omega_{ib_3}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{g_1} \\ b_{g_2} \\ b_{g_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{g_1} & ma_{g_{12}} & ma_{g_{13}} \\ ma_{g_{21}} & k_{g_2} & ma_{g_{23}} \\ ma_{g_{31}} & ma_{g_{32}} & k_{g_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{ib_1}^b \\ \tilde{\omega}_{ib_2}^b \\ \tilde{\omega}_{ib_3}^b \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.3})$$

Ein etwas detaillierteres Sensorfehlermodell für Kreisel beinhaltet zusätzlich beschleunigungsabhängige Terme  $\mathbf{a}_g$ .

$$\begin{pmatrix} \delta\omega_{ib_1}^b \\ \delta\omega_{ib_2}^b \\ \delta\omega_{ib_3}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{g_1} \\ b_{g_2} \\ b_{g_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{g_1} & ma_{g_{12}} & ma_{g_{13}} \\ ma_{g_{21}} & k_{g_2} & ma_{g_{23}} \\ ma_{g_{31}} & ma_{g_{32}} & k_{g_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{ib_1}^b \\ \tilde{\omega}_{ib_2}^b \\ \tilde{\omega}_{ib_3}^b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{g_{11}} & a_{g_{12}} & a_{g_{13}} \\ a_{g_{21}} & a_{g_{22}} & a_{g_{23}} \\ a_{g_{31}} & a_{g_{32}} & a_{g_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_{b_1} \\ \tilde{f}_{b_2} \\ \tilde{f}_{b_3} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.4})$$

Im weiteren Verlauf soll jedoch das vereinfachte Sensorfehlermodell verwendet werden. Das erweiterte Sensorfehlermodell aus Gleichung (IV.3.4) dient nur zu Abschätzungszwecken im Bereich der Beobachtbarkeitsanalyse und der Kalmanfilteroptimierung.

### 3.1.2 Beschleunigungsmesser

Analog zu den Kreiseln gilt für die Beschleunigungsmesser:

$$\mathbf{f}_b = \tilde{\mathbf{f}}_b + \delta\mathbf{f}_b \quad (\text{IV.3.5})$$

Auch hier ergibt sich der wahre Wert der Beschleunigungen  $\mathbf{f}_b$  als Summe zwischen den Messungen der Beschleunigungsmesser  $\tilde{\mathbf{f}}_b$  und den Beschleunigungsstörungen  $\delta\mathbf{f}_b$ . Die Einführung eines generischen Sensorfehlermodells führt zu:

$$\delta\mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a + K_a \tilde{\mathbf{f}}_b + MA_a \tilde{\mathbf{f}}_b \quad (\text{IV.3.6})$$

Neben dem Bias  $\mathbf{b}_a$  werden auch hier Skalenfaktorfehler  $\mathbf{k}_a$  und Misalignment  $\mathbf{ma}_a$  modelliert. Skalar ausformuliert ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \delta f_{b_1} \\ \delta f_{b_2} \\ \delta f_{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{a_1} \\ b_{a_2} \\ b_{a_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{a_1} & ma_{a_{12}} & ma_{a_{13}} \\ ma_{a_{21}} & k_{a_2} & ma_{a_{23}} \\ ma_{a_{31}} & ma_{a_{32}} & k_{a_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_{b_1} \\ \tilde{f}_{b_2} \\ \tilde{f}_{b_3} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.7})$$

Das erweiterte Modell führt unter Berücksichtigung von Kreuzkopplungseffekten  $\mathbf{cc}_a$  zu:

$$\begin{pmatrix} \delta f_{b_1} \\ \delta f_{b_2} \\ \delta f_{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{a_1} \\ b_{a_2} \\ b_{a_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{a_1} & ma_{a_{12}} & ma_{a_{13}} \\ ma_{a_{21}} & k_{a_2} & ma_{a_{23}} \\ ma_{a_{31}} & ma_{a_{32}} & k_{a_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_{b_1} \\ \tilde{f}_{b_2} \\ \tilde{f}_{b_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}_{b_1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{f}_{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f}_{b_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cc_{a_{11}} & cc_{a_{12}} & cc_{a_{13}} \\ cc_{a_{21}} & cc_{a_{22}} & cc_{a_{23}} \\ cc_{a_{31}} & cc_{a_{32}} & cc_{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_{b_1} \\ \tilde{f}_{b_2} \\ \tilde{f}_{b_3} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.8})$$

Auch dieses erweiterte Modell wird lediglich zu Abschätzungszwecken definiert.

### 3.1.3 Erdschweremodell

In der Modellierung des Erdschwerfeldes in Kapitel 1 wurde je nach Parametrisierung zwischen zwei alternativen Schwerfeldmodellen unterschieden. Für den Bereich der Sensorfehlermodellierung ist diese Unterscheidung jedoch nicht relevant.

$$\mathbf{g}_e = \tilde{\mathbf{g}}_e + \delta\mathbf{g}_e \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_h = \tilde{\mathbf{g}}_h + \delta\mathbf{g}_h \quad (\text{IV.3.9})$$

Der einzige Unterschied zwischen den beiden Varianten findet sich im Referenzkoordinatensystem der Sensorfehlerschätzung. Durch eine Rotation können diese jederzeit ineinander überführt werden. Für den Bereich der Navigation ist die Modellierung der Schwerefeldmodellstörung über einen Bias völlig ausreichend.

$$\delta \mathbf{g}_e = \mathbf{b}_e \quad \text{bzw.} \quad \delta \mathbf{g}_h = \mathbf{b}_e \quad (\text{IV.3.10})$$

Eine skalare Auflösung führt zu:

$$\begin{pmatrix} \delta g_{e_1} \\ \delta g_{e_2} \\ \delta g_{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{e_1} \\ b_{e_2} \\ b_{e_3} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \delta g_{h_1} \\ \delta g_{h_2} \\ \delta g_{h_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{e_1} \\ b_{e_2} \\ b_{e_3} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.11})$$

Theoretisch stellt die Berücksichtigung der Schwerefeldmodellstörung den Einstieg in die Vektorgravimetrie dar.<sup>42</sup> Alternativ wäre auch eine Modellierung der Schwerefeldmodellstörung über Lotabweichungen denkbar. Dies soll jedoch hier nicht weiter verfolgt werden.

### 3.1.4 Global Navigation Satellite System

Die Fehlermodellierung im Bereich GNSS beschränkt sich auf den Empfängeruhrfehler.

$$\Delta t = \Delta \tilde{t} + \delta \Delta t \quad (\text{IV.3.12})$$

In die Modellierung muss neben einem Bias auch die Drift des Empfängeruhrfehlers zur Kompensation des Laufzeitfehlers in Rangeratebeobachtungen gemäß Kapitel 2.4 beachtet werden.

$$\delta \Delta t = b_c + d_c \cdot (t - t_0) \quad (\text{IV.3.13})$$

Die Empfängeruhrdrift ergibt sich durch zeitliche Ableitung.

$$\delta \Delta \dot{t} = d_c \quad (\text{IV.3.14})$$

### 3.1.5 Barometrischer Höhenmesser

Die Differenz zwischen barometrischer und geometrischer Höhe heißt per Definition aus Gleichung (IV.2.61) und unter Berücksichtigung der Störungsrechnung:

$$\Delta h = \Delta \tilde{h} + \delta \Delta h \quad (\text{IV.3.15})$$

Die barometrische Höhendifferenz  $\Delta h$  hängt hauptsächlich von physikalischen Gegebenheiten wie der Temperatur oder dem Luftdruck ab. Diese Einflussgrößen sind über große räumliche Distanzen und damit über längere Zeit weitgehend stabil. Aus diesem Grund ist es völlig ausreichend, die barometrische Höhendifferenzstörung  $\delta \Delta h$  über einen Bias  $b_h$  zu modellieren.

$$\delta \Delta h = b_h \quad (\text{IV.3.16})$$

## 3.2. Dynamische Verhaltensmodelle

Neben der algebraischen Modellierung der Sensorfehler müssen Aussagen über deren stochastische Verhaltensmodelle gegeben werden.<sup>43</sup> Es lassen sich abhängig vom dynamischen Verhalten der entsprechenden Sensorfehler die nachfolgenden Modelle entwickeln:

<sup>42</sup> Knickmeyer, Elfriede T.; Vector Gravimetry by a Combination of Inertial and GPS Satellite Measurements, UCSE Reports Number 20035, Calgary 1990

<sup>43</sup> Maybeck, Peter S.; Stochastic Models, Estimation and Control – Volume 1, Mathematics in Science and Engineering Vol.141-1, Academic Press, New York 1979, S.183

### 3.2.1 Weißes Rauschen

Der Trivialfall der dynamischen Verhaltensmodelle ist weißes Rauschen.

$$\begin{aligned} z(t) &= w(t) \\ w(t) &\sim N(0, \sigma_w^2) \\ z_0 &= 0 \end{aligned} \tag{IV.3.17}$$

Das weiße Rauschen ist definiert über die Standardabweichung  $\sigma_w$  des bestimmenden Rauschprozesses  $w(t)$ . Weißes Rauschen kann zur Modellierung von Sensorfehlern benutzt werden, deren Mittelwerte als konstant vorausgesetzt werden können, in deren Realisierung jedoch gewisse Unsicherheiten auftreten.

### 3.2.2 Random Constant

Der Random Constant ist definiert über den Mittelwert  $\mu_w$  und die Standardabweichung  $\sigma_w$  des seiner Anfangsbedingung  $z_0$  zu Grunde liegenden Rauschprozesses  $w(t)$ .

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= 0 \\ z_0 &\sim N(\mu_w, \sigma_w^2) \end{aligned} \tag{IV.3.18}$$

Der Random Constant eignet sich besonders zur Modellierung so genannter switch-on switch-off Effekte bei Kreiseln. Dabei handelt es sich um Sensorfehler, die von Anwendung zu Anwendung variieren, während einer Anwendung jedoch konstant bleiben. Beim Random Constant bleibt zu beachten, dass die in der Initialisierung des Rauschprozesses  $w(t)$  bestimmte Anfangsbedingung  $z_0$  auf Grund der Standardabweichung nicht mehr verändert werden kann.

### 3.2.3 Random Walk

Der Random Walk ist definiert über die Standardabweichung  $\sigma_w$  des Rauschprozesses der ersten zeitlichen Ableitung der Zufallsvariable.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= w(t) \\ w(t) &\sim N(0, \sigma_w^2) \\ z_0 &= 0 \end{aligned} \tag{IV.3.19}$$

Der Random Walk eignet sich zur Modellierung von anfangs bekannten Effekten, deren Mittelwerte allerdings über die Zeit leicht drifteten.

### 3.2.4 Gauß-Markov-Prozess 1. Ordnung

Der Gauß-Markov-Prozess 1. Ordnung erweitert das aus Random Constant und Random Walk kombinierte dynamische Verhaltensmodell aus dem vorigen Kapitel um ein gewichtetes Feedback der Zufallsvariable.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) + k \cdot z(t) &= w(t) \\ w(t) &\sim N(0, \sigma_w^2) \\ z_0 &\sim N(\mu_v, \sigma_v^2) \end{aligned} \tag{IV.3.20}$$

Die zu Grunde liegenden Rauschprozesse  $w(t)$  und  $v(t)$  definieren sich über den Mittelwert  $\mu_v$  und die Standardabweichungen  $\sigma_v$  und  $\sigma_w$ . Mit Gauß-Markov-Prozessen 1. Ordnung lassen sich Sensorfehler modellieren, deren Mittelwerte sich asymptotisch Null annähern. Es ist vor allem für Sensorfehler mit dynamischem Verhalten des Mittelwertes günstig, diesen bis zum Vorliegen einer neuen Schätzung abklingen zu lassen. Neben den genannten dynamischen Verhaltensmodellen für Sensorfehler existieren noch weitere Modelle wie beispielsweise der Gauß-Markov-Prozess 2. Ordnung. Diese Modelle erfordern mehr als eine Zustandsvariable im Kalmanfilter. Dies kann im Rahmen dieser Arbeit wegen der in Abschnitt VI noch zu zeigenden Auswirkungen auf das Gesamtsystem nicht akzeptiert werden. Auf Grund der größten Variabilität bei einer Zustandsvariablen wird im weiteren Verlauf der Gauß-Markov-Prozess 1. Ordnung als dynamisches Verhaltensmodell für alle Sensorfehler implementiert.

## 4. Modellbildung

In der Modellbildung sollen die bisher dargestellten Einzelmodelle zu einem Gesamtmodell verknüpft werden. Da für alle bisher präsentierten Einzelmodelle bereits eine Störungsrechnung durchgeführt wurde, kann das Gesamtmodell in Zustandsstörungen formuliert werden. Folgende Einzelparameter sind dabei einzubeziehen: Aus den in Abschnitt III ausführlich erläuterten drei Ansätzen zur Parametrisierung der Navigationsparameter ist ein Parametrisierungsansatz mit seinen neun Zustandsstörungen zu wählen. Hier soll exemplarisch Ansatz 2 in erdfester ellipsoidischer Positions- und horizontfester kartesischer Geschwindigkeitsparametrisierung gewählt werden. Die Ansätze 1 und 3 verhalten sich analog, wobei bei Ansatz 1 die Möglichkeit der Verarbeitung barometrischer Höhendaten gemäß Kapitel 2.5.1 nicht gegeben ist. Zusätzlich soll die Möglichkeit der Verarbeitung von GNSS-Rohdaten bestehen. Aus diesem Grund müssen die Empfängeruhrfehlerparameter mit ins Modell einfließen. Daneben soll die Implementierung einer Stützung mit barometrischen Höhen ermöglicht werden. Die barometrische Höhendifferenzstörung muss deshalb im Modell berücksichtigt werden. Im Bereich der IMU sind die in Kapitel 3.1.1 und 3.1.2 dieses Abschnitts definierten Sensorfehlermodellparameter mit einzubeziehen. Abschließend verbleiben noch die Terme der Erdschwerermodellfehler ebenfalls aus diesem Abschnitt.

### 4.1. Erweiterung des Zustandsvektors

Zusammenfassend lautet der Zustandsvektor für das Gesamtmodell:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}^p & : & \text{Position} & (3) \\ \mathbf{z}^v & : & \text{Geschwindigkeit} & (3) \\ \mathbf{z}^r & : & \text{Orientierung} & (3) \\ \mathbf{z}^c & : & \text{Empfängeruhrfehler} & (2) \\ \mathbf{z}^h & : & \text{barometrische Höhendifferenz} & (1) \\ \mathbf{z}^g & : & \text{Kreisel} & (12) \\ \mathbf{z}^a & : & \text{Beschleunigungsmesser} & (12) \\ \mathbf{z}^e & : & \text{Erdschwerermodell} & (3) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.1})$$

In Klammern ist die jeweilige Anzahl der Zustände angegeben. Insgesamt vergrößert sich der Zustandsvektor somit auf 39 Variablen. Bei Verwendung der komplexeren Sensorfehlermodelle für Kreisel- und Beschleunigungsmesser aus den Gleichungen (IV.3.4) und (IV.3.8) würden sich sogar 57 Zustandsvariablen ergeben. Einzeln aufgeschlüsselt lautet der Subvektor für die Position:

$$\mathbf{z}^p = \begin{pmatrix} \delta\lambda \\ \delta\phi \\ \delta h \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.2})$$

Der Subvektor für die Geschwindigkeit ist:

$$\mathbf{z}^v = \begin{pmatrix} \delta v_{h_1} \\ \delta v_{h_2} \\ \delta v_{h_3} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.3})$$

Die Definition des Subvektors für die Orientierung lautet:

$$\mathbf{z}^r = \begin{pmatrix} \varphi_{hh} \\ \vartheta_{hh} \\ \psi_{hh} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.4})$$

Weiterhin ergibt sich für die Empfängeruhrfehler:

$$\mathbf{z}^c = \begin{pmatrix} b_t \\ d_t \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.5})$$

Die barometrische Höhendifferenz ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{z}^h = b_h \quad (\text{IV.4.6})$$

Die Kreiselfehlerparameter sind:

$$\mathbf{z}^g = \begin{pmatrix} b_{g_1} \\ b_{g_2} \\ b_{g_3} \\ k_{g_1} \\ ma_{g_{12}} \\ ma_{g_{13}} \\ ma_{g_{21}} \\ k_{g_2} \\ ma_{g_{23}} \\ ma_{g_{31}} \\ ma_{g_{32}} \\ k_{g_3} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.7})$$

Analog gilt für die Beschleunigungsmesserfehlerparameter:

$$\mathbf{z}^a = \begin{pmatrix} b_{a_1} \\ b_{a_2} \\ b_{a_3} \\ k_{a_1} \\ ma_{a_{12}} \\ ma_{a_{13}} \\ ma_{a_{21}} \\ k_{a_2} \\ ma_{a_{23}} \\ ma_{a_{31}} \\ ma_{a_{32}} \\ k_{a_3} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.8})$$

Die Erdschweremodellfehlerparameter lauten:

$$\mathbf{z}^e = \begin{pmatrix} b_{e_1} \\ b_{e_2} \\ b_{e_3} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.9})$$

## 4.2. Dynamisches Modell

Das in Abschnitt III hergeleitete dynamische Modell muss nur geringfügig verändert werden, um eine Verwendung im Gesamtmodell zu ermöglichen. Die in Abschnitt III definierte Dynamikmatrix  $A$  kann direkt als Dynamiksubmatrix  $A^{nm}$  übernommen werden. Da die Eingangsgrößen nunmehr in den Zustandsvektor übernommen wurden, kann die Kontrollmatrix  $B$  aus Abschnitt III als Ausgangspunkt für die Dynamiksubmatrix  $A^{ns}$  genutzt werden. Zusätzlich berücksichtigt werden muss die Tatsache, dass die generischen Störungsgrößen aus Abschnitt III für Kreisel und Beschleunigungsmesser durch detailliertere Sensorfehlermodelle ersetzt wurden. Deshalb sind die partiellen Ableitungen der generischen Störungsgrößen nach den detaillierten Sensorfehlern mit zu berücksichtigen. Da die Empfängeruhrfehler und die barometrische Höhendifferenz keinen Einfluss auf die Navigationsstörungen im dynamischen Modell haben, brauchen sie hier nicht näher betrachtet zu werden. Die Fehlerparameter an sich sind alle über einen Gauß-Markov-Prozess 1. Ordnung gemäß Kapitel 3.2.4 realisiert.

Es ergibt sich folgende Aufteilung der Dynamikmatrix der Zustände:

$$A = \begin{pmatrix} A^{pp} & A^{pv} & \mathbf{0} \\ & A^{vp} & A^{vv} & A^{vr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{va} & A^{ve} \\ & A^{rp} & A^{rv} & A^{rr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{rg} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{hh} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{gg} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{aa} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{ee} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.10})$$

Der Submatrizenblock links oben lässt sich direkt aus den Modellen des Abschnitts III übernehmen. Für die drei von Null verschiedenen Submatrizen des rechten oberen Blocks lautet der mathematische Zusammenhang:

$$\begin{aligned} A^{rg} &= R_{hb} \cdot \frac{\partial \delta \omega_{ib}^b}{\partial \mathbf{z}^{gT}} \\ A^{va} &= R_{hb} \cdot \frac{\partial \delta f_b}{\partial \mathbf{z}^{aT}} \\ A^{ve} &= I_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (\text{IV.4.11})$$

Die Submatrizen im mittleren und rechten unteren Submatrizenblock beinhalten lediglich Diagonalmatrizen mit den Abklingkoeffizienten der Gauß-Markov-Prozesse 1. Ordnung. Unsicherheit kann im Gesamtsystem neben dem Prozessrauschen der Gauß-Markov-Prozesse 1. Ordnung zusätzlich durch additives weißes Sensorrauschen der Kreisel und Beschleunigungsmesser zugeführt werden. Dies ermöglicht zum Beispiel eine Modellierung von Vibrationseffekten und Messunsicherheiten in der IMU. Die weiteren Submatrizen können direkt aus der Kontrollmatrix des Abschnitts III entnommen werden. Der Eingangsvektor setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$s = \begin{pmatrix} s^c \\ s^h \\ s^g \\ s^a \\ s^e \\ s^\omega \\ s^f \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Empfängeruhrfehler (2)} \\ \text{barometrische Höhendifferenz (1)} \\ \text{Kreisel (12)} \\ \text{Beschleunigungsmesser (12)} \\ \text{Erdschweremodell (3)} \\ \text{Winkelgeschwindigkeit (3)} \\ \text{Beschleunigung (3)} \end{array} \quad (\text{IV.4.12})$$

Die Aufteilung der Vektoren entspricht der des Zustandsvektors. Die zusätzlichen Eingänge des IMU-Rauschens beeinflussen direkt die gemessene Gesamtwinkelgeschwindigkeit beziehungsweise -beschleunigung.

Die zugehörige Koeffizientenmatrix des Sensorrauschens lautet:

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & B^{vf} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & B^{r\omega} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hline I_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 12} & \mathbf{0}_{2 \times 12} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & I_{1 \times 1} & \mathbf{0}_{1 \times 12} & \mathbf{0}_{1 \times 12} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \hline \mathbf{0}_{12 \times 2} & \mathbf{0}_{12 \times 1} & I_{12 \times 12} & \mathbf{0}_{12 \times 12} & \mathbf{0}_{12 \times 3} & \mathbf{0}_{12 \times 3} & \mathbf{0}_{12 \times 3} \\ \mathbf{0}_{12 \times 2} & \mathbf{0}_{12 \times 1} & \mathbf{0}_{12 \times 12} & I_{12 \times 12} & \mathbf{0}_{12 \times 3} & \mathbf{0}_{12 \times 3} & \mathbf{0}_{12 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & \mathbf{0}_{3 \times 12} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (IV.4.13)$$

Die benötigten Submatrizen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} B^{rg} &= R_{hb} \\ B^{va} &= R_{hb} \end{aligned} \quad (IV.4.14)$$

### 4.3. Beobachtungsmodell

Das Beobachtungsmodell kann direkt aus Kapitel 2 dieses Abschnitts übernommen werden, da die erweiterten Sensorfehlermodelle für die IMU auf die Beobachtungsgleichungen keinen Einfluss haben. Die Anzahl der beobachtbaren Satelliten sei  $m$ . Der Beobachtungsvektor lautet:

$$y = \begin{pmatrix} y^{PR} \\ y^{RR} \\ y^B \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Pseudorange } (m) \\ \text{Rangerate } (m) \\ \text{barometrische Höhe } (1) \end{array} \quad (IV.4.15)$$

Die Beobachtungsmatrix setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$H = \begin{pmatrix} H^{PRp} & \mathbf{0}_{m \times 3} & \mathbf{0}_{m \times 3} & H^{PRc} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 12} & \mathbf{0}_{m \times 12} & \mathbf{0}_{m \times 3} \\ H^{RRp} & H^{RRv} & \mathbf{0}_{m \times 3} & H^{RRc} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 12} & \mathbf{0}_{m \times 12} & \mathbf{0}_{m \times 3} \\ \hline H^{Bp} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & H^{Bh} & \mathbf{0}_{1 \times 12} & \mathbf{0}_{1 \times 12} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{pmatrix} \quad (IV.4.16)$$

Lediglich die Modellierung der Empfängeruhrfehler über Bias und Drift erfordert zusätzliche partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} H^{PRc} &= (c \quad c \cdot (t - t_0)) \\ H^{RRc} &= (0 \quad c) \end{aligned} \quad (IV.4.17)$$

## 5. Zusammenfassung

Ziele dieses Abschnitts waren die Definition der noch mit Platzhaltern belegten Erdschwereremodelle, die Herleitung der Beobachtungsgleichungen analog zum Berechnungsgang des Abschnitts III und die Verknüpfung der Navigationszustände und der Sensorfehlermodelle zu einem Gesamtsystem. Im ersten Kapitel wurden zwei alternative Ansätze zur Formulierung des Erdschwerermodells vorgestellt. Diese haben je nach gewählter Parametrisierung mathematische Vorteile. Im Folgenden wurden die Beobachtungsgleichungen für die GNSS-Stützung und den barometrischen Höhenupdate in gleicher Art und Weise wie die Navigationsgleichungen in Abschnitt III für alle drei Parametrisierungen hergeleitet. Eine ausführliche Darstellung dieser Beobachtungsgleichungen in skalarer Schreibweise findet sich wiederum in den Templates am Ende dieses Abschnitts. Ein fehlerfreier Kalmanfilter hätte mit den nun vorliegenden Gleichungen bereits implementiert werden können. Da reale Sensoren immer über gewisse Sensorfehler verfügen und diese Messfehler bei den inertialen Sensoren nicht vernachlässigt werden können, erfolgte eine Definition der im weiteren Verlauf benutzten Sensorfehlermodelle. Anschließend wurden die noch unabhängigen Modelle der

Navigationszustände und der Sensorfehler zu einem Gesamtsystem verknüpft. Aus Kapazitätsgründen wurde sich auf die Parametrisierung des Ansatzes 2 beschränkt, jedoch lassen sich die beiden anderen Parametrisierungen wegen der relativen Einfachheit der Sensorfehlermodelle schnell bei Bedarf selbst zusammenstellen. Als Endergebnis dieses Abschnitts liegt nun aus Kapitel 4 ein Gesamtsystem zur Implementierung in einem Kalmanfilter vor. Dieses Gesamtsystem muss jedoch in Abschnitt VI noch diskretisiert und optimiert werden. Die Beobachtungsgleichungen in den Anhängen sind analog zu den Anhängen des Abschnitts III zusammengestellt und erlauben erneut eine direkte und unabhängige Verwendung ohne die Herleitungen in den einzelnen Kapiteln.

# A Beobachtungsgleichungen zu Ansatz 1

## Nichtlineare Beobachtungsgleichungen fehlerfrei in absoluten Zuständen

$$y = h(z)$$

**Zustandsvektor in absoluten Navigationszuständen:**

$$z = (x_{e_1} \ x_{e_2} \ x_{e_3} \ v_{e_1} \ v_{e_2} \ v_{e_3} \ q_{eb_0} \ q_{eb_1} \ q_{eb_2} \ q_{eb_3} \ \Delta t \ \Delta t)^T$$

**Beobachtungsvektor in absoluten Beobachtungen:**

Positionsupdate

$$y^P = (y_1^P \ y_2^P \ y_3^P)^T$$

Geschwindigkeitsupdate

$$y^V = (y_1^V \ y_2^V \ y_3^V)^T$$

Pseudorangeupdate

$$y^{PR} = y^{PR}$$

Rangerateupdate

$$y^{RR} = y^{RR}$$

**Beobachtungsgleichungssystem:**

Positionsupdate

$$y_1^P = x_{e_1}$$

$$y_2^P = x_{e_2}$$

$$y_3^P = x_{e_3}$$

Geschwindigkeitsupdate

$$y_1^V = v_{e_1}$$

$$y_2^V = v_{e_2}$$

$$y_3^V = v_{e_3}$$

Pseudorangeupdate

$$y^{PR} = \sqrt{(x_{sat_1} - x_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - x_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - x_{e_3})^2} + c\Delta t$$

Rangerateupdate

$$y^{RR} = \frac{(v_{sat_1} - v_{e_1})(x_{sat_1} - x_{e_1}) + (v_{sat_2} - v_{e_2})(x_{sat_2} - x_{e_2}) + (v_{sat_3} - v_{e_3})(x_{sat_3} - x_{e_3})}{\sqrt{(x_{sat_1} - x_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - x_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - x_{e_3})^2}} + c\Delta t$$

**Legende:**

absolute Navigationszustände

$$\mathbf{x}_e = (x_{e_1} \ x_{e_2} \ x_{e_3})^T$$

*Position in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_e = (v_{e_1} \ v_{e_2} \ v_{e_3})^T$$

*Geschwindigkeit in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\bar{q}_{eb} = (q_{eb_0} \ q_{eb_1} \ q_{eb_2} \ q_{eb_3})^T$$

*Rotationsquaternion vom körperfesten ins erdfeste Bezugssystem*

$$\Delta \mathbf{t} = (\Delta t \ \Delta t)^T$$

*Empfängeruhrfehler*

absolute Beobachtungen

$$y^P = (y_1^P \ y_2^P \ y_3^P)^T$$

*Position des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$y^V = (y_1^V \ y_2^V \ y_3^V)^T$$

*Geschwindigkeit des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$y^{PR} = y^{PR}$$

*Pseudorange zwischen Empfänger und Satellit*

$$y^{RR} = y^{RR}$$

*Rangerate zwischen Empfänger und Satellit*

Satellitenparameter

$$\mathbf{x}_{sat} = (x_{sat_1} \ x_{sat_2} \ x_{sat_3})^T$$

*Position des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_{sat} = (v_{sat_1} \ v_{sat_2} \ v_{sat_3})^T$$

*Geschwindigkeit des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

Physikalische Konstanten

$c$

*Lichtgeschwindigkeit*

## Nichtlineare Beobachtungsgleichungen in Zustandsfehlern

$$\delta \mathbf{y} = h(\tilde{\mathbf{z}} + \delta \mathbf{z}) - h(\tilde{\mathbf{z}})$$

### Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:

$$\delta \mathbf{z} = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3} \quad \delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3} \quad \varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}} \quad \delta \Delta t \quad \delta \Delta t)^T$$

### Beobachtungsvektor in Beobachtungsstörungen:

Positionsupdate

$$\delta \mathbf{y}^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

Geschwindigkeitsupdate

$$\delta \mathbf{y}^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

Pseudorangeupdate

$$\delta \mathbf{y}^{PR} = \delta y^{PR}$$

Rangerateupdate

$$\delta \mathbf{y}^{RR} = \delta y^{RR}$$

### Beobachtungsgleichungssystem:

Positionsupdate

$$\delta y_1^P = \delta x_{e_1}$$

$$\delta y_2^P = \delta x_{e_2}$$

$$\delta y_3^P = \delta x_{e_3}$$

Geschwindigkeitsupdate

$$\delta y_1^V = \delta v_{e_1}$$

$$\delta y_2^V = \delta v_{e_2}$$

$$\delta y_3^V = \delta v_{e_3}$$

Pseudorangeupdate

$$\delta y^{PR} = \sqrt{(x_{sat_1} - (\tilde{x}_{e_1} + \delta x_{e_1}))^2 + (x_{sat_2} - (\tilde{x}_{e_2} + \delta x_{e_2}))^2 + (x_{sat_3} - (\tilde{x}_{e_3} + \delta x_{e_3}))^2} - \sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2} + c \delta \Delta t$$

Rangerateupdate

$$\delta y^{RR} = \frac{(v_{sat_1} - (\tilde{v}_{e_1} + \delta v_{e_1}))(x_{sat_1} - (\tilde{x}_{e_1} + \delta x_{e_1})) + (v_{sat_2} - (\tilde{v}_{e_2} + \delta v_{e_2}))(x_{sat_2} - (\tilde{x}_{e_2} + \delta x_{e_2})) + (v_{sat_3} - (\tilde{v}_{e_3} + \delta v_{e_3}))(x_{sat_3} - (\tilde{x}_{e_3} + \delta x_{e_3}))}{\sqrt{(x_{sat_1} - (\tilde{x}_{e_1} + \delta x_{e_1}))^2 + (x_{sat_2} - (\tilde{x}_{e_2} + \delta x_{e_2}))^2 + (x_{sat_3} - (\tilde{x}_{e_3} + \delta x_{e_3}))^2}} - \frac{(v_{sat_1} - \tilde{v}_{e_1})(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1}) + (v_{sat_2} - \tilde{v}_{e_2})(x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2}) + (v_{sat_3} - \tilde{v}_{e_3})(x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} + c \delta \Delta t$$

### Legende:

Navigationszustandsstörungen

$$\delta \mathbf{x}_e = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3})^T$$

*Positionsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{v}_e = (\delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\boldsymbol{\psi}_{e\tilde{e}} = (\varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}})^T$$

*Eulerwinkel vom erdfesten Näherungsbezugssystem ins erdfeste Bezugssystem*

$$\delta \Delta t = (\delta \Delta t \quad \delta \Delta t)^T$$

*Empfängeruhrfehlerstörung*

Beobachtungsstörungen

$$\delta \mathbf{y}^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

*Positionsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{y}^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

*Geschwindigkeitsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{y}^{PR} = \delta y^{PR}$$

*Pseudorangestörung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta \mathbf{y}^{RR} = \delta y^{RR}$$

*Rangeratestörung zwischen Empfänger und Satellit*

Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\mathbf{x}}_e = (\tilde{x}_{e_1} \quad \tilde{x}_{e_2} \quad \tilde{x}_{e_3})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\tilde{\mathbf{v}}_e = (\tilde{v}_{e_1} \quad \tilde{v}_{e_2} \quad \tilde{v}_{e_3})^T$$

*Näherungsgeschwindigkeit in erdfesten kartesischen Koordinaten*

Satellitenparameter

$$\mathbf{x}_{sat} = (x_{sat_1} \quad x_{sat_2} \quad x_{sat_3})^T$$

*Position des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_{sat} = (v_{sat_1} \quad v_{sat_2} \quad v_{sat_3})^T$$

*Geschwindigkeit des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

Physikalische Konstanten

$c$

*Lichtgeschwindigkeit*

## Linearisierte Beobachtungsgleichungen in Zustandsfehlern

$$\delta y = H \cdot \delta z$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta x_{e_1} \ \delta x_{e_2} \ \delta x_{e_3} \ \delta v_{e_1} \ \delta v_{e_2} \ \delta v_{e_3} \ \varphi_{e\bar{e}} \ \vartheta_{e\bar{e}} \ \psi_{e\bar{e}} \ \delta \Delta t \ \delta \Delta t)^T$$

**Beobachtungsvektor in Beobachtungsstörungen:**

Positionsupdate

$$\delta y^p = (\delta y_1^p \ \delta y_2^p \ \delta y_3^p)^T$$

Geschwindigkeitsupdate

$$\delta y^v = (\delta y_1^v \ \delta y_2^v \ \delta y_3^v)^T$$

Pseudorangeupdate

$$\delta y^{PR} = \delta y^{PR}$$

Rangerateupdate

$$\delta y^{RR} = \delta y^{RR}$$

**Beobachtungsmatrix:**

Positionsupdate

$${}^1 H^p = ({}^1 H^{pp} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0})$$

$${}^1 H^{pp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsupdate

$${}^1 H^v = (\mathbf{0} \ {}^1 H^{vv} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0})$$

$${}^1 H^{vv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pseudorangeupdate

$${}^1 H^{PR} = ({}^1 H^{PRp} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ {}^1 H^{PRc})$$

$${}^1 H^{PRp} = \left( \begin{array}{c|c|c} \frac{-(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} & \frac{-(x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} & \frac{-(x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} \end{array} \right)$$

$${}^1 H^{PRc} = (c \ 0)$$

Rangerateupdate

$${}^1 H^{RR} = ({}^1 H^{RRp} \ {}^1 H^{RRv} \ \mathbf{0} \ {}^1 H^{RRc})$$

$${}^1 H^{RRp} = \left( \begin{array}{c|c|c} \frac{-(v_{sat_1} - \tilde{v}_{e_1})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} & \frac{-(v_{sat_2} - \tilde{v}_{e_2})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} & \frac{-(v_{sat_3} - \tilde{v}_{e_3})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} \\ \frac{\begin{pmatrix} v_{sat_1} - \tilde{v}_{e_1} \\ v_{sat_2} - \tilde{v}_{e_2} \\ v_{sat_3} - \tilde{v}_{e_3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1} \\ x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2} \\ x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3} \end{pmatrix} (x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}^3} & \frac{\begin{pmatrix} v_{sat_1} - \tilde{v}_{e_1} \\ v_{sat_2} - \tilde{v}_{e_2} \\ v_{sat_3} - \tilde{v}_{e_3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1} \\ x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2} \\ x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3} \end{pmatrix} (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}^3} & \frac{\begin{pmatrix} v_{sat_1} - \tilde{v}_{e_1} \\ v_{sat_2} - \tilde{v}_{e_2} \\ v_{sat_3} - \tilde{v}_{e_3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1} \\ x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2} \\ x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3} \end{pmatrix} (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}^3} \end{array} \right)$$

$${}^1 H^{RRv} = \left( \begin{array}{c|c|c} \frac{-(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} & \frac{-(x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} & \frac{-(x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})}{\sqrt{(x_{sat_1} - \tilde{x}_{e_1})^2 + (x_{sat_2} - \tilde{x}_{e_2})^2 + (x_{sat_3} - \tilde{x}_{e_3})^2}} \end{array} \right)$$

$${}^1 H^{RRc} = (0 \ c)$$

**Legende:**

## Navigationszustandsstörungen

$$\delta \mathbf{x}_e = (\delta x_{e_1} \quad \delta x_{e_2} \quad \delta x_{e_3})^T$$

*Positionsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{v}_e = (\delta v_{e_1} \quad \delta v_{e_2} \quad \delta v_{e_3})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{e\tilde{e}} = (\varphi_{e\tilde{e}} \quad \vartheta_{e\tilde{e}} \quad \psi_{e\tilde{e}})^T$$

*Eulerwinkel vom erdfesten Näherungsbezugssystem ins erdfeste Bezugssystem*

$$\delta \Delta t = (\delta \Delta t_f \quad \delta \Delta t_r)^T$$

*Empfängeruhrfehlerstörung*

## Beobachtungsstörungen

$$\delta \mathbf{y}^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

*Positionsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{y}^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

*Geschwindigkeitsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{y}^{PR} = \delta y^{PR}$$

*Pseudorangestörung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta \mathbf{y}^{RR} = \delta y^{RR}$$

*Rangeratestörung zwischen Empfänger und Satellit*

## Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\mathbf{x}}_e = (\tilde{x}_{e_1} \quad \tilde{x}_{e_2} \quad \tilde{x}_{e_3})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\tilde{\mathbf{v}}_e = (\tilde{v}_{e_1} \quad \tilde{v}_{e_2} \quad \tilde{v}_{e_3})^T$$

*Näherungsgeschwindigkeit in erdfesten kartesischen Koordinaten*

## Satellitenparameter

$$\mathbf{x}_{sat} = (x_{sat_1} \quad x_{sat_2} \quad x_{sat_3})^T$$

*Position des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_{sat} = (v_{sat_1} \quad v_{sat_2} \quad v_{sat_3})^T$$

*Geschwindigkeit des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

## Physikalische Konstanten

$c$

*Lichtgeschwindigkeit*

## B Beobachtungsgleichungen zu Ansatz 2

### Nichtlineare Beobachtungsgleichungen fehlerfrei in absoluten Zuständen

$$y = h(z)$$

**Zustandsvektor in absoluten Navigationszuständen:**

$$z = (\lambda \ \phi \ h \ v_{h_1} \ v_{h_2} \ v_{h_3} \ q_{hh_0} \ q_{hh_1} \ q_{hh_2} \ q_{hh_3} \ \Delta t \ \Delta i \ \Delta h)^T$$

**Beobachtungsvektor in absoluten Beobachtungen:**

Positionsupdate

$$y^P = (y_1^P \ y_2^P \ y_3^P)^T$$

Geschwindigkeitsupdate

$$y^V = (y_1^V \ y_2^V \ y_3^V)^T$$

Pseudorangeupdate

$$y^{PR} = y^{PR}$$

Rangerateupdate

$$y^{RR} = y^{RR}$$

Barometrischer Höhenupdate

$$y^B = y^B$$

**Beobachtungsgleichungssystem:**

Positionsupdate

$$y_1^P = (N(\phi) + h) \cos(\phi) \cos(\lambda)$$

$$y_2^P = (N(\phi) + h) \cos(\phi) \sin(\lambda)$$

$$y_3^P = \left( \frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h \right) \sin(\phi)$$

Geschwindigkeitsupdate

$$y_1^V = -v_{h_1} \cos(\lambda) \sin(\phi) - v_{h_2} \sin(\lambda) - v_{h_3} \cos(\lambda) \cos(\phi)$$

$$y_2^V = -v_{h_1} \sin(\lambda) \sin(\phi) + v_{h_2} \cos(\lambda) - v_{h_3} \sin(\lambda) \cos(\phi)$$

$$y_3^V = v_{h_1} \cos(\phi) - v_{h_3} \sin(\phi)$$

Pseudorangeupdate

$$y^{PR} = \sqrt{\left( x_{sat_1} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \cos(\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \sin(\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h \right) \sin(\phi) \right)^2} + c\Delta t$$

Rangerateupdate

$$y^{RR} = \frac{\begin{aligned} & (v_{sat_1} + v_{h_1} \cos(\lambda) \sin(\phi) + v_{h_2} \sin(\lambda) + v_{h_3} \cos(\lambda) \cos(\phi)) (x_{sat_1} - (N(\phi) + h) \cos(\lambda) \cos(\phi)) \\ & + (v_{sat_2} + v_{h_1} \sin(\lambda) \sin(\phi) - v_{h_2} \cos(\lambda) + v_{h_3} \sin(\lambda) \cos(\phi)) (x_{sat_2} - (N(\phi) + h) \sin(\lambda) \cos(\phi)) \\ & + (v_{sat_3} - v_{h_1} \cos(\phi) + v_{h_3} \sin(\phi)) \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h \right) \sin(\phi) \right) \end{aligned}}{\sqrt{\left( x_{sat_1} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \cos(\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \sin(\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h \right) \sin(\phi) \right)^2}} + c\Delta i$$

Barometrischer Höhenupdate

$$y^B = h + \Delta h$$

**Legende:**

## absolute Navigationszustände

$$\lambda = (\lambda \quad \phi \quad h)^T$$

*Position in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_h = (v_{h_1} \quad v_{h_2} \quad v_{h_3})^T$$

*Geschwindigkeit in horizontfesten kartesischen Koordinaten*

$$\tilde{q}_{hb} = (q_{hb_0} \quad q_{hb_1} \quad q_{hb_2} \quad q_{hb_3})^T$$

*Rotationsquaternion vom körperfesten ins horizontfeste Bezugssystem*

$$\Delta t = (\Delta t \quad \Delta i)^T$$

*Empfängeruhrfehler*

$$\Delta h$$

*barometrische Höhendifferenz*

## absolute Beobachtungen

$$\mathbf{y}^P = (y_1^P \quad y_2^P \quad y_3^P)^T$$

*Position des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{y}^V = (y_1^V \quad y_2^V \quad y_3^V)^T$$

*Geschwindigkeit des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{y}^{PR} = y^{PR}$$

*Pseudorange zwischen Empfänger und Satellit*

$$\mathbf{y}^{RR} = y^{RR}$$

*Rangerate zwischen Empfänger und Satellit*

$$\mathbf{y}^B = y^B$$

*Barometrische Höhe*

## Satellitenparameter

$$\mathbf{x}_{sat} = (x_{sat_1} \quad x_{sat_2} \quad x_{sat_3})^T$$

*Position des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_{sat} = (v_{sat_1} \quad v_{sat_2} \quad v_{sat_3})^T$$

*Geschwindigkeit des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

## Physikalische Konstanten

$$c$$

*Lichtgeschwindigkeit*

## Nichtlineare Beobachtungsgleichungen in Zustandsfehlern

$$\delta y = h(\tilde{z} + \delta z) - h(\tilde{z})$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta\lambda \quad \delta\phi \quad \delta h \quad \delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3} \quad \varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}} \quad \delta\Delta t \quad \delta\Delta i \quad \delta\Delta h)^T$$

**Beobachtungsvektor in Beobachtungsstörungen:**

Positionsupdate

$$\delta y^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

Geschwindigkeitsupdate

$$\delta y^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

Pseudorangeupdate

$$\delta y^{PR} = \delta y^{PR}$$

Rangerateupdate

$$\delta y^{RR} = \delta y^{RR}$$

Barometrischer Höhenupdate

$$\delta y^B = \delta y^B$$

**Beobachtungsgleichungssystem:**

Positionsupdate

$$\delta y_1^P = (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda})$$

$$\delta y_2^P = (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda})$$

$$\delta y_3^P = \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \sin(\tilde{\phi})$$

Geschwindigkeitsupdate

$$\delta y_1^V = -(\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) - (\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - (\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3}) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{v}_{h_1} \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) + \tilde{v}_{h_2} \sin(\tilde{\lambda}) + \tilde{v}_{h_3} \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi})$$

$$\delta y_2^V = -(\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{v}_{h_2} \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - (\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3}) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{v}_{h_1} \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) - \tilde{v}_{h_2} \cos(\tilde{\lambda}) + \tilde{v}_{h_3} \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi})$$

$$\delta y_3^V = (\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) - (\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3}) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) - \tilde{v}_{h_3} \cos(\tilde{\phi}) + \tilde{v}_{h_3} \sin(\tilde{\phi})$$

Pseudorangeupdate

$$\delta y^{PR} = \sqrt{\left( x_{sat_1} - (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right)^2} \\ - \sqrt{\left( x_{sat_1} - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \sin(\tilde{\phi}) \right)^2} + c\delta\Delta t$$

Rangerateupdate

$$\left( v_{sat_1} + (\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) + (\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) + (\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3}) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right) \left( x_{sat_1} - (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right) \\ + \left( v_{sat_2} + (\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) - (\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) + (\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3}) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right) \left( x_{sat_2} - (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right) \\ + \left( v_{sat_3} - (\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) + (\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3}) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right) \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right)$$

$$\delta y^{RR} = \frac{\left( v_{sat_1} + (\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) + (\tilde{v}_{h_2} + \delta v_{h_2}) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) + (\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3}) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right) \left( x_{sat_1} - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \right) \\ + \left( v_{sat_2} + (\tilde{v}_{h_1} + \delta v_{h_1}) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) - \tilde{v}_{h_2} \cos(\tilde{\lambda}) + (\tilde{v}_{h_3} + \delta v_{h_3}) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right) \left( x_{sat_2} - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \right) \\ + \left( v_{sat_3} - \tilde{v}_{h_1} \cos(\tilde{\phi}) + \tilde{v}_{h_3} \sin(\tilde{\phi}) \right) \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \sin(\tilde{\phi}) \right)}{\sqrt{\left( x_{sat_1} - (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right)^2} \\ - \sqrt{\left( x_{sat_1} - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \sin(\tilde{\phi}) \right)^2} + c\delta\Delta i$$

Barometrischer Höhenupdate

$$\delta y^B = \delta h + \delta\Delta h$$

**Legende:**

## Navigationszustandsstörungen

$$\delta\lambda = (\delta\lambda \quad \delta\phi \quad \delta h)^T$$

*Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\delta\mathbf{v}_h = (\delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in horizontfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{hh} = (\varphi_{hh} \quad \vartheta_{hh} \quad \psi_{hh})^T$$

*Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem*

$$\delta\mathbf{M} = (\delta\Delta t \quad \delta\Delta t)^T$$

*Empfängeruhrfehlerstörung*

$$\delta\Delta h$$

*Barometrische Höhendifferenzstörung*

## Beobachtungsstörungen

$$\delta\mathbf{y}^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

*Positionsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta\mathbf{y}^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

*Geschwindigkeitsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta\mathbf{y}^{PR} = \delta\mathbf{y}^{PR}$$

*Pseudorange­störung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta\mathbf{y}^{RR} = \delta\mathbf{y}^{RR}$$

*Rangerate­störung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta\mathbf{y}^B = \delta\mathbf{y}^B$$

*barometrische Höhendifferenz­störung*

## Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\tilde{\mathbf{v}}_h = (\tilde{v}_{h_1} \quad \tilde{v}_{h_2} \quad \tilde{v}_{h_3})^T$$

*Näherungsgeschwindigkeit in horizontfesten kartesischen Koordinaten*

## Satellitenparameter

$$\mathbf{x}_{sat} = (x_{sat_1} \quad x_{sat_2} \quad x_{sat_3})^T$$

*Position des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_{sat} = (v_{sat_1} \quad v_{sat_2} \quad v_{sat_3})^T$$

*Geschwindigkeit des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

## Physikalische Konstanten

$c$

*Lichtgeschwindigkeit*

## Linearisierte Beobachtungsgleichungen in Zustandsfehlern

$$\delta y = H \cdot \delta z$$

### Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:

$$\delta z = (\delta\lambda \quad \delta\phi \quad \delta h \quad \delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3} \quad \varphi_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}} \quad \delta\Delta t \quad \delta\Delta i \quad \delta\Delta h)^T$$

### Beobachtungsvektor in Beobachtungsstörungen:

Positionsupdate

$$\delta y^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

Geschwindigkeitsupdate

$$\delta y^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

Pseudorangeupdate

$$\delta y^{PR} = \delta y^{PR}$$

Rangerateupdate

$$\delta y^{RR} = \delta y^{RR}$$

Barometrischer Höhenupdate

$$\delta y^B = \delta y^B$$

### Beobachtungsmatrix:

Positionsupdate

$${}^2H^P = \begin{pmatrix} {}^2H^{Pp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$${}^2H^{Pp} = \begin{pmatrix} -(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) & N'(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) & \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \\ (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) & N'(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) & \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \\ 0 & \frac{b^2}{a^2} N'(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\phi}) + \left(\frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}\right) \cos(\tilde{\phi}) & \sin(\tilde{\phi}) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsupdate

$${}^2H^V = \begin{pmatrix} {}^2H^{Vp} & {}^2H^{Vv} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$${}^2H^{Vp} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{h_1} \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) - \tilde{v}_{h_2} \cos(\tilde{\lambda}) + \tilde{v}_{h_3} \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) & -\tilde{v}_{h_1} \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) + \tilde{v}_{h_3} \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & 0 \\ -\tilde{v}_{h_1} \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) - \tilde{v}_{h_2} \sin(\tilde{\lambda}) - \tilde{v}_{h_3} \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) & -\tilde{v}_{h_1} \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) + \tilde{v}_{h_3} \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & 0 \\ 0 & -\tilde{v}_{h_1} \sin(\tilde{\phi}) - \tilde{v}_{h_3} \cos(\tilde{\phi}) & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^2H^{Vv} = \begin{pmatrix} -\cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & -\sin(\tilde{\lambda}) & -\cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) \\ -\sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & \cos(\tilde{\lambda}) & -\sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) \\ \cos(\tilde{\phi}) & 0 & -\sin(\tilde{\phi}) \end{pmatrix}$$

Pseudorangeupdate

$${}^2H^{PR} = \begin{pmatrix} {}^2H^{PRp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^2H^{PRc} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$${}^2H^{PRp} = {}^1H^{PRp} \cdot {}^2H^{Pp}$$

$${}^2H^{PRc} = (c \quad \mathbf{0})$$

Rangerateupdate

$${}^2H^{RR} = \begin{pmatrix} {}^2H^{RRp} & {}^2H^{RRv} & \mathbf{0} & {}^2H^{RRc} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$${}^2H^{RRp} = {}^1H^{RRp} \cdot {}^2H^{Pp}$$

$${}^2H^{RRv} = {}^1H^{RRv} \cdot {}^2H^{Vv}$$

$${}^2H^{RRc} = (0 \quad c)$$

Barometrischer Höhenupdate

$${}^2H^B = \begin{pmatrix} {}^2H^{Bp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^2H^{Bh} \end{pmatrix}$$

$${}^2H^{Bp} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

$${}^2H^{Bh} = 1$$

**Legende:**

## Navigationszustandsstörungen

$$\delta \lambda = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h)^T$$

*Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{v}_h = (\delta v_{h_1} \quad \delta v_{h_2} \quad \delta v_{h_3})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in horizontfesten kartesischen Koordinaten*

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

*Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem*

$$\delta \Delta t = (\delta \Delta t \quad \delta \Delta t)^T$$

*Empfängeruhrfehlerstörung*

$$\delta \Delta h$$

*Barometrische Höhendifferenzstörung*

## Beobachtungsstörungen

$$\delta \mathbf{y}^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

*Positionsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{y}^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

*Geschwindigkeitsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta \mathbf{y}^{PR} = \delta \mathbf{y}^{PR}$$

*Pseudorange­störung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta \mathbf{y}^{RR} = \delta \mathbf{y}^{RR}$$

*Rangerate­störung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta \mathbf{y}^B = \delta \mathbf{y}^B$$

*barometrische Höhendifferenzstörung*

## Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\tilde{\mathbf{v}}_h = (\tilde{v}_{h_1} \quad \tilde{v}_{h_2} \quad \tilde{v}_{h_3})^T$$

*Näherungsgeschwindigkeit in horizontfesten kartesischen Koordinaten*

## Satellitenparameter

$$\mathbf{x}_{sat} = (x_{sat_1} \quad x_{sat_2} \quad x_{sat_3})^T$$

*Position des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_{sat} = (v_{sat_1} \quad v_{sat_2} \quad v_{sat_3})^T$$

*Geschwindigkeit des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

$$N'(\phi) = \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} = ae^2 \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Erste partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers*

## Physikalische Konstanten

$$c$$

*Lichtgeschwindigkeit*

# C Beobachtungsgleichungen zu Ansatz 3

## Nichtlineare Beobachtungsgleichungen fehlerfrei in absoluten Zuständen

$$y = h(z)$$

**Zustandsvektor in absoluten Navigationszuständen:**

$$z = (\lambda \ \phi \ h \ \dot{\lambda} \ \dot{\phi} \ \dot{h} \ q_{hb_0} \ q_{hb_1} \ q_{hb_2} \ q_{hb_3} \ \Delta t \ \Delta \dot{t} \ \Delta \dot{h})^T$$

**Beobachtungsvektor in absoluten Beobachtungen:**

Positionsupdate

$$y^P = (y_1^P \ y_2^P \ y_3^P)^T$$

Geschwindigkeitsupdate

$$y^V = (y_1^V \ y_2^V \ y_3^V)^T$$

Pseudorangeupdate

$$y^{PR} = y^{PR}$$

Rangerateupdate

$$y^{RR} = y^{RR}$$

Barometrischer Höhenupdate

$$y^B = y^B$$

**Beobachtungsgleichungssystem:**

Positionsupdate

$$y_1^P = (N(\phi) + h) \cos(\phi) \cos(\lambda)$$

$$y_2^P = (N(\phi) + h) \cos(\phi) \sin(\lambda)$$

$$y_3^P = \left( \frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h \right) \sin(\phi)$$

Geschwindigkeitsupdate

$$y_1^V = -(M(\phi) + h) \dot{\phi} \cos(\lambda) \sin(\phi) - (N(\phi) + h) \dot{\lambda} \cos(\phi) \sin(\lambda) + \dot{h} \cos(\lambda) \cos(\phi)$$

$$y_2^V = -(M(\phi) + h) \dot{\phi} \sin(\lambda) \sin(\phi) + (N(\phi) + h) \dot{\lambda} \cos(\phi) \cos(\lambda) + \dot{h} \sin(\lambda) \cos(\phi)$$

$$y_3^V = (M(\phi) + h) \dot{\phi} \cos(\phi) + \dot{h} \sin(\phi)$$

Pseudorangeupdate

$$y^{PR} = \sqrt{\left( x_{sat_1} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \cos(\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \sin(\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h \right) \sin(\phi) \right)^2} + c \Delta t$$

Rangerateupdate

$$y^{RR} = \frac{\begin{aligned} & (v_{sat_1} + (M(\phi) + h) \dot{\phi} \cos(\lambda) \sin(\phi) + (N(\phi) + h) \dot{\lambda} \cos(\phi) \sin(\lambda) - \dot{h} \cos(\lambda) \cos(\phi)) (x_{sat_1} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \cos(\lambda)) \\ & + (v_{sat_2} + (M(\phi) + h) \dot{\phi} \sin(\lambda) \sin(\phi) - (N(\phi) + h) \dot{\lambda} \cos(\phi) \cos(\lambda) - \dot{h} \sin(\lambda) \cos(\phi)) (x_{sat_2} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \sin(\lambda)) \\ & + (v_{sat_3} - (M(\phi) + h) \dot{\phi} \cos(\phi) - \dot{h} \sin(\phi)) \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h \right) \sin(\phi) \right) \end{aligned}}{\sqrt{\left( x_{sat_1} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \cos(\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - (N(\phi) + h) \cos(\phi) \sin(\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\phi) + h \right) \sin(\phi) \right)^2}} + c \Delta \dot{t}$$

Barometrischer Höhenupdate

$$y^B = h + \Delta h$$

**Legende:**

## absolute Navigationszustände

$$\lambda = (\lambda \quad \phi \quad h)^T$$

*Position in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\dot{\lambda} = (\dot{\lambda} \quad \dot{\phi} \quad \dot{h})^T$$

*Geschwindigkeit in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\bar{q}_{hb} = (q_{hb_0} \quad q_{hb_1} \quad q_{hb_2} \quad q_{hb_3})^T$$

*Rotationsquaternion vom körperfesten ins horizontfeste Bezugssystem*

$$\Delta t = (\Delta t \quad \Delta t)^T$$

*Empfängeruhrfehler*

$$\Delta h$$

*barometrische Höhendifferenz*

## absolute Beobachtungen

$$\mathbf{y}^P = (y_1^P \quad y_2^P \quad y_3^P)^T$$

*Position des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{y}^V = (y_1^V \quad y_2^V \quad y_3^V)^T$$

*Geschwindigkeit des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{y}^{PR} = y^{PR}$$

*Pseudorange zwischen Empfänger und Satellit*

$$\mathbf{y}^{RR} = y^{RR}$$

*Rangerate zwischen Empfänger und Satellit*

$$\mathbf{y}^B = y^B$$

*Barometrische Höhe*

## Satellitenparameter

$$\mathbf{x}_{sat} = (x_{sat_1} \quad x_{sat_2} \quad x_{sat_3})^T$$

*Position des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_{sat} = (v_{sat_1} \quad v_{sat_2} \quad v_{sat_3})^T$$

*Geschwindigkeit des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Meridiankrümmungshalbmesser*

## Physikalische Konstanten

$$c$$

*Lichtgeschwindigkeit*

## Nichtlineare Beobachtungsgleichungen in Zustandsfehlern

$$\delta y = h(\tilde{z} + \delta z) - h(\tilde{z})$$

**Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:**

$$\delta z = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h \quad \delta \dot{\lambda} \quad \delta \dot{\phi} \quad \delta \dot{h} \quad \varphi_{\tilde{h}\tilde{h}} \quad \vartheta_{\tilde{h}\tilde{h}} \quad \psi_{\tilde{h}\tilde{h}} \quad \delta \Delta t \quad \delta \Delta i \quad \delta \Delta h)^T$$

**Beobachtungsvektor in Beobachtungsstörungen:**

Positionsupdate

$$\delta y^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

Geschwindigkeitsupdate

$$\delta y^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

Pseudorangeupdate

$$\delta y^{PR} = \delta y^{PR}$$

Rangerateupdate

$$\delta y^{RR} = \delta y^{RR}$$

Barometrischer Höhenupdate

$$\delta y^B = \delta y^B$$

**Beobachtungsgleichungssystem:**

Positionsupdate

$$\delta y_1^P = (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda})$$

$$\delta y_2^P = (N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda})$$

$$\delta y_3^P = \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \sin(\tilde{\phi})$$

Geschwindigkeitsupdate

$$\delta y_1^V = -\left( M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\phi}} + \delta\dot{\phi} \right) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) - \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda} \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) + \left( \dot{\tilde{h}} + \delta\dot{h} \right) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \\ + \left( M(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\phi}} \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) + \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\lambda}} \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) - \dot{\tilde{h}} \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi})$$

$$\delta y_2^V = -\left( M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\phi}} + \delta\dot{\phi} \right) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda} \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) + \left( \dot{\tilde{h}} + \delta\dot{h} \right) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \\ + \left( M(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\phi}} \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) - \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\lambda}} \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) - \dot{\tilde{h}} \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi})$$

$$\delta y_3^V = \left( M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\phi}} + \delta\dot{\phi} \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \left( \dot{\tilde{h}} + \delta\dot{h} \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) \\ - \left( M(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\phi}} \cos(\tilde{\phi}) - \dot{\tilde{h}} \sin(\tilde{\phi})$$

Pseudorangeupdate

$$\delta y^{PR} = \sqrt{\left( x_{sat_1} - \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right)^2} \\ - \sqrt{\left( x_{sat_1} - \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \sin(\tilde{\phi}) \right)^2} + c\delta\Delta t$$

Rangerateupdate

$$\delta y^{RR} = \frac{\left( v_{sat_1} + \left( M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\phi}} + \delta\dot{\phi} \right) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda} \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - \left( \dot{\tilde{h}} + \delta\dot{h} \right) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right) \left( x_{sat_1} - \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right) \\ + \left( v_{sat_2} + \left( M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\phi}} + \delta\dot{\phi} \right) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) - \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\lambda}} + \delta\dot{\lambda} \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) - \left( \dot{\tilde{h}} + \delta\dot{h} \right) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right) \left( x_{sat_2} - \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right) \\ + \left( v_{sat_3} - \left( M(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \left( \dot{\tilde{\phi}} + \delta\dot{\phi} \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) - \left( \dot{\tilde{h}} + \delta\dot{h} \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right) \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right)}{\sqrt{\left( x_{sat_1} - \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \cos(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - \left( N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \cos(\tilde{\phi} + \delta\phi) \sin(\tilde{\lambda} + \delta\lambda) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi} + \delta\phi) + \tilde{h} + \delta h \right) \sin(\tilde{\phi} + \delta\phi) \right)^2} \\ + \frac{\left( v_{sat_1} + \left( M(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\phi}} \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) + \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\lambda}} \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) - \dot{\tilde{h}} \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) \right) \left( x_{sat_1} - \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \right) \\ + \left( v_{sat_2} + \left( M(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\phi}} \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) - \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\lambda}} \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) - \dot{\tilde{h}} \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) \right) \left( x_{sat_2} - \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \right) \\ + \left( v_{sat_3} - \left( M(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \dot{\tilde{\phi}} \cos(\tilde{\phi}) - \dot{\tilde{h}} \sin(\tilde{\phi}) \right) \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \sin(\tilde{\phi}) \right)}{\sqrt{\left( x_{sat_1} - \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \right)^2 + \left( x_{sat_2} - \left( N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \right)^2 + \left( x_{sat_3} - \left( \frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h} \right) \sin(\tilde{\phi}) \right)^2} + c\delta\Delta i$$

Barometrischer Höhenupdate

$$\delta y^B = \delta h + \delta \Delta h$$

**Legende:**

## Navigationszustandsstörungen

$$\delta \lambda = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h)^T$$

*Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\delta \dot{\lambda} = (\delta \dot{\lambda} \quad \delta \dot{\phi} \quad \delta \dot{h})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\psi_{h\tilde{h}} = (\varphi_{h\tilde{h}} \quad \vartheta_{h\tilde{h}} \quad \psi_{h\tilde{h}})^T$$

*Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem*

$$\delta \Delta t = (\delta \Delta t \quad \delta \Delta t)^T$$

*Empfängeruhrfehlerstörung*

$$\delta \Delta h$$

*Barometrische Höhendifferenzstörung*

## Beobachtungsstörungen

$$\delta y^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

*Positionsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta y^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

*Geschwindigkeitsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta y^{PR} = \delta y^{PR}$$

*Pseudorange­störung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta y^{RR} = \delta y^{RR}$$

*Rangerate­störung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta y^B = \delta y^B$$

*barometrische Höhendifferenz­störung*

## Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\dot{\tilde{\lambda}} = (\dot{\tilde{\lambda}} \quad \dot{\tilde{\phi}} \quad \dot{\tilde{h}})^T$$

*Näherungsgeschwindigkeit in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

## Satellitenparameter

$$\mathbf{x}_{sat} = (x_{sat_1} \quad x_{sat_2} \quad x_{sat_3})^T$$

*Position des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_{sat} = (v_{sat_1} \quad v_{sat_2} \quad v_{sat_3})^T$$

*Geschwindigkeit des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Meridiankrümmungshalbmesser*

## Physikalische Konstanten

$$c$$

*Lichtgeschwindigkeit*

## Linearisierte Beobachtungsgleichungen in Zustandsfehlern

$$\delta y = H \cdot \delta z$$

### Zustandsvektor in Navigationszustandsstörungen:

$$\delta z = (\delta\lambda \ \delta\phi \ \delta h \ \delta\dot{\lambda} \ \delta\dot{\phi} \ \delta\dot{h} \ \phi_{nh} \ \psi_{nh} \ \Delta t \ \delta\Delta t \ \delta\Delta h)^T$$

### Beobachtungsvektor in Beobachtungsstörungen:

Positionsupdate

$$\delta y^P = (\delta y_1^P \ \delta y_2^P \ \delta y_3^P)^T$$

Geschwindigkeitsupdate

$$\delta y^V = (\delta y_1^V \ \delta y_2^V \ \delta y_3^V)^T$$

Pseudorangeupdate

$$\delta y^{PR} = \delta y^{PR}$$

Rangerateupdate

$$\delta y^{RR} = \delta y^{RR}$$

Barometrischer Höhenupdate

$$\delta y^B = \delta y^B$$

### Beobachtungsmatrix:

Positionsupdate

$${}^3H^P = \begin{pmatrix} {}^3H^{Pp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$${}^3H^P = \begin{pmatrix} -(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) & N'(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) & \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \\ (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) & N'(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) & \cos(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \\ 0 & \frac{b^2}{a^2} N'(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\phi}) + \left(\frac{b^2}{a^2} N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}\right) \cos(\tilde{\phi}) & \sin(\tilde{\phi}) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsupdate

$${}^3H^V = \begin{pmatrix} {}^3H^{Vp} & {}^3H^{Vv} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$${}^3H^{Vp} = \begin{pmatrix} -\dot{\lambda}(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) & \dot{\lambda}(-N'(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) + (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi})) & -\dot{\lambda} \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) \\ \dot{\phi}(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & -\dot{\phi}(M'(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) + (M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi})) & -\dot{\phi} \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) \\ -\dot{h} \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) & -\dot{h} \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & \end{pmatrix}$$

$${}^3H^{Vv} = \begin{pmatrix} -\dot{\lambda}(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) & \dot{\lambda}(N'(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) - (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi})) & \dot{\lambda} \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) \\ -\dot{\phi}(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & -\dot{\phi}(M'(\tilde{\phi}) \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) + (M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi})) & -\dot{\phi} \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) \\ +\dot{h} \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) & -\dot{h} \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & \end{pmatrix}$$

$${}^3H^{Vv} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\phi}(M'(\tilde{\phi}) \cos(\tilde{\phi}) - (M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\phi})) + \dot{h} \cos(\tilde{\phi}) & \dot{\phi} \cos(\tilde{\phi}) \end{pmatrix}$$

$${}^3H^{Vv} = \begin{pmatrix} -(N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) & -(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) \\ (N(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) & -(M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \sin(\tilde{\lambda}) \sin(\tilde{\phi}) & \sin(\tilde{\lambda}) \cos(\tilde{\phi}) \\ 0 & (M(\tilde{\phi}) + \tilde{h}) \cos(\tilde{\phi}) & \sin(\tilde{\phi}) \end{pmatrix}$$

Pseudorangeupdate

$${}^3H^{PR} = \begin{pmatrix} {}^3H^{PRp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^3H^{PRc} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$${}^3H^{PRp} = {}^1H^{PRp} \cdot {}^3H^{Pp}$$

$${}^3H^{PRc} = (c \ \mathbf{0})$$

Rangerateupdate

$${}^3H^{RR} = \begin{pmatrix} {}^3H^{RRp} & {}^3H^{RRv} & \mathbf{0} & {}^3H^{RRc} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$${}^3H^{RRp} = {}^1H^{RRp} \cdot {}^3H^{Pp}$$

$${}^3H^{RRv} = {}^1H^{RRv} \cdot {}^3H^{Vv}$$

$${}^3H^{RRc} = (0 \ c)$$

Barometrischer Höhenupdate

$${}^3H^B = \begin{pmatrix} {}^3H^{Bp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^3H^{Bh} \end{pmatrix}$$

$${}^3H^{Bp} = (0 \ 0 \ 1)$$

$${}^3H^{Bh} = 1$$

**Legende:**

## Navigationszustandsstörungen

$$\delta \lambda = (\delta \lambda \quad \delta \phi \quad \delta h)^T$$

*Positionsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\delta \dot{\lambda} = (\delta \dot{\lambda} \quad \delta \dot{\phi} \quad \delta \dot{h})^T$$

*Geschwindigkeitsstörung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\psi_{hh} = (\varphi_{hh} \quad \vartheta_{hh} \quad \psi_{hh})^T$$

*Eulerwinkel vom horizontfesten Näherungsbezugssystem ins horizontfeste Bezugssystem*

$$\delta \Delta t = (\delta \Delta t \quad \delta \Delta t)^T$$

*Empfängeruhrfehlerstörung*

$$\delta \Delta h$$

*Barometrische Höhendifferenzstörung*

## Beobachtungsstörungen

$$\delta y^P = (\delta y_1^P \quad \delta y_2^P \quad \delta y_3^P)^T$$

*Positionsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta y^V = (\delta y_1^V \quad \delta y_2^V \quad \delta y_3^V)^T$$

*Geschwindigkeitsstörung des Empfängers in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\delta y^{PR} = \delta y^{PR}$$

*Pseudorangestörung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta y^{RR} = \delta y^{RR}$$

*Rangeratestörung zwischen Empfänger und Satellit*

$$\delta y^B = \delta y^B$$

*barometrische Höhendifferenzstörung*

## Integrierte INS-Näherungsdaten

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda} \quad \tilde{\phi} \quad \tilde{h})^T$$

*Näherungsposition in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

$$\dot{\tilde{\lambda}} = (\dot{\tilde{\lambda}} \quad \dot{\tilde{\phi}} \quad \dot{\tilde{h}})^T$$

*Näherungsgeschwindigkeit in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten*

## Satellitenparameter

$$\mathbf{x}_{sat} = (x_{sat_1} \quad x_{sat_2} \quad x_{sat_3})^T$$

*Position des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

$$\mathbf{v}_{sat} = (v_{sat_1} \quad v_{sat_2} \quad v_{sat_3})^T$$

*Geschwindigkeit des Satelliten in erdfesten kartesischen Koordinaten*

## Ellipsoidparameter

$$N(\phi) = a(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-1/2}$$

*Normalkrümmungshalbmesser*

$$M(\phi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Meridiankrümmungshalbmesser*

$$N'(\phi) = \frac{\partial N(\phi)}{\partial \phi} = ae^2 \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-3/2}$$

*Erste partielle Ableitung des Normalkrümmungshalbmessers*

$$M'(\phi) = -\frac{\partial M(\phi)}{\partial \phi} = 3ae^2(1 - e^2) \sin(\phi) \cos(\phi) (1 - e^2 \sin^2(\phi))^{-5/2}$$

*Erste partielle Ableitung des Meridiankrümmungshalbmessers*

## Physikalische Konstanten

$c$

*Lichtgeschwindigkeit*

# V Systemtheorie

In der Systemtheorie werden die Aspekte der Kontrollierbarkeit, Stabilität und Beobachtbarkeit eines dynamischen Systems untersucht. Im Rahmen dieser Arbeit soll ausschließlich auf die Beobachtbarkeit eingegangen werden. Aussagen zur Stabilität und Kontrollierbarkeit<sup>44</sup> eines dynamischen Systems können in der Literatur nachgelesen werden.

## 1. Beobachtbarkeitsanalyse

In der Multisensordatenfusion können die IMU-Sensordatenstörungen, mit denen die einzelnen Sensoren behaftet sind, und die Erdschwerermodellstörungen zur Verbesserung der Leistung des Navigationsalgorithmus in geeigneter Weise geschätzt und gegebenenfalls deren Auswirkungen rechnerisch kompensiert werden. Dies ist vor allem dann wichtig, wenn mit low-cost Geräten unter erschwerten Bedingungen, wie beispielsweise dem zeitweiligen Verlust jeglicher Stützinformation, akzeptable Genauigkeiten erreicht werden sollen. Die Beobachtbarkeitsanalyse dient dem Entwickler eines INS dazu, sich in der Definition des Zustandsvektors auf die relevanten Sensorfehler zu beschränken. Wie im kommenden Abschnitt noch gezeigt wird, verbietet sich aus Gründen der Rechenzeitoptimierung ein zu großer Zustandsvektor. In der Beobachtbarkeitsanalyse werden genau jene Sensorfehler identifiziert, welche auf Grund der vorliegenden Dynamik nur eingeschränkt oder gar nicht beobachtbar sind. Diese können aus dem Zustandsvektor eliminiert werden. Spezielle Ergebnisse zur Beobachtbarkeit von Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungsparametern<sup>45</sup> beziehungsweise die mathematischen Grundlagen zur Beobachtbarkeitsanalyse<sup>46</sup> finden sich in der Literatur und werden als bekannt vorausgesetzt. Ähnliche Überlegungen existieren zudem bereits zur Initialisierung eines INS und dessen Alignment.<sup>47</sup> Ziel dieser Arbeit ist es, aufbauend auf den bereits bestehenden Erkenntnissen, die analytische Beobachtbarkeit inertialer Sensorfehler wie Bias und Skalenfaktorfehler zu untersuchen. Auf die Beobachtbarkeit der Misalignment und der Erdschwerermodellfehler wird in den parametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen aus Komplexitätsgründen verzichtet, da sich Misalignment wie zusätzliche Skalenfaktorfehler und die Erdschwerermodellbias wie Beschleunigungsmesserbias, auf andere Bezugssystemachsen bezogen, verhalten. In der Beobachtbarkeitsanalyse wird in drei Schritten vorgegangen: Erstens werden, ausgehend vom allgemeinen Navigationsdifferentialgleichungssystem des Abschnitts III, die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen hergeleitet. In einem zweiten Schritt werden aus den nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen die linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen abgeleitet. Abschließend erfolgt eine Betrachtung mehrerer Arbeitspunkte. Für die Bestätigung der theoretischen Aussagen in Form einer kinematischen Simulation wird auf Abschnitt VII verwiesen. Dort wird die Beobachtbarkeit von Misalignments und Erdschwerermodellfehlern mit berücksichtigt. Im Anhang A dieses Abschnitts finden sich die zusammengefassten Ergebnisse der Beobachtbarkeitsanalyse. Die längeren Berechnungen zur Beobachtbarkeit der linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen sind in Anhang B ausgegliedert.

### 1.1. Nichtlineare Beobachtbarkeitsgleichungen

Bevor mit der Beurteilung der Beobachtbarkeit begonnen werden kann, müssen die zu Grunde liegenden nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen allgemein hergeleitet werden. Dies erfolgt in zwei Schritten. Zuerst werden die Beobachtbarkeitsgleichungen in unparametrisierter Form hergeleitet. Anschließend erfolgt eine Parametrisierung der davor noch allgemein gehaltenen absoluten Zustände und Störungen.

#### 1.1.1 Herleitung der nichtlinearen unparametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen

Da die Beobachtbarkeit stets problembezogen und damit generell unabhängig von einer speziellen Parametrisierung ist, wird im Folgenden aus mathematischen Überlegungen heraus eine vereinfachte Formulierung im erdfesten Bezugssystem gewählt.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_e &= \mathbf{v}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_e &= \mathbf{R}_{eb} \cdot \left( \tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b \right) - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_e + \tilde{\mathbf{g}}_e(\mathbf{x}_e) + \delta \mathbf{g}_e \\ \dot{\mathbf{R}}_{eb} &= \mathbf{R}_{eb} \cdot \left( \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \right) - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{R}_{eb}\end{aligned}\tag{V.1.1}$$

<sup>44</sup> Simon, Dan; Optimal State Estimation, John Wiley & Sons, New Jersey 2006, S.33ff

<sup>45</sup> Dambeck, Johann H.; Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Stuttgart 1999, S.84ff

<sup>46</sup> Birk, Joachim; Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik Nr.294, VDI Verlag, Düsseldorf 1992

<sup>47</sup> Jekeli, Christopher; Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications, Walter de Gruyter, New York 2001, S.238ff

Im Unterschied zu der strikten Unterteilung der Bewegungsgleichungen nach absoluten Zuständen und Störungen in Abschnitt III handelt es sich hierbei um eine Mischform aus absoluten Zuständen und Störungen. Die Rotationsmatrix in der Orientierungsdifferentialgleichung wird hier bewusst nicht weiter parametrisiert, was sich in der Übersichtlichkeit zu Beginn als vorteilhaft erweisen wird. Die anfänglichen 18 Zustände und somit Unbekannte in diesem Gleichungssystem sind neben den neun absoluten Navigationszuständen die sechs IMU-Sensordatenstörungen und die drei Erdschwerermodellstörungen. Der Strich kennzeichnet die Abgrenzung von absoluten Zuständen und Störungen, und der Zustandsvektor ist diesmal nach der relativen Größe der einzelnen Störungen sortiert.

$$\mathbf{z} = \left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{v}_e \\ R_{eb} \end{array} \right\} \text{absolute Navigationszustände} \quad \left. \begin{array}{l} \delta \mathbf{f}_b \\ \delta \mathbf{g}_e \\ \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \end{array} \right\} \text{Sensor- und Modellfehler} \quad (\text{V.1.2})$$

In der Beobachtbarkeitsanalyse wird von Positions- beziehungsweise Geschwindigkeitsbeobachtungen ausgegangen, da diese bei einer Stützung durch ein GNSS standardmäßig zur Verfügung stehen. Für die Beobachtbarkeit der Orientierung und der Störungen macht die Verwendung von entweder Positions- oder Geschwindigkeitsbeobachtungen keinen Unterschied.<sup>48</sup> Es bleibt lediglich zu beachten, dass bei reinen Geschwindigkeitsbeobachtungen eine Beobachtbarkeit der Position ausgeschlossen ist. Es wird sich im weiteren Verlauf somit auf den allgemeinen Fall der Positionsbeobachtungen beschränkt.

$$\mathbf{y}^p = \mathbf{x}_e \quad (\text{V.1.3})$$

Im Folgenden wird von einer beliebigen Differenzierbarkeit dieser Positionsbeobachtung ausgegangen. In der nichtlinearen Beobachtbarkeitsanalyse wird nun durch mehrfaches Ableiten dieser Positionsbeobachtung versucht, die Beobachtbarkeit der einzelnen Zustände gemäß Gleichung (V.1.2) sicherzustellen. Durch eine ausschließliche Verwendung der Bewegungsgleichungen gemäß (V.1.1) kann dies nicht erreicht werden, da nur sechs unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der achtzehn Zustände vorhanden sind. Die Orientierungsdifferentialgleichung liefert dabei keinen direkten Beitrag zur Beobachtbarkeit. Die Positionsbeobachtung aus Gleichung (V.1.3) stellt die Ausgangsgleichung für die Beobachtbarkeitsanalyse dar. Die Gleichungen sind so aufgelöst, dass auf der rechten Seite ausschließlich bereits bekannte Größen und auf der linken Seite alle Unbekannten stehen. Zeile *I* der Beobachtbarkeitsgleichungen lautet:

$$I \quad \mathbf{x}_e = \mathbf{y}^p \quad (\text{V.1.4})$$

Auflösen der Positionsdifferentialgleichung aus Gleichung (V.1.1) nach den Geschwindigkeiten im erdfesten Bezugssystem führt zu Zeile *II*.

$$II \quad \mathbf{v}_e = \dot{\mathbf{x}}_e \quad (\text{V.1.5})$$

Die Unbekannten der Zeile *III* sind die Rotationsmatrix und die Beschleunigungs- beziehungsweise Erdschwerermodellstörungen und diese können aus der Geschwindigkeitsdifferentialgleichung aus Gleichung (V.1.1) bestimmt werden.

$$III \quad R_{eb} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) + \delta \mathbf{g}_e = \dot{\mathbf{v}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_e - \tilde{\mathbf{g}}_e(\mathbf{x}_e) = \mathbf{f}_e \quad (\text{V.1.6})$$

Zur Vereinfachung der weiteren Berechnungen führen wir hier die Größe  $\mathbf{f}_e$  ein, die aus bereits bekannten Größen bestimmt werden kann. Auch alle Ableitungen dieser Hilfsgröße sind bekannt. Eine weitere Zeile erhält man durch Ableiten der Zeile *III* und anschließendes Auflösen nach den verbleibenden Unbekannten.

$$\begin{aligned} IV \quad & \dot{R}_{eb} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) + R_{eb} \cdot (\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b) + \delta \dot{\mathbf{g}}_e = \dot{\mathbf{f}}_e \\ IV \quad & \left( R_{eb} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b) - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e R_{eb} \right) \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) + R_{eb} \cdot (\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b) + \delta \dot{\mathbf{g}}_e = \dot{\mathbf{f}}_e \\ IV \quad & R_{eb} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b) \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) - \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e R_{eb} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) + R_{eb} \cdot (\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b) + \delta \dot{\mathbf{g}}_e = \dot{\mathbf{f}}_e \\ IV \quad & R_{eb} \cdot \left( (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) \right) - \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (R_{eb} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b)) + R_{eb} \cdot (\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b) + \delta \dot{\mathbf{g}}_e = \dot{\mathbf{f}}_e \end{aligned} \quad (\text{V.1.7})$$

Einsetzen von Zeile *III* in Zeile *IV* führt zu:

$$\begin{aligned} IV \quad & R_{eb} \cdot \left( (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) \right) - \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\mathbf{f}_e - \delta \mathbf{g}_e) + R_{eb} \cdot (\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b) + \delta \dot{\mathbf{g}}_e = \dot{\mathbf{f}}_e \\ IV \quad & R_{eb} \cdot \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) \right) + \delta \dot{\mathbf{g}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{g}_e = \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (\text{V.1.8})$$

Problematisch sind hierbei die Ableitungen der Beschleunigungs- und Erdschwerermodellstörungen, die im Allgemeinen unabhängige Größen darstellen und ohne weitere Kenntnisse oder Annahmen als zusätzliche Unbekannte in den

<sup>48</sup> Dambeck, Johann H.; Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Stuttgart 1999, S.95

Zustandsvektor mit aufgenommen werden müssen. Erstmals tritt in Zeile IV auch die Winkelgeschwindigkeitsstörung auf. Erneutes Ableiten der Zeile IV führt zu Zeile V.

$$\begin{aligned}
V \quad & \dot{R}_{eb} \cdot \left( \dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) \right) \\
& + R_{eb} \cdot \left( \ddot{\tilde{f}}_b + \delta \ddot{f}_b + (\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b + \delta \dot{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b) \right) \\
& + \delta \ddot{g}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \delta g_e + \omega_{ie}^e \times \delta \dot{g}_e = \ddot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times \dot{f}_e \\
V \quad & \left( R_{eb} \cdot (\tilde{\Omega}_{ib}^b + \delta \Omega_{ib}^b) - \Omega_{ie}^e R_{eb} \right) \cdot \left( \dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) \right) \\
& + R_{eb} \cdot \left( \ddot{\tilde{f}}_b + \delta \ddot{f}_b + (\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b + \delta \dot{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b) \right) \\
& + \delta \ddot{g}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \delta g_e + \omega_{ie}^e \times \delta \dot{g}_e = \ddot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times \dot{f}_e \\
V \quad & R_{eb} \cdot (\tilde{\Omega}_{ib}^b + \delta \Omega_{ib}^b) \cdot \left( \dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) \right) \\
& - \Omega_{ie}^e R_{eb} \cdot \left( \dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) \right) \\
& + R_{eb} \cdot \left( \ddot{\tilde{f}}_b + \delta \ddot{f}_b + (\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b + \delta \dot{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b) \right) \\
& + \delta \ddot{g}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \delta g_e + \omega_{ie}^e \times \delta \dot{g}_e = \ddot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times \dot{f}_e \\
V \quad & R_{eb} \cdot \left( (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b)) \right) \\
& - \omega_{ie}^e \times \left( R_{eb} \cdot (\dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b)) \right) \\
& + R_{eb} \cdot \left( \ddot{\tilde{f}}_b + \delta \ddot{f}_b + (\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b + \delta \dot{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b) \right) \\
& + \delta \ddot{g}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \delta g_e + \omega_{ie}^e \times \delta \dot{g}_e = \ddot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times \dot{f}_e
\end{aligned} \tag{V.1.9}$$

Hier kann analog zum vorigen Vorgehen Zeile IV in Zeile V eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
V \quad & R_{eb} \cdot \left( (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b)) \right) \\
& - \omega_{ie}^e \times \left( \dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e - \delta \dot{g}_e - \omega_{ie}^e \times \delta g_e \right) \\
& + R_{eb} \cdot \left( \ddot{\tilde{f}}_b + \delta \ddot{f}_b + (\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b + \delta \dot{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b) \right) \\
& + \delta \ddot{g}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \delta g_e + \omega_{ie}^e \times \delta \dot{g}_e = \ddot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times \dot{f}_e \\
V \quad & R_{eb} \cdot \left( \dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b + 2(\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{f}}_b + \delta \dot{f}_b) + (\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b + \delta \dot{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b) \right) \\
& + R_{eb} \cdot \left( (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times ((\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\tilde{f}_b + \delta f_b)) \right) \\
& + \delta \ddot{g}_e + 2\omega_{ie}^e \times \delta \dot{g}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \delta g_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times \delta g_e) \\
& = \ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)
\end{aligned} \tag{V.1.10}$$

Erneut führt die zeitliche Ableitung zu neun weiteren Zuständen, den zweiten zeitlichen Ableitungen der Beschleunigungs- und Erdschwerermodellstörungen und der ersten Ableitung der Winkelgeschwindigkeitsstörung. Allein zur Bestimmung der achtzehn Ausgangszustände unter Vernachlässigung der im Verlauf der Herleitung hinzugefügten Zustände müsste noch mindestens eine weitere Ableitung gebildet werden. Diese und weitere Ableitungen lassen sich zwar rekursiv sehr einfach bestimmen. Da sich jedoch mit jeder neuen Zeile auch neue Unbekannte ergeben, kann das Ziel durch weitere Ableitungen genügend Gleichungen zur Beobachtbarkeit aller Zustände zu erhalten, offensichtlich mathematisch nicht erreicht werden.

Zusammengefasst lauten die einzelnen Zeilen der nichtlinearen unparametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen:

$$\begin{array}{ll}
 I & \mathbf{x}_e = \mathbf{y}^p \\
 II & \mathbf{v}_e = \dot{\mathbf{x}}_e \\
 III & R_{eb} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) + \delta \mathbf{g}_e = \dot{\mathbf{v}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{v}_e - \tilde{\mathbf{g}}_e(\mathbf{x}_e) = \mathbf{f}_e \\
 IV & R_{eb} \cdot \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) \right) + \delta \dot{\mathbf{g}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{g}_e = \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \\
 V & R_{eb} \cdot \left( \ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \ddot{\mathbf{f}}_b + 2(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b) + (\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b + \delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) \right) \\
 & + R_{eb} \cdot \left( (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times ((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b)) \right) \\
 & + \delta \ddot{\mathbf{g}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \dot{\mathbf{g}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \delta \mathbf{g}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{g}_e) \\
 & = \ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \\
 VI & \dots
 \end{array} \tag{V.1.11}$$

Die rekursive Struktur aller Ableitungen ab Zeile III ist deutlich erkennbar. So ist der Ausdruck der jeweils vorangegangenen Zeile abzuleiten und anschließend nochmals im Kreuzprodukt mit der entsprechenden Drehrate zu addieren. Auch spielt die Struktur aller Gleichungen ab Zeile III im Folgenden eine große Rolle. Es wird stets das geometrische Problem der Rotation eines Vektors in einem Bezugssystem auf einen Vektor in einem anderen Bezugssystem beschrieben. Dies schließt die Herleitung der Beobachtbarkeitsgleichungen ab. Der Zustandsvektor hat sich durch die Unabhängigkeit der auftretenden Ableitungen der Störungen von 18 auf 33 vergrößert und beinhaltet nun alle mathematisch resultierenden Zustände. Der durchgezogene Strich kennzeichnet die Abgrenzung von absoluten Zuständen und Sensor- und Modellstörungen, und die Strichelung deutet das Auftreten der einzelnen Störungen in den Zeilen an.

$$\mathbf{z} = \left. \begin{array}{l}
 \mathbf{x}_e : \text{Position} \\
 \mathbf{v}_e : \text{Geschwindigkeit} \\
 R_{eb} : \text{Rotationsmatrix} \\
 \hline
 \delta \mathbf{f}_b : \text{Beschleunigungsstörung} \\
 \delta \mathbf{g}_e : \text{Erdschweremodellstörung} \\
 \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b : \text{Winkelgeschwindigkeitsstörung} \\
 \delta \dot{\mathbf{f}}_b : \text{Erste Ableitung der Beschleunigungsstörung} \\
 \delta \dot{\mathbf{g}}_e : \text{Erste Ableitung der Erdschweremodellstörung} \\
 \delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b : \text{Erste Ableitung der Winkelgeschwindigkeitsstörung} \\
 \delta \ddot{\mathbf{f}}_b : \text{Zweite Ableitung der Beschleunigungsstörung} \\
 \delta \ddot{\mathbf{g}}_e : \text{Zweite Ableitung der Erdschweremodellstörung} \\
 \dots : \dots
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{absolute Navigationszustände} \\
 \text{Sensor- und Modellfehler}
 \end{array} \tag{V.1.12}$$

Obige Gleichungen stellen die Ausgangsbasis für die Untersuchungen zur Beobachtbarkeitsanalyse dar. Auf Position und Geschwindigkeit wird im weiteren Verlauf verzichtet, da diese stets global beobachtbar sind, und nach Einführung der Näherungsrotation im nächsten Kapitel dann ausschließlich Störungen im Zustandsvektor vertreten sind.

### 1.1.2 Multiplikative Zerlegung in Näherungsrotation und Rotationsfehler

Neben der zeilenweisen Herleitung wird eine Zerlegung der wahren Rotationsmatrix in ein Produkt aus einer bekannten Näherungsrotationsmatrix und einer Störungsrotationsmatrix vorgenommen.

$$R_{eb} = R_{eb}^- R_{bb}^- \tag{V.1.13}$$

Eine Näherungsrotationsmatrix kann in Navigationsanwendungen stets auf Grund der Größe der IMU-Sensordaten und der geringen Größe der zugehörigen IMU-Sensorfehlerstörungen aus den Zeilen III und IV unter Vernachlässigung eben jener IMU-Sensorfehlerstörungen gewonnen werden, falls diese beiden Zeilen linear unabhängig sind, was normalerweise vorausgesetzt werden kann.

Falls eine lineare Abhängigkeit besteht, muss auf Zeile  $V$  ausgewichen werden.

$$\begin{aligned} III \quad R_{e\tilde{b}} \tilde{\mathbf{f}}_b &= \mathbf{f}_e \\ IV \quad R_{e\tilde{b}} \cdot \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \right) &= \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (\text{V.1.14})$$

Die Näherungsrotationsmatrix kann aus den Zeilen  $III$  und  $IV$  berechnet werden.

$$R_{e\tilde{b}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_b & \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b & \tilde{\mathbf{f}}_b \times \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \right) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_e & \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e & \mathbf{f}_e \times \left( \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right) \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.15})$$

Die Rotationsmatrix muss stets orthonormal sein. Durch die Näherungswerte ist dies nicht garantiert. Deshalb ist hier die Einführung einer Orthonormalisierung der Zeilen  $III$  und  $IV$  nach Gram-Schmidt nötig.<sup>49</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} & \mathbf{h}_1 &= \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \left( \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|}}{\left\| \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \left( \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right\|}} & \mathbf{h}_2 &= \frac{\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e - \left( \left( \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right)^T \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|}}{\left\| \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e - \left( \left( \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right)^T \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right\|}} \end{aligned} \quad (\text{V.1.16})$$

Die Näherungsrotationsmatrix kann somit über obige Substitution bestimmt werden. Die Inverse kann dabei durch die Transponierte ersetzt werden.

$$R_{e\tilde{b}} = (\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)^T (\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2) \quad (\text{V.1.17})$$

Ausformuliert lautet die Näherungsrotationsmatrix:

$$\begin{aligned} R_{e\tilde{b}} &= \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} & \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \left( \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|}}{\left\| \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \left( \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right\|}} & \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \times \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \left( \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|}}{\left\| \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \left( \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right\|}} \\ \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} & \frac{\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e - \left( \left( \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right)^T \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|}}{\left\| \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e - \left( \left( \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right)^T \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right\|}} & \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \times \frac{\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e - \left( \left( \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right)^T \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|}}{\left\| \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e - \left( \left( \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right)^T \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right\|}} \end{pmatrix}^T \quad (\text{V.1.18}) \end{aligned}$$

Im Kreuzprodukt der dritten Blockspalte fällt das Kreuzprodukt des normierten Beschleunigungsvektors mit sich selbst weg, und in der zweiten Blockspalte können die aufeinanderfolgenden Kreuz- und Skalarprodukte vereinfacht werden.

$$\begin{aligned} R_{e\tilde{b}} &= \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} & \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|}}{\left\| \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right) \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right\|}} & \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \times \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b}{\left\| \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \right\|}} \\ \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} & \frac{\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e - \left( \dot{\mathbf{f}}_e^T \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|}}{\left\| \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e - \left( \dot{\mathbf{f}}_e^T \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \right\|}} & \frac{\mathbf{f}_e}{\|\mathbf{f}_e\|} \times \frac{\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e}{\left\| \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right\|}} \end{pmatrix}^T \quad (\text{V.1.19}) \end{aligned}$$

Hier wird im Gegensatz zur Herleitung der Bewegungsgleichungen in Abschnitt III eine rechtsmultiplikative Zerlegung gewählt, da sich die bekannte Näherungsrotationsmatrix nur so im weiteren Berechnungsverlauf auf die rechte Seite multiplizieren lässt. Im Zustandsvektor kann somit im weiteren Verlauf auch die Orientierung als Zustandsstörung und nicht mehr als absoluter Zustand angegeben werden.

<sup>49</sup> Meyberg, Kurt & Vachenaue, Peter; Höhere Mathematik 1 Differential- und Integralrechnung Vektor- und Matrizenrechnung – 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin 1999, S.320f

### 1.1.3 Formulierung der nichtlinearen unparametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen in Zustandsstörungen

Fasst man die Ergebnisse der Zeilen I bis V aus der Herleitung der Beobachtbarkeitsgleichungen zusammen, so lauten die nichtlinearen unparametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \text{III} \quad & R_{\tilde{b}b}^- \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) + R_{\tilde{e}b}^T \cdot \delta \mathbf{g}_e = R_{\tilde{e}b}^T \cdot \mathbf{f}_e \\
 \text{IV} \quad & R_{\tilde{b}b}^- \cdot \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) \right) + R_{\tilde{e}b}^T \cdot (\delta \dot{\mathbf{g}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{g}_e) = R_{\tilde{e}b}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \\
 \text{V} \quad & R_{\tilde{b}b}^- \cdot \left( \ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \ddot{\mathbf{f}}_b + 2(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times (\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b) + (\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b + \delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) \right) \\
 & + R_{\tilde{b}b}^- \cdot \left( (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times ((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b)) \right) \\
 & + R_{\tilde{e}b}^T \cdot (\delta \ddot{\mathbf{g}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \dot{\mathbf{g}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \delta \mathbf{g}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \delta \mathbf{g}_e)) \\
 & = R_{\tilde{e}b}^T \cdot (\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))
 \end{aligned} \tag{V.1.20}$$

Der zugehörige Zustandsvektor verkleinert sich auf 27 und beinhaltet ab jetzt ausschließlich Störungsgrößen. Eine Beobachtbarkeit aller Zustandsparameter ist wegen der Größe des Zustandsvektors immer noch ausgeschlossen. Auf die Zeilen I und II wird im weiteren Verlauf verzichtet, da diese stets und ausschließlich die Bedingungen zur Beobachtbarkeit von Position und Geschwindigkeit liefern.

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} R_{\tilde{b}b}^- \\ \delta \mathbf{f}_b \\ \delta \mathbf{g}_e \\ \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\ \delta \dot{\mathbf{f}}_b \\ \delta \dot{\mathbf{g}}_e \\ \delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \\ \delta \ddot{\mathbf{f}}_b \\ \delta \ddot{\mathbf{g}}_e \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Störungsrotationsmatrix} \\ \text{Beschleunigungsstörung} \\ \text{Erdschweremodellstörung} \\ \text{Winkelgeschwindigkeitsstörung} \\ \text{Erste Ableitung der Beschleunigungsstörung} \\ \text{Erste Ableitung der Erdschweremodellstörung} \\ \text{Erste Ableitung der Winkelgeschwindigkeitsstörung} \\ \text{Zweite Ableitung der Beschleunigungsstörung} \\ \text{Zweite Ableitung der Erdschweremodellstörung} \end{array} \tag{V.1.21}$$

### 1.1.4 Herleitung von nichtlinearen parametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen

Im zweiten Teil der nichtlinearen Herleitung sollen nun die bisher noch allgemein gehaltenen Störungen durch reale Parameter ersetzt werden. Für die Störungsrotationsmatrix wird eine Parametrisierung nach Cayley gewählt.<sup>50</sup>

$$R_{\tilde{b}b} = \left( I_{3 \times 3} - S_{\tilde{b}b} \right)^{-1} \left( I_{3 \times 3} + S_{\tilde{b}b} \right) \tag{V.1.22}$$

$S_{\tilde{b}b}$  stellt dabei die schiefsymmetrische Matrix der Cayleyparameterstörung  $s_{\tilde{b}b}$  dar.

$$S_{\tilde{b}b} = \begin{pmatrix} 0 & -s_{\tilde{b}b_3} & s_{\tilde{b}b_2} \\ s_{\tilde{b}b_3} & 0 & -s_{\tilde{b}b_1} \\ -s_{\tilde{b}b_2} & s_{\tilde{b}b_1} & 0 \end{pmatrix} = s_{\tilde{b}b} \times \tag{V.1.23}$$

Die Parametrisierung nach Cayley bietet in diesem Zusammenhang den großen Vorteil, dass im Gegensatz zur Parametrisierung in Eulerwinkeln in den nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen keine quadratischen Terme der Cayleyparameterstörung auftreten und sich in Folge geringere Linearisierungseffekte ergeben. Für die IMU-Sensordaten und das Erdschwerefeld werden die Fehlermodelle aus Abschnitt IV verwendet, wobei im Bereich der IMU-Sensordaten auf ein Misalignment verzichtet wird.

<sup>50</sup> Dambeck, Johann H.; Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Stuttgart 1999, S.28ff

Das Kreisfehlermodell beinhaltet sechs Fehlermodellparameter und lautet:

$$\delta \omega_{ib}^b = \begin{pmatrix} b_{g_1} \\ b_{g_2} \\ b_{g_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{g_1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{g_2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{g_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{ib_1}^b \\ \tilde{\omega}_{ib_2}^b \\ \tilde{\omega}_{ib_3}^b \end{pmatrix} = \mathbf{b}_g + \text{diag}(\mathbf{k}_g) \cdot \tilde{\omega}_{ib}^b = \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g \quad (\text{V.1.24})$$

Für die Beschleunigungsmesser gilt analog:

$$\delta \mathbf{f}_b = \begin{pmatrix} b_{a_1} \\ b_{a_2} \\ b_{a_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{a_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_{b_1} \\ \tilde{f}_{b_2} \\ \tilde{f}_{b_3} \end{pmatrix} = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\mathbf{k}_a) \cdot \tilde{\mathbf{f}}_b = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a \quad (\text{V.1.25})$$

Der Operator *diag* dient zur Überführung eines Vektors in eine Diagonalmatrix. Das Erdschwerefehlermodell beinhaltet auf Grund der Langwelligkeit lediglich einen Bias.

$$\delta \mathbf{g}_e = \begin{pmatrix} b_{e_1} \\ b_{e_2} \\ b_{e_3} \end{pmatrix} = \mathbf{b}_e \quad (\text{V.1.26})$$

Die vorgenommene Definition der Parametrisierung eliminiert somit alle Ableitungen der Störungen aus dem Zustandsvektor. Das Einsetzen der Gleichungen (V.1.24) bis (V.1.26) in die Zeile *III* der nichtlinearen unparametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen nach Kapitel 1.1.1 ergibt:

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & R_{\tilde{b}\tilde{b}}^T \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) + R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \delta \mathbf{g}_e = R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{f}_e \\ \text{III} \quad & (I - S_{\tilde{b}\tilde{b}})^{-1} (I + S_{\tilde{b}\tilde{b}}) (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) + R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{b}_e = R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{f}_e \\ \text{III} \quad & (I + S_{\tilde{b}\tilde{b}}) (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) + (I - S_{\tilde{b}\tilde{b}}) R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{b}_e = (I - S_{\tilde{b}\tilde{b}}) R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{f}_e \\ \text{III} \quad & \tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a + S_{\tilde{b}\tilde{b}} \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) + R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{b}_e - S_{\tilde{b}\tilde{b}} R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{b}_e = R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{f}_e - S_{\tilde{b}\tilde{b}} R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{f}_e \\ \text{III} \quad & - (R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{f}_e) \times s_{\tilde{b}\tilde{b}} - (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) \times s_{\tilde{b}\tilde{b}} + (R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{b}_e) \times s_{\tilde{b}\tilde{b}} \\ & + \tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a + R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{b}_e = R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (\text{V.1.27})$$

Analog kann für die Zeile *IV* vorgegangen werden.

$$\begin{aligned} \text{IV} \quad & R_{\tilde{b}\tilde{b}}^T \cdot \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \delta \dot{\mathbf{f}}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \delta \omega_{ib}^b) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \delta \mathbf{f}_b) \right) \\ & + R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\delta \dot{\mathbf{g}}_e + \omega_{ie}^e \times \delta \mathbf{g}_e) = R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \\ \text{IV} \quad & (I - S_{\tilde{b}\tilde{b}})^{-1} (I + S_{\tilde{b}\tilde{b}}) \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) \right) \\ & + R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\omega_{ie}^e \times \mathbf{b}_e) = R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \\ \text{IV} \quad & (I + S_{\tilde{b}\tilde{b}}) \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) \right) \\ & + (I - S_{\tilde{b}\tilde{b}}) R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\omega_{ie}^e \times \mathbf{b}_e) = (I - S_{\tilde{b}\tilde{b}}) R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \\ \text{IV} \quad & \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) \\ & + S_{\tilde{b}\tilde{b}} \cdot \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) \right) \\ & + R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\omega_{ie}^e \times \mathbf{b}_e) - S_{\tilde{b}\tilde{b}} R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\omega_{ie}^e \times \mathbf{b}_e) = R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) - S_{\tilde{b}\tilde{b}} R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \\ \text{IV} \quad & - (R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)) \times s_{\tilde{b}\tilde{b}} - \left( \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) \right) \times s_{\tilde{b}\tilde{b}} \\ & + (R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\omega_{ie}^e \times \mathbf{b}_e)) \times s_{\tilde{b}\tilde{b}} + \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + (\tilde{\omega}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g) \times (\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a) \\ & + R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\omega_{ie}^e \times \mathbf{b}_e) = R_{\tilde{e}\tilde{b}}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \end{aligned} \quad (\text{V.1.28})$$



Die parametrisierten polynomialen Beobachtbarkeitsgleichungen ergeben sich aus den Einzelergebnissen der Gleichungen (V.1.27) bis (V.1.29).

$$\begin{aligned}
 \text{III} \quad & -\left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e\right) \times s_{\tilde{b}b} - \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}\left(\tilde{\mathbf{f}}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right) \times s_{\tilde{b}b} + \left(R_{eb}^T \mathbf{b}_e\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & + \tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}\left(\tilde{\mathbf{f}}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a + R_{eb}^T \mathbf{b}_e = R_{eb}^T \mathbf{f}_e \\
 \text{IV} \quad & -\left(R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} - \left(\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}\left(\tilde{\mathbf{f}}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & + \left(R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} + \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}\left(\tilde{\mathbf{f}}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right) \\
 & + R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e\right) = R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right) \\
 \text{V} \quad & -\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & - \left(\ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + 2\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}\left(\tilde{\mathbf{f}}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & - \left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}\left(\tilde{\mathbf{f}}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & + \left(R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e\right)\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} + \ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + 2\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}\left(\tilde{\mathbf{f}}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right) \\
 & + \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}\left(\tilde{\mathbf{f}}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right) \\
 & + R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e\right)\right) = R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)
 \end{aligned} \tag{V.1.31}$$

Der Zustandsvektor verkleinert sich durch den Übergang von Störungsgrößen auf Fehlermodellparameter und den Verzicht auf Position und Geschwindigkeit auf 18.

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} s_{\tilde{b}b} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \mathbf{b}_e \\ \mathbf{b}_g \\ \mathbf{k}_g \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Cayleyparameterstörung} \\ \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler} \\ \text{Erdschwerermodellbias} \\ \text{Kreiselbias} \\ \text{Kreiselkalenfaktorfehler} \end{array} \tag{V.1.32}$$

Die Größe des Zustandsvektors übersteigt die Anzahl prinzipiell möglicher unabhängiger Gleichungen immer noch um neun. Es ist somit leicht ersichtlich, dass auch im parametrisierten Fall bei einem Arbeitspunkt und bei Abbruch der Beobachtbarkeitsanalyse bei Zeile V niemals alle Zustandsparameter beobachtbar sein können. Zur Lösung dieses Problems können nun entweder weitere unabhängige Arbeitspunkte zur Beobachtbarkeit herangezogen werden oder es muss alternativ die Größe des Zustandsvektors weiter verkleinert werden. Die Beobachtbarkeit bei mehreren unabhängigen Arbeitspunkten wird in Kapitel 1.3 weiter untersucht. Es wird nun jedoch der alternative Weg verfolgt: Ausgehend von obigen nichtlinearen parametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen werden die Vereinfachungen für drei Spezialfälle separat präsentiert. Der erste Spezialfall behandelt ein konstantes Manöver unter Vernachlässigung sämtlicher Ableitungen der IMU-Sensordaten. Als zweiter Spezialfall soll eine lineare Beschleunigung unter Vernachlässigung jeglicher Winkelgeschwindigkeiten dienen. Der dritte Spezialfall stellt den stationären Fall dar, bei dem zusätzlich die Winkelgeschwindigkeit auf Grund ihrer geringen Größe vernachlässigt wird und lediglich eine konstante Beschleunigung verbleibt. Diese drei Spezialfälle werden jeweils mit zwei alternativen Fehlermodellen präsentiert. Im Rahmen der nichtlinearen Problemdiskussion lassen sich in den folgenden Kapiteln oftmals nur schwer Aussagen treffen. Nichtsdestotrotz sollen die Spezialfälle nichtlinear formuliert werden, um die Ergebnisse der Diskussion der linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen im Anschluss besser beurteilen zu können.

### 1.1.5 Nichtlinearer Spezialfall „Stationary Maneuvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Der Spezialfall „Stationary Maneuvre“ vernachlässigt die ersten Ableitungen der gemessenen IMU-Sensordaten und soll die inertialen Sensordaten während eines konstanten Manövers darstellen. Die Einleitung dieses Manövers, bei dem sehr wohl Änderungen in den IMU-Sensordaten auftreten, soll hier nicht betrachtet werden, da diese Einleitung zeitlich eng begrenzt ist und somit wenig Auswirkungen auf die Beobachtbarkeit in einem realen Kalmanfilter haben wird. Die Terme im erdfesten Bezugssystem in den Koeffizienten der Cayleyparameterstörung dürfen nicht generell vereinfacht werden, da diese auch unter den jeweils getroffenen Vereinfachungen für die IMU-Sensordaten auf Grund der Führungsänderung der beiden verschiedenen Bezugssysteme Werte ungleich Null annehmen können und zudem stets analytisch berechenbar sind. Bei den Fehlerparametern werden in den nächsten Kapiteln jeweils zwei alternative Fehlermodelle pro Spezialfall diskutiert. Hier beinhaltet das Fehlermodell zuerst lediglich die sechs IMU-Sensorbias, so dass sich folgende Annahmen ergeben:

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$
$\tilde{\omega}_{ib}^b \neq \tilde{\mathbf{f}}_b$		
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta\omega_{ib}^b = \mathbf{b}_g$	$\delta\mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a$	$\delta\mathbf{g}_e = \mathbf{0}$

(V.1.33)

Auf die explizite Herleitung wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Die Gleichungen werden durch Einsetzen obiger Definitionen in die nichtlinearen parametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen nach Gleichung (V.1.31) und anschließendes Wegstreichen der nicht benötigten Terme bestimmt. Die vereinfachten polynomialen Beobachtbarkeitsgleichungen für den Spezialfall „Stationary Maneuvre“ lauten:

III	$-\left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e + \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}} - \mathbf{b}_a \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}} + \mathbf{b}_a = R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b$	
IV	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right) + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}} - \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a - \tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}}$ $+ \tilde{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a - \tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a = R_{eb}^T \cdot \left(\omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b$	
V	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \omega_{ie}^e \times \left(\omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right) + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\right)\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}}$ $-\left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a\right) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g\right) - \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times \mathbf{b}_g\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}}$ $-\left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right) - \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a\right) \times \mathbf{b}_g + \left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g\right) \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \left(\mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right)\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}}$ $+ \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a\right) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g\right) - \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times \mathbf{b}_g$ $+ \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right) - \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a\right) \times \mathbf{b}_g + \left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g\right) \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \left(\mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right)$ $= R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \omega_{ie}^e \times \left(\omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\right)$	(V.1.34)

Der Zustandsvektor heißt:

$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{\tilde{bb}} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix}$	: Cayleyparameterstörung : Beschleunigungsmesserbias : Kreiselbias	(V.1.35)
--	--	----------

Aussagen zur Beobachtbarkeit der Zustandsparameter lassen sich auf Grund der komplizierten Struktur nur schwer treffen. Ein direktes Auflösen nach den Zustandsparametern und anschließendes Ausrechnen ist nicht möglich. Es sind lediglich wegen der Größe des Vektors auf der rechten Seite Schlussfolgerungen zur quantitativen Beobachtbarkeit möglich. So sind die Cayleyparameterstörung beziehungsweise die Beschleunigungsmesserbias in Zeile III enthalten und damit im erdfesten Bezugssystem besser beobachtbar. Die Kreiselbias treten im Gegensatz dazu erstmals in Zeile IV auf und sind somit auf Grund der relativ kleinen Erddrehrate im Vergleich schlechter beobachtbar. In den Zeilen IV und V sind jeweils alle neun Zustandsparameter enthalten, so dass sich konkrete Aussagen zur quantitativen Beobachtbarkeit einzelner Zustandsparameter nicht treffen lassen.

### 1.1.6 Nichtlinearer Spezialfall „Stationary Maneuvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

Der Spezialfall „Stationary Maneuvre“ beinhaltet nun neben den Beschleunigungsmesserbias auch die Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler, vernachlässigt jedoch jegliches Kreisfehlermodell. Die Annahmen zur Dynamik entsprechen dem vorigen Kapitel.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	
$\tilde{f}_b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{f}}_b = \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{f}}_b = \mathbf{0}$
$\tilde{\omega}_{ib}^b \neq \tilde{f}_b$		
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta\omega_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\delta f_b = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{k}_a$	$\delta g_e = \mathbf{0}$

(V.1.36)

Bei den vereinfachten nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen für diesen Spezialfall können die Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler zusammen gruppiert werden.

III	$-\left(R_{eb}^T f_e + \tilde{f}_b\right) \times s_{\tilde{b}b} - \left(\mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) \times s_{\tilde{b}b} + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{k}_a = R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b$	
IV	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e\right) + \dot{\tilde{f}}_b + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right) \times s_{\tilde{b}b} - \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right) \times s_{\tilde{b}b}$ $+ \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) = R_{eb}^T \cdot \left(\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e\right) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b$	
V	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times \left(\omega_{ie}^e \times f_e\right)\right) + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right)\right) \times s_{\tilde{b}b}$ $-\left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a\right) + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right)$ $= R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times \left(\omega_{ie}^e \times f_e\right)\right) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right)$	(V.1.37)

Die Anzahl der zu beobachtenden Zustände beträgt neun.

$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} s_{\tilde{b}b} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \end{pmatrix}$	: Cayleyparameterstörung : Beschleunigungsmesserbias : Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler	(V.1.38)
---	--	----------

Im Vergleich zum vorigen Kapitel ergeben sich einige Änderungen. So sind die Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler stets in allen drei Zeilen in der gleichen Linearkombination in den parametrisierten polynomialen Beobachtbarkeitsgleichungen vertreten. Eine Auflösung dieser Linearkombination in ihre Bestandteile ist somit bei einem Arbeitspunkt generell nicht möglich. Einzige Ausnahme besteht bei Vorliegen einer Nullbeschleunigung in einer der körperfesten Bezugssystemachsen. In diesem Fall ist der zugehörige Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler nicht beobachtbar und der zugehörige Beschleunigungsmesserbias wird direkt beobachtbar. Im allgemeinen Fall wird zur Trennung der Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler zwingend eine zweite linear unabhängige gemessene Beschleunigung und somit ein zweiter Arbeitspunkt benötigt. Es wird hierzu auf die Behandlung der Beobachtbarkeit bei mehreren Arbeitspunkten in Kapitel 1.3 verwiesen. Die Cayleyparameterstörungen sind in jeder der drei Zeilen enthalten. Unterschiede in der quantitativen Beobachtbarkeit sind nicht erkennbar, da alle Zustandsparameter bereits in Zeile III enthalten sind.

### 1.1.7 Nichtlinearer Spezialfall „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Dieser Spezialfall beschreibt das Manöver einer konstanten Linearbeschleunigung ohne Winkelgeschwindigkeitsänderung. In diesem Fall treten nur die gemessene Beschleunigung und deren erste Ableitung auf. Die gemessene Winkelgeschwindigkeit beinhaltet lediglich die Erddrehrate und kann auf Grund ihrer geringen Größe vernachlässigt werden, so dass sich folgende Vereinfachungen und Annahmen ergeben:

<i>Gemessene IMU – Sensordaten:</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \neq \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b$		
<i>Fehlermodellparameter:</i>		
$\delta \omega_{ib}^b = \mathbf{b}_g$	$\delta \mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a$	$\delta \mathbf{g}_e = \mathbf{0}$

(V.1.39)

Die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen lauten in diesem Spezialfall unter Berücksichtigung der sechs IMU-Sensorbias:

III	$-\left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e + \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{b}b} - \mathbf{b}_a \times \mathbf{s}_{\tilde{b}b} + \mathbf{b}_a = R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b$	
IV	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right) + \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{b}b} - \left(-\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{b}b}$ $-\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a = R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right) - \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b$	
V	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{b}b}$ $-\left(-2\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times \mathbf{b}_g + \left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g\right) \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \left(\mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right)\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{b}b}$ $-2\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times \mathbf{b}_g + \left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g\right) \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \left(\mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right)$ $= R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)$	(V.1.40)

Der Zustandsvektor hat eine Größe von neun.

$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{\tilde{b}b} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Cayleyparameterstörung} \\ \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Kreiselbias} \end{array}$	(V.1.41)
---	----------

In diesem Spezialfall verändern sich die Beobachtbarkeitsgleichungen durch den Wegfall jeglicher Winkelgeschwindigkeiten deutlich. Wegen der Größe des Vektors der rechten Seite sind die Cayleyparameterstörung und der Beschleunigungsmesserbias quantitativ deutlich besser beobachtbar als die Kreiselbias, welche erstmals in Zeile IV auftreten. Die Zeilen IV und V enthalten alle neun Zustandsparameter, was eine detaillierte Beurteilung im nichtlinearen Fall erneut verhindert.

### 1.1.8 Nichtlinearer Spezialfall „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

Die Annahmen und Vorgaben für den Spezialfall „Linear Acceleration“ lauten mit dem zweiten IMU-Sensorfehlermodell:

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \neq \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b$		
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta\omega_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\delta\mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a$	$\delta\mathbf{g}_e = \mathbf{0}$

(V.1.42)

Die Beobachtbarkeitsgleichungen können erneut durch Vereinfachung aus Gleichung (V.1.31) hergeleitet werden.

III	$-\left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e + \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times \mathbf{s}_{bb} - \left(\mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) \times \mathbf{s}_{bb} + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a = R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b$	
IV	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right) + \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\right) \times \mathbf{s}_{bb} = R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right) - \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b$	
V	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)\right) \times \mathbf{s}_{bb}$ $= R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)$	(V.1.43)

Die Zeile V liefert nur für den Fall einer Nullmatrix als Koeffizientenmatrix ein gültiges Ergebnis und fällt somit in der Argumentation weg, da der erste Vektor im Kreuzprodukt mit dem Ergebnisvektor der rechten Seite identisch ist. Der Zustandsvektor hat eine Größe von neun.

$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{bb} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Cayleyparameterstörung} \\ \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Beschleunigungsmesserskalenfehler} \end{array}$	(V.1.44)
---	----------

In diesem Fall lassen sich erstmals auch direkte Aussagen zur qualitativen Beobachtbarkeit treffen. Zeile V fällt, wie bereits angemerkt, weg. Dies liegt daran, dass der in Zeile V enthaltene Gesamtvektor im erdfesten Bezugssystem in diesem sehr einfachen Fall keine Komponenten ungleich Null mehr enthält. Hier soll die Argumentation mit der Zeile IV begonnen werden. Es ist lediglich die Cayleyparameterstörung in dieser Zeile enthalten, jedoch führt das Kreuzprodukt zu einer Einschränkung der Beobachtbarkeit. Ein Freiheitsgrad der Cayleyparameterstörung ist nicht beobachtbar. In Zeile III ist erneut, analog zur Argumentation in den vorigen Spezialfällen mit diesem Sensorfehlermodell, die Linearkombination aus Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler bei einem Arbeitspunkt und einer gemessenen Beschleunigung ungleich Null nicht auflösbar. Es verbleiben somit vier zu beobachtende Zustandsparameter bei drei unabhängigen Gleichungen. Damit sind auch qualitativ erstmals nicht alle Freiheitsgrade der Zustandsparameter beobachtbar.

### 1.1.9 Nichtlinearer Spezialfall „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Der Spezialfall „Straight and Levelled“ beinhaltet ausschließlich die gemessene Beschleunigung unter Vernachlässigung jeglicher gemessener Winkelgeschwindigkeit und stellt den stationären Fall dar. Die Störungen sind analog zu Kapitel 1.1.5 definiert, und das Sensorfehlermodell beinhaltet in diesem ersten Unterfall somit erneut ausschließlich die sechs IMU-Sensordatenbias.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	(V.1.45)
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$	
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta\omega_{ib}^b = \mathbf{b}_g$	$\delta\mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a$	$\delta\mathbf{g}_e = \mathbf{0}$

Die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen dieses Spezialfalls vereinfachen sich wegen der Einschränkungen in der zu Grunde liegenden Dynamik deutlich.

III	$-\left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e + \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}} - \mathbf{b}_a \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}} + \mathbf{b}_a = R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b$	(V.1.46)
IV	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}} - \left(-\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}}$ $-\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a = R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)$	
V	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}}$ $-\left(\left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g\right) \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \left(\mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right)\right) \times \mathbf{s}_{\tilde{bb}} + \left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g\right) \times \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_g \times \left(\mathbf{b}_g \times \mathbf{b}_a\right)$ $= R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)$	

Die Anzahl der Zustände verkleinert sich auf neun.

$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{\tilde{bb}} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Cayleyparameterstörung} \\ \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Kreiselbias} \end{array}$	(V.1.47)
---	----------

Die Argumentation der qualitativen Beobachtbarkeit dieses Spezialfalls kann direkt vom Spezialfall „Linear Acceleration“ mit dem gleichen Sensorfehlermodell übernommen werden. Die zusätzliche Vernachlässigung der ersten Ableitung fällt erst in Zeile V ins Gewicht, in der die Kreiselbias nun ausschließlich bilinear beziehungsweise quadratisch vorliegen. Aussagen zur qualitativen Beobachtbarkeit der Zustandsparameter sind damit nicht möglich. Die quantitative Beobachtbarkeit der in Zeile III enthaltenen Zustände ist besser als die der erst ab Zeile IV auftretenden Kreiselbias.

### 1.1.10 Nichtlinearer Spezialfall „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

Dieser Fall beinhaltet neben Beschleunigungsmesserbias zusätzlich noch Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler. Die Dynamik orientiert sich am vorherigen Kapitel.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta\omega_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\delta\mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a$	$\delta\mathbf{g}_e = \mathbf{0}$

(V.1.48)

Die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen dieses Spezialfalls enthalten ausschließlich die Zeile *III*, da die weiteren Zeilen erneut nur durch eine Nullmatrix als Koeffizientenmatrix gültig sind und somit keinen Beitrag zur Beobachtbarkeit liefern können.

<i>III</i>	$-\left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e + \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times s_{bb} - \left(\mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) \times s_{bb} + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a = R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b$	
<i>IV</i>	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right) \times s_{bb} = R_{eb}^T \cdot \left(\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)$	
<i>V</i>	$-\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)\right) \times s_{bb}$ $= R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e\right)\right)$	(V.1.49)

Der Zustandsvektor lautet:

$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} s_{bb} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \end{pmatrix}$	: Cayleyparameterstörung : Beschleunigungsmesserbias : Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler	(V.1.50)
---	--	----------

Durch die Vernachlässigung der gemessenen Winkelgeschwindigkeit und jeglicher Kreiselfehler liefern weder Zeile *IV* noch Zeile *V* einen Beitrag zur Beobachtbarkeit der Zustandsparameter. Damit können über Zeile *III* lediglich drei Kombinationen aus den Cayleyparameterstörung und einem Gesamtbeschleunigungsmesserfehler bestimmt werden, da die Trennung von Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler bei der Betrachtung eines Arbeitspunktes wiederum nicht möglich ist. Dies schließt die Argumentation der nichtlinearen Spezialfälle ab. Die nun vorgestellten sechs Spezialfälle werden im Rahmen der linearisierten Beobachtbarkeitsgleichung erneut betrachtet und die Ergebnisse miteinander verglichen.

## 1.2. Linearisierte Beobachtbarkeitsgleichungen

Im Gegensatz zu den nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen des vorigen Kapitels sollen nun zur besseren Beurteilung auch die linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen hergeleitet werden. Die Beobachtbarkeit von Position und Geschwindigkeit kann problemlos anhand der nichtlinearen unparametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen gezeigt werden. Für die Orientierung und die Störungen ist dies auf Grund der komplizierten Struktur nicht ohne weiteres möglich.

### 1.2.1 Herleitung der linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen

Die linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen werden von den nichtlinearen parametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen nach Kapitel 1.1.4 hergeleitet. Es werden dazu alle Terme höherer Ordnung aus den Beobachtbarkeitsgleichungen entfernt. Zeile *III* vereinfacht sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \text{III} \quad & -R_{eb}^T \mathbf{f}_e \times s_{bb} - \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) \times s_{bb} + \left(R_{eb}^T \mathbf{b}_e\right) \times s_{bb} \\
 & + \tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a + R_{eb}^T \mathbf{b}_e = R_{eb}^T \mathbf{f}_e \\
 \text{III} \quad & -\left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e + \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times s_{bb} + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a + R_{eb}^T \mathbf{b}_e = R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b
 \end{aligned}
 \tag{V.1.51}$$

Analog gilt für Zeile IV :

$$\begin{aligned}
 IV \quad & -\left(R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)\right) \times s_{\tilde{b}b} - \left(\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & + \left(R_{eb}^T \cdot (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e)\right) \times s_{\tilde{b}b} + \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) \\
 & + R_{eb}^T \cdot (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e) = R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \tag{V.1.52} \\
 IV \quad & -\left(R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) + \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times s_{\tilde{b}b} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) \\
 & - \tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g - \tilde{\mathbf{f}}_b \times \left(\text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) + R_{eb}^T \cdot (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e) = R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) - \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b
 \end{aligned}$$

Zeile V kann auf gleiche Weise linearisiert werden.

$$\begin{aligned}
 V \quad & -\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & -\left(\ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + 2\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & -\left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & + \left(R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e)\right)\right) \times s_{\tilde{b}b} + \ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + 2\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) \\
 & + \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b + \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right)\right) \\
 & + R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e)\right) = R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)\right) \\
 V \quad & -\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)\right) + \ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)\right) \times s_{\tilde{b}b} \\
 & -\left(2\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times \mathbf{b}_g - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{b}_g\right) - \left(2\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \times \left(\text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right) \\
 & - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\mathbf{f}}_b \times \left(\text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right)\right) + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a\right) + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \left(\text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) \\
 & + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a\right) + R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e)\right) = R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)\right) \\
 & - \ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b - \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\right) \tag{V.1.53}
 \end{aligned}$$

Auch hier sollen die getroffenen Annahmen und Definitionen zu Übersichtszwecken nochmals präsentiert werden.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \neq \mathbf{0}$	
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \neq \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \neq \mathbf{0}$
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g$	$\delta \mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a$	$\delta \mathbf{g}_e = \mathbf{b}_e$

(V.1.54)

Zusammenfassend ergeben sich die linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen.

$$\begin{aligned}
 \text{III} \quad & -\left(R_{eb}^T \dot{f}_e + \tilde{f}_b\right) \times s_{bb} + \mathbf{b}_a + \text{diag}\left(\tilde{f}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a + R_{eb}^T \mathbf{b}_e = R_{eb}^T \dot{f}_e - \tilde{f}_b \\
 \text{IV} \quad & -\left(R_{eb}^T \cdot \left(\dot{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times f_e\right) + \dot{\tilde{f}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right) \times s_{bb} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\text{diag}\left(\tilde{f}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right) \\
 & - \tilde{f}_b \times \mathbf{b}_g - \tilde{f}_b \times \left(\text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) + R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e\right) = R_{eb}^T \cdot \left(\dot{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times f_e\right) - \dot{\tilde{f}}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b \\
 \text{V} \quad & -\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{f}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times f_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times f_e\right)\right) + \ddot{\tilde{f}}_b + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \dot{\tilde{f}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right)\right) \times s_{bb} \\
 & - \left(2\dot{\tilde{f}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right) \times \mathbf{b}_g - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{f}_b \times \mathbf{b}_g\right) - \left(2\dot{\tilde{f}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right) \times \left(\text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right) \\
 & - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{f}_b \times \left(\text{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \cdot \mathbf{k}_g\right)\right) + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a\right) + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \left(\text{diag}\left(\tilde{f}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right) \\
 & + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \text{diag}\left(\tilde{f}_b\right) \cdot \mathbf{k}_a\right) + R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{b}_e\right)\right) = R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{f}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times f_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times f_e\right)\right) \\
 & - \ddot{\tilde{f}}_b - \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \dot{\tilde{f}}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right)
 \end{aligned} \tag{V.155}$$

Der Zustandsvektor der linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen verändert sich im Vergleich zu den nichtlinearen parametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen nach Kapitel 1.1.4 nicht.

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} s_{bb} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \mathbf{b}_e \\ \mathbf{b}_g \\ \mathbf{k}_g \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Cayleyparameterstörung} \\ \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler} \\ \text{Erdschwerermodellbias} \\ \text{Kreiselbias} \\ \text{Kreiselkalenfaktorfehler} \end{array} \tag{V.156}$$

Aus der Matrixschreibweise kann die Beobachtbarkeitsmatrix bestimmt werden.

$$\begin{pmatrix} -\text{veck}\left(R_{eb}^T \dot{f}_e\right) - \text{veck}\left(\tilde{f}_b\right) & I & \text{diag}\left(\tilde{f}_b\right) & R_{eb}^T \\ -\text{veck}\left(R_{eb}^T \cdot \left(\dot{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times f_e\right)\right) & \text{veck}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) & \text{veck}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \text{diag}\left(\tilde{f}_b\right)\right) & R_{eb}^T \cdot \text{veck}\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e\right) \\ -\text{veck}\left(\dot{\tilde{f}}_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right) & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{bb} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \mathbf{b}_e \end{pmatrix} \\
 + \begin{pmatrix} -\text{veck}\left(R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{f}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times f_e\right)\right) & & & \\ -\text{veck}\left(R_{eb}^T \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times f_e\right)\right)\right) & \text{veck}\left(\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b\right) & \text{veck}\left(\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \text{diag}\left(\tilde{f}_b\right)\right) & R_{eb}^T \cdot \text{veck}\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e\right) \text{veck}\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e\right) \\ -\text{veck}\left(\ddot{\tilde{f}}_b + 2\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \dot{\tilde{f}}_b + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right) & +\text{veck}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \text{veck}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) & +\text{veck}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\right) \text{veck}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \text{diag}\left(\tilde{f}_b\right)\right) & \\ -\text{veck}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right)\right) & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_g \\ \mathbf{k}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{eb}^T \dot{f}_e - \tilde{f}_b \\ R_{eb}^T \cdot \left(\dot{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times f_e\right) - \dot{\tilde{f}}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b \\ R_{eb}^T \cdot \left(\ddot{f}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times f_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times f_e\right)\right) \\ -\dot{\tilde{f}}_b - 2\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \dot{\tilde{f}}_b - \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right) \end{pmatrix} \tag{V.157}$$

Die rote Hervorhebung wird erst im nächsten Kapitel benötigt. Der *veck* Operator dient zur Überführung eines Vektors  $\mathbf{a}$  in eine schiefsymmetrische Matrix  $A$  und wird zur Eliminierung der Kreuzprodukte benötigt.

$$\text{veck}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \times \tag{V.158}$$

## 1.2.2 Einführung von Eulerwinkelstörungen

Bei den linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen ist die Beobachtbarkeitsmatrix nicht ausschließlich von den IMU-Sensordaten, sondern auch von erdfesten Termen abhängig. Eine Interpretation wird dadurch erschwert. Es besteht jedoch die Möglichkeit, durch einen Wechsel in der Parametrisierung der Orientierung diese ausschließliche Abhängigkeit herzustellen. Die Abhängigkeit von erdfesten Beschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten in der ersten Blockspalte der Beobachtbarkeitsmatrix wird durch die Cayleyparameter verursacht. Diese Abhängigkeiten sind dazu in Gleichung (V.1.57) rot hervorgehoben. Parametrisiert man die Orientierung in Eulerwinkeln, so tritt diese Abhängigkeit nicht auf und es verbleibt nur eine Abhängigkeit von den IMU-Sensordaten. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Möglichkeiten der Parametrisierung soll nun in diesem Kapitel dargestellt werden. Ausformuliert lautet die nichtlineare Rotationsmatrix in Cayleyparametern:

$$R_{\tilde{b}b} = \left( I - S_{\tilde{b}b} \right)_{3 \times 3}^{-1} \left( I + S_{\tilde{b}b} \right)_{3 \times 3} \quad (V.1.59)$$

$$R_{\tilde{b}b} = \frac{1}{1 + s_{\tilde{b}b_1}^2 + s_{\tilde{b}b_2}^2 + s_{\tilde{b}b_3}^2} \begin{pmatrix} 1 + s_{\tilde{b}b_1}^2 - s_{\tilde{b}b_2}^2 - s_{\tilde{b}b_3}^2 & 2(s_{\tilde{b}b_1}s_{\tilde{b}b_2} - s_{\tilde{b}b_3}) & 2(s_{\tilde{b}b_1}s_{\tilde{b}b_3} + s_{\tilde{b}b_2}) \\ 2(s_{\tilde{b}b_1}s_{\tilde{b}b_2} + s_{\tilde{b}b_3}) & 1 - s_{\tilde{b}b_1}^2 + s_{\tilde{b}b_2}^2 - s_{\tilde{b}b_3}^2 & 2(s_{\tilde{b}b_2}s_{\tilde{b}b_3} - s_{\tilde{b}b_1}) \\ 2(s_{\tilde{b}b_1}s_{\tilde{b}b_3} - s_{\tilde{b}b_2}) & 2(s_{\tilde{b}b_2}s_{\tilde{b}b_3} + s_{\tilde{b}b_1}) & 1 - s_{\tilde{b}b_1}^2 - s_{\tilde{b}b_2}^2 + s_{\tilde{b}b_3}^2 \end{pmatrix}$$

Linearisiert man diese Rotationsmatrix direkt unter der Berücksichtigung, dass die Cayleyparameterstörungen kleine Größen darstellen, so ergibt die linearisierte Rotationsmatrix:

$$R_{\tilde{b}b} = \begin{pmatrix} 1 & -2s_{\tilde{b}b_3} & 2s_{\tilde{b}b_2} \\ 2s_{\tilde{b}b_3} & 1 & -2s_{\tilde{b}b_1} \\ -2s_{\tilde{b}b_2} & 2s_{\tilde{b}b_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2s_{\tilde{b}b_3} & 2s_{\tilde{b}b_2} \\ 2s_{\tilde{b}b_3} & 0 & -2s_{\tilde{b}b_1} \\ -2s_{\tilde{b}b_2} & 2s_{\tilde{b}b_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (V.1.60)$$

Die linearisierte Rotationsmatrix in Eulerwinkelstörungen wurde bereits in Abschnitt III im Rahmen der kinematischen Gleichungen hergeleitet.

$$R_{\tilde{b}b} = \begin{pmatrix} 1 & -\psi_{\tilde{b}b} & \vartheta_{\tilde{b}b} \\ \psi_{\tilde{b}b} & 1 & -\varphi_{\tilde{b}b} \\ -\vartheta_{\tilde{b}b} & \varphi_{\tilde{b}b} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\psi_{\tilde{b}b} & \vartheta_{\tilde{b}b} \\ \psi_{\tilde{b}b} & 0 & -\varphi_{\tilde{b}b} \\ -\vartheta_{\tilde{b}b} & \varphi_{\tilde{b}b} & 0 \end{pmatrix} \quad (V.1.61)$$

Damit kann eine Beziehung zwischen der Cayleyparameterstörung und der Eulerwinkelstörung hergestellt werden.

$$\psi_{\tilde{b}b} = 2s_{\tilde{b}b_2} \quad (V.1.62)$$

Diese Beziehung kann jedoch nicht direkt in den Beobachtbarkeitsgleichungen wiedergefunden beziehungsweise eingesetzt werden. Das liegt an der Tatsache, dass in unserer Herleitung nicht zuerst die Rotationsmatrix linearisiert und anschließend in die Beobachtbarkeitsgleichungen eingesetzt wurde, sondern dass zuerst die nichtlineare Rotationsmatrix eingesetzt wurde und danach die gesamten Beobachtbarkeitsgleichungen linearisiert wurden. Durch die vor der Linearisierung durchgeführten Umformungen wurden die quadratischen Anteile der Parametrisierung in Cayleyparametern aufgespalten. Die Parametrisierung in Cayleyparameterstörungen verfügt somit über kleinere Linearisierungseffekte wie die Parametrisierung in Eulerwinkelstörungen. Auf die explizite Herleitung wird verzichtet. Die sich ergebenden Beobachtbarkeitsgleichungen in Matrixschreibweise lauten unter Verwendung einer Parametrisierung der Orientierung in Eulerwinkelstörungen:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \text{---veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & I & \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & R_{eb}^T & & \\ \text{---veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) & \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) & \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & R_{eb}^T \text{veck}(\omega_{ie}^e) & & \\ \text{---veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b + 2\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) & \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) & \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & R_{eb}^T \text{veck}(\omega_{ie}^e) \text{veck}(\omega_{ie}^e) & & \\ \text{---veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)) & +\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) & +\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \psi_{\tilde{b}b} \\ \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \mathbf{b}_e \end{pmatrix} \quad (V.1.63)$$

$$+ \left( \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & \\ \text{---veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & \text{---veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) & & & & \\ \text{---veck}(2\tilde{\mathbf{f}}_b + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) & \text{---veck}(2\tilde{\mathbf{f}}_b + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) & & & & \\ \text{---veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & \text{---veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) & & & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_s \\ \mathbf{k}_s \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc} R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b \\ R_{eb}^T \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) - \tilde{\mathbf{f}}_b - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b \\ R_{eb}^T \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_e + 2\omega_{ie}^e \times \tilde{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)) \\ -\tilde{\mathbf{f}}_b - 2\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) \end{array} \right)$$

Obige Beobachtbarkeitsgleichungen stellen die Ausgangsbasis für die Diskussion der sechs Spezialfälle in den folgenden Kapiteln dar. Die Spezialfälle entsprechen denen der nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen. Der Übergang von Cayleyparametern auf Eulerwinkelstörungen hat auf die Ergebnisse keinen Einfluss, erleichtert jedoch die Argumentation, da ausschließlich auf Grundlage der IMU-Sensordaten argumentiert werden kann.

### 1.2.3 Linearisierter Spezialfall „Stationary Maneuvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Dieser Spezialfall hat die gleichen Annahmen und Vereinfachungen wie der Spezialfall „Stationary Maneuvre“ in den nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen. Dessen Ergebnisse können in Kapitel 1.1.5 nachgelesen werden.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b \neq 0$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = 0$	
$\tilde{f}_b \neq 0$	$\dot{\tilde{f}}_b = 0$	$\ddot{\tilde{f}}_b = 0$
$\tilde{\omega}_{ib}^b \neq \tilde{f}_b$		
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta \omega_{ib}^b = \mathbf{b}_g$	$\delta f_b = \mathbf{b}_a$	$\delta g_e = 0$

(V.1.64)

In der Betrachtung der Spezialfälle können auf Grund der Einheitsmatrix als Koeffizientenmatrix vor den Beschleunigungsmesserbias die Beobachtbarkeitsgleichungen weiter vereinfacht werden. Zeile III kann nach den Beschleunigungsmesserbias aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -\tilde{f}_b \times \psi_{\tilde{b}b} + \mathbf{b}_a = R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\ \text{III} \quad & \mathbf{b}_a = R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b + \tilde{f}_b \times \psi_{\tilde{b}b} \end{aligned} \quad (\text{V.1.65})$$

Durch Einsetzen der Beschleunigungsmesserbias in Zeile IV können diese eliminiert werden.

$$\begin{aligned} \text{IV} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \times \psi_{\tilde{b}b} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a - \tilde{f}_b \times \mathbf{b}_g = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b \\ \text{IV} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \times \psi_{\tilde{b}b} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b + \tilde{f}_b \times \psi_{\tilde{b}b}) - \tilde{f}_b \times \mathbf{b}_g = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b \\ \text{IV} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \times \psi_{\tilde{b}b} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{f}_b \times \psi_{\tilde{b}b}) - \tilde{f}_b \times \mathbf{b}_g = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \end{aligned} \quad (\text{V.1.66})$$

Analog kann für Zeile V vorgegangen werden.

$$\begin{aligned} \text{V} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b)) \times \psi_{\tilde{b}b} - (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \times \mathbf{b}_g - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{f}_b \times \mathbf{b}_g) + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{b}_a) \\ & = R_{eb}^T \cdot (\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \\ \text{V} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b)) \times \psi_{\tilde{b}b} - (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \times \mathbf{b}_g - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{f}_b \times \mathbf{b}_g) + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b + \tilde{f}_b \times \psi_{\tilde{b}b})) \\ & = R_{eb}^T \cdot (\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \\ \text{V} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b)) \times \psi_{\tilde{b}b} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{f}_b \times \psi_{\tilde{b}b})) - (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \times \mathbf{b}_g - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{f}_b \times \mathbf{b}_g) \\ & = R_{eb}^T \cdot (\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)) \end{aligned} \quad (\text{V.1.67})$$

Die vereinfachten linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen können nun aus den obigen Gleichungen hergeleitet werden.

$$\begin{pmatrix} I & -\text{veck}(\tilde{f}_b) & 0 \\ 0 & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) & -\text{veck}(\tilde{f}_b) \\ 0 & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \psi_{\tilde{b}b} \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\ R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \\ R_{eb}^T \cdot (\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)) \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.68})$$

Die Anzahl der zu beobachtenden Zustände beträgt neun.

$$z = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \underline{\psi}_{\tilde{b}b} \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Eulerwinkelstörung} \\ \text{Kreiselbias} \end{array} \quad (\text{V.1.69})$$

Zur genauen Analyse der beobachtbaren Zustände wird eine Eigenwertbetrachtung der jeweiligen Submatrizen durchgeführt. Die gesamte Beobachtbarkeitsmatrix hat einen Rang von sechs. Wegen der Einheitsmatrix in der ersten Blockzeile muss ein Rangdefekt von drei in den verbleibenden beiden Blockzeilen vorliegen. Von den beteiligten vier Submatrizen verfügt lediglich die rechtsuntere Submatrix über einen vollen Rang von drei. Die drei restlichen Submatrizen haben einen Rang von zwei. Da das rechtsuntere Matrizenelement über einen vollen Rang verfügt, kann Zeile *V* nach den Kreiselbias aufgelöst werden. Symbolische Berechnungen dieses Vorgehens haben gezeigt, dass Zeile *IV* linear von Zeile *V* abhängig ist. Diese liefert somit keinen Beitrag zur Beobachtbarkeit der Zustandsparameter und kann weggelassen werden. Damit ist der Rangdefekt beseitigt und es ergibt sich folgende, um Zeile *IV* reduzierte Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} I & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \underline{\psi}_{\tilde{b}b} \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.70})$$

$$= \begin{pmatrix} R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b \\ R_{eb}^T \cdot (\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)) \end{pmatrix}$$

Auf Grund der immer noch komplizierten Struktur gestaltet sich eine Analyse als schwierig. Eine Eigenwert- und Eigenvektorberechnung nach

$$M \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \quad (\text{V.1.71})$$

wird durchgeführt. Die Rangbetrachtung und anschließende Eigenvektorberechnung der Submatrizen ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b)) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{\mathbf{f}}_b \\ \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b)) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{\omega}_{ib}^b \quad (\text{V.1.72}) \\ \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b)) &= 3 \end{aligned}$$

Durch eine Transformation unter Multiplikation der Zeile *V* mit der Inversen der Koeffizientenmatrix der Kreiselbias wird die Beurteilung erleichtert. Dies ist erlaubt, da diese Matrix regulär ist.

$$\begin{aligned} V & \quad \left( -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right) \cdot \underline{\psi}_{\tilde{b}b} \\ & \quad + \left( -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right) \cdot \mathbf{b}_g \\ & = R_{eb}^T \cdot \left( \ddot{\mathbf{f}}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \right) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left( \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e) \right) \\ V & \quad \underbrace{\left( -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)^{-1} \left( -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)}_{-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b)} \cdot \underline{\psi}_{\tilde{b}b} \\ & \quad + \underbrace{\left( -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)^{-1} \left( -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)}_I \cdot \mathbf{b}_g \quad (\text{V.1.73}) \\ & = \left( -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)^{-1} \\ & \quad \cdot R_{eb}^T \cdot \left( \ddot{\mathbf{f}}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \right) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left( \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e) \right) \\ V & \quad -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \underline{\psi}_{\tilde{b}b} + I \cdot \mathbf{b}_g = \left( -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)^{-1} \\ & \quad \cdot R_{eb}^T \cdot \left( \ddot{\mathbf{f}}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \right) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \left( \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e) \right) \end{aligned}$$

Die resultierende Beobachtbarkeitsmatrix lautet letztendlich:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} I & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & \mathbf{0} & \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \boldsymbol{\psi}_{bb} \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} \\ \hline \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) & I & \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \boldsymbol{\psi}_{bb} \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \frac{R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b}{\left( -\text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)^{-1}} \\ \cdot R_{eb}^T \cdot \left( \ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \right) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e) \right) \end{array} \right) \quad (\text{V.1.74})$$

Es wird eine Kurzschreibweise zur direkten Benennung der Freiheitsgrade eines Zustands eingeführt:

$$\begin{aligned} z^{\parallel f} & \quad \text{Komponente von } z \text{ parallel } f \\ z^{\parallel f \times \omega} = -z^{\parallel \omega \times f} & \quad \text{Komponente von } z \text{ parallel } f \times \omega \\ z^{\parallel f \times (f \times \omega)} \neq z^{\parallel \omega \times (\omega \times f)} & \quad \text{Komponente von } z \text{ die ein rechtshändiges System komplettiert} \end{aligned} \quad (\text{V.1.75})$$

In den linearisierten Spezialfällen wird nun durch Projektion der Blockzeilen der Beobachtbarkeitsmatrix auf ausgezeichnete Raumrichtungen versucht, die beobachtbaren Freiheitsgrade der gesuchten Zustandsparameter direkt zu berechnen. Die ausgezeichneten Raumrichtungen dieses Spezialfalls sind in Zeile *III* die Richtung der gemessenen Beschleunigung und in Zeile *V* die Richtung der gemessenen Winkelgeschwindigkeit. Zusätzlich werden pro Zeile noch die beiden zur jeweiligen ausgezeichneten Raumrichtung senkrecht stehenden Raumrichtungen benötigt. Dazu werden die ausgezeichneten Raumrichtungen der jeweils anderen Zeile mit verwendet. Die Berechnungen sind auf Grund ihrer Länge in Anhang B dieses Abschnitts ausgelagert. In den Kapiteln werden nur die Ergebnisse dargestellt.

$$\begin{aligned} \text{III}^{\parallel f} \quad b_a^{\parallel f} &= \left( R_{eb}^T \mathbf{f}_e \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \\ \text{III}^{\parallel f \times \omega} \quad b_a^{\parallel f \times \omega} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel f \times (f \times \omega)} &= \left( R_{eb}^T \mathbf{f}_e \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\|} \\ \text{III}^{\parallel f \times (f \times \omega)} \quad b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel f \times \omega} &= \left( R_{eb}^T \mathbf{f}_e \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b)}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b)\|} \\ \text{V}^{\parallel \omega} \quad b_g^{\parallel \omega} &= \left( \begin{array}{c} \left( -\text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)^{-1} \\ \cdot \left( R_{eb}^T \cdot \left( \ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \right) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e) \right) \right) \end{array} \right)^T \cdot \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b}{\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\|} \\ \text{V}^{\parallel \omega \times f} \quad b_g^{\parallel \omega \times f} + \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\| \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel \omega \times (f \times \omega)} &= \left( \begin{array}{c} \left( -\text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)^{-1} \\ \cdot \left( R_{eb}^T \cdot \left( \ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \right) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e) \right) \right) \end{array} \right)^T \cdot \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\|} \\ \text{V}^{\parallel \omega \times (\omega \times f)} \quad b_g^{\parallel \omega \times (\omega \times f)} - \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\| \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel \omega \times f} &= \left( \begin{array}{c} \left( -\text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) - \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \right)^{-1} \\ \cdot \left( R_{eb}^T \cdot \left( \ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \right) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e) \right) \right) \end{array} \right)^T \cdot \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)}{\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)\|} \end{aligned} \quad (\text{V.1.76})$$

In dieser Zusammenstellung sind die beobachtbaren Freiheitsgrade inklusive ihrer algebraischen Berechnungsvorschrift direkt ablesbar. Obige Aussagen werden nun in jedem der Spezialfälle in einer Tabelle kombiniert, welche Aussagen zur Beobachtbarkeit der einzelnen Zustandsparameter beziehungsweise deren Linearkombinationen macht.

Güte	Unmittelbare Beobachtbarkeit	Mittelbare Beobachtbarkeit
gut	$b_a^{\parallel f}, \left( b_a^{\parallel f \times \omega} \quad \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times \omega)} \right), \left( b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)} \quad \psi_{bb}^{\parallel f \times \omega} \right)$	–
mäßig	–	–
schlecht	$b_g^{\parallel \omega}, \left( b_g^{\parallel \omega \times f} \quad \psi_{bb}^{\parallel \omega \times ( \omega \times f )} \right), \left( b_g^{\parallel \omega \times ( \omega \times f )} \quad \psi_{bb}^{\parallel \omega \times f} \right)$	–
nicht	–	–

Tabelle 4: Beobachtbarkeit bei „Stationary Maneuvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Die Klammerung bedeutet, dass die in ihr enthaltenen Freiheitsgrade nur in Linearkombination beobachtbar sind. Die Unterscheidung in unmittelbarer und mittelbarer Beobachtbarkeit soll verdeutlichen, falls Linearkombinationen durch in anderen Zeilen beobachtbare Sensorfehlerparameter aufgelöst werden können. Der Freiheitsgrad der Eulerwinkelstörung senkrecht zur gemessenen Beschleunigung und senkrecht zur gemessenen Winkelgeschwindigkeit tritt in beiden Zeilen auf. Die über Zeile III beobachtbaren Zustandsparameter beziehungsweise Linearkombinationen sind wegen der Größe des Erdschwerevektors im Vergleich zur Erddrehrate quantitativ besser beobachtbar. Der Gesamrang der Beobachtbarkeitsmatrix entspricht der Anzahl beobachtbarer Linearkombinationen.

## 1.2.4 Linearisierter Spezialfall „Stationary Maneuvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

Dieser Fall beinhaltet neben den Beschleunigungsmesserbias auch die Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler, vernachlässigt jedoch gleiches Kreiselfehlermodell. Das nichtlineare Pendant befindet sich in Kapitel 1.1.6.

<i>Gemessene IMU Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b \neq 0$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = 0$	
$\tilde{f}_b \neq 0$	$\dot{\tilde{f}}_b = 0$	$\ddot{\tilde{f}}_b = 0$
$\tilde{\omega}_{ib}^b \neq \tilde{f}_b$		(V.1.77)
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta \omega_{ib}^b = 0$	$\delta f_b = b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a$	$\delta g_e = 0$

Bei den vereinfachten nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen für den Spezialfall „Stationary Maneuvre“ können die Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler in Zeile III zusammen gruppiert werden. Zeile III kann nach dieser Linearkombination aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & -\tilde{f}_b \times \psi_{bb} + b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a = R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\ \text{III} \quad & b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a = R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b + \tilde{f}_b \times \psi_{bb} \end{aligned} \quad (\text{V.1.78})$$

Diese Beziehung kann nun analog zum vorigen Kapitel in die Zeilen IV und V eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} \text{IV} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \times \psi_{bb} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a) = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \dot{\tilde{f}}_b - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b \\ \text{IV} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \times \psi_{bb} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b + \tilde{f}_b \times \psi_{bb}) = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b \\ \text{IV} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \times \psi_{bb} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{f}_b \times \psi_{bb}) = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \end{aligned} \quad (\text{V.1.79})$$

Für Zeile V ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{V} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b)) \times \psi_{bb} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a)) \\ & = R_{eb}^T \cdot (\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \\ \text{V} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b)) \times \psi_{bb} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b + \tilde{f}_b \times \psi_{bb})) \\ & = R_{eb}^T \cdot (\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \\ \text{V} \quad & -(\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b)) \times \psi_{bb} + \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{f}_b \times \psi_{bb})) \\ & = R_{eb}^T \cdot (\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)) \end{aligned} \quad (\text{V.1.80})$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix lautet letztendlich:

$$\begin{pmatrix} I & \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) + \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)) + \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \boldsymbol{\psi}_{bb} \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.81})$$

$$= \begin{pmatrix} R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b \\ R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e) \\ R_{eb}^T \cdot (\ddot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)) \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der zu beobachtenden Zustände beträgt neun.

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \boldsymbol{\psi}_{bb} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Beschleunigungsmesserskalenfehler} \\ \text{Eulerwinkelstörung} \end{array} \quad (\text{V.1.82})$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix hat einen Rang von fünf. Es soll mit der Analyse der Zeilen IV und V begonnen werden. Deren Rang beträgt jeweils zwei. Zu den Eigenwerten gleich Null können die Eigenvektoren symbolisch computergestützt berechnet werden.

$$\begin{aligned} \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b) + \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b)) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \\ \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b)) + \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b)) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \end{aligned} \quad (\text{V.1.83})$$

Der jeweils nicht beobachtbare Freiheitsgrad der Eulerwinkelstörung ist unglücklicherweise in beiden Zeilen der Gleichungen. Zeile V liefert damit keine zusätzliche Information zur Beobachtbarkeit und wird weggelassen. Es folgt erneut die Berechnung der Projektion der Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix auf die jeweils ausgezeichneten Raumrichtungen. Folgende Zustandsparameter sind damit beobachtbar:

$$\begin{aligned} III^{\parallel f} & \quad b_a^{\parallel f} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot k_a^{\parallel f} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \\ III^{\parallel f \times \omega} & \quad b_a^{\parallel f \times \omega} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel f \times (f \times \omega)} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\|} \\ III^{\parallel f \times (f \times \omega)} & \quad b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel f \times \omega} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b)}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b)\|} \\ IV^{\parallel \omega} & \quad \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel \omega \times (f \times \omega)} = \frac{-1}{\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\|} \cdot (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b}{\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\|} \\ IV^{\parallel \omega \times f} & \quad \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel \omega \times f} = \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b\| \cdot \|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \cdot (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\|} \end{aligned} \quad (\text{V.1.84})$$

Die Projektion der Zeile IV auf die fehlende dritte Raumachse liefert eine Linearkombination der beiden bereits bekannten Freiheitsgrade der Eulerwinkelstörung und somit keine neuen Erkenntnisse. Die Güte der Beobachtbarkeit der einzelnen Zustandsparameter kann Tabelle 5 entnommen werden.

Güte	Unmittelbare Beobachtbarkeit	Mittelbare Beobachtbarkeit
gut	$(b_a^{\parallel f} \quad k_a^{\parallel f}), (b_a^{\parallel f \times \omega} \quad \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times \omega)}), (b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)} \quad \psi_{bb}^{\parallel f \times \omega})$	–
mäßig	$\psi_{bb}^{\parallel \omega \times f}, \psi_{bb}^{\parallel \omega \times (\omega \times f)}$	$b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)}$
schlecht	–	–
nicht	$k_a^{\parallel f \times \omega}, k_a^{\parallel f \times (f \times \omega)}$	–

**Tabelle 5: Beobachtbarkeit bei „Stationary Maneuvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler**

Die beiden Freiheitsgrade der Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler senkrecht zum Vektor der gemessenen Beschleunigung sind generell nicht beobachtbar. Zu beachten bleibt weiterhin, dass einer der Freiheitsgrade der Eulerwinkelstörung aus Zeile IV in eine Linearkombination der Zeile III eingesetzt werden kann. Die Linearkombination der beiden Freiheitsgrade  $b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)}$  und  $\psi_{bb}^{\parallel f \times \omega}$  ist gut, da über Zeile III beobachtbar. Die Auflösung dieser Linearkombination in ihre beiden Bestandteile ist dagegen eher mäßig beobachtbar, da der Freiheitsgrad der Eulerwinkelstörung  $\psi_{bb}^{\parallel f \times \omega}$  erst über Zeile IV beobachtbar ist.

### 1.2.5 Linearisierter Spezialfall „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Dieser Spezialfall beinhaltet das Manöver einer konstanten Linearbeschleunigung ohne Winkelgeschwindigkeitsänderung. Die nichtlineare Diskussion findet sich in Kapitel 1.1.7. In diesem Fall treten nur die gemessene Beschleunigung und deren erste Ableitung auf. Die gemessene Winkelgeschwindigkeit beinhaltet lediglich die Erddrehrate und kann auf Grund ihrer geringen Größe vernachlässigt werden, so dass sich folgende Vereinfachungen und Annahmen ergeben:

<i>Gemessene IMU – Sensordaten:</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b = 0$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = 0$	
$\tilde{f}_b \neq 0$	$\dot{\tilde{f}}_b \neq 0$	$\ddot{\tilde{f}}_b = 0$
$\tilde{f}_b \neq \dot{\tilde{f}}_b$		
<i>Fehlermodellparameter:</i>		
$\delta \omega_{ib}^b = b_g$	$\delta f_b = b_a$	$\delta g_e = 0$

(V.1.85)

Auch die Beobachtbarkeitsgleichungen dieses Spezialfalls können umgestellt werden. Auf die Herleitung wird verzichtet, da der Herleitungsverlauf dem vorigen Kapitel unter den Annahmen dieses Kapitels entspricht.

$$\begin{pmatrix} I & -\text{veck}(\tilde{f}_b) & 0 \\ 0 & -\text{veck}(\dot{\tilde{f}}_b) & -\text{veck}(\tilde{f}_b) \\ 0 & 0 & -\text{veck}(2\dot{\tilde{f}}_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_a \\ \psi_{bb} \\ b_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\ R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \dot{\tilde{f}}_b \\ R_{eb}^T \cdot (\ddot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.86})$$

Der Zustandsvektor hat eine Größe von neun.

$$z = \begin{pmatrix} b_a \\ \psi_{bb} \\ b_g \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Eulerwinkelstörung} \\ \text{Kreiselbias} \end{array} \quad (\text{V.1.87})$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix hat in diesem Spezialfall mit diesem Sensorfehlermodell einen Rang von sieben. Alle Submatrizen außer der Einheitsmatrix verfügen über einen Rangdefekt.

$$\begin{aligned} \text{Rang}\left(-\text{veck}\left(\tilde{\mathbf{f}}_b\right)\right) &= 2 & : & & \mathbf{x}_{\lambda=0} &= \tilde{\mathbf{f}}_b \\ \text{Rang}\left(-\text{veck}\left(\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\right)\right) &= 2 & : & & \mathbf{x}_{\lambda=0} &= \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \\ \text{Rang}\left(-\text{veck}\left(2\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\right)\right) &= 2 & : & & \mathbf{x}_{\lambda=0} &= \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \end{aligned} \quad (\text{V.1.88})$$

Die beobachtbaren Zustände können durch Projektion der einzelnen Blockzeilen auf die ausgezeichneten Richtungen direkt berechnet werden. Die detaillierten Berechnungen finden sich in Anhang B. Die ausgezeichneten Raumrichtungen sind hier der Vektor der gemessenen Beschleunigung für Zeile *III* und dessen Änderung für die Zeilen *IV* und *V*.

$$\begin{aligned} \text{III}^{\parallel f} & \quad b_a^{\parallel f} = \left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e\right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \cdot \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \\ \text{III}^{\parallel f \times \dot{f}} & \quad b_a^{\parallel f \times \dot{f}} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times \dot{f})} = \left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e\right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\|} \\ \text{III}^{\parallel f \times (f \times \dot{f})} & \quad b_a^{\parallel f \times (f \times \dot{f})} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel f \times \dot{f}} = \left(R_{eb}^T \mathbf{f}_e\right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b)}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b)\|} \\ \text{IV}^{\parallel \dot{f}} & \quad \psi_{bb}^{\parallel \dot{f} \times f} = \frac{1}{\|\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\|} \cdot \left( \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)\right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} - \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \right) \\ \text{IV}^{\parallel \dot{f}} & \quad b_g^{\parallel \dot{f} \times \dot{f}} = \frac{1}{\|\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\|} \cdot \left( \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b}{\|\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\|} - \|\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\| \right) \\ \text{IV}^{\parallel \dot{f} \times f} & \quad \|\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel \dot{f} \times (f \times f)} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot b_g^{\parallel f \times (f \times \dot{f})} = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times \tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\|} \\ \text{V}^{\parallel \dot{f} \times f} & \quad b_g^{\parallel \dot{f} \times (f \times f)} = \frac{1}{2\|\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\|} \cdot \left( \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))\right)^T \right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times \tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\|} \end{aligned} \quad (\text{V.1.89})$$

In obiger Aufstellung wurde der in den Zeilen *IV* und *V* und damit doppelt beobachtbare Freiheitsgrad der Kreiselbias nur einmal mit aufgenommen.

Güte	Unmittelbare Beobachtbarkeit	Mittelbare Beobachtbarkeit
gut	$b_a^{\parallel f}, \left(b_a^{\parallel f \times \dot{f}}, \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times \dot{f})}\right), \left(b_a^{\parallel f \times (f \times \dot{f})}, \psi_{bb}^{\parallel f \times \dot{f}}\right)$	–
mäßig	$\psi_{bb}^{\parallel \dot{f} \times f}, b_g^{\parallel f \times \dot{f}}, \left(\psi_{bb}^{\parallel \dot{f} \times (f \times f)}, b_g^{\parallel f \times (f \times \dot{f})}\right)$	$b_a^{\parallel f \times (f \times \dot{f})}$
schlecht	$b_g^{\parallel \dot{f} \times (f \times f)}$	–
nicht	–	–

**Tabelle 6: Beobachtbarkeit bei „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias**

Es sind somit wegen der doppelten Beobachtbarkeit eines Freiheitsgrades der Kreiselbias lediglich sieben Zustandsparameter beziehungsweise Linearkombinationen beobachtbar. Dies muss auf Grund des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrix auch so sein. Ein Freiheitsgrad der jeweiligen Sensorbias ist nur in Linearkombination mit einem Freiheitsgrad der Eulerwinkelstörung beobachtbar.

## 1.2.6 Linearisierter Spezialfall „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

Die Annahmen und Vorgaben für diesen Spezialfall entsprechen dem nichtlinearen Kapitel 1.1.8.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \neq \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$
$\tilde{\mathbf{f}}_b \neq \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b$		
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta\omega_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\delta\mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a$	$\delta\mathbf{g}_e = \mathbf{0}$

(V.1.90)

Die Beobachtbarkeitsgleichungen können erneut durch Vereinfachung aus Gleichung (V.1.63) abgeleitet werden. Die Zeile  $V$  liefert nur für den Fall einer Nullmatrix als Koeffizientenmatrix ein gültiges Ergebnis und fällt somit in der Argumentation weg.

$$\begin{pmatrix} I & \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\text{veck}(\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \boldsymbol{\psi}_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b \\ R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) - \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.91})$$

Der Zustandsvektor hat eine Größe von neun.

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \boldsymbol{\psi}_{bb} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler} \\ \text{Eulerwinkelstörung} \end{array} \quad (\text{V.1.92})$$

Der Gesamtrang der Matrix beträgt fünf.

$$\begin{aligned} \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b)) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{\mathbf{f}}_b \\ \text{Rang}(-\text{veck}(\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b)) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \end{aligned} \quad (\text{V.1.93})$$

Die beobachtbaren Zustände können erneut durch Projektion auf die ausgezeichneten Achsen bestimmt werden. Die ausgezeichneten Raumrichtungen sind erneut der Vektor der gemessenen Beschleunigung und dessen Änderung. Die detaillierten Berechnungen befinden sich in Anhang B.

$III^{\parallel f}$	$b_a^{\parallel f} + \ \tilde{\mathbf{f}}_b\  \cdot k_a^{\parallel f} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\ \tilde{\mathbf{f}}_b\ } - \ \tilde{\mathbf{f}}_b\ $	(V.1.94)
$III^{\parallel f \times \dot{f}}$	$b_a^{\parallel f \times \dot{f}} + \ \tilde{\mathbf{f}}_b\  \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel f \times (f \times \dot{f})} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b}{\ \tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\ }$	
$III^{\parallel f \times (f \times \dot{f})}$	$b_a^{\parallel f \times (f \times \dot{f})} - \ \tilde{\mathbf{f}}_b\  \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel f \times \dot{f}} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b)}{\ \tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b)\ }$	
$IV^{\parallel \dot{f} \times f}$	$\boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel \dot{f} \times (f \times \dot{f})} = \frac{1}{\ \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\ } \cdot (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times \tilde{\mathbf{f}}_b}{\ \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\ }$	
$IV^{\parallel \dot{f} \times (f \times \dot{f})}$	$\boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel \dot{f} \times \dot{f}} = \frac{-1}{\ \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b\ } \cdot (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b)}{\ \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b)\ }$	

In Tabelle 7 ist die Güte der Beobachtbarkeit der einzelnen Zustände zusammengestellt. Diese orientiert sich hauptsächlich an der Größe des Vektors der jeweiligen rechten Seite.

Güte	Unmittelbare Beobachtbarkeit	Mittelbare Beobachtbarkeit
gut	$(b_a^{\parallel f}, k_a^{\parallel f}), (b_a^{\parallel f \times j}, \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times j)}), (b_a^{\parallel f \times (f \times j)}, \psi_{bb}^{\parallel f \times j})$	–
mäßig	$\psi_{bb}^{\parallel j \times f}, \psi_{bb}^{\parallel j \times (f \times j)}$	$b_a^{\parallel f \times (f \times j)}$
schlecht	–	–
nicht	$k_a^{\parallel f \times j}, k_a^{\parallel f \times (f \times j)}$	–

**Tabelle 7: Beobachtbarkeit bei „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler**

Das Ergebnis entspricht in der Anzahl dem Gesamtrang, und die beiden Freiheitsgrade der Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler senkrecht zum Vektor der gemessenen Beschleunigung sind nicht beobachtbar.

### 1.2.7 Linearisierter Spezialfall „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Der Spezialfall „Straight and Levelled“ beinhaltet ausschließlich die gemessene Beschleunigung unter Vernachlässigung jeglicher gemessener Winkelgeschwindigkeit und stellt den stationären Fall dar. Die Bedingungen und Annahmen sind analog zur nichtlinearen Betrachtung nach Kapitel 1.1.9 definiert, und das Sensorfehlermodell beinhaltet in diesem ersten Unterfall somit erneut ausschließlich die sechs IMU-Sensordatenbias.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	
$\tilde{f}_b \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{f}}_b = \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{f}}_b = \mathbf{0}$
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta \omega_{ib}^b = \mathbf{b}_g$	$\delta f_b = \mathbf{b}_a$	$\delta g_e = \mathbf{0}$

(V.1.95)

Die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen dieses Spezialfalls vereinfachen sich auf Grund der Einschränkungen in der zu Grunde liegenden Dynamik deutlich.

$$\begin{pmatrix} I & -\text{veck}(\tilde{f}_b) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{f}_b) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \psi_{bb} \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{eb}^T \mathbf{f}_e - \tilde{f}_b \\ R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.96})$$

Die Anzahl der Zustände verkleinert sich auf neun.

$$z = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \psi_{bb} \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Eulerwinkelstörung} \\ \text{Kreiselbias} \end{array} \quad (\text{V.1.97})$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist fünf. Es müssen somit fünf Linearkombinationen der Zustandsparameter beobachtbar sein.

$$\text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{f}_b)) = 2 \quad : \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{f}_b \quad (\text{V.1.98})$$

Die beobachtbaren Parameter können durch Projektion der einzelnen Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix direkt bestimmt werden.

Die Berechnungen sind in Anhang B nachzulesen, und das Ergebnis lautet unter Einführung einer Pseudorichtung  $\mathbf{e}$ , da dieser Spezialfall nur über eine ausgezeichnete Raumrichtung verfügt:

$$\begin{array}{ll}
 III^{\|\mathbf{f}\} & b_a^{\|\mathbf{f}\} = \left( R_{eb}^T \tilde{\mathbf{f}}_e \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \\
 III^{\|\mathbf{f} \times \mathbf{e}\} & b_a^{\|\mathbf{f} \times \mathbf{e}\} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\|\mathbf{f} \times \mathbf{e}\} = \left( R_{eb}^T \tilde{\mathbf{f}}_e \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e}}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e}\|} \\
 III^{\|\mathbf{f} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{e})\} & b_a^{\|\mathbf{f} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{e})\} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\|\mathbf{f} \times \mathbf{e}\} = \left( R_{eb}^T \tilde{\mathbf{f}}_e \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|} \\
 IV^{\|\mathbf{f} \times \mathbf{e}\} & b_g^{\|\mathbf{f} \times \mathbf{e}\} = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \cdot \left( R_{eb}^T \cdot \left( \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e}}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e}\|} \\
 IV^{\|\mathbf{f} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{e})\} & b_g^{\|\mathbf{f} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{e})\} = \frac{-1}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \cdot \left( R_{eb}^T \cdot \left( \dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e \right) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|}
 \end{array} \tag{V.1.99}$$

Die Unterschiede in der Güte der Beobachtbarkeit können der Tabelle entnommen werden.

Güte	Unmittelbare Beobachtbarkeit	Mittelbare Beobachtbarkeit
gut	$b_a^{\ \mathbf{f}\}, \left( b_a^{\ \mathbf{f} \times \mathbf{e}\} \quad \psi_{bb}^{\ \mathbf{f} \times \mathbf{e}\} \right), \left( b_a^{\ \mathbf{f} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{e})\} \quad \psi_{bb}^{\ \mathbf{f} \times \mathbf{e}\} \right)$	–
mäßig	$b_g^{\ \mathbf{f} \times \mathbf{e}\}, b_g^{\ \mathbf{f} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{e})\}$	–
schlecht	–	–
nicht	$\psi_{bb}^{\ \mathbf{f}\}, b_g^{\ \mathbf{f}\}$	–

Tabelle 8: Beobachtbarkeit bei „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Die Freiheitsgrade der Eulerwinkelstörung und der Kreiselbias in Richtung des Vektors der gemessenen Beschleunigung sind nicht beobachtbar.

### 1.2.8 Linearisierter Spezialfall „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

Dieser Fall beinhaltet neben Beschleunigungsmesserbias zusätzlich noch Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler. Die Dynamik orientiert sich am vorherigen Kapitel, und die nichtlineare Betrachtung kann in Kapitel 1.1.10 nachgelesen werden.

$$\begin{array}{l}
 \text{Gemessene IMU – Sensordaten:} \\
 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0} \qquad \qquad \qquad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{f}}_b \neq \mathbf{0} \qquad \qquad \qquad \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0} \qquad \qquad \qquad \ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0} \\
 \text{Fehlermodellparameter:} \\
 \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \mathbf{0} \qquad \qquad \qquad \delta \mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a \qquad \qquad \delta \mathbf{g}_e = \mathbf{0}
 \end{array} \tag{V.1.100}$$

Die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen dieses Spezialfalls enthalten ausschließlich die Zeile III, da die weiteren Zeilen erneut nur durch eine Nullmatrix als Koeffizientenmatrix gültig sein können und somit keinen Beitrag zur Beobachtbarkeit liefern können.

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{ccc}
 1 & \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \psi_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{eb}^T \tilde{\mathbf{f}}_e - \tilde{\mathbf{f}}_b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}
 \end{array} \tag{V.1.101}$$

Der Zustandsvektor ergibt sich zu:

$$z = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \psi_{bb} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler} \\ \text{Eulerwinkelstörung} \end{array} \quad (\text{V.1.102})$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist drei.

$$\text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b)) = 2 \quad : \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{\mathbf{f}}_b \quad (\text{V.1.103})$$

Die beobachtbaren Parameter können durch Projektion den einzelnen Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix in die ausgezeichneten Raumrichtungen ermittelt werden. Neben der Richtung der gemessenen Beschleunigung muss zur Unterscheidung der Freiheitsgrade im dreidimensionalen Raum die Pseudorichtung  $\mathbf{e}$  eingeführt werden. Die beobachtbaren Parameter können direkt berechnet werden. Die Projektion der einzelnen Blockzeilen in die ausgezeichneten Richtungen ergibt:

$$\begin{array}{ll} III^{\parallel f} & b_a^{\parallel f} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot k_a^{\parallel f} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \\ III^{\parallel f \times e} & b_a^{\parallel f \times e} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times e)} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e}}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e}\|} \\ III^{\parallel f \times (f \times e)} & b_a^{\parallel f \times (f \times e)} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times e)} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|} \end{array} \quad (\text{V.1.104})$$

Die Berechnung kann in Anhang B nachvollzogen werden. Die drei über Zeile III beobachtbaren Linearkombinationen können aus den obigen Gleichungen somit direkt berechnet werden. Die Zeilen IV und V existieren in diesem Spezialfall nicht. Für die Beobachtbarkeit aller Zustandsparameter ergibt sich folgende Tabelle:

Güte	Unmittelbare Beobachtbarkeit	Mittelbare Beobachtbarkeit
gut	$(b_a^{\parallel f} \quad k_a^{\parallel f}), (b_a^{\parallel f \times e} \quad \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times e)}), (b_a^{\parallel f \times (f \times e)} \quad \psi_{bb}^{\parallel f \times e})$	–
mäßig	–	–
schlecht	–	–
nicht	$\psi_{bb}^{\parallel f}, k_a^{\parallel f \times e}, k_a^{\parallel f \times (f \times e)}$	–

**Tabelle 9: Beobachtbarkeit bei „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler**

Der Freiheitsgrad der Eulerwinkelstörung, der die Rotation um den Vektor der gemessenen Beschleunigung definiert, und die beiden Freiheitsgrade der Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler senkrecht zum Vektor der gemessenen Beschleunigung sind in diesem Spezialfall nicht beobachtbar. Das schließt die Analyse der linearen Beobachtbarkeitsgleichungen ab. Im nächsten Abschnitt wird auf die Beobachtbarkeit bei mehreren Arbeitspunkten eingegangen. Die Ergebnisse der obigen Untersuchung sind nochmals übersichtlich in Anhang A dieses Abschnitts dargestellt. Dort lässt sich auch die Veränderung der Beobachtbarkeit der jeweiligen Zustände anhand der vorliegenden Dynamik nachverfolgen.

### 1.3. Beobachtbarkeit bei mehreren Arbeitspunkten

Nachdem in den vorigen beiden Kapiteln die nichtlinearen und linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen bei einem Arbeitspunkt analysiert wurden, soll in diesem Kapitel nun die Beobachtbarkeit bei mehreren Arbeitspunkten untersucht werden. Die Einbeziehung zusätzlicher unabhängiger Arbeitspunkte bietet gleich mehrere Vorteile: So kann sich zum einen die Beobachtbarkeit von Zustandsparametern aus höheren Zeilen, in denen sie bisher nur schwach beobachtbar waren, in niedrigere Zeilen verschieben. Die Güte der Beobachtbarkeit wird dadurch stark erhöht. Zum anderen werden erst durch die Betrachtung mehrerer unabhängiger Arbeitspunkte die Voraussetzungen zur Beobachtbarkeit gewisser Zustandsparameter beziehungsweise zur Auflösung bestimmter Linearkombinationen geschaffen. Als Ausgangsbasis für die Beobachtbarkeit bei mehreren Arbeitspunkten soll die Dynamik des Spezialfalls „Stationary Manoeuvre“ dienen. Da es sich bei den Zustandsparametern ausschließlich um Störungsgrößen handelt, wird von deren zeitlicher Konstanz ausgegangen. Für reale Sensorfehlermodellparameter, wie beispielsweise Bias oder Skalenfaktorfehler, trifft dies grundsätzlich zu. Jedoch soll auch die Eulerwinkelstörung dieser Vereinfachung unterliegen, da diese sonst bei jedem der zusätzlichen Arbeitspunkte erneut als unabhängiger Zustandsparameter eingeführt werden müsste.

### 1.3.1 Zwei Arbeitspunkte mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Die Voraussetzungen dieser Betrachtung entsprechen denen des nichtlinearen Kapitels 1.1.5 und damit auch denen des linearisierten Kapitels 1.2.3. Einziger Unterschied besteht in der Betrachtung zweier unabhängiger Arbeitspunkte. Dadurch soll zum einen die Anzahl der qualitativ beobachtbaren Zustände beziehungsweise Linearkombinationen erhöht und zum anderen die quantitative Beobachtbarkeit der beobachtbaren Zustandsparameter erhöht werden.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b(t_1) \neq \tilde{\omega}_{ib}^b(t_2) \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b(t_i) = \mathbf{0}$	
$\tilde{f}_b(t_1) \neq \tilde{f}_b(t_2) \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{f}}_b(t_i) = \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{f}}_b(t_i) = \mathbf{0}$
$\tilde{\omega}_{ib}^b(t_i) \neq \tilde{f}_b(t_i)$		
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta\omega_{ib}^b(t_i) = \mathbf{b}_g$	$\delta f_b(t_i) = \mathbf{b}_a$	$\delta g_e(t_i) = \mathbf{0}$

(V.1.105)

Die Beobachtbarkeitsgleichungen können der Gleichung (V.1.68) des linearisierten Spezialfalls „Stationary Maneuvre“ entnommen werden. Auf die Zeile *V* wird verzichtet, da bereits durch die Zeilen *III* und *IV* mehr Gleichungen als Zustandsparameter vorliegen, und die über Zeile *V* beobachtbaren Zustände wegen der geringen Größe der Koeffizienten nur schwach beobachtbar sind.

$\begin{pmatrix} I & -\text{veck}(\tilde{f}_b(t_1)) & \mathbf{0} \\ I & -\text{veck}(\tilde{f}_b(t_2)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_1) \times \tilde{f}_b(t_1)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_1)) \text{veck}(\tilde{f}_b(t_1)) & -\text{veck}(\tilde{f}_b(t_1)) \\ \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_2) \times \tilde{f}_b(t_2)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_2)) \text{veck}(\tilde{f}_b(t_2)) & -\text{veck}(\tilde{f}_b(t_2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \psi_{bb} \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix}$	
$= \begin{pmatrix} R_{eb}^T(t_1) \cdot f_e(t_1) - \tilde{f}_b(t_1) \\ R_{eb}^T(t_2) \cdot f_e(t_2) - \tilde{f}_b(t_2) \\ R_{eb}^T(t_1) \cdot (\dot{f}_e(t_1) + \omega_{ie}^e(t_1) \times f_e(t_1)) - \tilde{\omega}_{ib}^b(t_1) \times (R_{eb}^T(t_1) \cdot f_e(t_1)) \\ R_{eb}^T(t_2) \cdot (\dot{f}_e(t_2) + \omega_{ie}^e(t_2) \times f_e(t_2)) - \tilde{\omega}_{ib}^b(t_2) \times (R_{eb}^T(t_2) \cdot f_e(t_2)) \end{pmatrix}$	

(V.1.106)

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist neun. Die Anzahl der Zustandsparameter beträgt ebenfalls neun.

$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \psi_{bb} \\ \mathbf{b}_g \end{pmatrix} \begin{array}{l} : \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ : \text{Eulerwinkelstörung} \\ : \text{Kreiselbias} \end{array}$	(V.1.107)
---	-----------

Allein auf Grund des Rangs von neun müssen alle Zustandsparameter beobachtbar sein. Lediglich die Güte der Beobachtbarkeit kann noch variieren und wird weiter untersucht. Die Einschränkungen der singulären Matrizen müssen dazu berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{f}_b(t_i))) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{f}_b(t_i) \\ \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_i) \times \tilde{f}_b(t_i)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_i)) \text{veck}(\tilde{f}_b(t_i))) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{\omega}_{ib}^b(t_i) \end{aligned} \quad (\text{V.1.108})$$

Die beobachtbaren Zustandsparameter können erneut durch Projektion der Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix auf die ausgezeichneten Achsen bestimmt werden. Da sich die Projektionen an beiden Arbeitspunkten entsprechen, wird diese Berechnung nur einmal durchgeführt. Die detaillierte Berechnung ist in Anhang B nachzuschlagen.

$$\begin{array}{l}
 III^{\parallel f} \quad b_a^{\parallel f} = \left( R_{eb}^T f_e \right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \|\tilde{f}_b\| \\
 III^{\parallel f \times \omega} \quad b_a^{\parallel f \times \omega} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times \omega)} = \left( R_{eb}^T f_e \right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
 III^{\parallel f \times (f \times \omega)} \quad b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)} - \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel f \times \omega} = \left( R_{eb}^T f_e \right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} \\
 IV^{\parallel f} \quad \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times \omega)} = \frac{1}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\| - \|\tilde{f}_b\| \cdot \|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 IV^{\parallel \omega} \quad -\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel \omega \times f} + \|\tilde{f}_b\| \cdot b_g^{\parallel f \times \omega} = \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
 IV^{\parallel \omega \times f} \quad \|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel \omega \times f} - b_g^{\parallel f \times (f \times \omega)} = \frac{1}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}
 \end{array} \quad (V.1.109)$$

In Tabelle 10 sind die beobachtbaren Zustände nach Güte der Beobachtbarkeit sortiert.

Güte	Unmittelbare Beobachtbarkeit	Mittelbare Beobachtbarkeit
gut	$b_a^{\parallel f_1}, \left( b_a^{\parallel f_1 \times \omega_1} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \right), \left( b_a^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times \omega_1} \right)$ $b_a^{\parallel f_2}, \left( b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \right), \left( b_a^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times \omega_2} \right)$	–
mäßig	$\psi_{bb}^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)}, \left( \psi_{bb}^{\parallel \omega_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \quad b_g^{\parallel f_1 \times \omega_1} \right), \left( \psi_{bb}^{\parallel \omega_1 \times f_1} \quad b_g^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \right)$ $\psi_{bb}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)}, \left( \psi_{bb}^{\parallel \omega_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \quad b_g^{\parallel f_2 \times \omega_2} \right), \left( \psi_{bb}^{\parallel \omega_2 \times f_2} \quad b_g^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \right)$	$b_a^{\parallel f_1 \times \omega_1}$ $b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2}$
schlecht	–	–
nicht	–	–

Tabelle 10: Zwei Arbeitspunkte mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

In obiger Aufstellung sind mehr als neun beobachtbare Linearkombinationen aufgeführt. Dies liegt an der Tatsache, dass die beobachtbaren Linearkombinationen über eine gewisse Redundanz verfügen, da einige der beobachtbaren Freiheitsgrade doppelt vorliegen. Diese lassen sich erst bei genauer Kenntnis der vier ausgezeichneten Richtungen teilweise ineinander überführen. Es sind unmittelbar zwei Freiheitsgrade der Beschleunigungsmesserbias und der Eulerwinkelstörung beobachtbar. Die Beobachtbarkeit des dritten Freiheitsgrades der Beschleunigungsmesserbias folgt mittelbar.

$$\left. \begin{array}{l} b_a^{\parallel f_1} \\ b_a^{\parallel f_1 \times \omega_1} \\ b_a^{\parallel f_2} \\ b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2} \end{array} \right\} = \mathbf{b}_a \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \\ \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \\ \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times \omega_1} \\ \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times \omega_2} \\ \psi_{bb}^{\parallel \omega_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \\ \psi_{bb}^{\parallel \omega_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \\ \psi_{bb}^{\parallel \omega_1 \times f_1} \\ \psi_{bb}^{\parallel \omega_2 \times f_2} \end{array} \right\} = \psi_{bb} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b_g^{\parallel f_1 \times \omega_1} \\ b_g^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \\ b_g^{\parallel f_2 \times \omega_2} \\ b_g^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \end{array} \right\} = \mathbf{b}_g \quad (V.1.110)$$

Bei Kenntnis aller drei Freiheitsgrade eines Parameters kann die Komponente in eine beliebige Richtung berechnet werden. Da die drei Freiheitsgrade der Beschleunigungsmesserbias nun bekannt sind, können die benötigten Richtungen zur Auflösung der vier Linearkombinationen zwischen dem Beschleunigungsmesserbias und der Eulerwinkelstörung benutzt werden. Der dritte Freiheitsgrad der Eulerwinkelstörung wird beobachtbar. Damit können aus den nächsten vier beobachtbaren Linearkombinationen zwischen dem Kreiselbias und der Eulerwinkelstörung die drei Freiheitsgrade der Kreiselbias beobachtet werden. Insgesamt sind alle Zustandsparameter beobachtbar.

### 1.3.2 Drei Arbeitspunkte mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

In diesem Kapitel soll die Beobachtbarkeit von Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehlern bei drei unabhängigen Arbeitspunkten analysiert werden. Es wird ausschließlich die Zeile *III* betrachtet.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten:</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b(t_1) \neq \tilde{\omega}_{ib}^b(t_2) \neq \tilde{\omega}_{ib}^b(t_3) \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	
$\tilde{f}_b(t_1) \neq \tilde{f}_b(t_2) \neq \tilde{f}_b(t_3) \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{f}}_b = \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{f}}_b = \mathbf{0}$
$\tilde{\omega}_{ib}^b(t_i) \neq \tilde{f}_b(t_i)$		
<i>Fehlermodellparameter:</i>		
$\delta\omega_{ib}^b = \mathbf{0}$	$\delta f_b = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{k}_a$	$\delta g_e = \mathbf{0}$

(V.1.111)

Die Beobachtbarkeitsgleichungen entsprechen denen des Kapitels 1.2.4 bei drei unabhängigen Arbeitspunkten.

$$\begin{pmatrix} I & \text{diag}(\tilde{f}_b(t_1)) & -\text{veck}(\tilde{f}_b(t_1)) \\ I & \text{diag}(\tilde{f}_b(t_2)) & -\text{veck}(\tilde{f}_b(t_2)) \\ I & \text{diag}(\tilde{f}_b(t_3)) & -\text{veck}(\tilde{f}_b(t_3)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \boldsymbol{\psi}_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{eb}^T(t_1) \cdot \mathbf{f}_e(t_1) - \tilde{f}_b(t_1) \\ R_{eb}^T(t_2) \cdot \mathbf{f}_e(t_2) - \tilde{f}_b(t_2) \\ R_{eb}^T(t_3) \cdot \mathbf{f}_e(t_3) - \tilde{f}_b(t_3) \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.112})$$

Die zu beobachtenden Zustände sind:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \boldsymbol{\psi}_{bb} \end{pmatrix} \begin{array}{l} : \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ : \text{Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler} \\ : \text{Eulerwinkelstörung} \end{array} \quad (\text{V.1.113})$$

In diesem Spezialfall ist die Beobachtbarkeit der Zustandsparameter sehr einfach zu ermitteln, da die Beobachtbarkeitsmatrix unter der Voraussetzung, dass die drei Arbeitspunkte über linear unabhängige gemessene Beschleunigungen verfügen, regulär ist. Die Beobachtbarkeitsmatrix kann damit invertiert werden, und die Zustandsparameter können direkt ausgerechnet werden. Alle Zustandsparameter sind damit qualitativ beobachtbar. Eine weitere Untersuchung zur quantitativen Beobachtbarkeit muss hier nicht vorgenommen werden, da alle Zustandsparameter über Zeile *III* beobachtbar sind, und diese eine gute Beobachtbarkeit aller Zustände garantiert. Zur Vollständigkeit wird trotzdem die bekannte Übersicht präsentiert.

$$\begin{array}{ll} \text{III}^{\parallel f} & \mathbf{b}_a^{\parallel f} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \mathbf{k}_a^{\parallel f} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \|\tilde{f}_b\| \\ \text{III}^{\parallel f \times \omega} & \mathbf{b}_a^{\parallel f \times \omega} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel f \times \omega} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\ \text{III}^{\parallel f \times (f \times \omega)} & \mathbf{b}_a^{\parallel f \times (f \times \omega)} - \|\tilde{f}_b\| \cdot \boldsymbol{\psi}_{bb}^{\parallel f \times \omega} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} \end{array} \quad (\text{V.1.114})$$

Zur Güte der Beobachtbarkeit lassen sich keine Aussagen treffen, da ausschließlich mit Zeile *III* argumentiert wird.

Güte	Unmittelbare Beobachtbarkeit	Mittelbare Beobachtbarkeit
gut	$(b_a^{\parallel f_1} \quad k_a^{\parallel f_1}), (b_a^{\parallel f_1 \times \omega_1} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)}), (b_a^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times \omega_1})$ $(b_a^{\parallel f_2} \quad k_a^{\parallel f_2}), (b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)}), (b_a^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times \omega_2})$ $(b_a^{\parallel f_3} \quad k_a^{\parallel f_3}), (b_a^{\parallel f_3 \times \omega_3} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)}), (b_a^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)} \quad \psi_{bb}^{\parallel f_3 \times \omega_3})$	–
mäßig	–	–
schlecht	–	–
nicht	–	–

**Tabelle 11: Drei Arbeitspunkte mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler**

Da die gemessenen Beschleunigungen an den drei Arbeitspunkten linear unabhängig sind, können alle Zustandparameter mittelbar beobachtet werden. Die drei Freiheitsgrade der Beschleunigungsskalenfaktorfehler können nach Kenntnis der drei Freiheitsgrade der Beschleunigungsmesserbias über die jeweils erste Linearkombination extrahiert werden. Die drei Freiheitsgrade der Beschleunigungsmesserbias und der Eulerwinkelstörung können aus den verbleibenden sechs unabhängigen, beobachtbaren Linearkombinationen berechnet werden, so dass letztendlich alle neun zu beobachtenden Freiheitsgrade mittelbar beobachtet werden können.

$$\left. \begin{array}{l}
 \left( \begin{array}{cc} b_a^{\parallel f_1 \times \omega_1} & \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \\ b_a^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} & \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times \omega_1} \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{cc} b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2} & \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \\ b_a^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} & \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times \omega_2} \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{cc} b_a^{\parallel f_3 \times \omega_3} & \psi_{bb}^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)} \\ b_a^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)} & \psi_{bb}^{\parallel f_3 \times \omega_3} \end{array} \right)
 \end{array} \right\} = \psi_{bb} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \left( \begin{array}{cc} b_a^{\parallel f_1 \times \omega_1} & \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \\ b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2} & \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \\ b_a^{\parallel f_3 \times \omega_3} & \psi_{bb}^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)} \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{cc} b_a^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} & \psi_{bb}^{\parallel f_1 \times \omega_1} \\ b_a^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} & \psi_{bb}^{\parallel f_2 \times \omega_2} \\ b_a^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)} & \psi_{bb}^{\parallel f_3 \times \omega_3} \end{array} \right)
 \end{array} \right\} = \mathbf{b}_a \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_a^{\parallel f_1} \\ k_a^{\parallel f_2} \\ k_a^{\parallel f_3} \end{array} \right\} = \mathbf{k}_a \quad (\text{V.1.115})$$

Die gemessene Winkelgeschwindigkeit ist zwar in Zeile III nicht enthalten, jedoch muss erneut eine zusätzliche Richtung zur Definition der Freiheitsgrade definiert werden. Und da die zu Grunde liegende Dynamik eine Winkelgeschwindigkeit beinhaltet, wird diese anstatt einer Pseudorichtung verwendet. Eine Vereinfachung der Dynamik um eben jene Winkelgeschwindigkeit beeinträchtigt aus diesem Grund die Beobachtbarkeit der Zustände nicht.

### 1.3.3 Drei Arbeitspunkte mit IMU-Bias und IMU-Skalenfaktorfehler

Erweitert man die vorige Untersuchung um Kreiselbias und -skalenfaktorfehler, so liegen unter Hinzunahme von Zeile IV theoretisch genügend Gleichungen zur Beobachtbarkeit der Zustandsparameter vor. Die getroffenen Annahmen und Vereinfachungen sind erneut zur Übersicht zusammengefasst.

<i>Gemessene IMU – Sensordaten :</i>		
$\tilde{\omega}_{ib}^b(t_1) \neq \tilde{\omega}_{ib}^b(t_2) \neq \tilde{\omega}_{ib}^b(t_3) \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\omega}}_{ib}^b = \mathbf{0}$	
$\tilde{\mathbf{f}}_b(t_1) \neq \tilde{\mathbf{f}}_b(t_2) \neq \tilde{\mathbf{f}}_b(t_3) \neq \mathbf{0}$	$\dot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$	$\ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_b = \mathbf{0}$
$\tilde{\omega}_{ib}^b(t_i) \neq \tilde{\mathbf{f}}_b(t_i)$		
<i>Fehlermodellparameter :</i>		
$\delta \omega_{ib}^b = \mathbf{b}_g + \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g$	$\delta \mathbf{f}_b = \mathbf{b}_a + \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{k}_a$	$\delta \mathbf{g}_e = \mathbf{0}$

(V.1.116)

Die Beobachtbarkeitsgleichungen können aus den beiden linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen in den Kapiteln 1.2.3 und 1.2.4 abgeleitet werden. Auf die Herleitung wird verzichtet, da sich diese sehr stark an den bisher beschriebenen Herleitungen orientiert.

$$\begin{pmatrix} I & \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_1)) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_1)) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I & \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_2)) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_2)) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I & \text{diag}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_3)) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_3)) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_1) \times \tilde{\mathbf{f}}_b(t_1)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_1)) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_1)) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_1)) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_1)) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_1)) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_2) \times \tilde{\mathbf{f}}_b(t_2)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_2)) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_2)) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_2)) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_2)) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_2)) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_3) \times \tilde{\mathbf{f}}_b(t_3)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_3)) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_3)) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_3)) & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_3)) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_3)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \psi_{bb} \\ \mathbf{b}_g \\ \mathbf{k}_g \end{pmatrix} \quad (\text{V.1.117})$$

$$= \begin{pmatrix} R_{eb}^T(t_1) \cdot \dot{\mathbf{f}}_e(t_1) - \tilde{\mathbf{f}}_b(t_1) \\ R_{eb}^T(t_2) \cdot \dot{\mathbf{f}}_e(t_2) - \tilde{\mathbf{f}}_b(t_2) \\ R_{eb}^T(t_3) \cdot \dot{\mathbf{f}}_e(t_3) - \tilde{\mathbf{f}}_b(t_3) \\ R_{eb}^T(t_1) \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e(t_1) + \omega_{ie}^e(t_1) \times \mathbf{f}_e(t_1)) - \tilde{\omega}_{ib}^b(t_1) \times \tilde{\mathbf{f}}_b(t_1) \\ R_{eb}^T(t_2) \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e(t_2) + \omega_{ie}^e(t_2) \times \mathbf{f}_e(t_2)) - \tilde{\omega}_{ib}^b(t_2) \times \tilde{\mathbf{f}}_b(t_2) \\ R_{eb}^T(t_3) \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e(t_3) + \omega_{ie}^e(t_3) \times \mathbf{f}_e(t_3)) - \tilde{\omega}_{ib}^b(t_3) \times \tilde{\mathbf{f}}_b(t_3) \end{pmatrix}$$

Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix beträgt 15. Der Zustandsvektor beinhaltet 15 Parameter.

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_a \\ \mathbf{k}_a \\ \psi_{bb} \\ \mathbf{b}_g \\ \mathbf{k}_g \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Beschleunigungsmesserbias} \\ \text{Beschleunigungsmesserskalenfactorfehler} \\ \text{Eulerwinkelstörung} \\ \text{Kreiselbias} \\ \text{Kreiselkalenfactorfehler} \end{array} \quad (\text{V.1.118})$$

Auch hier können auf Grund des Rangs der Beobachtbarkeitsmatrix alle Zustandsparameter beobachtet werden. Die pro Zeile nicht beobachtbaren Linearkombinationen leiten sich erneut aus den Eigenvektoren zum Eigenwert Null ab.

$$\begin{aligned} \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_i))) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{\mathbf{f}}_b(t_i) \\ \text{Rang}(-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_i) \times \tilde{\mathbf{f}}_b(t_i)) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b(t_i)) \text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b(t_i))) &= 2 & : & \quad \mathbf{x}_{\lambda=0} = \tilde{\omega}_{ib}^b(t_i) \end{aligned} \quad (\text{V.1.119})$$

Die beobachtbaren Zustandsparameter lassen sich durch Projektion auf die ausgezeichneten Achsen bestimmen. Auch hier sind die Berechnungsvorschriften nur für einen Arbeitspunkt dargestellt, da sie an jedem Arbeitspunkt gleich sind.

$$\begin{aligned} III^{\parallel f} & \quad b_a^{\parallel f} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot k_a^{\parallel f} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \\ III^{\parallel f \times \omega} & \quad b_a^{\parallel f \times \omega} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel f \times \omega} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\ III^{\parallel f \times (f \times \omega)} & \quad b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel f \times \omega} = (R_{eb}^T \mathbf{f}_e)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} \\ IV^{\parallel f} & \quad \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times \omega)} = \frac{1}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\| - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \\ IV^{\parallel \omega} & \quad -\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel \omega \times (f \times \omega)} + \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot b_g^{\parallel f \times \omega} = (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\ IV^{\parallel \omega \times f} & \quad \|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \psi_{bb}^{\parallel \omega \times f} - \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot b_g^{\parallel f \times (f \times \omega)} + \|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \left( 1 - \left( \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b^T \cdot \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \right)^2 \right) \cdot k_g^{\parallel \omega} \\ & \quad = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \cdot (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \omega_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{\mathbf{f}}_b\|} \end{aligned} \quad (\text{V.1.120})$$

Die beobachtbaren Zustände sind erneut nach der Güte ihrer Beobachtbarkeit in Tabelle 12 visualisiert.

Güte	Unmittelbare Beobachtbarkeit	Mittelbare Beobachtbarkeit
gut	$(b_a^{\parallel f_1} \quad k_a^{\parallel f_1}), (b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2} \quad \psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)}), (b_a^{\parallel f_3 \times \omega_3} \quad \psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)})$ $(b_a^{\parallel f_1} \quad k_a^{\parallel f_1}), (b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2} \quad \psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)}), (b_a^{\parallel f_3 \times \omega_3} \quad \psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)})$ $(b_a^{\parallel f_1} \quad k_a^{\parallel f_1}), (b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2} \quad \psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)}), (b_a^{\parallel f_3 \times \omega_3} \quad \psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)})$	–
mäßig	$(\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)}, (\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel \omega_1 \times (a_1 \times f_1)} \quad b_g^{\parallel f_1 \times \omega_1}), (\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel a_1 \times f_1} \quad b_g^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \quad k_g^{\parallel \omega_1}))$ $(\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)}, (\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel \omega_2 \times (a_2 \times f_2)} \quad b_g^{\parallel f_2 \times \omega_2}), (\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel \omega_2 \times f_2} \quad b_g^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \quad k_g^{\parallel \omega_2}))$ $(\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)}, (\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel \omega_3 \times (a_3 \times f_3)} \quad b_g^{\parallel f_3 \times \omega_3}), (\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel \omega_3 \times f_3} \quad b_g^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)} \quad k_g^{\parallel \omega_3}))$	$b_a^{\parallel f_1 \times \omega_1}$ $b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2}$ $b_a^{\parallel f_3 \times \omega_3}$
schlecht	–	–
nicht	–	–

**Tabelle 12: Drei Arbeitspunkte mit IMU-Bias und IMU-Skalenfaktorfehler**

Die zwölf Linearkombinationen sind teilweise redundant, da die insgesamt sechs Raumrichtungen im dreidimensionalen Raum teilweise linear abhängig sein müssen.

$$\left. \begin{pmatrix} b_a^{\parallel f_1 \times \omega_1} \\ b_a^{\parallel f_2 \times \omega_2} \\ b_a^{\parallel f_3 \times \omega_3} \end{pmatrix} \right\} = \mathbf{b}_a \Rightarrow \left. \begin{pmatrix} k_a^{\parallel f_1} \\ k_a^{\parallel f_2} \\ k_a^{\parallel f_3} \end{pmatrix} \right\} = \mathbf{k}_a \tag{V.1.121}$$

$$\left. \begin{pmatrix} \psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_1 \times (f_1 \times \omega_1)} \\ \psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_2 \times (f_2 \times \omega_2)} \\ \psi_{\tilde{b}\tilde{b}}^{\parallel f_3 \times (f_3 \times \omega_3)} \end{pmatrix} \right\} = \psi_{\tilde{b}\tilde{b}} \Rightarrow \left. \begin{pmatrix} b_g^{\parallel f_1 \times \omega_1} \\ b_g^{\parallel f_2 \times \omega_2} \\ b_g^{\parallel f_3 \times \omega_3} \end{pmatrix} \right\} = \mathbf{b}_g \Rightarrow \left. \begin{pmatrix} k_g^{\parallel \omega_1} \\ k_g^{\parallel \omega_2} \\ k_g^{\parallel \omega_3} \end{pmatrix} \right\} = \mathbf{k}_a$$

Es sind sofort alle drei Freiheitsgrade der Beschleunigungsmesserbias und der Eulerwinkelstörung beobachtbar. Durch Einsetzen der Beschleunigungsmesserbias in die Linearkombination aus Beschleunigungsmesserbias und Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler können die drei Freiheitsgrade der Beschleunigungsmesserskalenfaktorfehler beobachtbar gemacht werden. Die drei Freiheitsgrade der Kreiselbias und der Kreiselskalenfaktorfehler können sukzessive durch Einsetzen der jeweils bereits bekannten Freiheitsgrade in die verbleibenden beobachtbaren Linearkombinationen gewonnen werden. Es sind alle Zustandsparameter beobachtbar.

## 2. Zusammenfassung

Die Analyse der Beobachtbarkeit liefert die allgemeinen Beobachtbarkeitsgleichung in unparametrisierter Form. Da deren unmittelbare Interpretation nicht möglich ist, werden die beobachtbaren Zustände anhand der parametrisierten Beobachtbarkeitsgleichungen durchgeführt. Zum besseren Verständnis wurden jeweils sechs Spezialfälle mit den nichtlinearen und den linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen diskutiert. Zum Abschluss wurde noch die Beobachtbarkeit diverser Sensorfehlerkombinationen bei mehreren unabhängigen Arbeitspunkten untersucht. Als Ergebnis dieses Abschnitts können nun die beobachtbaren Freiheitsgrade der Sensorfehlerparameter nicht nur benannt, sondern durch die Angabe der mathematischen Beziehungen sogar berechnet werden.

# A Übersicht zur Beobachtbarkeitsanalyse

## Beobachtbarkeit mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

Beobachtbarkeit Güte	Stationary Maneouvre		Linear Acceleration		Straight and Levelled	
	unmittelbar	mittelbar	unmittelbar	mittelbar	unmittelbar	mittelbar
gut	$b_a^{\parallel f}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times \omega} & \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times \omega)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times \omega} & \psi_{bb}^{\parallel f \times \omega} \end{pmatrix}$	–	$b_a^{\parallel f}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times j} & \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times j)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times (f \times j)} & \psi_{bb}^{\parallel f \times j} \end{pmatrix}$	–	$b_a^{\parallel f}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times e} & \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times e)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times (f \times e)} & \psi_{bb}^{\parallel f \times e} \end{pmatrix}$	–
mäßig	–	–	$\psi_{bb}^{\parallel f \times f}$ $b_g^{\parallel f \times j}$ $\begin{pmatrix} \psi_{bb}^{\parallel j \times (f \times f)} & b_g^{\parallel f \times (f \times j)} \end{pmatrix}$	$b_a^{\parallel f \times (f \times j)}$	$b_g^{\parallel f \times e}$ $b_g^{\parallel f \times (f \times e)}$	–
schlecht	$b_g^{\parallel \omega}$ $\begin{pmatrix} b_g^{\parallel \omega \times f} & \psi_{bb}^{\parallel \omega \times (f \times \omega)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_g^{\parallel \omega \times (f \times \omega)} & \psi_{bb}^{\parallel \omega \times f} \end{pmatrix}$	–	$b_g^{\parallel f \times (f \times f)}$	–	–	–
nicht	–	–	–	–	$\psi_{bb}^{\parallel f}$ $b_g^{\parallel f}$	–

Tabelle 13: Beobachtbarkeit mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

## Beobachtbarkeit mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

Beobachtbarkeit Güte	Stationary Maneouvre		Linear Acceleration		Straight and Levelled	
	unmittelbar	mittelbar	unmittelbar	mittelbar	unmittelbar	mittelbar
gut	$\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f} & k_a^{\parallel f} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times \omega} & \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times \omega)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)} & \psi_{bb}^{\parallel f \times \omega} \end{pmatrix}$	–	$\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f} & k_a^{\parallel f} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times j} & \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times j)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times (f \times j)} & \psi_{bb}^{\parallel f \times j} \end{pmatrix}$	–	$\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f} & k_a^{\parallel f} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times e} & \psi_{bb}^{\parallel f \times (f \times e)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_a^{\parallel f \times (f \times e)} & \psi_{bb}^{\parallel f \times e} \end{pmatrix}$	–
mäßig	$\psi_{bb}^{\parallel \omega \times f}, \psi_{bb}^{\parallel \omega \times (f \times \omega)}$	$b_a^{\parallel f \times (f \times \omega)}$	$\psi_{bb}^{\parallel f \times f}, \psi_{bb}^{\parallel j \times (f \times f)}$	$b_a^{\parallel f \times (f \times j)}$	–	–
schlecht	–	–	–	–	–	–
nicht	$k_a^{\parallel f \times \omega}$ $k_a^{\parallel f \times (f \times \omega)}$	–	$k_a^{\parallel f \times j}$ $k_a^{\parallel f \times (f \times j)}$	–	$\psi_{bb}^{\parallel f}$ $k_a^{\parallel f \times e}$ $k_a^{\parallel f \times (f \times e)}$	–

Tabelle 14: Beobachtbarkeit mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

# B Berechnungen zur Beobachtbarkeitsanalyse

## Linearisierter Spezialfall „Stationary Maneuvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b$  :**

$$\begin{aligned}
 b_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} &= R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \underbrace{(\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_0 &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_{\|\tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow b_a^{||f} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \|\tilde{f}_b\|
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b$  :**

$$\begin{aligned}
 b_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} &= R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \underbrace{\|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} \right)}_{\psi_{bb}^{||f \times \omega}} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|}}_0 \\
 \Rightarrow b_a^{||f \times \omega} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{||f \times \omega} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|}
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)$  :**

$$\begin{aligned}
 b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} &= R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} + \underbrace{\|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} \right)}_{\psi_{bb}^{||f \times (f \times \omega)} = -\psi_{bb}^{||f \times \omega}} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|}}_0 \\
 \Rightarrow b_a^{||f \times (f \times \omega)} - \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{||f \times \omega} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|}
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile V in Richtung  $\tilde{\omega}_{ib}^b$  :**

$$\begin{aligned}
 -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \psi_{bb} + b_g &= (-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b))^{-1} \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)) \right) \\
 \Rightarrow -(\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + b_g^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} &= \left( (-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b))^{-1} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)) \right) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
 \Rightarrow \underbrace{(\psi_{bb} \times \tilde{\omega}_{ib}^b)^T}_0 \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + b_g^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} &= \left( (-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b))^{-1} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)) \right) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
 \Rightarrow b_g^{||\omega} &= \left( (-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) - \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b))^{-1} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + 2\omega_{ie}^e \times \dot{f}_e + \dot{\omega}_{ie}^e \times f_e + \omega_{ie}^e \times (\omega_{ie}^e \times f_e)) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)) \right) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}
 \end{aligned}$$





**Projektion von Zeile IV in Richtung  $\tilde{\omega}_{ib}^b$ :**

$$\begin{aligned}
& (-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b)) \cdot \psi_{bb} = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \\
& \Rightarrow \left( (-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b)) \cdot \psi_{bb} \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} = \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \left( \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
& \Rightarrow \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \cdot \left( \psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \left( (\tilde{f}_b \times \psi_{bb}) \times \tilde{\omega}_{ib}^b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} = \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \left( (R_{eb}^T f_e) \times \tilde{\omega}_{ib}^b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
& \Rightarrow -\left\| \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b \right\| \cdot \psi_{bb}^T \cdot \underbrace{\left( \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \right)}_{\psi_{bb}^{\text{proj}(a \times f)}} - \underbrace{\left( (\tilde{f}_b \times \psi_{bb}) \times \tilde{\omega}_{ib}^b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}}_0 = \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \underbrace{\left( (R_{eb}^T f_e) \times \tilde{\omega}_{ib}^b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}}_0 \\
& \Rightarrow \psi_{bb}^{\text{proj}(a \times f)} = \frac{-1}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \cdot \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}
\end{aligned}$$

**Projektion von Zeile IV in Richtung  $\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b$ :**

$$\begin{aligned}
& (-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b)) \cdot \psi_{bb} = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \\
& \Rightarrow \left( (-\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b)) \cdot \psi_{bb} \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} = \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \\
& \Rightarrow \left( \psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} + \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \|\tilde{f}_b\|} \cdot \left( (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b) \times \tilde{\omega}_{ib}^b \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} = \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \\
& \Rightarrow \left( \psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} + \|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \|\tilde{f}_b\| \cdot \left( \psi_{bb} \times \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \right)^T \cdot \left( \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \right) = \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \\
& \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
& \Rightarrow \underbrace{\left( \psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}}_0 + \underbrace{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \|\tilde{f}_b\| \cdot \left( \psi_{bb} \times \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \right)^T \cdot \left( \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \right)}_{\psi_{bb}^{\text{proj}(a \times f)} = \psi_{bb}^{\text{proj}(a \times f)}} = \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \\
& \Rightarrow \psi_{bb}^{\text{proj}(a \times f)} = \frac{1}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \|\tilde{f}_b\|} \cdot \left( R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}
\end{aligned}$$





## Linearisierter Spezialfall „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b$ :**

$$\begin{aligned}
 & b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} = R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + (\text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\text{diag}(k_a) \cdot \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \left( \text{diag}(k_a) \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \underbrace{\left( \frac{\tilde{f}_b^T}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \text{diag}(k_a) \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \right)^T}_{\substack{k_a^{lf} \\ \text{transformationsinvariante} \\ \text{quadratische Form}}} + \underbrace{(\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_0 = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_{\|\tilde{f}_b\|} \\
 & \Rightarrow b_a^{lf} + \|\tilde{f}_b\| \cdot k_a^{lf} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \|\tilde{f}_b\|
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b$ :**

$$\begin{aligned}
 & b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} = R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} + (\text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\text{diag}(k_a) \cdot \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \underbrace{\left( \frac{\tilde{f}_b^T}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \text{diag}(k_a) \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} \right)^T}_0 + \|\tilde{f}_b\| \cdot \underbrace{\psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} \right)}_{\substack{\psi_{bb}^{lf(f \times f)} \\ \text{Nebendiagonalelemente} \\ \text{diag}(k_a) \text{ gleich Null}}} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|}}_0 \\
 & \Rightarrow b_a^{lf \times j} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{lf \times (f \times j)} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b}{\|\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b\|}
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)$ :**

$$\begin{aligned}
 & b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} = R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} + (\text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\text{diag}(k_a) \cdot \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} \\
 & \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 & \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \underbrace{\left( \frac{\tilde{f}_b^T}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \text{diag}(k_a) \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} \right)^T}_0 + \|\tilde{f}_b\| \cdot \underbrace{\psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} \right)}_{\substack{\psi_{bb}^{lf \times (f \times f)} = -\psi_{bb}^{lf \times j} \\ \text{Nebendiagonalelemente} \\ \text{diag}(k_a) \text{ gleich Null}}} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|}}_0 \\
 & \Rightarrow b_a^{lf \times (f \times j)} - \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{lf \times j} = (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \dot{\tilde{f}}_b)\|}
 \end{aligned}$$

### Projektion von Zeile IV in Richtung $\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b$ :

$$\begin{aligned}
 & -\text{veck}(\dot{\tilde{f}}_b) \cdot \psi_{bb} = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) \\
 \Rightarrow & -\left(\text{veck}(\dot{\tilde{f}}_b) \cdot \psi_{bb}\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b\|} = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow & \frac{\|\dot{\tilde{f}}_b\|}{\|\dot{\tilde{f}}_b\|} \cdot \left(\psi_{bb} \times \dot{\tilde{f}}_b\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b\|} = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 \Rightarrow & \|\dot{\tilde{f}}_b\| \cdot \underbrace{\psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\dot{\tilde{f}}_b}{\|\dot{\tilde{f}}_b\|} \times \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b\|} \right)}_{\psi_{bb}^{j \times (j \times f)}} = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow & \psi_{bb}^{j \times (j \times f)} = \frac{1}{\|\dot{\tilde{f}}_b\|} \cdot \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b\|}
 \end{aligned}$$

### Projektion von Zeile IV in Richtung $\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)$ :

$$\begin{aligned}
 & -\text{veck}(\dot{\tilde{f}}_b) \cdot \psi_{bb} = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) \\
 \Rightarrow & -\left(\text{veck}(\dot{\tilde{f}}_b) \cdot \psi_{bb}\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)\|} = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)\|} \\
 \Rightarrow & \frac{\|\dot{\tilde{f}}_b\|}{\|\dot{\tilde{f}}_b\|} \cdot \left(\psi_{bb} \times \dot{\tilde{f}}_b\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)\|} = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 \Rightarrow & \|\dot{\tilde{f}}_b\| \cdot \underbrace{\psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\dot{\tilde{f}}_b}{\|\dot{\tilde{f}}_b\|} \times \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)\|} \right)}_{\psi_{bb}^{j \times (j \times (j \times f))} = \psi_{bb}^{j \times f}} = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)\|} \\
 \Rightarrow & \psi_{bb}^{j \times f} = \frac{-1}{\|\dot{\tilde{f}}_b\|} \cdot \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)}{\|\dot{\tilde{f}}_b \times (\dot{\tilde{f}}_b \times \tilde{f}_b)\|}
 \end{aligned}$$

## Linearisierter Spezialfall „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b$  :**

$$\begin{aligned}
 b_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} &= R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \underbrace{(\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_0 &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_{\|\tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow b_a^{||f} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \|\tilde{f}_b\|
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b \times e$  :**

$$\begin{aligned}
 b_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} &= R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} \right) &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|}}_0 \\
 \Rightarrow b_a^{||f \times e} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{||f \times e} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|}
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)$  :**

$$\begin{aligned}
 b_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} &= R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} \right) &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|}}_0 \\
 \Rightarrow b_a^{||f \times (f \times e)} - \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{||f \times e} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times e)\|}
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile IV in Richtung  $\tilde{f}_b \times e$  :**

$$\begin{aligned}
 -\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot b_g &= R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) \\
 \Rightarrow -(\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot b_g)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} &= (R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e))^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} \\
 \Rightarrow \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (b_g \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} &= (R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e))^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 \Rightarrow \|\tilde{f}_b\| \cdot b_g^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} \right) &= (R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e))^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|} \\
 \Rightarrow b_g^{||f \times (f \times e)} &= \frac{1}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e))^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times e}{\|\tilde{f}_b \times e\|}
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile IV in Richtung  $\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})$ :**

$$\begin{aligned}
 & -\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{b}_g = R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e) \\
 \Rightarrow & -(\text{veck}(\tilde{\mathbf{f}}_b) \cdot \mathbf{b}_g)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|} = (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|} \\
 \Rightarrow & \frac{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \cdot (\mathbf{b}_g \times \tilde{\mathbf{f}}_b)^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|} = (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|} \quad \left| \text{mit } (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right. \\
 \Rightarrow & \|\tilde{\mathbf{f}}_b\| \cdot \mathbf{b}_g^T \cdot \underbrace{\left( \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \times \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|} \right)}_{\substack{b_g^{\|\mathbf{f}\| \times (\mathbf{f} \times \mathbf{f} \times \mathbf{e})} = -b_g^{\|\mathbf{f}\| \times \mathbf{e}}} = (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|} \\
 \Rightarrow & b_g^{\|\mathbf{f}\| \times \mathbf{e}} = \frac{-1}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b\|} \cdot (R_{eb}^T \cdot (\dot{\mathbf{f}}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}^e \times \mathbf{f}_e))^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})}{\|\tilde{\mathbf{f}}_b \times (\tilde{\mathbf{f}}_b \times \mathbf{e})\|}
 \end{aligned}$$



## Linearisierter Spezialfall „Stationary Maneuvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias bei zwei Arbeitspunkten

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b$  :**

$$\begin{aligned}
 b_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} &= R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \underbrace{(\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_0 &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_{\|\tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow b_a^{lf} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \|\tilde{f}_b\|
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b$  :**

$$\begin{aligned}
 b_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} &= R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} \right) &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|}}_0 \\
 \Rightarrow b_a^{lf \times \omega} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{lf \times \omega} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b\|}
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile III in Richtung  $\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)$  :**

$$\begin{aligned}
 b_a + \text{diag}(\tilde{f}_b) \cdot k_a - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} &= R_{eb}^T f_e - \tilde{f}_b \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} - \tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} \quad \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. \\
 \Rightarrow b_a^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} \right) &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|} - \underbrace{\tilde{f}_b^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|}}_0 \\
 \Rightarrow b_a^{lf \times (f \times \omega)} - \|\tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{lf \times \omega} &= (R_{eb}^T f_e)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)}{\|\tilde{f}_b \times (\tilde{f}_b \times \tilde{\omega}_{ib}^b)\|}
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile IV in Richtung  $\tilde{f}_b$  :**

$$\begin{aligned}
 -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot b_g &= R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \\
 \Rightarrow -(\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + (\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot b_g)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} &= (R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e))^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b))^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot ((\psi_{bb} \times \tilde{f}_b) \times \tilde{\omega}_{ib}^b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + (b_g \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} &= (R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e))^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 \left| \text{mit } (a \times b)^T \cdot c = a^T \cdot (b \times c) \right. & \\
 \Rightarrow \|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \right) + \|\tilde{f}_b\| \cdot \|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \left( \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \times \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \right) \right) + (b_g \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} &= (R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e))^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
 \Rightarrow \psi_{bb}^{lf \times (f \times \omega)} &= \frac{1}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\| - \|\tilde{f}_b\| \cdot \|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot (R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e))^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}
 \end{aligned}$$

**Projektion von Zeile IV in Richtung  $\tilde{\omega}_{ib}^b$ :**

$$\begin{aligned}
& -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{b}_g = R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \\
& \Rightarrow -(\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + (\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{b}_g)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} = (R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
& \Rightarrow \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \cdot (\psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + ((\psi_{bb} \times \tilde{f}_b) \times \tilde{\omega}_{ib}^b)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\mathbf{b}_g \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} = (R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + ((R_{eb}^T f_e) \times \tilde{\omega}_{ib}^b)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
& \quad \left| \text{mit } (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right. \\
& \Rightarrow \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \cdot \psi_{bb}^T \cdot \underbrace{\left( \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \right)}_{\psi_{bb}^{\|\text{axf}\} \times \omega = -\psi_{bb}^{\|\text{axcf}\}}} + \underbrace{((\psi_{bb} \times \tilde{f}_b) \times \tilde{\omega}_{ib}^b)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}}_0 + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \mathbf{b}_g^T \cdot \underbrace{\left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \right)}_{\mathbf{b}_g^{\|\text{f}\} \times \omega} = (R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \underbrace{((R_{eb}^T f_e) \times \tilde{\omega}_{ib}^b)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}}_0 \\
& \Rightarrow -\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\|\text{axcf}\}} + \|\tilde{f}_b\| \cdot \mathbf{b}_g^{\|\text{f}\} \times \omega = (R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}
\end{aligned}$$

**Projektion von Zeile IV in Richtung  $\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b$ :**

$$\begin{aligned}
& -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{b}_g = R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \\
& \Rightarrow -(\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} + (\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb})^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} - (\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{b}_g)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \\
& \quad = (R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \\
& \Rightarrow (\psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot ((\psi_{bb} \times \tilde{f}_b) \times \tilde{\omega}_{ib}^b)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (\mathbf{b}_g \times \tilde{f}_b)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \\
& \quad = (R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \\
& \quad \left| \text{mit } (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right. \\
& \Rightarrow \underbrace{(\psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}}_0 + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot \underbrace{\psi_{bb}^T \cdot \left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \left( \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \right) \right)}_{\psi_{bb}^{\|\text{f}\} \times (\text{axcf}) = -\psi_{bb}^{\|\text{axcf}\}}} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \mathbf{b}_g^T \cdot \underbrace{\left( \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \right)}_{\mathbf{b}_g^{\|\text{f}\} \times (\text{axcf}) = -\mathbf{b}_g^{\|\text{f}\} \times \omega} \\
& \quad = (R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \\
& \Rightarrow \|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \psi_{bb}^{\|\text{axcf}\}} - \mathbf{b}_g^{\|\text{f}\} \times \omega = \frac{1}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot (R_{eb}^T \cdot (\hat{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e))^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}
\end{aligned}$$





### Projektion von Zeile IV in Richtung $\tilde{f}_b$ :

$$\begin{aligned}
& -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{b}_g - \text{veck}(\tilde{f}_b) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \\
\Rightarrow & -\left(\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb}\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \left(\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb}\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \left(\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{b}_g\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} - \left(\text{veck}(\tilde{f}_b) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
& = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
\Rightarrow & \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \|\tilde{f}_b\|} \cdot \left(\psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b)\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot \left((\psi_{bb} \times \tilde{f}_b) \times \tilde{\omega}_{ib}^b\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \left(\mathbf{b}_g \times \tilde{f}_b\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} + \left(\text{diag}(\mathbf{k}_g) \cdot \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
& = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \quad \left| \text{mit } (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right. \\
\Rightarrow & \|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\| \cdot \underbrace{\psi_{bb}^T \cdot \left(\frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}\right)}_{\psi_{bb}^{\|\omega \times f\} = \psi_{bb}^{\|f \times \omega\}}} + \underbrace{\|\tilde{f}_b\| \cdot \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot \psi_{bb}^T \cdot \left(\frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \left(\frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \times \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}\right)\right)}_{\psi_{bb}^{\|f \times (\omega \times f)} = \psi_{bb}^{\|f \times \omega\}}} + \underbrace{\left(\mathbf{b}_g \times \tilde{f}_b\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_0 + \underbrace{\left(\text{diag}(\mathbf{k}_g) \cdot \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}}_0 \\
& = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \\
\Rightarrow & \psi_{bb}^{\|f \times \omega\|} = \frac{1}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\| - \|\tilde{f}_b\| \cdot \|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)\right)^T \cdot \frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|}
\end{aligned}$$

### Projektion von Zeile IV in Richtung $\tilde{\omega}_{ib}^b$ :

$$\begin{aligned}
& -\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} + \text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb} - \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{b}_g - \text{veck}(\tilde{f}_b) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g = R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e) \\
\Rightarrow & -\left(\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb}\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \left(\text{veck}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \psi_{bb}\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \left(\text{veck}(\tilde{f}_b) \cdot \mathbf{b}_g\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} - \left(\text{veck}(\tilde{f}_b) \text{diag}(\tilde{\omega}_{ib}^b) \cdot \mathbf{k}_g\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
& = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e) - \tilde{\omega}_{ib}^b \times (R_{eb}^T f_e)\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
\Rightarrow & \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \|\tilde{f}_b\|} \cdot \left(\psi_{bb} \times (\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b)\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \left((\psi_{bb} \times \tilde{f}_b) \times \tilde{\omega}_{ib}^b\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot \left(\mathbf{b}_g \times \tilde{f}_b\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \frac{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot \frac{\|\tilde{f}_b\|}{\|\tilde{f}_b\|} \cdot \left(\text{diag}(\mathbf{k}_g) \cdot \tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \\
& = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \left((R_{eb}^T f_e) \times \tilde{\omega}_{ib}^b\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \quad \left| \text{mit } (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right. \\
\Rightarrow & \|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\| \cdot \underbrace{\psi_{bb}^T \cdot \left(\frac{\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}\right)}_{\psi_{bb}^{\|\omega \times f\} = \psi_{bb}^{\|f \times \omega\}}} + \underbrace{\left((\psi_{bb} \times \tilde{f}_b) \times \tilde{\omega}_{ib}^b\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}}_0 + \underbrace{\|\tilde{f}_b\| \cdot \mathbf{b}_g^T \cdot \left(\frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}\right)}_{b_g^{\|f \times \omega\}}} + \underbrace{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\| \cdot \|\tilde{f}_b\| \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b{}^T}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} \cdot \text{diag}(\mathbf{k}_g) \cdot \left(\frac{\tilde{f}_b}{\|\tilde{f}_b\|} \times \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}\right)}_0 \\
& \hspace{15em} \text{Nebendiagonalelemente } \text{diag}(\mathbf{k}_g) \text{ gleich Null} \\
& = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|} + \underbrace{\left((R_{eb}^T f_e) \times \tilde{\omega}_{ib}^b\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}}_0 \\
\Rightarrow & -\|\tilde{\omega}_{ib}^b \times \tilde{f}_b\| \cdot \psi_{bb}^{\|\omega \times f\|} + \|\tilde{f}_b\| \cdot b_g^{\|f \times \omega\|} = \left(R_{eb}^T \cdot (\dot{f}_e + \omega_{ie}^e \times f_e)\right)^T \cdot \frac{\tilde{\omega}_{ib}^b}{\|\tilde{\omega}_{ib}^b\|}
\end{aligned}$$



# VI Datenfusion und Kalmanfilteroptimierung

Bevor mit der Optimierung des CKF begonnen werden kann, müssen in der Datenfusion noch die Voraussetzungen für den Einsatz des Navigationsmodells im Rahmen des Kalmanfilters geschaffen werden. Die bereits linearisierten, aber noch kontinuierlichen kinematischen Bewegungs- und Beobachtungsgleichungen aus den Abschnitten III und IV müssen diskretisiert werden. Anschließend erfolgt eine kurze Einführung in den CKF. Seit Veröffentlichung des CKF im Jahr 1961 durch R.E. Kalman<sup>51</sup> hat es zahlreiche Verbesserungen im Hinblick auf Stabilität und Rechenzeitbedarf gegeben. Besonders zu nennen ist hier neben den Square Root Filtern von J.E. Potter<sup>52</sup> und N.A. Carlson<sup>53</sup> der UD Factorization Filter von G.L. Bierman<sup>54</sup> und C.L. Thornton<sup>55</sup>. Im Bereich der Rechenzeitoptimierung sind zusätzlich die suboptimalen Filteransätze von S.F. Schmidt<sup>56</sup> anzuführen. Die Anwendbarkeit allgemeiner Methoden der Matrizenrechnung wie Blockmatrixzerlegung oder Sparse Matrix Techniken ist ebenfalls noch gegeben. Ziel des Kapitels ist die Optimierung der im vorigen Kapitel hergeleiteten Kalmanfiltergleichungen unter Ausnutzung der Gleichungs- und Matrizenstruktur und der teilweise schwachen Besetzung einiger Matrizen. Zusätzlich soll eine stabile Implementierung erreicht werden. Dazu erfolgt vorab eine allgemeine Vorstellung möglicher Ansätze zur Rechenzeitoptimierung. Anschließend werden die vorgestellten Möglichkeiten der Kalmanfilteroptimierung, die am besten zur Optimierung des Navigationsmodells aus Kapitel IV geeignet sind, auf dieses angewendet.

## 1. Datenfusion

Das Kapitel Datenfusion dient zum einen der Zeitdiskretisierung des noch kontinuierlichen Navigationsmodells aus Abschnitt IV. Zum anderen erfolgt im Anschluss eine optimale Verknüpfung des dynamischen Modells und des Beobachtungsmodells aus den Abschnitten III und IV über den Kalmanfilter. Auf die detaillierten Herleitungen wird in diesem Kapitel bewusst verzichtet, da dies nicht der Schwerpunkt der Arbeit sein soll. Es folgt lediglich eine Übersicht über die verwendeten Gleichungen. Referenzen zu entsprechender Literatur werden im Text gegeben.

### 1.1 Zeitdiskretisierung

Neben der Linearisierung der kinematischen Bewegungsgleichungen in Abschnitt III, die Voraussetzung für eine Implementierung des gesamten Gleichungssystems in einem CKF ist, werden in der Diskretisierung die Voraussetzungen für eine rechnergestützte Verarbeitung der kinematischen Bewegungsgleichungen geschaffen. Ausgehend vom kontinuierlichen dynamischen Modell

$$\dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k \quad (\text{VI.1.1})$$

muss ein Übergang auf das diskretisierte dynamische Modell

$$\mathbf{z}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{z}_k + \Gamma_k \mathbf{s}_k \quad (\text{VI.1.2})$$

geschaffen werden. Die Problematik besteht nun darin, dass für die computergestützte Berechnung das zeitdiskrete Modell aus Gleichung (VI.1.2) benötigt wird, aber gegenwärtig nur das kontinuierliche Modell aus Gleichung (VI.1.1) auf Grund mathematischer Überlegungen vorliegt. Speziell die so genannten Transitionsmatrizen  $\Phi$  und  $\Gamma$  müssen im Folgenden entwickelt werden. Für das Beobachtungsmodell müssen diese Berechnungen nicht durchgeführt werden, da es sich bei den Beobachtungsgleichungen nicht um Differentialgleichungen handelt. Zwischen dem kontinuierlichen und dem diskreten Beobachtungssystem besteht somit kein Unterschied.

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{z}_k \quad (\text{VI.1.3})$$

Unter der Annahme abschnittsweise konstanter Transitionsmatrizen und Systemeingänge folgt als Lösung für die kontinuierliche dynamische Modellgleichung<sup>57</sup>:

$$\mathbf{z}_{k+1} = e^{\mathbf{A}_k(t_{k+1}-t_k)} \mathbf{z}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}_k(t_{k+1}-\tau)} \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k d\tau \quad (\text{VI.1.4})$$

<sup>51</sup> Kalman, R.E.; A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, in ASME Transactions Series D: Journal of Basic Engineering Vol.82, 1960, S.95

<sup>52</sup> Potter, J.E. & Stern, R.G.; Statistical Filtering of Space Navigation Measurements, in Proceedings of the 1963 AIAA Guidance and Control Conference, Washington D.C. 1963

<sup>53</sup> Carlson, N.A.; Fast Triangular Formulation of the Square Root Filter, in AIAA Journal Vol.11 No.9, 1973, S.1259

<sup>54</sup> Bierman, G.L.; Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, San Diego 1977

<sup>55</sup> Thornton, C.L.; Triangular Covariance Factorizations for Kalman Filtering, University of California at Los Angeles School of Engineering, Los Angeles 1976

<sup>56</sup> Schmidt, S.F.; Application of State Space Methods to Navigation Problems, in Leondes, C.T. (Ed.); Advances in Control Systems Vol.3, Academic Press, New York 1966

<sup>57</sup> Walter, W.; Gewöhnliche Differentialgleichungen Eine Einführung, Springer Verlag, Berlin 2000, S.116

Vereinfachung führt zu:

$$\mathbf{z}_{k+1} = e^{A_k(t_{k+1}-t_k)}\mathbf{z}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_k(t_{k+1}-\tau)}d\tau\mathbf{B}_k\mathbf{s}_k \quad (\text{VI.1.5})$$

Vergleicht man die Gleichungen (VI.1.2) und (VI.1.5), kommt man zu folgendem Ergebnis für die diskreten Transitionsmatrizen:

$$\begin{aligned} \Phi_k &= e^{A_k(t_{k+1}-t_k)} \\ \Gamma_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_k(t_{k+1}-\tau)}d\tau\mathbf{B}_k \end{aligned} \quad (\text{VI.1.6})$$

Auflösen des Integrals ergibt:

$$\Gamma_k = e^{A_k(t_{k+1}-t_k)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-A_k\tau}d\tau\mathbf{B}_k \quad (\text{VI.1.7})$$

Einsetzen von (VI.1.6) in (VI.1.7):

$$\Gamma_k = \Phi_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-A_k\tau}d\tau\mathbf{B}_k \quad (\text{VI.1.8})$$

Für den Fall einer invertierbaren Dynamikmatrix lautet das Ergebnis:<sup>58</sup>

$$\begin{aligned} \Phi_k &= e^{A_k(t_{k+1}-t_k)} \\ \Gamma_k &= (\Phi_k - I)A_k^{-1}\mathbf{B}_k \end{aligned} \quad (\text{VI.1.9})$$

Die getroffenen Annahmen lassen sich für Navigationsanwendungen leicht bestätigen. Die Transitionsmatrizen sind nur von den Daten der IMU und der Navigationslösung des INS abhängig. Diese liegen jedoch nur zu den diskreten Zeitpunkten vor. Aus diesem Grund ist die Annahme abschnittsweise konstanter Transitionsmatrizen und Eingangsgrößen gerechtfertigt. In der praktischen Umsetzung werden zur genaueren Berechnung der Matrizen meist die gemittelten Werte zwischen den diskreten Zeitpunkten verwendet, um deren Veränderungen Rechnung zu tragen. Die zweite Annahme einer invertierbaren Dynamikmatrix lässt sich wegen der Unabhängigkeit der Zustandsgrößen voneinander zum einen und der vollständig besetzten Hauptdiagonale zum anderen bestätigen. Die Lösung der Matrixexponentialfunktion in Gleichung (VI.1.9) stellt eine sehr aufwändige Rechenoperation dar. Diese muss zudem auf Grund der Zeitvariabilität der Dynamikmatrix  $A$  zu jedem diskreten Rechenschritt  $k$  neu berechnet werden. Deshalb werden in der Praxis oftmals Näherungslösungen für die Matrixexponentialfunktion verwendet.<sup>59</sup>

$$\begin{aligned} \Phi_k &= I + A_k \cdot (t_{k+1} - t_k) + \frac{1}{2!} A_k^2 \cdot (t_{k+1} - t_k)^2 + \frac{1}{3!} A_k^3 \cdot (t_{k+1} - t_k)^3 + \dots \\ \Gamma_k &= \left[ I \cdot (t_{k+1} - t_k) + \frac{1}{2!} A_k \cdot (t_{k+1} - t_k)^2 + \frac{1}{3!} A_k^2 \cdot (t_{k+1} - t_k)^3 + \dots \right] \mathbf{B}_k \end{aligned} \quad (\text{VI.1.10})$$

Weitere Möglichkeiten zur genaueren Berechnung der Matrixexponentialfunktion finden sich in der Literatur.<sup>60</sup>

## 1.2 Konventioneller Kalmanfilter

In diesem Kapitel werden in aller Kürze die diskreten Kalmanfiltergleichungen vorgestellt. Detaillierte Herleitung und weitergehende Information finden sich in diverser Literatur über den Kalmanfilter.<sup>61</sup> Ausgehend vom dynamischen Modell aus Abschnitt III

$$\mathbf{z}_k(-) = \Phi_{k-1}\mathbf{z}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\mathbf{s}_{k-1} \quad (\text{VI.1.11})$$

lautet die Kalmanprädiktion:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k(-) &= \Phi_{k-1}\mathbf{z}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k(-) &= \Phi_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\Phi_{k-1}^T + \Gamma_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}\Gamma_{k-1}^T \end{aligned} \quad (\text{VI.1.12})$$

<sup>58</sup> Simon, Dan; Optimal State Estimation, John Wiley & Sons, New Jersey 2006, S.27

<sup>59</sup> Crassidis, John L. & Junkins, John L.; Optimal Estimation of Dynamic Systems, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2004, S.142

<sup>60</sup> Moler, Cleve & van Loan, Charles; Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix Twenty-Five Years Later, in SIAM Review Vol.45 No.1, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003

<sup>61</sup> Minkler, G. & Minkler, J.; Theory and Application of Kalman Filtering, Magellan Book Company, Palm Bay 1993

Für das Beobachtungsmodell aus Abschnitt IV

$$\mathbf{y}_k = H_k \mathbf{z}_k \quad (\text{VI.1.13})$$

heißt die Kalmankorrektur demnach:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k(-) H_k^T (H_k P_k(-) H_k^T - R_k)^{-1} \\ \mathbf{z}_k(+) &= \mathbf{z}_k(-) + K_k (\mathbf{y}_k - H_k \mathbf{z}_k(-)) \\ P_k(+) &= (I - K_k H_k) P_k(-) \end{aligned} \quad (\text{VI.1.14})$$

## 2. Rechenzeitoptimierung

Ansätze zur Optimierung von Matrixgleichungen bestehen darin, dass die beteiligten Matrizen in vielen Fällen über Nulleinträge verfügen. Überschreitet die Anzahl der Nulleinträge einen, je nach gewählter Optimierungsmethode, bestimmten Schwellenwert, ist es sinnvoll, diese Tatsache zur Rechenzeitoptimierung zu nutzen. Ein weiterer Effekt ist, dass bestimmte Teilmatrizen je nach Berechnungsformel wiederverwendet werden können. Dies führt zu weiteren Einsparungen im Rechenzeitbedarf. Die vorgestellten Methoden beinhalten neben der Blockmatrixzerlegung, Sparse Matrix Techniken und der Nutzung spezieller Matrizeneigenschaften auch eventuell mögliche Kombinationen dieser Ansätze. Kritiker mögen anmerken, dass moderne hardwarenahe Optimierungsansätze wie beispielsweise Verwendung von Vektorrechnern, Pipelining oder Parallelprozessierung nicht berücksichtigt wurden und die angeführten Ansätze somit technisch überholt sind. Zudem könnte die Effizienz aller Algorithmen durch Einführung dieser Methoden massiv gesteigert werden. Dem Autor ist dies sehr wohl bewusst. Ziel dieser Arbeit ist jedoch nicht die Erstellung einer Machbarkeitsstudie, sondern die Entwicklung eines operationellen Navigationssystems. Dieses muss nicht auf speziellen wissenschaftlichen Großrechnern, sondern auf allgemeinen, für die Luftfahrt zertifizierten, Avionikrechnern lauffähig sein. Deren Prozessoren verfügen meist nicht über die angesprochenen Hardwarelösungen. Aus diesem Grund wurden die hardwarenahen Optimierungsansätze bewusst weggelassen.

### 2.1 Blockmatrixzerlegung

Unter der Blockmatrixzerlegung versteht man die Zerlegung einer beliebigen Matrix  $A$  in Submatrizen  $A_{ij}$ .<sup>62</sup>

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.1})$$

Im weiteren Verlauf des jeweiligen Berechnungsalgorithmus werden alle Speicher- und Rechenoperationen auf Ebene der Submatrizen  $A_{ij}$  durchgeführt. Dabei erfolgt die Zerlegung durch geschickte Nutzung logischer Strukturen oder unbesetzter Matrixstellen. Einsparpotential ergibt sich durch entstehende Nullblöcke, die in den folgenden Berechnungen einfach weggelassen werden. Verwendung findet die Blockmatrixzerlegung bei komplexen unübersichtlichen Problemstellungen. Die Blockmatrixzerlegung erlaubt die Aufteilung des Gesamtproblems in einzelne Teilprobleme. Dadurch kann meist neben der Optimierung der Rechenzeit auch die Übersichtlichkeit und Beurteilung des Gesamtproblems verbessert werden. Ein weiterer Vorteil besteht in der Möglichkeit, bei geschickter Zerlegung des Gesamtproblems die Teilprobleme auch nacheinander lösen zu können. Ein klassisches Einsatzgebiet ist die Ausgleichsrechnung in der Geodäsie.

#### 2.1.1 Speichermethoden

Die Erläuterung der Speicherung erfolgt anhand der Beispielmatrix  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.2})$$

<sup>62</sup> Golub, Gene H. & van Loan, Charles F.; Matrix Computations – Second Edition, The John Hopkins University Press, Baltimore 1989, S.25

Zerlegen der Matrix  $A$  in besetzte Submatrizen und Nullmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & A_{13} \\ A_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{32} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.3})$$

Explizit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} && (\text{Diagonalmatrix}) \\ A_{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} && (\text{obere Dreiecksmatrix}) \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} && (\text{untere Dreiecksmatrix}) \\ A_{32} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} && (\text{vollbesetzte Matrix}) \end{aligned} \quad (\text{VI.2.4})$$

Die unbesetzten Nullblöcke werden nicht gespeichert. Eine eventuell vorhandene Struktur in den besetzten Submatrizen bleibt durch die Blockmatrixzerlegung noch ungenutzt.

## 2.1.2 Rechenmethoden

Ausgangspunkt sei folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.5})$$

Ansatz aller Rechenmethoden ist die Durchführung der Matrizenoperationen auf Ebene der Submatrizen. Die folgenden Methoden sind komplett ausformuliert. In der jeweiligen Anwendung müssen alle Operationen, die Nullmatrizen enthalten, zur Rechenzeitoptimierung weggelassen werden. In voller Berechnung bieten die Methoden kein Einsparpotential. Die Tatsache, dass obige Blockmatrixzerlegung nur von zweiter Dimension ist, spielt keine Rolle, da bei höherdimensionaler Zerlegung die Methoden nur mehrfach angewendet werden müssen. Zu beachten ist jedoch, dass die Dimensionen der jeweils beteiligten Submatrizen aufeinander abgestimmt sein müssen. Somit wird die allgemeine Matrizenaddition

$$A = B + C \quad (\text{VI.2.6})$$

unter Verwendung der Zerlegung aus Gleichung (VI.2.5) zu:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} + C_{11} & B_{12} + C_{12} \\ B_{21} + C_{21} & B_{22} + C_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.7})$$

Explizit ergibt sich für die Submatrizen der Ergebnismatrix  $A_{ij}$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11} + C_{11} \\ A_{12} &= B_{12} + C_{12} \\ A_{21} &= B_{21} + C_{21} \\ A_{22} &= B_{22} + C_{22} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.8})$$

Die allgemeine Matrizenmultiplikation

$$A = BC \quad (\text{VI.2.9})$$

wird zu:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21} & B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22} \\ B_{21}C_{11} + B_{22}C_{21} & B_{21}C_{12} + B_{22}C_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.10})$$

Ausformuliert lautet das Ergebnis auf Ebene der Submatrizen  $A_{ij}$ :

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21} \\ A_{12} &= B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22} \\ A_{21} &= B_{21}C_{11} + B_{22}C_{21} \\ A_{22} &= B_{21}C_{12} + B_{22}C_{22} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.11})$$

Die Transponierte einer Matrix

$$A = B^T \quad (\text{VI.2.12})$$

lautet:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} B_{11}^T & B_{21}^T \\ B_{12}^T & B_{22}^T \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.13})$$

Explizit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11}^T \\ A_{12} &= B_{21}^T \\ A_{21} &= B_{12}^T \\ A_{22} &= B_{22}^T \end{aligned} \quad (\text{VI.2.14})$$

Bei der Berechnung der Inversen einer Matrix auf Ebene der Submatrizen sind drei Formeln mit unterschiedlichen Randbedingungen gegeben.<sup>63</sup> Die Inverse einer Matrix

$$A = B^{-1} \quad (\text{VI.2.15})$$

berechnet sich nach

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} + B_{11}^{-1}B_{12}(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} & -B_{11}^{-1}B_{12}(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \\ -(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} & (B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.16})$$

unter der Voraussetzung, dass die Submatrix  $B_{11}$  nicht singulär ist. Ausformuliert lautet das Ergebnis:

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11}^{-1} + B_{11}^{-1}B_{12}(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} \\ A_{12} &= -B_{11}^{-1}B_{12}(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \\ A_{21} &= -(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} \\ A_{22} &= (B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.17})$$

Eine erste Vereinfachung der Beziehung (VI.2.16) lautet unter der Bedingung, dass die Submatrizen  $B_{11}$  und  $B_{22}$  nicht singulär sind:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} & B_{11}^{-1}B_{12}(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \\ B_{22}^{-1}B_{21}(B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} & (B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.18})$$

Explizit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} \\ A_{12} &= B_{11}^{-1}B_{12}(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \\ A_{21} &= B_{22}^{-1}B_{21}(B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} \\ A_{22} &= (B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.19})$$

<sup>63</sup> Henderson H.V. & Searle S.R.; On deriving the inverse of a sum of matrices, in SIAM Review Vol.23 No.1, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981, S.55

Eine weitere Vereinfachung von Gleichung (VI.2.18) erhält man unter der Annahme, dass alle Submatrizen  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  und  $B_{22}$  nicht singular sind.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} & (B_{21} - B_{22}B_{12}^{-1}B_{11})^{-1} \\ (B_{12} - B_{11}B_{21}^{-1}B_{22})^{-1} & (B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.20})$$

Die Submatrizen  $A_{ij}$  lauten somit:

$$\begin{array}{l} A_{11} = (B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} \\ A_{12} = (B_{21} - B_{22}B_{12}^{-1}B_{11})^{-1} \\ A_{21} = (B_{12} - B_{11}B_{21}^{-1}B_{22})^{-1} \\ A_{22} = (B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \end{array} \quad (\text{VI.2.21})$$

### 2.1.3 Bewertung

Eine Einschränkung in der Blockmatrixzerlegung ist die feste Matrizenstruktur, die nach anfänglicher Festlegung später, etwa durch sich ändernde Randbedingungen, nicht mehr geändert werden kann. Die Position der Nicht-Null-Elemente muss zudem einer gewissen Blockstruktur folgen. Für Matrizen mit verstreuten Einzelementen ist sie nicht geeignet. Spezielle Eigenschaften der entstehenden Submatrizen werden zudem nicht berücksichtigt. Der ursprüngliche Berechnungsalgorithmus muss komplett zerlegt und an die Submatrizenstruktur angepasst werden. Die komplexe Zerlegung kann meist auch später nicht anderweitig wiederverwendet werden. Es existieren fertige Rechenmethoden für alle Grundrechenarten. Äußerst vorteilhaft ist, dass kein Overhead für Nicht-Null-Elemente auftritt, und somit die Blockmatrixzerlegung per Definition immer die rechen- und speicherplatztechnisch günstigste Strukturoptimierungsmethode darstellt. Die Operatoren der Grundrechenarten müssen nicht verändert werden.

## 2.2 Nutzung von Matrizeneigenschaften

Neben der Blockmatrixzerlegung besteht die Möglichkeit, spezielle Eigenschaften oder Strukturen von Matrizen direkt auszunutzen. Solche Matrizen sind beispielsweise Bandmatrizen:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{m-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{mn-1} & b_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.22})$$

Diagonalmatrizen:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.23})$$

oder Dreiecksmatrizen:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.24})$$

Diese Matrizen zeichnen sich alle dadurch aus, dass sie größtenteils unbesetzt sind und die Anordnung der besetzten Elemente einer festen Struktur folgt.

### 2.2.1 Speichermethoden

Bandmatrizen können generell in Vektoren abgespeichert werden. Die Anzahl der benötigten Vektoren ergibt sich aus der Bandbreite der Matrix. Für jede besetzte Diagonale benötigt man einen Vektor. Die Anordnung der Vektoren wird

über deren Abstand zur Hauptdiagonale angegeben. So lautet das Speicherschemata für die allgemeine Bandmatrix aus Gleichung (VI.2.22):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{-1} &= (b_{21} \quad b_{32} \quad \dots \quad b_{m-1}) \\ \mathbf{b}_0 &= (b_{11} \quad b_{22} \quad \dots \quad b_{m-1n-1} \quad b_{mn}) \\ \mathbf{b}_{+1} &= (b_{12} \quad b_{23} \quad \dots \quad b_{m-1n}) \end{aligned} \quad (\text{VI.2.25})$$

Analog lautet das Speicherschema für Diagonalmatrizen aus (VI.2.23):

$$\mathbf{d} = (d_{11} \quad d_{22} \quad \dots \quad d_{m-1n-1} \quad d_{mn}) \quad (\text{VI.2.26})$$

Dreiecksmatrizen können in einem sich verkleinernden Array abgelegt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (u_{11} \quad u_{12} \quad \dots \quad u_{1n-1} \quad u_{1n}) \\ \mathbf{u}_2 &= (u_{22} \quad \dots \quad u_{2n-1} \quad u_{2n}) \\ &\quad \vdots \\ \mathbf{u}_{m-1} &= (u_{m-1n-1} \quad u_{m-1n}) \\ \mathbf{u}_m &= (u_{mn}) \end{aligned} \quad (\text{VI.2.27})$$

## 2.2.2 Rechenmethoden

In diesem Abschnitt werden Algorithmen zur Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation für Dreiecks- und Diagonalmatrizen entwickelt und deren Einsparpotential im Vergleich zur herkömmlichen Berechnung bei voller Besetzung dargestellt. Die präsentierten Berechnungsformeln erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit, da sich eine Vielzahl möglicher Kombinationen ergeben, die alle über eigene optimierte Algorithmen verfügen. Ziel ist es anhand ausgewählter Beispiele das generelle Optimierungspotential zu zeigen. Die Algorithmen lassen sich jedoch sehr einfach auf den jeweiligen Spezialfall umstellen. Ausgehend von der Matrizenaddition

$$A = B + C \quad (\text{VI.2.28})$$

lautet der herkömmliche Additionsalgorithmus bei vollbesetzten Matrizen

$$\begin{aligned} m &= \text{rows}(B) \\ n &= \text{columns}(C) \\ \text{for } i &= 1:1:m \\ &\quad \text{for } j = 1:1:n \\ &\quad\quad A(i, j) = B(i, j) + C(i, j) \\ &\quad \text{end} \\ \text{end} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.29})$$

und benötigt  $nm$  Rechenoperationen. Bei Addition einer Diagonalmatrix  $D$  mit einer vollbesetzten Matrix  $F$

$$A = F + D \quad (\text{VI.2.30})$$

ergibt sich die Berechnungsformel nach

$$\begin{aligned} A &= F \\ \text{for } i &= 1:1:m \\ &\quad A(i, i) = A(i, i) + d(i) \\ \text{end} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.31})$$

und es werden  $m$  Rechenoperationen benötigt. Die Addition einer oberen Dreiecksmatrix  $U$  mit einer vollbesetzten Matrix  $F$

$$A = F + U \quad (\text{VI.2.32})$$

wird nach folgendem Algorithmus berechnet:

$$\begin{aligned} A &= F \\ \text{for } i &= 1:1:m \\ &\quad \text{for } j = i:1:n \\ &\quad\quad A(i, j) = A(i, j) + U(i, j) \\ &\quad \text{end} \\ \text{end} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.33})$$

Der Rechenbedarf beträgt  $nm/2$  Rechenoperationen. Das Einsparpotential der Matrizenaddition ist  $1/n$ , falls eine der Matrizen eine Diagonalmatrix ist, und  $1/2$ , falls eine Dreiecksmatrix beteiligt ist.

Der Algorithmus der herkömmlichen Matrizenmultiplikation

$$A = BC \quad (\text{VI.2.34})$$

lautet

```

m = rows(B)
n = columns(C)
l = columns(B)
for i = 1:1:m
    for j = 1:1:n
        sum = 0
        for k = 1:1:l
            sum = sum + B(i,k) · C(k,j)
        end
        A(i,j) = sum
    end
end
end

```

(VI.2.35)

und benötigt  $2nml$  Rechenoperationen. Die Multiplikation einer Diagonalmatrix  $D$  mit einer vollbesetzten Matrix  $F$

$$A = FD \quad (\text{VI.2.36})$$

führt zu

```

m = rows(F)
n = length(d)
for i = 1:1:m
    for j = 1:1:n
        A(i,j) = F(i,j) · d(j)
    end
end
end

```

(VI.2.37)

und benötigt nur  $nm$  Rechenoperationen. Die Multiplikation einer oberen Dreiecksmatrix  $U$  mit einer vollbesetzten Matrix  $F$

$$A = FU \quad (\text{VI.2.38})$$

heißt demnach

```

m = rows(F)
n = columns(U)
l = columns(F)
for i = 1:1:m
    for j = 1:1:n
        sum = 0
        for k = 1:1:j
            sum = sum + F(i,k) · U(k,j)
        end
        A(i,j) = sum
    end
end
end

```

(VI.2.39)

und benötigt  $nml$  Rechenoperationen. Dies führt zu einem Einsparpotential von  $1/2m$ , falls eine der beteiligten Matrizen eine Diagonalmatrix, und  $1/2$ , falls eine der Matrizen eine Dreiecksmatrix ist.

### 2.2.3 Bewertung

Diese Nutzung von Matrizeneigenschaften als Optimierungsmethode kann nur bei Vorliegen von Matrizen mit definierten Eigenschaften angewendet werden. Die Position der Nicht-Null-Elemente ist somit nicht beliebig. Vorteilhaft ist, dass die ursprünglichen Berechnungsformeln erhalten bleiben. Aufwändig bleibt jedoch die Definition optimierter Rechenroutinen für den jeweiligen Spezialfall. Fertige Routinen existieren nicht. Aus diesen Gründen ist diese Optimierungsmethode nur für Berechnungen mit sehr großen und einfach strukturierten Matrizen oder mit Diagonalmatrizen zu empfehlen. Vor allem bei den Diagonalmatrizen erhält man ein enormes Einsparpotential, da die Funktion des Rechenaufwands um eine Potenz gesenkt werden kann.

## 2.3 Sparse Matrix Techniken

In der Numerik versteht man unter einer schwach besetzten (sparse) Matrix eine Matrix, die größtenteils mit Nullen besetzt ist. Sparse Matrix Techniken lassen sich in der Kombinatorik oder in Anwendungsbereichen wie beispielsweise der Netzwerktheorie mit einer geringen Dichte an signifikanten Daten optimal einsetzen. Die Methoden sind zudem hervorragend geeignet zur Prozessierung großer Datenmengen. Diese treten vor allem in den Ingenieurwissenschaften bei der Lösung linearer Systeme auf. Zur Speicherung und Verarbeitung dabei vorkommender überdimensionierter Matrizen ist es notwendig, die bestehenden Standardalgorithmen zu modifizieren, um die Vorteile der schwachen Besetzung zu nutzen. Teilweise ist die Berechnung mit den herkömmlichen Algorithmen wegen der Größe der Matrizen gar nicht möglich. Auf Grund der wenigen Einträge lassen sich diese Matrizen zur Speicherplatzoptimierung auch hervorragend komprimieren. Der große Vorteil der Sparse Matrix Techniken im Gegensatz zu der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Blockmatrixzerlegung besteht in der Tatsache, dass die Position der Nicht-Null Elemente nicht vorab fest definiert sein muss. Dies führt zu großer Variabilität der Einsatzgebiete.

### 2.3.1 Speichermethoden

Es existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Möglichkeiten, dünn besetzte Matrizen effizient zu speichern. Der Vorteil all dieser Methoden besteht in der Reduzierung des benutzten Speichers. Dabei ist zwischen dem so genannten primären Speicher, in dem alle von Null verschiedenen Matrizenelemente gespeichert werden, und dem Overhead, in dem sich die Positionsinformation dieser Nicht-Null-Elemente verbirgt, zu unterscheiden. Die Nicht-Null-Elemente werden meist in einem eindimensionalen Feld gespeichert, während die Positionsinformation je nach Abspeicherungsmethode unterschiedlich ausfällt. Dies führt zu einem generellen Problem aller Methoden: Je anspruchsvoller die Speichermethode ausfällt, desto weniger Null-Elemente müssen gespeichert werden und desto geringer fällt der benötigte primäre Speicher aus. Im Gegenzug erhöht sich jedoch die Indexinformation der Nicht-Null-Elemente und führt zu einer Vergrößerung des benutzten Overheads. Deshalb ist grundsätzlich die Minimierung des Gesamtspeichers anzustreben. Im Folgenden werden fünf grundlegende Abspeicherungsmethoden am Beispiel der Matrix  $A$  vorgestellt.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.40})$$

Zum Vergleich sei die Speichermethode für vollbesetzte Matrizen dargestellt. Dabei werden alle Elemente der Matrix  $A$  in einem Vektor  $val$  der Länge  $nm$  gespeichert.  $m$  und  $n$  bestimmen dabei die Anzahl der Zeilen bzw. Spalten der Matrix  $A$ . Es muss zudem festgelegt sein, ob dieser Vektor nach Reihen oder Spalten sortiert ist. In den zusätzlichen Variablen  $m$  und  $n$  wird die Größe der Matrix  $A$  gespeichert.

$$\begin{aligned} m &= 5 \\ n &= 5 \\ val &= (0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 3 \ 0 \ 4 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 7 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8 \ 0 \ 9 \ 10) \end{aligned} \quad (\text{VI.2.41})$$

Diese Speichermethode benötigt Speicherplatz für  $nm+2$  Elemente. Die Tatsache unterschiedlicher Datentypen soll hier vernachlässigt werden. Beim Koordinatenschema (coordinate scheme – CS) handelt es sich um die intuitivste Art, schwach besetzte Matrizen zu speichern. Die Nicht-Null Elemente werden in einem Vektor  $val$  der Länge  $l$  abgelegt, wobei  $l$  die Anzahl der Nicht-Null-Elemente angibt. Im Vektor  $row$  werden die Zeilen und im Vektor  $col$  die Spalten der korrespondierenden Nicht-Null-Elemente abgelegt.  $row$  und  $col$  besitzen somit ebenfalls die Länge  $l$ . Das entstehende Feld benötigt relativ viel Speicherplatz, ist aber dafür am übersichtlichsten.

$$\begin{aligned} val &= (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10) \\ row &= (1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5) \\ col &= (2 \ 4 \ 1 \ 3 \ 4 \ 3 \ 1 \ 2 \ 4 \ 5) \end{aligned} \quad (\text{VI.2.42})$$

Obiges Feld lässt sich nach den Vektoren  $row$  oder  $col$  sortieren.

$$\begin{aligned} val &= (3 \ 7 \ 1 \ 8 \ 4 \ 6 \ 2 \ 5 \ 9 \ 10) \\ row &= (2 \ 4 \ 1 \ 5 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 5 \ 5) \\ col &= (1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 5) \end{aligned} \quad (\text{VI.2.43})$$

Im Vergleich zu den restlichen Speichermethoden ist das Koordinatenschema aber das Ineffizienteste. Es soll hier nur präsentiert werden, da die Behandlung von schwach besetzten Matrizen im Programmpaket MATLAB auf dieser Methode beruht. Im Koordinatenschema werden  $3l$  Speicherplätze benötigt. In Gleichung (VI.2.42) lässt sich leicht erkennen, dass im Vektor  $row$  eine Abfolge gleicher Werte in aufsteigender Reihenfolge vorliegt. Die kompakte Zeilenpackung (compressed row storage – CRS) nutzt dies für weitere Speicherplatzeinsparungen aus. So wird der Vektor  $row$  aus (VI.2.42) durch einen Vektor  $row\_ptr$  ersetzt, in dem sich nicht mehr die aktuelle Zeile verbirgt, sondern nur die Position des Nicht-Null-Elements, welches wieder eine neue Zeile beginnt. Der entstehende Vorteil

liegt in der Verkleinerung der Länge des Vektors  $row\_ptr$ , der nun nur noch  $m+1$  anstatt  $l$  Felder besitzt.  $m$  stellt dabei die Anzahl der Zeilen der Ausgangsmatrix  $A$  dar.

$$\begin{aligned} val &= (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10) \\ col &= (2 \ 4 \ 1 \ 3 \ 4 \ 3 \ 1 \ 2 \ 4 \ 5) \\ row\_ptr &= (1 \ 3 \ 6 \ 7 \ 8 \ 11) \end{aligned} \quad (VI.2.44)$$

Aus Gründen der Datenverarbeitung in der Matrizenmultiplikation ist das letzte (zusätzliche) Element immer durch den Wert  $l+1$  besetzt. In der kompakten Zeilenpackung müssen  $2l+m+1$  Elemente gespeichert werden. Obige Speichermethode lässt sich natürlich analog auf Spalten anwenden und wird kompakte Spaltenpackung (compressed column storage – CCS) genannt. Dabei ist das nach  $col$  sortierte Feld aus Gleichung (VI.2.43) zu verwenden. Nun wird nicht der Vektor  $row$  in einen Zeiger verwandelt, sondern der Vektor  $col$  in den Vektor  $col\_ptr$  der Länge  $n+1$ , wobei  $n$  die Anzahl der Spalten der Matrix  $A$  angibt.

$$\begin{aligned} val &= (3 \ 7 \ 1 \ 8 \ 4 \ 6 \ 2 \ 5 \ 9 \ 10) \\ row &= (2 \ 4 \ 1 \ 5 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 5 \ 5) \\ col\_ptr &= (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 10 \ 11) \end{aligned} \quad (VI.2.45)$$

Auch hier muss analog zur kompakten Zeilenpackung wieder ein zusätzliches Element mit dem Wert  $l+1$  angehängt werden. Die kompakte Spaltenpackung benötigt Speicherplatz für  $2l+n+1$  Elemente. Bei den Formaten der kompakten Zeilen- bzw. Spaltenpackung lassen sich alle Nicht-Null Elemente nur über indirekte Adressierung verarbeiten. Es kann jedoch durchaus von Vorteil sein, die Diagonalelemente direkt ansprechen zu können. Dies ist in der Speichermethode der modifizierten kompakten Zeilenpackung (modified CRS) realisiert. Der Vektor  $val$  bleibt bestehen, jedoch stehen die Diagonalelemente vorneweg, nach ihnen bleibt das  $(m+1)$ ste Feld unbelegt und im Anschluss kommen die Nicht-Null-Elemente ohne die Diagonalelemente. Die Indexinformation der Vektoren  $col$  und  $row\_ptr$  wird neu organisiert und in einem Vektor  $col\_ind$  vereinigt. Dabei sind die ersten  $(m+1)$  Felder durch die Werte des Vektors  $row\_ptr$  belegt und die restlichen durch die Werte des Vektors  $col$ . Diese Werte beziehen sich aber diesmal nur auf die Nicht-Null-Elemente, die nicht auf der Diagonale liegen. Es ergibt sich somit ein Unterschied des Vektors  $col\_ind$  im Vergleich zu den Vektoren  $col$  und  $row\_ptr$  aus Gleichung (VI.2.44).

$$\begin{aligned} val &= (0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 10 \ X \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 9) \\ col\_ind &= (1 \ 3 \ 6 \ 6 \ 7 \ 11 \ 2 \ 4 \ 1 \ 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 4) \end{aligned} \quad (VI.2.46)$$

Der Speicherbedarf beträgt je nach Anzahl der Nullen auf der Hauptdiagonale maximal  $2m+2+2l$ . Analog lautet die modifizierte kompakte Spaltenpackung (modified CCS)

$$\begin{aligned} val &= (0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 10 \ X \ 3 \ 7 \ 1 \ 8 \ 4 \ 2 \ 5 \ 9) \\ row\_ind &= (1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 11 \ 11 \ 2 \ 4 \ 1 \ 5 \ 2 \ 1 \ 2 \ 5) \end{aligned} \quad (VI.2.47)$$

Der Speicherbedarf dieser Methode beträgt  $2n+2+2l$ . Zeilen- und Spaltenpackungen unterscheiden sich im Speicherbedarf somit prinzipiell nicht. Für symmetrische Matrizen besteht kein Unterschied im Speicherplatzbedarf. Für unsymmetrische Matrizen mit mehr Spalten wie Zeilen ist die Zeilenpackung günstiger und umgekehrt. Der Unterschied ist jedoch marginal. Generell sind beide besser als das Koordinatenschema. Die modifizierte Zeilen- bzw. Spaltenpackung ist für Spezialanwendungen mit optimiertem Zugriff auf die Hauptdiagonale interessant, aber immer speicherplatztechnisch ungünstiger als die nicht modifizierten Varianten. Es lassen sich noch eine Vielzahl weiterer Speichermethoden in der Literatur finden, die alle für bestimmte Anwendungen optimiert sind. Unter anderem sind dies die Speicherung über verkettete Listen, falls eine variable Speicherung nötig ist, oder die kompakte Diagonalspeicherung (compressed diagonal storage – CDS) für die Verarbeitung von Bandmatrizen. Für die detaillierte Beschreibung dieser und weiterer Speichermethoden wird auf die Literatur über Sparse Matrix Techniken verwiesen.<sup>64</sup>

### 2.3.2 Rechenmethoden

Hierbei ist zunächst festzustellen, dass fertige Algorithmen nur für die Matrix-Vektor-Multiplikation existieren. Dies hat historische Gründe, da Sparse Matrix Techniken ursprünglich nur für die Lösung überdimensionierter linearer Gleichungssysteme verwendet wurden. In den letzten Jahren fanden die Sparse Matrix Techniken jedoch auch Einzug in allgemeine Anwendungen. Nichtsdestotrotz existieren auch heute neben der inzwischen teilweise entwickelten Matrix-Matrix-Multiplikation keine weiteren fertigen Routinen für beispielsweise die Inversion. In den bestehenden Multiplikationsalgorithmen muss zudem das Format des Ergebnisvektors noch speziell betrachtet werden. Das Format in der Matrix-Vektor-Multiplikation spielt hierbei meist eine untergeordnete Rolle und das Ergebnis kann deshalb normalerweise als herkömmlicher Vektor angegeben werden. Problematisch ist jedoch das Format der entstehenden Ergebnismatrix der Matrix-Matrix-Multiplikation. Dieses muss unbedingt wieder im gleichen Speicherformat wie die

<sup>64</sup> Davies, Timothy A.; Direct Methods for Sparse Linear Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 2006

Ausgangsmatrizen vorliegen, um eine direkte Weiterverarbeitung zu gewährleisten. Entsprechende fertige Matrix-Matrix-Multiplikationsalgorithmen sucht man jedoch überraschenderweise in der gängigen Literatur vergebens. Ausgangspunkt bildet die allgemeine Matrix-Vektor-Multiplikation.

$$y = Ax \quad (\text{VI.2.48})$$

Die benötigten Algorithmen sind in der Standardliteratur oder entsprechenden Downloadbibliotheken frei erhältlich. Zu beachten ist hierbei jedoch, dass das Format des Ergebnisvektors meistens in herkömmlicher Weise ausgegeben wird. Im Folgenden wird beispielhaft der Matrix-Vektor-Multiplikationsalgorithmus für die kompakte Zeilenpackung (compressed row storage – CS) angegeben.

```

for i = 1:1:n
    y(i) = 0
    for j = A.row_ptr(i):1:A.row_ptr(i+1)-1
        y(i) = y(i) + A.val(j) * x(A.col_ind(j))
    end
end

```

(VI.2.49)

Die Multiplikationsalgorithmen für die restlichen Speicher Methoden lassen sich auf ähnliche Weise herleiten und sollen hier nicht präsentiert werden. Für die Matrix-Matrix-Multiplikation schwach besetzter Matrizen lassen sich keine standardisierten Algorithmen in der Literatur finden. Einige selbstentwickelte Algorithmen, die jedoch auf ganz spezielle Probleme zugeschnitten wurden, sind verfügbar. Folgender Matrix-Matrix-Multiplikationsalgorithmus wurde aus einem solchen frei zugänglichen Algorithmus speziell für das Koordinatenschema abgeleitet.

```

count = 0
sort = 0
row = 0
for i = 1:1:length(A.row)
    for j = 1:1:length(B.column)
        if A.column(i) == B.row(j)
            count = count + 1
            C.row(count) = A.row(i)
            C.column(count) = B.column(j)
            C.value(count) = A.value(i) * B.value(j)
            if row ~= A.row(i)
                sort = count
                row = A.row(i)
            else
                for k = sort:1:(count-1)
                    if C.column(count) == C.column(k)
                        C.value(k) = C.value(k) + C.value(count)
                        count = count - 1
                        break
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
C.row = C.row(1:count)
C.column = C.column(1:count)
C.value = C.value(1:count)

```

(VI.2.50)

Zu beachten ist hierbei, dass die Ergebnismatrix ebenfalls wieder im Koordinatenschema ausgeworfen wird.

### 2.3.3 Bewertung

Problematisch bei Verwendung von Sparse Matrix Techniken ist das Auftreten eines gewissen Overheads für jedes Nicht-Null-Element. Deshalb ist die Verwendung erst ab circa 90 Prozent Null-Elementen in einer Matrix zu empfehlen. Zudem ist der Berechnungsalgorithmus für die Matrix-Vektor-Multiplikation und speziell für die Matrix-Matrix-Multiplikation sehr komplex. Fertige Routinen für weitere Grundrechenarten mit Matrizen, wie zum Beispiel die Inversion, fehlen gänzlich. Vorteilhaft ist jedoch, dass an den ursprünglichen Berechnungsformeln nichts geändert werden muss, da das gesamte Know-how in den Rechenoperatoren steckt. Die Position und Anordnung der Nicht-Null-Elemente ist beliebig, was vor allem für Probleme mit sich ändernden Ausgangsbedingungen von Vorteil ist.

## 2.4 Kombinierte Methoden

In der Praxis genügen die auftretenden Matrizen oftmals nicht den speziellen Anforderungen obiger drei Methoden. Deshalb kann keine Optimierungsmethode direkt empfohlen werden. Um das volle Einsparpotential nutzen zu können, ist es deshalb oftmals sinnvoll, die vorgestellten Methoden miteinander zu kombinieren. Ziel ist es, die jeweiligen Einschränkungen der beteiligten Optimierungsmethoden durch geschickte Verknüpfung zu eliminieren, ohne dabei jedoch die jeweiligen Vorteile komplett zu verlieren. Innerhalb dieses Kapitels sollen beispielhaft zwei mögliche Kombinationen präsentiert werden.

### 2.4.1 Kombination Blockstruktur

Ausgangspunkt dieser Kombinationsmethode sollen Matrizen sein, die eine feste Blockstruktur aufweisen. Zusätzlich verfügen die besetzten Submatrizen noch über definierte Strukturen. Die Optimierungsmethode zur Nutzung der Matrizeneigenschaften lässt sich in diesem Fall zur Nutzung des gesamten Einsparpotentials mit der Blockmatrixzerlegung kombinieren. So erfolgt zuerst die herkömmliche Blockmatrixzerlegung nach Kapitel 2.1. Nach der Aufspaltung der ursprünglichen Berechnungsformel in Submatrizen werden deren Eigenschaften analysiert. Treten an irgendeiner Stelle spezielle Matrizen, wie in Kapitel 2.2 beschrieben, auf, so wird der Berechnungsalgorithmus an dieser Stelle zur weiteren Rechenzeitoptimierung angepasst. Greift man die Beispielmatrix aus Gleichung (VI.2.2) erneut auf,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.51})$$

so erkennt man in den entstehenden Submatrizen  $A_{ij}$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A_{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ A_{32} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.52})$$

nutzbare Strukturen wie Diagonal- oder Dreiecksstruktur. Wie schon erwähnt bieten vor allem auftretende Diagonalstrukturen ein optimales Einsparpotential. Diese Substrukturen würden bei der reinen Blockmatrixzerlegung ungenutzt bleiben, was vor allem bei sehr großen Blöcken unvorteilhaft ist. Die Vor- und Nachteile dieser Methode können analog zur Blockmatrixzerlegung beschrieben werden. Die Position der Nicht-Null-Elemente ist nicht beliebig variierbar und eine Blockstruktur muss dominieren. Der Vorteil des nicht existierenden Overheads bleibt nicht bestehen, da die Rechenoperatoren an die jeweilige Submatrizenstruktur angepasst werden müssen. Dafür erhält man im Gegenzug jedoch das volle Einsparpotential durch alle Nicht-Null-Elemente.

### 2.4.2 Kombination Sparseblock

Als Vorgabe für die Kombination von Sparse Matrix Techniken mit der Blockmatrixzerlegung soll eine Matrix dienen, in der die Nicht-Null-Elemente in Blöcken angeordnet sind; die Position dieser Blöcke soll allerdings beliebig sein. Die Speicherung erfolgt in zwei Schritten: Zuerst wird die Gesamtmatrix, wie bei der Blockmatrixzerlegung nach Kapitel 2.1, in Submatrizen zerlegt. Die Position der besetzten Submatrizen wird jedoch im Gegensatz zur

Blockmatrixzerlegung nicht starr festgelegt, sondern kann flexibel über die Sparse Matrix Techniken aus Kapitel 2.3 bestimmt werden. Als zu speicherndes Element dient hierbei ein Zeiger auf die jeweilige Submatrix. Die Erläuterung erfolgt wiederum anhand der Beispielmatrix aus Gleichung (VI.2.2).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.53})$$

Zerlegung in Submatrizen führt zu:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & A_{13} \\ A_{21} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & A_{32} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.54})$$

Unter Einführung von Zeigern auf die besetzten Submatrizen und Abspeicherung im Koordinatenschema der Sparse Matrix Techniken lautet das Ergebnis.

$$\begin{aligned} val &= (1 \ 1 \ 2 \ 3) \\ row &= (1 \ 3 \ 1 \ 2) \\ col &= (*A_{11} \ *A_{13} \ *A_{21} \ *A_{32}) \end{aligned} \quad (\text{VI.2.55})$$

Alternativ ist auch jedes andere Speicherschema nach Kapitel 2.3.1 möglich. Auf diese Art und Weise lässt sich der Overhead der Sparse Matrix Techniken drastisch reduzieren, da dieser nicht mehr für jedes einzelne Nicht-Null-Element, sondern nur noch für besetzte Submatrizen auftritt. Zudem ist die Position der besetzten Matrizen beliebig veränderbar. Einzige Schwierigkeit besteht in der Beachtung der vorab durchgeführten Blockmatrixzerlegung. Die Dimensionen der dort festgelegten Submatrizen dürfen im Nachhinein nicht mehr verändert werden. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, bei der vorhergehenden Blockmatrixzerlegung etwas kleinlich zu sein, um mehr Subblöcke zu erhalten. Dies schafft bei späteren Veränderungen mehr Flexibilität. Für diese Kombination können bestehende Rechenroutinen direkt von den Sparse Matrix Techniken übernommen werden. Diese müssen lediglich für den Umgang mit Zeigern erweitert werden. Fertige Routinen existieren auch hier analog zu den Sparse Matrix Techniken nur für die Multiplikation. Zu beachten bleiben jedoch die vorab bestimmten Dimensionen der Submatrizen. Diese müssen bei den beiden zu multiplizierenden Matrizen konsistent aufeinander abgestimmt sein. Nachteile dieser Kombination ergeben sich im äußerst komplexen Berechnungsalgorithmus. Die Nicht-Null-Elemente müssen in Blöcken angeordnet sein, auch wenn deren Position beliebig ist. Für fertige Algorithmen gelten dieselben Einschränkungen wie für Sparse Matrix Techniken. Der entstehende Overhead in der Speicherung bleibt vernachlässigbar klein im Vergleich zu den Sparse Matrix Techniken. Der große Vorteil besteht in der universellen Variabilität der Anwendungen und einer einfachen Umsetzung des ursprünglichen Berechnungsalgorithmus, da das Know-how wiederum in den Rechenoperatoren steckt.

### 3. Anwendung der Rechenzeitoptimierung

Ausgangspunkt bleibt die Tatsache, dass die Transitionsmatrizen der Kalmanprädiktion und die Beobachtungsmatrix der Kalmankorrektion nur schwach besetzt sind. Grund hierfür ist die Unabhängigkeit der Sensorfehler zum einen im dynamischen Modell von allen anderen Zustandgrößen und zum anderen im Beobachtungsmodell von den Beobachtungen. Als Hinweis sei noch gesagt, dass sich eine Vergrößerung des Zustandsvektors eigentlich nur auf die Submatrizen der Sensorfehler auswirkt. Diese sind zusätzlich auf Grund der Modellierung der Sensorfehler als Gauß-Markov Prozesse 1. Ordnung nur Diagonalmatrizen. Alle anderen Transitionsmatrizen sind, was ihre Größe betrifft, vom Sensorfehlermodell weitestgehend unabhängig. Das dynamische Modell kann folglich gedanklich in zwei Teilbereiche untergliedert werden: Zum einen in die Berechnung der Navigationsgrößen, deren Berechnung ähnlich aufwändig wie beim CKF, dafür aber fast unabhängig von der Komplexität des zu Grunde gelegten Sensorfehlermodells ist, und zum anderen in die Berechnung der Sensorfehlergrößen der verwendeten Sensoren. Die hierfür benötigte Rechenleistung wächst aus obigen Gründen jedoch nur in der zweiten Potenz abhängig von der Anzahl der entsprechenden Fehlerzustände. Hier ist der Hauptansatz für eine Rechenzeitoptimierung zu suchen. Zur Wiederholung wird nochmals die Matrizenstruktur des zu Grunde gelegten Navigationsmodells mit der Lage der Nullmatrizen aus Abschnitt IV dargestellt. Die Fehler des Erdschwerermodells werden im weiteren Verlauf wie Beschleunigungsmessfehler behandelt, da sich beide auf dieselben Größen auswirken und somit eine weitere Zersplitterung vermieden wird. Die Empfängeruhrfehler werden mit der barometrischen Höhendifferenz in einem Submatrizenblock zusammengefasst. Diese Maßnahmen haben nur einen geringen Einfluss auf das gesamte Optimierungspotential, vereinfachen die folgende Rechenzeitoptimierung jedoch enorm.

Transitionsmatrix der Zustände:

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} \Phi_k^{nn} & \Phi_k^{ns} \\ \mathbf{0} & \Phi_k^{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_k^{pp} & \Phi_k^{pv} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.1})$$

Transitionsmatrix des Sensorrauschens:

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Gamma_k^{ni} \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.2})$$

Beobachtungsmatrix bei einer loosely coupling Integrationsarchitektur mit Pseudorange-, Rangerate- und barometrischen Höhenbeobachtungen:

$$H_k = \begin{pmatrix} H_k^{PRp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_k^{PRc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.3})$$

Zudem laufen in modernen Navigationssystemen die Kalmanprädiktion auf einer Frequenz von etwa 5 bis 25 Hertz und die Kalmankorrektur je nach GNSS-Empfänger auf einer Frequenz zwischen 1 und 10 Hertz. Das bedeutet, dass für einen kompletten Zyklus etwa zwei bis fünf Kalmanprädiktionen und nur eine Kalmankorrektur gerechnet werden müssen. Für den gesamten Algorithmus ergibt sich somit ein enormes Einsparpotential, da vor allem in der Kalmanprädiktion auf Grund der schwachen Besetzung der Transitionsmatrizen aus (VI.3.1) und (VI.3.2) ein Großteil der Einsparungen realisiert werden kann. Die Möglichkeiten zur Vereinfachung der Kalmankorrektur wegen der Struktur der Beobachtungsmatrix aus (VI.3.3) fallen dagegen weniger ins Gewicht. Auf Grund der Zusammensetzung der beteiligten Matrizen wird als Optimierungsvariante die kombinierte Methode Blockstruktur aus Kapitel 2.4.1 dieses Abschnitts gewählt. Vergleicht man die Matrizenstruktur mit den Optimalanforderungen dieser Methode, so ergeben sich im Vergleich zu den restlichen Ansätzen die meisten Übereinstimmungen. Die Idee der Anwendung einer Blockmatrixzerlegung auf den Kalmanfilter findet sich erstmals bei S.F. Schmidt.<sup>65</sup> Dieser verwendete den Ansatz jedoch, im Gegensatz zu dieser Arbeit, zur Herleitung eines suboptimalen Filters. Im Folgenden werden die Kalmanfiltergleichungen auf Matrixebene optimiert. Eine ausformulierte Darstellung aller Einzelgleichungen ist in einem Template in Anhang A dieses Abschnitts gegeben.

<sup>65</sup> Schmidt, S.F.; Application of State Space Methods to Navigation Problems, in Leondes, C.T. (Ed.); Advances in Control Systems Vol.3, Academic Press, New York 1966

### 3.1 Kalmanprädiktion

Der Zustandsvektor besteht aus den Größen der Navigationsstörungen und der zu schätzenden Sensorfehlern.

$$\mathbf{z}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^n \\ \mathbf{z}_k^s \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Navigationszustände } (n) \\ \text{Sensorfehler } (s) \end{array} \quad (\text{VI.3.4})$$

Auf Grund unterschiedlicher mathematischer Beziehungen müssen diese Subvektoren weiter unterteilt werden, um ein optimales Einsparungsverhältnis zu erzielen. Es ergeben sich für den Zustandsvektor der Navigationsstörungen die drei Zustandsvektoren der Positions-, der Geschwindigkeits- und der Orientierungsstörungen. Der Zustandsvektor der Sensorfehler besteht aus den drei Zustandsvektoren der Empfängeruhr- & barometrischen Höhendifferenzfehler, der Kreisfehler und der Beschleunigungsmesser- & Erdschweremodellfehler.

$$\mathbf{z}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^p \\ \mathbf{z}_k^v \\ \mathbf{z}_k^r \\ \mathbf{z}_k^c \\ \mathbf{z}_k^g \\ \mathbf{z}_k^a \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Position } (p) \\ \text{Geschwindigkeit } (v) \\ \text{Orientierung } (r) \\ \text{Empfängeruhr- \& barometrischer Höhendifferenzfehler } (c) \\ \text{Kreisfehler } (g) \\ \text{Beschleunigungsmesser- \& Erdschweremodellfehler } (a) \end{array} \quad (\text{VI.3.5})$$

Beim barometrischen Höhendifferenzfehler handelt es sich genau genommen nicht um einen Sensorfehler, sondern um eine Navigationsstörung. Aus Optimierungsgründen wird er jedoch in der Blockzerlegung bei den Empfängeruhrfehlern mit berücksichtigt. Der Vektor der Eingangsgrößen unterteilt sich folgendermaßen:

$$\mathbf{s}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_k^s \\ \mathbf{s}_k^i \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Sensorfehler } (s) \\ \text{inertiale Messwerte } (i) \end{array} \quad (\text{VI.3.6})$$

Eine weitere Unterteilung führt zu:

$$\mathbf{s}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_k^c \\ \mathbf{s}_k^g \\ \mathbf{s}_k^a \\ \mathbf{s}_k^\omega \\ \mathbf{s}_k^f \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Empfängeruhr- \& barometrischer Höhendifferenzfehler } (c) \\ \text{Kreisfehler } (g) \\ \text{Beschleunigungsmesser- \& Erdschweremodellfehler } (a) \\ \text{Winkelgeschwindigkeit } (\omega) \\ \text{Beschleunigung } (f) \end{array} \quad (\text{VI.3.7})$$

Bei den Größen im Eingangsvektor handelt es sich lediglich um mittelwertfreies weißes Rauschen. Somit wird dieser Vektor in der Zustandsschätzung nicht benötigt. Die Übernahme obiger Zerlegung des Zustandsvektors führt zu folgender Blockmatrixzerlegung der Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{P}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_k^{nn} & \mathbf{P}_k^{ns} \\ \mathbf{P}_k^{sn} & \mathbf{P}_k^{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_k^{pp} & \mathbf{P}_k^{pv} & \mathbf{P}_k^{pr} & \mathbf{P}_k^{pc} & \mathbf{P}_k^{pg} & \mathbf{P}_k^{pa} \\ \mathbf{P}_k^{vp} & \mathbf{P}_k^{vv} & \mathbf{P}_k^{vr} & \mathbf{P}_k^{vc} & \mathbf{P}_k^{vg} & \mathbf{P}_k^{va} \\ \mathbf{P}_k^{rp} & \mathbf{P}_k^{rv} & \mathbf{P}_k^{rr} & \mathbf{P}_k^{rc} & \mathbf{P}_k^{rg} & \mathbf{P}_k^{ra} \\ \mathbf{P}_k^{cp} & \mathbf{P}_k^{cv} & \mathbf{P}_k^{cr} & \mathbf{P}_k^{cc} & \mathbf{P}_k^{cg} & \mathbf{P}_k^{ca} \\ \mathbf{P}_k^{gp} & \mathbf{P}_k^{gv} & \mathbf{P}_k^{gr} & \mathbf{P}_k^{gc} & \mathbf{P}_k^{gg} & \mathbf{P}_k^{ga} \\ \mathbf{P}_k^{ap} & \mathbf{P}_k^{av} & \mathbf{P}_k^{ar} & \mathbf{P}_k^{ac} & \mathbf{P}_k^{ag} & \mathbf{P}_k^{aa} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.8})$$

Da die Kovarianzmatrix symmetrisch ist, müssen nur die Nebendiagonalelemente über der Hauptdiagonale berechnet werden. Dies würde auch ohne die Tatsache der nur schwach besetzten Transitionsmatrizen schon fast zur Halbierung der benötigten Rechenoperationen in der Kovarianzprädiktion und -korrektur führen. Die Matrix des Prozessrauschens lautet in Blockschreibweise:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_k^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & c \times g & c \times a & c \times \omega & c \times f \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k^{gg} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & g \times c & g \times a & g \times \omega & g \times f \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k^{aa} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & a \times c & a \times g & a \times \omega & a \times f \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k^{\omega\omega} & \mathbf{0} \\ & \omega \times c & \omega \times g & \omega \times a & \omega \times f \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k^{ff} \\ & f \times c & f \times g & f \times a & f \times \omega \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.9})$$

Im Folgenden werden in der Kalmanprädiktion zur optimalen Ausnutzung des Einsparpotentials zwei Hilfsmatrizen definiert.

Es ergibt sich folgender Berechnungsablauf durch Zerlegung der Kalmanfiltergleichungen gemäß (VI.1.12):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_k(-) &= \Phi_{k-1} \mathbf{z}_{k-1} \\
 L_{k-1} &= \Phi_{k-1} P_{k-1} \\
 J_{k-1} &= \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \\
 P_k(-) &= L_{k-1} \Phi_{k-1}^T + J_{k-1} \Gamma_{k-1}^T
 \end{aligned} \tag{VI.3.10}$$

### 3.1.1 Zustandsprädiktion

Die Zustandsprädiktion des herkömmlichen Kalmanfilteralgorithmus

$$\mathbf{z}_k(-) = \Phi_{k-1} \mathbf{z}_{k-1} \tag{VI.3.11}$$

wird mit der Transitionsmatrix aus (VI.3.1) zu:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^p(-) \\ \mathbf{z}_k^v(-) \\ \mathbf{z}_k^r(-) \\ \mathbf{z}_k^c(-) \\ \mathbf{z}_k^g(-) \\ \mathbf{z}_k^a(-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{pp} & \Phi_{k-1}^{pv} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Phi_{k-1}^{vp} & \Phi_{k-1}^{vv} & \Phi_{k-1}^{vr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{va} \\ \Phi_{k-1}^{rp} & \Phi_{k-1}^{rv} & \Phi_{k-1}^{rr} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{rg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{k-1}^p \\ \mathbf{z}_{k-1}^v \\ \mathbf{z}_{k-1}^r \\ \mathbf{z}_{k-1}^c \\ \mathbf{z}_{k-1}^g \\ \mathbf{z}_{k-1}^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{pp} \mathbf{z}_{k-1}^p + \Phi_{k-1}^{pv} \mathbf{z}_{k-1}^v \\ \Phi_{k-1}^{vp} \mathbf{z}_{k-1}^p + \Phi_{k-1}^{vv} \mathbf{z}_{k-1}^v + \Phi_{k-1}^{vr} \mathbf{z}_{k-1}^r + \Phi_{k-1}^{va} \mathbf{z}_{k-1}^a \\ \Phi_{k-1}^{rp} \mathbf{z}_{k-1}^p + \Phi_{k-1}^{rv} \mathbf{z}_{k-1}^v + \Phi_{k-1}^{rr} \mathbf{z}_{k-1}^r + \Phi_{k-1}^{rg} \mathbf{z}_{k-1}^g \\ \Phi_{k-1}^{cc} \mathbf{z}_{k-1}^c \\ \Phi_{k-1}^{gg} \mathbf{z}_{k-1}^g \\ \Phi_{k-1}^{aa} \mathbf{z}_{k-1}^a \end{pmatrix} \tag{VI.3.12}$$

### 3.1.2 Kovarianzprädiktion

Die Hilfsmatrix  $L_{k-1}$  aus (VI.3.10)

$$L_{k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1} \tag{VI.3.13}$$

kann unter Verwendung von (VI.3.1) vereinfacht werden. Dazu wird die Hilfsmatrix aus Übersichtsgründen zuerst nach Zuständen der Navigation und der Sensorfehler zerlegt.

$$\begin{pmatrix} L_{k-1}^{nn} & L_{k-1}^{ns} \\ L_{k-1}^{sn} & L_{k-1}^{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{nn} & \Phi_{k-1}^{ns} \\ \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1}^{nn} & P_{k-1}^{ns} \\ P_{k-1}^{ns T} & P_{k-1}^{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{nn} P_{k-1}^{nn} + \Phi_{k-1}^{ns} P_{k-1}^{ns T} & \Phi_{k-1}^{nn} P_{k-1}^{ns} + \Phi_{k-1}^{ns} P_{k-1}^{ss} \\ \Phi_{k-1}^{ss} P_{k-1}^{ns T} & \Phi_{k-1}^{ss} P_{k-1}^{ss} \end{pmatrix} \tag{VI.3.14}$$

Eine weitere Unterteilung von  $L_{k-1}^{nn}$  in die Zustände der Position, Geschwindigkeit und Orientierung führt zu:

$$\begin{pmatrix} L_{k-1}^{pp} & L_{k-1}^{pv} & L_{k-1}^{pr} \\ L_{k-1}^{vp} & L_{k-1}^{vv} & L_{k-1}^{vr} \\ L_{k-1}^{rp} & L_{k-1}^{rv} & L_{k-1}^{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{pp} & \Phi_{k-1}^{pv} & \mathbf{0} \\ \Phi_{k-1}^{vp} & \Phi_{k-1}^{vv} & \Phi_{k-1}^{vr} \\ \Phi_{k-1}^{rp} & \Phi_{k-1}^{rv} & \Phi_{k-1}^{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1}^{pp} & P_{k-1}^{pv} & P_{k-1}^{pr} \\ P_{k-1}^{pv T} & P_{k-1}^{vv} & P_{k-1}^{vr} \\ P_{k-1}^{pr T} & P_{k-1}^{vr T} & P_{k-1}^{rr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P_{k-1}^{pc T} & P_{k-1}^{vc T} & P_{k-1}^{rc T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{va} \\ P_{k-1}^{pg T} & P_{k-1}^{vg T} & P_{k-1}^{rg T} \\ \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{rg} & \mathbf{0} \\ P_{k-1}^{pa T} & P_{k-1}^{va T} & P_{k-1}^{ra T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1}^{pc T} & P_{k-1}^{vc T} & P_{k-1}^{rc T} \\ P_{k-1}^{pg T} & P_{k-1}^{vg T} & P_{k-1}^{rg T} \\ P_{k-1}^{pa T} & P_{k-1}^{va T} & P_{k-1}^{ra T} \end{pmatrix} \tag{VI.3.15}$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{pp} P_{k-1}^{pp} + \Phi_{k-1}^{pv} P_{k-1}^{pv T} & \Phi_{k-1}^{pp} P_{k-1}^{pv} + \Phi_{k-1}^{pv} P_{k-1}^{vv} & \Phi_{k-1}^{pp} P_{k-1}^{pr} + \Phi_{k-1}^{pv} P_{k-1}^{vr} \\ \Phi_{k-1}^{vp} P_{k-1}^{pp} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{pv T} & \Phi_{k-1}^{vp} P_{k-1}^{pv} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vv} & \Phi_{k-1}^{vp} P_{k-1}^{pr} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vr} \\ + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{pr T} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{pa T} & + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{vr T} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{va T} & + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{rr} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{ra T} \\ \Phi_{k-1}^{rp} P_{k-1}^{pp} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{pv T} & \Phi_{k-1}^{rp} P_{k-1}^{pv} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{vv} & \Phi_{k-1}^{rp} P_{k-1}^{pr} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{vr} \\ + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{pr T} + \Phi_{k-1}^{rg} P_{k-1}^{pg T} & + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{vr T} + \Phi_{k-1}^{rg} P_{k-1}^{vg T} & + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{rr} + \Phi_{k-1}^{rg} P_{k-1}^{rg T} \end{pmatrix}$$

Unterteilung von  $L_{k-1}^{ns}$ :

$$\begin{pmatrix} L_{k-1}^{pc} & L_{k-1}^{pg} & L_{k-1}^{pa} \\ L_{k-1}^{vc} & L_{k-1}^{vg} & L_{k-1}^{va} \\ L_{k-1}^{rc} & L_{k-1}^{rg} & L_{k-1}^{ra} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{pp} & \Phi_{k-1}^{pv} & \mathbf{0} \\ \Phi_{k-1}^{vp} & \Phi_{k-1}^{vv} & \Phi_{k-1}^{vr} \\ \Phi_{k-1}^{rp} & \Phi_{k-1}^{rv} & \Phi_{k-1}^{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1}^{pc} & P_{k-1}^{pg} & P_{k-1}^{pa} \\ P_{k-1}^{vc} & P_{k-1}^{vg} & P_{k-1}^{va} \\ P_{k-1}^{rc} & P_{k-1}^{rg} & P_{k-1}^{ra} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{va} \\ \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{rg} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1}^{cc} & P_{k-1}^{cg} & P_{k-1}^{ca} \\ P_{k-1}^{cgT} & P_{k-1}^{gg} & P_{k-1}^{ga} \\ P_{k-1}^{caT} & P_{k-1}^{gaT} & P_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} \quad (VI.3.16)$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{pp} P_{k-1}^{pc} + \Phi_{k-1}^{pv} P_{k-1}^{vc} & \Phi_{k-1}^{pp} P_{k-1}^{pg} + \Phi_{k-1}^{pv} P_{k-1}^{vg} & \Phi_{k-1}^{pp} P_{k-1}^{pa} + \Phi_{k-1}^{pv} P_{k-1}^{va} \\ \Phi_{k-1}^{vp} P_{k-1}^{pc} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vc} & \Phi_{k-1}^{vp} P_{k-1}^{pg} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vg} & \Phi_{k-1}^{vp} P_{k-1}^{pa} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{va} \\ + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{rc} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{caT} & + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{rg} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{gaT} & + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{ra} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{aa} \\ \Phi_{k-1}^{rp} P_{k-1}^{pc} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{vc} & \Phi_{k-1}^{rp} P_{k-1}^{pg} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{vg} & \Phi_{k-1}^{rp} P_{k-1}^{pa} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{va} \\ + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{rc} + \Phi_{k-1}^{rg} P_{k-1}^{cgT} & + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{rg} + \Phi_{k-1}^{rg} P_{k-1}^{gg} & + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{ra} + \Phi_{k-1}^{rg} P_{k-1}^{ga} \end{pmatrix}$$

Zerlegung von  $L_{k-1}^{sn}$  ergibt:

$$\begin{pmatrix} L_{k-1}^{cp} & L_{k-1}^{cv} & L_{k-1}^{cr} \\ L_{k-1}^{gp} & L_{k-1}^{gv} & L_{k-1}^{gr} \\ L_{k-1}^{ap} & L_{k-1}^{av} & L_{k-1}^{ar} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1}^{pcT} & P_{k-1}^{vcT} & P_{k-1}^{rcT} \\ P_{k-1}^{pgT} & P_{k-1}^{vgT} & P_{k-1}^{rgT} \\ P_{k-1}^{paT} & P_{k-1}^{vaT} & P_{k-1}^{raT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{cc} P_{k-1}^{pcT} & \Phi_{k-1}^{cc} P_{k-1}^{vcT} & \Phi_{k-1}^{cc} P_{k-1}^{rcT} \\ \Phi_{k-1}^{gg} P_{k-1}^{pgT} & \Phi_{k-1}^{gg} P_{k-1}^{vgT} & \Phi_{k-1}^{gg} P_{k-1}^{rgT} \\ \Phi_{k-1}^{aa} P_{k-1}^{paT} & \Phi_{k-1}^{aa} P_{k-1}^{vaT} & \Phi_{k-1}^{aa} P_{k-1}^{raT} \end{pmatrix} \quad (VI.3.17)$$

$L_{k-1}^{ss}$  lautet in Submatrizenblöcken:

$$\begin{pmatrix} L_{k-1}^{cc} & L_{k-1}^{cg} & L_{k-1}^{ca} \\ L_{k-1}^{gc} & L_{k-1}^{gg} & L_{k-1}^{ga} \\ L_{k-1}^{ac} & L_{k-1}^{ag} & L_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k-1}^{cc} & P_{k-1}^{cg} & P_{k-1}^{ca} \\ P_{k-1}^{cgT} & P_{k-1}^{gg} & P_{k-1}^{ga} \\ P_{k-1}^{caT} & P_{k-1}^{gaT} & P_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{cc} P_{k-1}^{cc} & \Phi_{k-1}^{cc} P_{k-1}^{cg} & \Phi_{k-1}^{cc} P_{k-1}^{ca} \\ \Phi_{k-1}^{gg} P_{k-1}^{cgT} & \Phi_{k-1}^{gg} P_{k-1}^{gg} & \Phi_{k-1}^{gg} P_{k-1}^{ga} \\ \Phi_{k-1}^{aa} P_{k-1}^{caT} & \Phi_{k-1}^{aa} P_{k-1}^{gaT} & \Phi_{k-1}^{aa} P_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} \quad (VI.3.18)$$

Die Zerlegung der Hilfsmatrix  $J_{k-1}$  gemäß Gleichung (VI.3.10)

$$J_{k-1} = \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \quad (VI.3.19)$$

führt zu:

$$\begin{pmatrix} J_{k-1}^{ns} & J_{k-1}^{ni} \\ J_{k-1}^{ss} & J_{k-1}^{si} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{ni} \\ \Gamma_{k-1}^{ss} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{k-1}^{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{k-1}^{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{ni} Q_{k-1}^{ii} \\ \Gamma_{k-1}^{ss} Q_{k-1}^{ss} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (VI.3.20)$$

Die weitere Unterteilung in Submatrizenblöcke heißt demnach für  $J_{k-1}^{ni}$ :

$$\begin{pmatrix} J_{k-1}^{p\omega} & J_{k-1}^{pf} \\ J_{k-1}^{v\omega} & J_{k-1}^{vf} \\ J_{k-1}^{r\omega} & J_{k-1}^{rf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{vf} \\ \Gamma_{k-1}^{r\omega} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{k-1}^{\omega\omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{k-1}^{ff} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{vf} Q_{k-1}^{ff} \\ \Gamma_{k-1}^{r\omega} Q_{k-1}^{\omega\omega} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (VI.3.21)$$

Für den Subblock  $J_{k-1}^{ss}$  erhält man:

$$\begin{pmatrix} J_{k-1}^{cc} & J_{k-1}^{cg} & J_{k-1}^{ca} \\ J_{k-1}^{gc} & J_{k-1}^{gg} & J_{k-1}^{ga} \\ J_{k-1}^{ac} & J_{k-1}^{ag} & J_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Q_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{k-1}^{cc} Q_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{gg} Q_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{aa} Q_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} \quad (VI.3.22)$$

Die Prädiktion der Kovarianz in allgemeiner Form nach (VI.3.10)

$$P_k(-) = L_{k-1} \Phi_{k-1}^T + J_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \quad (VI.3.23)$$

vereinfacht sich erheblich.

Auch hier wird zu Übersichtszwecken zuerst nach Navigationsgrößen und Sensorfehlergrößen zerlegt.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_k^{nn}(-) & P_k^{ns}(-) \\ - & P_k^{ss}(-) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{k-1}^{nn} & L_{k-1}^{ns} \\ L_{k-1}^{sn} & L_{k-1}^{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{nn} & \Phi_{k-1}^{ns} \\ \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{ss} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & J_{k-1}^{ni} \\ J_{k-1}^{ss} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{ni} \\ \Gamma_{k-1}^{ss} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} L_{k-1}^{nn} \Phi_{k-1}^{nn T} + L_{k-1}^{ns} \Phi_{k-1}^{ns T} + J_{k-1}^{ni} \Gamma_{k-1}^{ni T} & L_{k-1}^{ns} \Phi_{k-1}^{ss T} \\ - & L_{k-1}^{ss} \Phi_{k-1}^{ss T} + J_{k-1}^{ss} \Gamma_{k-1}^{ss T} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.3.24})$$

Die Durchführung der endgültigen Zerlegung lässt die Kovarianzmatrizen weiter zerfallen. Aufspaltung des Zwischenergebnisses für  $P_k^{nn}(-)$  und Einsetzen der Submatrizen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_k^{pp}(-) & P_k^{pv}(-) & P_k^{pr}(-) \\ - & P_k^{vv}(-) & P_k^{vr}(-) \\ - & - & P_k^{rr}(-) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{k-1}^{pp} & L_{k-1}^{pv} & L_{k-1}^{pr} \\ L_{k-1}^{vp} & L_{k-1}^{vv} & L_{k-1}^{vr} \\ L_{k-1}^{rp} & L_{k-1}^{rv} & L_{k-1}^{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{pp} & \Phi_{k-1}^{pv} & \mathbf{0} \\ \Phi_{k-1}^{vp} & \Phi_{k-1}^{vv} & \Phi_{k-1}^{vr} \\ \Phi_{k-1}^{rp} & \Phi_{k-1}^{rv} & \Phi_{k-1}^{rr} \end{pmatrix}^T \\ &+ \begin{pmatrix} L_{k-1}^{pc} & L_{k-1}^{pg} & L_{k-1}^{pa} \\ L_{k-1}^{vc} & L_{k-1}^{vg} & L_{k-1}^{va} \\ L_{k-1}^{rc} & L_{k-1}^{rg} & L_{k-1}^{ra} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{va} \\ \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{rg} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{k-1}^{vf} \\ J_{k-1}^{r\omega} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{vf} \\ \Gamma_{k-1}^{r\omega} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} L_{k-1}^{pp} \Phi_{k-1}^{pp T} & L_{k-1}^{pp} \Phi_{k-1}^{vp T} + L_{k-1}^{pv} \Phi_{k-1}^{vv T} & L_{k-1}^{pp} \Phi_{k-1}^{rp T} + L_{k-1}^{pv} \Phi_{k-1}^{rv T} \\ +L_{k-1}^{pv} \Phi_{k-1}^{pv T} & +L_{k-1}^{pr} \Phi_{k-1}^{vr T} + L_{k-1}^{pa} \Phi_{k-1}^{va T} & +L_{k-1}^{pr} \Phi_{k-1}^{rr T} + L_{k-1}^{pg} \Phi_{k-1}^{rg T} \\ - & L_{k-1}^{vp} \Phi_{k-1}^{vp T} + L_{k-1}^{vv} \Phi_{k-1}^{vv T} & L_{k-1}^{vp} \Phi_{k-1}^{rp T} + L_{k-1}^{vv} \Phi_{k-1}^{rv T} \\ +L_{k-1}^{vr} \Phi_{k-1}^{vr T} + L_{k-1}^{va} \Phi_{k-1}^{va T} & +L_{k-1}^{vr} \Phi_{k-1}^{rr T} + L_{k-1}^{vg} \Phi_{k-1}^{rg T} & +L_{k-1}^{vr} \Phi_{k-1}^{rr T} + L_{k-1}^{vg} \Phi_{k-1}^{rg T} \\ - & +J_{k-1}^{vf} \Gamma_{k-1}^{vf T} & +L_{k-1}^{rp} \Phi_{k-1}^{rp T} + L_{k-1}^{rv} \Phi_{k-1}^{rv T} \\ - & - & +L_{k-1}^{rr} \Phi_{k-1}^{rr T} + L_{k-1}^{rg} \Phi_{k-1}^{rg T} \\ & & +J_{k-1}^{r\omega} \Gamma_{k-1}^{r\omega T} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.3.25})$$

Aufspaltung der Submatrizen von  $P_k^{ns}(-)$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_k^{pc}(-) & P_k^{pg}(-) & P_k^{pa}(-) \\ P_k^{vc}(-) & P_k^{vg}(-) & P_k^{va}(-) \\ P_k^{rc}(-) & P_k^{rg}(-) & P_k^{ra}(-) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{k-1}^{pc} & L_{k-1}^{pg} & L_{k-1}^{pa} \\ L_{k-1}^{vc} & L_{k-1}^{vg} & L_{k-1}^{va} \\ L_{k-1}^{rc} & L_{k-1}^{rg} & L_{k-1}^{ra} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{aa} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} L_{k-1}^{pc} \Phi_{k-1}^{cc T} & L_{k-1}^{pg} \Phi_{k-1}^{gg T} & L_{k-1}^{pa} \Phi_{k-1}^{aa T} \\ L_{k-1}^{vc} \Phi_{k-1}^{cc T} & L_{k-1}^{vg} \Phi_{k-1}^{gg T} & L_{k-1}^{va} \Phi_{k-1}^{aa T} \\ L_{k-1}^{rc} \Phi_{k-1}^{cc T} & L_{k-1}^{rg} \Phi_{k-1}^{gg T} & L_{k-1}^{ra} \Phi_{k-1}^{aa T} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.3.26})$$

Berechnung der Submatrizen zu  $P_k^{ss}(-)$ :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P_k^{cc}(-) & P_k^{cg}(-) & P_k^{ca}(-) \\ - & P_k^{gg}(-) & P_k^{ga}(-) \\ - & - & P_k^{aa}(-) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{k-1}^{cc} & L_{k-1}^{cg} & L_{k-1}^{ca} \\ L_{k-1}^{gc} & L_{k-1}^{gg} & L_{k-1}^{ga} \\ L_{k-1}^{ac} & L_{k-1}^{ag} & L_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Phi_{k-1}^{aa} \end{pmatrix}^T \\
&+ \begin{pmatrix} J_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & J_{k-1}^{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{k-1}^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{gg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Gamma_{k-1}^{aa} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} L_{k-1}^{cc} \Phi_{k-1}^{cc T} + J_{k-1}^{cc} \Gamma_{k-1}^{cc T} & L_{k-1}^{cg} \Phi_{k-1}^{gg T} & L_{k-1}^{ca} \Phi_{k-1}^{aa T} \\ - & L_{k-1}^{gg} \Phi_{k-1}^{gg T} + J_{k-1}^{gg} \Gamma_{k-1}^{gg T} & L_{k-1}^{ga} \Phi_{k-1}^{aa T} \\ - & - & L_{k-1}^{aa} \Phi_{k-1}^{aa T} + J_{k-1}^{aa} \Gamma_{k-1}^{aa T} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{VI.3.27}$$

Auf Grund der Symmetrie der Kovarianzmatrix  $P_k(-)$  werden die Matrix  $P_k^{sn}(-)$  nicht und die Matrizen  $P_k^{nm}(-)$  und  $P_k^{ss}(-)$  nur teilweise berechnet. Diese Tatsache ist im Berechnungsalgorithmus bereits berücksichtigt. Alle Verweise auf Kovarianzsubmatrizen unter der Hauptdiagonale wurden durch die Transponierte der entsprechenden Kovarianzsubmatrix über der Hauptdiagonale ersetzt.

## 3.2 Kalmankorrektur

Auch in der Kalmankorrektur ist die Einführung von drei Hilfsmatrizen  $M_k$ ,  $N_k$  und  $O_k$  nötig. Der Kalmanfilteralgorithmus der Gleichung (VI.1.14) verändert sich zu:

$$\begin{aligned}
M_k &= P_k(-) H_K^T \\
N_k &= (H_k M_k + R_k)^{-1} \\
K_k &= M_k N_k \\
r_k &= y_k - H_k z_k(-) \\
z_k(+) &= z_k(-) + K_k r_k \\
O_k &= K_k H_k \\
P_k(+) &= \begin{pmatrix} I & \\ & z \times z \end{pmatrix} P_k(-)
\end{aligned} \tag{VI.3.28}$$

Die Zerlegung wird analog zu Kapitel 3.1 übernommen. Hinzugefügt wird lediglich die Zerlegung des Beobachtungsvektors:

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k^{PR} \\ \mathbf{y}_k^{RR} \\ \mathbf{y}_k^B \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Pseudorange } (m) \\ \text{Rangerate } (m) \\ \text{barometrische Höhe } (h) \end{array} \tag{VI.3.29}$$

Die zugehörige Matrix des Beobachtungsrauschens lautet:

$$\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} R_k^{PRPR} & R_k^{PRRR} & \mathbf{0} \\ R_k^{RRPR} & R_k^{RRRR} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_k^{BB} \end{pmatrix} \tag{VI.3.30}$$

### 3.2.1 Kalmangewinnmatrix

Die Hilfsmatrix

$$M_k = P_k(-)H_k^T \quad (\text{VI.3.1})$$

wird mit (VI.3.3) folgendermaßen vereinfacht:

$$\begin{pmatrix} M_k^{pPR} & M_k^{pRR} & M_k^{pB} \\ M_k^{vPR} & M_k^{vRR} & M_k^{vB} \\ M_k^{rPR} & M_k^{rRR} & M_k^{rB} \\ M_k^{cPR} & M_k^{cRR} & M_k^{cB} \\ M_k^{gPR} & M_k^{gRR} & M_k^{gB} \\ M_k^{aPR} & M_k^{aRR} & M_k^{aB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k^{pp}(-) & P_k^{pv}(-) & P_k^{pr}(-) & P_k^{pc}(-) & P_k^{pg}(-) & P_k^{pa}(-) \\ P_k^{pv}(-)^T & P_k^{vv}(-) & P_k^{vr}(-) & P_k^{vc}(-) & P_k^{vg}(-) & P_k^{va}(-) \\ P_k^{pr}(-)^T & P_k^{vr}(-)^T & P_k^{rr}(-) & P_k^{rc}(-) & P_k^{rg}(-) & P_k^{ra}(-) \\ P_k^{pc}(-)^T & P_k^{vc}(-)^T & P_k^{rc}(-)^T & P_k^{cc}(-) & P_k^{cg}(-) & P_k^{ca}(-) \\ P_k^{pg}(-)^T & P_k^{vg}(-)^T & P_k^{rg}(-)^T & P_k^{cg}(-)^T & P_k^{gg}(-) & P_k^{ga}(-) \\ P_k^{pa}(-)^T & P_k^{va}(-)^T & P_k^{ra}(-)^T & P_k^{ca}(-)^T & P_k^{ga}(-)^T & P_k^{aa}(-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k^{PRpT} & H_k^{RRpT} & H_k^{BpT} \\ \mathbf{0}_{v \times m} & H_k^{RRvT} & \mathbf{0}_{v \times 1} \\ \mathbf{0}_{r \times m} & \mathbf{0}_{r \times m} & \mathbf{0}_{r \times 1} \\ H_k^{PRcT} & H_k^{RRcT} & H_k^{BcT} \\ \mathbf{0}_{g \times m} & \mathbf{0}_{g \times m} & \mathbf{0}_{g \times 1} \\ \mathbf{0}_{a \times m} & \mathbf{0}_{a \times m} & \mathbf{0}_{a \times 1} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.2})$$

$$= \begin{pmatrix} P_k^{pp}(-)H_k^{PRpT} + P_k^{pc}(-)H_k^{PRcT} & P_k^{pp}(-)H_k^{RRpT} + P_k^{pv}(-)H_k^{RRvT} + P_k^{pc}(-)H_k^{RRcT} & P_k^{pp}(-)H_k^{BpT} + P_k^{pc}(-)H_k^{BcT} \\ P_k^{pv}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{vv}(-)H_k^{PRcT} & P_k^{pv}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{vv}(-)H_k^{RRvT} + P_k^{vc}(-)H_k^{RRcT} & P_k^{pv}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{vc}(-)H_k^{BcT} \\ P_k^{pr}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{rr}(-)H_k^{PRcT} & P_k^{pr}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{vr}(-)^T H_k^{RRvT} + P_k^{rc}(-)H_k^{RRcT} & P_k^{pr}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{rc}(-)H_k^{BcT} \\ P_k^{pc}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{cc}(-)H_k^{PRcT} & P_k^{pc}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{vc}(-)^T H_k^{RRvT} + P_k^{cc}(-)H_k^{RRcT} & P_k^{pc}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{cc}(-)H_k^{BcT} \\ P_k^{pg}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{gg}(-)^T H_k^{PRcT} & P_k^{pg}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{vg}(-)^T H_k^{RRvT} + P_k^{gg}(-)^T H_k^{RRcT} & P_k^{pg}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{gg}(-)^T H_k^{BcT} \\ P_k^{pa}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{aa}(-)^T H_k^{PRcT} & P_k^{pa}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{va}(-)^T H_k^{RRvT} + P_k^{aa}(-)^T H_k^{RRcT} & P_k^{pa}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{aa}(-)^T H_k^{BcT} \end{pmatrix}$$

Da nur die über der Hauptdiagonale liegenden Kovarianzsubmatrizen vorliegen, sind die fehlenden Kovarianzsubmatrizen durch die Transponierten der korrespondierenden Kovarianzsubmatrizen ersetzt worden. Die zweite Hilfsmatrix  $N_k$

$$N_k = (H_k M_k + R_k)^{-1} \quad (\text{VI.3.3})$$

lautet vereinfacht:

$$\begin{pmatrix} N_k^{PRPR} & N_k^{PRRR} & N_k^{PRB} \\ N_k^{RRPR} & N_k^{RRRR} & N_k^{RRB} \\ N_k^{BPR} & N_k^{BRR} & N_k^{BB} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} H_k^{PRp} & \mathbf{0}_{m \times v} & \mathbf{0}_{m \times r} & H_k^{PRc} & \mathbf{0}_{m \times g} & \mathbf{0}_{m \times a} \\ H_k^{RRp} & H_k^{RRv} & \mathbf{0}_{m \times r} & H_k^{RRc} & \mathbf{0}_{m \times g} & \mathbf{0}_{m \times a} \\ H_k^{Bp} & \mathbf{0}_{1 \times v} & \mathbf{0}_{1 \times r} & H_k^{Bc} & \mathbf{0}_{1 \times g} & \mathbf{0}_{1 \times a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k^{pPR} & M_k^{pRR} & M_k^{pB} \\ M_k^{vPR} & M_k^{vRR} & M_k^{vB} \\ M_k^{rPR} & M_k^{rRR} & M_k^{rB} \\ M_k^{cPR} & M_k^{cRR} & M_k^{cB} \\ M_k^{gPR} & M_k^{gRR} & M_k^{gB} \\ M_k^{aPR} & M_k^{aRR} & M_k^{aB} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_k^{PRPR} & R_k^{PRRR} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ R_k^{RRPR} & R_k^{RRRR} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times m} & \mathbf{0}_{1 \times m} & R_k^{BB} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.4})$$

$$= \begin{pmatrix} H_k^{PRp} M_k^{pPR} + H_k^{PRc} M_k^{cPR} + R_k^{PRPR} & H_k^{PRp} M_k^{pRR} + H_k^{PRc} M_k^{cRR} + R_k^{PRRR} & H_k^{PRp} M_k^{pB} + H_k^{PRc} M_k^{cB} \\ H_k^{RRp} M_k^{vPR} + H_k^{RRv} M_k^{vRR} + H_k^{RRc} M_k^{cPR} + R_k^{RRPR} & H_k^{RRp} M_k^{vRR} + H_k^{RRv} M_k^{vRR} + H_k^{RRc} M_k^{cRR} + R_k^{RRRR} & H_k^{RRp} M_k^{vB} + H_k^{RRv} M_k^{vB} + H_k^{RRc} M_k^{cB} \\ H_k^{Bp} M_k^{pPR} + H_k^{Bc} M_k^{cPR} & H_k^{Bp} M_k^{pRR} + H_k^{Bc} M_k^{cRR} & H_k^{Bp} M_k^{pB} + H_k^{Bc} M_k^{cB} + R_k^{BB} \end{pmatrix}$$

Die Inverse kann auch mit den Formeln aus Gleichung (VI.2.17) direkt in Submatrizen berechnet werden. Da die Hilfsmatrix  $M_k$  jedoch vollbesetzt ist, wird hier die Inverse ohne Vereinfachungen berechnet und erst im Anschluss die Hilfsmatrix  $N_k$  in ihre Komponenten zerlegt. Die allgemeine Berechnung der Kalmangewinnmatrix des CKF folgt somit nach (VI.3.28).

$$K_k = M_k N_k \quad (\text{VI.3.5})$$

Einsetzen der Submatrizen liefert das zerlegte Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} K_k^{pPR} & K_k^{pRR} & K_k^{pB} \\ K_k^{vPR} & K_k^{vRR} & K_k^{vB} \\ K_k^{rPR} & K_k^{rRR} & K_k^{rB} \\ K_k^{cPR} & K_k^{cRR} & K_k^{cB} \\ K_k^{gPR} & K_k^{gRR} & K_k^{gB} \\ K_k^{aPR} & K_k^{aRR} & K_k^{aB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_k^{pPR} & M_k^{pRR} & M_k^{pB} \\ M_k^{vPR} & M_k^{vRR} & M_k^{vB} \\ M_k^{rPR} & M_k^{rRR} & M_k^{rB} \\ M_k^{cPR} & M_k^{cRR} & M_k^{cB} \\ M_k^{gPR} & M_k^{gRR} & M_k^{gB} \\ M_k^{aPR} & M_k^{aRR} & M_k^{aB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_k^{PRPR} & N_k^{PRRR} & N_k^{PRB} \\ N_k^{RRPR} & N_k^{RRRR} & N_k^{RRB} \\ N_k^{BPR} & N_k^{BRR} & N_k^{BB} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.6})$$

$$= \begin{pmatrix} M_k^{pPR} N_k^{PRPR} + M_k^{pRR} N_k^{RRPR} + M_k^{pB} N_k^{BPR} & M_k^{pPR} N_k^{PRRR} + M_k^{pRR} N_k^{RRRR} + M_k^{pB} N_k^{BRR} & M_k^{pPR} N_k^{PRB} + M_k^{pRR} N_k^{RRB} + M_k^{pB} N_k^{BB} \\ M_k^{vPR} N_k^{PRPR} + M_k^{vRR} N_k^{RRPR} + M_k^{vB} N_k^{BPR} & M_k^{vPR} N_k^{PRRR} + M_k^{vRR} N_k^{RRRR} + M_k^{vB} N_k^{BRR} & M_k^{vPR} N_k^{PRB} + M_k^{vRR} N_k^{RRB} + M_k^{vB} N_k^{BB} \\ M_k^{rPR} N_k^{PRPR} + M_k^{rRR} N_k^{RRPR} + M_k^{rB} N_k^{BPR} & M_k^{rPR} N_k^{PRRR} + M_k^{rRR} N_k^{RRRR} + M_k^{rB} N_k^{BRR} & M_k^{rPR} N_k^{PRB} + M_k^{rRR} N_k^{RRB} + M_k^{rB} N_k^{BB} \\ M_k^{cPR} N_k^{PRPR} + M_k^{cRR} N_k^{RRPR} + M_k^{cB} N_k^{BPR} & M_k^{cPR} N_k^{PRRR} + M_k^{cRR} N_k^{RRRR} + M_k^{cB} N_k^{BRR} & M_k^{cPR} N_k^{PRB} + M_k^{cRR} N_k^{RRB} + M_k^{cB} N_k^{BB} \\ M_k^{gPR} N_k^{PRPR} + M_k^{gRR} N_k^{RRPR} + M_k^{gB} N_k^{BPR} & M_k^{gPR} N_k^{PRRR} + M_k^{gRR} N_k^{RRRR} + M_k^{gB} N_k^{BRR} & M_k^{gPR} N_k^{PRB} + M_k^{gRR} N_k^{RRB} + M_k^{gB} N_k^{BB} \\ M_k^{aPR} N_k^{PRPR} + M_k^{aRR} N_k^{RRPR} + M_k^{aB} N_k^{BPR} & M_k^{aPR} N_k^{PRRR} + M_k^{aRR} N_k^{RRRR} + M_k^{aB} N_k^{BRR} & M_k^{aPR} N_k^{PRB} + M_k^{aRR} N_k^{RRB} + M_k^{aB} N_k^{BB} \end{pmatrix}$$

### 3.2.2 Zustandskorrektur

Die Residuen lauten im allgemeinen Kalmanfilter nach (VI.3.28):

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{z}_k (-) \quad (\text{VI.3.7})$$

Einsetzen in die Beobachtungsmatrix  $\mathbf{H}_k$  aus (VI.3.3):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_k^{PR} \\ \mathbf{r}_k^{RR} \\ \mathbf{r}_k^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k^{PR} \\ \mathbf{y}_k^{RR} \\ \mathbf{y}_k^B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{H}_k^{PRp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_k^{PRc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ m \times v & m \times v & m \times r & m \times g & m \times a & \\ \mathbf{H}_k^{RRp} & \mathbf{H}_k^{RRv} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_k^{RRc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ m \times v & m \times r & m \times r & m \times g & m \times a & \\ \mathbf{H}_k^{Bp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_k^{Bc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ l \times v & l \times r & l \times r & l \times g & l \times a & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^p (-) \\ \mathbf{z}_k^v (-) \\ \mathbf{z}_k^r (-) \\ \mathbf{z}_k^c (-) \\ \mathbf{z}_k^g (-) \\ \mathbf{z}_k^a (-) \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.8})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k^{PR} - \mathbf{H}_k^{PRp} \mathbf{z}_k^p (-) - \mathbf{H}_k^{PRc} \mathbf{z}_k^c (-) \\ \mathbf{y}_k^{RR} - \mathbf{H}_k^{RRp} \mathbf{z}_k^p (-) - \mathbf{H}_k^{RRv} \mathbf{z}_k^v (-) - \mathbf{H}_k^{RRc} \mathbf{z}_k^c (-) \\ \mathbf{y}_k^B - \mathbf{H}_k^{Bp} \mathbf{z}_k^p (-) - \mathbf{H}_k^{Bc} \mathbf{z}_k^c (-) \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Residuen in die Korrektur des Zustands:

$$\mathbf{z}_k (+) = \mathbf{z}_k (-) + \mathbf{K}_k \mathbf{r}_k \quad (\text{VI.3.9})$$

Im speziellen Fall:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^p (+) \\ \mathbf{z}_k^v (+) \\ \mathbf{z}_k^r (+) \\ \mathbf{z}_k^c (+) \\ \mathbf{z}_k^g (+) \\ \mathbf{z}_k^a (+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^p (-) \\ \mathbf{z}_k^v (-) \\ \mathbf{z}_k^r (-) \\ \mathbf{z}_k^c (-) \\ \mathbf{z}_k^g (-) \\ \mathbf{z}_k^a (-) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_k^{pPR} & \mathbf{K}_k^{pRR} & \mathbf{K}_k^{pB} \\ \mathbf{K}_k^{vPR} & \mathbf{K}_k^{vRR} & \mathbf{K}_k^{vB} \\ \mathbf{K}_k^{rPR} & \mathbf{K}_k^{rRR} & \mathbf{K}_k^{rB} \\ \mathbf{K}_k^{cPR} & \mathbf{K}_k^{cRR} & \mathbf{K}_k^{cB} \\ \mathbf{K}_k^{gPR} & \mathbf{K}_k^{gRR} & \mathbf{K}_k^{gB} \\ \mathbf{K}_k^{aPR} & \mathbf{K}_k^{aRR} & \mathbf{K}_k^{aB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_k^{PR} \\ \mathbf{r}_k^{RR} \\ \mathbf{r}_k^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^p (-) + \mathbf{K}_k^{pPR} \mathbf{r}_k^{PR} + \mathbf{K}_k^{pRR} \mathbf{r}_k^{RR} + \mathbf{K}_k^{pB} \mathbf{r}_k^B \\ \mathbf{z}_k^v (-) + \mathbf{K}_k^{vPR} \mathbf{r}_k^{PR} + \mathbf{K}_k^{vRR} \mathbf{r}_k^{RR} + \mathbf{K}_k^{vB} \mathbf{r}_k^B \\ \mathbf{z}_k^r (-) + \mathbf{K}_k^{rPR} \mathbf{r}_k^{PR} + \mathbf{K}_k^{rRR} \mathbf{r}_k^{RR} + \mathbf{K}_k^{rB} \mathbf{r}_k^B \\ \mathbf{z}_k^c (-) + \mathbf{K}_k^{cPR} \mathbf{r}_k^{PR} + \mathbf{K}_k^{cRR} \mathbf{r}_k^{RR} + \mathbf{K}_k^{cB} \mathbf{r}_k^B \\ \mathbf{z}_k^g (-) + \mathbf{K}_k^{gPR} \mathbf{r}_k^{PR} + \mathbf{K}_k^{gRR} \mathbf{r}_k^{RR} + \mathbf{K}_k^{gB} \mathbf{r}_k^B \\ \mathbf{z}_k^a (-) + \mathbf{K}_k^{aPR} \mathbf{r}_k^{PR} + \mathbf{K}_k^{aRR} \mathbf{r}_k^{RR} + \mathbf{K}_k^{aB} \mathbf{r}_k^B \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.40})$$

### 3.2.3 Kovarianzkorrektur

Die Hilfsmatrix der Kovarianzkorrektur

$$\mathbf{O}_k = \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \quad (\text{VI.3.41})$$

lautet aufgelöst nach der Methode Blockstruktur:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O}_k^{pp} & \mathbf{O}_k^{pv} & \mathbf{O}_k^{pr} & \mathbf{O}_k^{pc} & \mathbf{O}_k^{pg} & \mathbf{O}_k^{pa} \\ \mathbf{O}_k^{vp} & \mathbf{O}_k^{vv} & \mathbf{O}_k^{vr} & \mathbf{O}_k^{vc} & \mathbf{O}_k^{vg} & \mathbf{O}_k^{va} \\ \mathbf{O}_k^{rp} & \mathbf{O}_k^{rv} & \mathbf{O}_k^{rr} & \mathbf{O}_k^{rc} & \mathbf{O}_k^{rg} & \mathbf{O}_k^{ra} \\ \mathbf{O}_k^{cp} & \mathbf{O}_k^{cv} & \mathbf{O}_k^{cr} & \mathbf{O}_k^{cc} & \mathbf{O}_k^{cg} & \mathbf{O}_k^{ca} \\ \mathbf{O}_k^{gp} & \mathbf{O}_k^{gv} & \mathbf{O}_k^{gr} & \mathbf{O}_k^{gc} & \mathbf{O}_k^{gg} & \mathbf{O}_k^{ga} \\ \mathbf{O}_k^{ap} & \mathbf{O}_k^{av} & \mathbf{O}_k^{ar} & \mathbf{O}_k^{ac} & \mathbf{O}_k^{ag} & \mathbf{O}_k^{aa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_k^{pPR} & \mathbf{K}_k^{pRR} & \mathbf{K}_k^{pB} \\ \mathbf{K}_k^{vPR} & \mathbf{K}_k^{vRR} & \mathbf{K}_k^{vB} \\ \mathbf{K}_k^{rPR} & \mathbf{K}_k^{rRR} & \mathbf{K}_k^{rB} \\ \mathbf{K}_k^{cPR} & \mathbf{K}_k^{cRR} & \mathbf{K}_k^{cB} \\ \mathbf{K}_k^{gPR} & \mathbf{K}_k^{gRR} & \mathbf{K}_k^{gB} \\ \mathbf{K}_k^{aPR} & \mathbf{K}_k^{aRR} & \mathbf{K}_k^{aB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_k^{PRp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_k^{PRc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ m \times v & m \times r & m \times r & m \times g & m \times a & \\ \mathbf{H}_k^{RRp} & \mathbf{H}_k^{RRv} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_k^{RRc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ m \times v & m \times r & m \times r & m \times g & m \times a & \\ \mathbf{H}_k^{Bp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_k^{Bc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ l \times v & l \times r & l \times r & l \times g & l \times a & \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3.42})$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{K}_k^{pPR} \mathbf{H}_k^{PRp} + \mathbf{K}_k^{pRR} \mathbf{H}_k^{RRp} + \mathbf{K}_k^{pB} \mathbf{H}_k^{Bp} & \mathbf{K}_k^{pRR} \mathbf{H}_k^{RRv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_k^{pPR} \mathbf{H}_k^{PRc} + \mathbf{K}_k^{pRR} \mathbf{H}_k^{RRc} + \mathbf{K}_k^{pB} \mathbf{H}_k^{Bc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ p \times r & p \times r & p \times r & p \times g & p \times a & \\ \mathbf{K}_k^{vPR} \mathbf{H}_k^{PRp} + \mathbf{K}_k^{vRR} \mathbf{H}_k^{RRp} + \mathbf{K}_k^{vB} \mathbf{H}_k^{Bp} & \mathbf{K}_k^{vRR} \mathbf{H}_k^{RRv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_k^{vPR} \mathbf{H}_k^{PRc} + \mathbf{K}_k^{vRR} \mathbf{H}_k^{RRc} + \mathbf{K}_k^{vB} \mathbf{H}_k^{Bc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ v \times r & v \times r & v \times r & v \times g & v \times a & \\ \mathbf{K}_k^{rPR} \mathbf{H}_k^{PRp} + \mathbf{K}_k^{rRR} \mathbf{H}_k^{RRp} + \mathbf{K}_k^{rB} \mathbf{H}_k^{Bp} & \mathbf{K}_k^{rRR} \mathbf{H}_k^{RRv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_k^{rPR} \mathbf{H}_k^{PRc} + \mathbf{K}_k^{rRR} \mathbf{H}_k^{RRc} + \mathbf{K}_k^{rB} \mathbf{H}_k^{Bc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ r \times r & r \times r & r \times r & r \times g & r \times a & \\ \mathbf{K}_k^{cPR} \mathbf{H}_k^{PRp} + \mathbf{K}_k^{cRR} \mathbf{H}_k^{RRp} + \mathbf{K}_k^{cB} \mathbf{H}_k^{Bp} & \mathbf{K}_k^{cRR} \mathbf{H}_k^{RRv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_k^{cPR} \mathbf{H}_k^{PRc} + \mathbf{K}_k^{cRR} \mathbf{H}_k^{RRc} + \mathbf{K}_k^{cB} \mathbf{H}_k^{Bc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ c \times r & c \times r & c \times r & c \times g & c \times a & \\ \mathbf{K}_k^{gPR} \mathbf{H}_k^{PRp} + \mathbf{K}_k^{gRR} \mathbf{H}_k^{RRp} + \mathbf{K}_k^{gB} \mathbf{H}_k^{Bp} & \mathbf{K}_k^{gRR} \mathbf{H}_k^{RRv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_k^{gPR} \mathbf{H}_k^{PRc} + \mathbf{K}_k^{gRR} \mathbf{H}_k^{RRc} + \mathbf{K}_k^{gB} \mathbf{H}_k^{Bc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ g \times r & g \times r & g \times r & g \times g & g \times a & \\ \mathbf{K}_k^{aPR} \mathbf{H}_k^{PRp} + \mathbf{K}_k^{aRR} \mathbf{H}_k^{RRp} + \mathbf{K}_k^{aB} \mathbf{H}_k^{Bp} & \mathbf{K}_k^{aRR} \mathbf{H}_k^{RRv} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_k^{aPR} \mathbf{H}_k^{PRc} + \mathbf{K}_k^{aRR} \mathbf{H}_k^{RRc} + \mathbf{K}_k^{aB} \mathbf{H}_k^{Bc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a \times r & a \times r & a \times r & a \times g & a \times a & \end{pmatrix}$$

Die Kovarianzkorrektur des Kalmanfilters berechnet sich nun nach den Formeln:

$$\mathbf{P}_k (+) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{O}_k \end{pmatrix} \mathbf{P}_k (-) \quad (\text{VI.3.43})$$

Die Kovarianzmatrix wird aus Gründen der Übersichtlichkeit zuerst analog zur Vorgehensweise in (VI.3.14) wieder in die Anteile der Navigation und der Sensorfehler zerlegt.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_k^{nn}(+) & P_k^{ns}(+) \\ - & P_k^{ss}(+) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_k^{nn}(-) & P_k^{ns}(-) \\ P_k^{ns}(-)^T & P_k^{ss}(-) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O_k^{nn} & O_k^{ns} \\ O_k^{sn} & O_k^{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^{nn}(-) & P_k^{ns}(-) \\ P_k^{ns}(-)^T & P_k^{ss}(-) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_k^{nn}(-) - O_k^{nn} P_k^{nn}(-) - O_k^{ns} P_k^{ns}(-)^T & P_k^{ns}(-) - O_k^{nn} P_k^{ns}(-) - O_k^{ns} P_k^{ss}(-) \\ - & P_k^{ss}(-) - O_k^{sn} P_k^{ns}(-) - O_k^{ss} P_k^{ss}(-) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.3.44})$$

Aufspaltung von  $P_k^{nn}(+)$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_k^{pp}(+) & P_k^{pv}(+) & P_k^{pr}(+) \\ - & P_k^{vv}(+) & P_k^{vr}(+) \\ - & - & P_k^{rr}(+) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_k^{pp}(-) & P_k^{pv}(-) & P_k^{pr}(-) \\ P_k^{pv}(-)^T & P_k^{vv}(-) & P_k^{vr}(-) \\ P_k^{pr}(-)^T & P_k^{vr}(-)^T & P_k^{rr}(-) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O_k^{pp} & O_k^{pv} & \mathbf{0} \\ O_k^{vp} & O_k^{vv} & \mathbf{0} \\ O_k^{rp} & O_k^{rv} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^{pp}(-) & P_k^{pv}(-) & P_k^{pr}(-) \\ P_k^{pv}(-)^T & P_k^{vv}(-) & P_k^{vr}(-) \\ P_k^{pr}(-)^T & P_k^{vr}(-)^T & P_k^{rr}(-) \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} O_k^{pc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ O_k^{vc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ O_k^{rc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^{pc}(-) & P_k^{pg}(-) & P_k^{pa}(-) \\ P_k^{vc}(-) & P_k^{vg}(-) & P_k^{va}(-) \\ P_k^{rc}(-) & P_k^{rg}(-) & P_k^{ra}(-) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_k^{pp}(-) - O_k^{pp} P_k^{pp}(-) & P_k^{pv}(-) - O_k^{pp} P_k^{pv}(-) & P_k^{pr}(-) - O_k^{pp} P_k^{pr}(-) \\ -O_k^{pv} P_k^{pv}(-)^T - O_k^{pc} P_k^{pc}(-)^T & -O_k^{pv} P_k^{vv}(-) - O_k^{pc} P_k^{vc}(-)^T & -O_k^{pv} P_k^{vr}(-) - O_k^{pc} P_k^{rc}(-)^T \\ - & P_k^{vv}(-) - O_k^{vp} P_k^{vv}(-) & P_k^{vr}(-) - O_k^{vp} P_k^{vr}(-) \\ - & -O_k^{rv} P_k^{rv}(-) - O_k^{vc} P_k^{vc}(-)^T & -O_k^{rv} P_k^{ra}(-) - O_k^{vc} P_k^{ra}(-)^T \\ - & - & P_k^{rr}(-) - O_k^{rp} P_k^{rr}(-) \\ - & - & -O_k^{rv} P_k^{vr}(-) - O_k^{rc} P_k^{rc}(-)^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.3.45})$$

Berechnung der Submatrizen von  $P_k^{ns}(+)$  ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_k^{pc}(+) & P_k^{pg}(+) & P_k^{pa}(+) \\ P_k^{vc}(+) & P_k^{vg}(+) & P_k^{va}(+) \\ P_k^{rc}(+) & P_k^{rg}(+) & P_k^{ra}(+) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_k^{pc}(-) & P_k^{pg}(-) & P_k^{pa}(-) \\ P_k^{vc}(-) & P_k^{vg}(-) & P_k^{va}(-) \\ P_k^{rc}(-) & P_k^{rg}(-) & P_k^{ra}(-) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O_k^{pp} & O_k^{pv} & \mathbf{0} \\ O_k^{vp} & O_k^{vv} & \mathbf{0} \\ O_k^{rp} & O_k^{rv} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^{pc}(-) & P_k^{pg}(-) & P_k^{pa}(-) \\ P_k^{vc}(-) & P_k^{vg}(-) & P_k^{va}(-) \\ P_k^{rc}(-) & P_k^{rg}(-) & P_k^{ra}(-) \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} O_k^{pc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ O_k^{vc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ O_k^{rc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^{cc}(-) & P_k^{cg}(-) & P_k^{ca}(-) \\ P_k^{gc}(-)^T & P_k^{gg}(-) & P_k^{ga}(-) \\ P_k^{ac}(-)^T & P_k^{ag}(-)^T & P_k^{aa}(-) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_k^{pc}(-) - O_k^{pp} P_k^{pc}(-) & P_k^{pg}(-) - O_k^{pp} P_k^{pg}(-) & P_k^{pa}(-) - O_k^{pp} P_k^{pa}(-) \\ -O_k^{pv} P_k^{vc}(-) - O_k^{pc} P_k^{cc}(-) & -O_k^{pv} P_k^{vg}(-) - O_k^{pc} P_k^{cg}(-) & -O_k^{pv} P_k^{va}(-) - O_k^{pc} P_k^{ca}(-) \\ P_k^{vc}(-) - O_k^{vp} P_k^{vc}(-) & P_k^{vg}(-) - O_k^{vp} P_k^{vg}(-) & P_k^{va}(-) - O_k^{vp} P_k^{va}(-) \\ -O_k^{rv} P_k^{rc}(-) - O_k^{vc} P_k^{cc}(-) & -O_k^{rv} P_k^{rg}(-) - O_k^{vc} P_k^{cg}(-) & -O_k^{rv} P_k^{ra}(-) - O_k^{vc} P_k^{ca}(-) \\ P_k^{rc}(-) - O_k^{rp} P_k^{rc}(-) & P_k^{rg}(-) - O_k^{rp} P_k^{rg}(-) & P_k^{ra}(-) - O_k^{rp} P_k^{ra}(-) \\ -O_k^{rv} P_k^{va}(-) - O_k^{rc} P_k^{cc}(-) & -O_k^{rv} P_k^{vg}(-) - O_k^{rc} P_k^{cg}(-) & -O_k^{rv} P_k^{va}(-) - O_k^{rc} P_k^{ca}(-) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.3.46})$$

Zerlegung der Kovarianzmatrix  $P_k^{ss}(+)$  in Submatrizen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_k^{cc}(+) & P_k^{cg}(+) & P_k^{ca}(+) \\ - & P_k^{gg}(+) & P_k^{ga}(+) \\ - & - & P_k^{aa}(+) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_k^{cc}(-) & P_k^{cg}(-) & P_k^{ca}(-) \\ P_k^{gc}(-)^T & P_k^{gg}(-) & P_k^{ga}(-) \\ P_k^{ac}(-)^T & P_k^{ag}(-)^T & P_k^{aa}(-) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O_k^{cp} & O_k^{cv} & \mathbf{0} \\ O_k^{gp} & O_k^{gv} & \mathbf{0} \\ O_k^{ap} & O_k^{av} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^{cc}(-) & P_k^{cg}(-) & P_k^{ca}(-) \\ P_k^{vc}(-) & P_k^{vg}(-) & P_k^{va}(-) \\ P_k^{rc}(-) & P_k^{rg}(-) & P_k^{ra}(-) \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} O_k^{cc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ O_k^{gc} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ O_k^{ac} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^{cc}(-) & P_k^{cg}(-) & P_k^{ca}(-) \\ P_k^{gc}(-)^T & P_k^{gg}(-) & P_k^{ga}(-) \\ P_k^{ac}(-)^T & P_k^{ag}(-)^T & P_k^{aa}(-) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_k^{cc}(-) - O_k^{cp} P_k^{pc}(-) & P_k^{cg}(-) - O_k^{cp} P_k^{pg}(-) & P_k^{ca}(-) - O_k^{cp} P_k^{pa}(-) \\ -O_k^{cv} P_k^{vc}(-) - O_k^{cc} P_k^{cc}(-) & -O_k^{cv} P_k^{vg}(-) - O_k^{cc} P_k^{cg}(-) & -O_k^{cv} P_k^{va}(-) - O_k^{cc} P_k^{ca}(-) \\ - & P_k^{gg}(-) - O_k^{gp} P_k^{pg}(-) & P_k^{ga}(-) - O_k^{gp} P_k^{pa}(-) \\ - & -O_k^{gv} P_k^{vg}(-) - O_k^{gc} P_k^{cg}(-) & -O_k^{gv} P_k^{va}(-) - O_k^{gc} P_k^{ca}(-) \\ - & - & P_k^{aa}(-) - O_k^{ap} P_k^{pa}(-) \\ - & - & -O_k^{av} P_k^{va}(-) - O_k^{ac} P_k^{ca}(-) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{VI.3.47})$$

Mit Gleichung (VI.3.47) ist die Zerlegung des CKF abgeschlossen. Alle im Zusammenhang mit den Transitionsmatrizen und der Beobachtungsmatrix auftretenden Operationen mit Null wurden eliminiert. Zusätzlich werden nur jene Kovarianzsubmatrizen berechnet, die auf oder über der Hauptdiagonale liegen. Resteinparpotential bieten nur noch die fünf symmetrischen und positiv semidefiniten Kovarianzmatrizen  $P_k^{pp}$  bis  $P_k^{aa}$ , die nach obiger Blockzerlegung noch komplett berechnet werden müssen. Auch aus Stabilitätsgründen ist eine zusätzliche Maßnahme zur Zwangssymmetrie dieser fünf Kovarianzmatrizen sinnvoll. Nachteil dieser Blockmatrixzerlegung ist die sehr aufwändige Herleitung des Formelapparates, die für jedes Problem wieder neu durchgeführt werden muss. Der große Vorteil besteht im kleinsten Rechenaufwand aller vorgestellten Vereinfachungsmethoden für diesen Kalmanfilter. Die ausformulierten Gleichungen des optimierten Kalmanfilteralgorithmus finden sich im Anhang A dieses Abschnitts.

### 3.3 Analyse des Optimierungspotentials

Das genaue Einsparpotential wird innerhalb dieses Kapitels untersucht. Dabei wird der Rechenzeitbedarf BPKF mit dem des CKF verglichen. Addiert man alle nötigen Additionen und Multiplikationen der jeweiligen Algorithmen, so ergibt sich die Anzahl der benötigten Rechenoperationen (Floating Point Operations – FLOP). Diese stellen ein realistisches Maß zur Beurteilung der Rechengeschwindigkeit unter den in Kapitel 2 beschriebenen Einschränkungen, die keine Verwendung von Vektorrechner, Pipelining und Parallelprozessierung zulassen, dar. Die allgemeine Matrizenmultiplikation

$$A = B C \quad (\text{VI.3.48})$$

$a \times c$      $a \times b$   $b \times c$

erfordert somit  $abc - ac$  Additionen und  $abc$  Multiplikationen, also insgesamt  $2abc - ac$  FLOPs. Die allgemeine Matrizenaddition

$$A = B + C \quad (\text{VI.3.49})$$

$a \times b$      $a \times b$      $a \times b$

erfordert  $ab$  Additionen und keine Multiplikation, damit insgesamt  $ab$  FLOPs. Den Vergleichsdiagrammen liegen folgende Annahmen zu Grunde:

$p = 3 = \text{const}$	<i>Position</i>	
$v = 3 = \text{const}$	<i>Geschwindigkeit</i>	
$r = 3 = \text{const}$	<i>Orientierung</i>	
$n = p + v + r = 9 = \text{const}$	<i>Navigationszustände</i>	
$c = 3 = \text{const}$	<i>Receiveruhr – &amp; barometrischer Höhendifferenzfehler</i>	
$g = 3k$	<i>Kreiselfehler</i>	
$a = 3k + 3$	<i>Beschleunigungsmesser – &amp; Erdschweremodellfehler</i>	
$s = c + g + a = 6 + 6k$	<i>Sensorfehler</i>	
$z = n + s = 15 + 6k$	<i>alle Zustandsgrößen</i>	(VI.3.50)
$\omega = 3 = \text{const}$	<i>Winkelgeschwindigkeit</i>	
$f = 3 = \text{const}$	<i>Beschleunigung</i>	
$i = \omega + f = 6 = \text{const}$	<i>inertiale Messwerte</i>	
$q = s + i = 12 + 6k$	<i>alle Eingangsgrößen</i>	
$m = 6 = \text{const}$	<i>beobachtbare Satelliten</i>	
$h = 1 = \text{const}$	<i>barometrische Höhe</i>	
$y = 2m + h = 13 = \text{const}$	<i>alle Beobachtungsgrößen</i>	

Die Anzahl der Zustände für die Position, Geschwindigkeit und Orientierung ist auf jeweils drei begrenzt. Für ein GNSS-Rohdatenupdate werden zwei Zustände für die Empfängeruhrfehler benötigt. Der barometrische Höhenupdate erfordert einen weiteren Sensorfehler. Die Anzahl der Sensorfehler der inertialen Messeinheit wird je Sensorachse zwischen null und zehn angenommen. Die verbleibenden drei Fehlerzustände im Bereich der Beschleunigungsmesserfehler stellen die Fehler des Erdschweremodells dar, die aus strukturellen Gründen, wie oben beschrieben, zusammengefasst werden können. Die Anzahl der beobachteten Satelliten wird mit sechs angenommen.

### 3.3.1 Zustandsprädiktion

Die Zustandsprädiktion  $z_k(-)$  erfordert für den CKF insgesamt

$$2zz - z \quad (\text{VI.3.51})$$

FLOPs. Im Gegensatz dazu benötigt der BPKF lediglich

$$\begin{aligned} & pp + 2pv - p \\ & + 2vp + 2vv + 2vr + 2va - v \\ & + 2rp + 2rv + 2rr + 2rg - r \\ & + c + g + a \end{aligned} \quad (\text{VI.3.52})$$

FLOPs. Vergleicht man beide Filter, so ergibt sich ohne Sensorfehlerschätzung ein Einsparpotential von mindestens 60 Prozent. Mit steigender Anzahl der Sensorfehlerzustände vergrößert sich dieses auf etwa 95 Prozent. Der Einfluss der Zustandsprädiktion auf den gesamten Kalmanfilteralgorithmus ist jedoch äußerst gering, da die absolute Anzahl benötigter Rechenoperationen vergleichsweise klein ausfällt.

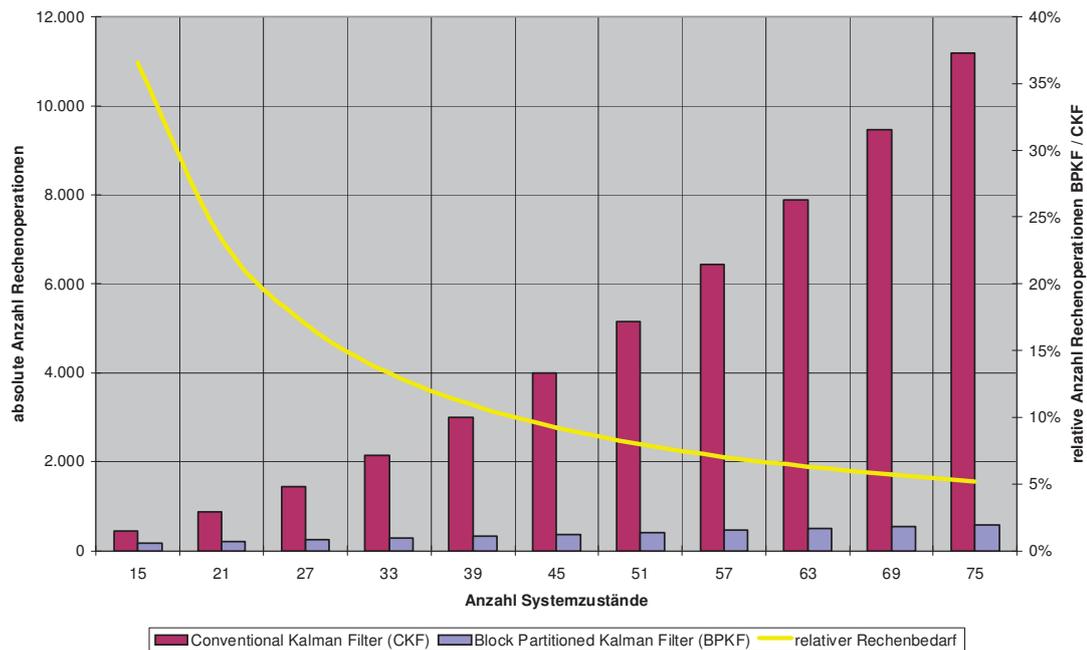


Abbildung 9: Optimierungspotential Zustandsprädiktion

### 3.3.2 Kovarianzprädiktion

Die gesamte Kovarianzprädiktion  $P_k(-)$  erfordert in einem CKF

$$2zzz - zz + 2zqq - zq + 2zzz + 2zqz - zz \tag{VI.3.53}$$

FLOPs. Durch die Einsparungen im BPKF lässt sich der Rechenaufwand für die Hilfsmatrix  $L_k$  auf

$$\begin{aligned} &2ppz + 2pvz - pz \\ &+2vpz + 2vvz + 2vrz + 2vrz - vz \\ &+2rpz + 2rvz + 2rrz + 2rgz - rz \\ &+ss \end{aligned} \tag{VI.3.54}$$

FLOPs, für die Hilfsmatrix  $J_k$  auf

$$vf + r\omega + s \tag{VI.3.55}$$

FLOPs und für die Kovarianzmatrix  $P_k(-)$  auf

$$\begin{aligned} &2ppp + 2pvp - pp \\ &+2ppv + 2pvv + 2prv + 2pav - pv \\ &+2ppr + 2pvr + 2prr + 2pgr - pr \\ &+pc + pg + pa \\ &+2vpv + 2vvv + 2vrv + 2vav + 2vfv - vv \\ &+2vpr + 2vvr + 2vrr + 2var - vr \\ &+vc + vg + va \\ &+2rpr + 2rvr + 2rrr + 2rgr + 2r\omega r - rr \\ &+rc + rg + ra \\ &+2cc + cg + ca \\ &+2gg + ga \\ &+2aa \end{aligned} \tag{VI.3.56}$$

FLOPs senken. Das Einsparpotential in der Kovarianzprädiktion beläuft sich ohne Sensorfehlerschätzung auf circa 85 Prozent. Dieses lässt sich mit steigender Anzahl der inertialen Sensorfehler auf über 98 Prozent steigern. Diese Tatsache ist auf Grund der sehr hohen absoluten Anzahl benötigter Rechenoperationen der Hauptgrund für die Rechenzeitoptimierung des gesamten Kalmanfilters. Der Rechenaufwand steigt nicht mehr abhängig von allen Zuständen in dritter Potenz, sondern nur noch quadratisch in den Sensorfehlern.

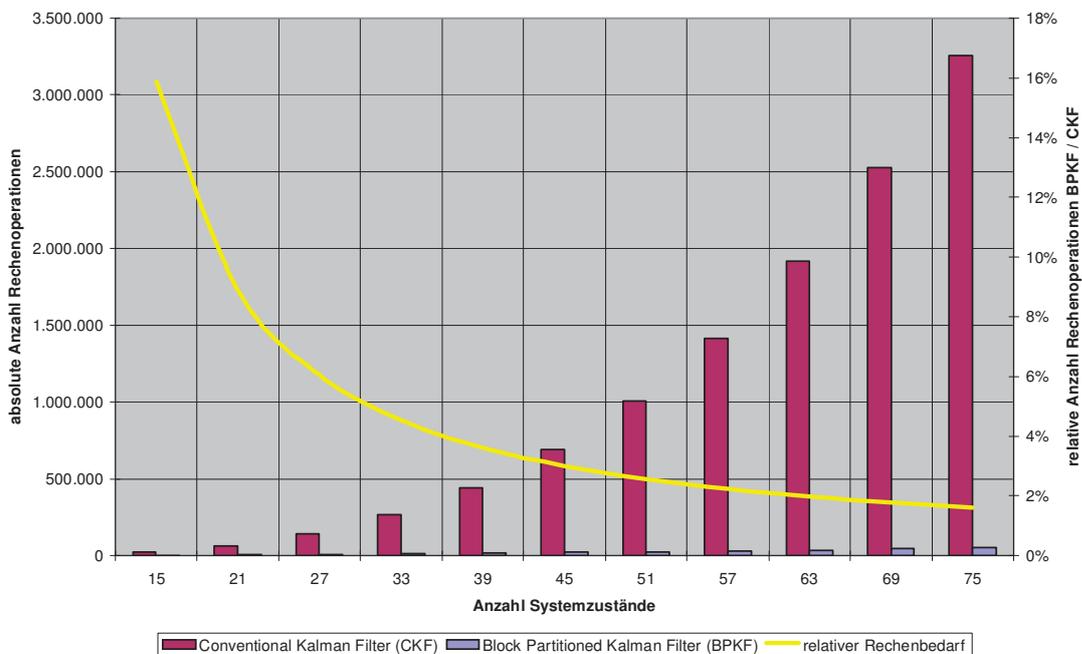


Abbildung 10: Optimierungspotential Kovarianzprädiktion

### 3.3.3 Kalmangewinnmatrix

Die Kalmangewinnmatrix  $K_k$  erfordert im CKF

$$2zzy - zy + 2yzy + 2zyy - zy \quad (\text{VI.3.57})$$

FLOPs. In einem BPKF mit unseren Voraussetzungen ergeben die Anforderungen der Hilfsmatrix  $M_k$

$$\begin{aligned} &2zpm + 2zcm - zm \\ &+ 2zpm + 2zvm + 2zcm - zm \\ &+ 2zph + 2zch - zh \end{aligned} \quad (\text{VI.3.58})$$

FLOPs, die der Hilfsmatrix  $N_k$

$$\begin{aligned} &2mpm + 2mcm \\ &+ 2mpm + 2mcm \\ &+ 2mph + 2mch - mh \\ &+ 2mpm + 2mvm + 2mcm \\ &+ 2mpm + 2mvm + 2mcm \\ &+ 2mph + 2mvh + 2mch - mh \\ &+ 2hpm + 2hcm - hm \\ &+ 2hpm + 2hcm - hm \\ &+ 2hph + 2hch \end{aligned} \quad (\text{VI.3.59})$$

FLOPs und die der Kalmangewinnmatrix  $K_k$

$$2zyy - zy \quad (\text{VI.3.60})$$

FLOPs. Die Anzahl der benötigten Rechenoperationen im BPKF lässt sich ausgehend von 65 Prozent auf 20 Prozent der benötigten Rechenoperationen im CKF drücken. Absolut betrachtet ist der Einfluss der Kalmangewinnmatrix gering.

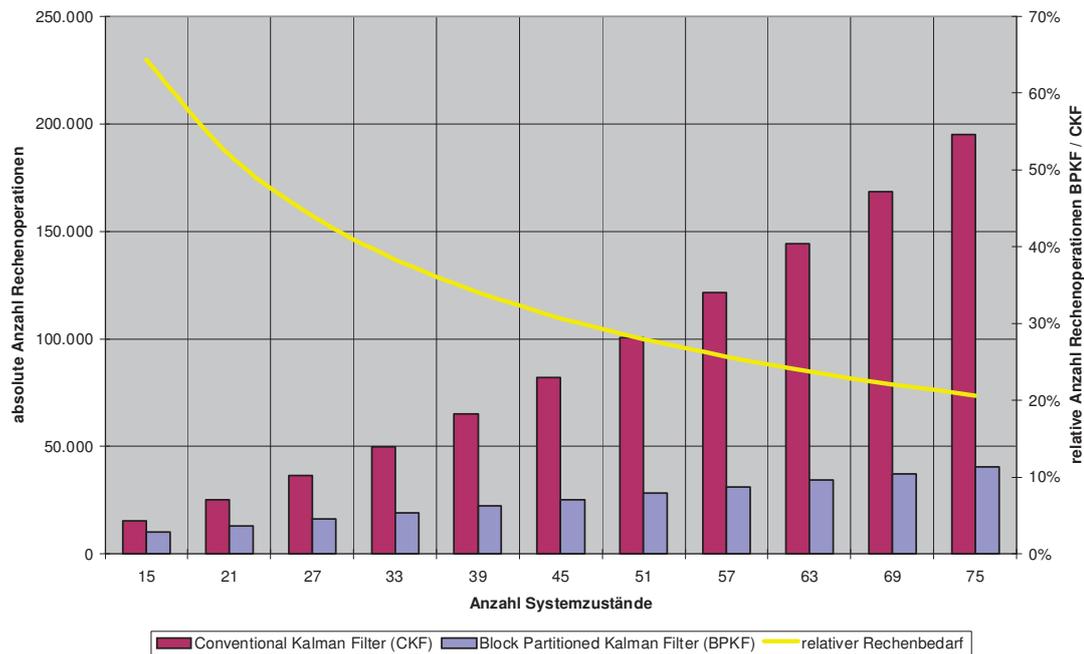


Abbildung 11: Optimierungspotential Kalmangewinnmatrix

### 3.3.4 Zustandskorrektur

Im CKF werden für die Zustandskorrektur  $z_k (+)$

$$2yz + 2zy \quad (\text{VI.3.61})$$

FLOPs benötigt. Die Berechnung der Residuen  $r_k$  im BPKF erfordert

$$2mp + 2mc + 2mp + 2mv + 2mc + 2hp + 2hc \quad (\text{VI.3.62})$$

FLOPs und der Rechenaufwand der Zustandskorrektur  $z_k (+)$  beträgt

$$2zy \quad (\text{VI.3.63})$$

FLOPs. Auf Grund der sehr geringen Anzahl an Berechnungen ist der Anteil am Gesamtrechnenbedarf vernachlässigbar.

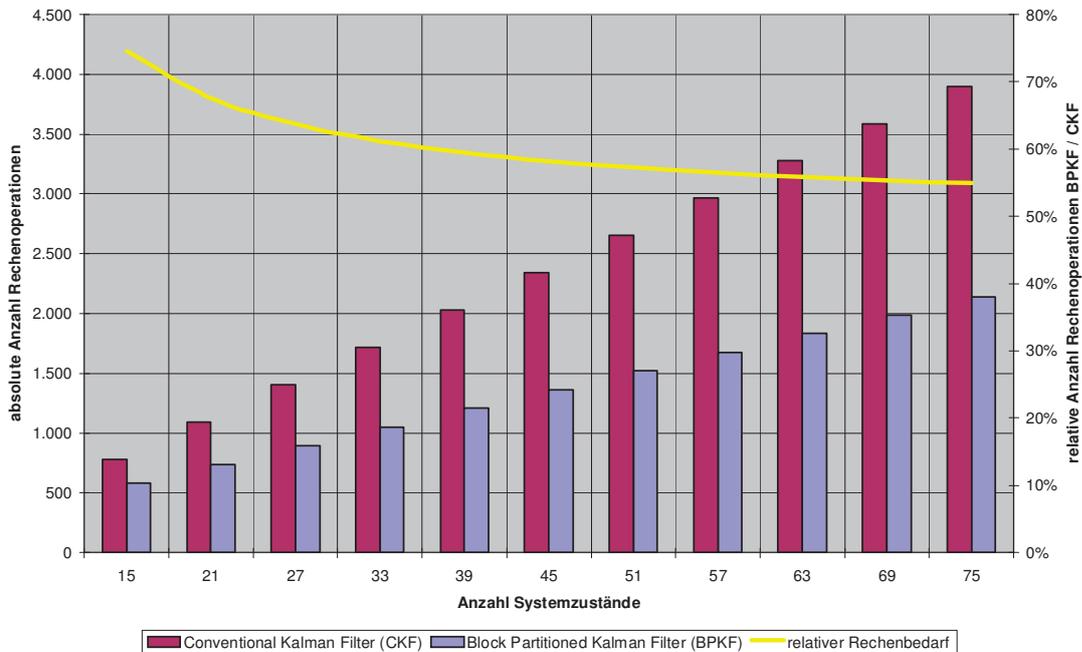


Abbildung 12: Optimierungspotential Zustandskorrektur

### 3.3.5 Kovarianzkorrektur

Die Kovarianzkorrektur  $P_k (-)$  eines CKF beläuft sich auf

$$2zyz - zz + 2zzz \quad (\text{VI.3.64})$$

FLOPs. Im BPKF werden für die Hilfsmatrix  $O_k$

$$2zyp - zp + 2zmv - zv + 2zyc - zc \quad (\text{VI.3.65})$$

FLOPs und für die Berechnung der Kovarianzmatrix  $P_k (-)$

$$\begin{aligned} & 2ppz + 2pvz + 2pcz \\ & + 2vp(z-p) + 2vv(z-p) + 2vc(z-p) \\ & + 2rp(r+s) + 2rv(r+s) + 2rc(r+s) \\ & + 2cps + 2cvs + 2ccs \\ & + 2gp(s-c) + 2gv(s-c) + 2gc(s-c) \\ & + 2apa + 2ava + 2aca \end{aligned} \quad (\text{VI.3.66})$$

FLOPs veranschlagt. Es ergibt sich ein Einsparpotential von bis zu 92 Prozent. Die Kovarianzkorrektur dominiert analog zur Kovarianzprädiktion auf Grund der sehr hohen Anzahl an Berechnungen die gesamte Kalmankorrektur.

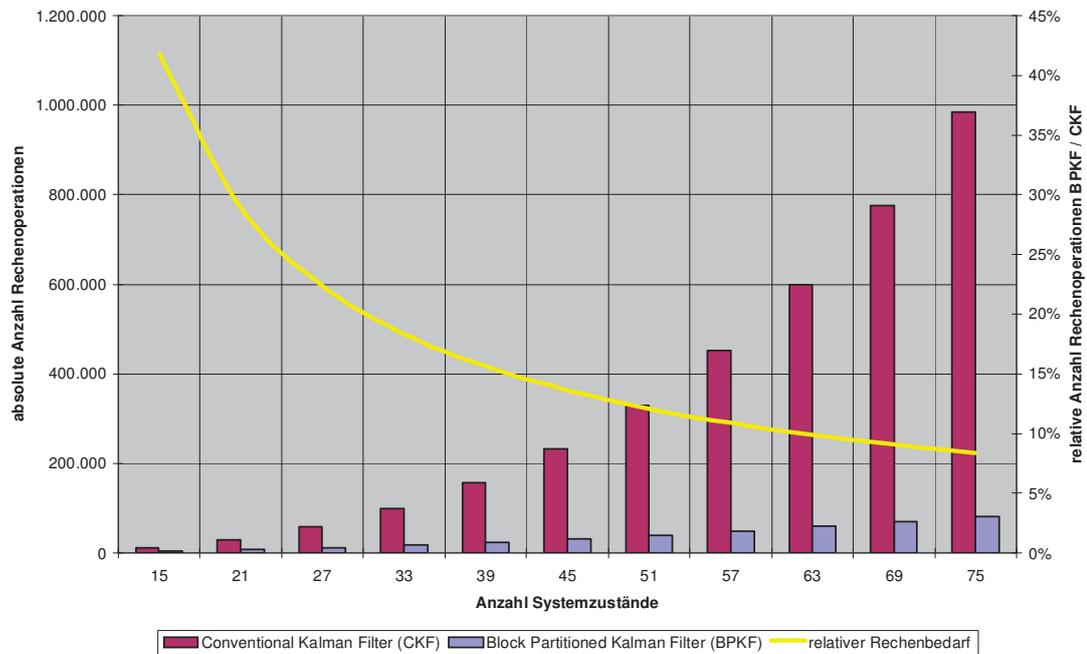


Abbildung 13: Optimierungspotential Kovarianzkorrektion

### 3.4 Gesamtübersicht

In der Zusammenfassung muss zwischen Kalmanprädiktion und Kalmanschätzung getrennt werden. Für die Kalmanprädiktion ergibt sich ein gewaltiges Einsparpotential von über 98 Prozent.

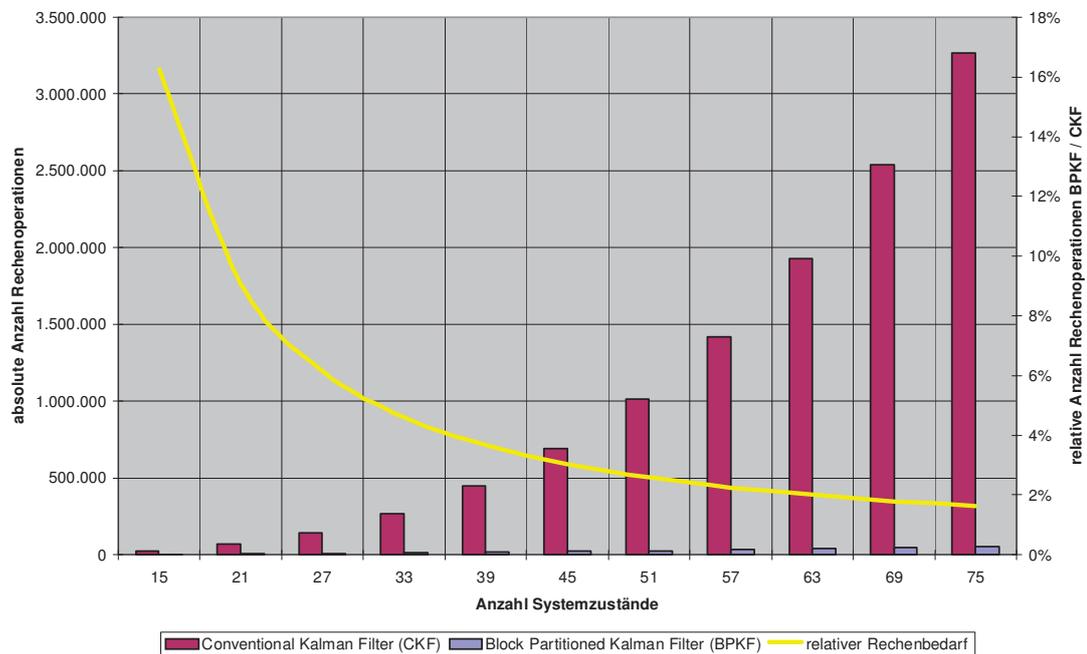


Abbildung 14: Optimierungspotential Kalmanprädiktion

Normalerweise besteht ein Zyklus bei Navigationsanwendungen nicht aus einer Prädiktion gefolgt von einer Korrektur. Legt man die Messfrequenzen der beteiligten Sensoren zu Grunde, so ergibt sich typischerweise eine Frequenz von fünf Hertz bis 25 Hertz für die Kalmanprädiktion und von einem Hertz bis zehn Hertz für die Kalmankorrektur. Dies bedeutet im Endeffekt, dass eine Korrektur nur etwa alle zwei bis fünf Prädiktionen erfolgt. Der Einfluss des Einsparpotentials der Kalmanprädiktion übertrifft somit, bei der gewählten Systemarchitektur mit wenig Beobachtungen und vielen Systemzuständen, den der Kalmankorrektur bei weitem.

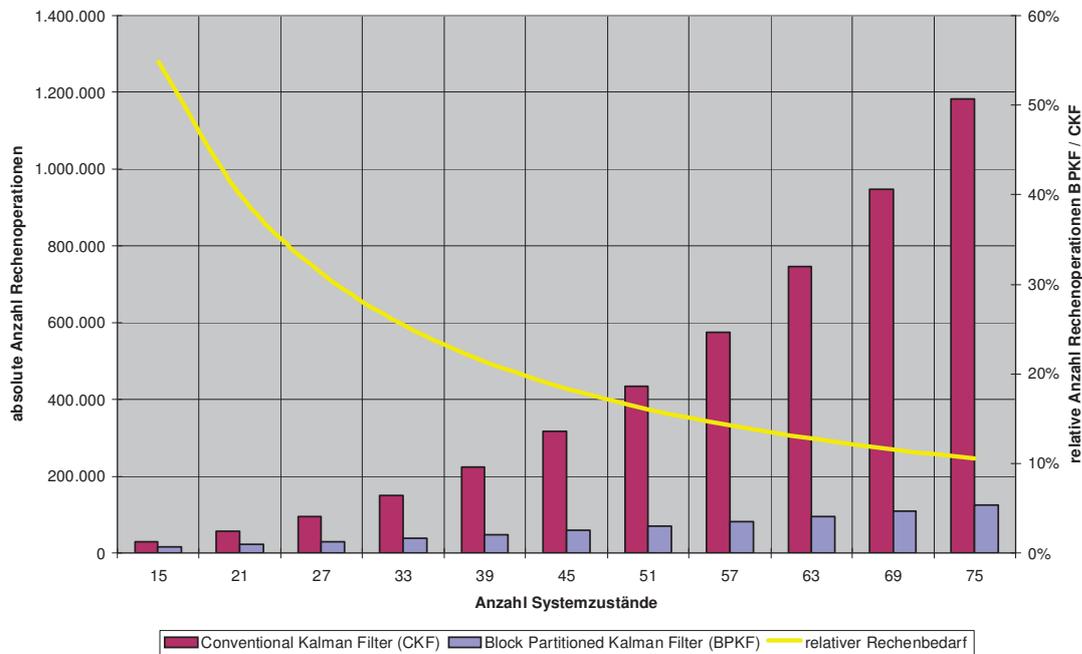


Abbildung 15: Optimierungspotential Kalmankorrektion

In der Kalmankorrektion ergeben sich Einsparungen von bis zu 90 Prozent. Innerhalb der Prädiktion und der Korrektion überwiegen jedoch immer die jeweiligen Kovarianzberechnungen auf Grund der vergleichsweise sehr hohen Anzahl an absoluten Berechnungen. Sehr vorteilhaft ist zudem, dass sich in der Prädiktion ein höheres Maß an Einsparungen erreichen lässt, da die Prädiktion, wie dargelegt, bis zu fünfmal öfter gerechnet werden muss. Zusammenfassend ergibt sich bei einem Berechnungsalgorithmus von fünf Kalmanprädiktionen und einer Kalmanschätzung folgendes Diagramm:

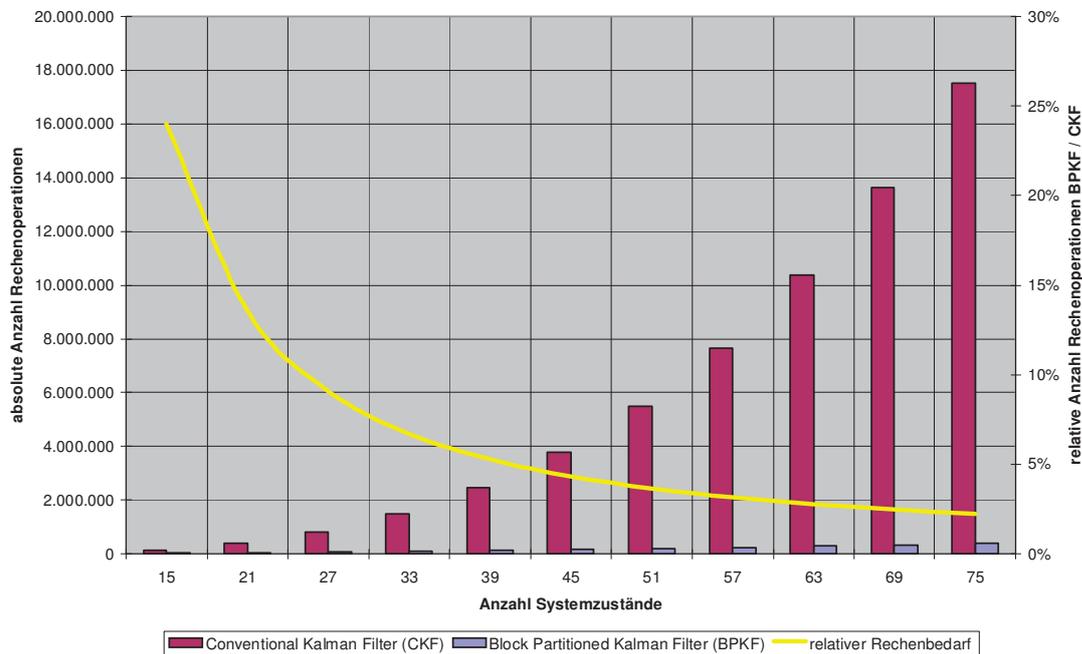


Abbildung 16: Optimierungspotential Kalmanfilter

Das wesentliche Ziel dieses Kapitels wurde somit erreicht. Es zeigte sich, dass auch bei Verwendung komplexerer Sensorfehlermodelle die Rechenzeit eines Navigationskalmanfilters durch geeignete Maßnahmen nicht in dritter Potenz, sondern in zweiter Potenz steigt. Dies erlaubt somit die Implementierung auf herkömmlichen, beziehungsweise bereits verfügbaren operationellen Avionikrechnern.

## 4. Zusammenfassung

Ziel dieses Abschnitts war die Optimierung des in den Abschnitten III und IV hergeleiteten Systemmodells. Neben einer allgemeinen Untersuchung möglicher Methoden zur Rechenzeitoptimierung wurde für das Navigationsmodell dieser Arbeit eine spezielle Methode ausgewählt. Die in dieser Arbeit entwickelte Methode Blockstruktur erfüllt alle nötigen Voraussetzungen zur weiteren Implementierung. Dabei wurden die beteiligten Matrizen und Vektoren zuerst in Submatrizen und Subvektoren zerlegt und anschließend deren vorrangige Struktur weiter zur Optimierung verwendet. Besonders in der Navigation, bei der die Struktur der Dynamik-, beziehungsweise der Beobachtungsmatrix konstant ist, bietet sich diese Methode an. Weiterhin von Vorteil ist die Tatsache, dass diese Methode keinerlei qualitative Einschränkungen beinhaltet. Der Algorithmus des CKF wurde im Folgenden an die Erfordernisse der Methode Blockstruktur angepasst und in den Algorithmus des BPKF überführt. Eine Analyse bestätigte das zuvor theoretisch angenommene sehr hohe Einsparpotential. Es bestätigte sich ein Einsparpotential von bis zu 98 Prozent. Dies ermöglicht erst den Einsatz eines Systemmodells mit vielen Zuständen in einer realen Applikation, da dort die Rechenleistung nicht unbegrenzt zur Verfügung steht. In den drei vorigen Abschnitten wurden alle Voraussetzungen geschaffen, um das Systemmodell im nächsten Abschnitt in einem Simulink Modell zu implementieren und eine Systemvalidierung durchzuführen, um die bisherigen theoretischen Überlegungen praktisch zu bestätigen.

# A Template zum Block Partitioned Kalman Filter (BPKF)

**Zustandsprädiktion:**

$$\mathbf{z}_k(-) = \Phi_{k-1} \mathbf{z}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k^p(-) = \Phi_{k-1}^{pp} \mathbf{z}_{k-1}^p + \Phi_{k-1}^{pv} \mathbf{z}_{k-1}^v$$

$$\mathbf{z}_k^v(-) = \Phi_{k-1}^{vp} \mathbf{z}_{k-1}^p + \Phi_{k-1}^{vv} \mathbf{z}_{k-1}^v + \Phi_{k-1}^{vr} \mathbf{z}_{k-1}^r + \Phi_{k-1}^{va} \mathbf{z}_{k-1}^a$$

$$\mathbf{z}_k^r(-) = \Phi_{k-1}^{rp} \mathbf{z}_{k-1}^p + \Phi_{k-1}^{rv} \mathbf{z}_{k-1}^v + \Phi_{k-1}^{rr} \mathbf{z}_{k-1}^r + \Phi_{k-1}^{ra} \mathbf{z}_{k-1}^a$$

$$\mathbf{z}_k^c(-) = \Phi_{k-1}^{cc} \mathbf{z}_{k-1}^c$$

$$\mathbf{z}_k^g(-) = \Phi_{k-1}^{gg} \mathbf{z}_{k-1}^g$$

$$\mathbf{z}_k^a(-) = \Phi_{k-1}^{aa} \mathbf{z}_{k-1}^a$$

**Hilfsmatrix:**

$$L_{k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1}$$

$$L_{k-1}^{pp} = \Phi_{k-1}^{pp} P_{k-1}^{pp} + \Phi_{k-1}^{pv} P_{k-1}^{pvT}$$

$$L_{k-1}^{pv} = \Phi_{k-1}^{vp} P_{k-1}^{pv} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vvT}$$

$$L_{k-1}^{pr} = \Phi_{k-1}^{rp} P_{k-1}^{pr} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{rvT}$$

$$L_{k-1}^{pc} = \Phi_{k-1}^{cp} P_{k-1}^{pc} + \Phi_{k-1}^{cv} P_{k-1}^{cvT}$$

$$L_{k-1}^{pg} = \Phi_{k-1}^{gp} P_{k-1}^{pg} + \Phi_{k-1}^{gv} P_{k-1}^{gvT}$$

$$L_{k-1}^{pa} = \Phi_{k-1}^{ap} P_{k-1}^{pa} + \Phi_{k-1}^{av} P_{k-1}^{avT}$$

$$L_{k-1}^{cc} = \Phi_{k-1}^{cc} P_{k-1}^{cc}$$

$$L_{k-1}^{cg} = \Phi_{k-1}^{gc} P_{k-1}^{cg}$$

$$L_{k-1}^{ca} = \Phi_{k-1}^{ac} P_{k-1}^{ca}$$

$$L_{k-1}^{vp} = \Phi_{k-1}^{vp} P_{k-1}^{vp} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vvT} + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{vrT} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{vaT}$$

$$L_{k-1}^{vr} = \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{vr} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vvT} + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{vrT} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{vaT}$$

$$L_{k-1}^{vc} = \Phi_{k-1}^{cv} P_{k-1}^{vc} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vvT} + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{vrT} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{vaT}$$

$$L_{k-1}^{vg} = \Phi_{k-1}^{gv} P_{k-1}^{vg} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vvT} + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{vrT} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{vaT}$$

$$L_{k-1}^{va} = \Phi_{k-1}^{av} P_{k-1}^{va} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vvT} + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{vrT} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{vaT}$$

$$L_{k-1}^{gc} = \Phi_{k-1}^{cg} P_{k-1}^{gc}$$

$$L_{k-1}^{ga} = \Phi_{k-1}^{ag} P_{k-1}^{ga}$$

$$L_{k-1}^{rp} = \Phi_{k-1}^{rp} P_{k-1}^{rp} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{rvT} + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{rrT} + \Phi_{k-1}^{ra} P_{k-1}^{raT}$$

$$L_{k-1}^{rv} = \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{rv} + \Phi_{k-1}^{vv} P_{k-1}^{vvT} + \Phi_{k-1}^{vr} P_{k-1}^{vrT} + \Phi_{k-1}^{va} P_{k-1}^{vaT}$$

$$L_{k-1}^{rr} = \Phi_{k-1}^{rp} P_{k-1}^{pr} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{rvT} + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{rrT} + \Phi_{k-1}^{ra} P_{k-1}^{raT}$$

$$L_{k-1}^{rc} = \Phi_{k-1}^{cp} P_{k-1}^{rc} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{rvT} + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{rrT} + \Phi_{k-1}^{ra} P_{k-1}^{raT}$$

$$L_{k-1}^{rg} = \Phi_{k-1}^{gp} P_{k-1}^{rg} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{rvT} + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{rrT} + \Phi_{k-1}^{ra} P_{k-1}^{raT}$$

$$L_{k-1}^{ra} = \Phi_{k-1}^{ap} P_{k-1}^{ra} + \Phi_{k-1}^{rv} P_{k-1}^{rvT} + \Phi_{k-1}^{rr} P_{k-1}^{rrT} + \Phi_{k-1}^{ra} P_{k-1}^{raT}$$

$$L_{k-1}^{ac} = \Phi_{k-1}^{ca} P_{k-1}^{ac}$$

$$L_{k-1}^{ag} = \Phi_{k-1}^{ga} P_{k-1}^{ag}$$

$$L_{k-1}^{aa} = \Phi_{k-1}^{aa} P_{k-1}^{aa}$$

**Hilfsmatrix:**

$$J_{k-1} = \Gamma_{k-1} Q_{k-1}$$

$$J_{k-1}^{vf} = \Gamma_{k-1}^{vf} Q_{k-1}^{ff}$$

$$J_{k-1}^{r\omega} = \Gamma_{k-1}^{r\omega} Q_{k-1}^{\omega\omega}$$

$$J_{k-1}^{cc} = \Gamma_{k-1}^{cc} Q_{k-1}^{cc}$$

$$J_{k-1}^{gg} = \Gamma_{k-1}^{gg} Q_{k-1}^{gg}$$

$$J_{k-1}^{aa} = \Gamma_{k-1}^{aa} Q_{k-1}^{aa}$$

**Kovarianzprädiktion:**

$$P_k(-) = L_{k-1} \Phi_{k-1}^T + J_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$$

$$P_k^{pp}(-) = L_{k-1}^{pp} \Phi_{k-1}^{ppT} + L_{k-1}^{pv} \Phi_{k-1}^{pvT}$$

$$P_k^{pv}(-) = L_{k-1}^{vp} \Phi_{k-1}^{vpT} + L_{k-1}^{vv} \Phi_{k-1}^{vvT} + L_{k-1}^{vr} \Phi_{k-1}^{vrT} + L_{k-1}^{va} \Phi_{k-1}^{vaT}$$

$$P_k^{pr}(-) = L_{k-1}^{rp} \Phi_{k-1}^{prT} + L_{k-1}^{rv} \Phi_{k-1}^{rvT} + L_{k-1}^{rr} \Phi_{k-1}^{rrT} + L_{k-1}^{ra} \Phi_{k-1}^{raT}$$

$$P_k^{pc}(-) = L_{k-1}^{cp} \Phi_{k-1}^{pcT}$$

$$P_k^{pg}(-) = L_{k-1}^{gp} \Phi_{k-1}^{pgT}$$

$$P_k^{pa}(-) = L_{k-1}^{ap} \Phi_{k-1}^{paT}$$

$$P_k^{vv}(-) = L_{k-1}^{vp} \Phi_{k-1}^{vpT} + L_{k-1}^{vv} \Phi_{k-1}^{vvT} + L_{k-1}^{vr} \Phi_{k-1}^{vrT} + L_{k-1}^{va} \Phi_{k-1}^{vaT} + J_{k-1}^{vf} \Gamma_{k-1}^{vfT}$$

$$P_k^{vr}(-) = L_{k-1}^{rv} \Phi_{k-1}^{vrT} + L_{k-1}^{vv} \Phi_{k-1}^{vvT} + L_{k-1}^{vr} \Phi_{k-1}^{vrT} + L_{k-1}^{va} \Phi_{k-1}^{vaT}$$

$$P_k^{vc}(-) = L_{k-1}^{cv} \Phi_{k-1}^{vcT}$$

$$P_k^{vg}(-) = L_{k-1}^{gv} \Phi_{k-1}^{vgT}$$

$$P_k^{va}(-) = L_{k-1}^{av} \Phi_{k-1}^{vaT}$$

$$P_k^{rr}(-) = L_{k-1}^{rp} \Phi_{k-1}^{prT} + L_{k-1}^{rv} \Phi_{k-1}^{rvT} + L_{k-1}^{rr} \Phi_{k-1}^{rrT} + L_{k-1}^{ra} \Phi_{k-1}^{raT} + J_{k-1}^{r\omega} \Gamma_{k-1}^{r\omega T}$$

$$P_k^{rc}(-) = L_{k-1}^{cp} \Phi_{k-1}^{rcT}$$

$$P_k^{rg}(-) = L_{k-1}^{gp} \Phi_{k-1}^{rgT}$$

$$P_k^{ra}(-) = L_{k-1}^{ap} \Phi_{k-1}^{raT}$$

$$P_k^{cc}(-) = L_{k-1}^{cc} \Phi_{k-1}^{ccT} + J_{k-1}^{cc} \Gamma_{k-1}^{ccT}$$

$$P_k^{cg}(-) = L_{k-1}^{gc} \Phi_{k-1}^{cgT}$$

$$P_k^{ca}(-) = L_{k-1}^{ac} \Phi_{k-1}^{caT}$$

$$P_k^{gg}(-) = L_{k-1}^{gg} \Phi_{k-1}^{ggT} + J_{k-1}^{gg} \Gamma_{k-1}^{ggT}$$

$$P_k^{ga}(-) = L_{k-1}^{ag} \Phi_{k-1}^{gaT}$$

$$P_k^{aa}(-) = L_{k-1}^{aa} \Phi_{k-1}^{aaT} + J_{k-1}^{aa} \Gamma_{k-1}^{aaT}$$

**Hilfsmatrix:**

$$M_k = P_k(-) H_k^T$$

$$\begin{aligned} M_k^{pPR} &= P_k^{pp}(-) H_k^{PRpT} + P_k^{pc}(-) H_k^{PRcT} \\ M_k^{vPR} &= P_k^{pv}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{vc}(-) H_k^{PRcT} \\ M_k^{rPR} &= P_k^{pr}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{rc}(-) H_k^{PRcT} \\ M_k^{cPR} &= P_k^{pc}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{cc}(-) H_k^{PRcT} \\ M_k^{gPR} &= P_k^{pg}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{cg}(-)^T H_k^{PRcT} \\ M_k^{aPR} &= P_k^{pa}(-)^T H_k^{PRpT} + P_k^{ca}(-)^T H_k^{PRcT} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_k^{pRR} &= P_k^{pp}(-) H_k^{RRpT} + P_k^{pv}(-) H_k^{RRvT} + P_k^{pc}(-) H_k^{RRcT} \\ M_k^{vRR} &= P_k^{pv}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{vv}(-) H_k^{RRvT} + P_k^{vc}(-) H_k^{RRcT} \\ M_k^{rRR} &= P_k^{pr}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{vr}(-)^T H_k^{RRvT} + P_k^{rc}(-) H_k^{RRcT} \\ M_k^{cRR} &= P_k^{pc}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{vc}(-)^T H_k^{RRvT} + P_k^{cc}(-) H_k^{RRcT} \\ M_k^{gRR} &= P_k^{pg}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{vg}(-)^T H_k^{RRvT} + P_k^{cg}(-)^T H_k^{RRcT} \\ M_k^{aRR} &= P_k^{pa}(-)^T H_k^{RRpT} + P_k^{va}(-)^T H_k^{RRvT} + P_k^{ca}(-)^T H_k^{RRcT} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_k^{pB} &= P_k^{pp}(-) H_k^{BpT} + P_k^{pc}(-) H_k^{BcT} \\ M_k^{vB} &= P_k^{pv}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{vc}(-) H_k^{BcT} \\ M_k^{rB} &= P_k^{pr}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{rc}(-) H_k^{BcT} \\ M_k^{cB} &= P_k^{pc}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{cc}(-) H_k^{BcT} \\ M_k^{gB} &= P_k^{pg}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{cg}(-)^T H_k^{BcT} \\ M_k^{aB} &= P_k^{pa}(-)^T H_k^{BpT} + P_k^{ca}(-)^T H_k^{BcT} \end{aligned}$$

**Hilfsmatrix:**

$$N_k = (H_k M_k + R_k)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} N_k^{PRPR} & N_k^{PRRR} & N_k^{PRB} \\ N_k^{RRPR} & N_k^{RRRR} & N_k^{RRB} \\ N_k^{BPR} & N_k^{BRR} & N_k^{BB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_k^{PRp} M_k^{pPR} + H_k^{PRc} M_k^{cPR} + R_k^{PRPR} & H_k^{PRp} M_k^{pRR} + H_k^{PRc} M_k^{cRR} + R_k^{PRRR} & H_k^{PRp} M_k^{pB} + H_k^{PRc} M_k^{cB} \\ H_k^{RRp} M_k^{pPR} + H_k^{RRv} M_k^{vPR} + H_k^{RRc} M_k^{cPR} + R_k^{RRPR} & H_k^{RRp} M_k^{pRR} + H_k^{RRv} M_k^{vRR} + H_k^{RRc} M_k^{cRR} + R_k^{RRRR} & H_k^{RRp} M_k^{pB} + H_k^{RRv} M_k^{vB} + H_k^{RRc} M_k^{cB} \\ H_k^{Bp} M_k^{pPR} + H_k^{Bc} M_k^{cPR} & H_k^{Bp} M_k^{pRR} + H_k^{Bc} M_k^{cRR} & H_k^{Bp} M_k^{pB} + H_k^{Bc} M_k^{cB} + R_k^{BB} \end{pmatrix}^{-1}$$

**Kalmangewinnmatrix:**

$$K_k = M_k N_k$$

$$\begin{aligned} K_k^{pPR} &= M_k^{pPR} N_k^{PRPR} + M_k^{pRR} N_k^{RRPR} + M_k^{pB} N_k^{BPR} \\ K_k^{vPR} &= M_k^{vPR} N_k^{PRPR} + M_k^{vRR} N_k^{RRPR} + M_k^{vB} N_k^{BPR} \\ K_k^{rPR} &= M_k^{rPR} N_k^{PRPR} + M_k^{rRR} N_k^{RRPR} + M_k^{rB} N_k^{BPR} \\ K_k^{cPR} &= M_k^{cPR} N_k^{PRPR} + M_k^{cRR} N_k^{RRPR} + M_k^{cB} N_k^{BPR} \\ K_k^{gPR} &= M_k^{gPR} N_k^{PRPR} + M_k^{gRR} N_k^{RRPR} + M_k^{gB} N_k^{BPR} \\ K_k^{aPR} &= M_k^{aPR} N_k^{PRPR} + M_k^{aRR} N_k^{RRPR} + M_k^{aB} N_k^{BPR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_k^{pRR} &= M_k^{pRR} N_k^{PRRR} + M_k^{pRR} N_k^{RRRR} + M_k^{pB} N_k^{BRR} \\ K_k^{vRR} &= M_k^{vRR} N_k^{PRRR} + M_k^{vRR} N_k^{RRRR} + M_k^{vB} N_k^{BRR} \\ K_k^{rRR} &= M_k^{rRR} N_k^{PRRR} + M_k^{rRR} N_k^{RRRR} + M_k^{rB} N_k^{BRR} \\ K_k^{cRR} &= M_k^{cRR} N_k^{PRRR} + M_k^{cRR} N_k^{RRRR} + M_k^{cB} N_k^{BRR} \\ K_k^{gRR} &= M_k^{gRR} N_k^{PRRR} + M_k^{gRR} N_k^{RRRR} + M_k^{gB} N_k^{BRR} \\ K_k^{aRR} &= M_k^{aRR} N_k^{PRRR} + M_k^{aRR} N_k^{RRRR} + M_k^{aB} N_k^{BRR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_k^{pB} &= M_k^{pPR} N_k^{PRB} + M_k^{pRR} N_k^{RRB} + M_k^{pB} N_k^{BB} \\ K_k^{vB} &= M_k^{vPR} N_k^{PRB} + M_k^{vRR} N_k^{RRB} + M_k^{vB} N_k^{BB} \\ K_k^{rB} &= M_k^{rPR} N_k^{PRB} + M_k^{rRR} N_k^{RRB} + M_k^{rB} N_k^{BB} \\ K_k^{cB} &= M_k^{cPR} N_k^{PRB} + M_k^{cRR} N_k^{RRB} + M_k^{cB} N_k^{BB} \\ K_k^{gB} &= M_k^{gPR} N_k^{PRB} + M_k^{gRR} N_k^{RRB} + M_k^{gB} N_k^{BB} \\ K_k^{aB} &= M_k^{aPR} N_k^{PRB} + M_k^{aRR} N_k^{RRB} + M_k^{aB} N_k^{BB} \end{aligned}$$

**Residuen:**

$$r_k = y_k - H_k z_k(-)$$

$$\begin{aligned} r_k^{pR} &= y_k^{pR} - H_k^{PRp} z_k^p(-) - H_k^{PRc} z_k^c(-) \\ r_k^{RR} &= y_k^{RR} - H_k^{RRp} z_k^p(-) - H_k^{RRv} z_k^v(-) - H_k^{RRc} z_k^c(-) \\ r_k^B &= y_k^B - H_k^{Bp} z_k^p(-) - H_k^{Bc} z_k^c(-) \end{aligned}$$

**Zustandskorrektur:**

$$z_k(+) = z_k(-) + K_k r_k$$

$$\begin{aligned} z_k^p(+) &= z_k^p(-) + K_k^{pPR} r_k^{pR} + K_k^{pRR} r_k^{RR} + K_k^{pB} r_k^B \\ z_k^v(+) &= z_k^v(-) + K_k^{vPR} r_k^{pR} + K_k^{vRR} r_k^{RR} + K_k^{vB} r_k^B \\ z_k^r(+) &= z_k^r(-) + K_k^{rPR} r_k^{pR} + K_k^{rRR} r_k^{RR} + K_k^{rB} r_k^B \\ z_k^c(+) &= z_k^c(-) + K_k^{cPR} r_k^{pR} + K_k^{cRR} r_k^{RR} + K_k^{cB} r_k^B \\ z_k^g(+) &= z_k^g(-) + K_k^{gPR} r_k^{pR} + K_k^{gRR} r_k^{RR} + K_k^{gB} r_k^B \\ z_k^a(+) &= z_k^a(-) + K_k^{aPR} r_k^{pR} + K_k^{aRR} r_k^{RR} + K_k^{aB} r_k^B \end{aligned}$$

**Hilfsmatrix:**

$$O_k = K_k H_k$$

$$\begin{aligned} O_k^{pp} &= K_k^{pPR} H_k^{PRp} + K_k^{pRR} H_k^{RRp} + K_k^{pB} H_k^{Bp} \\ O_k^{vp} &= K_k^{vPR} H_k^{PRp} + K_k^{vRR} H_k^{RRp} + K_k^{vB} H_k^{Bp} \\ O_k^{rp} &= K_k^{rPR} H_k^{PRp} + K_k^{rRR} H_k^{RRp} + K_k^{rB} H_k^{Bp} \\ O_k^{cp} &= K_k^{cPR} H_k^{PRp} + K_k^{cRR} H_k^{RRp} + K_k^{cB} H_k^{Bp} \\ O_k^{gp} &= K_k^{gPR} H_k^{PRp} + K_k^{gRR} H_k^{RRp} + K_k^{gB} H_k^{Bp} \\ O_k^{ap} &= K_k^{aPR} H_k^{PRp} + K_k^{aRR} H_k^{RRp} + K_k^{aB} H_k^{Bp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_k^{pv} &= K_k^{pRR} H_k^{RRv} \\ O_k^{vv} &= K_k^{vRR} H_k^{RRv} \\ O_k^{rv} &= K_k^{rRR} H_k^{RRv} \\ O_k^{cv} &= K_k^{cRR} H_k^{RRv} \\ O_k^{gv} &= K_k^{gRR} H_k^{RRv} \\ O_k^{av} &= K_k^{aRR} H_k^{RRv} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_k^{pc} &= K_k^{pRR} H_k^{RRc} + K_k^{pB} H_k^{Bc} \\ O_k^{vc} &= K_k^{vRR} H_k^{RRc} + K_k^{vB} H_k^{Bc} \\ O_k^{rc} &= K_k^{rRR} H_k^{RRc} + K_k^{rB} H_k^{Bc} \\ O_k^{cc} &= K_k^{cRR} H_k^{RRc} + K_k^{cB} H_k^{Bc} \\ O_k^{gc} &= K_k^{gRR} H_k^{RRc} + K_k^{gB} H_k^{Bc} \\ O_k^{ac} &= K_k^{aRR} H_k^{RRc} + K_k^{aB} H_k^{Bc} \end{aligned}$$

**Kovarianzkorrektur:**

$$P_k(+)= (I - O_k) P_k(-)$$

$$P_k^{pp}(+) = P_k^{pp}(-) - O_k^{pp} P_k^{pp}(-) - O_k^{pv} P_k^{pv}(-)^T - O_k^{pc} P_k^{pc}(-)^T$$

$$P_k^{pv}(+) = P_k^{pv}(-) - O_k^{pp} P_k^{pv}(-) - O_k^{pv} P_k^{vv}(-) - O_k^{pc} P_k^{vc}(-)^T$$

$$P_k^{pr}(+) = P_k^{pr}(-) - O_k^{pp} P_k^{pr}(-) - O_k^{pv} P_k^{vr}(-) - O_k^{pc} P_k^{rc}(-)^T$$

$$P_k^{pc}(+) = P_k^{pc}(-) - O_k^{pp} P_k^{pc}(-) - O_k^{pv} P_k^{vc}(-) - O_k^{pc} P_k^{cc}(-)$$

$$P_k^{pg}(+) = P_k^{pg}(-) - O_k^{pp} P_k^{pg}(-) - O_k^{pv} P_k^{vg}(-) - O_k^{pc} P_k^{cg}(-)$$

$$P_k^{pa}(+) = P_k^{pa}(-) - O_k^{pp} P_k^{pa}(-) - O_k^{pv} P_k^{va}(-) - O_k^{pc} P_k^{ca}(-)$$

$$P_k^{vv}(+) = P_k^{vv}(-) - O_k^{vp} P_k^{vv}(-) - O_k^{vq} P_k^{vq}(-) - O_k^{vc} P_k^{vc}(-)^T$$

$$P_k^{vr}(+) = P_k^{vr}(-) - O_k^{vp} P_k^{vr}(-) - O_k^{vq} P_k^{vr}(-) - O_k^{vc} P_k^{rc}(-)^T$$

$$P_k^{vc}(+) = P_k^{vc}(-) - O_k^{vp} P_k^{vc}(-) - O_k^{vq} P_k^{vc}(-) - O_k^{vc} P_k^{cc}(-)$$

$$P_k^{vg}(+) = P_k^{vg}(-) - O_k^{vp} P_k^{vg}(-) - O_k^{vq} P_k^{vg}(-) - O_k^{vc} P_k^{cg}(-)$$

$$P_k^{va}(+) = P_k^{va}(-) - O_k^{vp} P_k^{va}(-) - O_k^{vq} P_k^{va}(-) - O_k^{vc} P_k^{ca}(-)$$

$$P_k^{rr}(+) = P_k^{rr}(-) - O_k^{rp} P_k^{rr}(-) - O_k^{rv} P_k^{vr}(-) - O_k^{rc} P_k^{rc}(-)^T$$

$$P_k^{rc}(+) = P_k^{rc}(-) - O_k^{rp} P_k^{rc}(-) - O_k^{rv} P_k^{vc}(-) - O_k^{rc} P_k^{cc}(-)$$

$$P_k^{rg}(+) = P_k^{rg}(-) - O_k^{rp} P_k^{rg}(-) - O_k^{rv} P_k^{vg}(-) - O_k^{rc} P_k^{cg}(-)$$

$$P_k^{ra}(+) = P_k^{ra}(-) - O_k^{rp} P_k^{ra}(-) - O_k^{rv} P_k^{va}(-) - O_k^{rc} P_k^{ca}(-)$$

$$P_k^{cc}(+) = P_k^{cc}(-) - O_k^{cp} P_k^{cc}(-) - O_k^{cv} P_k^{vc}(-) - O_k^{cc} P_k^{cc}(-)$$

$$P_k^{cg}(+) = P_k^{cg}(-) - O_k^{cp} P_k^{cg}(-) - O_k^{cv} P_k^{vg}(-) - O_k^{cc} P_k^{cg}(-)$$

$$P_k^{ca}(+) = P_k^{ca}(-) - O_k^{cp} P_k^{ca}(-) - O_k^{cv} P_k^{va}(-) - O_k^{cc} P_k^{ca}(-)$$

$$P_k^{gg}(+) = P_k^{gg}(-) - O_k^{gp} P_k^{gg}(-) - O_k^{gv} P_k^{vg}(-) - O_k^{gc} P_k^{cg}(-)$$

$$P_k^{ga}(+) = P_k^{ga}(-) - O_k^{gp} P_k^{ga}(-) - O_k^{gv} P_k^{va}(-) - O_k^{gc} P_k^{ca}(-)$$

$$P_k^{aa}(+) = P_k^{aa}(-) - O_k^{ap} P_k^{aa}(-) - O_k^{av} P_k^{va}(-) - O_k^{ac} P_k^{ca}(-)$$

# VII Kinematische Verifizierung

Integraler Bestandteil dieser Arbeit soll neben der Herleitung und Entwicklung der analytischen Erkenntnisse in den vorangegangenen Abschnitten auch der eindeutige Nachweis ihrer Richtigkeit sein. Dazu werden die einzelnen Teilergebnisse im Rahmen einer sensorfehlerfreien kinematischen Testumgebung verifiziert. Denn die kinematische Testumgebung bietet im Vergleich zu einer dynamischen Testumgebung einige Vorteile. So sind alle Systemzustände inklusive deren Ableitungen analytisch korrekt und kontinuierlich verfügbar. Es muss kein Differentialgleichungssystem diskret gelöst werden, was bereits im Trajektoriengenerator induzierte Fehler in der Referenztrajektorie eliminiert. Der eventuell auftretende Schleifenschlussfehler kann direkt auf Inkonsistenzen in der Simulation des jeweiligen Teilergebnisses zurückgeführt werden. Zur besseren Übersichtlichkeit werden nur die jeweils benötigten und gerade angesprochenen Abbildungen der Simulationsergebnisse im Text präsentiert. Alle Funktionsgraphen können im jeweils zugehörigen Anhang bei Interesse nachgeschlagen werden. Das jeweilige Testkonzept wird innerhalb der folgenden Kapitel vorgestellt.

## 1. Kinematische Referenztrajektorie (Anhang A)

Der kinematische Trajektoriengenerator besteht aus zwei Bestandteilen. Zuerst erfolgt eine Generierung der Positionsparameter  $\lambda$  über dreidimensionale Lissajousfiguren und anschließend werden die inertialen Sensordaten daraus berechnet. Lissajousfiguren entstehen durch die Überlagerung aufeinander senkrecht stehender Schwingungen, deren Frequenzen in einem rationalen Verhältnis stehen.<sup>66</sup> Die Positionsparameter werden nach folgendem Algorithmus berechnet:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \phi \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \sin(at) \\ B \sin(bt) \\ C \sin(ct) + 10000 \end{pmatrix} \quad (\text{VII.1.1})$$

Die Orientierungsparameter  $\psi_{hb}$  werden ebenfalls durch Schwingungen angeregt.

$$\psi_{hb} = \begin{pmatrix} \varphi_{hb} \\ \vartheta_{hb} \\ \psi_{hb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \sin(dt) \\ E \sin(et) + \frac{\pi i}{4} \\ F \sin(ft) \end{pmatrix} \quad (\text{VII.1.2})$$

Zur Vermeidung der Singularität in der Eulerwinkelparametrisierung werden die Orientierungsparameter  $\psi_{hb}$  direkt im Anschluss in Quaternionen  $\tilde{q}_{hb}$  umgerechnet. Die noch fehlenden Geschwindigkeitsparameter  $\mathbf{v}_h$  lassen sich durch analytische Ableitung der Positionsparameter  $\lambda$  und anschließende Umformung unter Verwendung der Koeffizientenmatrix  $D(\lambda)$  aus Abschnitt II Anhang A direkt aus den obigen Koeffizienten berechnen.

$$\mathbf{v}_h = D(\lambda) \cdot \dot{\lambda} = \begin{pmatrix} v_{h_1} \\ v_{h_2} \\ v_{h_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M(\phi) + h) B b \cos(bt) \\ (N(\phi) + h) \cos(\phi) \cdot A a \cos(at) \\ -C c \cos(ct) \end{pmatrix} \quad (\text{VII.1.3})$$

Die Koeffizienten der Referenztrajektorie lauten:

$$\begin{array}{cccccc} A = 0,004 & B = 0,002 & C = 5000 & D = 4 & E = 0,5 & F = 8 \\ a = 0,01 & b = 0,02 & c = 0,015 & d = 0,0075 & e = 0,01 & f = 0,005 \end{array} \quad (\text{VII.1.4})$$

Die zu Grunde liegende Lissajousfigur wird dabei während einer Simulationsdauer von einer Stunde etwas mehr als dreimal durchlaufen. Anschließend werden aus diesen Zuständen die inertialen Sensordaten generiert. Die Änderung der Geschwindigkeit im horizontfesten System  $\dot{\mathbf{v}}_h$  lässt sich durch analytische Ableitung der Geschwindigkeitsparameter  $\mathbf{v}_h$  aus Gleichung (VII.1.3) ermitteln.

$$\dot{\mathbf{v}}_h = \begin{pmatrix} \dot{v}_{h_1} \\ \dot{v}_{h_2} \\ \dot{v}_{h_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(M(\phi) + h) B b^2 \sin(bt) \\ -(N(\phi) + h) \cos(\phi) \cdot A a^2 \sin(at) \\ C c^2 \sin(ct) \end{pmatrix} \quad (\text{VII.1.5})$$

<sup>66</sup> Meyberg, Kurt & Vachener, Peter; Höhere Mathematik 1 Differential- und Integralrechnung Vektor- und Matrizenrechnung – 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin 1999, S.86

Die benötigte Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem  $f_b$  berechnet sich daraus durch Umstellen der nichtlinearen Geschwindigkeitsdifferentialgleichung in absoluten Zuständen gemäß Abschnitt III.

$$f_b = R_{hb}^T(\psi_{hb}) \cdot \left( \dot{v}_h + \left( \omega_{eh}^h(\lambda, v_h) + 2R_{he}(\lambda) \cdot \omega_{ie}^e \right) \cdot x_e(\lambda) \right) - g_h(\lambda) \quad (\text{VII.1.6})$$

Die Orientierungsparameter  $\psi_{hb}$  aus Gleichung (VII.1.2) müssen analytisch abgeleitet werden.

$$\dot{\psi}_{hb} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{hb} \\ \dot{\vartheta}_{hb} \\ \dot{\psi}_{hb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dd \cos(dt) \\ Ee \cos(et) \\ Ff \cos(ft) \end{pmatrix} \quad (\text{VII.1.7})$$

Danach können die inertialen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{ib}^b$  gemäß der nichtlinearen Orientierungsdifferentialgleichung in absoluten Zuständen nach Abschnitt III umgeformt werden.

$$\omega_{ib}^b = C_{hb}(\psi_{hb}) \cdot \dot{\psi}_{hb} + R_{hb}^T(\psi_{hb}) \cdot \omega_{ih}^h(\lambda, v_h) \quad (\text{VII.1.8})$$

Alle Zustands- und Messgrößen werden in einer Frequenz von 200 Hertz erzeugt. Dies ist nötig, um im nächsten Kapitel den Strapdownalgorithmus mit einer Frequenz von 100 Hertz mit einem diskreten numerischen Integrationsverfahren vierter Ordnung simulieren zu können. Eine Übersicht der Referenztrajektorie ist Abbildung 17 zu entnehmen. Die detaillierten Graphen aller Navigationszustände und der daraus abgeleiteten inertialen Sensordaten sind im Anhang A abgebildet.

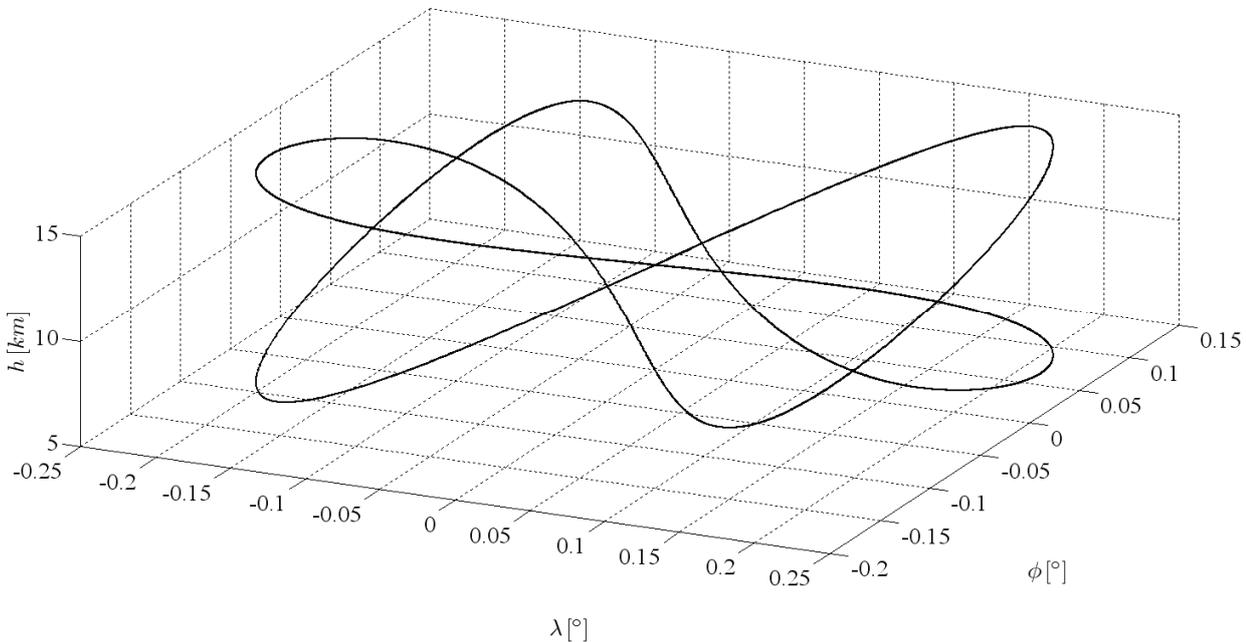


Abbildung 17: Kinematische Referenztrajektorie

Die kinematische Referenztrajektorie wird nur in der Parametrisierung in gemischten Koordinaten des Ansatzes 2 erzeugt. Die Parametrisierungen in erdfesten kartesischen Koordinaten des Ansatzes 1 und erdfesten ellipsoidischen Koordinaten des Ansatzes 3 können durch Umrechnung daraus bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass bei der Parametrisierung in erdfesten kartesischen Koordinaten die Orientierungsparameter zwischen dem erdfesten und dem körperfesten Bezugssystem und nicht wie bei den anderen beiden Parametrisierungen zwischen dem horizontfesten und dem körperfesten Bezugssystem definiert sind. Dies führt dazu, dass sich eventuelle Positionsfehler bei der Rücktransformation auf die Genauigkeit der Orientierungsparameter auswirken. Zudem muss bei der Transformation des Rotationsquaternions eine zusätzliche Bedingung eingeführt werden, da aus den Rotationsmatrizen stets Quaternionen mit positivem Skalarteil extrahiert werden. Das Rotationsquaternion sollte jedoch stetig und differenzierbar bleiben. Dies wird durch die Einführung einer Nachbarschaftsbedingung erreicht.

## 2. Verifizierung der Bewegungsgleichungen

Ausgehend von der Referenztrajektorie (blaue Blöcke) und der Generierung der inertialen Sensordaten (graue Blöcke) wird nun das Testkonzept zur Verifizierung der Bewegungsgleichungen definiert. In einem ersten Schritt erfolgt die Verifizierung der fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen (gelbe Blöcke) durch Vergleich mit der Referenztrajektorie.

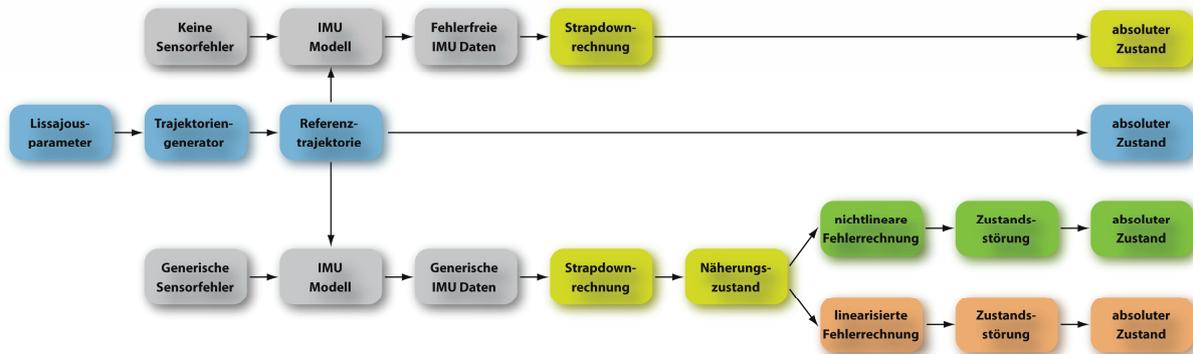


Abbildung 18: Testkonzept für die Bewegungsgleichungen

In einem zweiten Schritt werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen (grüne Blöcke) verifiziert. Dabei werden die wahren inertialen Sensordaten in gemessene inertielle Sensordaten und generische inertielle Sensordatenstörungen zerlegt. Die gemessenen inertialen Sensordaten werden durch die fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen und die inertialen Sensordatenstörungen durch die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen prozessiert. Die Kombination beider Ergebnisse wird mit der Referenztrajektorie verglichen. Danach erfolgt die Verifizierung der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen (rote Blöcke) in gleicher Art und Weise. Da die Geschwindigkeitsdifferentialgleichung der fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen des Ansatzes 2 gemäß Gleichung (VII.1.6) für die Ableitung der inertialen Sensordaten benutzt wurde, können eventuelle Fehler in dieser Geschwindigkeitsdifferentialgleichung im Ansatz 2 nicht detektiert werden. Da die inertialen Sensordaten jedoch auch in den Ansätzen 1 und 3 in den fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen prozessiert werden, würde ein eventueller Fehler in dieser Geschwindigkeitsdifferentialgleichung trotzdem bemerkt werden. Dies schließt die Verifizierung der Bewegungsgleichungen aus Abschnitt III inklusive der Templates in dessen Anhang ab. Zusätzlich wird in einem separaten Teil am Ende dieses Kapitels der Fehler, der durch Verwendung der vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen gemacht wird, ermittelt und beurteilt.

### 2.1. Fehlerfreie Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen (Anhang B)

Die fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen (gelbe Blöcke) in vektorieller Schreibweise aus Kapitel III und deren skalare Ausformulierung aus den zugehörigen Anhängen müssen auf Grund ihrer Komplexität unabhängig voneinander verifiziert werden. Dies ist das Ziel dieses Kapitels. Im vorigen Kapitel wurde eine kinematische Referenztrajektorie erzeugt.

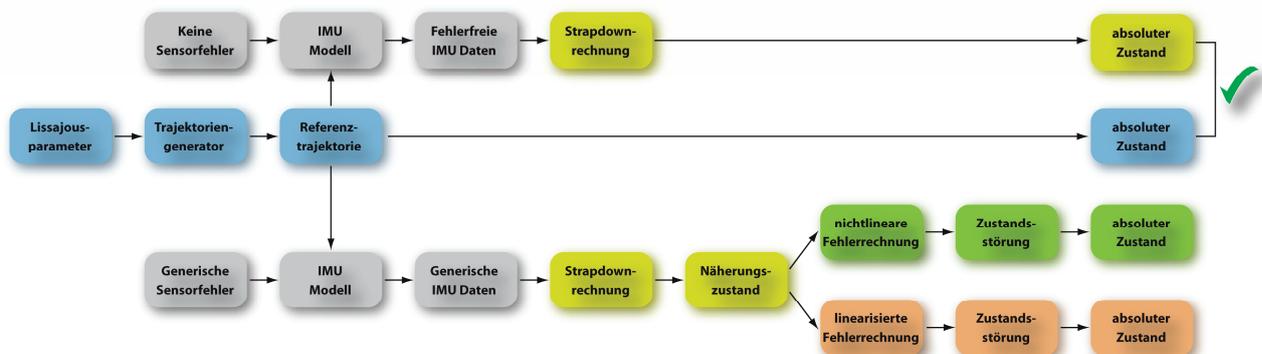


Abbildung 19: Testkonzept für die Strapdownrechnung

Die zu Grunde liegende Lissajousfigur ist analytisch in beliebiger Genauigkeit und beliebiger Frequenz verfügbar. Für die Zwecke dieser Arbeit genügt eine Frequenz von 200 Hertz. Die inertialen Sensordaten werden zu den diskreten Zeitpunkten aus den Zustandsparametern konsistent abgeleitet. Da im Rahmen einer computergestützten Simulation

nicht die kontinuierlichen Bewegungsgleichungen direkt, sondern nur deren diskrete Äquivalente verwendet werden können, muss eine geeignete numerische Integrationsmethode<sup>67</sup> gewählt werden. Da alle verfügbaren höheren Integrationsmethoden von unabhängigen Differentialgleichungssystemen ausgehen, müssen diese, auf Grund der Abhängigkeit der Navigationsdifferentialgleichungssysteme von den inertialen Sensordaten, etwas modifiziert werden. So müssen, um keine Fehler im Rahmen des Integrationsverfahrens zu machen, die inertialen Sensordaten zu jedem Auswertungsschritt zeitlich konsistent vorliegen. In diesem Zusammenhang bietet sich eines der Integrationsverfahren vierter Ordnung nach Runge-Kutta an, bei dem, neben der normalen Schrittweite, die Ausgangsfunktion nur noch zu jeder halben Schrittweite ausgewertet werden muss. Unsere kinematische Referenztrajektorie kann somit mit einer Frequenz von 100 Hertz prozessiert werden, ohne weitere Fehler im numerischen Integrationsverfahren auf Grund der Abhängigkeit des Differentialgleichungssystems von den Sensordaten zu machen. Der Restfehler 5. Ordnung auf Grund des Verfahrens 4. Ordnung bleibt jedoch bestehen. Folgender modifizierter Runge-Kutta Integrationsalgorithmus wurde verwendet:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}(t) &= f(z(t), s(t)) \\
 k_1 &= f(z(t_k), s(t_k)) \\
 k_2 &= f\left(z(t_k) + \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \cdot k_1, s\left(t_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right)\right) \\
 k_3 &= f\left(z(t_k) + \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \cdot k_2, s\left(t_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right)\right) \\
 k_4 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot k_3, s(t_{k+1})\right) \\
 \Rightarrow z(t_{k+1}) &= z(t_k) + \frac{t_{k+1} - t_k}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{VII.2.1}$$

Es lassen sich natürlich auch höherwertige numerische Integrationsalgorithmen verwenden. Deren Nachteil ist jedoch stets, dass die Koeffizienten  $k_i$  nicht zu regelmäßigen Zeitpunkten berechnet werden und sich damit eine völlig konsistente Implementierung der inertialen Sensordaten nicht verwirklichen lässt. Eine nicht völlig konsistente Implementierung, etwa durch Mittelung, führt jedoch zu Fehlern in einer Größenordnung größer als die des jeweiligen numerischen Integrationsverfahrens, da die komplette Dynamik der Bewegungsgleichungen in den inertialen Sensordaten abgebildet ist. Eventuell auftretende Restfehler können bei obigem Testkonzept somit nur noch durch die diskrete Abtastung der Lissajousfigur und deren Integration in 4. Ordnung hervorgerufen werden. In der Evaluation der Parametrisierung in erdfesten kartesischen Koordinaten des Ansatzes 1 sind zudem noch zusätzliche potentielle Fehlerquellen zu beachten. So müssen die Positionsparameter zur Vergleichbarkeit mit der Referenztrajektorie nach Kapitel II Anhang A wieder zurück in ellipsoidische Positionsparameter überführt werden. Diese Transformation ist jedoch analytisch nicht völlig korrekt. Zweitens wirken sich eventuelle Positionsfehler auf Grund von

$$R_{eb}(\psi_{eb}) = R_{eh}(\lambda) \cdot R_{hb}(\psi_{hb}) \tag{VII.2.2}$$

direkt auf die Genauigkeit der Orientierungsparameter aus. Drittens ist die Lissajousfigur so gewählt, dass die Singularität in der Eulerwinkelparametrisierung für  $\vartheta_{hb}$  vermieden wird. Für  $\vartheta_{eb}$  gilt dies jedoch nur eingeschränkt. Die Singularität wird durch die Referenztrajektorie zwar in den Parametrisierungen in beiden Bezugssystemen vermieden, jedoch hat auch die größere Nähe zur Singularität bei  $\vartheta_{eb}$  im Vergleich zu  $\vartheta_{hb}$  Auswirkungen auf die Genauigkeit. Für die Berechnung selbst spielt die Singularität keine Rolle, da alle Algorithmen in Quaternionen gerechnet werden. In der visuellen Ausgabe sind die Eulerwinkel jedoch in der Nähe der Singularität kurzfristig gestört. In Abbildung 20 ist der resultierende Positionsfehler nach einer Stunde dargestellt. Zur Verifizierung ist der Positionsfehler als Allgemeinmaß zur Verifizierung völlig ausreichend, da sich Geschwindigkeits- und Orientierungsfehler über eine Stunde stets auf den Positionsfehler auswirken. Alle Zustandsfehler sind in Anhang B abgebildet. Der totale Positionsfehler beträgt weniger als  $5 \cdot 10^{-6}$  Meter nach einer Stunde Simulationszeit ohne Stützung. Auch auf Grund der Tatsache, dass sich der totale Positionsfehler bei allen drei Parametrisierungen in der gleichen Größenordnung bewegt, können Fehler in den Algorithmen der einzelnen Parametrisierungen ausgeschlossen werden. Die Unterschiede in der Genauigkeit zwischen dem Ansatz 1 und den Ansätzen 2 und 3 haben verschiedene Gründe. So ist die numerische Genauigkeit direkt an die Ursprungseinheit eines jeden Zustandes gebunden. Bei einer Parametrisierung im erdfesten kartesischen Bezugssystem, wie im Ansatz 1, sind die drei Positionsparameter in der Einheit Meter definiert und alle in etwa gleich genau. Bei den beiden anderen Ansätzen ist die horizontale Position in Radiant, während die Höhe in Metern definiert ist. Bei der Umrechnung der horizontalen Positionsfehler von Radiant in Meter, wie in Abbildung 20 ersichtlich, werden die Positionsparameter jedoch mit einem Faktor der Größenordnung  $10^6$  multipliziert, so dass die numerischen Ungenauigkeiten einen sehr viel größeren Einfluss besitzen. In der ellipsoidischen Länge ist dieser erhöhte Einfluss der numerischen Effekte deutlich erkennbar. So ist die Positionsgenauigkeit im Ansatz 1 aus diesem Grund in der ersten Hälfte unserer Simulation höher als die Positionsgenauigkeit in den Ansätzen 2 und 3. Gegen Ende der Simulation dominieren jedoch andere Effekte und diese

<sup>67</sup> Fehlberg, Erwin; Classical Fifth-, Sixth-, Seventh- and Eighth-Order Runge-Kutta Formulas with Step-size Control, NASA TR R-287, Washington D.C. 1968

führen dazu, dass die Positionsgenauigkeit des Ansatzes 1 hinter die Positionsgenauigkeit der Ansätze 2 und 3 zurückfällt. Die etwas ungenaueren Orientierungsparameter auf Grund der Nähe zur Singularität lassen die exponentiell instabile Höhe im Ansatz 1 etwas schneller divergieren als in den Ansätzen 2 und 3, und es ergibt sich nach einer gewissen Simulationsdauer eine im Vergleich geringere Positionsgenauigkeit. Es handelt sich dabei in der fehlerfreien Verifizierungssimulation jedoch um vernachlässigbar kleine Effekte.

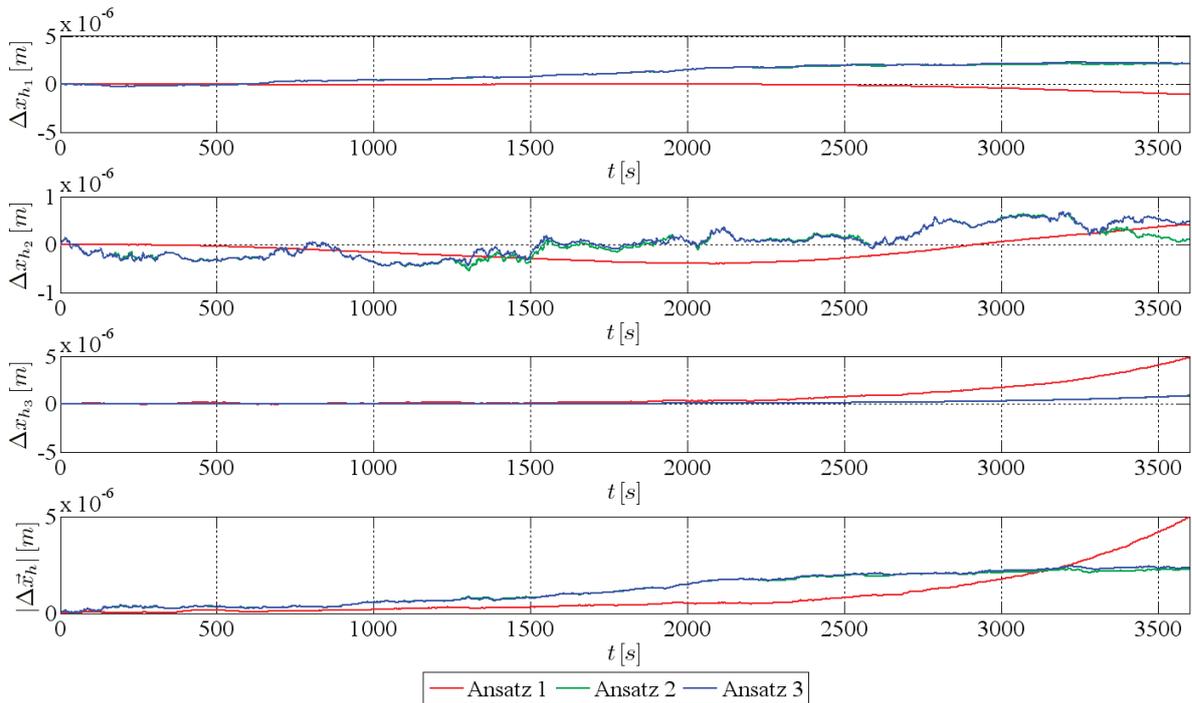


Abbildung 20: Positionsfehler der fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen

Der Positionsfehler darf nur noch von der Simulationsfrequenz und von der Integrationsordnung abhängen. Dies wurde durch Simulationsläufe mit abweichender Frequenz von 1 Hertz und 10 Hertz in 4. Ordnung und durch Simulationsläufe in 1. und 2. Ordnung bei 100 Hertz bestätigt.

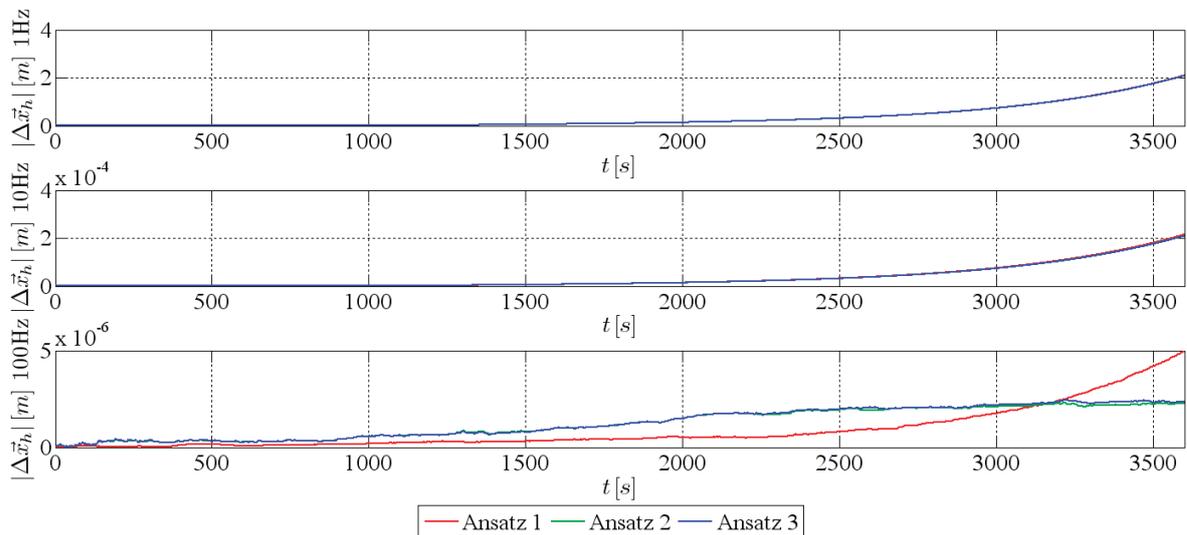


Abbildung 21: Positionsfehler für verschiedene Simulationsfrequenzen bei 4. Ordnung

Der Positionsfehler in Abhängigkeit der Simulationsfrequenz ist Abbildung 21 zu entnehmen. Eine weitere Erhöhung der Simulationsfrequenz bringt keinen weiteren Nutzen mehr, da sich bereits bei 100 Hertz nur noch numerische Rauscheffekte und kein klarer Trend mehr abzeichnen. Es ist darauf hinzuweisen, dass Simulationsfrequenzen von 1 oder 10 Hertz nicht operationell einsetzbar sind und hier nur der Nachweisführung dienen. Der Positionsfehler in Abhängigkeit der Integrationsordnung ist in Abbildung 22 visualisiert. Auch hier führt eine weitere Erhöhung der Integrationsordnung nicht mehr zu einer nennenswerten Verbesserung. Ein weiteres Indiz der Richtigkeit der fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen ist die Tatsache, dass die Positionsgenauigkeit bei reduzierter Ordnung oder Frequenz in allen Parametrisierungen fast identisch ist. Eventuell vorhandene Fehler würden zu größeren Abweichungen führen. Der entstehende Restfehler konnte somit auf leider unvermeidbare numerische Effekte zurückgeführt werden. Dieser verbleibende Restfehler von weniger als  $5 \cdot 10^{-6}$  Meter nach einer Stunde ohne

Stützung Simulationszeit auf Grund der Implementierung verschiedener kontinuierlicher Parametrisierungen auf diskreten Systemen kann in Theorie und Praxis als hinnehmbar klein betrachtet werden.

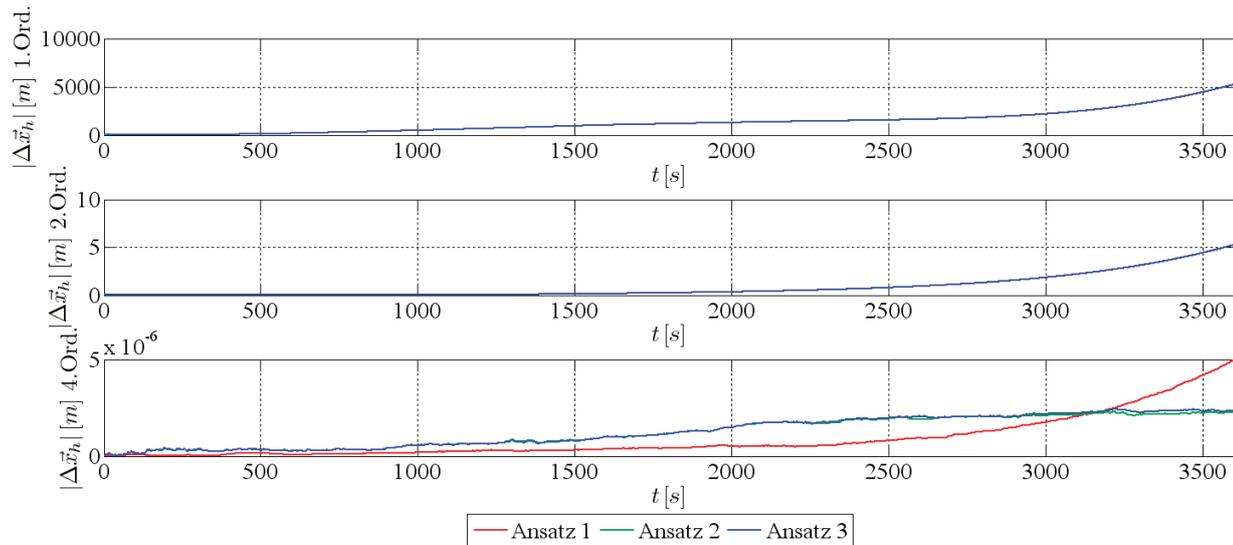


Abbildung 22: Positionsfehler für verschiedene Integrationsordnungen bei 100 Hertz

Dies schließt die Verifizierung der fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen ab.

## 2.2. Nichtlineare Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen (Anhang C)

Im vorigen Kapitel wurden die fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen abschließend verifiziert. Als nächster Schritt folgt die Verifizierung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen (grüne Blöcke). Diese können als Ausgangsgleichungen für die Implementierung eines EKF dienen. Im Rahmen dieser Arbeit stellen sie nur einen Zwischenschritt dar.

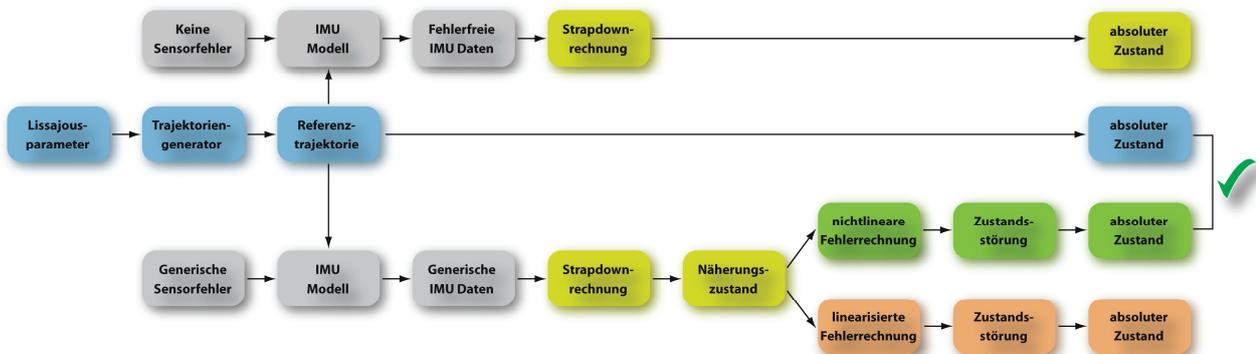


Abbildung 23: Testkonzept für die nichtlineare Fehlerrechnung

Zuerst werden die fehlerfreien inertialen Sensordaten  $s$  der Referenztrajektorie in generische Sensordatenstörungen  $\delta s$  und deren zugehörige Sensordaten  $\tilde{s}$  zerlegt.

$$s = \tilde{s} + \delta s \quad (\text{VII.2.3})$$

Für die Sensordatenstörungen werden folgende generische Werte angenommen:

$$\delta \omega_{ib_i}^b = 0,003 \frac{^\circ}{h} \quad (\text{VII.2.4})$$

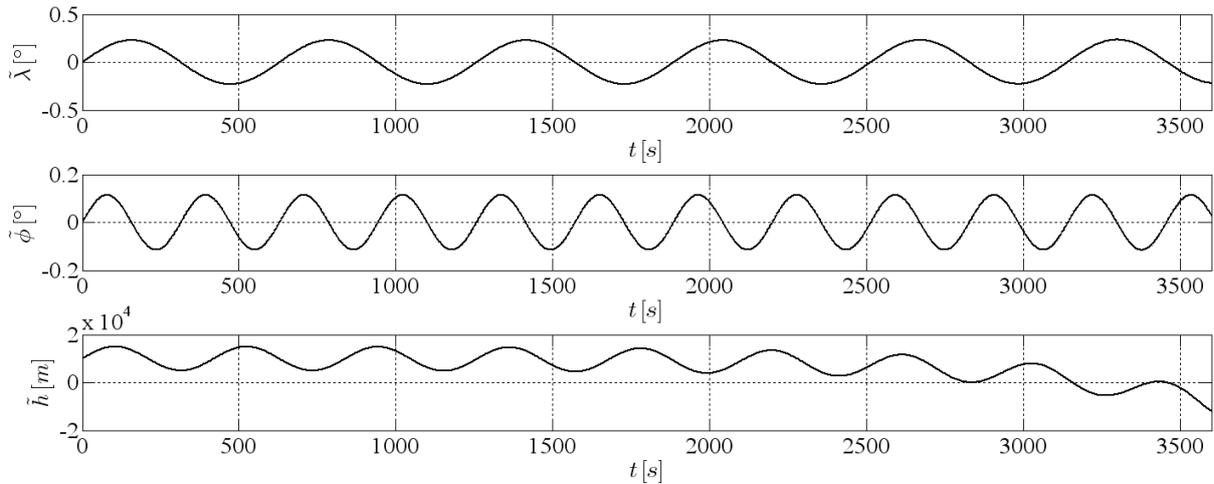
$$\delta f_{b_i} = 0,025 mg$$

Die Sensordatenstörungen orientieren sich dabei an den Bias einer Litton LN-100G RLG IMU. Über die bereits verifizierten Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen aus dem vorigen Kapitel werden die zu den gemessenen Sensordaten  $\tilde{s}$  gehörenden Näherungszustände  $\tilde{z}$  berechnet.

$$\dot{\tilde{z}} = f(\tilde{z}, \tilde{s}) \quad (\text{VII.2.5})$$

In Abbildung 24 ist die auf Grund der generischen Sensorstörungen resultierende Näherungsposition dargestellt. Alle Näherungszustände sind dem Anhang C zu entnehmen. In Abbildung 24 ist zu erkennen, dass der Höhenfehler von mehr als 20 Kilometern nach einer Stunde Simulationszeit nicht annähernd der Spezifikation einer Litton LN-100G

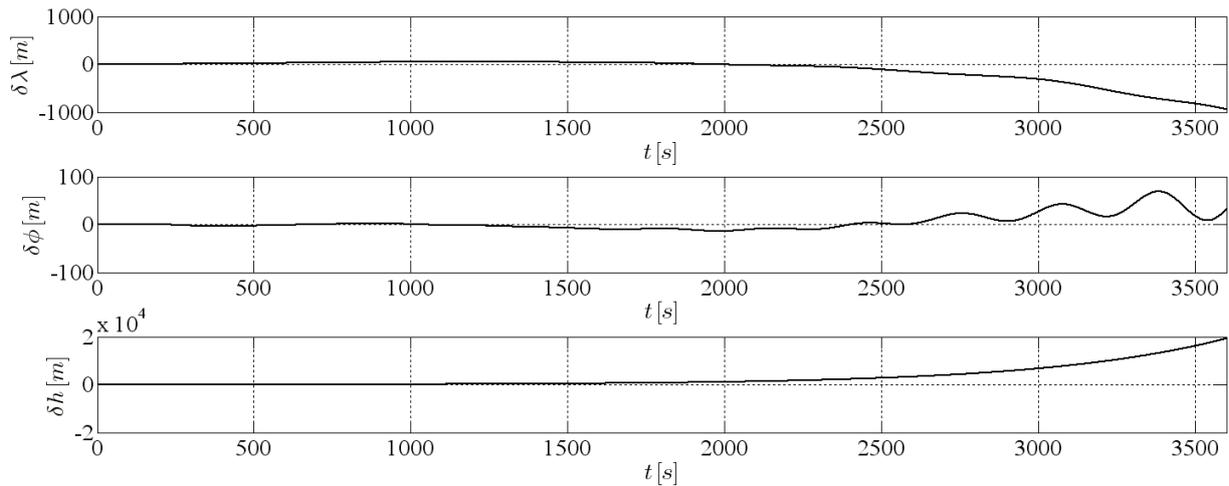
RLG IMU entspricht. Dies kommt daher, dass für die Werte in der Spezifikation einer Litton LN-100G RLG IMU grundsätzlich eine Stützung des exponentiell instabilen Höhenkanals vorgesehen ist. Im Rahmen dieser Simulation werden alle Zustände jedoch generell ungestützt simuliert.



**Abbildung 24: Näherungsposition aus den nichtlinearen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen**

Die wahren Zustandsstörungen  $\delta z$  ergeben sich dann durch den Vergleich der wahren Zustände  $z$  aus der Referenztrajektorie mit eben diesen Näherungszuständen  $\tilde{z}$ .

$$\delta z = z - \tilde{z} \quad (\text{VII.2.6})$$



**Abbildung 25: Positionsstörung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen**

Auf Grund des nichtlinearen Zusammenhangs der linksmultiplikativen Eulerwinkel- beziehungsweise Quaternionenaufdatierung können die Zustandsstörungen der Orientierungsparameter nicht direkt durch Differenzbildung ermittelt werden. Die Quaternionenstörung kann aus der allgemeinen Quaternionenmultiplikation berechnet werden:

$$\tilde{q}_{h\tilde{h}} = \tilde{q}_{hb} (-\tilde{q}_{\tilde{h}b}) \quad (\text{VII.2.7})$$

Die absolute Quaternionenstörung lautet dementsprechend:

$$|\varepsilon_{h\tilde{h}}| = \sqrt{\tilde{q}_{h\tilde{h}_1}^2 + \tilde{q}_{h\tilde{h}_2}^2 + \tilde{q}_{h\tilde{h}_3}^2} \quad (\text{VII.2.8})$$

Für die Eulerwinkelstörung müssen an die Zustandsdifferenzen noch Korrekturen angefügt werden.

$$\psi_{h\tilde{h}} = \begin{pmatrix} \varphi_{h\tilde{h}} \\ \vartheta_{h\tilde{h}} \\ \psi_{h\tilde{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\vartheta_{hb} - \vartheta_{\tilde{h}b}) \sin(\psi_{hb}) + (\varphi_{hb} - \varphi_{\tilde{h}b}) \cos(\vartheta_{hb}) \cos(\psi_{hb}) \\ (\vartheta_{hb} - \vartheta_{\tilde{h}b}) \cos(\psi_{hb}) + (\varphi_{hb} - \varphi_{\tilde{h}b}) \cos(\vartheta_{hb}) \sin(\psi_{hb}) \\ (\psi_{hb} - \psi_{\tilde{h}b}) - (\varphi_{hb} - \varphi_{\tilde{h}b}) \sin(\vartheta_{hb}) \end{pmatrix} \quad (\text{VII.2.9})$$

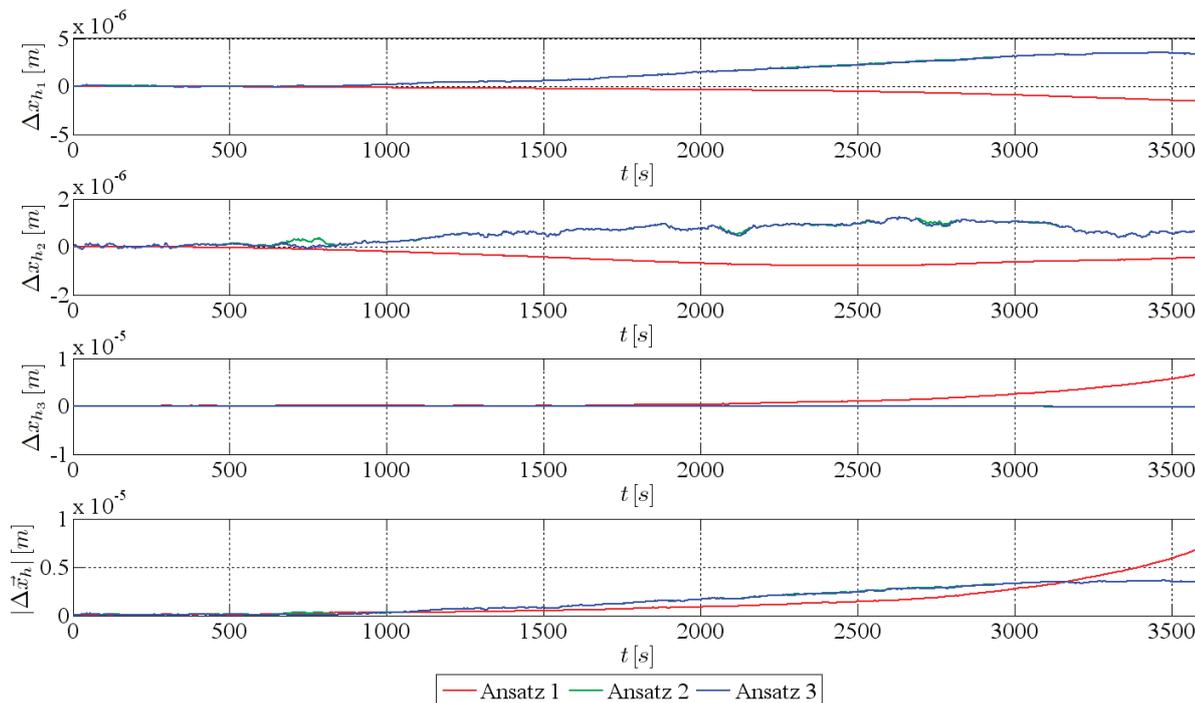
Die absolute Eulerwinkelstörung lautet:

$$|\varepsilon_{h\tilde{h}}| = \sqrt{(\varphi_{hb} - \varphi_{\tilde{h}b})^2 + (\vartheta_{hb} - \vartheta_{\tilde{h}b})^2 + (\psi_{hb} - \psi_{\tilde{h}b})^2 - 2(\varphi_{hb} - \varphi_{\tilde{h}b})(\psi_{hb} - \psi_{\tilde{h}b}) \sin(\vartheta_{hb})} \quad (\text{VII.2.10})$$

Obige Gleichungen gelten selbstverständlich auch für die Orientierungsparameter zwischen dem erdfesten und dem körperfesten Bezugssystem des Ansatzes 1. Die resultierenden Positionsstörungen können Abbildung 25 entnommen werden. Die exponentielle Instabilität der Höhe im Vergleich zu den Lageparametern ist dabei deutlich erkennbar. Für die verbleibenden Graphen aller Zustandsstörungen wird wiederum auf Anhang C verwiesen. Es handelt sich bei der dargestellten Positionsstörung lediglich um die Abweichung von der Referenztrajektorie auf Grund der künstlich verfälschten inertialen Sensordaten. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen sind in Abbildung 25 noch nicht berücksichtigt. Es soll lediglich die absolute Größe der Positionsstörung auf Grund der Sensordatenstörung gezeigt werden. In einem zweiten Schritt werden nun die gemessenen Sensordaten  $\tilde{s}$ , die Sensordatenstörungen  $\delta s$  und die Näherungszustände  $\tilde{z}$  in die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern eingesetzt, um die berechneten Zustandsstörungen  $\delta z$  zu bestimmen.

$$\delta \dot{z} = f(\tilde{z} + \delta z, \tilde{s} + \delta s) - f(\tilde{z}, \tilde{s}) \quad (\text{VII.2.11})$$

In Abbildung 26 ist der entstehende Fehler der berechneten absoluten Position im Vergleich zur Referenzposition visualisiert. Die übrigen Fehlergraphen finden sich erneut in Anhang C.



**Abbildung 26: Positionsfehler der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen**

Der absolute Positionsfehler ist dabei in etwa in der gleichen Größenordnung wie der Positionsfehler bei den fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen gemäß Abbildung 20. Der Ausgangsfehler der fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen von  $3 \cdot 10^{-6}$  beziehungsweise  $5 \cdot 10^{-6}$  Metern je nach Parametrisierung gemäß Abbildung 20 ist in obigem Fehlerbudget natürlich enthalten, da zur Berechnung der Näherungszustände eben jene fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen benutzt werden mussten. Der zusätzliche Positionsfehler von etwa  $2 \cdot 10^{-6}$  Metern ist den nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen zuzurechnen, so dass sich der Gesamtpositionsfehler von  $5 \cdot 10^{-6}$  beziehungsweise  $7 \cdot 10^{-6}$  Metern je nach Ansatz ergibt. Dieser Restfehler ist hinnehmbar und die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen gelten damit als verifiziert.

## 2.3. Linearisierte Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen (Anhang D)

Als letzter Schritt der Verifizierung verbleibt die Bestätigung der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen (rote Blöcke). Diese können nicht wie bisher durch den Vergleich mit der Referenztrajektorie verifiziert werden, da der entstehende Linearisierungsfehler für eine Verifizierung zu groß und damit nicht mehr objektiv beurteilbar ist.

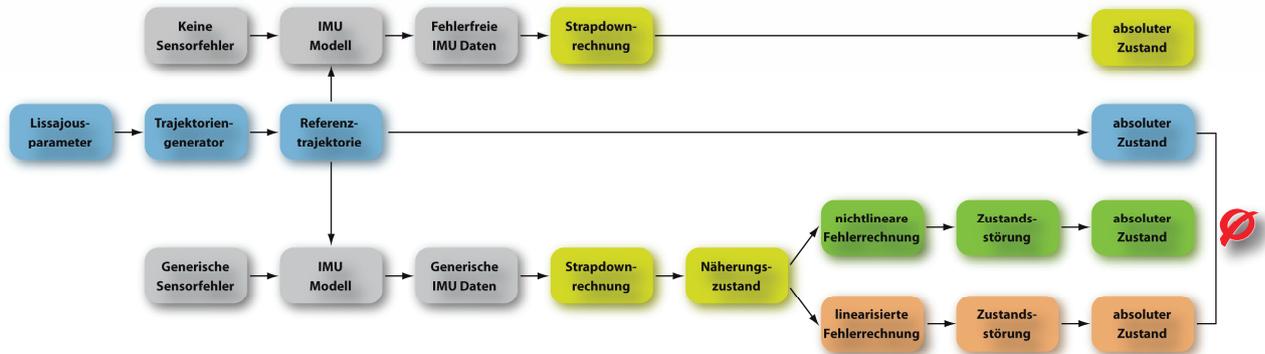


Abbildung 27: Testkonzept für die linearisierte Fehlerrechnung

Der sich ergebende Positionsfehler der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen beläuft sich dabei gemäß Abbildung 28 auf circa 25 Meter. Diese Größenordnung ergibt sich zwangsläufig durch die Linearisierung der nichtlinearen Navigationsdifferentialgleichung. Dieser Restfehler kann aber wegen seiner Größe nicht mehr für die Begründung der Verifizierung der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen benutzt werden. Ein anderer Weg der Verifizierung muss gefunden werden. Alle Zustandsfehler sind im Anhang D abgebildet.

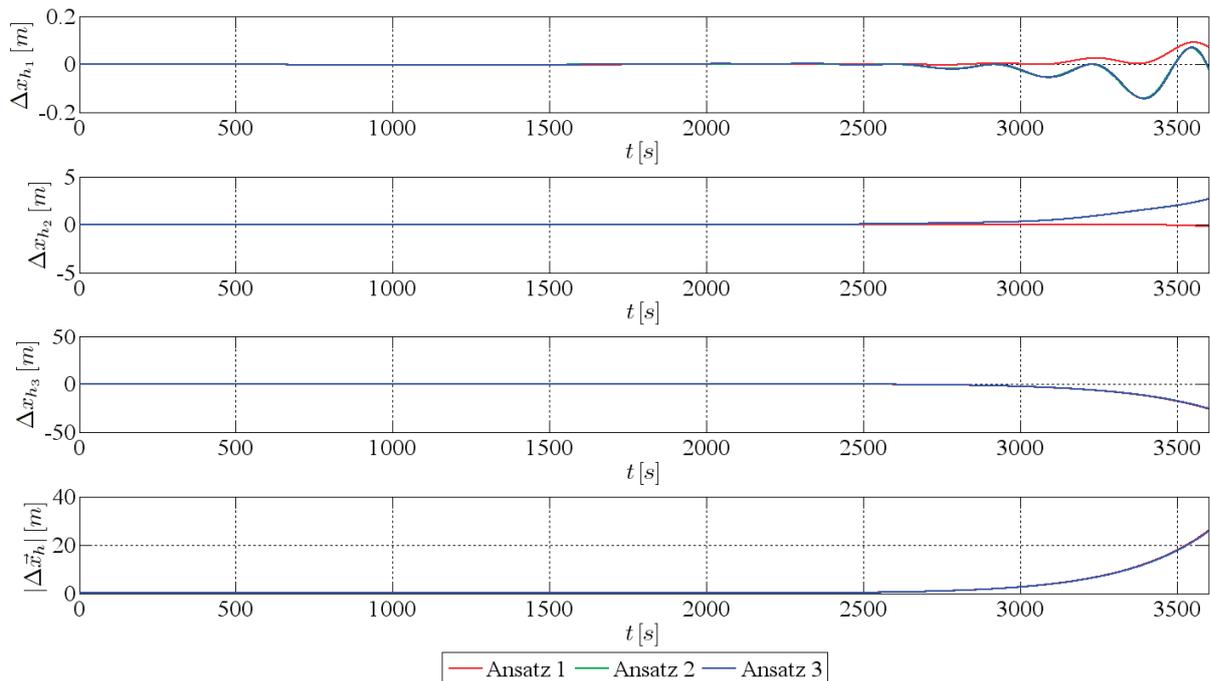


Abbildung 28: Positionsfehler der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen





**Abbildung 31: Relativer Fehler der Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 1**

In der Evaluation der Ergebnisse in der Parametrisierung in erdfesten kartesischen Koordinaten des Ansatzes 1 zeigen sich folgende Auffälligkeiten: So sind die Koeffizienten der Positionsparameter eindeutig und fehlerfrei durch die Einheitsmatrix in  $A^{pv}$  definiert. In den Koeffizienten der Geschwindigkeitsparameter zeigen sich in  $A^{vp}$  die Auswirkungen des Erdschwerefeldes.  $A^{vv}$  beinhaltet lediglich die doppelte Erddrehrate auf Grund der Coriolisbeschleunigung und kann auch fehlerfrei ermittelt werden. In  $A^{vr}$  führen die ins Näherungsbezugssystem transformierten gemessenen Beschleunigungen wiederum zu numerischem Rauschen. Die Rotationsparameter weisen lediglich in  $A^{rr}$  zweimal die Erddrehrate auf. Obige Abweichungen sind zum einen nicht systematischer Natur und zum anderen mindestens um den Faktor  $10^{-6}$  kleiner als die absoluten Werte und lassen sich somit auf die numerische Ungenauigkeit im jeweils zugehörigen Differenzenquotienten zurückführen. Die Linearisierung ist damit verifiziert.

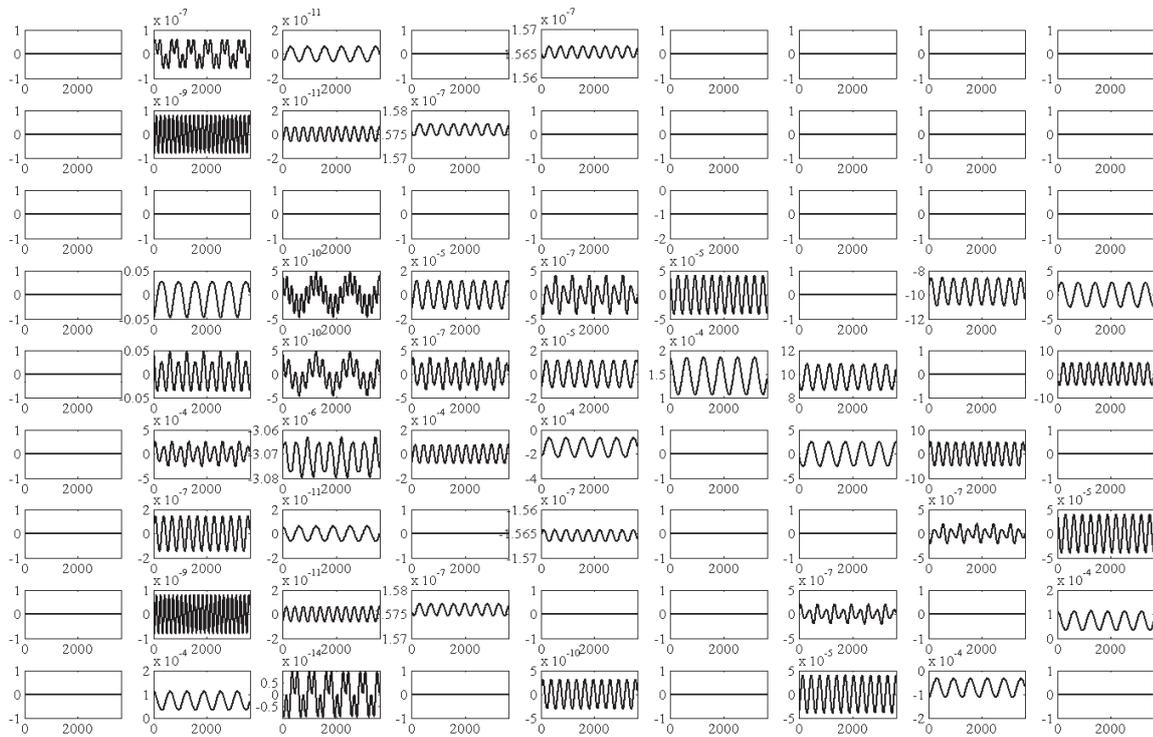


Abbildung 32: Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 2

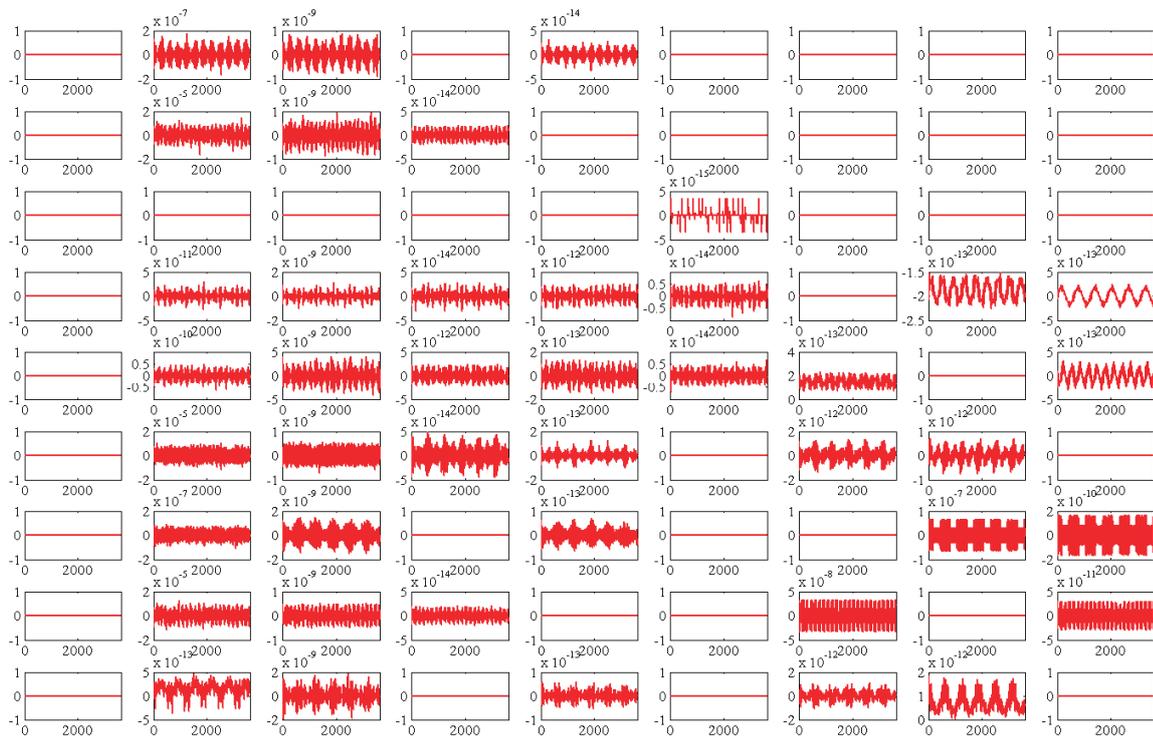


Abbildung 33: Relativer Fehler der Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 2

In den Koeffizienten der Parametrisierung in erdfesten ellipsoidischen Positionsparametern und horizontfesten kartesischen Geschwindigkeitsparametern zeigt sich die komplexere Struktur im Vergleich zur vorigen Parametrisierung. Lediglich  $A^{pr}$  bleibt unbesetzt. Die Unabhängigkeit aller Parameter von der ellipsoidischen Länge ist ersichtlich. Da alle Koeffizienten über nichtlineare funktionale Zusammenhänge der einzelnen Parameter zu berechnen sind, sind numerische Effekte in der Bildung der Differenzenquotienten stets vorhanden. Da jedoch auch in dieser Parametrisierung die relative Fehlergröße stets kleiner als  $10^{-5}$  ist, und sich in den Fehlerabbildungen keine klaren Trends erkennen lassen, kann auch in dieser Parametrisierung die Linearisierung als verifiziert gelten.

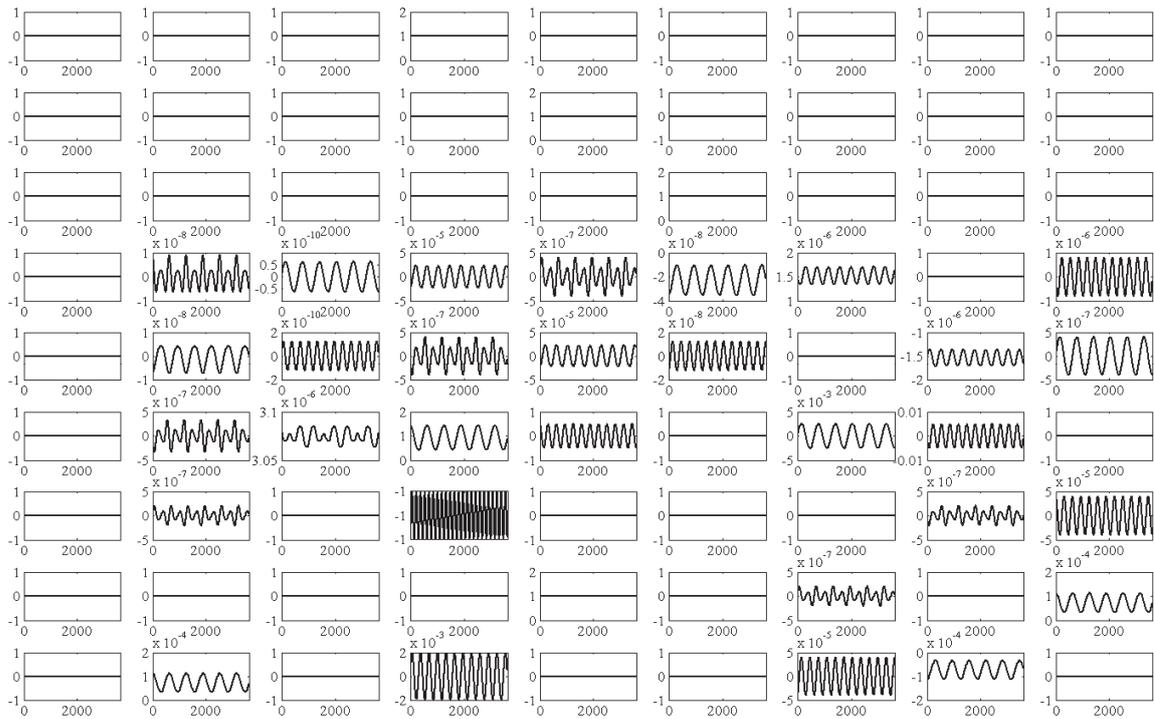


Abbildung 34: Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 3

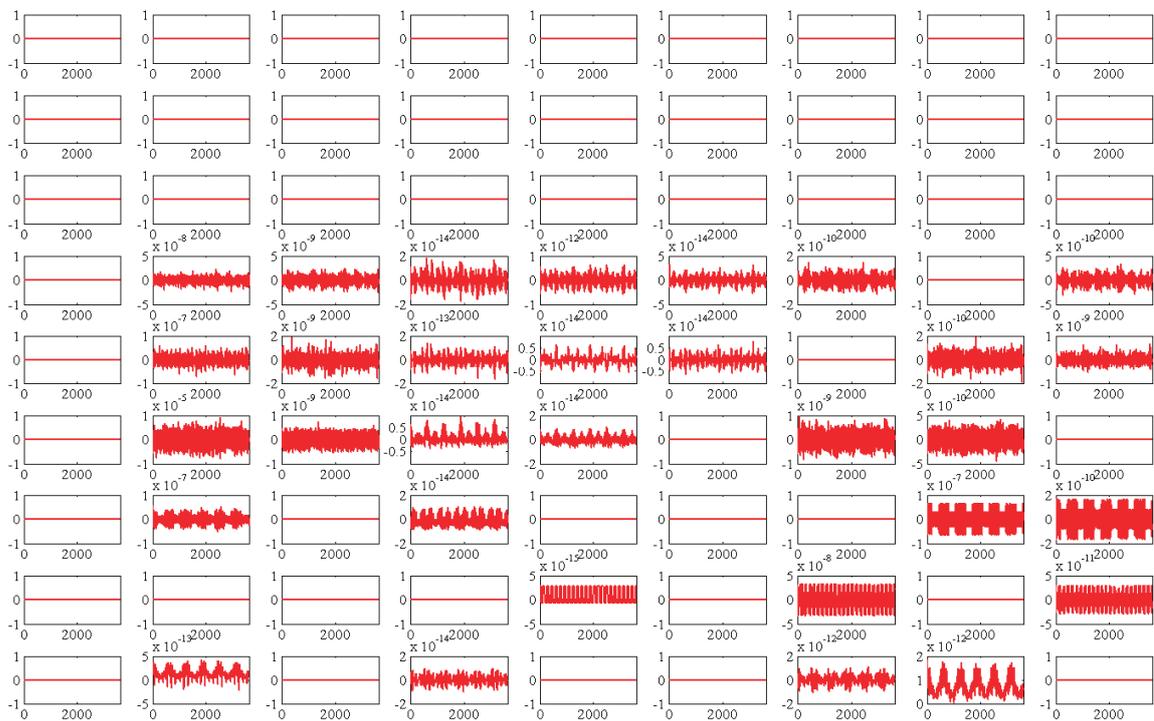


Abbildung 35: Relativer Fehler der Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 3

Die Parametrisierung in erdfesten ellipsoidischen Koordinaten zeigt auf den ersten Blick starke Ähnlichkeit mit der Parametrisierung in gemischten Koordinaten. Lediglich die Koeffizienten der Positionsparameter zeigen den direkten Zusammenhang. Eine Besonderheit dieser Parametrisierung stellt der Größenordnungsbereich der Koeffizienten dar. So sind in der Dynamikmatrix auf Grund der Parametrisierung der Höhe in Kilometern relativ gleich große Koeffizienten enthalten. Obige Gründe gelten auch hier wieder, und somit kann die Verifizierung der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen im Einzelnen und damit auch die Verifizierung der Bewegungsgleichungen im Ganzen abgeschlossen werden.

## 2.4. Vereinfachte Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern

Neben der Verifizierung der Bewegungsgleichungen ohne Vereinfachungen oder sonstige Annahmen in den vorangegangenen Kapiteln besteht natürlich noch die Frage, welche Navigationsfehler durch die Verwendung der vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern nach Kapitel III entstehen. Da Tactical-Grade IMU und Rate-Grade IMU nicht dazu geeignet sind, über eine Stunde ungestützt zu navigieren, müssen neue, auf die jeweilige Sensorklasse angepasste Referenztrajektorien erzeugt werden. Es genügt nicht, einfach die bisherige Referenztrajektorie nach kürzerer Zeit abzubrechen, da die zu Grunde liegende Dynamik dann vereinfacht und die Ergebnisse damit verfälscht wären.

### 2.4.1 für Navigation-Grade IMU

Die vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern für Navigation-Grade IMU können mit der bereits existierenden Referenztrajektorie gemäß Abbildung 17 evaluiert werden. Ein Anhang entfällt aus diesem Grund.

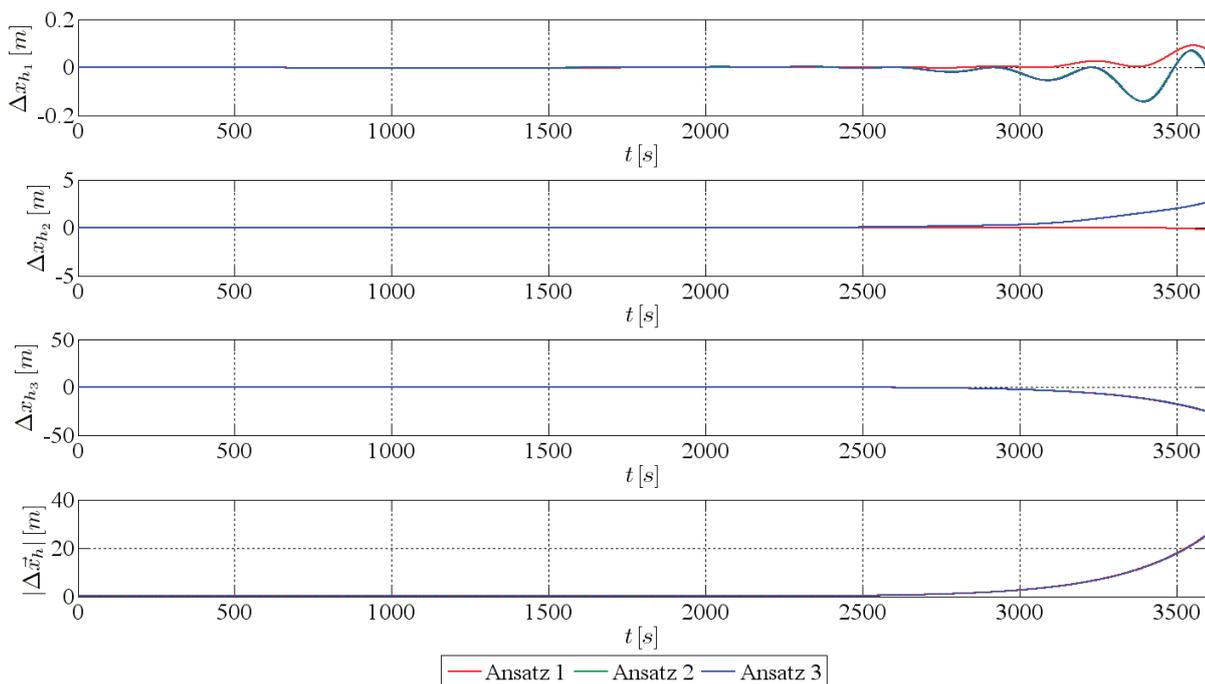


Abbildung 36: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Navigation-Grade IMU

Der Positionsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen für Navigation-Grade IMU entspricht dem Positionsfehler der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen gemäß Kapitel 2.3. Der Positionsfehler beläuft sich nach einer Simulationsdauer von einer Stunde auf etwa 25 Meter und ist hauptsächlich auf die Linearisierungseffekte zurückzuführen. In den Graphen sind die vereinfachten Bewegungsgleichungen gestrichelt und die unvereinfachten Bewegungsgleichungen durchgezogen dargestellt. In Abbildung 36 sind die gestrichelten Bewegungsgleichungen nicht erkennbar, da sie in dieser Genauigkeitsdarstellung den unvereinfachten Bewegungsgleichungen entsprechen.

### 2.4.2 für Tactical-Grade IMU (Anhang E)

Wie bereits angemerkt müssen, um einigermaßen belastbare Aussagen zur Anwendbarkeit der Vereinfachungen in Abschnitt III machen zu können, die zu evaluierenden Referenztrajektorien auf die durchschnittliche, beziehungsweise maximale Operationszeit einer IMU-Genauigkeitsklasse angepasst werden. Die Koeffizienten einer verkürzten Referenztrajektorie für Tactical-Grade IMU lauten hierbei:

$$\begin{array}{llllll} A = 0,001 & B = 0,0005 & C = 1250 & D = 1 & E = 0,125 & F = 2 \\ a = 0,04 & b = 0,08 & c = 0,06 & d = 0,03 & e = 0,04 & f = 0,02 \end{array} \quad (\text{VII.2.12})$$

Die Simulationsdauer beträgt 900 Sekunden. Es wurden alle Amplitudenparameter um den Faktor 4 verkleinert und alle Frequenzparameter um den Faktor 4 erhöht, um in den 15 Minuten Simulationsdauer eine ähnliche Dynamik in der Referenztrajektorie zu erzeugen wie in der ursprünglichen Referenztrajektorie gemäß Kapitel 1.

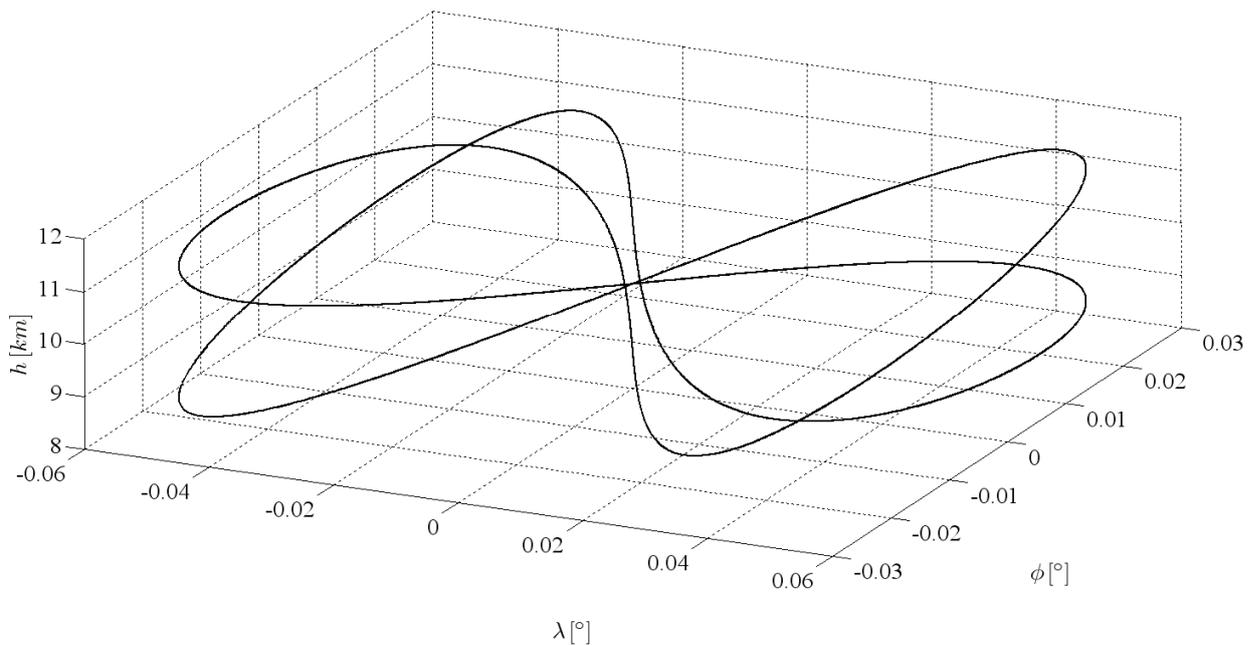


Abbildung 37: Kinematische Referenztrajektorie für Tactical-Grade IMU

Eine Übersicht über alle verwendeten Zustände, Näherungszustände, Zustandsstörungen und der sich ergebenden Zustandsfehler ist in Anhang E zu finden. Abbildung 38 zeigt beispielhaft den Positionsfehler. Die durchgezogene Linie gehört dabei zu den linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen und soll als eine Art Referenz gelten. Die gestrichelten Linien entsprechen der Leistung der vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen für Tactical-Grade IMU gemäß Abschnitt III.

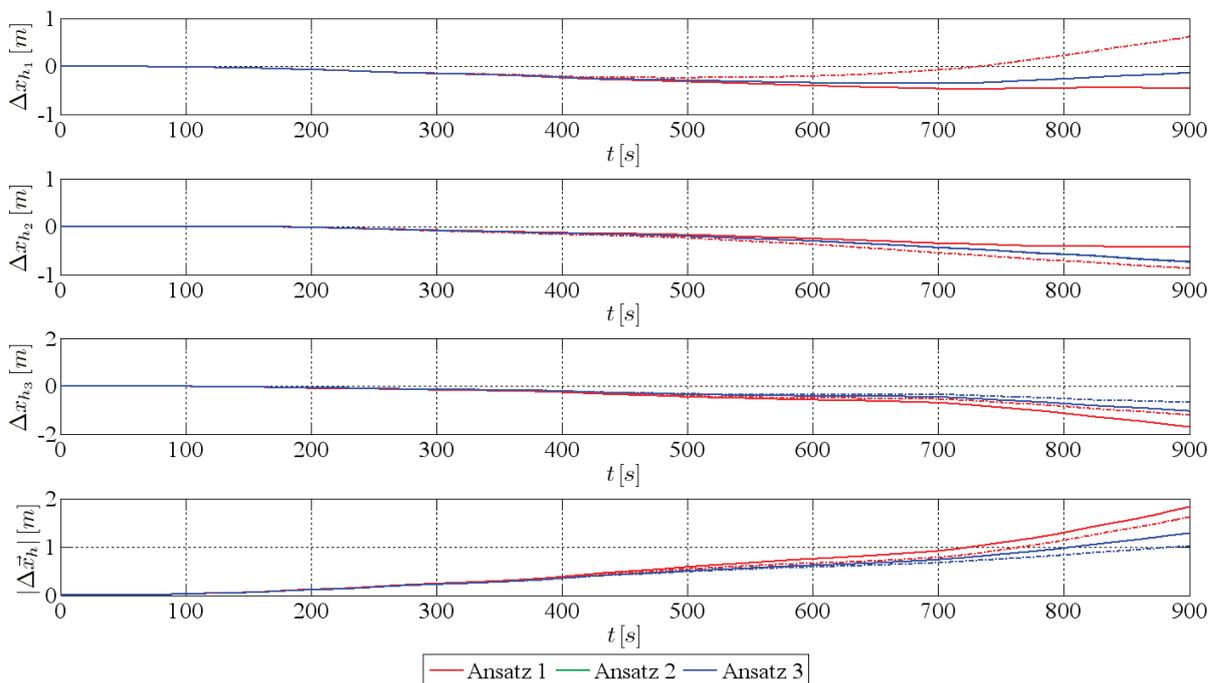


Abbildung 38: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Tactical-Grade IMU

Der Positionsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandstörungen liegt dabei in einer Größenordnung, die der Größenordnung des Positionsfehlers der unvereinfachten linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandstörungen entspricht. Die Tatsache, dass der vereinfachte Algorithmus teilweise in einigen Zuständen sogar etwas genauer ist, kann auf numerische Effekte in der Linearisierung zurückgeführt werden. Insgesamt kann ein Positionsfehler von maximal 2 Metern auf eine Simulationsdauer von 15 Minuten für praktische Anwendungen als hinnehmbar betrachtet werden.

### 2.4.3 für Rate-Grade IMU (Anhang F)

Die Koeffizienten einer nochmals verkürzten Referenztrajektorie zur Evaluation der vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen für Rate-Grade IMU lauten:

$$\begin{array}{cccccc} A = 0,00004 & B = 0,00002 & C = 50 & D = 0,2 & E = 0,025 & F = 0,4 \\ a = 0,2 & b = 0,4 & c = 0,3 & d = 0,15 & e = 0,2 & f = 0,1 \end{array} \quad (\text{VII.2.13})$$

Die Simulationsdauer beträgt dabei zwei Minuten.

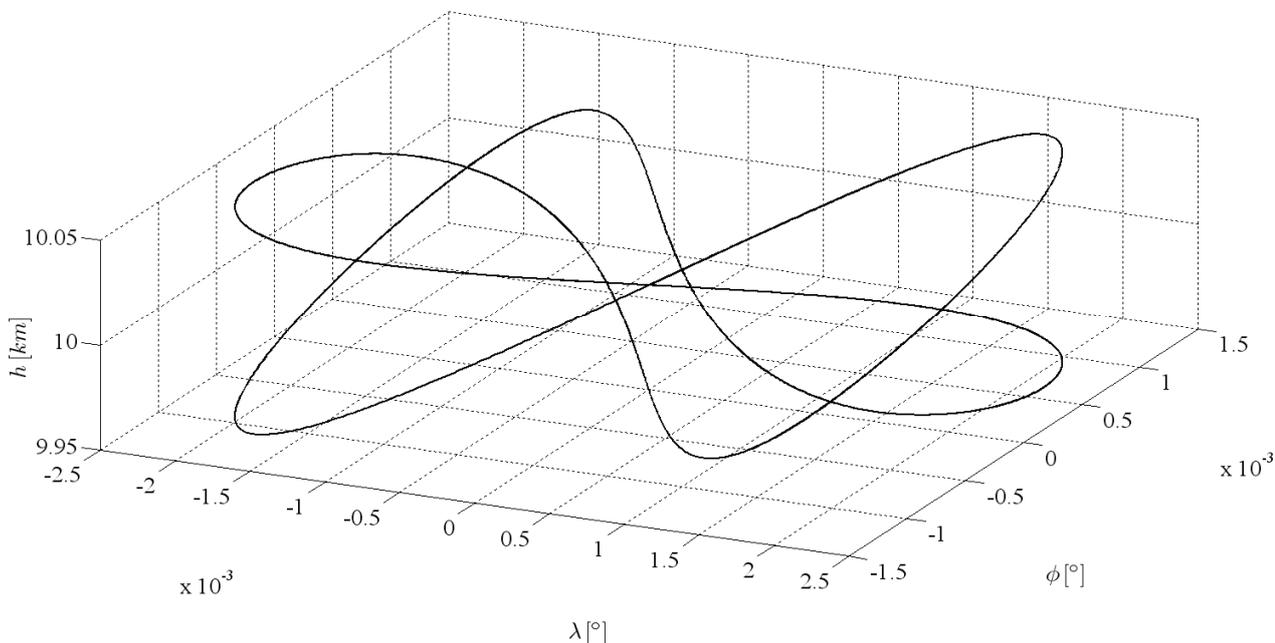


Abbildung 39: Kinematische Referenztrajektorie für Rate-Grade IMU

Die dieser Simulation zugehörigen Graphen sind Anhang F zu entnehmen. Abbildung 40 zeigt beispielhaft wieder den Positionsfehler.

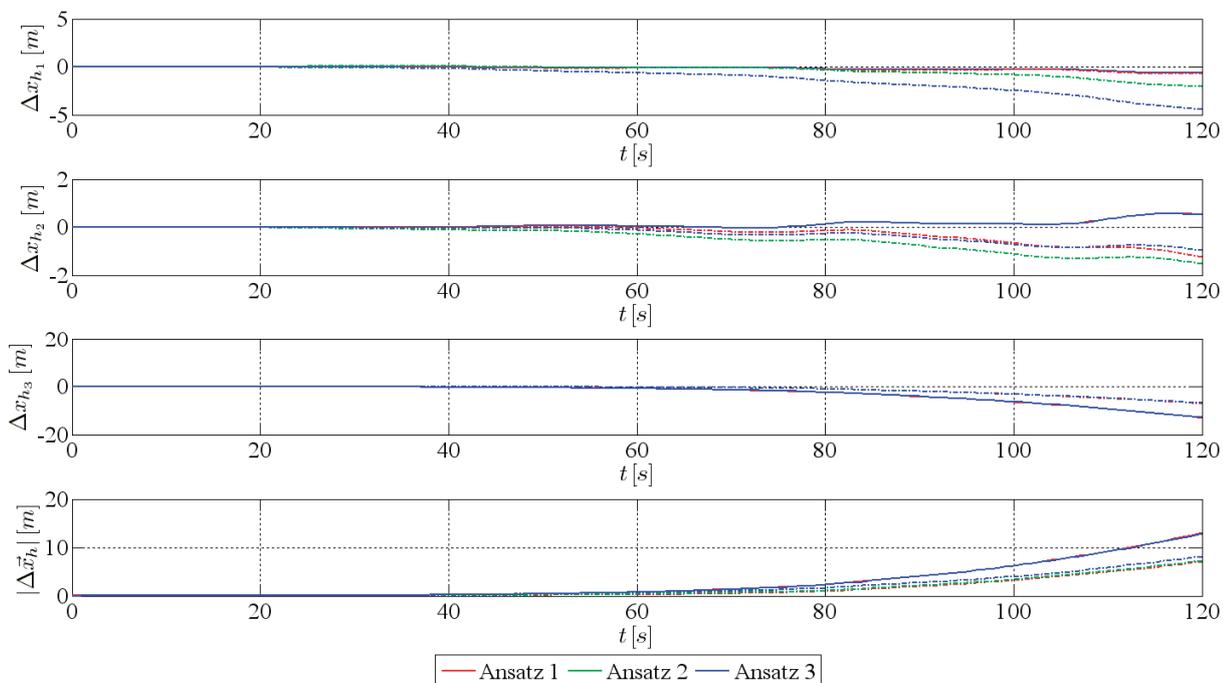


Abbildung 40: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Rate-Grade IMU

Analog zum vorigen Kapitel gehört die durchgezogene Linie zu den linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen und die gestrichelte Linie zu den vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen für Rate-Grade IMU. Die Positionsgenauigkeit beider Algorithmen ist wiederum in etwa in der gleichen Größenordnung. Der absolute Positionsfehler liegt dabei bei circa 12 Metern. Somit können abschließend mit der

Genauigkeitsuntersuchung der vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen die bisher nur theoretisch vorliegenden Ergebnisse des Abschnitts III als verifiziert gelten.

### 3. Verifizierung der Beobachtbarkeitsanalyse

Neben der Verifizierung der Bewegungsgleichungen sollen auch die bisher theoretischen Ergebnisse der Beobachtbarkeitsanalyse aus Abschnitt V durch eine Simulation bestätigt werden. Die Beobachtbarkeit soll anhand eines eigens entwickelten Manövers analysiert werden. Dieses orientiert sich stark an gebräuchlichen Manövern zum Alignment. Die unterschiedlichen Bedingungen zur Beobachtbarkeit der absoluten Navigationszustände und der IMU-Sensorfehlerparameter beziehungsweise der Erdschweremodellfehlerparameter können anhand dieses Manövers gezeigt werden. Für die Beurteilung der Beobachtbarkeit in der Praxis können im Unterschied zu der theoretischen Untersuchung im Abschnitt V die verhältnismäßig kleinen Größen, die aus der Coriolisbeschleunigung oder einer eventuellen Führungsänderung auf Grund der Rotation des körperfesten Bezugssystems entstehen, vernachlässigt werden. Dies gilt auch für die Anteile der Beobachtbarkeit, die aus der Erddrehrate resultieren. Diese Effekte wirken sich nur bei Verwendung einer hochgenauen IMU über einen sehr langen Zeitraum auf die Beobachtbarkeit aus. Um bei den folgenden Simulationen überhaupt deutliche Effekte zu erzielen, wurden die Anfangsstandardabweichungen der neun Navigationszustände sehr klein und die Anfangsstandardabweichungen der Fehlerparameter sehr groß gewählt. Diese Art und Weise des Kalmanfiltertunings ist für reale Navigationsapplikationen nicht geeignet, erlaubt aber bereits nach einer sehr kurzen Simulationsdauer interpretierbare Ergebnisse. Die Beobachtbarkeit von Position, Geschwindigkeit und Orientierung wird als gegeben vorausgesetzt. Die Verifizierung der Beobachtbarkeitsanalyse ist im Vergleich zu den anderen Kapiteln dieses Abschnitts etwas ausführlicher, da einige Aspekte der Beobachtbarkeitsanalyse, speziell die Misalignment und die Erdschweremodellbias betreffend, in der theoretischen Untersuchung noch nicht abschließend geklärt werden konnten.

#### 3.1. Beobachtbarkeit einzelner Manöver

Bevor mit der Beurteilung eines komplexen Manövers begonnen werden kann, werden die grundlegenden Bestandteile des komplexen Manövers separat vorgestellt und die Auswirkungen auf die Beobachtbarkeit einzelner Sensorfehlerparameter beurteilt.

##### 3.1.1 Geradeausflug

Das erste Manöverelement ist der Geradeausflug. Einzige Dynamik wird den IMU-Sensordaten über die eventuelle Änderung der Führungsänderung beziehungsweise der Erdschwere auf Grund der Positionsänderung zugeführt. Diese Änderungen sind jedoch sehr klein und haben keinen praktischen Einfluss auf die Beobachtbarkeit. Selbst die Erddrehrate bei den Winkelgeschwindigkeiten kann vernachlässigt werden, so dass als einzig nennenswerte Größe die Erdschwere bei den Beschleunigungen auftritt.

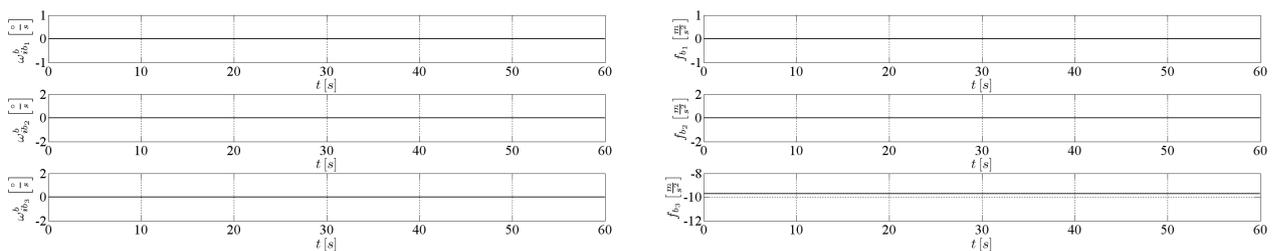


Abbildung 41: IMU-Sensordaten bei Geradeausflug

Die Beobachtbarkeit der Kreiselfehlerparameter ist in Abbildung 42 dargestellt. Im Bereich der Kreiselskalenfaktorfehler und der Kreiselmisalignment sind keinerlei Parameter beobachtbar, da die Winkelgeschwindigkeit in keiner der drei Komponenten eine wesentliche Komponente enthält. Bei den Kreiselsbias ist die bereits in Abschnitt V gezeigte nicht gegebene Beobachtbarkeit des Freiheitsgrads in Richtung des Vektors der gemessenen Beschleunigung erneut vorhanden. Dieser Freiheitsgrad ist in diesem Manöver genau mit dem Kreiselsbias der Kursachse belegt. Dieser ist generell nicht beobachtbar. Die verbleibenden beiden Freiheitsgrade der Kreiselsbias sind auf Grund der nicht gegebenen Beobachtbarkeit der zugehörigen Kreiselskalenfaktorfehler beziehungsweise Kreiselmisalignment direkt beobachtbar.

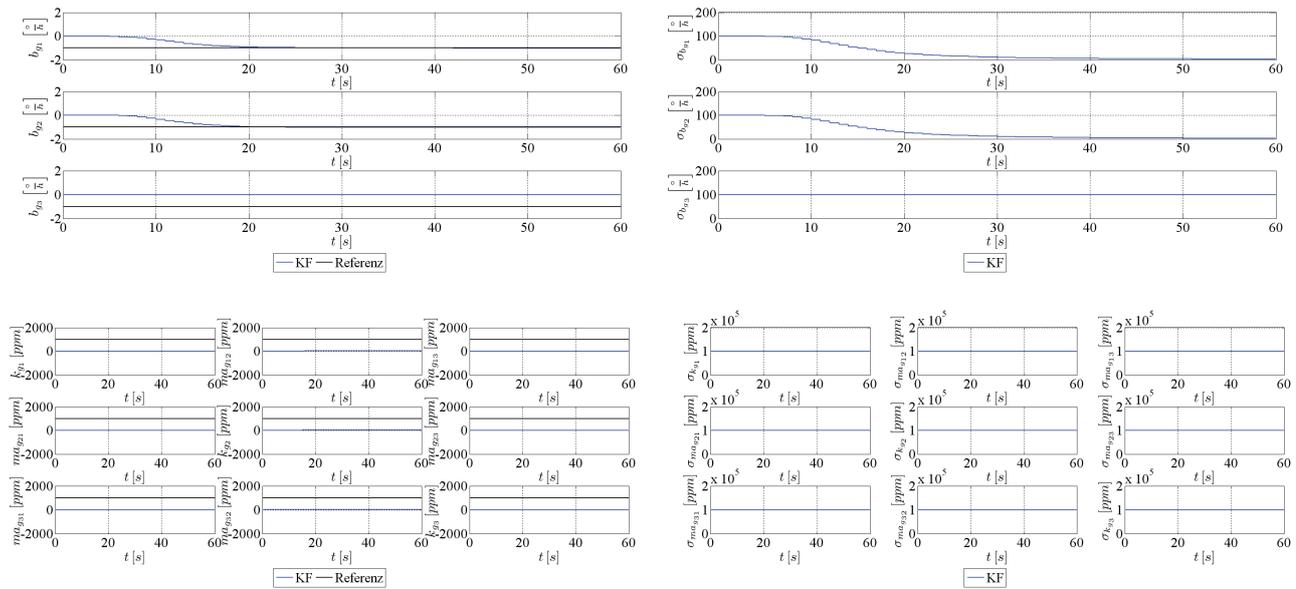


Abbildung 42: Kreiselfehlerparameter bei Geradeausflug

Bei den Beschleunigungsmessfehlerparametern zeigt sich ein anderes Bild. Der Geradeausflug kann mit der Beobachtbarkeit bei einem Arbeitspunkt verglichen werden, da sich die IMU-Sensordaten während des Manövers kaum ändern. Die in Abschnitt V getroffene Aussage, dass sich in diesem Fall die Beschleunigungsmessfehlerparameter eines Freiheitsgrades nicht in ihre Bestandteile auflösen lassen, bestätigt sich erneut. Die Spannungen des Gesamtbeschleunigungsfehlers werden in der ersten Kalmankorrektur auf Grund der Anfangskovarianzen auf die beobachtbaren Beschleunigungsfehlerparameter aufgeteilt. Der Gesamtbeschleunigungsmessfehler ist damit korrekt ausgeglichen, die einzelnen Parameter wurden jedoch auf falsche Werte gesetzt. Die Skalenfaktorfehler der Roll- und Nickachse sind auf Grund des fehlenden Sensoreingangs in diesen Achsen generell nicht beobachtbar.

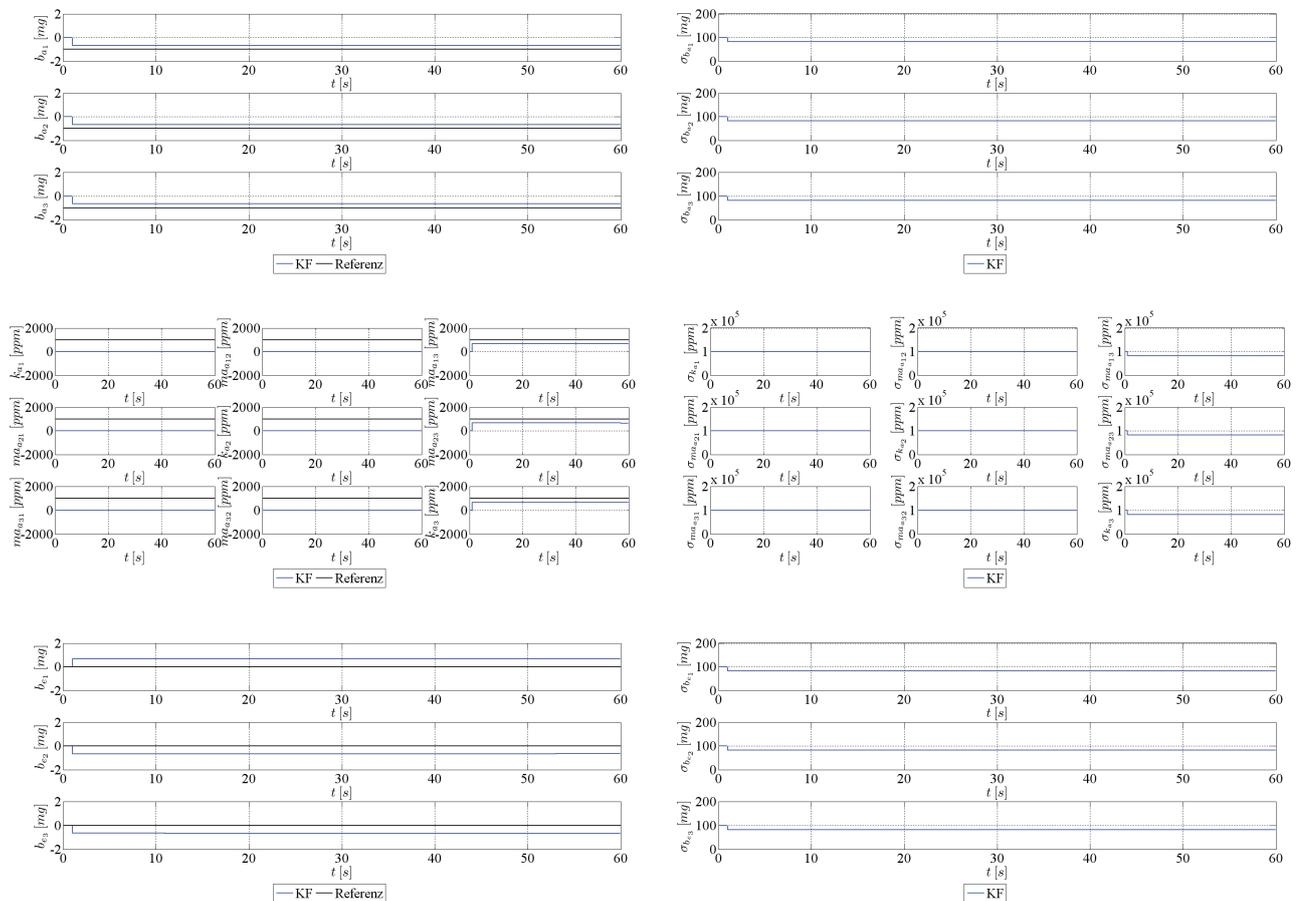


Abbildung 43: Beschleunigungsfehlerparameter bei Geradeausflug

Die Erdschweremodellbias sind wegen der fehlenden Rotation der körperfesten bezüglich der erdfesten Bezugssystemachsen nicht von den Beschleunigungsmesserbias trennbar. Die beobachtbaren und nicht beobachtbaren Sensorfehlermodellparameter sind nochmals in folgender Tabelle zusammengefasst:

Sensor	Beobachtbare Linearkombination	Nicht beobachtbar
Kreisel	$b_{g_1}, b_{g_2}$	$b_{g_3}, k_g, ma_g$
Beschleunigungsmesser	$(b_{a_1} \quad ma_{a_{13}} \quad b_{e_1}), (b_{a_2} \quad ma_{a_{23}} \quad b_{e_2}), (b_{a_3} \quad k_{a_3} \quad b_{e_3})$	$k_{a_1}, ma_{a_{12}}, ma_{a_{13}}, ma_{a_{12}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$

Tabelle 15: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Geradeausflug

### 3.1.2 Kursänderung mit skid-to-turn

Das zweite Manöverelement ist eine Kursänderung mit skid-to-turn. Die IMU-Sensordaten werden in Abbildung 44 präsentiert. Die durch die Kreisbewegung hervorgerufene Zentrifugalbeschleunigung wird komplett auf die Beschleunigungskomponente der Nickachse übertragen. Die kleinen Änderungen der Beschleunigungskomponenten der Roll- und Kursachse können erneut vernachlässigt werden, wobei die Beschleunigung der Kursachse die Erdschwere enthält.

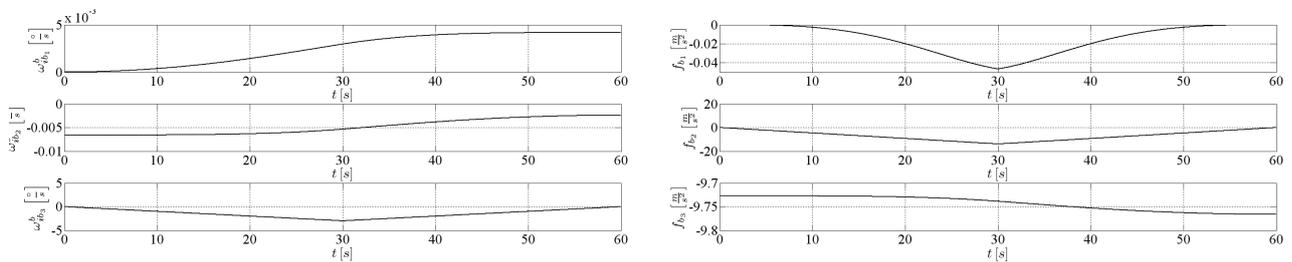


Abbildung 44: IMU-Sensordaten bei Kursänderung mit skid-to-turn

Bei den Kreiselparameter sind die Skalenfaktorfehler und die Misalignment, die sich auf die Rollbeziehungswise Nickachsenkomponenten der Winkelgeschwindigkeit beziehen, nicht beobachtbar, da diese Winkelgeschwindigkeitskomponenten während des gesamten Manövers Null sind. Der Freiheitsgrad der Kreiselbias in Richtung der Gesamtbeschleunigung ist gemäß der Ergebnisse des Abschnitts V nicht beobachtbar. Diese Gesamtbeschleunigung ändert sich in Betrag und Richtung während des gesamten Manövers ständig auf Grund der Änderung der Zentrifugalbeschleunigung. Diese Gesamtbeschleunigung hat jedoch niemals eine Komponente in Richtung der Rollachse, so dass sich der nicht beobachtbare Freiheitsgrad der Kreiselbias ausschließlich auf die Kreiselbias der Nick- und Kursachse auswirken kann. Dies erklärt deren verminderte Beobachtbarkeit im Vergleich zum Kreiselbias der Rollachse. Der Skalenfaktorfehler und die beiden Misalignment der Kursachse sind direkt beobachtbar.

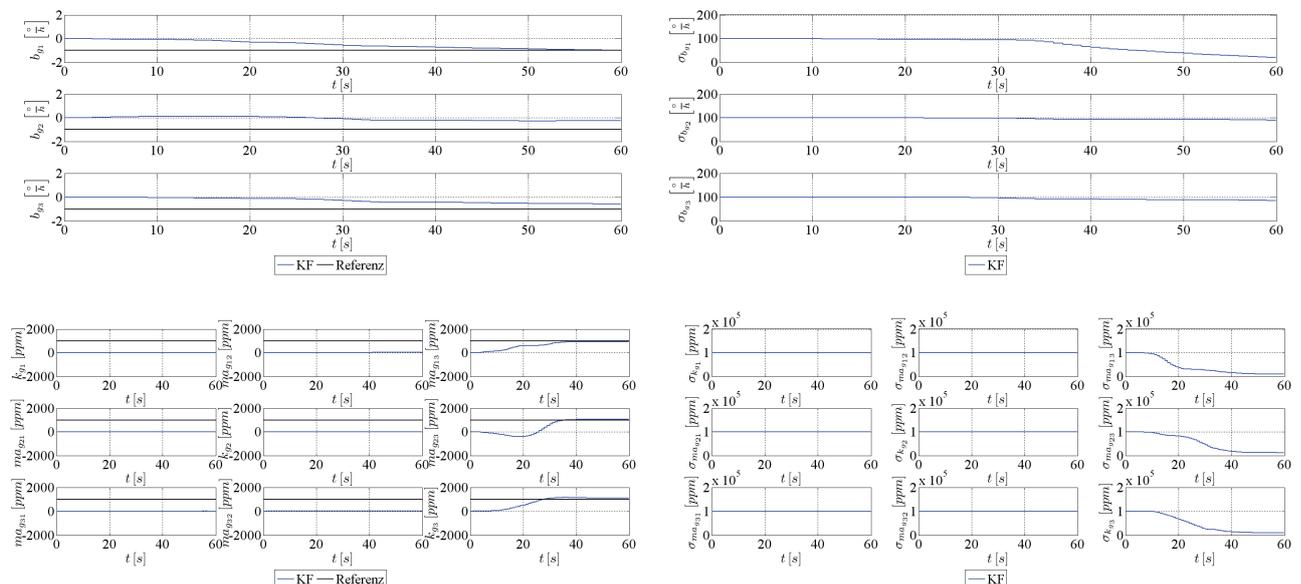


Abbildung 45: Kreiselparameter bei Kursänderung mit skid-to-turn

Die Beobachtbarkeit der einzelnen Sensorfehlermodellparameter ist im Vergleich zum Geradeausflug deutlich verbessert. Durch die sich ändernde Beschleunigungskomponente in der Nickachse auf Grund der Zentrifugalbeschleunigung sind die zugehörige Skalenfaktorfehler und die zugehörigen Misalignment direkt beobachtbar. In der Rollachse sind diese Parameter wegen des fehlenden Sensoreingangs nicht beobachtbar. Bei den Erdschwerereformbias sind die beiden Freiheitsgrade der Roll- und der Nickachse auf Grund der durchgeführten Rotation um die Kursachse während des Manövers von den Beschleunigungsmessern zu trennen. Für den Erdschwerereformbias der Kursachse gilt dies nicht. Der verbleibende Gesamtbeschleunigungsfehler kann zwar erneut eindeutig bestimmt werden, jedoch auch hier nicht in die verbleibenden Sensorfehlermodellparameter aufgelöst werden.

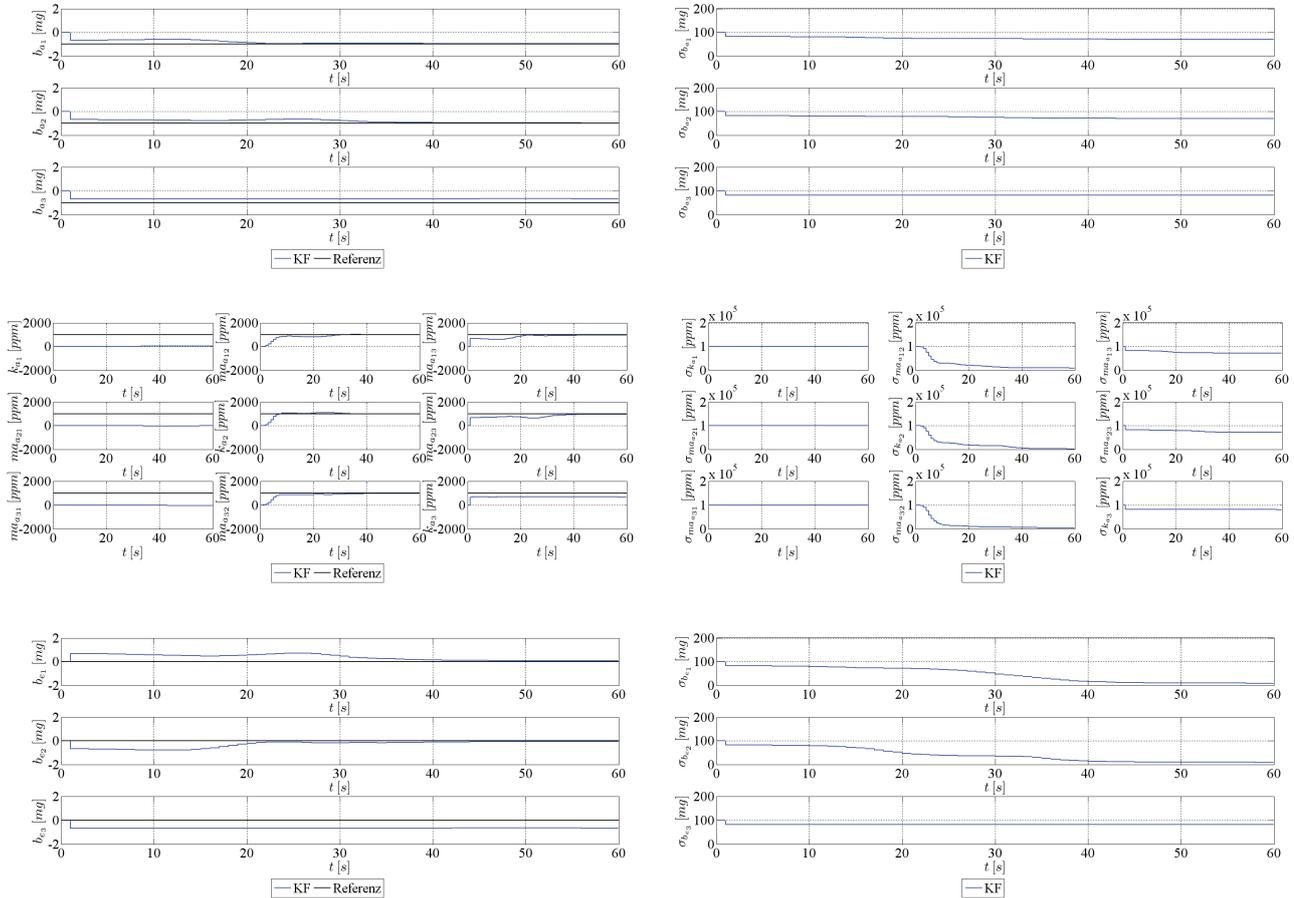


Abbildung 46: Beschleunigungsfehlerparameter bei Kursänderung mit skid-to-turn

Die getroffenen Aussagen können anhand der Zustands- und Kovarianzgraphen leicht nachvollzogen werden. Die beobachtbaren Zustandsparameter sind erneut in einer Tabelle zusammengefasst.

Sensor	Beobachtbare Linearkombination	Nicht beobachtbar
Kreisel	$b_g, ma_{g13}, ma_{g23}, k_{g3}$	$k_{g1}, ma_{g21}, ma_{g31}, ma_{g12}, k_{g2}, ma_{g32}$
Beschleunigungsmesser	$ma_{a12}, k_{a2}, ma_{a32}, b_{e1}, b_{e2}$ $(b_{a1} \quad ma_{a13}), (b_{a2} \quad ma_{a23}), (b_{a3} \quad k_{a3} \quad b_{e3})$	$k_{a1}, ma_{a21}, ma_{a31}$

Tabelle 16: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Kursänderung mit skid-to-turn

### 3.1.3 Kursänderung mit bank-to-turn

Bei einer Kursänderung mit bank-to-turn wird die Kursänderung nicht über das Seitenruder, sondern über eine Kombination aus Quer- und Höhenruder bewerkstelligt. Dadurch lassen sich zum einen große Kursänderungen schneller ausführen und zum anderen werden jegliche Querbewegungen eliminiert. Die IMU-Sensordaten enthalten Winkelgeschwindigkeitskomponenten ungleich Null in allen drei körperfesten Bezugssystemachsen. Bei der Beschleunigung hat lediglich die Beschleunigungskomponente der Kursachse einen für die Beobachtbarkeit relevanten Wert. Der Rollwinkel ist bei diesem Manöver an die Gesamtbeschleunigung angepasst.

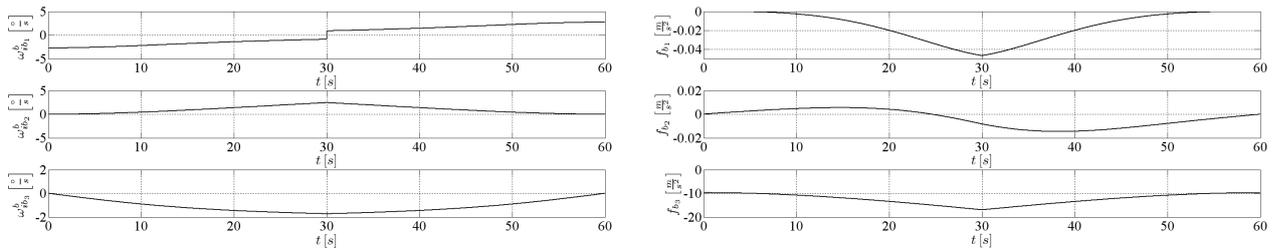


Abbildung 47: IMU-Sensordaten bei Kursänderung mit bank-to-turn

Da alle Winkelgeschwindigkeitskomponenten während des Manövers voneinander unabhängige Werte annehmen, sind prinzipiell alle Kreisel Fehlerparameter beobachtbar. Die Kreiselbias sind dabei relativ schlecht beobachtbar, da jederzeit während des Manövers eine Winkelgeschwindigkeit anliegt und somit eine ausschließliche Beobachtbarkeit der Kreiselbias verhindert wird. Die Skalenfaktorfehler und die Misalignment sind auf Grund der wechselnden Winkelgeschwindigkeiten während des Manövers gut beobachtbar. Ein vollständiges Einlaufen dieser Sensorfehlermodellparameter wird jedoch durch die relativ kurze Simulationsdauer verhindert.

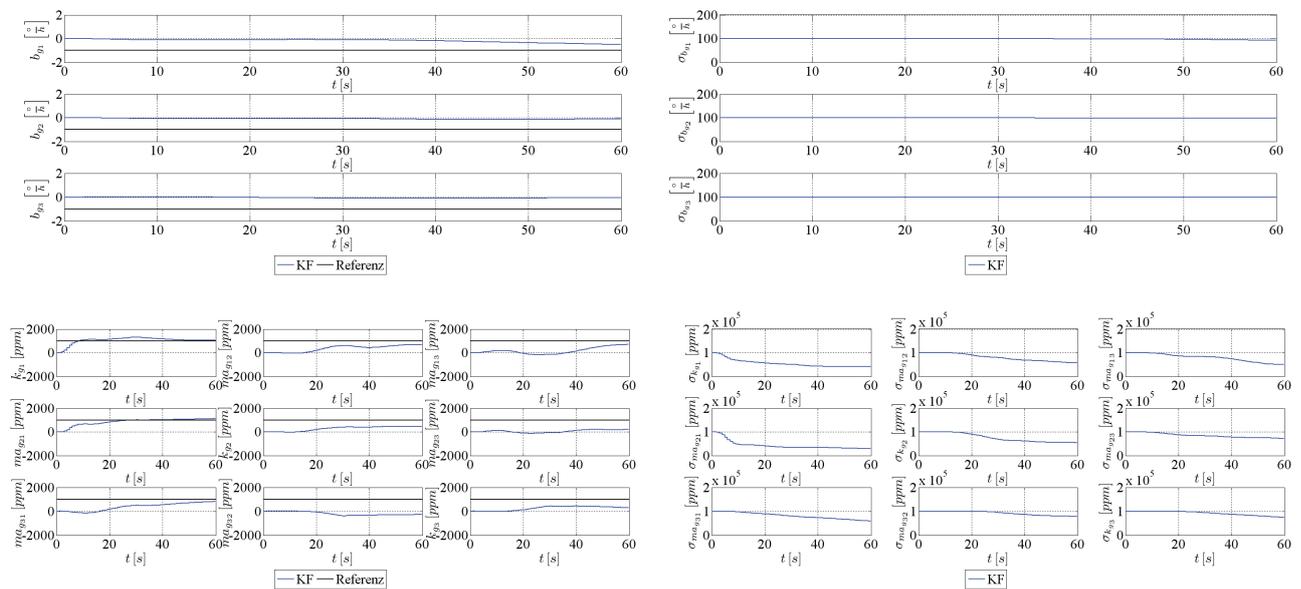


Abbildung 48: Kreisel Fehlerparameter bei Kursänderung mit bank-to-turn

Wegen der Rotation des körperfesten Bezugssystems um alle drei horizontalfesten Bezugssystemachsen sind die Erdschwermodellbias komplett von den Beschleunigungsmessern trennbar. Bei den Beschleunigungsmessern sind die Skalenfaktorfehler und die Misalignment, welche die Beschleunigungskomponenten der Roll- und Nickachse betreffen, nicht beobachtbar. In der Kursachse sind diese Sensorfehlerparameter auf Grund der sich während des Manövers ändernden Beschleunigungskomponente der Kursachse von den Beschleunigungsmessern trennbar und damit beobachtbar. Die drei Beschleunigungsmesserbias sind ebenfalls beobachtbar.

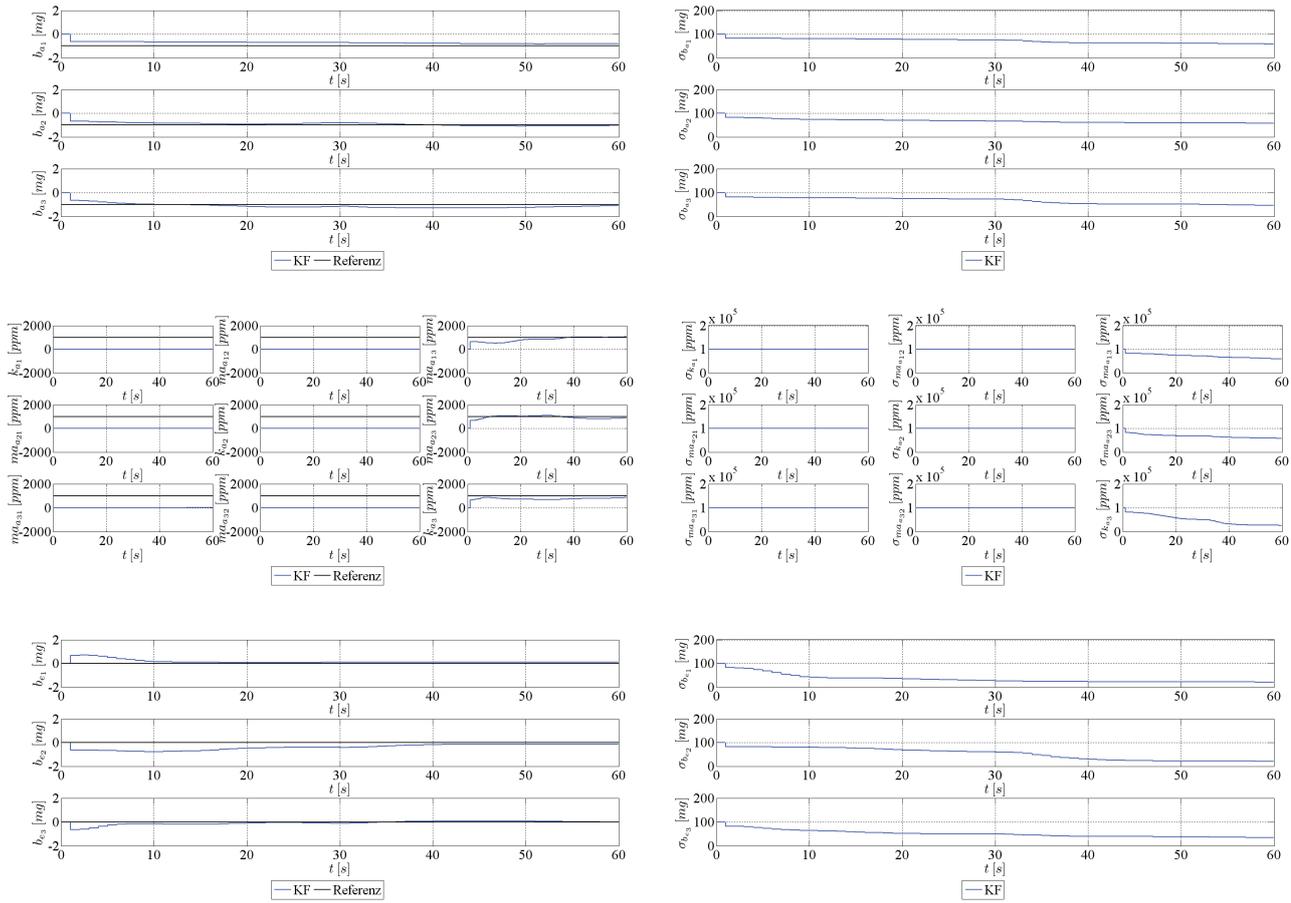


Abbildung 49: Beschleunigungsfehlerparameter bei Kursänderung mit bank-to-turn

Die beobachtbaren Zustandsparameter sind in Tabelle 17 zusammengefasst.

Sensor	Beobachtbare Linearkombination	Nicht beobachtbar
Kreisel	$b_g, k_g, ma_g$	—
Beschleunigungs- messer	$b_a, ma_{a13}, ma_{a23}, k_{a3}, b_e$	$k_{a1}, ma_{a21}, ma_{a31}, ma_{a12}, k_{a2}, ma_{a32}$

Tabelle 17: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Kursänderung mit bank-to-turn

### 3.1.4 Geschwindigkeitsänderung

Als drittes Manöver soll die Geschwindigkeitsänderung dienen. Sie gleicht dem Manöver Geradeausflug, allerdings wird die Geschwindigkeit in Flugrichtung während des Manövers nichtlinear erhöht. Die Winkelgeschwindigkeiten enthalten lediglich kleine Signale, die durch eine geänderte Führungsänderung hervorgerufen werden und keine Auswirkungen auf die Beobachtbarkeit haben. Die Beschleunigung enthält neben der relativ konstanten Erdschwere die sich ändernde Beschleunigung in der Rollachse.

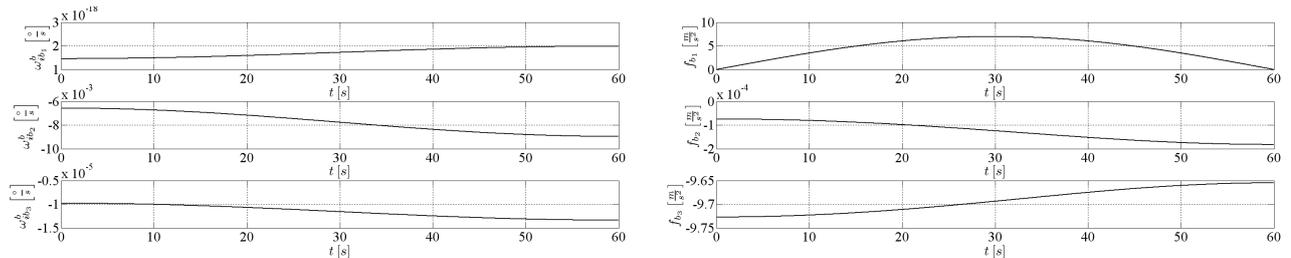


Abbildung 50: IMU-Sensordaten bei Geschwindigkeitsänderung

Alle Kreiselskalenfaktorfehler beziehungsweise -misalignment sind auf Grund des fehlenden Signaleingangs nicht beobachtbar. Dies deckt sich mit den Ergebnissen des Manövers Geradeausflug. Bei den Kreiselsbias sind die Freiheitsgrade in Richtung der Roll- und der Nickachse ebenfalls erneut direkt beobachtbar. Einziger Unterschied zum Geradeausflug besteht nun in der erhöhten Beobachtbarkeit des Kreiselsbias der Kursachse. Wegen der Geschwindigkeitsänderung können in diesem Fall sehr wohl Rückschlüsse auf diesen Sensorfehlerparameter gezogen werden.

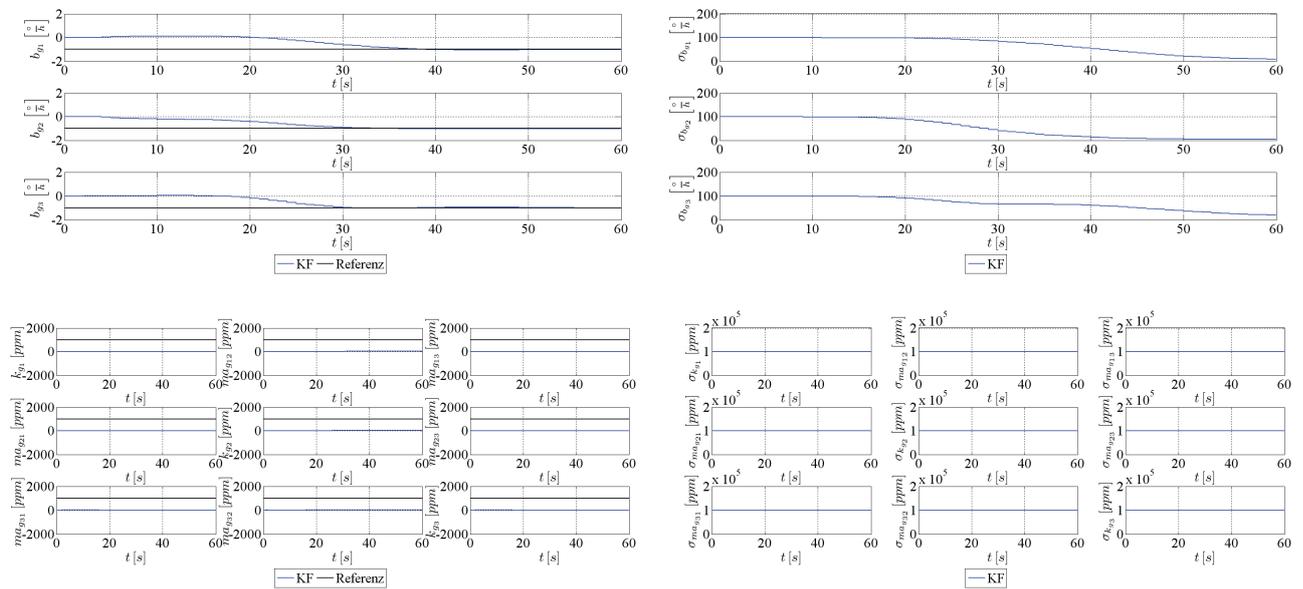


Abbildung 51: Kreiselparameter bei Geschwindigkeitsänderung



Abbildung 52: Beschleunigungsfehlerparameter bei Geschwindigkeitsänderung

Bei den Beschleunigungsmesserfehlerparametern zeigt sich das gewohnte Bild. Auf Grund der fehlenden Rotation des körperfesten bezüglich des erdfesten Bezugssystems sind die Erdschwermodellbias nicht von den

Beschleunigungsmesserfehlern trennbar. Der Skalenfaktorfehler und die beiden Misalignment, die sich auf die Rollachse beziehen, sind wegen der sich während des Manövers stetig ändernden Beschleunigung der Rollachse direkt beobachtbar. Die entsprechenden Parameter der Nickachse sind erneut auf Grund fehlenden Signaleingangs nicht beobachtbar. Die verbleibenden Beschleunigungsmesserfehlerparameter können wiederum nur in Linearkombination beobachtet werden. In der ersten Kalmankorrektion werden die entsprechenden Spannungen des Gesamtbeschleunigungsmesserfehlers ausgeglichen und verharren während des gesamten Manövers. Dieser Effekt kann bei den angesprochenen Zustandsparametern an dem Anfangshüpfen in den Zustands- und Kovarianzgraphen erkannt werden. Die beobachtbaren und nicht beobachtbaren Zustandsparameter sind in Tabelle 18 zusammengefasst.

Sensor	Beobachtbare Linearkombination	Nicht beobachtbar
Kreisel	$b_g$	$k_g, ma_g$
Beschleunigungs- messer	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}$ $(b_{a_1} \quad ma_{a_{13}} \quad b_{e_1}), (b_{a_2} \quad ma_{a_{23}} \quad b_{e_2}), (b_{a_3} \quad k_{a_3} \quad b_{e_3})$	$ma_{a_{12}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$

Tabelle 18: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Geschwindigkeitsänderung

### 3.1.5 Höhenänderung

Die in Abbildung 53 dargestellten IMU-Sensordaten bei der Höhenänderung entsprechen bis auf die Beschleunigungskomponente in der Kursachse den IMU-Sensordaten des Geradeausflugs. Die durch Erddrehrate und Führungsänderung hervorgerufenen kleinen Werte bei den restlichen Beschleunigungs- und den Winkelgeschwindigkeitskomponenten liefern keinen wesentlichen Beitrag zur Beobachtbarkeit.

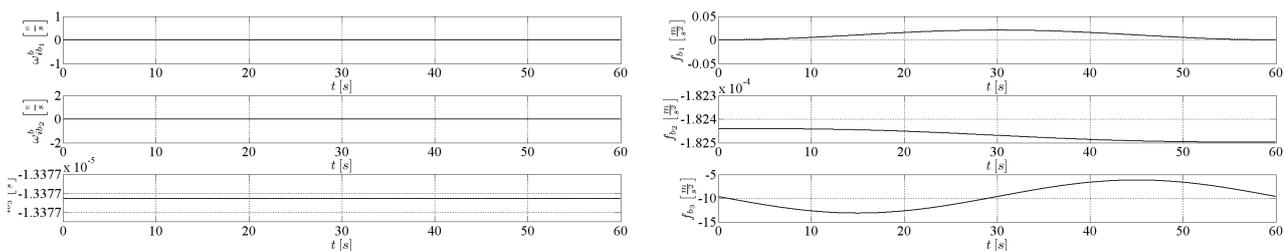


Abbildung 53: IMU-Sensordaten bei Höhenänderung

Bei den Kreiselfehlerparametern können die Ergebnisse des Geradeausflugs direkt übernommen werden. Die Kreiselskalenfaktorfehler und Kreiselmisalignment sind generell nicht beobachtbar, da die Winkelgeschwindigkeit nicht über einen Sensoreingang verfügt.

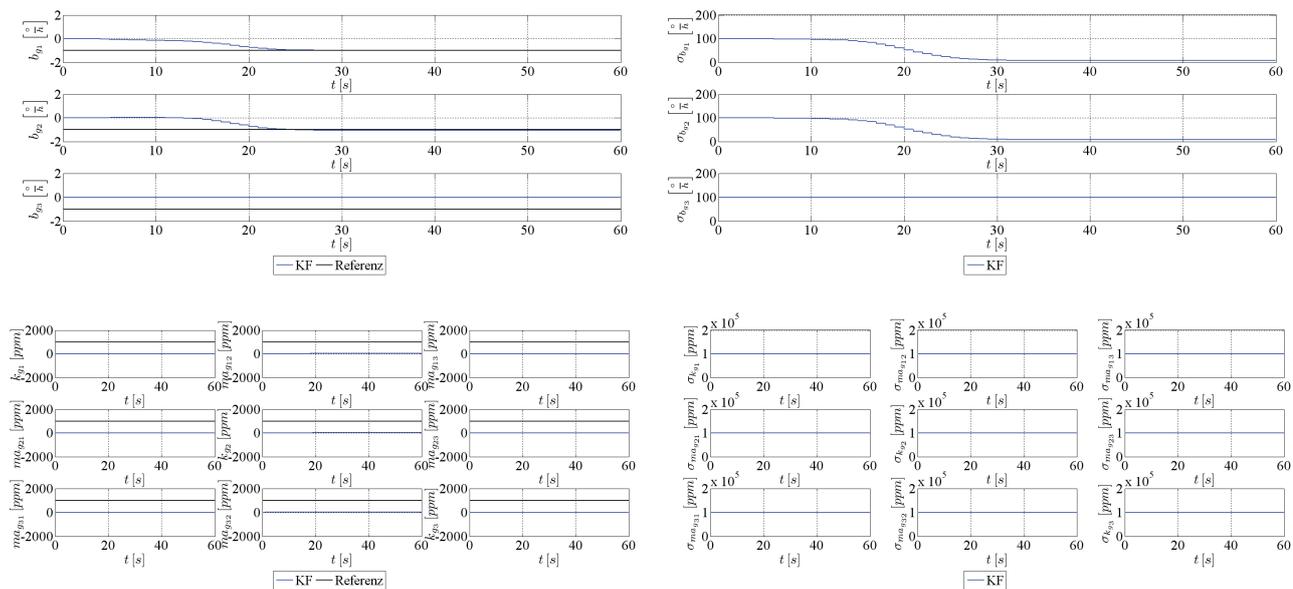


Abbildung 54: Kreiselfehlerparameter bei Höhenänderung

Von den verbleibenden drei Kreiselbias ist gemäß den Ergebnissen des Abschnitts V erneut der Freiheitsgrad in Richtung der Beschleunigung nicht beobachtbar. In diesem Fall ist dies der Kreiselbias der Kursachse. Die anderen beiden Kreiselbias der Roll- und der Nickachse sind beobachtbar. Bei den Beschleunigungsmessfehlerparametern lassen sich wegen der fehlenden Rotation die Beschleunigungsmesserbias nicht von den Erdschweremodellbias trennen. Von den Skalenfaktorfehlern und den Misalignment sind lediglich die Komponenten, die die Beschleunigung der Kursachse betreffen, beobachtbar.

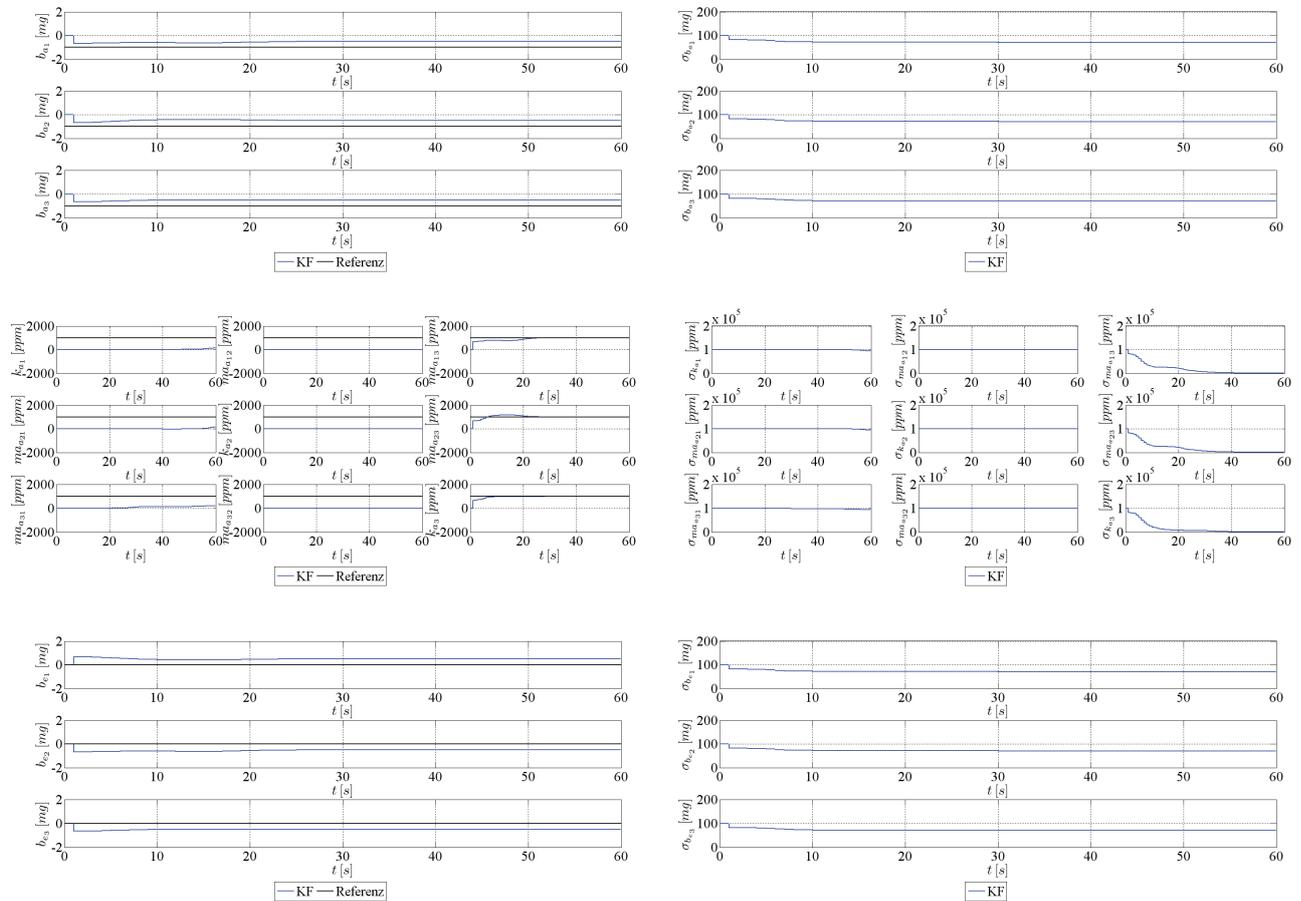


Abbildung 55: Beschleunigungsfehlerparameter bei Höhenänderung

Die beobachtbaren Sensorfehlerparameter sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Sensor	Beobachtbare Linearkombination	Nicht beobachtbar
Kreisel	$b_{g_1}, b_{g_2}$	$b_{g_3}, k_g, ma_g$
Beschleunigungsmesser	$ma_{a_{13}}, ma_{a_{23}}, k_{a_3}$ $(b_{a_1} \ b_{e_1}), (b_{a_2} \ b_{e_2}), (b_{a_3} \ b_{e_3})$	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}, ma_{a_{21}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$

Tabelle 19: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Höhenänderung

Dies schließt die Betrachtung der Einzelmanöver ab. Im nächsten Abschnitt werden die Einzelmanöver zu einem Gesamtmanöver kombiniert und die Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter analysiert. Ziel dabei ist, durch ein komplexeres beziehungsweise zusammengesetztes Gesamtmanöver die Beobachtbarkeit möglichst vieler Sensorfehlerparameter zu gewährleisten und zu diskutieren.

### 3.2. Gesamtmanöver

Das Gesamtmanöver besteht aus vier Teilmanövern. Begonnen wird mit einer geradlinigen Bewegung nach Osten. Im Anschluss erfolgt eine S-Kurve nach Norden und wieder nach Osten, so dass die Orientierung am Ende der S-Kurve wieder nach Osten zeigt. Als Grundelement der S-Kurve dient eine Klothoide, um zum einen die Differenzierbarkeit der Positionsparameter des Gesamtmanövers bis zu den Beschleunigungen zu gewährleisten und zum anderen die Gesamtgeschwindigkeit während der S-Kurve konstant zu halten. Das dritte Element besteht aus einer geradlinig beschleunigten Bewegung, und das vierte Element besteht aus einer Höhenänderung ohne zusätzliche Nickwinkeländerung. Die vier Grundelemente werden so ausgewählt, dass die gemessenen Winkelgeschwindigkeiten

und Beschleunigungen der IMU in den drei körperfesten Bezugssystemachsen möglichst oft über einen Signaleingang ungleich Null verfügen. Das Gesamtmanöver für die Verifizierung der Beobachtbarkeitsanalyse unterscheidet sich in der Erzeugung von der Referenztrajektorie, die auf einer Lissajousfigur basiert, dahingehend, dass hier die einzelnen Teilmanöver abschnittsweise definiert und in den Start- und Endpunkten jeweils aufeinander abgestimmt wurden. Als Grundgleichungen dienen die mathematischen Beziehungen für eine geradlinige Bewegung, für eine Klothoide und für eine beschleunigte Bewegung.

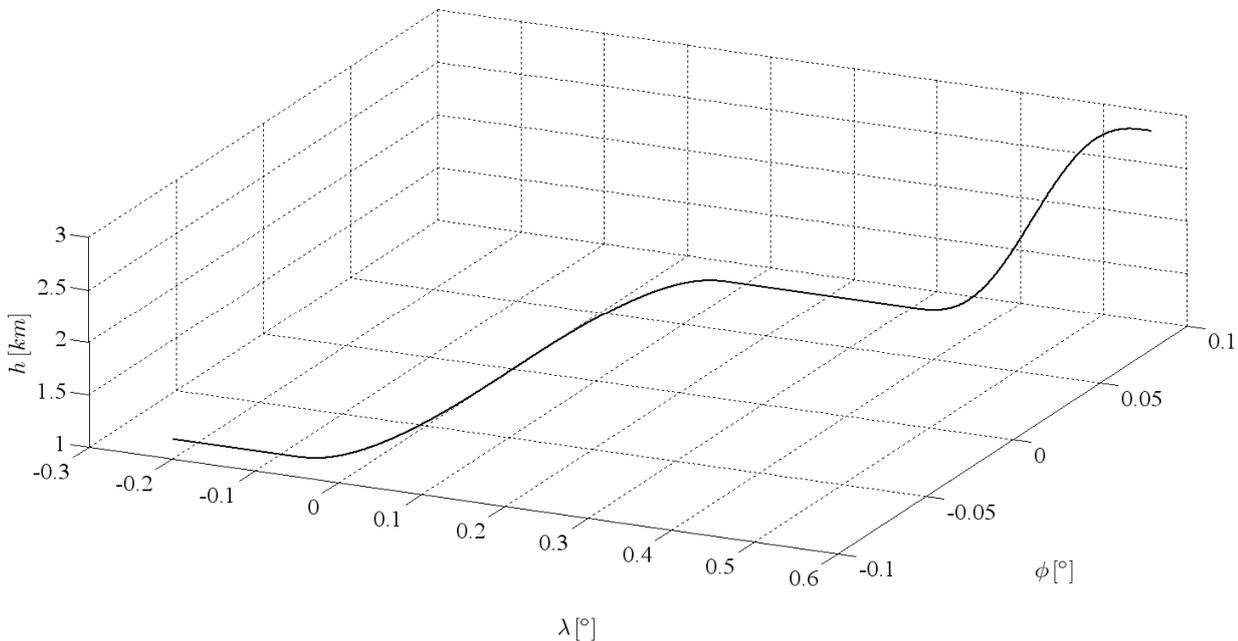


Abbildung 56: Gesamtmanöver

Dieses Gesamtmanöver wird zudem in zwei Versionen evaluiert. In der ersten Version wird die S-Kurve über eine Kursänderung mit skid-to-turn realisiert. Die Kursänderung mit skid-to-turn ist ein Manöver, bei dem eine Änderung des Kurswinkels ausschließlich durch das Seitenruder erreicht wird. Es findet in der unbemannten Luftfahrt in Raketen und Flugkörpern Verwendung, die auf Grund ihres Aufbaus zwei Symmetrieachsen und keine Flügel im herkömmlichen Sinn besitzen und deshalb von den Vorteilen der Kursänderung mit bank-to-turn nicht profitieren können. In der zweiten Version erfolgt die S-Kurve über eine Kursänderung mit bank-to-turn. Im Gegensatz zur Kursänderung mit skid-to-turn wird diese etwas komplexeren Kursänderung mit bank-to-turn nicht durch das Seitenruder, sondern durch eine Kombination aus Querruder und Höhenruder erreicht. Es handelt sich um ein Manöver, das in der bemannten Luftfahrt bei Flugzeugen oder Flugkörpern mit Flügeln Verwendung findet, bei denen eine Kursänderung durch den Auftrieb der im Vergleich zum Seitenruder viel größeren Flügel erreicht werden kann. Es bietet vor allem einen Vorteil bei großen Kursänderungen, da nach der Rollbewegung sehr viel größere Kurswinkelgeschwindigkeiten erreicht werden können. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass bei optimaler Ausführung die resultierende Gesamtbeschleunigung aus Erdschwere und Zentrifugalbeschleunigung durch die vorherige Rollbewegung genau in der Kursachse anliegt. Es treten somit keinerlei Querbeschleunigungen auf. In den nächsten beiden Kapiteln sollen nun anhand dieses Beispiels die Bedingungen zur Beobachtbarkeit veranschaulicht werden.

### 3.3. Beobachtbarkeit im Gesamtmanöver mit skid-to-turn

Die Beobachtbarkeit wird jeweils getrennt nach Sensorart ausgewertet, da die Beobachtbarkeit der Kreisfehlerparameter bei der gewählten Approximation stets unabhängig von der Beobachtbarkeit der Beschleunigungsfehlerparameter ist. Es wird mit dem Gesamtmanöver mit skid-to-turn begonnen.

#### 3.3.1 der Kreisfehlerparameter

In Abbildung 57 sind Mittelwert und Standardabweichung der Kreisfehlerparameter dargestellt. Das benutzte Fehlermodell umfasst drei Bias, drei Skalenfaktorfehler und sechs Misalignment. In der geradlinigen Bewegung der ersten 60 Sekunden messen die Kreisel nichts. Dies führt dazu, dass alle Skalenfaktorfehler und alle Misalignment nicht beobachtbar sind, da die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten Null sind. Die Bias sind grundsätzlich beobachtbar, wobei der Kreiselbias der Kursachse auf Grund der nicht gegebenen Beobachtbarkeit des Kurswinkels in einer geradlinigen Bewegung ebenfalls nicht beobachtbar ist. Die im jeweiligen Teilmanöver beobachtbaren Fehlerparameter sind dabei in Tabelle 4 grün markiert. Parameter, die bereits aus vorangegangenen Teilmanövern bekannt sind, sind blau markiert.

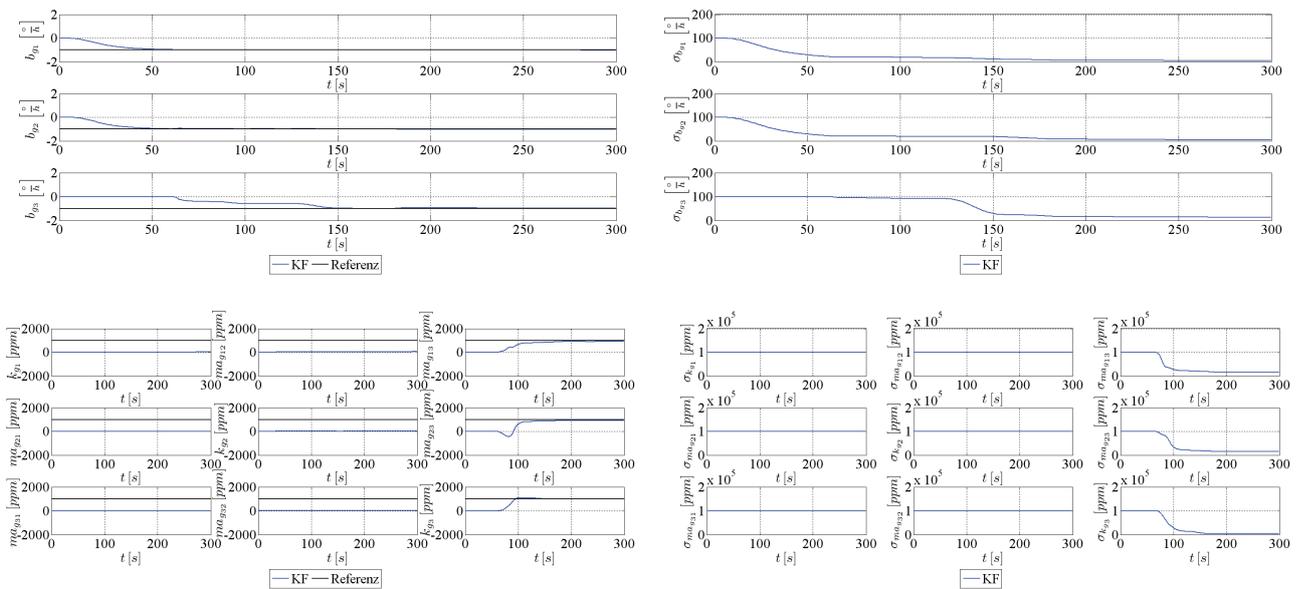


Abbildung 57: Kreisel Fehlerparameter im Gesamtmanöver mit skid-to-turn

Von Sekunde 60 bis Sekunde 120 wird eine Kursänderung mit skid-to-turn nach Norden und von Sekunde 120 bis 180 eine erneute Kursänderung mit skid-to-turn zurück nach Osten durchgeführt. Dabei misst der Kreisel der Kursachse eine nicht konstante Winkelgeschwindigkeit. Da in der Roll- und der Nickachse die beiden Bias  $b_{g_1}$  und  $b_{g_2}$  bereits aus der geradlinigen Bewegung bekannt sind, sind somit nun die beiden Misalignment  $ma_{g_{13}}$  und  $ma_{g_{23}}$  beobachtbar. Da in der Kursachse ein nicht konstantes Signal anliegt, können auch der verbleibende dritte Bias  $b_{g_3}$  und der Skalenfaktorfehler  $k_{g_3}$  voneinander getrennt und damit beobachtet werden. Die anschließende beschleunigte Bewegung von Sekunde 180 bis Sekunde 240 und die abschließende Höhenänderung ohne Nickwinkeländerung von Sekunde 240 bis Sekunde 300 führen zu keinen Winkelgeschwindigkeiten in der Roll- oder der Nickachse. Somit sind mit unserem Gesamtmanöver die Skalenfaktorfehler  $k_{g_1}$  und  $k_{g_2}$  beziehungsweise die Misalignment  $ma_{g_{12}}$ ,  $ma_{g_{21}}$ ,  $ma_{g_{31}}$  und  $ma_{g_{32}}$  grundsätzlich nicht beobachtbar.

Zeit	Beobachtbare Linearkombination	Nicht beobachtbar
0–60s	$b_{g_1}, b_{g_2}$	$b_{g_3}, k_g, ma_g$
60–180s	$b_{g_3}, k_{g_3}, (b_{g_1} \quad ma_{g_{13}}), (b_{g_2} \quad ma_{g_{23}})$	$k_{g_1}, ma_{g_{21}}, ma_{g_{31}}, ma_{g_{12}}, k_{g_2}, ma_{g_{32}}$
180–240s	$b_{g_1}, b_{g_2}$	$b_{g_3}, k_{g_1}, ma_{g_{21}}, ma_{g_{31}}, ma_{g_{12}}, k_{g_2}, ma_{g_{32}}, ma_{g_{13}}, ma_{g_{23}}, k_{g_3}$
240–300s	$b_{g_1}, b_{g_2}$	$b_{g_3}, k_{g_1}, ma_{g_{21}}, ma_{g_{31}}, ma_{g_{12}}, k_{g_2}, ma_{g_{32}}, ma_{g_{13}}, ma_{g_{23}}, k_{g_3}$

Tabelle 20: Beobachtbarkeit der Kreisel Fehlerparameter im Gesamtmanöver mit skid-to-turn

### 3.3.2 der Beschleunigungsfehlerparameter

In Abbildung 58 sind Mittelwert und Standardabweichung der Beschleunigungsfehlerparameter dargestellt. Das benutzte Fehlermodell umfasst drei Sensorbias, drei Skalenfaktorfehler, sechs Misalignment und drei Erdschweremodellbias. In der geradlinigen Bewegung der ersten 60 Sekunden messen die Beschleunigungsmesser lediglich die Erdschwerebeschleunigung. Diese wird vom Beschleunigungsmesser in der Kursachse gemessen. Das führt dazu, dass die Skalenfaktorfehler  $k_{a_1}$  und  $k_{a_2}$  beziehungsweise die Misalignment  $ma_{a_{12}}$ ,  $ma_{a_{21}}$ ,  $ma_{a_{31}}$  und  $ma_{a_{32}}$ , die sich auf die Beschleunigungen der Roll- und Nickachse beziehen, nicht beobachtbar sind, da die zugehörigen Beschleunigungen Null sind. Von den verbleibenden neun Parametern sind pro Achse jeweils drei als Linearkombinationen beobachtbar. So sind die Linearkombinationen von  $b_{a_1}$  mit  $ma_{a_{13}}$  und  $b_{e_1}$ ,  $b_{a_2}$  mit  $ma_{a_{23}}$  und  $b_{e_2}$  beziehungsweise  $b_{a_3}$  mit  $k_{a_3}$  und  $b_{e_3}$  beobachtbar, da auf Grund der konstanten Erdschwerebeschleunigung und der fehlenden Rotation zwischen körperfesten und horizontfesten Bezugssystem nicht festgestellt werden kann, ob der Gesamtbeschleunigungsfehler auf den Sensorbias, auf den Skalenfaktorfehlern beziehungsweise Misalignment, den Erdschweremodellbias oder einer Linearkombination der drei beruht. Der Kalmanfilter verteilt die Spannungen somit

allein auf Basis der entsprechenden Kovarianzen. Von Sekunde 60 bis Sekunde 120 wird eine Kursänderung mit skid-to-turn nach Norden und von Sekunde 120 bis 180 eine erneute Kursänderung mit skid-to-turn zurück nach Osten durchgeführt. Neben der ständig anliegenden Erdschwerebeschleunigung tritt dabei eine nicht konstante Beschleunigung in der Nickachse auf, die auf die Zentrifugalbeschleunigung zurückzuführen ist. Die Parameter  $k_{a_1}$ ,  $ma_{a_{21}}$  und  $ma_{a_{31}}$  bleiben nicht beobachtbar.

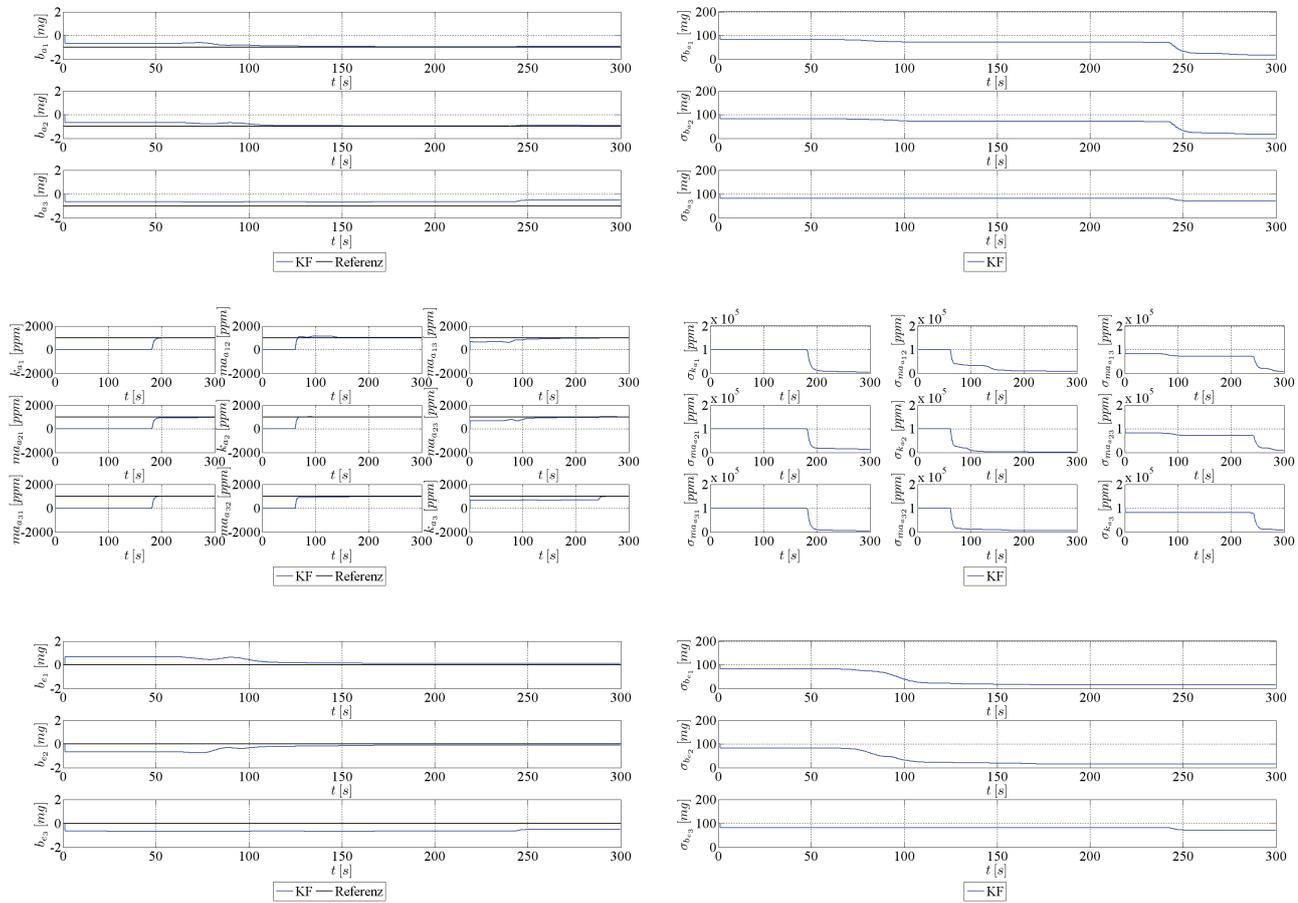


Abbildung 58: Beschleunigungsfehlerparameter im Gesamtmanöver mit skid-to-turn

Von den verbleibenden zwölf Parametern sind pro körperfester Bezugssystemachse jeweils vier als Linearkombination beobachtbar. So sind  $b_{a_1}$  mit  $ma_{a_{12}}$ ,  $ma_{a_{13}}$  und  $b_{e_1}$ ,  $b_{a_2}$  mit  $k_{a_2}$ ,  $ma_{a_{23}}$  und  $b_{e_2}$  beziehungsweise  $b_{a_3}$  mit  $ma_{a_{32}}$ ,  $k_{a_3}$  und  $b_{e_3}$  als Linearkombination beobachtbar. Von diesen Linearkombinationen aus vier Parametern sind die Linearkombinationen dreier Parameter schon aus dem Geradeausflug bekannt. Diese sind in Tabelle 21 rot markiert. Da deren Effekte somit bekannt sind, lassen sich bei einer Kursänderung mit skid-to-turn von Sekunde 60 bis Sekunde 180 die Parameter  $ma_{a_{12}}$ ,  $k_{a_2}$  und  $ma_{a_{32}}$  beobachten. Diese sind deshalb grün markiert. In späteren Teilmanövern bereits bekannte Parameter sind erneut blau markiert.

Zeit	Beobachtbare Linearkombination	Nicht beobachtbar
0–60s	$(b_{a_1} \quad ma_{a_{13}} \quad b_{e_1}), (b_{a_2} \quad ma_{a_{23}} \quad b_{e_2}), (b_{a_3} \quad k_{a_3} \quad b_{e_3})$	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}, ma_{a_{12}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$
60–180s	$ma_{a_{12}}, k_{a_2}, b_{e_1}, b_{e_2}$ $(b_{a_1} \quad ma_{a_{13}}), (b_{a_2} \quad ma_{a_{23}}), (b_{a_3} \quad k_{a_3} \quad b_{e_3})$	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}$
180–240s	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}$ $(b_{a_1} \quad ma_{a_{13}} \quad b_{e_1}), (b_{a_2} \quad ma_{a_{23}} \quad b_{e_2}), (b_{a_3} \quad k_{a_3} \quad b_{e_3})$	$ma_{a_{12}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$
240–300s	$b_{a_1}, b_{a_2}, ma_{a_{13}}, ma_{a_{23}}, k_{a_3}, (b_{a_3} \quad b_{e_3})$	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}, ma_{a_{12}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$

Tabelle 21: Beobachtbarkeit der Beschleunigungsfehlerparameter im Gesamtmanöver mit skid-to-turn

Ein zusätzlicher Effekt tritt durch die Rotation des körperfesten Bezugssystems um die Kursachse auf. So sind die Sensorbias  $b_{a_1}$  und  $b_{a_2}$  nunmehr von den Erdschweremodellbias  $b_{e_1}$  und  $b_{e_2}$  zu unterscheiden. Für den Sensorbias  $b_{a_3}$  und den Erdschweremodellbias  $b_{e_3}$  gilt dies nicht, da die horizontfeste Nadirachse immer noch mit der körperfesten Kursachse zusammenfällt. Die anschließende beschleunigte Bewegung von Sekunde 180 bis Sekunde 240 kann im Bereich der Beschleunigungsfehlerparameter analog zur Kursänderung mit skid-to-turn behandelt werden, mit dem Unterschied, dass die zweite anliegende Beschleunigung diesmal nicht in der Nickachse, sondern in der Rollachse auftritt. Dies führt, da auch hier wiederum die Linearkombination der geradlinigen Bewegung benutzt werden kann, zur Beobachtbarkeit der Parameter  $k_{a_1}$ ,  $ma_{a_{21}}$  und  $ma_{a_{31}}$ . Die abschließende Höhenänderung von Sekunde 240 bis Sekunde 300 führt zu einer Änderung der gemessenen Beschleunigung in der Kursachse und erlaubt letztendlich die Sensorbias von den Skalenfaktorfehlern beziehungsweise Misalignment in der Kursachse zu trennen. Die Parameter  $ma_{a_{13}}$ ,  $ma_{a_{23}}$  und  $k_{a_3}$  werden dadurch beobachtbar. Von den Beschleunigungsfehlerparametern lassen sich zusammenfassend alle Parameter, bis auf den Sensorbias  $b_{a_3}$  und den Erdschweremodellbias  $b_{e_3}$ , beobachten. Diese beiden Parameter sind nur in Linearkombination beobachtbar, da die horizontfeste Nadirachse während des ganzen Manövers stets mit der körperfesten Kursachse zusammenfällt.

### 3.4. Beobachtbarkeit im Gesamtmanöver mit bank-to-turn

Zur Verdeutlichung der Ergebnisse der Beobachtbarkeitsanalyse soll die Beobachtbarkeit der Fehlerparameter auf Grundlage des Gesamtmanövers mit bank-to-turn dargestellt werden.

#### 3.4.1 der Kreiselfehlerparameter

In Abbildung 59 sind Mittelwert und Standardabweichung der Kreiselfehlerparameter dargestellt. Das benutzte Fehlermodell umfasst drei Bias, drei Skalenfaktorfehler und sechs Misalignment.

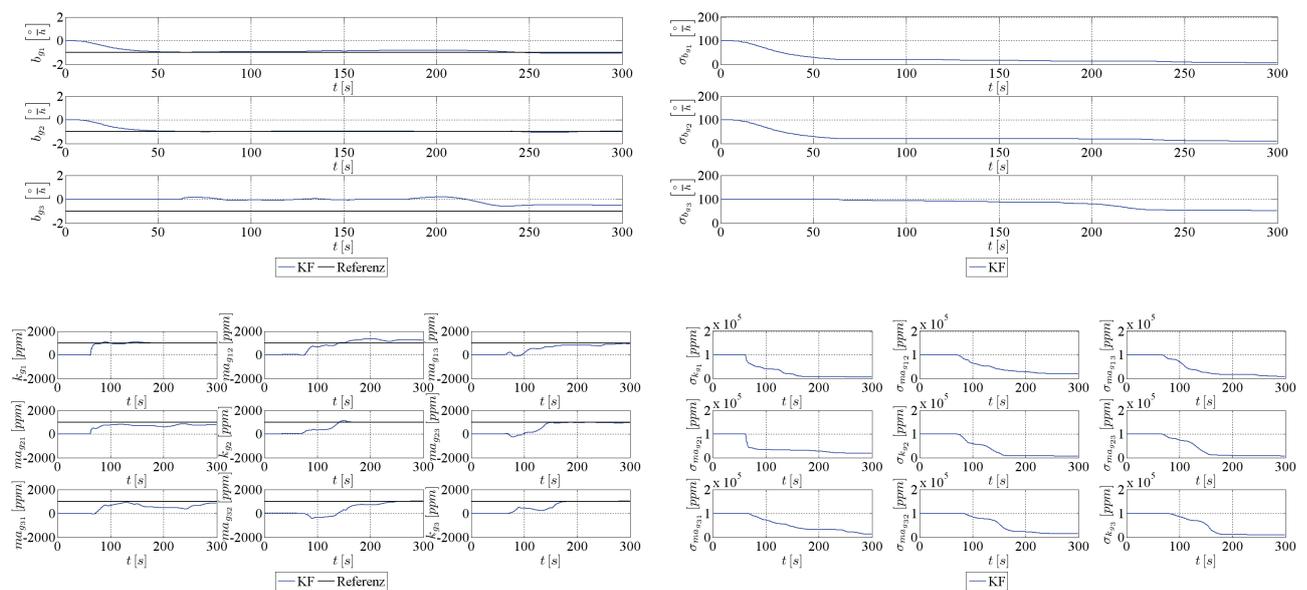


Abbildung 59: Kreiselfehlerparameter im Gesamtmanöver mit bank-to-turn

In der geradlinigen Bewegung der ersten 60 Sekunden messen die Kreisel nichts. Dies führt dazu, dass alle Skalenfaktorfehler und alle Misalignment nicht beobachtbar sind, da die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten Null sind. Die Bias sind grundsätzlich beobachtbar, wobei der Kreiselbias der Kursachse auf Grund der nicht gegebenen Beobachtbarkeit des Kurswinkels in einer geradlinigen Bewegung ebenfalls nicht beobachtbar ist. Die Farbmarkierungen in Tabelle 22 gelten analog. Von Sekunde 60 bis Sekunde 120 wird eine Kursänderung mit bank-to-turn nach Norden und von Sekunde 120 bis 180 eine erneute Kursänderung mit bank-to-turn zurück nach Osten durchgeführt. Die Kursänderung mit bank-to-turn führt auf Grund der gleichzeitigen Roll- und Kurswinkeländerungen zu Winkelgeschwindigkeiten in allen drei körperfesten Bezugssystemachsen. Diese Winkelgeschwindigkeiten sind während des Manövers nicht konstant und linear unabhängig. Es sind somit alle Kreiselfehlerparameter beobachtbar, wobei sich die Beobachtbarkeit erst allmählich ergibt, da sich die vier Kreiselfehlerparameter pro körperfester Bezugssystemachse zu Beginn des Teilmanövers noch austauschen können. Die anschließende beschleunigte Bewegung von Sekunde 180 bis Sekunde 240 und die abschließende Höhenänderung von Sekunde 240 bis Sekunde 300 führen zu keinen Winkelgeschwindigkeiten in der Roll- oder der Nickachse. Somit sind im Gesamtmanöver mit bank-to-turn grundsätzlich alle Kreiselfehlerparameter beobachtbar.

Zeit	Beobachtbare Linearkombination	Nicht beobachtbar
0–60s	$b_{g_1}, b_{g_2}$	$b_{g_3}, k_g, ma_g$
60–180s	$b_g, k_g, ma_g$	–
180–240s	$b_{g_1}, b_{g_2}$	$b_{g_3}, k_g, ma_g$
240–300s	$b_{g_1}, b_{g_2}$	$b_{g_3}, k_g, ma_g$

Tabelle 22: Beobachtbarkeit der Kreisel Fehlerparameter im Gesamtmanöver mit bank-to-turn

### 3.4.2 der Beschleunigungsfehlerparameter

In Abbildung 60 sind Mittelwert und Standardabweichung der Beschleunigungsfehlerparameter dargestellt. Das benutzte Fehlermodell umfasst drei Sensorbias, drei Skalenfaktorfehler, sechs Misalignment und drei Erdschwerere Modellbias.



Abbildung 60: Beschleunigungsfehlerparameter im Gesamtmanöver mit bank-to-turn

In der geradlinigen Bewegung der ersten 60 Sekunden messen die Beschleunigungsmesser lediglich die Erdschwerebeschleunigung. Diese wird vom Beschleunigungsmesser in der Kursachse gemessen. Das führt dazu, dass die Skalenfaktorfehler  $k_{a_1}$  und  $k_{a_2}$  beziehungsweise die Misalignment  $ma_{a_{12}}$ ,  $ma_{a_{21}}$ ,  $ma_{a_{31}}$  und  $ma_{a_{32}}$ , die sich auf die Beschleunigungen der Roll- und Nickachse beziehen, nicht beobachtbar sind, da die zugehörigen Beschleunigungen Null sind. Von den verbleibenden neun Parametern sind pro Achse jeweils drei als Linearkombination beobachtbar. So sind die Linearkombinationen von  $b_{a_1}$  mit  $ma_{a_{13}}$  und  $b_{e_1}$ ,  $b_{a_2}$  mit  $ma_{a_{23}}$  und  $b_{e_2}$  beziehungsweise  $b_{a_3}$  mit  $k_{a_3}$  und  $b_{g_3}$  beobachtbar, da wegen der konstanten Erdschwerebeschleunigung und der fehlenden Rotation zwischen dem körperfesten und dem horizontfesten Bezugssystem nicht festgestellt werden kann, ob der Gesamtbeschleunigungsfehler auf den Sensorbias, auf den Skalenfaktorfehlern beziehungsweise Misalignment, den Erdschwerere Modellbias oder einer Linearkombination der drei beruht. Der Kalmanfilter verteilt die Spannungen somit allein auf Grund der entsprechenden Kovarianzen. Von Sekunde 60 bis Sekunde 120 wird eine Kursänderung mit bank-to-turn nach Norden und von Sekunde 120 bis 180 eine erneute Kursänderung mit bank-to-turn zurück nach Osten durchgeführt. Neben der ständig anliegenden Erdschwerebeschleunigung tritt dabei eine nicht konstante

Beschleunigung auf, die auf die Zentrifugalbeschleunigung zurückzuführen ist. Der Rollwinkel wird während der Kursänderung mit bank-to-turn dabei so gewählt, dass die resultierende Gesamtbeschleunigung stets in der Kursachse auftritt. Dies führt dazu, dass die in der geradlinigen Bewegung nicht beobachtbaren Parameter nicht beobachtbar bleiben, da in der Roll- und der Nickachse keine Beschleunigungen auftreten. In der Kursachse liegt eine nicht konstante Beschleunigung an. Das körperfeste Bezugssystem rotiert auf Grund der zusätzlichen Rollbewegung im Vergleich zur Kursänderung mit skid-to-turn dabei um alle drei Achsen des horizontalfesten Bezugssystems. Diese beiden Effekte führen dazu, dass sich die aus der geradlinigen Bewegung bekannten Linearkombinationen aus jeweils drei Fehlerparametern pro Sensorachse in ihre Bestandteile auflösen lassen. Die Sensorbias  $b_{a_1}$ ,  $b_{a_2}$  und  $b_{a_3}$ , die Skalenfaktorfehler beziehungsweise Misalignment  $ma_{a_{13}}$ ,  $ma_{a_{23}}$  und  $k_{a_3}$  und die Erdschwerermodellbias  $b_{e_1}$ ,  $b_{e_2}$  und  $b_{e_3}$  sind damit beobachtbar.

Zeit	Beobachtbare Linearkombination	Nicht beobachtbar
0–60s	$(b_{a_1} \ ma_{a_{13}} \ b_{e_1}), (b_{a_2} \ ma_{a_{23}} \ b_{e_2}), (b_{a_3} \ k_{a_3} \ b_{e_3})$	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}, ma_{a_{12}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$
60–180s	$b_a, ma_{a_{13}}, ma_{a_{23}}, k_{a_3}, b_e$	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}, ma_{a_{12}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$
180–240s	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}$ $(b_{a_1} \ ma_{a_{13}} \ b_{e_1}), (b_{a_2} \ ma_{a_{23}} \ b_{e_2}), (b_{a_3} \ k_{a_3} \ b_{e_3})$	$ma_{a_{12}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$
240–300s	$b_{a_1}, b_{a_2}, ma_{a_{13}}, ma_{a_{23}}, k_{a_3}, b_{e_1}, b_{e_2}, (b_{a_3} \ b_{e_3})$	$k_{a_1}, ma_{a_{21}}, ma_{a_{31}}, ma_{a_{12}}, k_{a_2}, ma_{a_{32}}$

**Tabelle 23: Beobachtbarkeit der Beschleunigungsfehlerparameter im Gesamtmanöver mit bank-to-turn**

Die anschließende beschleunigte Bewegung von Sekunde 180 bis Sekunde 240 kann im Bereich der Beschleunigungsfehlerparameter analog zur beschleunigten Bewegung im Gesamtmanöver mit skid-to-turn behandelt werden. Dies führt, da hier auf die bereits beobachtbaren Parameter zurückgegriffen werden kann, zur Beobachtbarkeit der Parameter  $k_{a_1}$ ,  $ma_{a_{21}}$  und  $ma_{a_{31}}$ . Die abschließende Höhenänderung von Sekunde 240 bis Sekunde 300 führt zu einer Änderung der gemessenen Beschleunigung in der Kursachse und erlaubt eine erneute Beobachtbarkeit analog zur Kursänderung mit bank-to-turn. Zusammenfassend lassen sich alle Parameter bis auf die Skalenfaktorfehler beziehungsweise Misalignment  $ma_{a_{12}}$ ,  $k_{a_2}$  und  $ma_{a_{32}}$  beobachten, da während des Gesamtmanövers keine Beschleunigungen in der Nickachse auftreten. Dies schließt die Verifizierung der Beobachtbarkeitsanalyse ab.

## 4. Verifizierung des BPKF (Anhang G)

Abschließend erfolgt die Verifizierung des in Abschnitt VI neu entwickelten BPKF. Das Testkonzept hierfür ist denkbar einfach. So wird eine beliebige Trajektorie zuerst mit dem CKF und anschließend mit dem BPKF ausgewertet und die Ergebnisse werden anschließend verglichen. Bei der Trajektorie ist lediglich zu beachten, dass alle implementierten Zustände angeregt sein müssen, da sich eventuell unterschiedliche Koeffizienten durch Nullmultiplikationen sonst nicht auswirken. Die Ergebnisse beider Kalmanfilter müssen dabei bis auf numerische Effekte auf Grund der computergestützten Auswertung identisch sein. In der Implementierung ist jedoch darauf zu achten, dass der BPKF ausschließlich die Elemente der Kovarianzmatrix oberhalb der Hauptdiagonale berechnet und weiterverwendet. Dadurch wird eine Zwangssymmetrie der Kovarianzmatrix im BPKF herbeigeführt. Dieses Element muss nun, um eine völlige Übereinstimmung der beiden Kalmanfilteralgorithmen herstellen zu können auch im CKF implementiert werden, da in diesem ursprünglich keine Methoden zur Zwangssymmetrie enthalten sind. Die beiden Elemente der Kalmanprädiktion und der Kalmankorrektion werden unabhängig voneinander verifiziert.

### 4.1. Verifizierung der Kalmanprädiktion

Die Kalmanprädiktion lässt sich etwas einfacher verifizieren als die im nächsten Kapitel folgende Kalmankorrektion, da die Kalmanprädiktion unabhängig von der Kalmankorrektion verifiziert werden kann. Als Qualitätsmaß wird die Standardabweichung des Kalmanfilters betrachtet. In Abbildung 61 sind die Abweichungen in der Standardabweichung der drei Positionszustände zwischen dem BPKF und dem CKF dargestellt. Die restlichen Graphen inklusive aller absoluten Standardabweichungen sind in Anhang H nachzuschlagen. Die Abweichung von maximal  $5 \cdot 10^{-8}$  Metern in der Standardabweichung der Positionszustände nach einer Simulationsdauer von 3600 Sekunden und ohne Stützung ist insgesamt hinnehmbar. Der Fehler, der durch die Verwendung des BPKF entsteht, ist um viele Größenordnungen kleiner als der generell vorliegende Linearisierungsfehler von einigen Metern gemäß Kapitel 2.3 und immer noch deutlich kleiner als der resultierende Fehler von etwa  $5 \cdot 10^{-6}$  Metern durch die Verwendung verschiedener Parametrisierungen gemäß Kapitel 2.1. Dass in Abbildung 61 nicht direkt numerisches Rauschen zu sehen ist, liegt an der Tatsache, dass sich das numerische Rauschen über eine Simulationsdauer von 3600 Sekunden integrativ auf die

Positionszustände auswirkt. In den Abbildungen des Anhangs H sind die numerischen Rauschprozesse auf Grund der computergestützten Simulation deutlicher erkennbar.

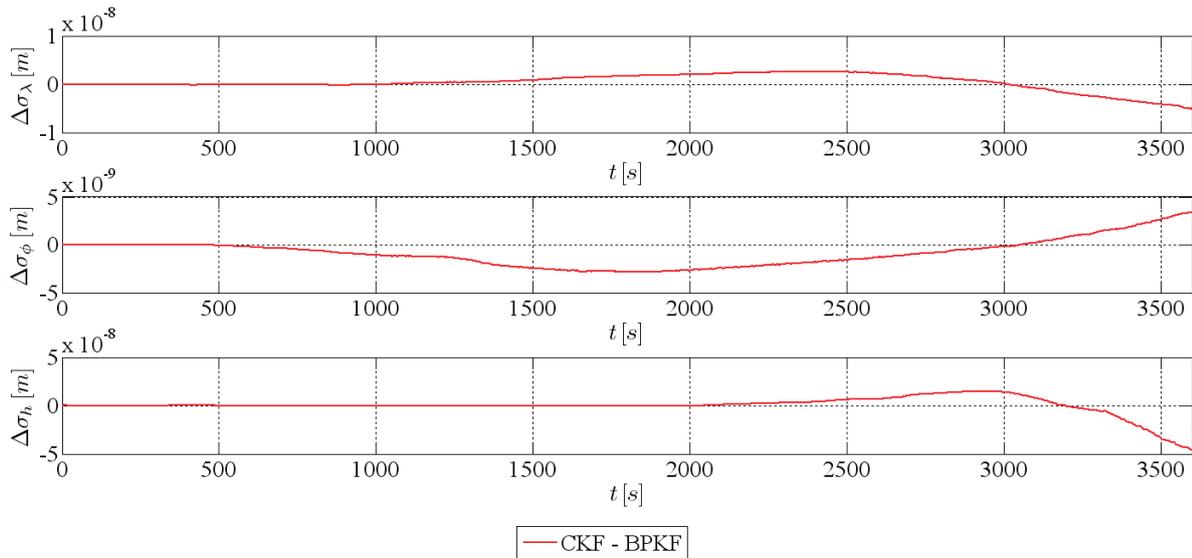


Abbildung 61: Abweichung der Standardabweichung der Position in der Kalmanprädiktion

## 4.2. Verifizierung der Kalmankorrektion

Für die Verifizierung der Kalmankorrektion wird zwingend die Kalmanprädiktion benötigt. Für die Verifizierung wird ein rein theoretischer Ansatz verwendet, bei dem im Anschluss an eine eben verifizierte, Kalmanprädiktion direkt eine Kalmankorrektion mit der gleichen Frequenz berechnet wird. Die Unterschiede in der Standardabweichung der Position sind in Abbildung 62 abgebildet. Die restlichen Graphen inklusive der absoluten Standardabweichungen sind in Anhang H zu finden.

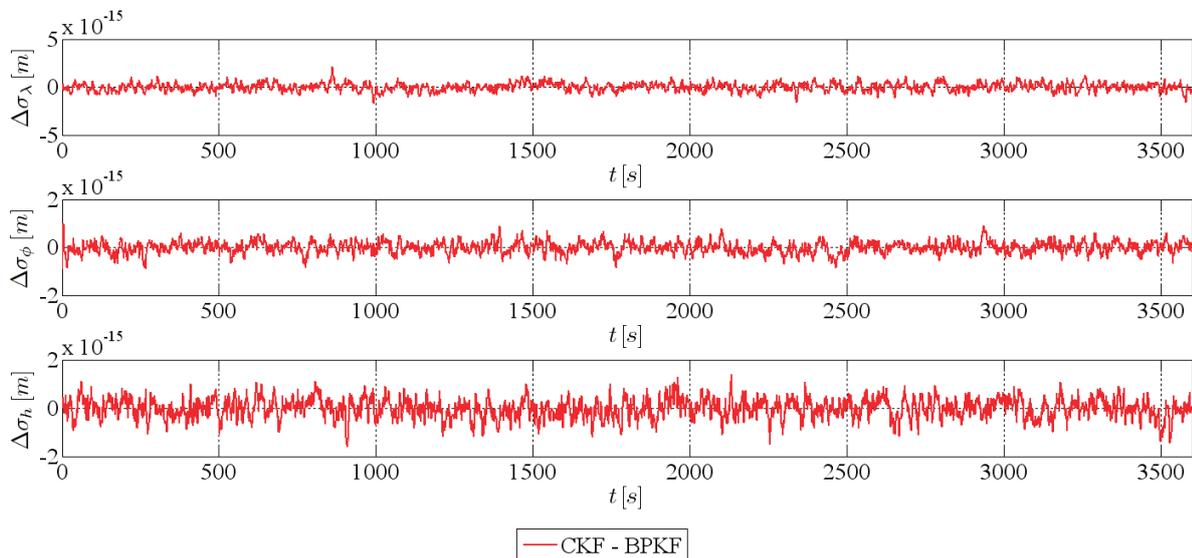


Abbildung 62: Abweichung der Standardabweichung der Position in der Kalmankorrektion

Die Unterschiede zwischen dem BPKF und dem CKF liegen im Bereich der numerischen Rechengenauigkeit. Da in der Kalmankorrektion nicht integriert wird und durch die Kalmankorrektion eine ständige Stützung gegeben ist, ist hier im Gegensatz zur Verifizierung der Kalmanprädiktion auch auf den Positionszuständen das numerische Rauschen zu erkennen. Dies schließt die Verifikation des BPKF ab.

## 5. Zusammenfassung

Ziel dieses Kapitels war die eindeutige Verifizierung der drei grundlegenden Ergebnisse dieser Arbeit. Erstens mussten die in Abschnitt III hergeleiteten Bewegungsgleichungen in den drei unterschiedlichen Parametrisierungen und den drei Ausbaustufen verifiziert werden. In Kapitel 2 dieses Abschnittes hat sich im Rahmen einer fehlerfreien Simulation ein Restfehler in der Größenordnung von  $10^{-5}$  Metern nach einer Simulationsdauer von 3600 Sekunden ohne Stützung für die fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen und für die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen ergeben. Zur Verifizierung der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen wurde aus Sicherheitsgründen ein anderer Weg gewählt, da die Linearisierungseffekte im Restfehler zu dominant sind. Hier wurde der Differentialquotient der bereits verifizierten nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen mit dem Differenzenquotient der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen verglichen. Der relative Restfehler übersteigt in keinem der drei Ansätze  $10^{-5}$ . Setzt man obige Restfehler in Bezug zu den Navigationsgenauigkeiten aktuell verfügbarer hochgenauer IMU, wie beispielsweise dem Electrically Suspended Gyrometer (ESG), oder eventuell zukünftig verfügbarer IMU, wie beispielsweise dem Cold Atom Interferometer (CAI), der die Genauigkeiten eines ESG nochmals um den Faktor 10 übertreffen könnte, so ist selbst für diese Anwendungen ein Restfehler im Bereich von  $10^{-5}$  Metern nach 3600 Sekunden ohne Stützung jederzeit hinnehmbar. Abschließend wurden noch die Auswirkungen der in Abschnitt III hergeleiteten vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern betrachtet. Als Fazit bleibt festzuhalten: Je schlechter die IMU, desto mehr kann vereinfacht werden. Zweitens wurden die bisher theoretisch vorliegenden Ergebnisse der Beobachtbarkeitsanalyse aus Abschnitt V durch praktische Beispiele verdeutlicht. Drittens ergab ein Vergleich des in Abschnitt VI entwickelten BPKF mit dem CKF die Gültigkeit des BPKF. Die kinematische Verifizierung der drei Hauptergebnisse dieser Arbeit ist damit abgeschlossen. Die ganzheitliche Betrachtung aller Problemstellungen wird im nächsten Abschnitt im Rahmen einer dynamischen Simulation untersucht.

# A Abbildungen zu Kapitel 1

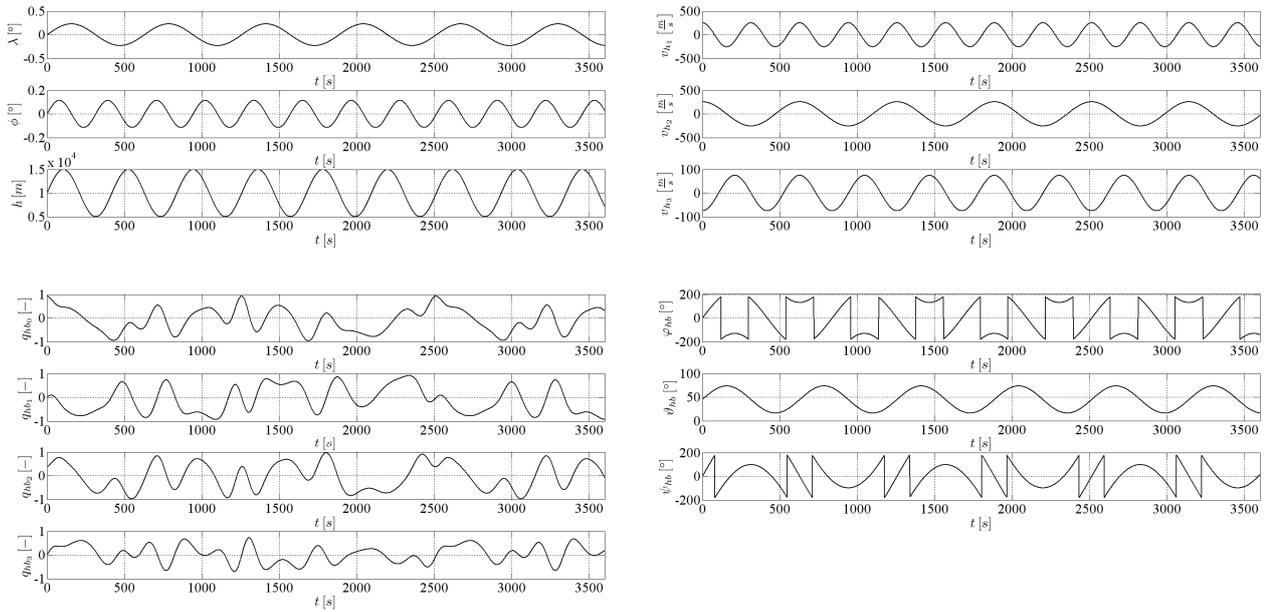


Abbildung 63: Wahre Navigationszustände der Referenztrajektorie

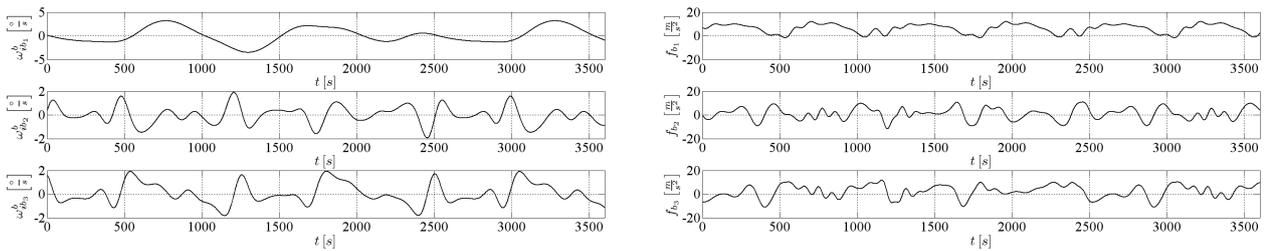


Abbildung 64: Wahre inertielle Sensordaten der Referenztrajektorie

## B Abbildungen zu Kapitel 2.1

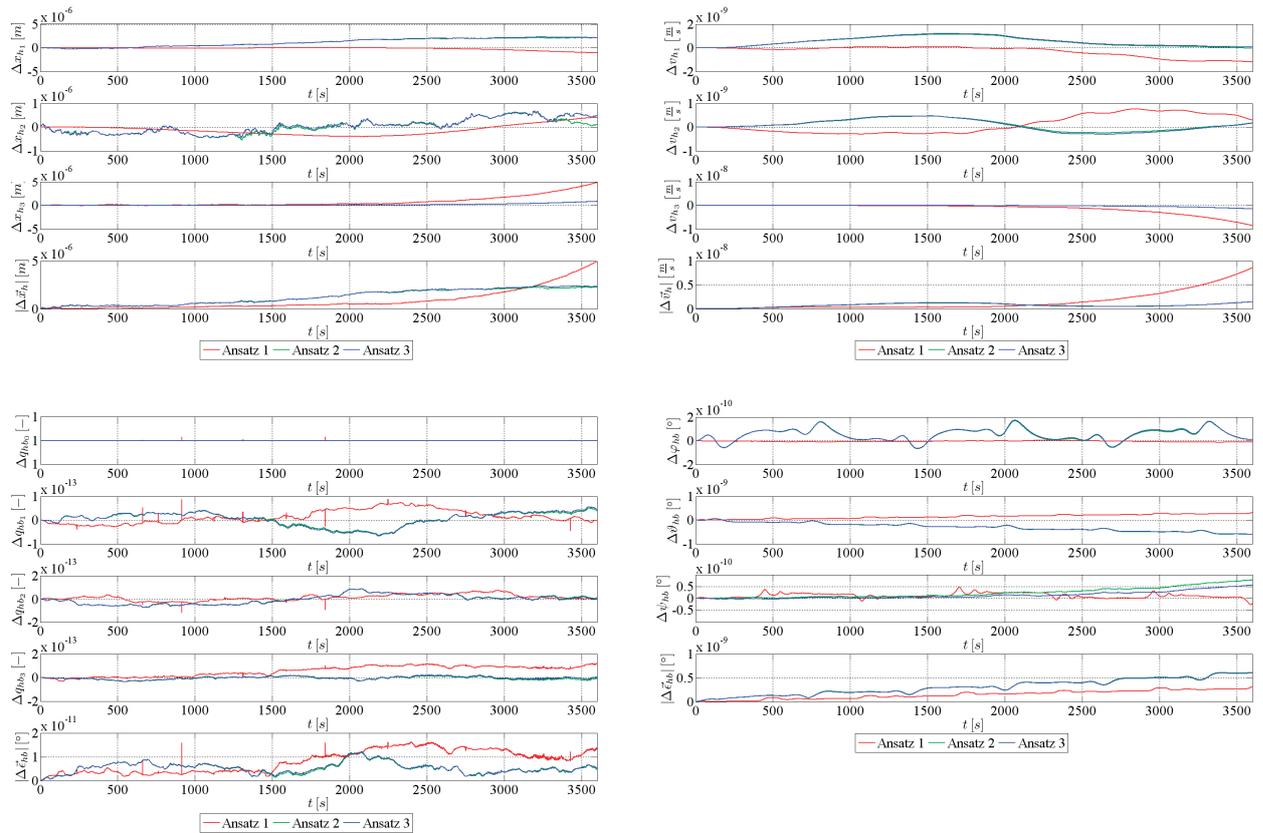


Abbildung 65: Navigationsfehler der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen

# C Abbildungen zu Kapitel 2.2

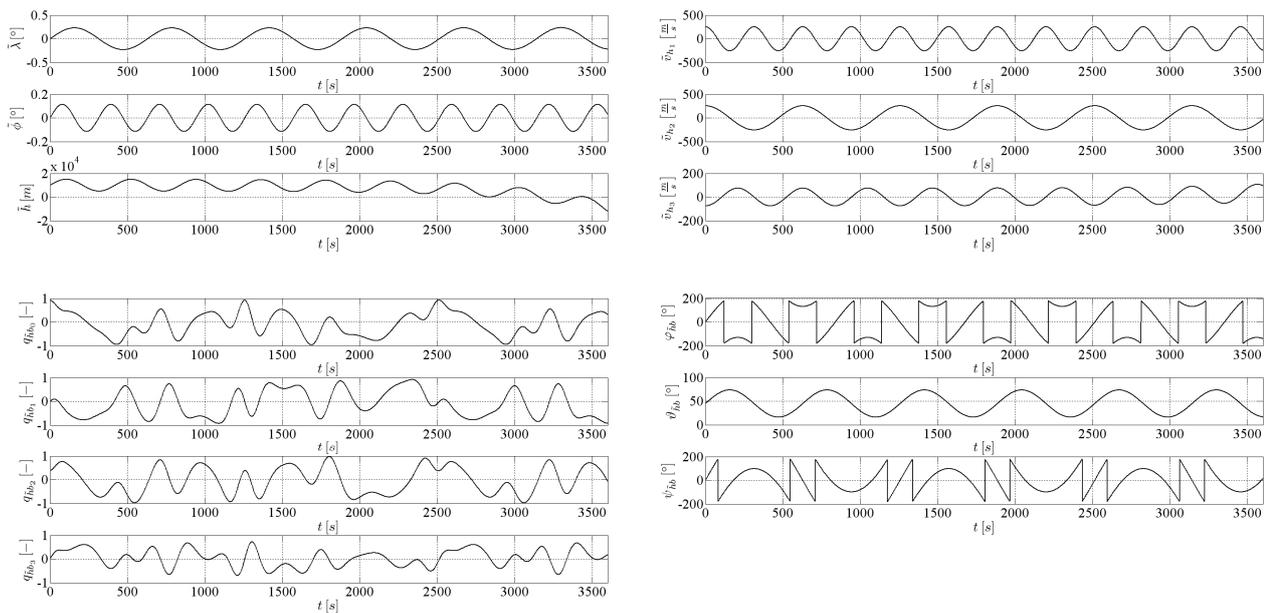


Abbildung 66: Navigationsnäherung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen

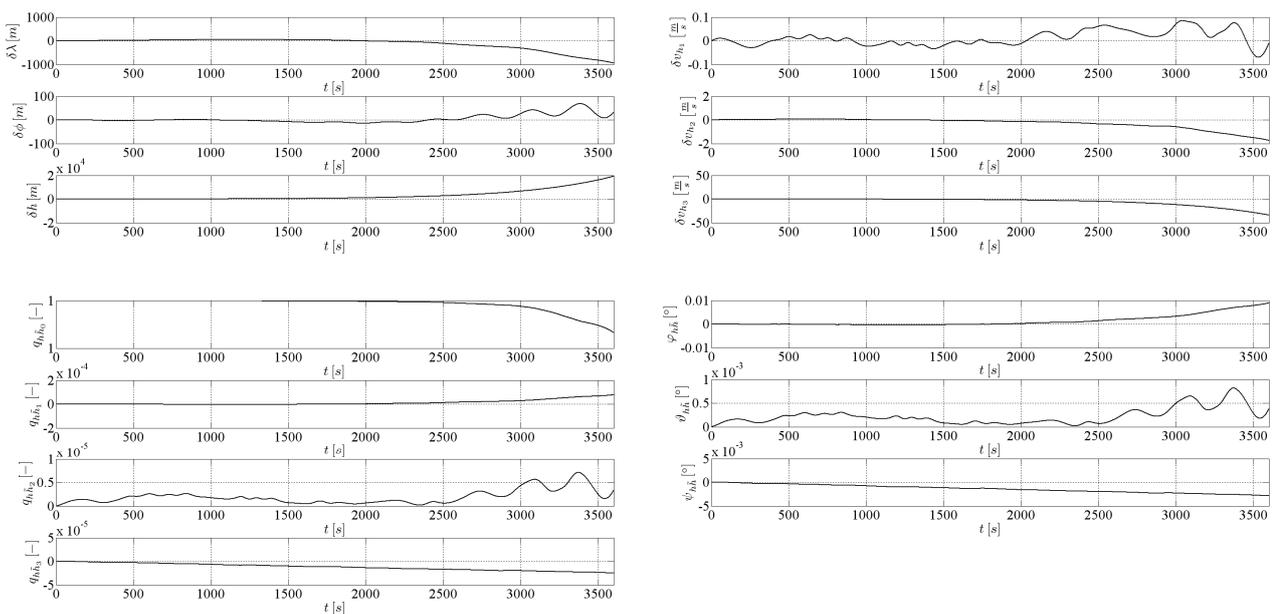


Abbildung 67: Navigationsstörung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen

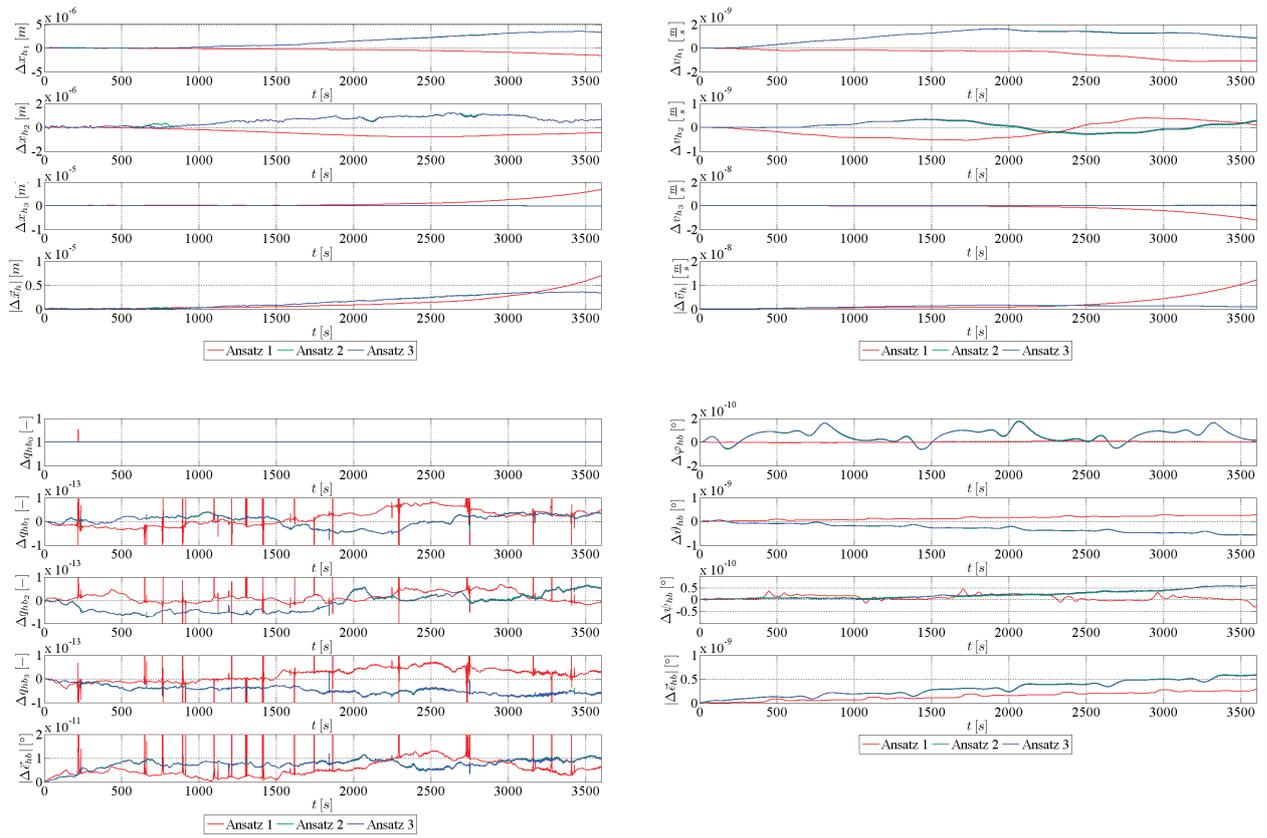


Abbildung 68: Navigationsfehler der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen

## D Abbildungen zu Kapitel 2.3

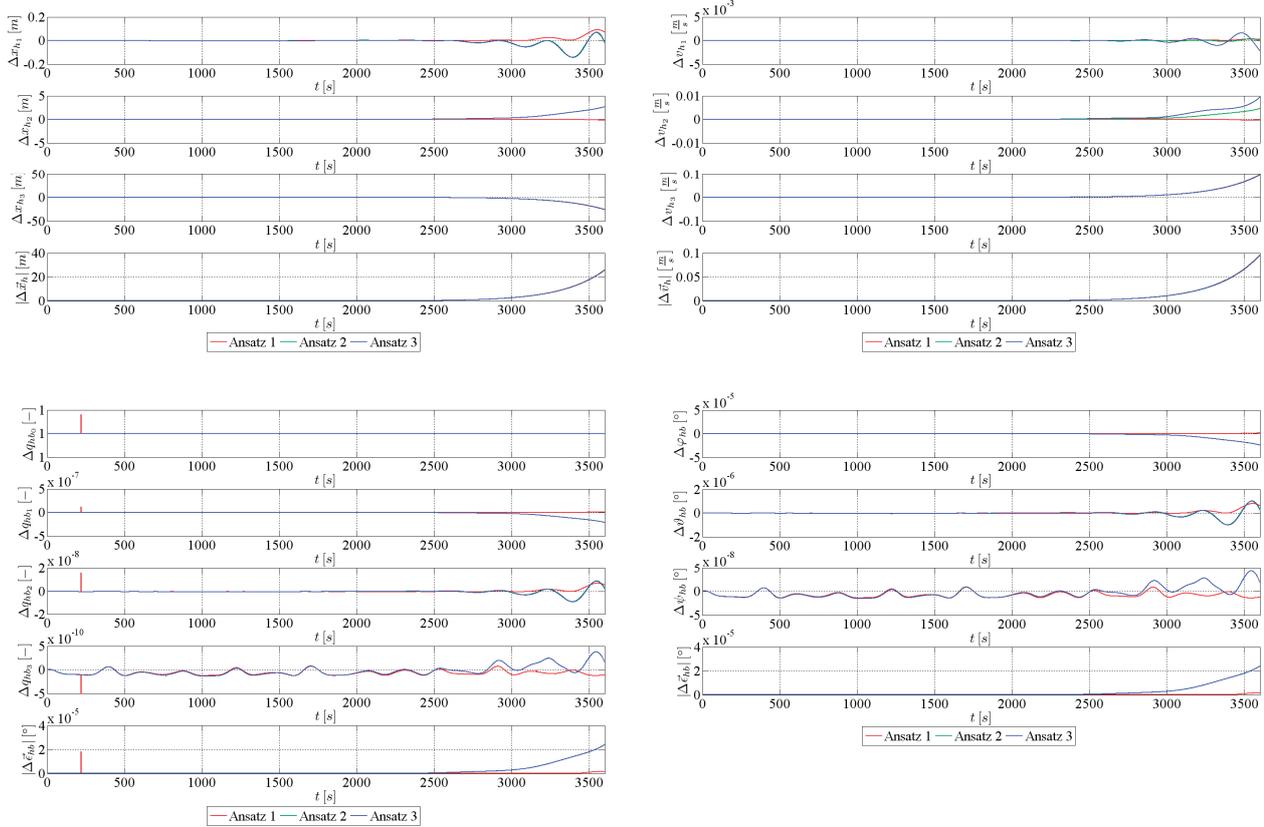


Abbildung 69: Navigationsfehler der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen

# E Abbildungen zu Kapitel 2.4.2

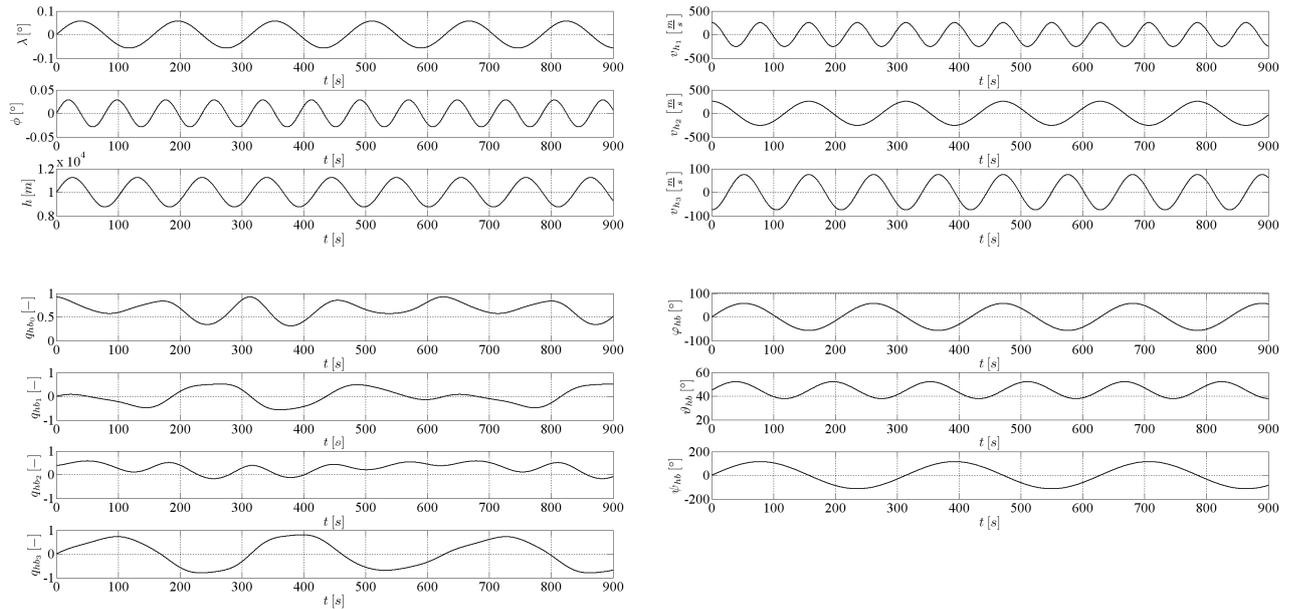


Abbildung 70: Wahre Navigationszustände der Referenztrajektorie für Tactical-Grade IMU

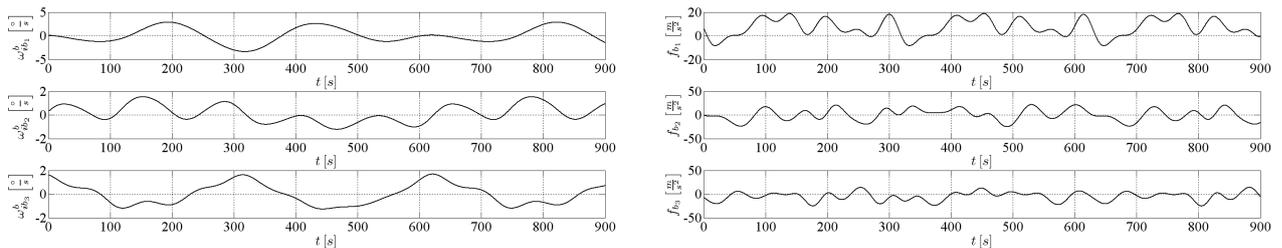


Abbildung 71: Wahre inertielle Sensordaten der Referenztrajektorie für Tactical-Grade IMU

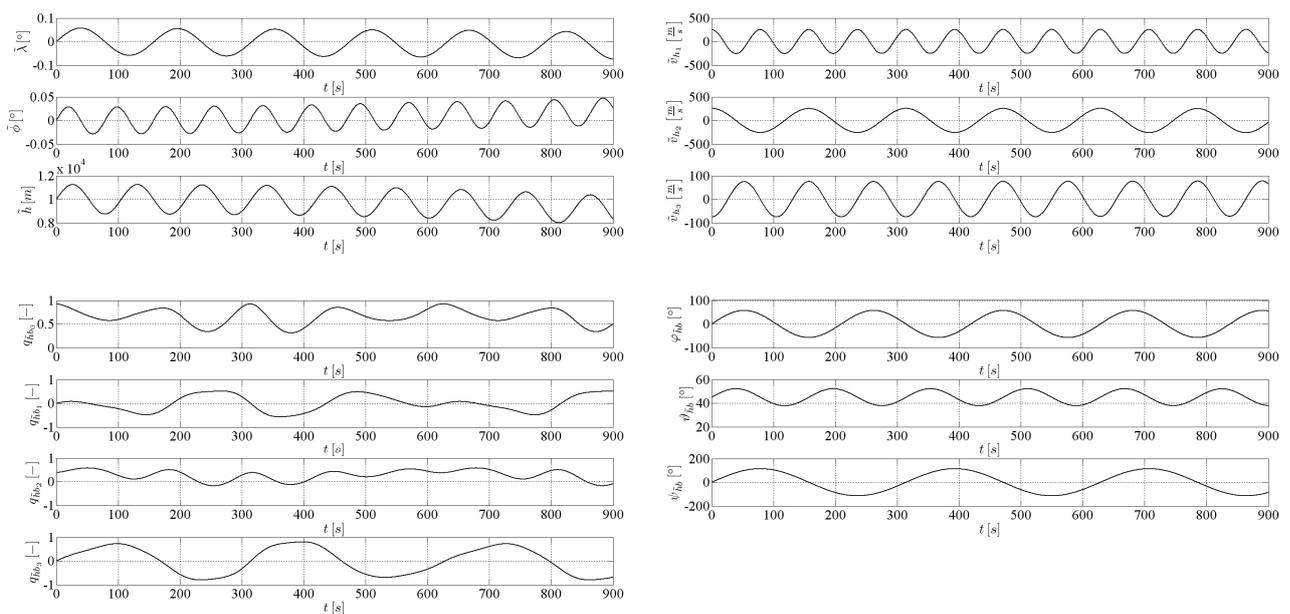


Abbildung 72: Navigationsnäherung der Referenztrajektorie für Tactical-Grade IMU

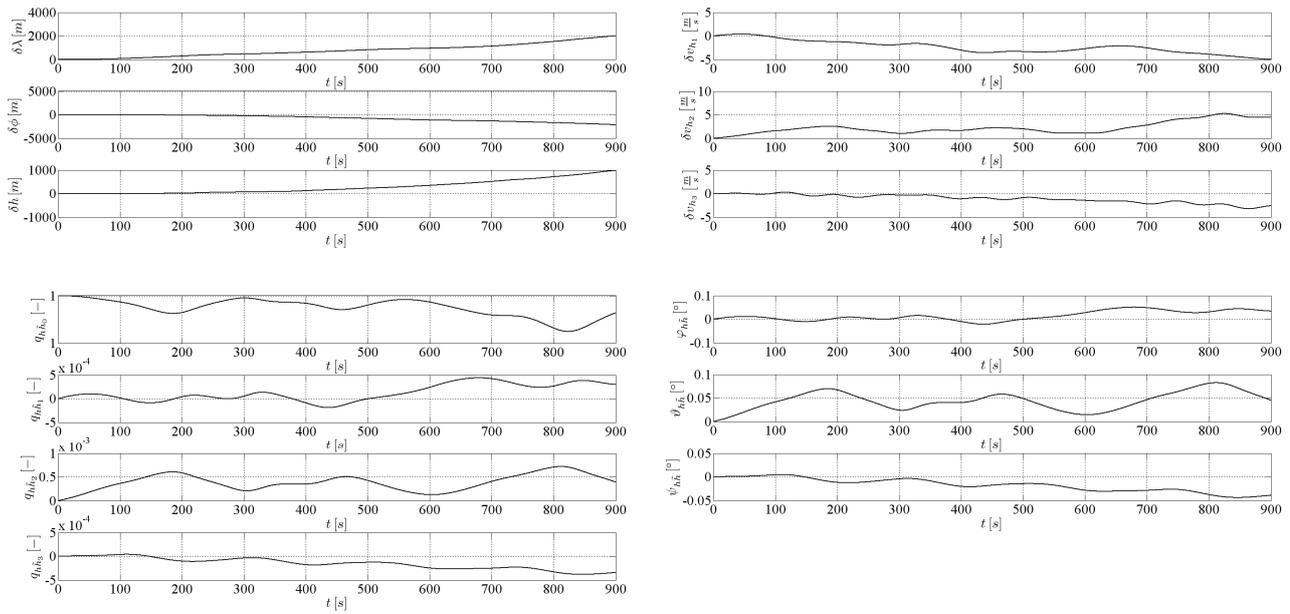


Abbildung 73: Navigationsstörung der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Tactical-Grade IMU

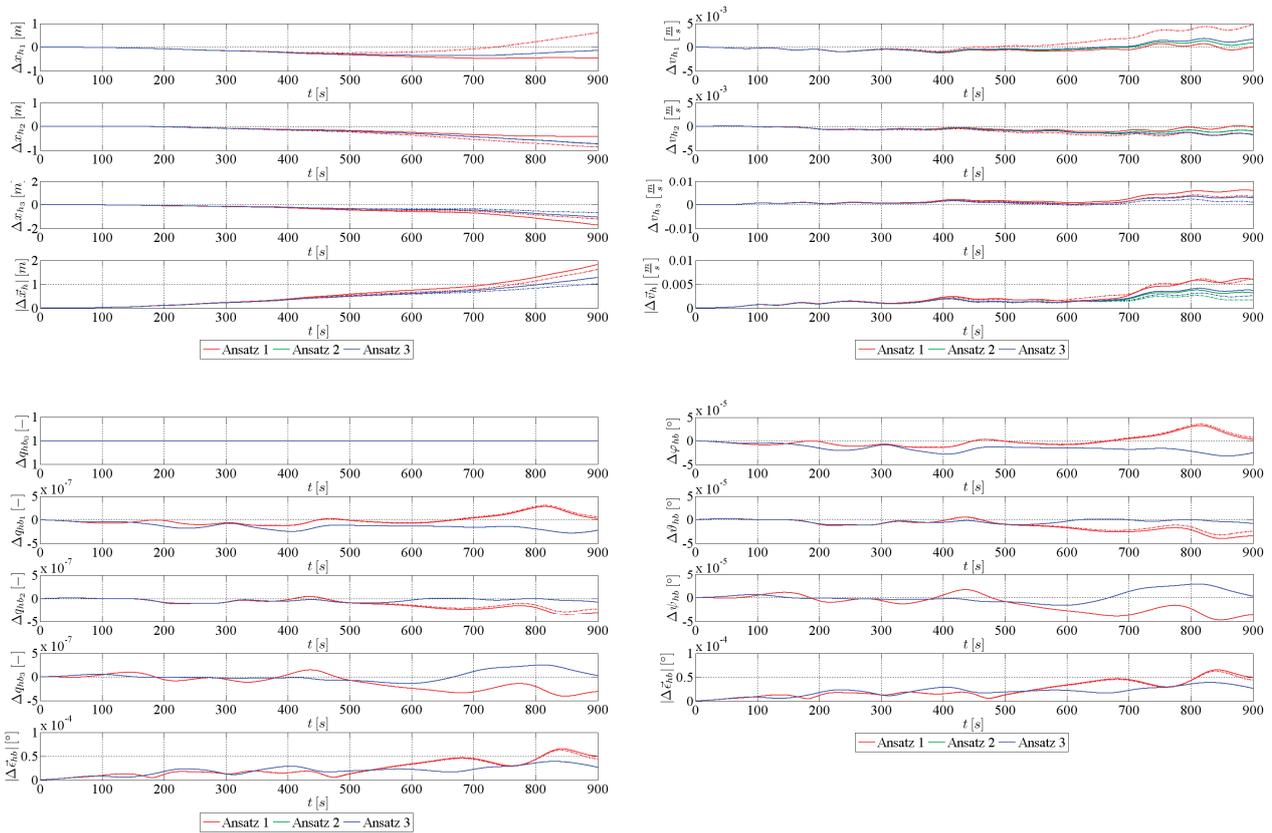


Abbildung 74: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Tactical-Grade IMU

# F Abbildungen zu Kapitel 2.4.3

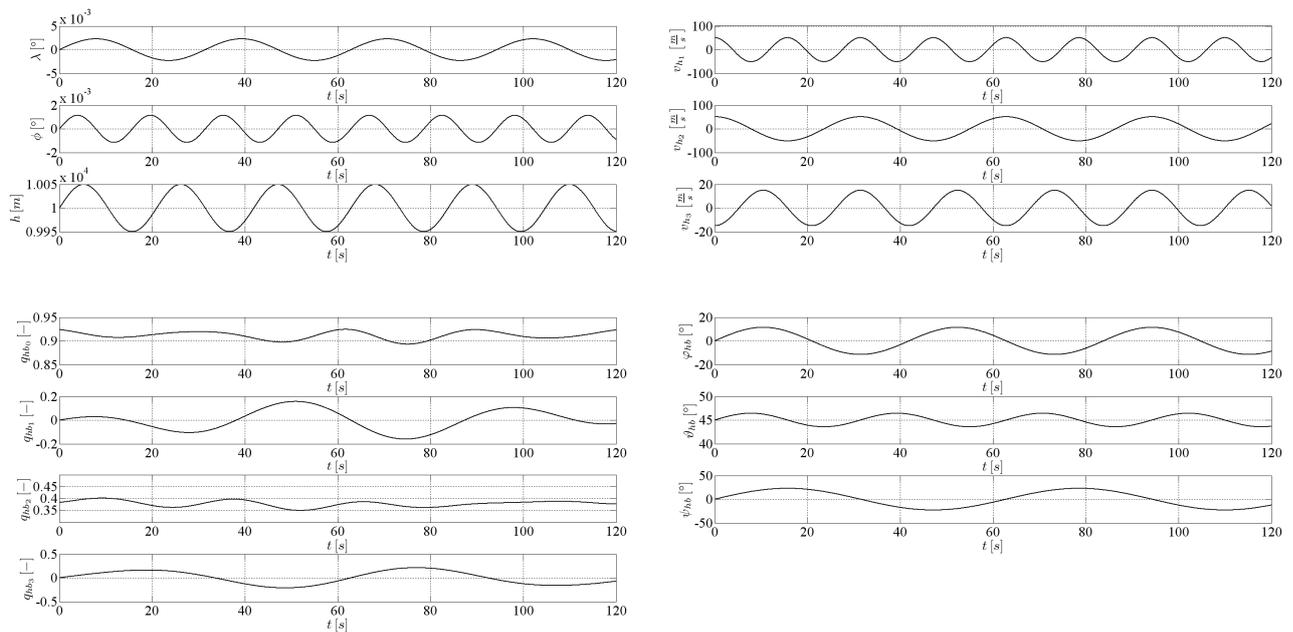


Abbildung 75: Wahre Navigationszustände der Referenztrajektorie für Rate-Grade IMU

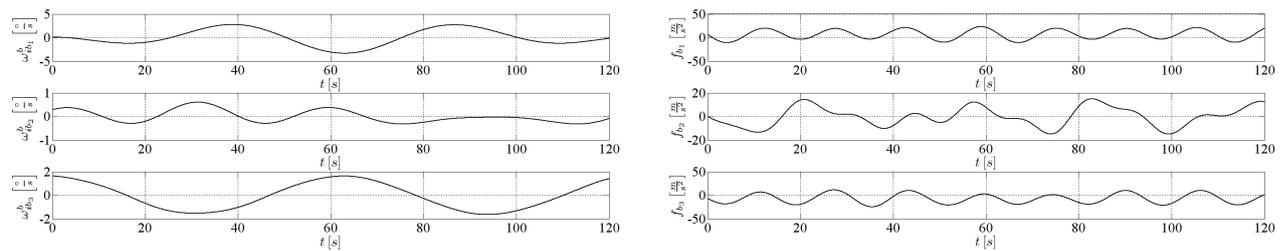


Abbildung 76: Wahre inertielle Sensordaten der Referenztrajektorie für Rate-Grade IMU

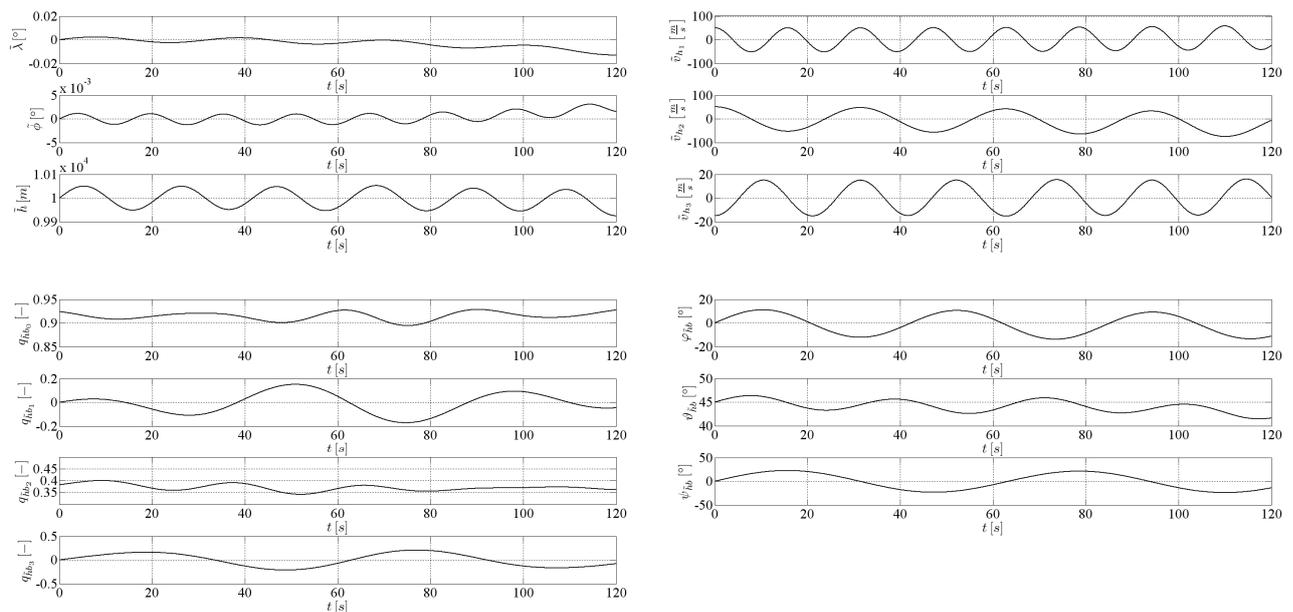


Abbildung 77: Navigationsnäherung der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Rate-Grade IMU

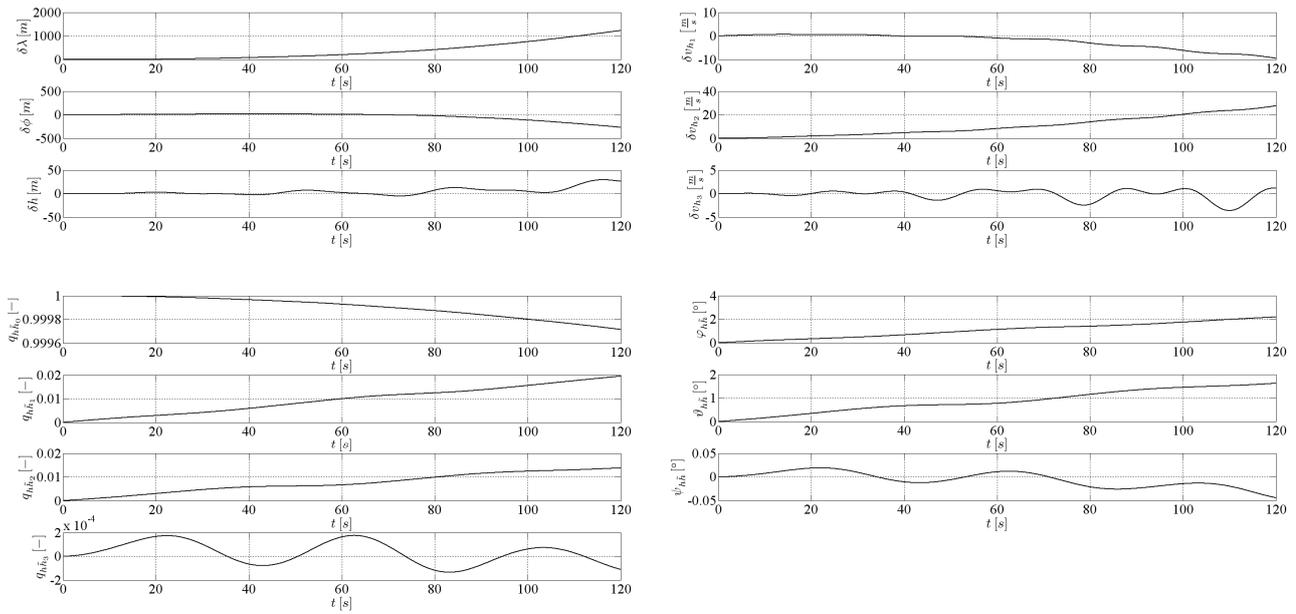


Abbildung 78: Navigationsstörung der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Rate-Grade IMU

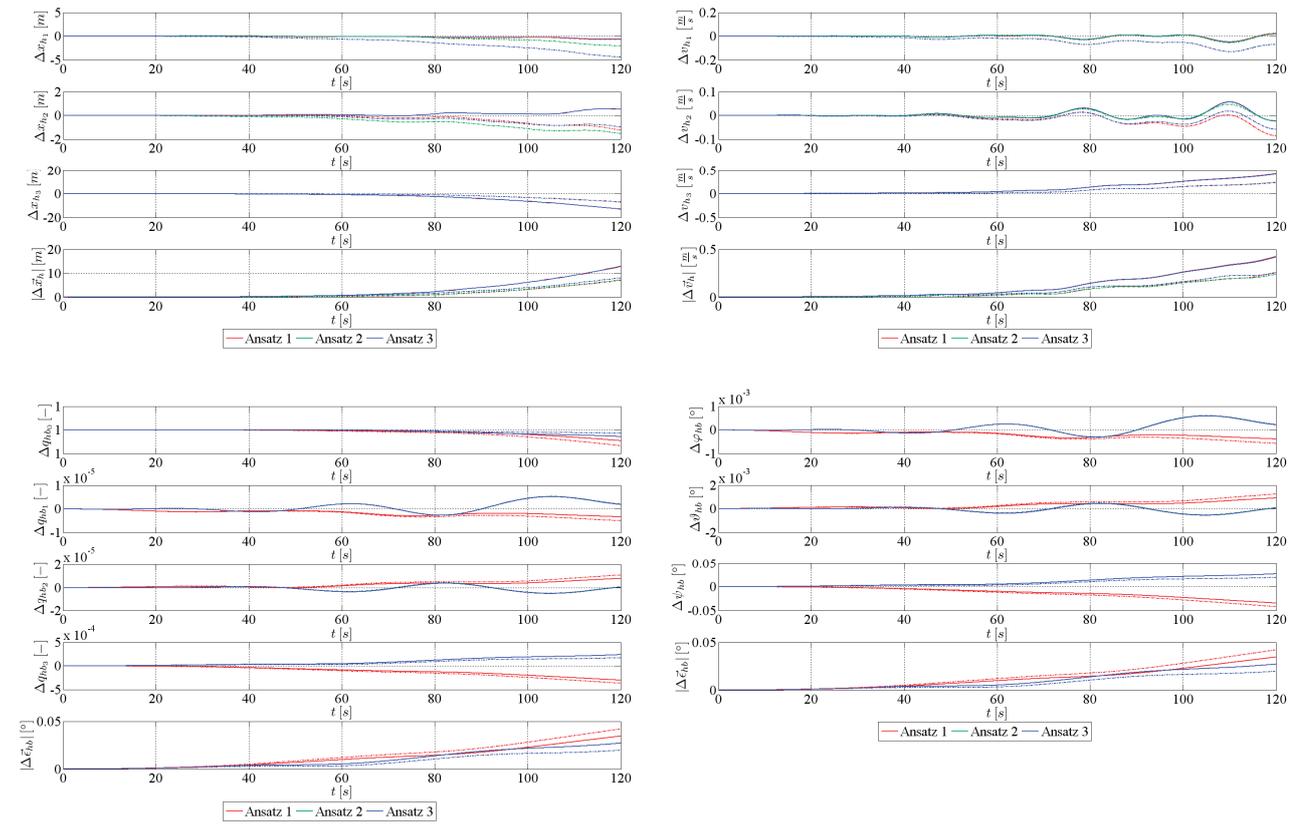


Abbildung 79: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Rate-Grade IMU

# G Abbildungen zu Kapitel 4

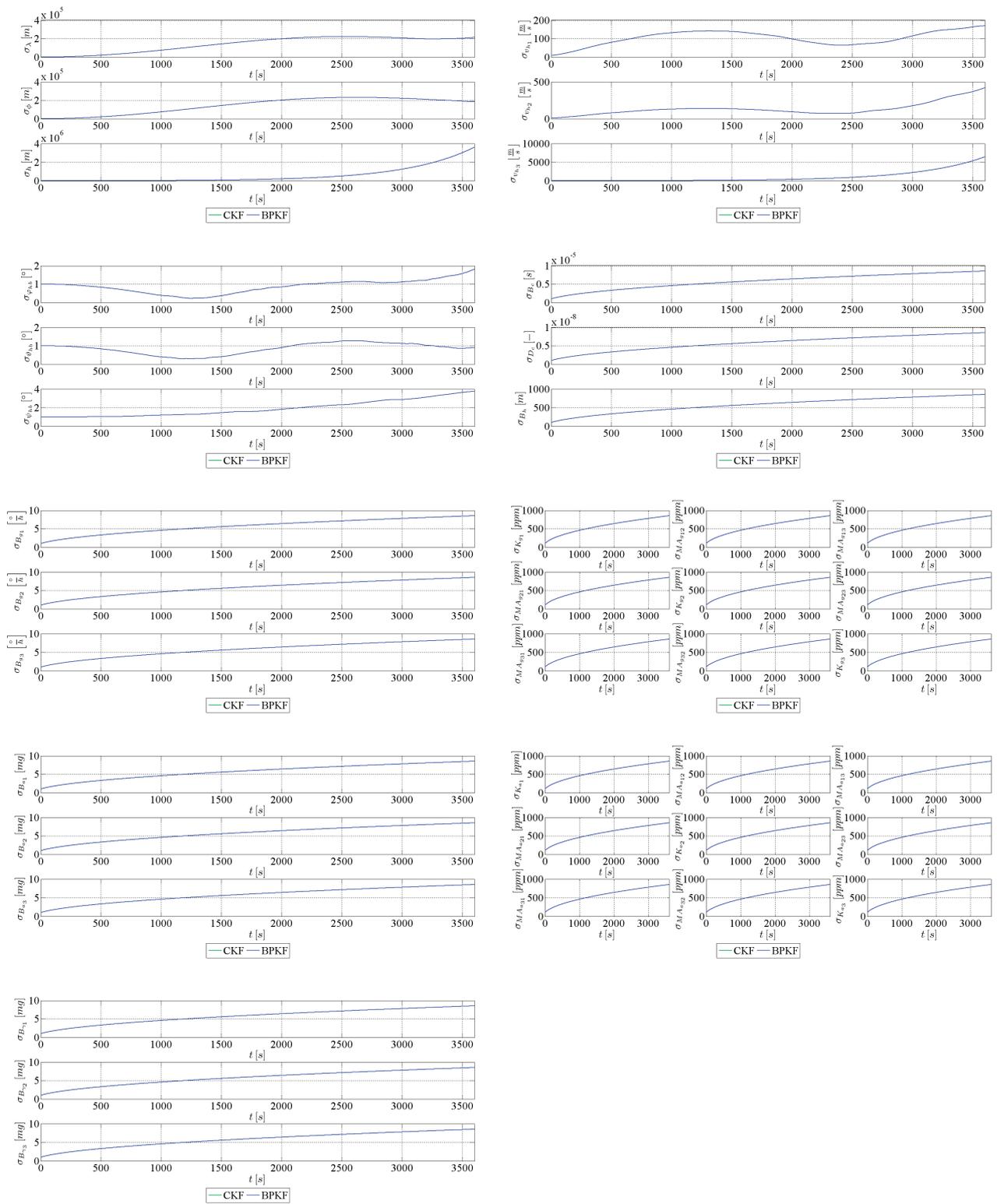


Abbildung 80: Standardabweichung in der Kalmanprädiktion

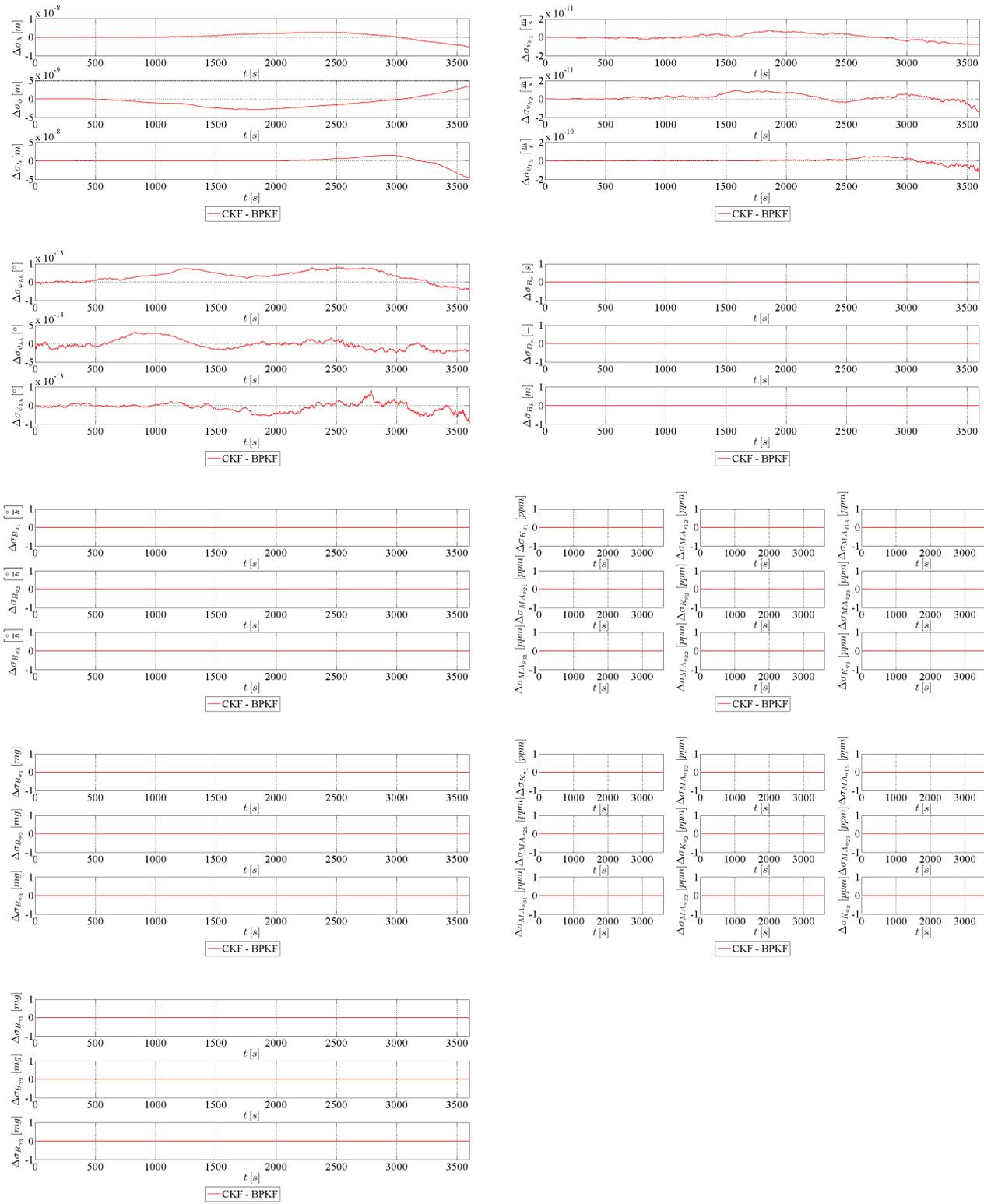


Abbildung 81: Abweichung der Standardabweichung in der Kalmanprädiktion



Abbildung 82: Standardabweichung in der Kalmankorrektion

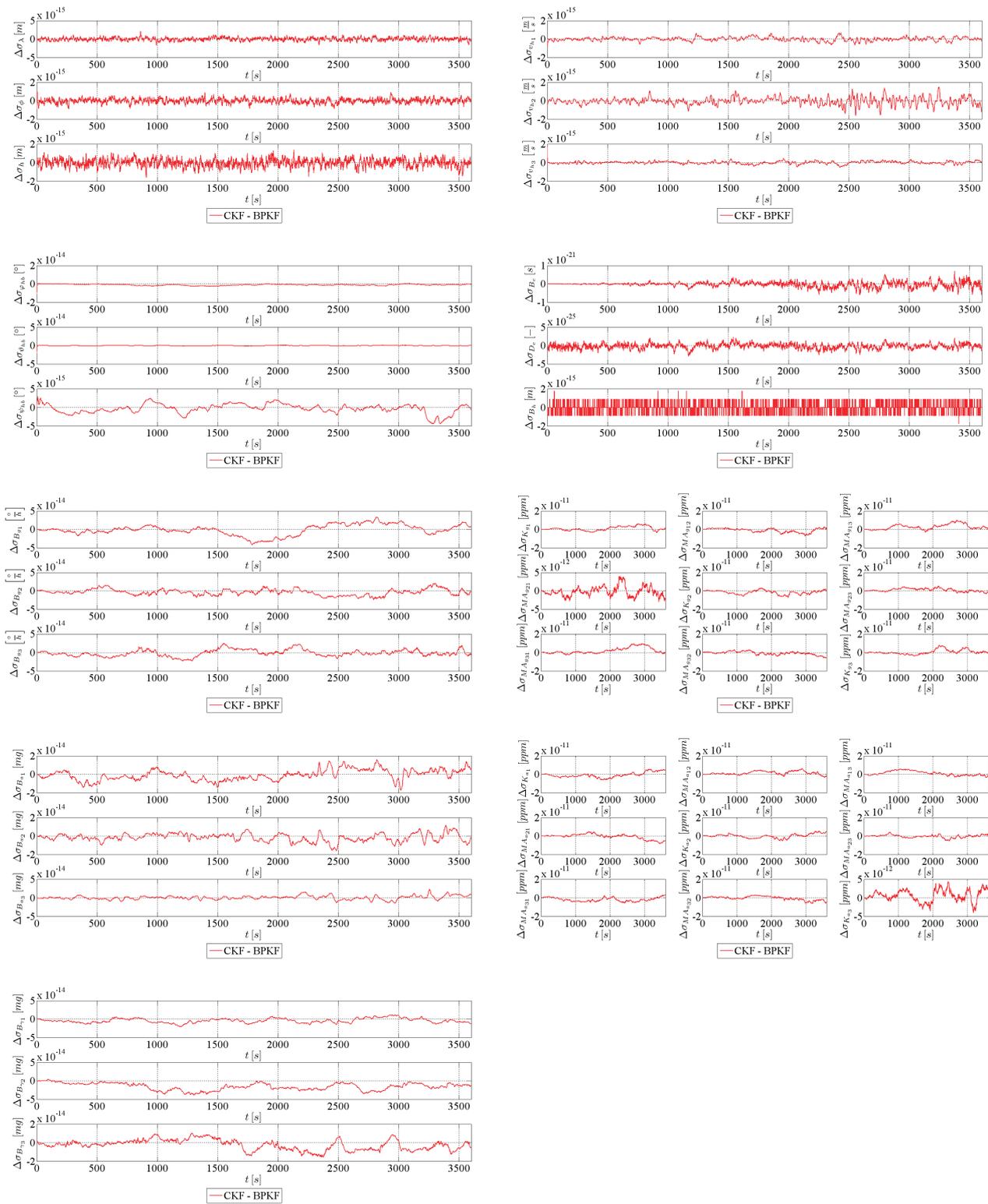


Abbildung 83: Abweichung der Standardabweichung in der Kalmankorrektur

# VIII Dynamische Simulation

Als letzter inhaltlicher Teil dieser Arbeit widmet sich dieser Abschnitt der dynamischen Simulation eines Navigationssystems. Abweichend vom vorigen Abschnitt, in dem die jeweiligen Referenztrajektorien über kinematische Lissajousfiguren definiert wurden, verfolgt dieser Abschnitt einen dynamischen Ansatz. Eine rein analytische Referenztrajektorie existiert somit nicht mehr, da auch die Referenztrajektorie über eine aerodynamische Simulation aus den jeweiligen Systemeingangsgrößen numerisch berechnet werden muss. Als Softwarepaket wurde dazu Simulink in Verbindung mit dem Open Source Flugsimulator FlightGear verwendet, wobei die gesamte inhaltliche Simulation in Simulink stattfand und FlightGear lediglich zur Visualisierung benutzt wurde. Innerhalb dieses Kapitels wird zuerst die Simulationsumgebung vorgestellt. Anschließend werden zwei Referenzdatensätze generiert und abschließend evaluiert. Die Simulation eines Gesamtsystems ist notwendig, da sich zum einen nur dort die Auswirkungen der bisher einzeln betrachteten Teilergebnisse dieser Arbeit gänzlich beurteilen lassen. Zum anderen bietet sich die Möglichkeit, auch noch weitere, im Rahmen dieser Arbeit nicht direkt betrachtete, jedoch für Navigationssysteme fundamentale Problemstellungen, wie beispielsweise das operationelle Kalmanfiltertuning, kurz anzusprechen.

## 1. Simulationsumgebung

Die Simulationsumgebung besteht aus zwei Softwarepaketen. Für die Simulation selbst wird Simulink benutzt. Für die dynamische Visualisierung wird FlightGear verwendet. Der Datenaustausch findet über eine interne Schnittstelle von Simulink statt. Die Systemsimulation in Simulink selbst ist in zwei Teile gegliedert. Ausgehend von einer aerodynamischen Simulation, die aus den Steuersignalen des Flugzeugs die Referenztrajektorie berechnet, werden anschließend die benötigten Sensordaten generiert und abschließend die Funktionsweise eines gesamten Navigationssystems simuliert.

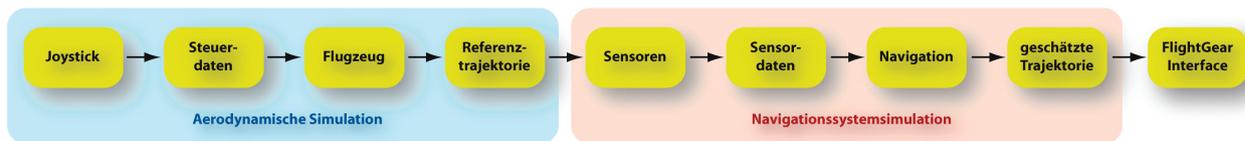


Abbildung 84: Simulationsumgebung

### 1.1. Aerodynamische Flugzeugsimulation

Die aerodynamische Flugzeugsimulation wurde aufbauend auf den vorhandenen Flugzeugsimulationen des bereits in Simulink integrierten Blocksets Aerospace und des für akademische Zwecke als Open Source vorhandenen Blocksets AeroSim<sup>68</sup> entwickelt. Der verwendete Flugzeugtyp entspricht dem einer Cessna 310 (C310), da deren aerodynamische Koeffizienten bereits im Blockset AeroSim vorliegen. Das aerodynamische Modell in Simulink ist so konzipiert, dass jederzeit anderweitige Flugzeugtypen integriert werden können, soweit deren aerodynamische Koeffizienten vorliegen. Die im Blockset AeroSim vorhandene Version der aerodynamischen Flugzeugsimulation musste komplett zerlegt und neu aufgebaut werden. Gründe hierfür waren die Verwendung stark vereinfachter Gleichungen zur Berechnung der Referenztrajektorie und die unregelmäßige Verwendung von Integratoren. Da die Integration eines diskreten Signals in Simulink stets mit einem Zeitfortschritt verbunden ist, war in der ursprünglichen Version eine klare Zeitsynchronisation nicht möglich. So wurden beispielsweise die aerodynamischen Gleichungen sukzessive durch Integration gelöst, die resultierenden Teilergebnisse jedoch sofort wieder für weitere Berechnungen am gleichen Zeitpunkt verwendet. Die dadurch entstehenden Fehler können zwar eventuell für rein aerodynamische Simulationen hingenommen werden, zur Weiterverwendung in Simulationen für Navigationssysteme sind diese jedoch keinesfalls geeignet. Es wurden alle Integratoren identifiziert und an einer zentralen Stelle letztendlich zusammengefasst, um eine klare Zeitsynchronisation sicherzustellen und nicht schon bereits in der Referenztrajektorie Fehler in Größenordnungen zu generieren, die eine spätere Evaluation der Navigationsgenauigkeit ausschließen würden. Ein zusätzliches Problem bestand in der Verwendung der durch Simulink bereitgestellten Integratoren. Es konnte nicht nachvollzogen werden, auf welchen internen Routinen diese beruhen. Deshalb wurden die Integratoren selbst programmiert und es wurde auf die internen Integratorenblöcke verzichtet.

<sup>68</sup> Unmanned Dynamics; AeroSim aeronautical simulation blockset Version 1.2 User's Guide, [www.u-dynamics.com](http://www.u-dynamics.com) (19.07.2009)

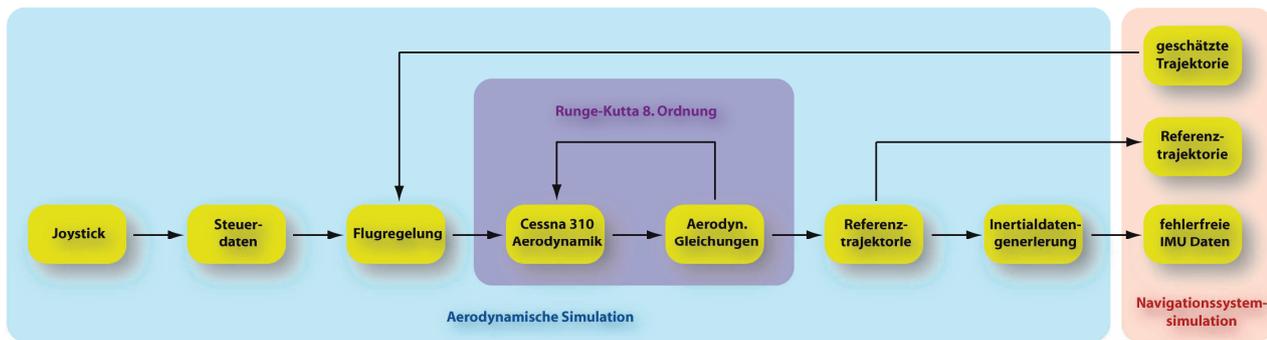


Abbildung 85: Aerodynamische Simulation

Der Eingangsvektor der Steuergrößen der aerodynamischen Simulation besteht aus 14 Größen:

$$s = \begin{pmatrix} \delta_f \\ \delta_e \\ \delta_a \\ \delta_r \\ \delta_{eng_l} \\ \delta_{eng_r} \\ \delta_g \\ \delta_{gui} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Landeklappen (flaps)} \\ \text{Höhenruder (elevator)} \\ \text{Querruder (aileron)} \\ \text{Seitenruder (rudder)} \\ \text{linker Motor und Propeller (left engine and propeller)} \\ \text{rechter Motor und Propeller (right engine and propeller)} \\ \text{Fahrgestell (gear)} \\ \text{Flugregelung (guidance)} \end{array} \quad (\text{VIII.1.1})$$

Die Untervektoren für die Motoren und Propellersteuerung beinhalten:

$$\delta_{eng} = \begin{pmatrix} \delta_{thr} \\ \delta_{mix} \\ \delta_{ign} \\ \delta_{ppa} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Gashebel (throttle)} \\ \text{Gemisch (mixture)} \\ \text{Zündung (ignition)} \\ \text{Propellerblattneigung (propeller pitch angle)} \end{array} \quad (\text{VIII.1.2})$$

Obige Größen können über ein Interface per Joystick direkt in Echtzeit innerhalb Simulink verwendet werden. Zur Erleichterung der Referenzdatengenerierung wurde ein einfacher Flugregler implementiert, der zu Beginn der Simulation die Eingangsgrößen auf eine stabile Fluglage trimmt und während der Simulation bei Bedarf die Funktion eines Autopiloten übernimmt. Eine Trimmung des Flugzeugs ist zwingend notwendig, um Bahnschwingungen wie beispielsweise Phyoide oder Dutch Roll effektiv zu dämpfen und letztendlich zu verhindern. Zudem verfügt die C310 nicht über gegenläufige Propeller, so dass eine Querrudertrimmung vorgenommen werden muss, um ein Kippen des Flugzeugs auf Grund der gleichläufigen Antriebsdrehmomente zu verhindern. Die Flugregelung wurde über PID-Regler realisiert.<sup>69</sup> Der Zustandsvektor der aerodynamischen Simulation beinhaltet insgesamt 18 Zustände:

$$z = \begin{pmatrix} \lambda \\ v_h \\ \psi_{hb} \\ \omega_{hb}^b \\ \omega_{prop} \\ V_{tank} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \text{Position (3)} \\ \text{Geschwindigkeit (3)} \\ \text{Orientierung (3)} \\ \text{Winkelgeschwindigkeit (3)} \\ \text{Propellerdrehrate (2)} \\ \text{Tankfüllstand (4)} \end{array} \quad (\text{VIII.1.3})$$

Ein wesentlicher Unterschied zu den Bewegungsgleichungen ist hier erkennbar. So sind die Winkelgeschwindigkeiten in einer aerodynamischen Simulation zwingend als Zustandsgrößen zu definieren, wohingegen in Navigationssystemsimulationen diese als Eingangsgrößen durch die IMU bereitgestellt werden und damit nicht den numerischen Integrationsroutinen unterliegen. Allein wegen dieser Tatsache lässt sich später selbst im fehlerfreien Fall im direkten Vergleich der dynamischen Referenztrajektorie und der geschätzten Trajektorie keine hundertprozentige Übereinstimmung feststellen. Dies ist auch der Grund, warum zur Verifizierung der theoretischen Ergebnisse in Kapitel VII eine kinematische Referenztrajektorie gewählt werden musste. Auf die zu Grunde liegenden aerodynamischen Gleichungen wird nicht im Detail eingegangen, jedoch entsprechen diese bis auf die Winkelgeschwindigkeitsdifferentialgleichung größtenteils den Bewegungsgleichungen des Abschnitts III. Die Berechnungsvorschriften der benötigten aerodynamischen Koeffizienten wurden den internen Simulinkblocksätzen entnommen.

<sup>69</sup> Lunze, Jan; Regelungstechnik 1 Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen – 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin 2006, S.358ff

Die aerodynamische Simulation basiert auf einem numerischen Integrationsalgorithmus 8. Ordnung nach Runge-Kutta.<sup>70</sup> Die Eingangsgrößen werden innerhalb eines Zeitschritts als konstant betrachtet. Es besteht zwar die Möglichkeit, auch diese zeitsynchron zum genauen Auswertzeitpunkt der einzelnen Koeffizienten bereitzustellen, diese Möglichkeit wurde jedoch auf Grund ihrer Komplexität verworfen.

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= f(z(t), s(t)) \\
k_1 &= f(z(t_k), s(t_k)) \\
k_2 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \frac{2}{27} k_1, s(t_k)\right) \\
k_3 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(\frac{1}{36} k_1 + \frac{1}{12} k_2\right), s(t_k)\right) \\
k_4 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(\frac{1}{24} k_1 + \frac{1}{8} k_3\right), s(t_k)\right) \\
k_5 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(\frac{5}{12} k_1 - \frac{25}{16} k_3 + \frac{25}{16} k_4\right), s(t_k)\right) \\
k_6 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(\frac{1}{20} k_1 + \frac{1}{4} k_4 + \frac{1}{5} k_5\right), s(t_k)\right) \\
k_7 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(-\frac{25}{108} k_1 + \frac{125}{108} k_4 - \frac{65}{27} k_5 + \frac{125}{54} k_6\right), s(t_k)\right) \\
k_8 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(\frac{31}{300} k_1 - \frac{61}{225} k_5 - \frac{2}{9} k_6 + \frac{13}{900} k_7\right), s(t_k)\right) \\
k_9 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(2k_1 - \frac{53}{6} k_4 + \frac{704}{45} k_5 - \frac{107}{9} k_6 + \frac{67}{90} k_7 + 3k_8\right), s(t_k)\right) \\
k_{10} &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(-\frac{91}{108} k_1 + \frac{23}{108} k_4 - \frac{976}{135} k_5 + \frac{311}{54} k_6 - \frac{19}{60} k_7 + \frac{17}{6} k_8 - \frac{1}{12} k_9\right), s(t_k)\right) \\
k_{11} &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(\frac{3}{205} k_1 - \frac{6}{41} k_6 - \frac{3}{205} k_7 - \frac{3}{41} k_8 + \frac{3}{41} k_9 + \frac{6}{41} k_{10}\right), s(t_k)\right) \\
k_{12} &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot \left(\begin{array}{l} -\frac{1777}{4000} k_1 - \frac{341}{164} k_4 + \frac{4496}{1025} k_5 - \frac{289}{82} k_6 \\ + \frac{2193}{4100} k_7 + \frac{51}{82} k_8 + \frac{33}{164} k_9 + \frac{12}{41} k_{10} + k_{11} \end{array}\right), s(t_k)\right) \\
\Rightarrow z(t_{k+1}) &= z(t_k) + \frac{t_{k+1} - t_k}{840} (272k_6 + 216k_7 + 216k_8 + 27k_9 + 27k_{10} + 41k_{11} + 41k_{12})
\end{aligned} \tag{VIII.1.4}$$

Die Simulationsfrequenz beträgt 200 Hertz. Als erstes Ergebnis der aerodynamischen Simulation ergibt sich aus der numerischen Integration eine Referenztrajektorie. Zu dieser werden zu jedem Zeitschritt die diskreten nichtintegrierenden inertialen Messwerte berechnet. Die Berechnung integrierender inertialer Messwerte ist prinzipiell möglich, jedoch beschränkt sich diese Arbeit auf nichtintegrierende inertiale Messwerte. Diese beiden Zwischenergebnisse der gesamten Simulationsumgebung werden an die Navigationssystemsimulation übertragen. Als Rückläufer von der Navigationssystemsimulation wird die geschätzte Trajektorie des Kalmanfilters in der Flugregelung verwendet.

## 1.2. Navigationssystemsimulation

Die Navigationssystemsimulation schließt sich an die aerodynamische Simulation an. Dabei werden aus den noch fehlerfreien inertialen Daten die gemessenen IMU-Sensordaten in 200 Hertz erzeugt. Als Grundlage dient das IMU-Sensorfehlermodell aus Abschnitt IV. Aus den gemessenen IMU-Sensordaten kann in einer nichtlinearen Strapdownrechnung eine Näherungstrajektorie in einer Frequenz von 100 Hertz erzeugt werden. Als Bewegungsgleichungen wurden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in gemischten Koordinaten des Ansatzes 2 gemäß Abschnitt III verwendet. Alternativ hätten auch jederzeit die Parametrisierungsansätze 1 oder 3 verwendet werden können.

<sup>70</sup> Fehlberg, Erwin; Classical Fifth-, Sixth-, Seventh- and Eighth-Order Runge-Kutta Formulas with Step-size Control, NASA TR R-287, Washington D.C. 1968, S.68

Zur Integration diene ein Runge-Kutta Integrationsalgorithmus 4. Ordnung, wie er bereits in Abschnitt VII zur Verifizierung der Bewegungsgleichungen benutzt wurde.

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= f(z(t), s(t)) \\ k_1 &= f(z(t_k), s(t_k)) \\ k_2 &= f\left(z(t_k) + \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \cdot k_1, s\left(t_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right)\right) \\ k_3 &= f\left(z(t_k) + \frac{t_{k+1} - t_k}{2} \cdot k_2, s\left(t_k + \frac{t_{k+1} - t_k}{2}\right)\right) \\ k_4 &= f\left(z(t_k) + (t_{k+1} - t_k) \cdot k_3, s(t_{k+1})\right) \\ \Rightarrow z(t_{k+1}) &= z(t_k) + \frac{t_{k+1} - t_k}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}\tag{VIII.1.5}$$

Die Frequenzreduzierung auf 100 Hertz ist notwendig, um die IMU-Sensordaten zeitsynchron implementieren zu können, da diese dazu bei diesem Integrationsalgorithmus in doppelter Frequenz vorliegen müssen, um keine weiteren Integrationsfehler zu induzieren. Diese Näherungstrajektorie wird oftmals auch als INS-only Lösung des Navigationssystems bezeichnet. Die Referenztrajektorie findet im Gegensatz dazu Eingang in die Generierung der Stützinformation. Als Stützinformation dienen zum einen GNSS-Daten, die wahlweise direkt als Position- und Geschwindigkeitsbeobachtungen oder als Rohdaten in Form von Pseudorange und Rangeratebeobachtungen im Kalmanfilter zur Stützung verwendet werden können. Als Satellitalmanach können beliebige GPS-Daten im Format YUMA eingelesen werden, aus denen zusammen mit der Referenztrajektorie die GNSS-Daten berechnet werden können. Die Basisgleichungen hierzu können der Literatur entnommen werden.<sup>71</sup> Diese GNSS-Daten finden Eingang in den GNSS-Empfänger, der aus den noch fehlerfreien GNSS-Daten Pseudorange und Rangerate berechnet. Das Sensorfehlermodell ist in Abschnitt IV beschrieben. Der GNSS-Empfänger berechnet neben den GNSS-Rohdaten auch Position und Geschwindigkeit, so dass im Kalmanfilter wahlweise GNSS-Rohdaten oder GNSS-Navigationsdaten verwendet werden können. Die GNSS-Navigationsdaten dienen zudem als GNSS-only Lösung des Navigationssystems. Neben der Stützung über ein GNSS ist auch die Möglichkeit der Stützung über einen barometrischen Höhenmesser vorgesehen. Dazu wird erneut über ein Sensorfehlermodell gemäß Abschnitt IV eine barometrische Höhe aus der Referenztrajektorie generiert und an den Kalmanfilter übergeben.

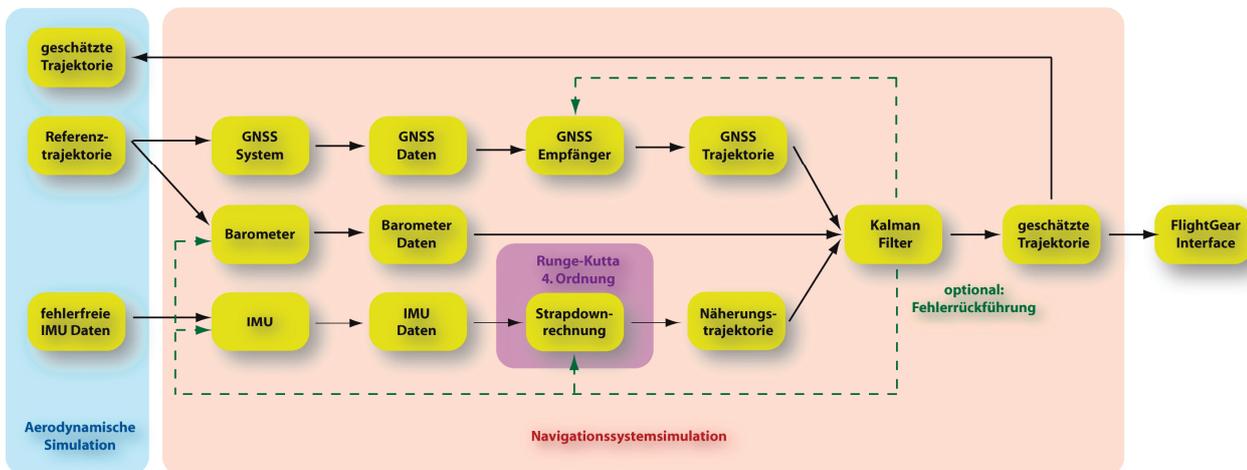


Abbildung 86: Navigationssystemsimulation

Der Kalmanfilter selbst besteht aus Kalmanprädiktion und Kalmankorrektur. Die Näherungstrajektorie findet gemeinsam mit den gemessenen IMU-Sensordaten Eingang in die Kalmanprädiktion. Diese hat eine Frequenz von 50 Hertz. Die Kalmankorrektur hat eine Frequenz von einem Hertz und verwendet die Stützdaten des GNSS-Empfängers und des barometrischen Höhenmessers. Die Auslegung des Gesamtsystems entspricht dem System in Abschnitt IV. Die Bewegungsgleichungen entsprechen den linearisierten Bewegungsgleichungen in gemischten Koordinaten des Ansatzes 2 gemäß Abschnitt III. Die Beobachtungsgleichungen können erneut Abschnitt IV entnommen werden. Als Ergebnis der Navigationssystemsimulation ergibt sich eine geschätzte Trajektorie in einer Frequenz von 50 Hertz. Diese wird an das FlightGear Interface zur Visualisierung übertragen und an den Flugregler der aerodynamischen Simulation zurückgeführt. Die Navigationssystemsimulation verfügt zudem optional über eine Sensorfehlerückführung. Es kann über Parameter festgelegt werden, in welchem Ausmaß detektierte Sensorfehler an die Sensoren zurückgeführt werden sollen.

<sup>71</sup> NIMA; World Geodetic System 1984 its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems – Third Edition Amendment 1, Department of Defense, Reston 2000

### 1.3. FlightGear Interface

Das FlightGear Interface ist Bestandteil des Aerospace Blocksets in Simulink. Über dieses Interface wurde die Referenztrajektorie zur Visualisierung der C310 an FlightGear übertragen. Für die Visualisierung der Instrumente wurde die geschätzte Trajektorie verwendet. Die Gesamtsimulation lässt sich in Echtzeit über einen Joystick bedienen. Die Visualisierung geschieht in FlightGear, wobei der Joystick direkt in Simulink ausgelesen wird.

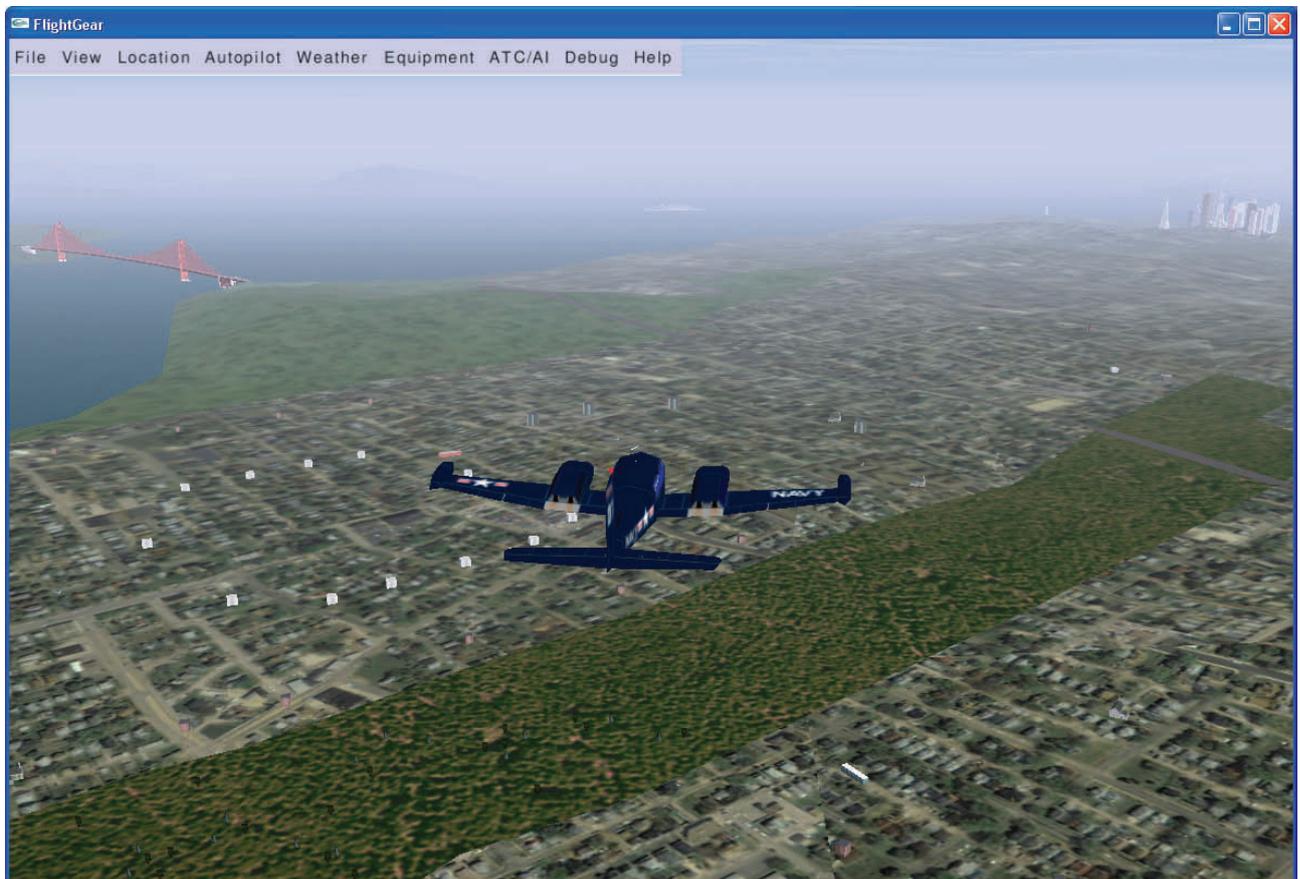


Abbildung 87: FlightGear

Es können somit Flugmanöver live geflogen werden und deren Auswirkungen auf den Navigationsalgorithmus, speziell auf die Beobachtbarkeit der Sensorfehlermodellparameter, direkt ausgewertet werden. Die folgenden Beispieltrajektorien wurden in und um San Francisco erzeugt, da die Landschaftsdatenbank dort viele Sehenswürdigkeiten enthält. Alternativ hätte auch jeder andere Ort verwendet werden können. Auf die Simulation von Start und Landung wurde in den Beispieltrajektorien aus Komplexitätsgründen verzichtet.

## 2. Referenzdatengenerierung

Die zu Grunde liegende Dynamik hat einen entscheidenden Einfluss auf viele Aspekte der Navigation. So sind die Linearisierungseffekte der Bewegungsgleichungen nach Abschnitt III oder die beobachtbaren Zustandsparameter nach Abschnitt IV direkt von der Variabilität der inertialen Sensordaten und damit von der Dynamik abhängig. Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit zwei Beispieltrajektorien erzeugt, simuliert und evaluiert, um auch die Auswirkungen sich ändernder Dynamik besser beurteilen zu können. Es wird je eine Beispieltrajektorie bei geringer und hoher Dynamik erzeugt. Geringe und hohe Dynamik sind dabei relative Begriffe. So wurde bei der Beispieltrajektorie geringer Dynamik versucht, Querschleunigungen zu vermeiden und einfache Manöver hintereinander statt gleichzeitig auszuführen. Zudem ist die Anzahl und Dauer der fluglagestabilisierten geraden Elemente höher als bei der Beispieltrajektorie hoher Dynamik. Dort wurde bis auf ein langes und zwei kürzere gerade Elemente größtenteils auf die Unterstützung durch den Flugregler verzichtet. Die Dynamik orientiert sich bei der Beispieltrajektorie hoher Dynamik weniger an realistischen Bedingungen als vielmehr an den aerodynamischen Grenzen des verwendeten Flugzeugtyps C310.

## 2.1. Beispieltrajektorie geringer Dynamik

Die Beispieltrajektorie geringer Dynamik beinhaltet eine Folge aus langsamen Manövern und längeren geraden Elementen unter Verwendung des Flugreglers. In den folgenden Kapiteln werden die Trajektorie, die Navigationszustände und die inertialen Sensordaten dargestellt.

### 2.1.1 Trajektorie

Eine Übersicht über die Beispieltrajektorie geringer Dynamik kann aus Abbildung 88 gewonnen werden. Die Abwechslung von Manövern und geraden Elementen ist deutlich erkennbar. Es wurde zudem versucht, die Manöver möglichst glatt einzuleiten beziehungsweise zu beenden.

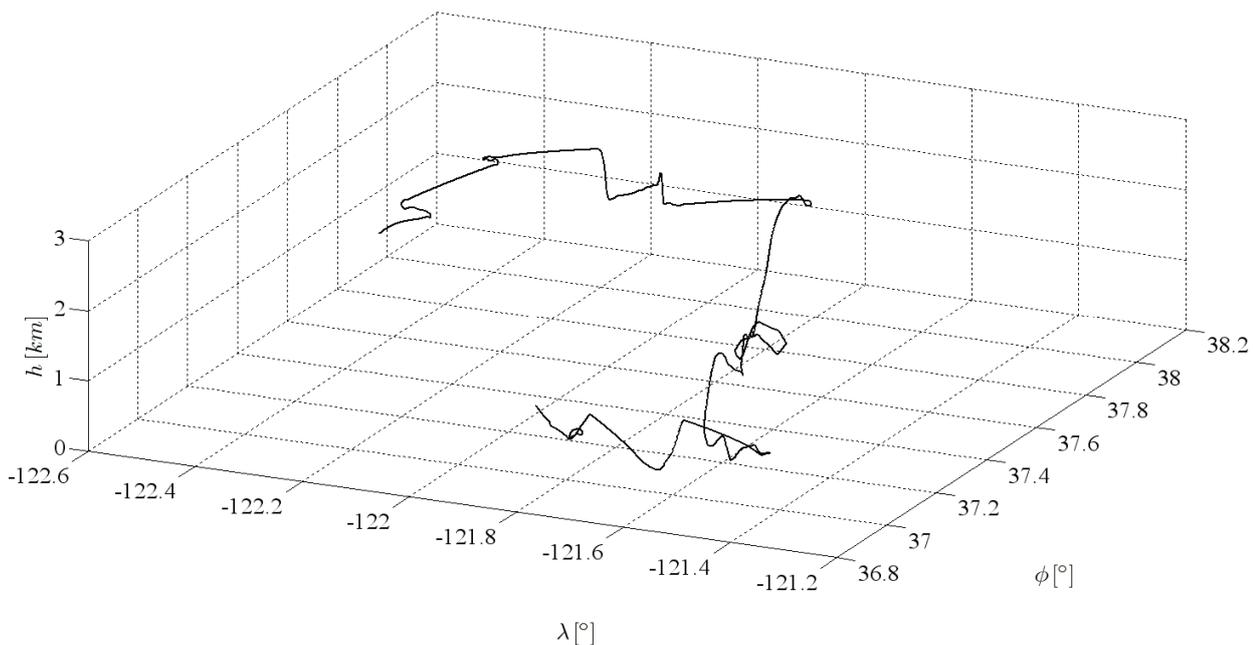


Abbildung 88: Trajektorie bei geringer Dynamik

### 2.1.2 Navigationszustände

Die Navigationszustände zur Beispieltrajektorie geringer Dynamik spiegeln obige Aussagen wieder.

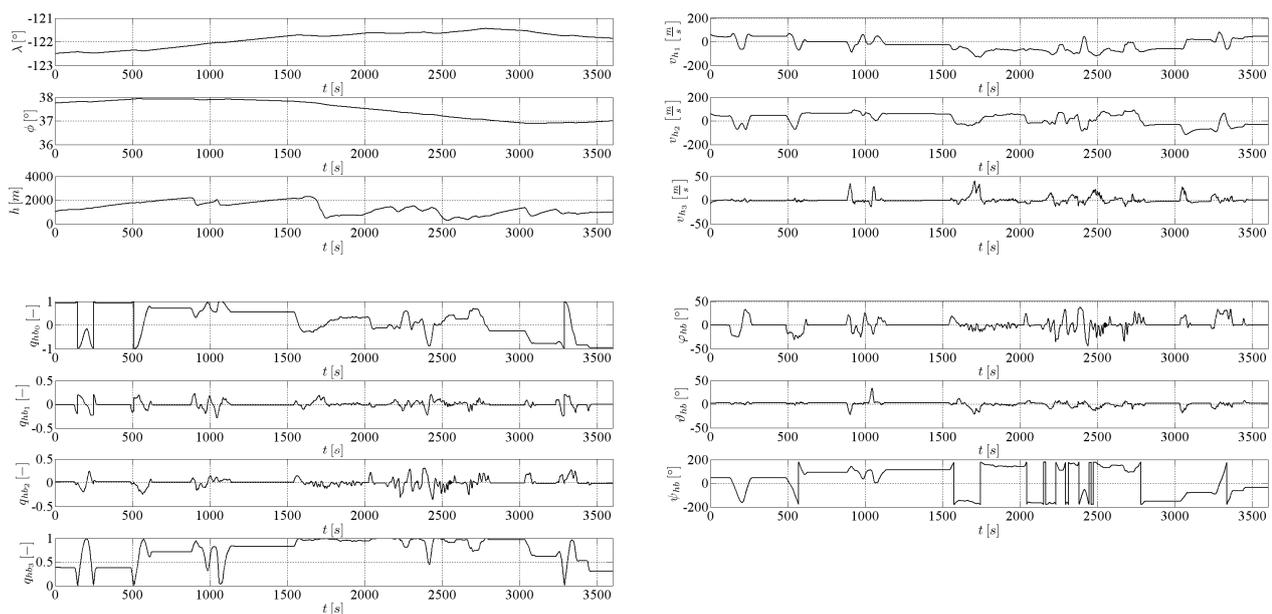


Abbildung 89: Navigationszustände bei geringer Dynamik

### 2.1.3 Inertiale Sensordaten

Die inertialen Sensordaten der Beispieltrajektorie geringer Dynamik können Abbildung 90 entnommen werden. Die Winkelgeschwindigkeiten zwischen dem körperfesten und dem raumfesten Bezugssystem liegen während der Manöver im Wertebereich von  $\pm 10^\circ/s$ . Zwischen den Manövern treten lediglich die vergleichsweise sehr kleinen Effekte der Erddrehrate beziehungsweise der Führungsänderung zwischen den beiden beteiligten Bezugssystemen auf. Bei der Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem sind in der Rollachse während der Manöver Beschleunigungen bis  $\pm 5m/s^2$  möglich. In der Nickachse übersteigen die Beschleunigungen nie  $\pm 1m/s^2$ . Der Wertebereich der Beschleunigung in der Kursachse entspricht ebenfalls  $\pm 5m/s^2$ , jedoch ist der Wertebereich um den Betrag der Erdschwere verschoben. Zwischen den Manövern registriert lediglich die Kursachse die jeweils anliegende Erdschwere.

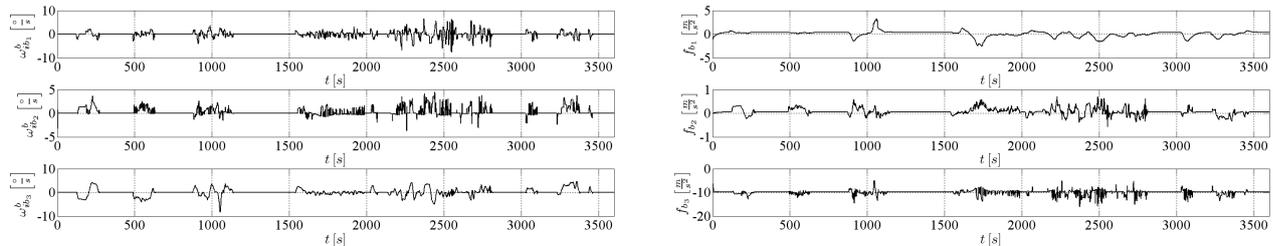


Abbildung 90: Inertiale Sensordaten bei geringer Dynamik

Bei den Winkelgeschwindigkeiten verfügen alle drei Komponenten über etwa gleich große Wertebereiche. Für die Beschleunigungen gilt dies nicht. Der Wertebereich der Beschleunigung in der Nickachse ist deutlich reduziert und zwischen den Manövern liefert die Erdschwere einen großen Einfluss auf die Beschleunigung in der Kursachse. Diese Tatsachen werden später in der Evaluation einen großen Einfluss auf die Beobachtbarkeit der verschiedenen IMU-Sensorfehlerparameter haben.

## 2.2. Beispieltrajektorie hoher Dynamik

Die Beispieltrajektorie hoher Dynamik wurde unter Ausnutzung der aerodynamischen Möglichkeiten des verwendeten Flugzeugtyps C310 generiert. Praxisrelevante Aspekte wurden nicht berücksichtigt.

### 2.2.1 Trajektorie

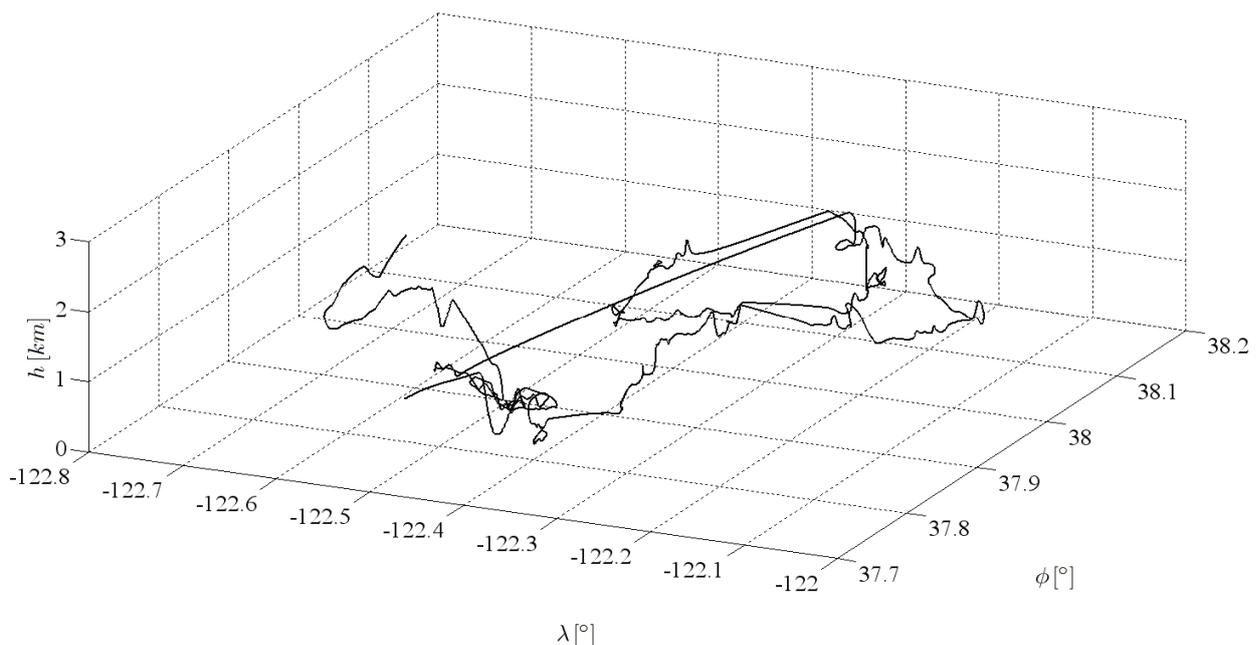


Abbildung 91: Basismanöver bei hoher Dynamik

Die Beispieltrajektorie hoher Dynamik unterscheidet sich deutlich von der Beispieltrajektorie geringer Dynamik. Es wurde größtenteils auf die flugreglergestützten geraden Elemente verzichtet. Bei der Einleitung beziehungsweise Beendigung der jeweiligen Manöver wurde nicht auf möglichst glatte Übergänge geachtet. Zudem wurden die einzelnen

Manöver nicht ausschließlich hintereinander, sondern gezielt kombiniert integriert. Dadurch soll zum einen ein vergrößerter Wertebereich der inertialen Sensordaten und zum anderen das gleichzeitige Auftreten von inertialen Messwerten in zwei Bezugssystemachsen ermöglicht werden.

## 2.2.2 Navigationszustände

Die zugehörigen Navigationszustände bestätigen erneut obige Aussagen.

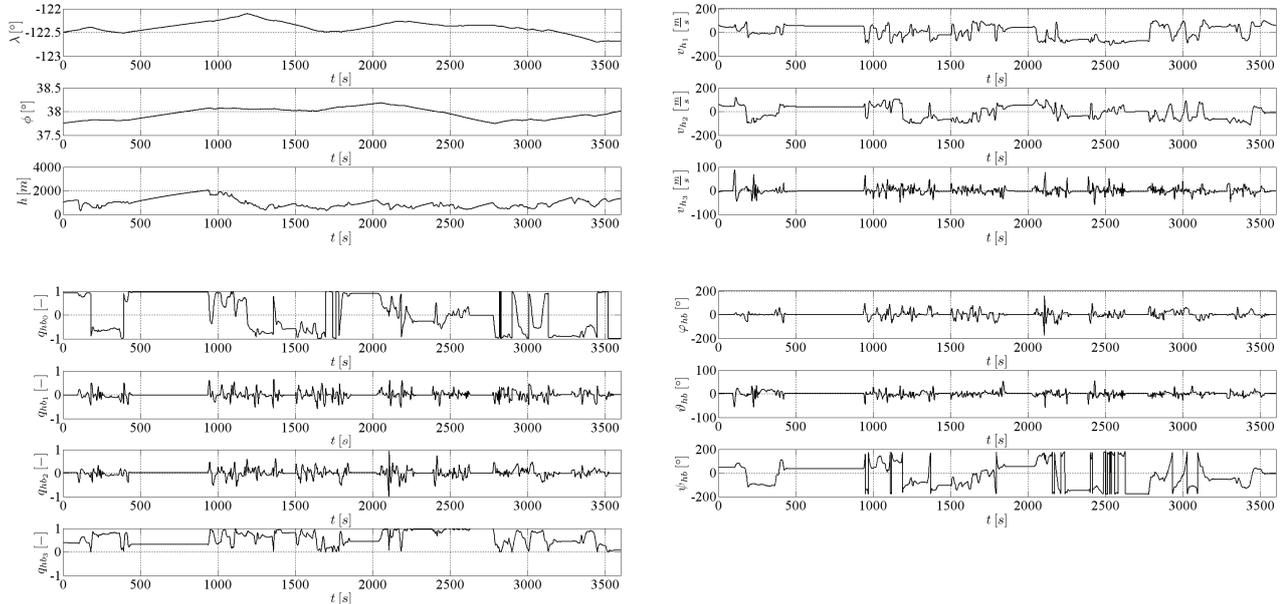


Abbildung 92: Navigationszustände bei hoher Dynamik

## 2.2.3 Inertiale Sensordaten

Die inertialen Sensordaten müssen genauer untersucht werden. Die Winkelgeschwindigkeiten zwischen dem raumfesten und dem körperfesten Bezugssystem liegen bei der Beispieltrajektorie hoher Dynamik im Wertebereich von  $\pm 10^\circ/s$ . Der Wertebereich ist um den Faktor fünf höher als bei der Beispieltrajektorie geringer Dynamik. Auch sind die Teilbereiche ohne Dynamik, wo lediglich Erddrehrate und Führungsänderung anliegen, in Anzahl und Dauer deutlich reduziert. Bei der Beschleunigung im körperfesten Bezugssystem ist nun keine Unterscheidung im Wertebereich zwischen der Roll- und der Nickachse mehr möglich. Der Wertebereich in der Kursachse beträgt sogar  $\pm 10m/s^2$  und ist erneut um die Erdschwere verschoben. In den geraden Elementen dominiert erneut der Erdschwerevektor in der Kursachse.

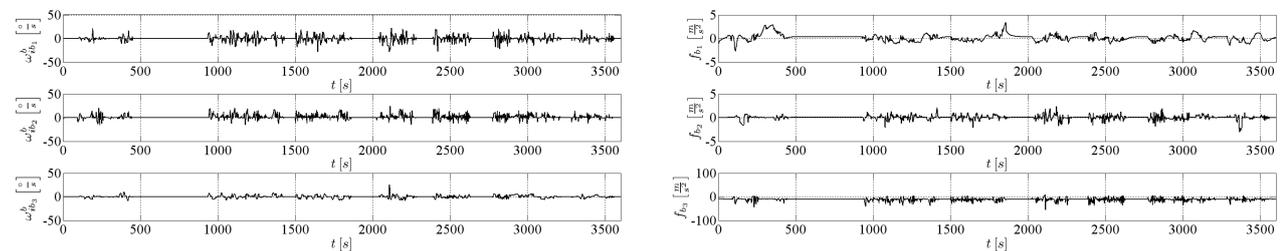


Abbildung 93: Inertiale Sensordaten bei hoher Dynamik

Bei der Winkelgeschwindigkeit sind die Wertebereiche der drei Komponenten erneut ähnlich. Bei der Beschleunigung überwiegt die Komponente in der Kursachse, jedoch sind Roll- und Nickachse nun gleichberechtigt. Die generellen Wertebereiche sind im Vergleich zur Beispieltrajektorie geringer Dynamik deutlich erhöht.

### 3. Simulation

Die abschließende dynamische Simulation zur gemeinsamen Beurteilung der in den vorigen Abschnitten separat betrachteten Einzelaspekte soll den Abschluss dieser Arbeit bilden. Bevor mit der Evaluation der bereits dargestellten Beispieltrajektorien begonnen werden kann, müssen zunächst noch die der Simulation zu Grunde liegenden Simulationsparameter behandelt werden. Um während der Simulation realistische Simulationsergebnisse zu erhalten, wurden insgesamt drei ungestützte Simulationsphasen integriert. Diese befinden sich zwischen den Simulationszeiten 900 und 1000, 1900 und 2000 und 2900 und 3000 Sekunden.

#### 3.1. Simulationsparameter

Die Simulationsparameter des aerodynamischen Teils der Simulation werden nicht explizit dargestellt, da diese zum einen äußerst umfangreich sind und zum anderen nicht ursächlich das Thema dieser Arbeit betreffen. Die dargestellten Simulationsparameter beschränken sich auf die Simulationsblöcke der einzelnen Sensoren und deren Berücksichtigung im Kalmanfilter.

##### 3.1.1 Inertiale Messeinheit

Auf folgenden Simulationsparametern basiert die Simulation der IMU:

$$\begin{aligned}
 b_{g_i} &= -1 \frac{\circ}{h} \\
 k_{g_i} &= 1000 \text{ ppm} \\
 ma_{g_{ij}} &= 1000 \text{ ppm} \\
 b_{a_i} &= -1mg \\
 k_{a_i} &= 1000 \text{ ppm} \\
 ma_{a_{ij}} &= 1000 \text{ ppm} \\
 b_{e_i} &= -1mg
 \end{aligned} \tag{VIII.3.1}$$

Das Vorzeichen wurden dabei so vergeben, dass sich die einzelnen Sensorfehlermodellparameter nicht zufällig gegenseitig auslöschen können. Die Erdschwerermodellfehler gehören zwar nicht zur IMU, werden simulationstechnisch jedoch in ihr berücksichtigt. Die IMU-Sensorfehlerparameter sind als feste Bias ohne zusätzliches Rauschen definiert. Rauschen wird im Rahmen der IMU nur direkt den IMU-Sensordaten zugeführt. Die zu Grunde liegenden Gleichungen entsprechen denen der Sensorfehlermodelle aus Abschnitt IV.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_{ib}^b &= \omega_{ib}^b - \delta\omega_{ib}^b = (I + K_g + MA_g)^{-1} (\omega_{ib}^b - \mathbf{b}_g) + N(\mathbf{0}, \sigma_{b_\omega}^2) & \text{mit} & \quad \sigma_{b_\omega} = 1 \frac{\circ}{h} \\
 \tilde{\mathbf{f}}_b &= \mathbf{f}_b - \delta\mathbf{f}_b = (I + K_a + MA_a)^{-1} (\mathbf{f}_b - \mathbf{b}_a - R_{hb}^T \mathbf{b}_e) + N(\mathbf{0}, \sigma_{b_f}^2) & \text{mit} & \quad \sigma_{b_{f_i}} = 1mg
 \end{aligned} \tag{VIII.3.2}$$

##### 3.1.2 GNSS-Raumsegment und GNSS-Empfänger

Die Simulation des GNSS-Raumsegments basiert auf dem YUMA-Almanach. Es können beliebige Almanach eingeladen werden. Ausgehend von der Referenztrajektorie und den Satellitenbahnen werden die Pseudo- und Rangeratebeobachtungen abgeleitet. Als Fehlerparameter sind lediglich Empfängeruhrbias und -drift modelliert. Zusätzliche Fehlereffekte durch Ionosphäre und Troposphäre beziehungsweise Mehrwege spielen für diese Anwendung und die benötigte Genauigkeitsklasse untergeordnete Rolle und werden nicht berücksichtigt. Auf Grund der gekapselten Bauweise militärischer GNSS-Empfänger stehen sowieso oftmals nur die Positions- und Geschwindigkeitsdaten beziehungsweise die Rohdaten inklusive ihrer Genauigkeiten ohne Kenntnis der internen Algorithmen zur Verfügung. Die Empfängeruhrfehler sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 b_c &= 10^{-6} s \\
 d_c &= 10^{-9}
 \end{aligned} \tag{VIII.3.3}$$

Rauschen wird erneut nur dem Sensorausgang selbst zugeführt.

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}^{PR} &= y^{PR} - \delta y^{PR} = y^{PR} - (b_c + d_c \cdot (t - t_0)) \cdot c + N(0, \sigma_{b_{PR}}^2) & \text{mit} & \quad \sigma_{b_{PR}} = 1m \\
 \tilde{y}^{RR} &= y^{RR} - \delta y^{RR} = y^{RR} - d_c \cdot c + N(0, \sigma_{b_{RR}}^2) & \text{mit} & \quad \sigma_{b_{RR}} = 0,1 \frac{m}{s}
 \end{aligned} \tag{VIII.3.4}$$

Für die Navigationssystemsimulation werden in der Kalman-schätzung die Pseudorange und die Rangerate und nicht die bereits integrierten Positions- und Geschwindigkeitsdaten verwendet. Nichtsdestotrotz wird eine unabhängige Navigationslösung des GNSS-Empfängers generiert, die auch als GNSS-only Lösung bezeichnet wird.

### 3.1.3 Barometrischer Höhenmesser

Der barometrische Höhenmesser ist sehr einfach realisiert.

$$b_h = 100m \quad (\text{VIII.3.5})$$

Die Modellgleichung lautet wie folgt:

$$\tilde{y}^B = y^B - \delta y^B = y^B - b_h + N(0, \sigma_{b_h}^2) \quad \text{mit} \quad \sigma_{b_{PR}} = 1m \quad (\text{VIII.3.6})$$

### 3.1.4 Anfangsstandardabweichung

Auf die Darstellung der Anfangszustände muss nicht weiter eingegangen werden, da diese im Kalmanfilter generell mit Null initialisiert werden. Sind einige Fehler bereits, etwa durch eine Kalibration, bekannt, so sind diese vorab in den Sensoren zu berücksichtigen.

$$\begin{array}{ll}
 \sigma_\lambda = 100m & \\
 \sigma_\phi = 100m & \\
 \sigma_h = 100m & \\
 \sigma_{v_{hi}} = 10 \frac{m}{s} & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Navigationsfehler} \\
 \sigma_{\varphi_{hb}} = 0,2^\circ & \\
 \sigma_{\vartheta_{hb}} = 0,2^\circ & \\
 \sigma_{\psi_{hb}} = 1^\circ & \\
 \sigma_{b_c} = 10^{-5}s & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Empfängeruhrfehler} \\
 \sigma_{d_c} = 10^{-8} & \\
 \sigma_{b_h} = 1000m & \text{Barometerfehler} \\
 \sigma_{b_{si}} = 10 \frac{^\circ}{h} & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Kreiselfehler} \\
 \sigma_{k_{si}} = 10000 \text{ ppm} & \\
 \sigma_{ma_{sij}} = 10000 \text{ ppm} & \\
 \sigma_{b_{ai}} = 10mg & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Beschleunigungsmesserfehler} \\
 \sigma_{k_{ai}} = 10000 \text{ ppm} & \\
 \sigma_{ma_{aij}} = 10000 \text{ ppm} & \\
 \sigma_{b_{ei}} = 10mg & \text{Erdschweremodellfehler}
 \end{array} \quad (\text{VIII.3.7})$$



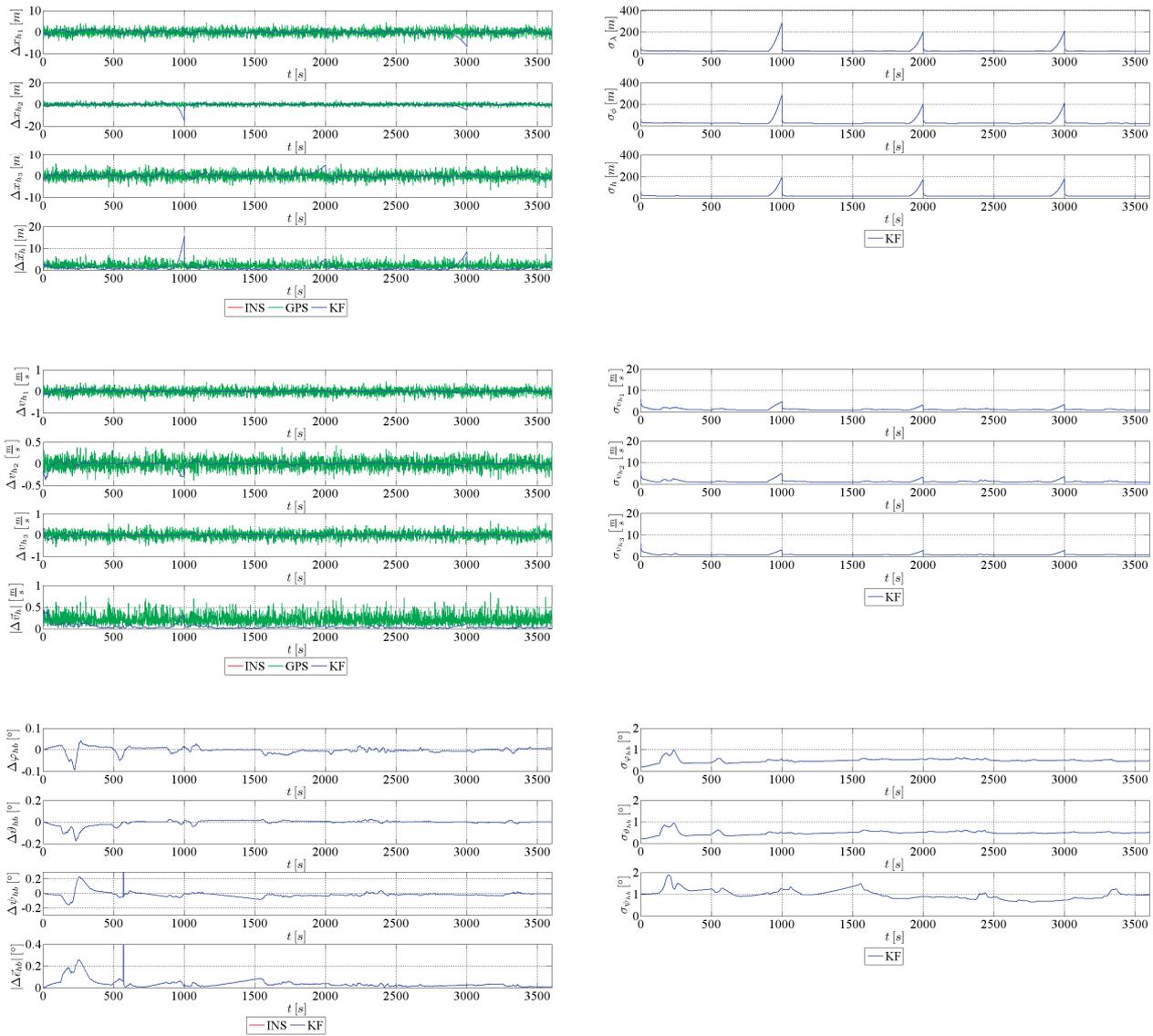


Abbildung 94: Navigationsfehler bei geringer Dynamik

### 3.2.2 Empfängeruhr- und barometrischer Höhendifferenzfehler

Die Sensorfehler der beiden Stützsensoren sind stets sehr gut beobachtbar, da sie, im Vergleich zu den Sensorfehlern der IMU, nicht redundant angelegt sind. Die Beobachtbarkeit der Empfängeruhrfehler ist dabei von der Tatsache geprägt, dass die Empfängeruhrdrift mit fortschreitender Dauer der Simulation immer besser beobachtbar wird und damit die Beobachtbarkeit des Empfängeruhrbias über die Dauer der Simulation leicht beeinträchtigt. Die Beobachtbarkeit des barometrischen Höhendifferenzfehlers wird ausschließlich vom Rauschen der barometrischen Höhenmessung beeinflusst und ist in diesem Fall ausgezeichnet.

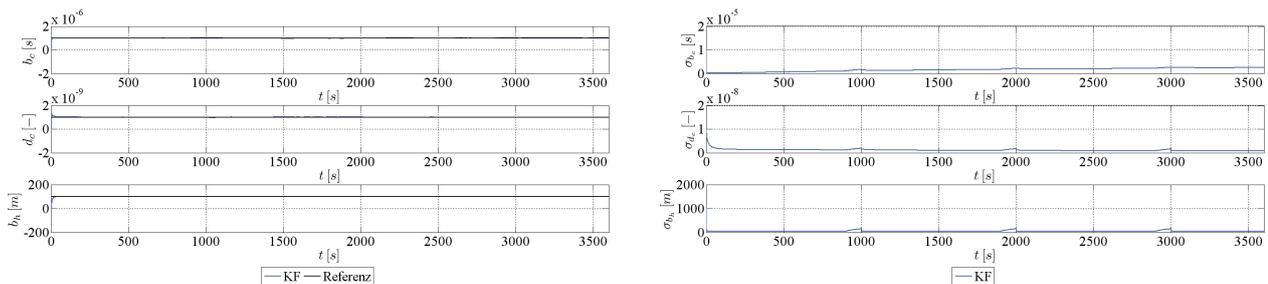


Abbildung 95: Empfängeruhr- und barometrischer Höhendifferenzfehler bei geringer Dynamik

### 3.2.3 Kreiselfehler

Bei den Kreiselfehlern tritt abermals die Tatsache auf, dass Spannungen im Kalmanfilter über verschiedene konkurrierende Sensorfehlerparameter ausgeglichen werden können. Diese Spannungen werden jedoch nicht ursächlich sondern ausschließlich auf Grund der jeweiligen Kovarianzen ausgeglichen, so dass durchaus falsche Sensorfehlerschätzungen auftreten können. In der Vorstellung der inertialen Sensordaten der Beispieltrajektorie in Kapitel 2.1.3 wurde bereits erwähnt, dass bei den Winkelgeschwindigkeiten keine der körperfesten Bezugssystemachsen über eine ausgezeichnete Komponente verfügt, so dass sich eigentlich keine oder nur sehr kleine Unterschiede in der achsenbezogenen Beobachtbarkeit ergeben dürfen. Betrachtet man die zugehörigen Standardabweichungen auf der rechten Seite von Abbildung 96, so bewegen sich alle Standardabweichungen im jeweils gleichen Wertebereich. Die Mittelwerte nähern sich den voreingestellten Werten einigermaßen gut an, wobei sich die Beobachtbarkeit der Kreiselsbias im Vergleich zu den Kreiselskalenfaktorfehlern und den Kreiselmisalignment etwas besser gestaltet.

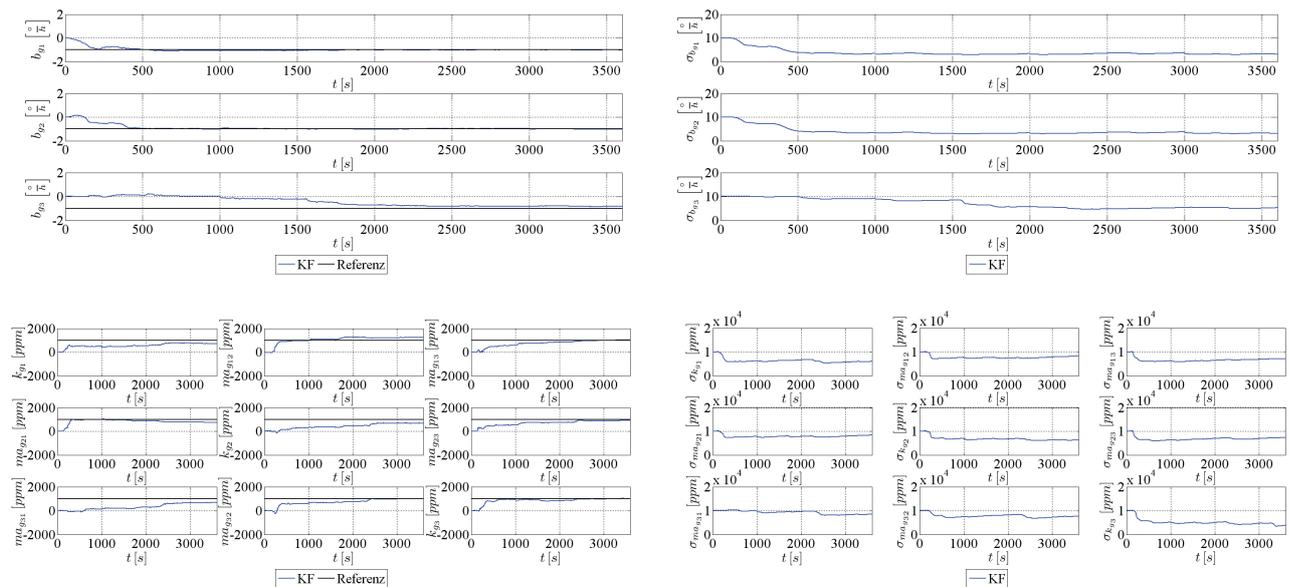


Abbildung 96: Kreiselfehler bei geringer Dynamik

### 3.2.4 Beschleunigungs- und Erdschweremodellfehler

Bei den beschleunigungsbasierten Fehlerparametern des Beschleunigungsmessers und des Erdschweremodells ergibt sich ein abweichendes Ergebnis. Wie bereits in der Präsentation der inertialen Beschleunigungen in Kapitel 2.1.3 diskutiert, bestehen bei den Beschleunigungen ausgezeichnete Komponenten. So ist die Komponente der Kursachse durch das fast durchgängige Einkoppeln der Erdschwere auch während der geraden Elemente mit einem sehr großen Wert belegt. Während der Manöver verfügt vor allem die Nickachse über einen im Vergleich sehr eingeschränkten Wertebereich der Beschleunigung. Die Variabilität der Beschleunigungen in der Roll- und der Kursachse ist deutlich größer. Diese Tatsachen haben mehrere Auswirkungen auf die Beobachtbarkeit der einzelnen Sensorfehlerparameter. So ist die Beobachtbarkeit des Skalenfaktorfehlers beziehungsweise der beiden Misalignment, welche auf der Beschleunigungskomponente der Nickachse beruhen, nicht gegeben. Dies zeigt sich sowohl an den Mittelwerten als auch an den Standardabweichungen. In der Rollachse ist der Wertebereich der Beschleunigung deutlich höher, wenn auch noch kleiner als in der Kursachse. Dies führt zu einer eingeschränkten Beobachtbarkeit des zugehörigen Skalenfaktorfehlers und der beiden Misalignment. In der Kursachse ist der Wertebereich am höchsten und auch während der geraden Elemente liegt mit der Erdschwere ein vergleichsweise sehr großer Wert vor. Der Skalenfaktorfehler und die Misalignment der Kursachse sind dementsprechend gut beobachtbar. Die Erdschweremodellbias sind generell besser beobachtbar als die Beschleunigungsmesserbias. Nachdem durch Rotation jede der drei horizontfesten Bezugssystemachsen von den ursprünglichen körperfesten Bezugssystemachsen weggedreht wurde, sind die horizontfesten beschleunigungsbasierten Fehlerparameter von den körperfesten beschleunigungsbasierten Fehlertermen trennbar. Da bei den horizontfesten Fehlerparametern neben den Erdschweremodellbias keine weiteren Fehlerparameter wie Skalenfaktorfehler oder Misalignment definiert sind, folgt die Beobachtbarkeit dieser Einzelparameter.

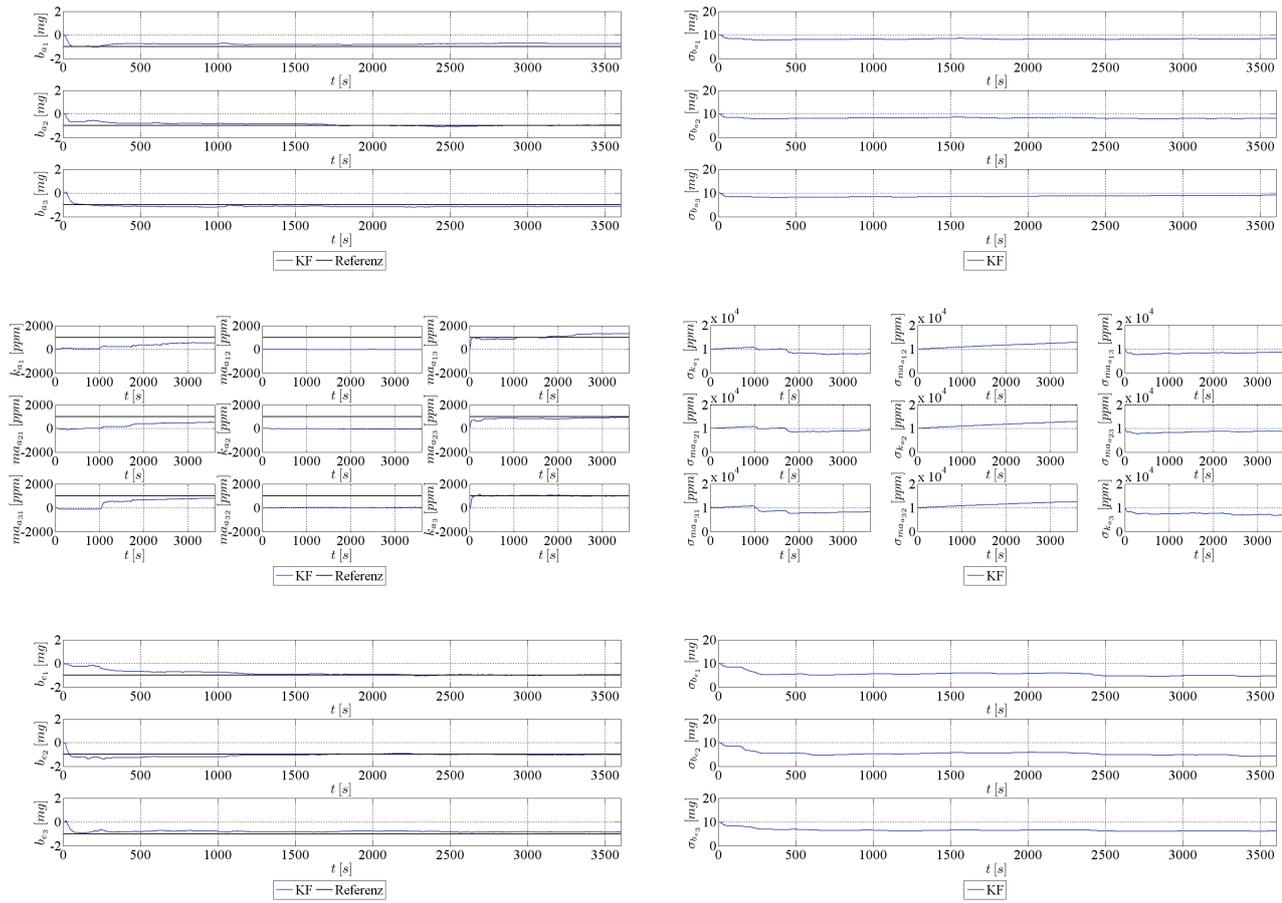


Abbildung 97: Beschleunigungsmesser- und Erdschwerermodellfehler bei geringer Dynamik

### 3.3. Simulationsevaluation bei hoher Dynamik

Zum Vergleich wird nun die Simulation der Beispieltrajektorie bei hoher Dynamik diskutiert.

#### 3.3.1 Navigationszustände

Die Navigationszustände unterscheiden sich nur geringfügig von den Navigationsparametern bei geringer Dynamik. Dies liegt hauptsächlich an der durchgängigen Stützung durch GNSS-Rohdaten und Barometerdaten. Die Sensorfehler wurden erneut zurückgeführt, so dass sich die rote und blaue Navigationslösung entsprechen. Auch in der Simulation der Beispieltrajektorie bei hoher Dynamik sind die ungestützten Simulationsphasen in den Abbildungen der Mittelwerte und Standardabweichungen deutlich erkennbar. Der resultierende Positionsfehler ist in den beiden späteren Phasen aufgrund der bereits eingelaufenen Sensorfehlerzustände signifikant kleiner. Es muss jedoch angemerkt werden, dass die während der ungestützten Phasen vorliegende Dynamik einen großen Einfluss auf die Navigationsfehler hat und eine Beurteilung normalerweise deutlich komplizierter gestaltet.

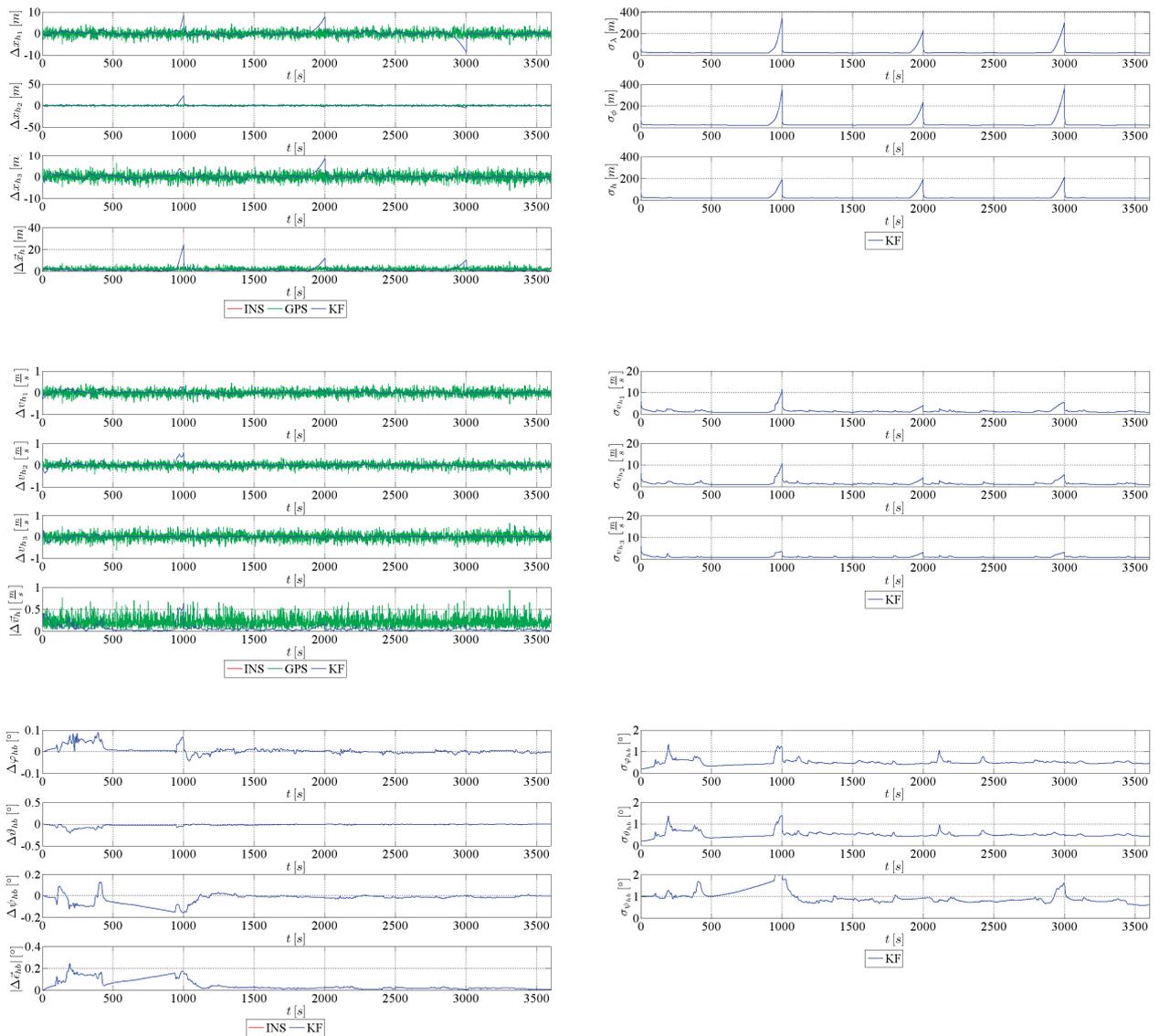


Abbildung 98: Navigationsfehler bei hoher Dynamik

### 3.3.2 Empfängeruhr- und barometrischer Höhendifferenzfehler

Die Sensorfehler der beiden Stützsensoren sind auch bei hoher Dynamik sehr gut beobachtbar. Die Beobachtbarkeit des Empfängeruhrbias wird wiederum von der steigenden Güte der Beobachtbarkeit der Empfängeruhrdrift beeinflusst.

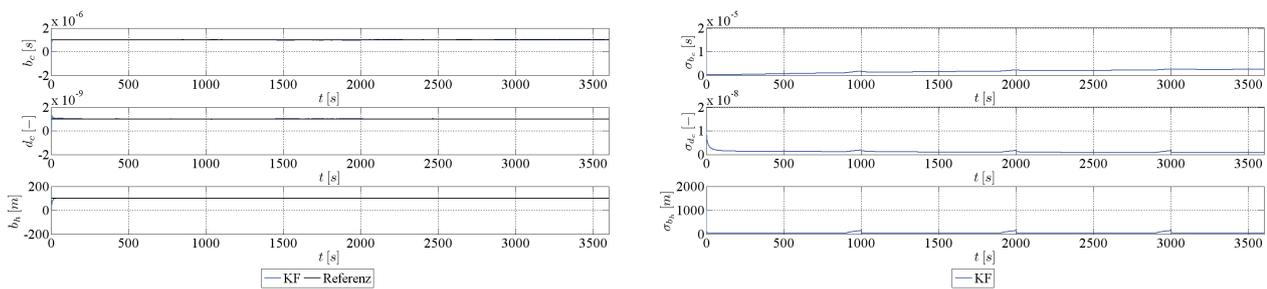


Abbildung 99: Empfängeruhr- und barometrischer Höhendifferenzfehler bei hoher Dynamik

### 3.3.3 Kreisfehler

Bei den Kreisfehlern ist der Wertebereich der Winkelgeschwindigkeit im Vergleich zum niedrigdynamischen Fall stark erhöht. Durch die vielen Manöver liegen ausreichend viele unabhängige Winkelgeschwindigkeiten zur Beobachtbarkeit aller zwölf Kreisfehlerparameter vor. Auch im hochdynamischen Fall verfügen die Winkelgeschwindigkeiten nicht über eine körperfeste Bezugssystemrichtung mit ausgezeichneten Eigenschaften, so dass alle Sensorfehlerparameter eines Typs gleich gut beobachtbar sind. Dies bestätigen wiederum die Mittelwerte und Standardabweichungen in Abbildung 100.

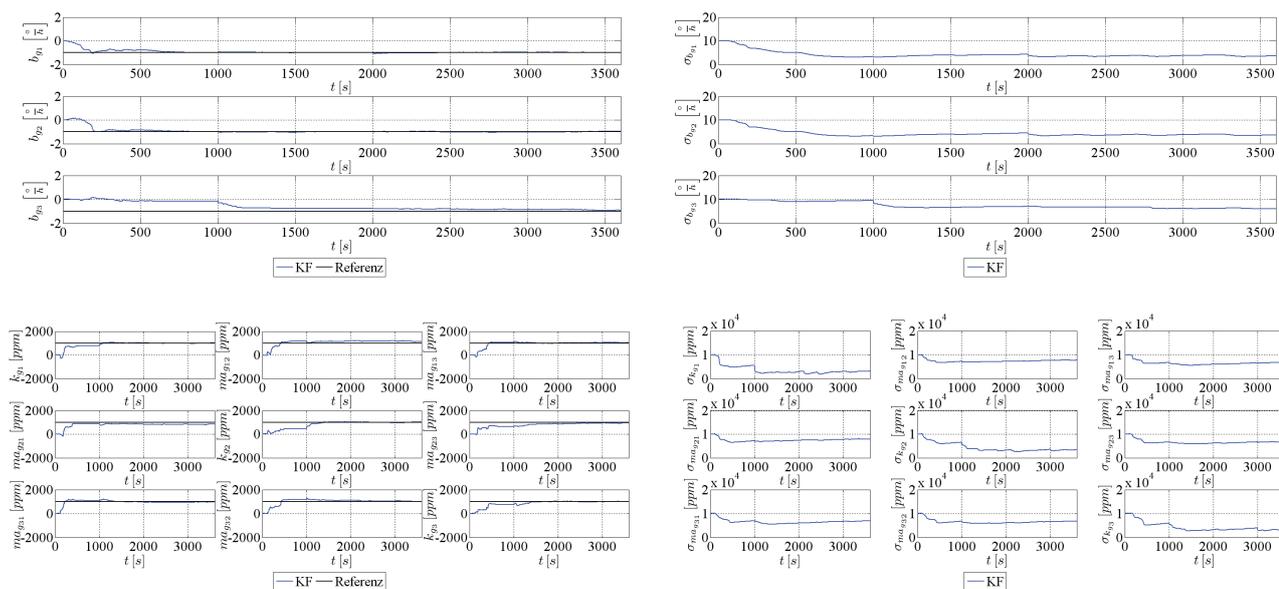


Abbildung 100: Kreisfehler bei hoher Dynamik

### 3.3.4 Beschleunigungs- und Erdschwermodellfehler

Den größten Unterschied zwischen den Beispieltrajektorien bei geringer und bei hoher Dynamik kann man bei den Beschleunigungsmessern feststellen. So sind die Wertebereiche der Roll- und der Nickachse bei hoher Dynamik etwa gleich. Dies führt dazu, dass auch der Skalenfaktorfehler und die Misalignment, die die Rollachse betreffen, beobachtbar werden. Bei den Erdschwermodellbias können die Aussagen der Beispieltrajektorie geringer Dynamik übernommen werden. Nachdem das körperfeste Bezugssystem um jede der drei horizontalfesten Bezugssystemachsen rotierte, können die beiden Arten von Beschleunigungsfehlern voneinander separiert werden. Da sich die Parametrisierung der Erdschwermodellfehler erneut nur auf Bias beschränkt, können diese nunmehr bestimmt werden.

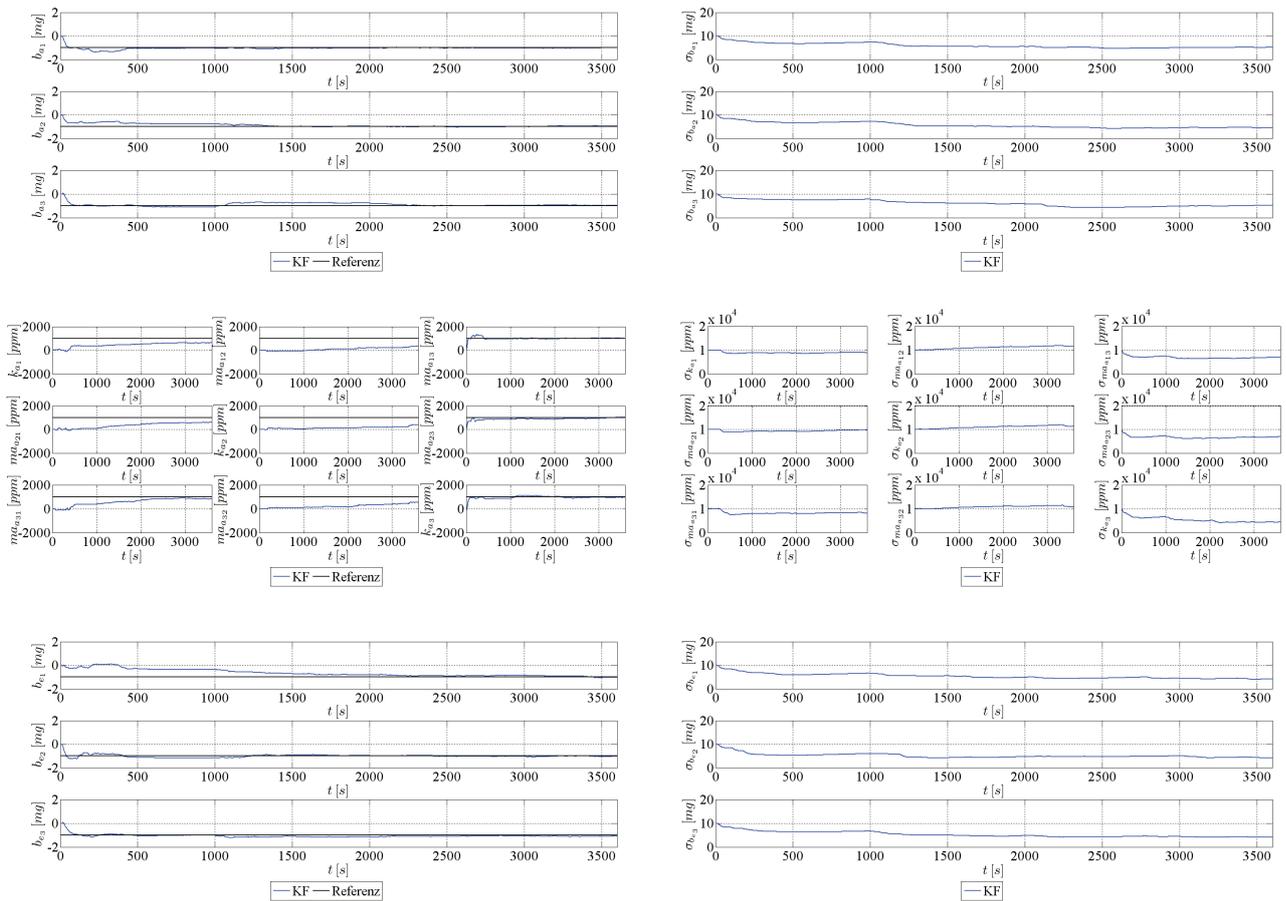


Abbildung 101: Beschleunigungsmesser- und Erdschwerermodellfehler bei hoher Dynamik

## 4. Zusammenfassung

Ziel dieses Abschnitts war die abschließende Bestätigung aller in den vorigen Abschnitten hergeleiteten Einzelergebnisse im Rahmen einer Gesamtsimulation. Zur Erhöhung der Realitätsnähe wurde von der kinematischen Simulation des vorigen Abschnitts zu einer dynamischen Simulation gewechselt. Als grundlegende Gleichungen wurden die in Abschnitt III hergeleiteten Bewegungsgleichungen implementiert, wobei in der Strapdownberechnung die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen und im Kalmanfilter die linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsfehlern verwendet wurden. Der Kalmanfilter wurde in der in Abschnitt VI hergeleiteten Version des BPKF realisiert. Die in Abschnitt V theoretisch bestimmten Aussagen zur Beobachtbarkeitsanalyse können erneut in diesem Abschnitt nachvollzogen werden. Weitere Aspekte wie das Kalmanfiltertuning oder verschiedene Arten der Kalmanfilterkonfiguration, wie die Implementierung einer Sensorfehlerrückführung oder der Wechsel zwischen der Stützung über die GNSS-Position beziehungsweise die GNSS-Geschwindigkeit auf die Stützung über GNSS-Rohdaten wurden zusätzlich erfolgreich implementiert. Obige Simulationsumgebung lässt sich direkt und schnell, durch Austausch der aerodynamischen Koeffizienten und Anpassung der Tuningparameter im Kalmanfilter auf verschiedenste Navigationsszenarien anpassen. Da die Richtigkeit der einzelnen Simulationsteile im vorigen Abschnitt detailliert nachgewiesen wurde, entfällt auch die normalerweise stets notwendige und meist sehr aufwändige Verifizierung.

# IX Zusammenfassung

Die Herleitung der kinematischen Bewegungsgleichungen erfolgte ausgehend vom zweiten Newtonschen Gesetz. Da dessen Gültigkeit auf inertielle beziehungsweise quasiinertielle Bezugssysteme beschränkt ist, wurde eine Erweiterung auf erdfeste und horizontfeste Bezugssysteme unter Berücksichtigung der jeweiligen Führungsänderungen vorgenommen. Für die Position und die Geschwindigkeit wurden drei unterschiedliche Parametrisierungen vorgestellt. Es handelt sich dabei um die drei gängigsten Parametrisierungen der Navigation. Die erste Parametrisierung in erdfesten kartesischen Parametern für Position und Geschwindigkeit bietet sich auf Grund ihrer einfachen Struktur zur Integration mit Satellitennavigation an. Die zweite Parametrisierung in erdfesten ellipsoidischen Positions- und horizontfesten kartesischen Geschwindigkeitsparametern hat Vorteile für Luftfahrtanwendungen. Die dritte Parametrisierung in erdfesten ellipsoidischen Parametern für Position und Geschwindigkeit verwendet fast ausschließlich Winkel und deren Ableitungen als Zustandsparameter. Dies führt zu gleichmäßigen Einträgen in der Jacobimatrix und verbessert deren Kondition. Die Orientierung wurde in absoluten Zuständen in Quaternionen parametrisiert. Dafür werden zwar insgesamt vier Zustandsparameter benötigt, diese verfügen im Gegensatz zu einer Parametrisierung in Eulerwinkeln aber nicht über eine Singularität. Es wurde ein fehlerfreier Ansatz ohne Vereinfachungen oder Modellannahmen gewählt. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen konnten in den drei Parametrisierungen formuliert werden.

Durch die anschließende Einführung einer Störungsrechnung wurden alle Parameter in eine Summe aus bekannter Näherung und unbekannter Störung zerlegt. In der Parametrisierung der Orientierung wurde von Quaternionen auf Eulerwinkel gewechselt, da diese nur drei Zustandsparameter benötigen und bei den nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen keine Singularität mehr aufweisen. Es wurde, um die Gruppe der Rotationsmatrizen nicht zu verlassen und im Gegensatz zum oftmals in der Literatur verwendeten additiven Ansatz, ein multiplikativer Ansatz in der Eulerwinkelaufdatierung gewählt. In der Störungsrechnung wurden keine Terme vereinfacht und auch kleine Terme komplett mitgeführt. Als Ergebnis lagen die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen in den drei Parametrisierungen vor.

Den abschließenden Teil der Herleitung der kinematischen Bewegungsgleichungen bildete die Linearisierung über eine Reihenentwicklung. Dabei wurden erneut keine Vereinfachungen vorgenommen und alle partiellen Ableitungen mitberücksichtigt. Die linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen in den drei Parametrisierungen konnten somit aufgestellt werden.

In einem Vergleich der linearisierten Bewegungsgleichungen dieser Arbeit mit den linearisierten Bewegungsgleichungen der Standardliteratur wurden die Vereinfachungen und Modellannahmen in der Standardliteratur aufgezeigt. Die Inkonsistenz in der Standardliteratur der Parametrisierung in erdfesten ellipsoidischen Positions- und Geschwindigkeitsparametern durch das Auftreten zweiter Ableitungen in der Dynamikmatrix konnte auf eine unvollständige Auflösung zurückgeführt werden. Die speziellen Bewegungsgleichungen der Standardliteratur konnten aus den allgemeingültigen Bewegungsgleichungen dieser Arbeit durch einfaches Wegstreichen abgeleitet werden.

Durch das Vorliegen unvereinfachter Referenzbewegungsgleichungen konnte der durch Vereinfachungen und Modellannahmen entstehende zusätzliche Navigationsfehler berechnet und beurteilt werden. Bei den Bewegungsgleichungen der Standardliteratur wurden oftmals einzelne Vereinfachungen oder Modellannahmen eingeführt, die große Auswirkungen auf die Navigationsgenauigkeit haben. Andere Terme mit weit kleineren Auswirkungen verblieben in den Bewegungsgleichungen. In dieser Arbeit wurde ein einheitlicher und konsequenter Ansatz verfolgt. Die Bewegungsgleichungen wurden für die drei Anwendungskategorien Navigation-Grade, Tactical-Grade und Rate-Grade vorbereitet. Abschließend wurden die vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen für die drei Parametrisierungen formuliert.

***In dieser Arbeit wurden die kinematischen Bewegungsgleichungen ohne jegliche Vereinfachungen oder Modellannahmen hergeleitet und dokumentiert. Damit ist ein Vergleich mit korrespondierenden Ergebnissen aus der Standardliteratur, welche jeweils für eine spezielle Kategorie von Navigationssystemen beziehungsweise für eine spezielle Anwendung entwickelt wurden, möglich. Der Vergleich zwischen den Ergebnissen aus der Standardliteratur untereinander war bisher durch die unterschiedlichen Vereinfachungen und Modellannahmen nur vereinzelt möglich. Die Vereinfachungen und Modellannahmen der Ansätze aus der Standardliteratur wurden im Rahmen dieser Arbeit detailliert analysiert und beschrieben.***

In der Beobachtbarkeitsanalyse wurde mit der Definition einer differenzierbaren Positionsbeobachtung bei einem Arbeitspunkt begonnen. Diese Positionsbeobachtung wurde mit den nichtlinearen Bewegungsgleichungen verknüpft. Durch sukzessives Ableiten dieser Positionsbeobachtung wurden die einzelnen unabhängigen Zeilen der nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen aufgestellt. Dabei trat das Problem auf, dass durch die Ableitungen zusätzliche Zustände in Form der Ableitungen der Fehlermodellparameter schneller entstanden, als neue unabhängige Zeilen der Beobachtbarkeitsgleichungen generiert werden konnten. Die entstehenden Beobachtbarkeitsgleichungen waren somit stets unterbestimmt und eine Beobachtbarkeit aller Zustände war generell nicht gegeben. Die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen wurden trotzdem allgemein aufgestellt. Die Unterbestimmung konnte im weiteren Verlauf durch zwei alternative Maßnahmen umgangen werden.

Es wurden sechs theoretisch nicht unterbestimmte Gleichungssysteme durch Einführung einer speziellen Dynamik und Einschränkung der Sensorfehlerparameter erzeugt. Dabei wurden keine Misalignment betrachtet, da sich diese wie Skalenfaktorfehler bezogen auf andere Bezugssystemachsen verhalten. Zusätzlich wurden die Erdschweremodellbias

nicht betrachtet, da diese im Verhalten den Beschleunigungsmesserbias bezogen auf ein anderes Bezugssystem gleichen. Die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen wurden anhand dieser sechs Fälle formuliert und analysiert. Aussagen konnten auf Grund der starken Nichtlinearitäten in den Beobachtbarkeitsgleichungen nur schwer getroffen werden.

Die nichtlinearen Beobachtbarkeitsgleichungen wurden durch eine Reihenentwicklung in die linearisierten Beobachtbarkeitsgleichungen überführt. Diese wurden anschließend erneut anhand der sechs Fälle analysiert. Bei den einzelnen Submatrizen der Beobachtbarkeitsmatrix wurde eine Ranguntersuchung vorgenommen. Durch Projektion der einzelnen Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix auf die jeweils definierenden Vektoren konnten die beobachtbaren Freiheitsgrade bestimmt und anschließend analytisch berechnet werden.

Ausgehend von den obigen Ergebnissen bei einem Arbeitspunkt wurde die Beobachtbarkeitsanalyse auf Grundlage der linearisierten Bewegungsgleichungen auf mehrere unabhängige Arbeitspunkte erweitert. Zur Umgehung der Unterbestimmung in den unvereinfachten Beobachtbarkeitsgleichungen wurden nun keine Approximationen vorgenommen, sondern zusätzliche unabhängige Arbeitspunkte angefügt. Dabei wurde das Sensorfehlermodell sukzessive erweitert. Auch hier konnten die beobachtbaren Freiheitsgrade durch Projektion auf den definierenden Vektor der jeweiligen Zeile der Beobachtbarkeitsmatrix bestimmt und analytisch berechnet werden.

***Der wesentliche Beitrag dieser Arbeit zur Beobachtbarkeitsanalyse in integrierten Navigationssystemen besteht in der gleichzeitigen Betrachtung von Alignmentfehlern, Sensorfehlern und Modellfehlern in einem mathematischen Ansatz. Dabei wurden das nichtlineare Beobachtbarkeitsproblem mathematisch formuliert, linearisiert, die beobachtbaren Komponenten oder Linearkombinationen identifiziert und dafür explizite analytische Formeln angegeben.***

Die Rechenzeitoptimierung des Kalmanfilteralgorithmus wurde durch Zerlegung anhand dominierender Strukturen realisiert. Der Zustandsvektor wurde in sechs Subvektoren, der Eingangsvektor in fünf Subvektoren und der Beobachtungsvektor in drei Subvektoren aufgespalten. Die Größe der Matrizenblöcke ergab sich aus obiger Zerlegung und den jeweiligen Berechnungsformeln. Der Algorithmus des CKF wurde komplett in die sich ergebende Struktur überführt und auf Basis der Subvektoren und -matrizen formuliert. Anschließend wurden in dem immer noch kompletten Algorithmus des CKF die Submatrizen identifiziert, die entweder Nullmatrizen oder Matrizen mit besonderen Eigenschaften, wie beispielsweise Diagonalmatrizen, waren. Alle Nullmatrizen wurden aus dem Algorithmus des BPKF eliminiert. Bei Diagonalmatrizen wurden die jeweiligen Rechenoperatoren angepasst. Neben diesen Optimierungen wurden zudem ausschließlich die Kovarianzsubmatrizen auf und oberhalb der Hauptdiagonale verwendet. Anschließend konnte der optimierte Algorithmus des BPKF aufgestellt werden.

Der BPKF erlaubt die Prozessierung beliebiger Parametrisierungen und beliebiger Sensorfehlermodelle, sofern diese nur einen Zustandsparameter belegen. Der Rechenzeitbedarf des BPKF ist nicht mehr in dritter Potenz von der Anzahl aller Zustände, sondern nur noch in zweiter Potenz von der Anzahl inertialer Sensorfehler abhängig. Ein BPKF mit 39 Zuständen, wie in dem Gesamtsystem dieser Arbeit, hat einen geringeren Rechenzeitbedarf als ein CKF mit 15 Zuständen. Ein theoretischer BPKF mit 75 Zuständen entspricht in punkto Rechenzeitbedarf in etwa einem CKF mit 21 Zuständen.

***Durch den in dieser Arbeit entwickelten BPKF ist der Gesamtrechenaufwand nicht mehr kubisch von der Anzahl der Navigationszustände abhängig. Die Parametrisierung der Datenfusion eines integrierenden Navigationssystems ist für verschiedene Kategorien von Navigationssystemen und Anwendungen alleine durch Tuning möglich. Dies erlaubt eine Verarbeitung der Datenfusion mit einer deutlich erweiterten Anzahl an Navigationszuständen in Echtzeit auf verfügbaren, für die Luftfahrt zertifizierten Prozessorkarten. Die Notwendigkeit der Beschränkung des Zustandsvektors in operationellen Systemen ist damit deutlich reduziert, was eine einheitliche Implementierung für verschiedene Kategorien von Navigationssystemen und Anwendungen erlaubt und einen erheblichen Vorteil hinsichtlich Kosten, Entwicklungszeit und Testaufwand bietet.***

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein unabhängiges Testkonzept erarbeitet. Das Testkonzept baute auf der Parametrisierung im erdfesten kartesischen Bezugssystem auf, da dieses über eine sehr einfache Struktur verfügt. Anschließend erfolgte eine sukzessive Verifizierung der einzelnen Ergebnisse. Zuerst wurden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen verifiziert. Abweichungen zu einer kinematischen Referenztrajektorie konnten auf die numerische Rechengenauigkeit in der computergestützten Simulation zurückgeführt werden. Analoges ergab sich in der Verifizierung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen. In der Verifizierung der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen dominierten jedoch die Linearisierungsfehler, so dass ein alternatives Vorgehen entwickelt werden musste. Die linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen konnten letztendlich durch einen Vergleich der numerischen Differenzenquotienten der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen mit den analytischen Differentialquotienten der bereits verifizierten nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen bestätigt werden. Anschließend wurde der Fehler, der durch die Verwendung der vereinfachten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen entsteht, für alle drei Anwendungskategorien ermittelt und beurteilt.

In der Bestätigung der Ergebnisse der Beobachtbarkeitsanalyse wurde zweigeteilt vorgegangen. Zuerst wurden fünf kurze Manöver definiert und die Beobachtbarkeit der Zustandsparameter analysiert. Die fünf Manöver waren: Geradeausflug, Kursänderung mit skid-to-turn, Kursänderung mit bank-to-turn, Geschwindigkeitsänderung und Höhenänderung. In einem zweiten Schritt wurden diese kurzen Manöver zu zwei längeren Beispielmanövern zusammengefügt und die Beobachtbarkeit der einzelnen Zustandsparameter erneut beurteilt. Zum einen konnten dabei die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen bestätigt werden und zum anderen konnten diese Ergebnisse um die noch fehlende Betrachtung der Misalignment und Erdschweremodellbias erweitert werden.

Die Gültigkeit des BPKF konnte durch einen Vergleich mit dem CKF, getrennt nach Kalmanprädiktion und Kalmankorrektion, gezeigt werden.

***Ausgehend von den bekannten kinematischen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik wird ein geschlossenes Testkonzept für verschiedene Kategorien von Navigationssystemen und Anwendungen geplant und durchgeführt. Damit ist die Richtigkeit der Ergebnisse dieser Arbeit auf Basis von kinematischen Testtrajektorien mit analytischer Referenz in hoher Genauigkeit nachgewiesen.***

In der abschließenden dynamischen Simulation konnten die bisherigen Ergebnisse dieser Arbeit miteinander verknüpft werden. Die in dem Programmpaket Simulink bereits verfügbaren Anteile einer aerodynamischen Simulation mussten im Detail analysiert und restrukturiert werden, da diese nicht über inertielle Güte verfügten. Durch eine Identifizierung aller Integratoren und dem sich anschließenden Aufbau einer neuen aerodynamischen Simulation aus den bestehenden Anteilen konnte inertielle Güte erreicht werden. Die folgende Navigationssystems simulation berücksichtigte alle Aspekte eines modernen INS, wie beispielsweise eine Stützung über GNSS-Rohdaten, eine Sensorfehlerschätzung oder eine closed-loop Sensorfehlerückführung. Die dynamische Simulation erlaubte dabei eine realistische Dynamik in den beiden Testtrajektorien und bot damit eine repräsentative Fehlerfortpflanzung nahe der Realdatenverarbeitung.

# Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Bezugssysteme.....	15
Abbildung 2: Bezugsachsentransformation zwischen dem raumfesten und dem erdfesten Bezugssystem .....	18
Abbildung 3: Bezugsachsentransformation zwischen dem erdfesten und dem horizontfesten Bezugssystem .....	19
Abbildung 4: Bezugsachsentransformation zwischen dem horizontfesten und dem körperfesten Bezugssystem.....	20
Abbildung 5: Bezugsachsentransformation zwischen dem raumfesten und dem horizontfesten Bezugssystem.....	21
Abbildung 6: Bezugsachsentransformation zwischen dem raumfesten und dem körperfesten Bezugssystem.....	22
Abbildung 7: Restfehler des Erdschwerepotentials als Reihenentwicklung .....	76
Abbildung 8: Restfehler des Erdschwerevektors als Reihenentwicklung.....	77
Abbildung 9: Optimierungspotential Zustandsprädiktion.....	187
Abbildung 10: Optimierungspotential Kovarianzprädiktion.....	188
Abbildung 11: Optimierungspotential Kalmangewinnmatrix .....	189
Abbildung 12: Optimierungspotential Zustandskorrektur.....	190
Abbildung 13: Optimierungspotential Kovarianzkorrektur.....	191
Abbildung 14: Optimierungspotential Kalmanprädiktion.....	191
Abbildung 15: Optimierungspotential Kalmankorrektur.....	192
Abbildung 16: Optimierungspotential Kalmanfilter .....	192
Abbildung 17: Kinematische Referenztrajektorie .....	198
Abbildung 18: Testkonzept für die Bewegungsgleichungen.....	199
Abbildung 19: Testkonzept für die Strapdownrechnung.....	199
Abbildung 20: Positionsfehler der fehlerfreien Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen .....	201
Abbildung 21: Positionsfehler für verschiedene Simulationsfrequenzen bei 4. Ordnung.....	201
Abbildung 22: Positionsfehler für verschiedene Integrationsordnungen bei 100 Hertz.....	202
Abbildung 23: Testkonzept für die nichtlineare Fehlerrechnung.....	202
Abbildung 24: Näherungsposition aus den nichtlinearen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen.....	203
Abbildung 25: Positionsstörung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen .....	203
Abbildung 26: Positionsfehler der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen.....	204
Abbildung 27: Testkonzept für die linearisierte Fehlerrechnung.....	205
Abbildung 28: Positionsfehler der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen.....	205
Abbildung 29: Alternatives Testkonzept für die linearisierte Fehlerrechnung .....	206
Abbildung 30: Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 1 .....	206
Abbildung 31: Relativer Fehler der Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 1 .....	207
Abbildung 32: Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 2.....	208
Abbildung 33: Relativer Fehler der Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 2 .....	208
Abbildung 34: Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 3.....	209
Abbildung 35: Relativer Fehler der Koeffizienten der Dynamikmatrix des Ansatzes 3.....	209
Abbildung 36: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Navigation-Grade IMU .....	210
Abbildung 37: Kinematische Referenztrajektorie für Tactical-Grade IMU.....	211
Abbildung 38: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Tactical-Grade IMU .....	211
Abbildung 39: Kinematische Referenztrajektorie für Rate-Grade IMU .....	212
Abbildung 40: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Rate-Grade IMU.....	212
Abbildung 41: IMU-Sensordaten bei Geradeausflug.....	213
Abbildung 42: Kreiselfehlerparameter bei Geradeausflug.....	214
Abbildung 43: Beschleunigungsfehlerparameter bei Geradeausflug .....	214
Abbildung 44: IMU-Sensordaten bei Kursänderung mit skid-to-turn.....	215
Abbildung 45: Kreiselfehlerparameter bei Kursänderung mit skid-to-turn .....	215
Abbildung 46: Beschleunigungsfehlerparameter bei Kursänderung mit skid-to-turn.....	216
Abbildung 47: IMU-Sensordaten bei Kursänderung mit bank-to-turn .....	217
Abbildung 48: Kreiselfehlerparameter bei Kursänderung mit bank-to-turn .....	217
Abbildung 49: Beschleunigungsfehlerparameter bei Kursänderung mit bank-to-turn.....	218
Abbildung 50: IMU-Sensordaten bei Geschwindigkeitsänderung .....	218
Abbildung 51: Kreiselfehlerparameter bei Geschwindigkeitsänderung.....	219
Abbildung 52: Beschleunigungsfehlerparameter bei Geschwindigkeitsänderung .....	219
Abbildung 53: IMU-Sensordaten bei Höhenänderung.....	220
Abbildung 54: Kreiselfehlerparameter bei Höhenänderung.....	220
Abbildung 55: Beschleunigungsfehlerparameter bei Höhenänderung.....	221
Abbildung 56: Gesamtmanöver .....	222
Abbildung 57: Kreiselfehlerparameter im Gesamtmanöver mit skid-to-turn.....	223
Abbildung 58: Beschleunigungsfehlerparameter im Gesamtmanöver mit skid-to-turn.....	224
Abbildung 59: Kreiselfehlerparameter im Gesamtmanöver mit bank-to-turn .....	225
Abbildung 60: Beschleunigungsfehlerparameter im Gesamtmanöver mit bank-to-turn.....	226

Abbildung 61: Abweichung der Standardabweichung der Position in der Kalmanprädiktion.....	228
Abbildung 62: Abweichung der Standardabweichung der Position in der Kalmankorrektion.....	228
Abbildung 63: Wahre Navigationszustände der Referenztrajektorie .....	230
Abbildung 64: Wahre inertielle Sensordaten der Referenztrajektorie .....	230
Abbildung 65: Navigationsfehler der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in absoluten Zuständen.....	231
Abbildung 66: Navigationsnäherung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen .....	232
Abbildung 67: Navigationsstörung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen.....	232
Abbildung 68: Navigationsfehler der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen .....	233
Abbildung 69: Navigationsfehler der linearisierten Bewegungsgleichungen in Zustandsstörungen .....	234
Abbildung 70: Wahre Navigationszustände der Referenztrajektorie für Tactical-Grade IMU .....	235
Abbildung 71: Wahre inertielle Sensordaten der Referenztrajektorie für Tactical-Grade IMU .....	235
Abbildung 72: Navigationsnäherung der Referenztrajektorie für Tactical-Grade IMU .....	235
Abbildung 73: Navigationsstörung der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Tactical-Grade IMU.....	236
Abbildung 74: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Tactical-Grade IMU.....	236
Abbildung 75: Wahre Navigationszustände der Referenztrajektorie für Rate-Grade IMU .....	237
Abbildung 76: Wahre inertielle Sensordaten der Referenztrajektorie für Rate-Grade IMU .....	237
Abbildung 77: Navigationsnäherung der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Rate-Grade IMU .....	237
Abbildung 78: Navigationsstörung der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Rate-Grade IMU .....	238
Abbildung 79: Navigationsfehler der vereinfachten Bewegungsgleichungen für Rate-Grade IMU .....	238
Abbildung 80: Standardabweichung in der Kalmanprädiktion .....	239
Abbildung 81: Abweichung der Standardabweichung in der Kalmanprädiktion .....	240
Abbildung 82: Standardabweichung in der Kalmankorrektion .....	241
Abbildung 83: Abweichung der Standardabweichung in der Kalmankorrektion.....	242
Abbildung 84: Simulationsumgebung.....	243
Abbildung 85: Aerodynamische Simulation .....	244
Abbildung 86: Navigationssystemsimulation.....	246
Abbildung 87: FlightGear .....	247
Abbildung 88: Trajektorie bei geringer Dynamik .....	248
Abbildung 89: Navigationszustände bei geringer Dynamik.....	248
Abbildung 90: Inertielle Sensordaten bei geringer Dynamik .....	249
Abbildung 91: Basismanöver bei hoher Dynamik .....	249
Abbildung 92: Navigationszustände bei hoher Dynamik.....	250
Abbildung 93: Inertielle Sensordaten bei hoher Dynamik .....	250
Abbildung 94: Navigationsfehler bei geringer Dynamik .....	254
Abbildung 95: Empfängeruhr- und barometrischer Höhendifferenzfehler bei geringer Dynamik.....	254
Abbildung 96: Kreiselfehler bei geringer Dynamik .....	255
Abbildung 97: Beschleunigungsmesser- und Erdschwerermodellfehler bei geringer Dynamik .....	256
Abbildung 98: Navigationsfehler bei hoher Dynamik.....	257
Abbildung 99: Empfängeruhr- und barometrischer Höhendifferenzfehler bei hoher Dynamik.....	258
Abbildung 100: Kreiselfehler bei hoher Dynamik .....	258
Abbildung 101: Beschleunigungsmesser- und Erdschwerermodellfehler bei hoher Dynamik.....	259

**Tabellenverzeichnis**

Tabelle 1: Vereinfachungen für Navigation-Grade IMU .....	52
Tabelle 2: Vereinfachungen für Tactical-Grade IMU .....	52
Tabelle 3: Vereinfachungen für Rate-Grade IMU .....	53
Tabelle 4: Beobachtbarkeit bei „Stationary Maneouvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias .....	132
Tabelle 5: Beobachtbarkeit bei „Stationary Maneouvre“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler.....	134
Tabelle 6: Beobachtbarkeit bei „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias .....	135
Tabelle 7: Beobachtbarkeit bei „Linear Acceleration“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler.....	137
Tabelle 8: Beobachtbarkeit bei „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias .....	138
Tabelle 9: Beobachtbarkeit bei „Straight and Levelled“ mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler .....	139
Tabelle 10: Zwei Arbeitspunkte mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias .....	141
Tabelle 11: Drei Arbeitspunkte mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler .....	143
Tabelle 12: Drei Arbeitspunkte mit IMU-Bias und IMU-Skalenfaktorfehler .....	145
Tabelle 13: Beobachtbarkeit mit Beschleunigungsmesserbias und Kreiselbias .....	146
Tabelle 14: Beobachtbarkeit mit Beschleunigungsmesserbias und -skalenfaktorfehler .....	146
Tabelle 15: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Geradeausflug .....	215
Tabelle 16: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Kursänderung mit skid-to-turn .....	216
Tabelle 17: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Kursänderung mit bank-to-turn .....	218
Tabelle 18: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Geschwindigkeitsänderung .....	220
Tabelle 19: Beobachtbarkeit der Sensorfehlerparameter bei Höhenänderung .....	221
Tabelle 20: Beobachtbarkeit der Kreiselfehlerparameter im Gesamtmanöver mit skid-to-turn.....	223
Tabelle 21: Beobachtbarkeit der Beschleunigungsfehlerparameter im Gesamtmanöver mit skid-to-turn .....	224
Tabelle 22: Beobachtbarkeit der Kreiselfehlerparameter im Gesamtmanöver mit bank-to-turn.....	226
Tabelle 23: Beobachtbarkeit der Beschleunigungsfehlerparameter im Gesamtmanöver mit bank-to-turn.....	227

# Literaturverzeichnis

## Mathematik

- [1] Alt, Hans Wilhelm; Lineare Funktionalanalysis – 3. Auflage, Springer Verlag, Berlin 1999
- [2] Barker, V.A. (Ed.); Sparse Matrix Techniques, in Dold, A. & Eckmann, B. (Ed.); Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin 1977
- [3] Barnett, Stephen; Matrices – Methods and Applications, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Clarendon Press, Oxford 1990
- [4] Bellman, Richard; Introduction to Matrix Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics, The Rand Corporation, Philadelphia 1997
- [5] Birk, Joachim; Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik Nr.294, VDI Verlag, Düsseldorf 1992
- [6] Bunch, J.R. & Rose, D.J. (Ed.); Sparse Matrix Computations, Academic Press, New York 1976
- [7] Davies, Timothy A.; Direct Methods for Sparse Linear Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 2006
- [8] Duff, Iain S. & Stewart, G.W. (Ed.); Sparse Matrix Proceedings 1978, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1979
- [9] Fehlberg, Erwin; Classical Fifth-, Sixth-, Seventh- and Eighth-Order Runge-Kutta Formulas with Step Size Control, NASA TR R-287, Washington D.C. 1968
- [10] Franklin, Joel N.; Matrix Theory, Dover Publications, Mineola 1993
- [11] Golub, Gene H. & van Loan, Charles F.; Matrix Computations – Second Edition, The John Hopkins University Press, Baltimore 1989
- [12] Hairer, E., Norsett, S.P. & Wanner, G.; Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems – Second Revised Edition, Springer Series in Computational Mathematics No.8, Springer Verlag, New York 1993
- [13] Hairer, E. & Wanner, G.; Solving Ordinary Differential Equations II Stiff and Differential-Algebraic Problems – Second Revised Edition, Springer Series in Computational Mathematics No.14, Springer Verlag, New York 1996
- [14] Henderson H.V. & Searle S.R.; On deriving the inverse of a sum of matrices, in SIAM Review Vol.23 No.1, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981
- [15] Higham, Nicholas J.; Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1996
- [16] Kuipers, Jack B.; Quaternions and Rotation Sequences, Princeton University Press, Princeton 1999
- [17] Meyberg, Kurt & Vachenaue, Peter; Höhere Mathematik 1 Differential- und Integralrechnung Vektor- und Matrizenrechnung – 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin 1999
- [18] Moler, Cleve & van Loan, Charles; Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix Twenty-Five Years Later, in SIAM Review Vol.45 No.1, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003
- [19] Walter, W.; Gewöhnliche Differentialgleichungen Eine Einführung, Springer Verlag, Berlin 2000

## Geodäsie

- [20] Chovitz, B.H.; Parameters of Common Relevance of Astronomy, Geodesy and Geodynamics, in Bulletin Geodesique: The Geodesists Handbook Vol.62 No.3, 1988
- [21] Grejner-Brzezinska, Dorota A. & Wang, Jin; Gravity Modeling for High Accuracy GPS/INS Integration, The Ohio State University Center for Mapping, Columbus 1998
- [22] Heikkinen, Markku; Geschlossene Formeln zur Berechnung räumlicher geodätischer Koordinaten aus rechtwinkligen Koordinaten, in Zeitschrift für Vermessungswesen 107. Jahrgang, 1982
- [23] Heiskanen, W.A. & Moritz, Helmut; Physical Geodesy, Reprint Institute of Physical Geodesy, Technical University Graz, Graz 1990
- [24] Heck, Bernhard; Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg 2003
- [25] Hofmann-Wellenhof, Bernhard & Moritz, Helmut; Physical Geodesy, Springer Verlag, Wien 2006
- [26] Jekeli, Christopher; Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications, Walter de Gruyter, New York 2001
- [27] Kaplan, G.H. (Ed.); The IAU Resolutions on Astronomical Constants, Time Scales, and the Fundamental Reference Frame, United States Naval Observatory Circular No.163, Washington D.C. 1981
- [28] Knickmeyer, Elfriede T.; Vector Gravimetry by a Combination of Inertial and GPS Satellite Measurements, UCSE Reports Number 20035, Calgary 1990
- [29] McCarthy, Dennis D. (Ed.); IERS Standards (1992), IERS Technical Note 13, Paris 1992
- [30] McCarthy, Dennis D. (Ed.); IERS Conventions (1996), IERS Technical Note 21, Paris 1996
- [31] Moritz, Helmut; The Figure of the Earth, Wichmann Verlag, Karlsruhe 1990
- [32] Moritz, Helmut & Mueller, Ivan I.; Earth Rotation Theory and Observation, Ungar Publishing Company, New York 1987
- [33] Niemeier Wolfgang, Ausgleichsrechnung, Walter de Gruyter, Berlin 2002
- [34] NIMA; World Geodetic System 1984 its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems – Third Edition Amendment 1, Department of Defense, Reston 2000

- [35] Seeber, Günter; Satellitengeodäsie, Walter de Gruyter, New York 1989
- [36] Stephenson, Richard F.; Historical Eclipses and Earth's Rotation, Cambridge University Press, Cambridge 1997
- [37] Torge, Wolfgang; Geodäsie – 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin 2003

### **Regelungstechnik**

- [38] Crassidis, John L. & Junkins, John L.; Optimal Estimation of Dynamic Systems, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2004
- [39] Föllinger, Otto; Regelungstechnik – 6. Auflage, Hüthig Buch Verlag, Heidelberg 1990
- [40] Gelb, Arthur (Ed.); Applied Optimal Estimation, M.I.T. Press, Cambridge 1974
- [41] Von Grünigen, Daniel Ch.; Digitale Signalverarbeitung mit einer Einführung in die kontinuierlichen Signale und Systeme – 3. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig, Wien 2004
- [42] Horn, Martin & Dourdoumas, Nicolaos; Regelungstechnik Rechnergestützter Entwurf zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Regelkreise, Pearson Studium, München 2004
- [43] Kammeyer, Karl-Dirk & Kroschel, Kristian; Digitale Signalverarbeitung Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB-Übungen, B.G. Teubner Verlag, Wiesbaden 2006
- [44] Kiencke, Uwe & Jäkel, Holger; Signale und Systeme, Oldenbourg Verlag, München 2005
- [45] Lunze, Jan; Regelungstechnik 1 Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen – 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin 2006
- [46] Ohm, Jens-Rainer & Lüke, Hans Dieter; Signalübertragung Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme – 9. Auflage, Springer Verlag, Berlin 2005
- [47] Schlitt, Herbert; Regelungstechnik Physikalisch orientierte Darstellung fachübergreifender Prinzipien, Vogel Buchverlag, Würzburg 1988
- [48] Werner, Martin; Signale und Systeme – 2. Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden 2005

### **Kalman Filter Theorie**

- [49] Balakrishnan, A.V.; Kalman Filtering Theory, Optimization Software, New York 1984
- [50] Bar-Shalom, Yaakov & Li, X. Rong & Kirubarajan, Thiagalingam; Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York 2001
- [51] Bierman, Gerald J.; Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, San Diego 1977
- [52] Bozic, S.M.; Digital and Kalman Filtering An introduction to discrete-time filtering and optimum linear estimation, Edward Arnold, London 1986
- [53] Brookner, Eli; Tracking and Kalman Filtering Made Easy, John Wiley & Sons, New York 1998
- [54] Brown, Robert Grover & Hwang, Patrick Y.C.; Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering – Third Edition, John Wiley & Sons, New York 1997
- [55] Bucy, R.S. & Joseph, P.D.; Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance, John Wiley & Sons, New York 1968
- [56] Carlson, N.A.; Fast Triangular Formulation of the Square Root Filter, in AIAA Journal Vol.11 No.9, 1973
- [57] Chui, C.K. & Chen, G.; Kalman Filtering with Real-Time Applications – Third Edition, Springer Verlag, Berlin 1998
- [58] Grewal, Mohinder S. & Andrews, Angus P.; Kalman Filtering Theory and Practice Using MATLAB – Second Edition, John Wiley & Sons, New York 2001
- [59] Junkins, John L.; An introduction to optimal estimation of dynamical systems, Sijhoff & Noordhoff International Publishers, Alphen aan den Rijn 1978
- [60] Kailath, Thomas, Sayed, Ali H. & Hassibi, Babak; Linear Estimation, Prentice Hall, New Jersey 2000
- [61] Kalman, R.E.; A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, in ASME Transactions Series D: Journal of Basic Engineering Vol.82, 1960
- [62] Kay, Steven M.; Fundamentals of Statistical Signal Processing Estimation Theory, PTR Prentice-Hall, New Jersey 1993
- [63] Magill, D.; Optimal Adaptive Estimation of Sampled Stochastic Processes, in IEEE Transaction on Automatic Control Vol.10 No.4, 1965
- [64] Maybeck, Peter S.; Stochastic Models, Estimation and Control – Volume 1, Mathematics in Science and Engineering Vol.141-1, Academic Press, New York 1979
- [65] Maybeck, Peter S.; Stochastic Models, Estimation and Control – Volume 2, Mathematics in Science and Engineering Vol.141-2, Academic Press, New York 1982
- [66] Maybeck, Peter S.; Stochastic Models, Estimation and Control – Volume 3, Mathematics in Science and Engineering Vol.141-3, Academic Press, New York 1982
- [67] Minkler, G. & Minkler, J.; Theory and Application of Kalman Filtering, Magellan Book Company, Palm Bay 1993
- [68] Potter, J.E. & Stern, R.G.; Statistical Filtering of Space Navigation Measurements, in Proceedings of the 1963 AIAA Guidance and Control Conference, Washington D.C. 1963
- [69] Savage, Paul G.; Strapdown Analytics 1 & 2, Strapdown Associates, Maple Plain 2000
- [70] Schrick, Karl-Wilhelm (Hrsg.); Anwendungen der Kalman-Filter-Technik Anleitung und Beispiele, R. Oldenbourg Verlag, München Wien 1977
- [71] Simon, Dan; Optimal State Estimation, John Wiley & Sons, New Jersey 2006

- [72] Siouris, George M.; An Engineering Approach to Optimal Control and Estimation Theory, John Wiley & Sons, New York 1996
- [73] Sorenson, Harold W. (Ed.); Kalman Filtering: Theory and Application, IEEE Press, New York 1985
- [74] Stengel, Robert F.; Stochastic Optimal Control Theory and Application, John Wiley & Sons, New York 1986
- [75] Stengel, Robert F.; Optimal Control and Estimation, Dover Publications, New York 1994
- [76] Thornton, C.L.; Triangular Covariance Factorizations for Kalman Filtering, University of California at Los Angeles School of Engineering, Los Angeles 1976
- [77] Welch, Greg & Bishop, Gary; An Introduction to the Kalman Filter, University of North Carolina at Chapel Hill Department of Computer Science, Chapel Hill 2004
- [78] Zarchan, Paul & Musoff, Howard; Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach, Progress in Astronautics and Aeronautics Volume 190, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston 2000

### **Inertialnavigation**

- [79] Aeronautical Systems Division, Air Force Systems Command, Specification for USAF Standard Form, Fit, and Function Medium Accuracy Inertial Navigation Unit, Wright-Patterson AFB 1992
- [80] Atlantic Inertial Systems, MEMS Inertial Measurement Unit SiIMU02 Specification, www.atlanticinertial.com (17.11.2009)
- [81] Biezdad, Daniel J.; Integrated Navigation and Guidance Systems, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston 1999
- [82] Britting, Kenneth R.; Inertial Navigation Systems Analysis, John Wiley & Sons, New York 1971
- [83] Broxmeyer, Charles; Inertial Navigation Systems, McGraw-Hill, New York 1964
- [84] Chatfield, Averil B.; Fundamentals of High Accuracy Inertial Navigation, Progress in Astronautics and Aeronautics Volume 174, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston 1997
- [85] Dachs, Andreas; Rechenzeitoptimierte Datenfusion in der Navigation Diplomarbeit, Institut für Erdmessung und Navigation Universität der Bundeswehr München, München 2005
- [86] Dambeck, Johann H.; Diagnose und Therapie geodätischer Trägheitsnavigationssysteme, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Stuttgart 1999
- [87] Dambeck, Johann H.; Strapdown Algorithms, GPS / INS- Integration and Multisensor Navigation, Carl Crazz Gesellschaft, München 2005
- [88] Dambeck, Johann H.; Error Propagation, GPS / INS- Integration and Multisensor Navigation, Carl Crazz Gesellschaft, München 2005
- [89] Eissfeller, Bernd; Analyse einer geodätischen raumstabilisierten Inertialplattform und Integration mit GPS, Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen Universität der Bundeswehr München, München 1989
- [90] Farrell, James L.; Integrated Aircraft Navigation, Academic Press, San Diego 1976
- [91] Farrell, Jay A. & Barth, Matthew; The Global Positioning System & Inertial Navigation, McGraw-Hill Companies, New York 1999
- [92] Grewal, Mohinder S., Weill, Lawrence R. & Andrews, Angus P.; Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration, John Wiley & Sons, New York 2001
- [93] Groves, Paul D.; Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Artech House, Boston 2008
- [94] Haid, Markus; Verbesserung der referenzlosen inertialen Objektverfolgung zur Low-cost Indoor-Navigation durch Anwendung der Kalman-Filterung, Fraunhofer IBR Verlag, Stuttgart 2005
- [95] IEEE Std 292-1969; Specification Format for Single-Degree-of-Freedom Spring-Restrained Gyros, The Institute of Electrical and Electronics Engineering, New York 1969
- [96] IEEE Std 517-1974; Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Degree-of-Freedom Rate-Integrating Gyros, The Institute of Electrical and Electronics Engineering, New York 1974
- [97] IEEE Std 529-1980; Supplement for Strapdown Applications to IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Degree-of-Freedom Rate-Integrating Gyros, The Institute of Electrical and Electronics Engineering, New York 1980
- [98] IEEE Std 528-2001; Inertial Sensor Terminology, The Institute of Electrical and Electronics Engineering, New York 2001
- [99] Kayton, Myron; Fundamental Limitations on Inertial Measurements, in Robertson, Robert E. (Ed.); Progress in Astronautics and Rocketry Vol.8 Guidance and Control, Academic Press, London 1962
- [100] Kayton, Myron & Fried, Walter R.; Avionics Navigation Systems, John Wiley & Sons, New York 1996
- [101] Lawrence, Anthony; Modern Inertial Technology - Navigation, Guidance and Control – Second Edition, Springer Verlag, New York 1998
- [102] Merrill, Grayson (Ed.); Principles of Guided Missile Design Inertial Guidance, D. van Nostrand, New York 1962
- [103] Northrop Grumman, LN-100G Embedded GPS Inertial Navigation System Specification, www.es.northropgrumman.com (17.11.2009)
- [104] Northrop Grumman, LN-200 Fiber Optic Inertial Measurement Specification, www.es.northropgrumman.com (17.11.2009)
- [105] O'Donnell, C.F. (Ed.); Inertial Navigation Analysis and Design, McGraw-Hill, New York 1964
- [106] Rogers, Robert M.; Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston 2000

- [107] RTO-EN-SET-064, Advances in Navigation Sensors and Integration Technology, NATO Research and Technology Organisation, Brüssel 2004
- [108] Savant, C.J., Howard, R.C., Solloway, C.B. & Savant, C.A.; Principles of Inertial Navigation, McGraw-Hill, New York 1961
- [109] Schmidt, G.T.; Strapdown Inertial Systems – Theory and Applications Introduction and Overview, in AGARD Lecture Series No.95 Strap-Down Inertial Systems, London 1978
- [110] Schmidt, S.F.; Application of State Space Methods to Navigation Problems, in Leondes, C.T. (Ed.); Advances in Control Systems Vol.3, Academic Press, New York 1966
- [111] Schröder, Dietrich; Genauigkeitsanalyse inertialer Vermessungssysteme mit fahrzeugfesten Sensoren, Deutsche Geodätische Kommission Reihe C Dissertation Heft Nr. 391, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1992
- [112] Titterton, D.H. & Weston, J.L.; Strapdown Inertial Navigation Technology, Peter Peregrinus, London 1971
- [113] Wei, M. & Schwarz, K.P.; A Strapdown Inertial Algorithm Using an Earth-Fixed Cartesian Frame, Journal of The Institute of Navigation Vol.37 No.2, Calgary 1990

### **Satellitenavigation**

- [114] Hofmann-Wellenhof, Bernhard, Legat, K. & Wieser, M.; Navigation Principles of Positioning and Guidance, Springer Verlag, Wien 2003
- [115] Kaplan, Elliot D. & Hegarty, Christopher J.; Understanding GPS Principles and Applications – Second Edition, Artech House, Norwood 2006
- [116] Mansfeld, Werner; Satellitenortung und Navigation, Friedrich Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden 2004
- [117] Prasad, Ramjee & Ruggieri, Marina, Applied Satellite Navigation Using GPS, GALILEO and Augmentation Systems, Mobile Communication Series ,Artech House, Boston 2005
- [118] Rycroft, M.(Ed.); Satellite Navigation Systems: Policy, Commercial and Technical Interaction, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2003
- [119] Xu, Guochang; GPS Theory, Algorithms and Applications, Springer Verlag, Heidelberg 2004

### **Aerodynamik**

- [120] Brockhaus, Rudolf; Flugregelung – 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin 2001
- [121] Clancy; Laurence Joseph; Aerodynamics, Pitman Publishing, London 1978
- [122] Hurt, H. H. Jr.; Aerodynamics for Naval Aviators, Aviation Supplies & Academics., Washington 1992
- [123] Junkins, John L. & Turner, James D.; Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers, Elsevier Science Publishing Company, New York 1986
- [124] Kermode, A. C.; Aerodynamik und Flugverhalten, Motorbuch Verlag, Stuttgart 1992
- [125] Merhav, Shmuel; Aerospace Sensor Systems and Applications, Springer Verlag, New York 1996
- [126] Moir, Ian & Seabridge, Allan; Military Avionics Systems – Third Edition, John Wiley & Sons, Chichester 2008
- [127] Palm, William J. III; Modeling, Analysis, and Control of Dynamic Systems, John Wiley & Sons, New York 1999
- [128] Roskam, Jan; Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls Part I, Roskam Aviation and Engineering Corporation, Ottawa 1979
- [129] Roskam, Jan; Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls Part II, Roskam Aviation and Engineering Corporation, Ottawa 1979
- [130] Schmidt, Louis V.; Introduction to Aircraft Dynamics, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston 1998
- [131] Siouris, George M.; Aerospace Avionics Systems A Modern Synthesis, Academic Press, San Diego 1993
- [132] Unmanned Dynamics; AeroSim aeronautical simulation blockset Version 1.2 User's Guide, www.u-dynamics.com (19.07.2009)
- [133] US Department of Transportation Federal Aviation Administration Flight Standards Service; Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge, Oklahoma City 1997
- [134] Zipfel, Peter H.; Modelling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston 2000

### **MATLAB & Simulink**

- [135] Angermann, A., Beuschel, M., Rau, M. & Wohlfahrt, U.; Matlab Simulink Stateflow, Oldenburg Verlag, München 2002
- [136] Hoffmann, Josef & Brunner, Urban; Matlab & Tools für die Simulation dynamischer Systeme, Addison Wesley Verlag, München 2002
- [137] Tewari, Ashish; Modern Control with Matlab and Simulink, John Wiley & Sons, New York 2002



## Bisherige Veröffentlichungen in der Schriftenreihe des GeoInfoDBw

Mit der Fusion des Militärgeographischen Dienstes der Bundeswehr und des Geophysikalischen Beratungsdienstes der Bundeswehr werden die Fachpublikationen der beiden Dienste in der **Schriftenreihe** des GeoInfoDBw zusammengefasst. Damit beginnt eine neue Aufzählung der bisherigen Veröffentlichungen.

- 
- Heft 1, 2003** Regierungsdirektor Dr.-Ing. Fischer  
**Geophysikalisch bedingte Leistungsgrenzen der Hubschrauber CH-53G und CH-53GS**
- Heft 1, 2004** Oberst a. D. Dipl.-Ing. Oskar Albrecht  
**Beiträge zum militärischen Vermessungs- und Kartenwesen und zur Militärgeographie in Preußen (1803-1921)**
- Heft 2, 2004** Oberst a. D. Dipl.-Ing. Hafeneder  
**Überblick über das Militärische Geowesen Deutschlands im 19. und 20. Jahrhundert**
- Heft 1a, 2008** Oberst a. D. Dipl.-Ing. Rudolf Hafeneder  
**Deutsche Kolonialkartographie 1884-1919 (TEXT-BAND)**
- Heft 1b, 2008** Oberst a. D. Dipl.-Ing. Rudolf Hafeneder  
**Deutsche Kolonialkartographie 1884-1919 (ANLAGEN-BAND)**
- Heft 1, 2009** Regierungsdirektor Dipl.-Met. Wolfgang Meyer und weitere Autoren  
**Geschichte des Geophysikalischen Beratungsdienstes der Bundeswehr – 1956 bis 2003 –**
- Heft 2, 2009** Georg Mischuk  
**Piraterie in Südostasien**
- Heft 3, 2009** Hartmut Behrend, Dr. Wolfhart Dürrschmidt, Christian D. Falkowski, Dr. Monika Lanik, Dr. Judith Miggelbrink, Dennis Tänzler, Prof. Dr. Heinz Theisen, Frank Wehinger  
**Jahresheft Geopolitik 2008**
- Heft 4, 2009** GeoDir Dr. Willig  
**Die Odyssee des Wehrgeologenarchivs als Teil der Heringen Collection**
- Heft 5, 2009** Oberst a. D. Dipl.-Ing. Theo Müller und Dirk Hubrich  
**Überblick über das Karten- und Vermessungswesen des deutschen Heeres von 1919 bis 1945**  
Oberst a. D. Dipl.-Ing. Theo Müller  
**Die Divisionskartenstellen des deutschen Heeres von 1939 bis 1945**
- Heft 1, 2010** T. Albrecht und D. Gärtner  
**Besonderheiten der Seewetterberatung (Teil 1)**  
T. Albrecht und I. Hinrichs  
**Der Einfluss des küstennahen Auftriebsphänomens auf die Konzentrationen von Dimethylsulfid an der Meeresoberfläche (Teil 2)**  
T. Albrecht und R. Wolke  
**Messung und Modellierung von CH<sub>2</sub>O-Variationen in der marinen Atmosphäre (Teil 3)**  
T. Albrecht  
**Meteorologische Verhältnisse im Atlantik und Nordpazifik im Sommer 2004 (Teil 4)**
- Heft 2, 2010** Steffen Bauer, M.A., PD Dr. Stefan Bayer, Col John Fitzgerald, Prof. Hermann Kreuzmann, Dr. Hans-Jochen Luhmann, Prof. Christian-D. Schönwiese  
**Jahresheft Geopolitik 2009**





