

Ein vom Spannungszustand abhängiges
makroskopisches Schädigungs- und
Versagensmodell basierend auf
Experimenten und numerischen Simulationen

Daniel Brenner

Dissertation

Kontakt:

Daniel Brenner
daniel.brenner@unibw.de

Am Angerberg 60
99444 Blankenhain

Ein vom Spannungszustand abhängiges
makroskopisches Schädigungs- und
Versagensmodell basierend auf
Experimenten und numerischen Simulationen

Daniel Brenner

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation.

Gutachter:

1. Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Brünig
2. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Holm Altenbach,
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
3. Prof. Dr. rer. nat. Siegfried Schmauder,
Universität Stuttgart

Die Dissertation wurde am 19. November 2014 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften am 10. Dezember 2014 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 29. April 2015 statt.

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein phänomenologisches, mikromechanisch motiviertes Schädigungs- und Versagensmodell zur Beschreibung des elastisch-plastisch-schädigenden Materialverhaltens vorgestellt. Das Kontinuumsschädigungsmodell basiert auf der Einführung von geschädigten und fiktiven ungeschädigten Konfigurationen. Dies ermöglicht eine kinematische Definition des Schädigungstensors und korrespondierender Verzerrungen. Es werden verschiedene elastische Potentialfunktionen verwendet, um den Einfluss der Schädigung auf das elastische Materialverhalten zu modellieren. Das plastische Verhalten wird durch eine Fließbedingung, ein nicht assoziiertes Fließgesetz und ein Verfestigungsgesetz charakterisiert. Analog beschreiben eine Schädigungsbedingung, ein nicht assoziiertes anisotropes Schädigungsgesetz und ein Entfestigungsgesetz das schädigende Materialverhalten. Um den Einfluss des Spannungszustands auf verschiedene Schädigungs- und Versagensmechanismen berücksichtigen zu können, wird das Werkstoffverhalten der Schädigung als Funktion der Spannungsintensität, der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters beschrieben.

Zur Ermittlung der für die vorgestellte Theorie benötigten Materialparameter werden Experimente und begleitende numerische Simulationen mit ungekerbten und unterschiedlich gekerbten Zugproben durchgeführt. Zusätzliche vergleichende numerische Simulationen mit dem Gurson-Tvergaard-Needleman-Modell zeigen eine höhere Vorhersagegenauigkeit des vorgestellten Modells.

Zur besseren Analyse der Auswirkungen des Spannungszustandes auf das Schädigungsverhalten werden ein neuartiger biaxialer Versuchskörper und eine neue biaxiale Prüfmaschine vorgestellt. Mit verschiedenen Lastkombinationen kann mit dieser neuen Probe im Bereich der inelastischen Deformationen ein großes Spektrum von Spannungszuständen untersucht werden. Es zeigt sich zum Beispiel, dass die mit dem Zugstab ermittelten Materialparameter für negative Spannungstriaxialitäten modifiziert werden müssen.

Die Last-Verschiebungskurven der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen mit den modifizierten Materialparametern und der Experimente zeigen für die verschiedenen Lastkombinationen eine gute Übereinstimmung. Eine detaillierte Darstellung der Spannungen im geschädigten Zustand, der Schädigungsart und der Schädigungsvergleichsdehnung führt zu neuen Erkenntnissen über die Schädigungsentwicklung. Durch einen Vergleich dieser numerisch gewonnenen Daten mit dem Deformationszustand der gerissenen Probe können zusätzlich Aussagen über eine mögliche Bruchbedingung getroffen werden. Mit Hilfe eines Rasterelektronenmikroskops werden die aus verschiedenen Lastkombinationen resultierenden Bruchflächen untersucht. Hierbei können die unterschiedlichen Versagensarten wie isotrope Porenaufweitung und Schädigung durch Mikroscherrisse den jeweiligen Spannungszuständen zugeordnet werden. Der in dieser Arbeit angenommene Zusammenhang zwischen Spannungszustand und Schädigungsmechanismus kann somit verifiziert werden.

Abstract

This thesis deals with a phenomenological micro-mechanically motivated damage and failure model to describe the elastic-plastic-damage material behavior. The continuum damage model is based on the introduction of damaged and fictitious undamaged configurations. It takes into account the kinematic definition of damage tensors and corresponding strains. Different elastic potential functions are introduced to be able to model the effect of damage on elastic material properties. The plastic behavior is characterized by a yield condition, a non-associated flow rule and a hardening law. In a similar way a damage condition, a non-associated anisotropic damage rule and a softening law describe the damage behavior. To take into account the influence of the stress state on various damage and failure mechanisms the damage material behavior is described as a function of stress intensity, stress triaxiality and the Lode parameter. To determine the material parameters of the presented theory experiments and corresponding numerical simulations with unnotched and differently notched tensile specimens are performed. Additional comparative numerical simulations with the Gurson-Tvergaard-Needleman-model show higher accuracy of prediction of the proposed model.

For better analysis of the effects of the stress state on the damage behavior new experiments with two-dimensionally loaded specimens and a new biaxial test machine have been developed. To investigate a wide range of stress states in the region of inelastic deformations different load combinations have been applied. It has been shown, for example, that the material parameters identified with tension tests have to be modified for negative triaxialities.

For the various load combinations the comparison of the load-displacement curves of elastic-plastic-damaged numerical simulations with the modified material parameters and the experiments show good agreement. Detailed presentations of the stress state, the type of damage and the damage equivalent strain lead to new perceptions of evolution of damage. The comparison of deformation state of the fractured specimens with results of numerical simulations deliver information for a new fracture condition. To be able to allocate different failure modes, such as isotropic void growth and anisotropic evolution of micro-shear cracks, with the stress states, a scanning electron microscope has been used to investigate the fracture surfaces of the various load combinations. Therefore, the relationship between stress state and damage mechanism assumed in this work is verified.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren von 2011 bis 2014 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr München.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Brünig, dessen Tür jederzeit für Fragen und wissenschaftliche Diskussionen offen stand. Ohne seine großartige wissenschaftliche Betreuung wäre diese Arbeit undenkbar gewesen.

Ebenso danke ich Herrn Professor Altenbach und Herrn Professor Schmauder für die Übernahme des Koreferates sowie Herrn Professor Apel für die bereitwillige Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Weiter danke ich meinen Kollegen für die ausgezeichnete Zusammenarbeit. Hier möchte ich besonders Frau Hagenbrock und Herrn Dr.-Ing Gerke erwähnen, die jederzeit mit fachlichen Diskussionen zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen haben. Unter anderem möchte ich auch Herrn Saur für seine fachliche Unterstützung im experimentellen Bereich danken.

Ich danke meinen Eltern und Schwiegereltern für die Unterstützung während der Zeit in München. Besonders herzlich danke ich meiner wunderbaren Ehefrau Katrein, die mir stets den Rücken frei hielt und in jeder Situation für mich da war.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
1.1	Duktiles Schädigungsverhalten	1
1.2	Stand der Wissenschaft	2
1.3	Inhalte dieser Arbeit	10
2	Kontinuumsmechanisches Modell	11
2.1	Kinematik	11
2.2	Thermodynamische Betrachtungen	18
2.3	Materialgleichungen	22
3	Numerische Implementierung	32
3.1	Grundlagen der Finite-Element-Methode	32
3.2	Numerische Integration	35
3.3	Schnittstelle USERMAT	53
4	Einaxiale Versuche	55
4.1	Beschreibung der Experimente	55
4.2	Bestimmung der Materialparameter	58
4.3	Schädigungsmodell nach Gurson-Tvergaard-Needleman	64
5	Biaxiale Versuche	70
5.1	Beschreibung der Experimente	70
5.2	Vergleich von Experimenten und numerischen Simulationen	73
6	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	105
7	Ausblick	108
	Literaturverzeichnis	110

1 Motivation

Die numerische Simulation von Materialien, Bauteilen und komplexen Tragstrukturen unter verschiedenen Belastungen hat durch die schnelle Weiterentwicklung im Soft- und Hardwarebereich eine große Bedeutung bekommen. Zum einen können so langwierige experimentelle Studien verhindert und zum anderen eine Annäherung an die Grenzen der Belastbarkeit des zu untersuchenden Bauteils erreicht werden. Dieser ressourcenschonende Prozess kann mit genaueren Kenntnissen des elastisch-plastischen Materialverhaltens, der Schädigungsentwicklung und der Entwicklung von Makrorissen weiter verbessert werden.

1.1 Duktile Schädigungsverhalten

In dieser Arbeit wird das duktile Schädigungsverhalten von Metallen genauer untersucht.

Jedes Material besteht aus Atomen, die durch Knoten, welche elektromagnetisch interagieren, zusammen gehalten werden [70]. Während der Belastung eines Körpers bewegen sich diese Atome in Relation zueinander. Dieser reversible elastische Prozess findet kontinuierlich statt.

Plastisches Materialverhalten tritt auf, wenn diese relative Bewegung der Atome eine Grenze überschreitet. Es führt zu irreversiblen Verschiebungen im Kristallgitter [70] sowie zu einer Verfestigung des Materials. Verschiedene Experimente [36, 53] deuten darauf hin, dass die Duktilität mit steigendem hydrostatischen Zug abfällt. Elastisches und plastisches Materialverhalten gründet daher auf zwei unterschiedlichen Phänomenen und können somit unabhängig voneinander betrachtet werden.

Jedes Material besitzt eine gewisse Vorschädigung [20]. Diese Initialschädigung ist auf mikroskopischer Ebene anhand von bereits vorhandenen Mikrodefekten identifizierbar, siehe Abb. 1.1a.

Unter einer eher hydrostatischen Zugbelastung beginnen vorhandene Mikroporen sich zu vergrößern, es entstehen neue Poren und es kommt letztendlich zu einem Zusammenschluss einzelner Poren, siehe Abb 1.1b. Diese resultieren schließlich zu einem Makroriss, welcher annähernd rechtwinklig zur Hauptbelastungsrichtung verläuft und zum endgültigen Versagen des Materials führt.

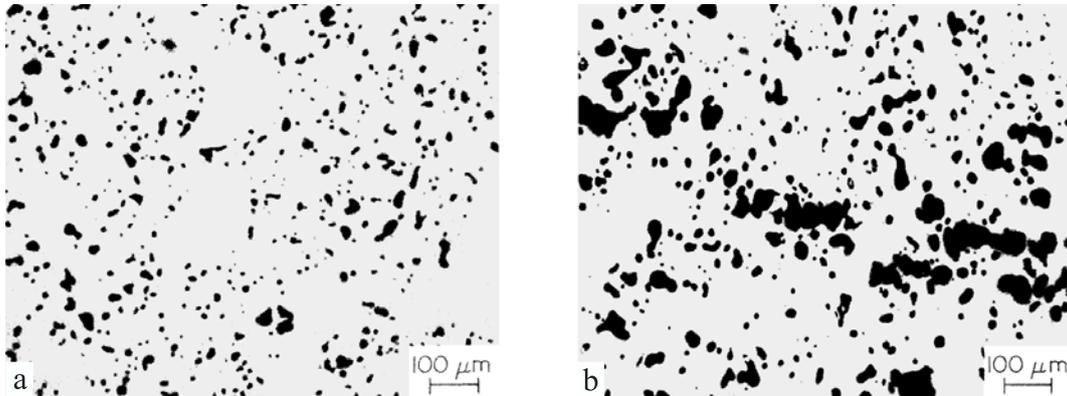


Abbildung 1.1: a) Initialschädigung bei einer Porosität von 7%, b) Mikrobruch nach Belastung [10]

Hingegen bewirkt eine eher gestaltändernde Belastung einen Zuwachs der Mikroscherrisse, welche ebenfalls zum endgültigen Versagen des Materials führen.

Schädigendes Materialverhalten entsteht durch das Lösen von Knoten zwischen den Atomen und führt zu einer Entfestigung des belasteten Materials [70].

Einsetzendes schädigendes Materialverhalten ist jedoch schwer zu erkennen. Verschiedene Möglichkeiten werden in [70] vorgestellt und bewertet. Die Messung der Abminderung des Elastizitätsmoduls bei einsetzender und fortschreitender Schädigung ist eine dieser vorgestellten Optionen.

Ein Makroriss, welcher auch als Makrobruch bezeichnet werden kann, ist eine Konzentration von den bereits beschriebenen Mikrodefekten.

Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Modell definiert die duktile Schädigung gemäß dem in Abb. 1.2 dargestellten schematischen Last-Verschiebungsdiagramm. Der reversible elastische Prozess findet kontinuierlich ab Beginn der Belastung statt. Es ist zu erwähnen, dass erst, wenn bereits plastisches Materialverhalten aufgetreten ist, schädigendes Materialverhalten folgt (Abb. 1.2). In dieser Arbeit wird einsetzendes schädigendes Materialverhalten angenommen, sobald in einem Kraft-Verschiebungsdiagramm die Kurven eines Experimentes mit Schädigung und einer elastisch-plastischen numerischen Simulation voneinander abweichen [20].

1.2 Stand der Wissenschaft

Ziel der Industrie ist es, Bauteile immer leichter und filigraner aber trotzdem robuster zu entwerfen. Dadurch können sich die verschiedenen Kosten wie zum Beispiel für Material, Logistik und Transport reduzieren. Um dies zu erreichen, muss das Bauteil bis an die Belastungsgrenze beansprucht werden. Somit können im Bauteil große inelastische Deformationen auftreten. Mit steigenden inelastischen Deformationen

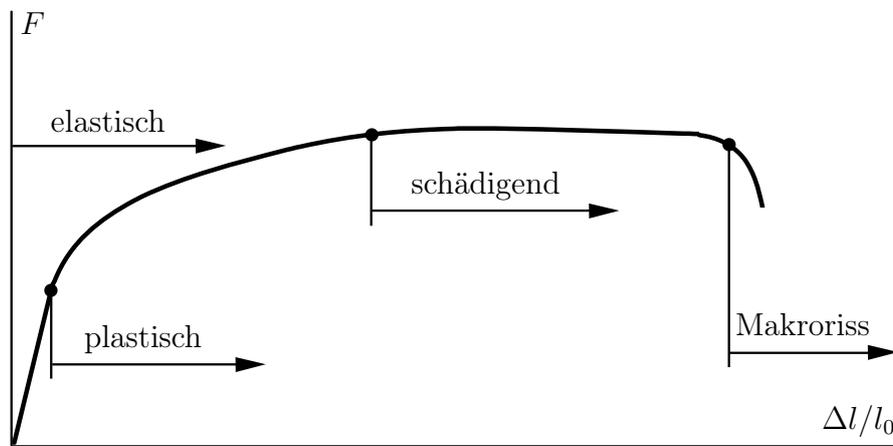


Abbildung 1.2: Schematisches Last-Verschiebungsdiagramm

können auch lokale Schädigungs- und Versagensmechanismen im Bauteil entstehen. Um diese Effekte in den numerischen Simulationen berücksichtigen und vorhersagen zu können, wurde in den letzten Jahrzehnten ein hoher wissenschaftlicher Aufwand betrieben.

1.2.1 Schädigungs- und Versagensmodelle

In der Literatur werden unterschiedliche Kontinuumsschädigungsmodelle vorgestellt, welche entweder auf einer phänomenologischen oder einer mikromechanischen Betrachtungsweise basieren.

Die phänomenologische Betrachtungsweise beschreibt die Auswirkungen der verschiedenen Mikrodefekte wie Wachstum und Zusammenschluss von Poren und Mikroscherrissen sowie die Entfestigung während des Schädigungsprozesses auf Makroebene. Basierend auf experimentellen Beobachtungen und numerischen Untersuchungen werden eine Schädigungsvariable und entsprechende Gesetze für die Formulierung des Materialverhaltens eingeführt [23].

Erstmalig stellt Kachanov [51] ein Kontinuumsschädigungsmodell vor, welches auf dem Konzept der effektiven Spannungen im geschädigten Material basiert und phänomenologisch begründet ist. In diesem wird auch eine Differenzierung nach Schädigung und Bruch angedeutet. Dieses Modell wird durch Rabotnov [88] modifiziert. Lemaitre [68, 69, 71] greift diese phänomenologische Idee für sein Kontinuumsschädigungsmodell auf. In diesem Modell wird für die Charakterisierung der isotropen Schädigung nur eine skalare Flächenvariable benutzt, welche im Falle einer Schädigung den Elastizitätsmodul abmindert. Im Weiteren wird das Prinzip der Dehnungsäquivalenz, welches das elastische Dehnungsverhalten eines geschädigten Materials mit dem eines ungeschädigten Materials gleichsetzt, in Kombination mit dem Prin-

zip der effektiven Spannungen verwendet. Lemaitre [68, 69, 71] koppelt lediglich das elastische Verhalten mit der Schädigung, verwendet jedoch nur eine Potentialfunktion zur Formulierung der Stoffgesetze für Plastizierung und Schädigung, was eine Differenzierung dieser beiden Materialverhalten einschränkt. Das anisotrope Kontinuumsschädigungsmodell von Lemaitre [72] ist eine Erweiterung von [68, 69] und verwendet einen Schädigungstensor zweiter Stufe, welcher lediglich Schädigung in Richtung der Hauptachsen betrachtet.

Auch das Modell von Murakami [79] greift auf das isotrope Lemaitre-Modell [68, 69] zurück und nimmt eine Erweiterung für anisotrope Schädigung vor. Der dabei verwendete symmetrische Schädigungstensor zweiter Stufe betrachtet wie in [72] nur orthotropes Schädigungsverhalten, da der antisymmetrische Anteil des Spannungstensors vernachlässigt wird. Dazu verwendet Murakami [79] eine Einteilung in drei orthogonale Flächen, deren Schädigung er jeweils mit einer Flächenvariablen definiert. Jedoch verwendet Murakami [79] in seiner Kinematik bereits eine geschädigte und eine fiktive ungeschädigte Konfiguration, die entweder belastet oder elastisch entlastet sind und über den Deformationsgradienten transformiert werden können. Auf Grundlage des phänomenologischen Kontinuumsschädigungsmodells von Lemaitre [68, 69] werden verschiedene Modifikationen vorgestellt. Diese unterscheiden sich unter anderem durch die Darstellung der Schädigungsvariablen. Eine ausführliche Beschreibung der jeweiligen Darstellungen findet sich unter anderem in [27, 56]. In der Kontinuumsschädigungsmechanik wird zunächst die Verwendung einer skalaren Flächenvariablen [47, 51, 62, 71] aufgrund der einfachen Schädigungsmessung und des einfachen Modells bevorzugt. Da diese isotrope Schädigungsvariable richtungsunabhängig ist, eignet sie sich für die numerische Simulation von Kugelporen, liefert jedoch für anisotrope Schädigungseinflüsse wie elliptische Mikroporen zweifelhafte Ergebnisse, da das Zusammenwachsen und Aufweiten von Poren sowie die Orientierung und die Länge des Bruchs von der Lastrichtung und den resultierenden Verzerrungen abhängen [15]. Numerische Simulationen [28, 29] zeigen, dass anisotrope Schädigungsmodelle höhere Festigkeiten prognostizieren als isotrope Schädigungsmodelle und dass mit steigenden nicht proportionalen Belastungen eine Beachtung des Richtungssinns des schädigenden Materialverhaltens für die Simulation des Bruchverhaltens wichtiger wird.

Um anisotrope Schädigungen beschreiben zu können, wird eine vektorielle Schädigungsvariable vorgestellt [55, 57, 58]. Die Schädigung eines repräsentativen Volumenelementes wird hierbei auf drei orthogonale Flächen projiziert. Neu entstehende Mikroscherrisse, welche nicht parallel zu einer der Projektionsebenen sind, können nur unzureichend in das Modell eingebunden werden, da eine einfache Addition fehlerhaft sein kann [15]. Daher werden zur Betrachtung des anisotropen schädigenden Materialverhaltens Schädigungstensoren zweiter Stufe eingeführt. Das Modell von Murakami [79] verwendet einen Schädigungstensor zweiter Stufe, welcher sich zu der

vektoriellen Darstellung von [55, 57, 58] effektiv nur um die Erhöhung des Rangs der tensoriellen Darstellung unterscheidet, jedoch für die Einbindung in die Theorie notwendig ist. Ein zusätzlicher Nachteil dieser beiden Schädigungsvariablen besteht darin, dass die Form der Mikroschädigungen vernachlässigt wird, da nur die Projektionen dieser betrachtet werden.

Weitere unterschiedliche symmetrische Schädigungstensoren zweiter Stufe werden unter anderem von Kachanov [52], Betten [11, 12], Voyiadjis und Kattan [100], Chow und Wang [28] sowie Brünig [15, 17] vorgestellt. Durch die Verwendung von Schädigungstensoren zweiter Stufe anstatt von vektoriellen Schädigungsvariablen reduziert sich zwar die Einfachheit eines Kontinuumsschädigungsmodells, jedoch ist eine komplexere Darstellung von Mikroschädigungen möglich. Hier muss ein guter Mittelweg gewählt werden, der sowohl eine komplexe Darstellung von Mikroschädigungen erlaubt als auch eine gewisse Übersichtlichkeit der Theorie gewährleistet. Durch die Verwendung von Schädigungstensoren vierter Stufe büßt das Modell von Chaboche [25, 26, 27] seine Simplität ein.

Im Gegensatz zu der phänomenologischen Betrachtungsweise, bei welcher man das Materialverhalten auf makroskopischer Ebene untersucht, werden bei einer mikroskopischen Herangehensweise mikromechanische Beobachtungen von Poren in einem elastisch-plastischen Material durchgeführt. Somit kann das Materialverhalten für Wachstum und Zusammenschluss von Poren und Mikroscherrissen genau abgebildet werden. Dies ermöglicht eine gute Implementierung in FE-Software. Da jedoch nur ein mikroskopischer Ausschnitt betrachtet und als Referenzobjekt angenommen wird, ist eine Modellierung komplexer Verteilungen von Mikrodefekten nicht möglich [23].

Erstmalig werden solche Betrachtungen von McClintock [78] vorgenommen. Dabei wird ein Körper mit elastisch-plastischen Materialverhalten, welcher zylindrische Poren mit kreisrundem oder elliptischen Querschnitt beinhaltet, auf Zug belastet. Ändert sich der Durchmesser der Pore, wird dies als Schädigung gedeutet und ist zugleich ein Kriterium für den Zusammenschluss von Poren. Diese Versuche zeigen eine starke Abhängigkeit der numerischen Ergebnisse von der Spannungstriaxialität. Fast parallel dazu führen Rice und Tracey [89] ähnliche mikromechanische Untersuchungen durch. In deren Modell werden kugelförmige Poren in einem starr elastischen und plastisch inkompressiblen Material betrachtet. Dabei wird entweder idealplastisches Verhalten oder eine lineare Verfestigung angenommen. Das Porenwachstum kann bei diesen Simulationen unter verschiedenen Spannungszuständen untersucht werden.

Basierend auf diesen grundlegenden Ideen führt Needleman [82] mikromechanische Untersuchungen mit einem elastisch-plastischen Material durch, um den Einfluss von Porenwachstum und Porenzusammenschluss auf das duktile Schädigungsverhalten zu untersuchen. Dabei werden kreisrunde zylindrische Poren periodisch angeordnet

und deren Verhalten bei großen Verzerrungen im ebenen Verzerrungszustand untersucht.

Zur Beschreibung duktiler Schädigung hat das mikromechanische Modell von Gurson [45] eine besondere Bedeutung, da die meisten folgenden mikromechanischen Modelle auf diesem basieren. In dem Modell von Gurson [45] wird die Schädigung mit einer Volumenvariablen, der Porosität, charakterisiert. Für das homogene inkompressible Matrixmaterial wird starr-plastisches Material verwendet. Somit sind beim duktilen Bruch große plastische Dehnungen vorhanden. Gurson [45] betrachtet sowohl eine kreisrunde zylindrische als auch eine kugelförmige Pore in einem repräsentativen Volumenelement und stellte für jede Porengeometrie eine Fließbedingung auf. Diese sind jeweils Erweiterungen der von-Mises-Fließbedingung. Da Gurson [45] keine Abgrenzung zwischen Dehnung infolge Plastizierung und infolge Schädigung vornimmt, existiert in seinem Modell nur eine Fließbedingung und keine Schädigungsbedingung. Das Modell ist nicht in die Kontinuumsmechanik eingebunden und basiert teilweise auf Annahmen, die so eine analytische Lösung erlauben. Die Abminderung des Elastizitätsmoduls bei einsetzender Schädigung wird nicht berücksichtigt.

In dem Modell von Gurson [45] wird nur das Porenwachstum betrachtet. Daher wird von Needleman und Rice [83] ein Term zur Beschreibung der Porenneubildung eingeführt. Dies ist jedoch ein rein phänomenologischer Ansatz, der zu einer stochastischen Formulierung führt, welche durch Chu und Needleman [30] definiert wird. Durch Tvergaard und Needleman [84, 99] findet eine Erweiterung der Fließbedingung von Gurson [45] statt, sodass neben dem Porenwachstum auch die Porenneubildung und der Zusammenschluss von Mikroporen berücksichtigt wird. Das Gurson-Tvergaard-Needleman-Modell (GTN) [84, 99] ist relativ einfach und wird nach wie vor in kommerziellen FE-Programmen verwendet. Das GTN-Modell wurde bisher vielfach modifiziert. Unter anderem haben Nahshon und Hutchinson [81] sowie Nielsen und Tvergaard [87] eine Erweiterung zur Betrachtung von Spannungszuständen, welche durch Schermechanismen charakterisiert sind, vorgenommen.

Das rein phänomenologische Modell von Brünig [13, 15] kann nur das elastisch-plastische Materialverhalten darstellen. Um zusätzlich das schädigende Verhalten abbilden zu können, werden mikromechanische Betrachtungen vorgenommen. Dies führte zu dem phänomenologischen Modell [17, 18], welches mikromechanisch motiviert ist und auf welchem die in dieser Arbeit vorgestellte Theorie basiert. Um den Einfluss des Spannungszustandes auf das schädigende Materialverhalten noch besser abbilden zu können, werden weitere mikromechanische Betrachtungen durchgeführt [19, 20, 23, 24]. Somit ist dieses Modell, genau wie das GTN-Modell, ein Mehrskalenmodell, verwendet jedoch, wie viele phänomenologische Modelle, eine tensorielle Schädigungsvariable zweiten Grades.

Das Modell von Brünig [22] ist in der Lage, elastisch-plastisches Verhalten bis zum

Einsetzen der Schädigung unter Berücksichtigung des gesamten Spannungszustandes abzubilden. Ab wann es sich um einen Makrobruch (Abb. 1.2) handelt, kann nach [23, 24] durch eine Bruchbedingung definiert werden.

In dieser Arbeit wird das Modell von Brünig [23, 24] so modifiziert, dass nun elastisch-plastisch-schädigendes Verhalten ebenfalls unter Berücksichtigung des gesamten Spannungszustandes abgebildet werden kann. Es werden auch verschiedene Bruchbilder ausgewertet, die zu der Entwicklung einer Bruchbedingung beitragen können.

1.2.2 Spannungstriaxialitäten und Lodeparameter

Für die Vorhersage der Schädigungsentwicklung und des Versagens von Bauteilen hat der dreidimensionale Spannungszustand eine große Bedeutung [23]. Für isotrope Materialien kann der Spannungszustand im allgemeinen durch die drei Hauptnormalspannungen dargestellt werden. Es ist auch eine Darstellung unter Verwendung von drei Invarianten möglich. Diese sind die erste Invariante des Spannungstensors, welche zur Spannungstriaxialität korrespondiert, die zweite Invariante des Spannungsdeviators, welche direkt mit der von-Mises-Vergleichsspannung verknüpft ist und somit die Spannungsintensität darstellt, sowie die dritte Invariante des Spannungsdeviators, welche auch durch den Lodeparameter formuliert werden kann.

Da es eine Vielzahl von Lastkombinationen gibt, bei der unterschiedliche Spannungszustände die gleichen Spannungstriaxialitäten hervorrufen, darf zur eindeutigen Charakterisierung des Spannungszustandes der Lodeparameter nicht vernachlässigt werden. Experimentelle und numerische Versuche [5, 8, 81, 104] haben gezeigt, dass Schädigungs- und Versagensmodelle, die lediglich die Spannungstriaxialität als ergänzenden Parameter zur Identifizierung des dreidimensionalen Spannungszustandes nutzen, das Schädigungs- und Versagensverhalten bei einer dreidimensionalen Belastung meist nicht ausreichend genau prognostizieren können, was im Besonderen für kleine positive oder negative Spannungstriaxialitäten, bei denen durch die hohen Schubanteile kaum Schädigung durch Porenaufweitung stattfindet, gilt. Die Bedeutung des Lodeparameters bei kleinen Spannungstriaxialitäten auf das Schädigungs- und Versagensverhalten wurde in Experimenten und korrespondierenden numerischen Simulationen [8, 31, 37] aufgezeigt.

Weitere Untersuchungen [6, 9] zeigen die Beziehung zwischen dem Lodeparameter und einigen Merkmalen des duktilen Versagensprozesses. So entwickeln sich zum Beispiel die Porenform, der Verlauf und die Form von Scherbändern sowie lokale Deformationen je nach Lodeparameter unterschiedlich [23]. Der dreidimensionale Spannungszustand und dessen Einfluss auf das duktile Versagen kann daher nicht allein durch die Spannungstriaxialität und die Spannungsintensität dargestellt werden [31, 40, 41, 42, 54].

Die Ergebnisse dieser Arbeit sollen zeigen, dass auch die Berücksichtigung des Lodeparameters notwendig ist, um genauere elastisch-plastisch-schädigende numerische Simulationen durchführen zu können.

1.2.3 Versuchskörper

In vielen Ingenieurdisziplinen ist es notwendig, die Eigenschaften von Metallen zu kennen. Mit standardisierten Zugproben können so für die verschiedenen Metalle die Streckgrenze, die Zugfestigkeit und die Bruchdehnung ermittelt werden.

Um elastisches und elastisch-plastisches Materialverhalten abbilden zu können, werden Experimente und begleitende numerische Versuche durchgeführt. Anfänglich reduzierten sich diese Experimente auf einfache ungekerbte Zugproben. Man erkannte jedoch schnell, dass diese Versuche nicht ausreichen, um schädigendes Materialverhalten untersuchen zu können, da sie nur einen Spannungszustand abdecken.

Mit unterschiedlich gekerbten zylindrischen Zugstäben untersuchen Becker et al. [10] die Entwicklung des Porenwachstums. Um den Einfluss des Spannungszustandes auf das Schädigungs- beziehungsweise das Bruchverhalten zu untersuchen, werden unter anderem auch von Bao und Wierzbicki [6], Bai und Wierzbicki [5], Gao et al. [42], Gao et al. [41] und Brüinig et al. [20] Versuche mit unterschiedlich gekerbten Zugstäben durchgeführt.

Mit flachen unterschiedlich gekerbten Zugproben können Bai und Wierzbicki [5] im Vergleich mit den gekerbten zylindrischen Zugstäben das Verhalten des Lodeparameters untersuchen. Auch Gao et al. [41, 42] verwenden flache Zugproben, um die Abhängigkeit des schädigenden Materialverhaltens vom Spannungszustand zu analysieren. Die bisher aufgezeigten Experimente unterscheiden sich zwar bei den Werten des Lodeparameters, jedoch sind die Spannungstriaxialitäten annähernd gleich.

Durch eine Druckbelastung von runden Zylindern mit unterschiedlichen Höhen und Durchmessern sowie mit gekerbten Druckkörpern können Bao und Wierzbicki [6] negative Spannungstriaxialitäten erzeugen. Auch Bai und Wierzbicki [5], Li et al. [73] und Fourmeau et al. [39] nutzen Druckzylinder, um den Einfluss des Spannungszustandes auf das Schädigungsverhalten zu verifizieren.

Eine weitere Möglichkeit, um niedrige Spannungstriaxialitäten zu erhalten, sind Zugproben, bei denen aufgrund ihrer Geometrie Schermechanismen im zentralen Bereich des Versuchskörpers auftreten. Diese Scherversuche werden unter anderem von Brüinig et al. [20], Gao et al. [42], Gao et al. [41], Gruben et al. [44] und Fourmeau et al. [39] mit einer zur Zugrichtung parallelen Scherfuge verwendet. Bao und Wierzbicki [6] sowie Li et al. [73] nutzen neben diesen Scherversuchen auch alternative Proben bei denen die Sollbruchkante nicht parallel zur Zugrichtung ist. Jedoch ist die Richtung der Lastaufbringung bei beiden Varianten vorgegeben und nicht veränderbar. Ein ähnliches Prinzip verfolgt der sogenannte „Butterfly“-Versuchskörper, der von

Bai und Wierzbicki [5], Dunand und Mohr [37] sowie von Gruben et al. [44], welche diesen zur Verifizierung verschiedener Bruchkriterien nutzen, untersucht wird. Bei diesem Versuchsaufbau kann der Winkel zwischen Sollbruchkante und Lastaufbringungsrichtung variiert werden. Somit können mit diesem uniaxialen Versuchsaufbau im zentralen Bereich reines Scheren, reiner Zug und verschiedene Scher-Zug-Lastkombinationen aufgebracht werden. Bei der Scher-Zug-Lastkombination wird die Verschiebung nur auf einer Achse aufgebracht. Somit ist das Verhältnis der Verschiebungen für die Zug- sowie die Scherbelastung konstant, jedoch nicht das Verhältnis der Kräfte. Dies führt dazu, dass sich die Spannungstriaxialität im zentralen Bereich des Versuchskörpers für die jeweilige Lastkombination im Verlauf der Lastaufbringung verändert.

Um bei dem gesamten Belastungsprozess eine gleichbleibende Spannungstriaxialität und einen gleichbleibenden Lodeparameter im zu untersuchenden Teil des Versuchskörpers zu erhalten, können multiaxiale Tests hilfreich sein. In [59, 61] werden verschiedene Möglichkeiten für multiaxiale Versuchsaufbauten vorgestellt.

Barsoum und Faleskog [8] bringen auf ein beidseitig gekerbtes Rohr eine Zug- und Torsionsbelastung auf. Je nach Größe der einzelnen Belastungen können unterschiedliche positive Spannungstriaxialitäten erzeugt werden.

Versuche mit Kreuzversuchen und biaxialen Maschinen werden unter anderem von Makinde et al. [77], Demmerle und Boehler [34] sowie Lecompte et al. [63] vorgestellt, wobei sich die verwendeten Geometrien und Materialien unterscheiden. Kulawinski et al. [60] verwenden Kreuzproben, um das Spannungs-Dehnungsverhalten unter biaxialen Belastungen zu untersuchen. Desweiteren nehmen sie mit einem Rasterelektronenmikroskop Bilder von den Bruchflächen auf, um Aussagen über die Martensitbildung treffen zu können.

Auch Barsoum und Faleskog [8] sowie Li et al. [73] untersuchen die Bruchflächen der Versuchskörper mit einem Rasterelektronenmikroskop, um den Zusammenhang zwischen Spannungstriaxialität und Versagensart herzustellen.

In dieser Arbeit wird ein neuartiger biaxialer Versuchskörper vorgestellt, der den positiven und negativen Raum der Spannungstriaxialitäten abdeckt. Zugleich verändern sich die Spannungstriaxialitäten vom Beginn bis zum Ende der Belastung im zentralen Bereich des Versuchskörpers kaum, da die Lastkombination kontinuierlich konstant bleibt. Die numerischen Simulationen werden zusätzlich mit Rasterelektronenmikroskopaufnahmen der Bruchflächen verglichen, um einen genauen Zusammenhang zwischen Spannungstriaxialität und Versagensart mit nur einem Versuchskörper zu ermitteln.

1.3 Inhalte dieser Arbeit

In Rahmen dieser Arbeit wird ein den Einfluss des Spannungszustands berücksichtigendes, phänomennologisches, mikromechanisch motiviertes Kontinuumsschädigungs- und Versagensmodell vorgestellt, mit welchem man in der Lage ist, das elastisch-plastisch-schädigende Materialverhalten von Bauteilen und komplexen Tragstrukturen prognostizieren zu können.

Die grundlegende Theorie wird in Kap. 2 erläutert. Im Kap. 3 wird die numerische Implementierung in die Finite-Element-Software ANSYS sowie die Umsetzung der numerischen Simulationen vorgestellt. Die Ermittlung der für die verwendeten Theorie notwendigen Materialparameter wird anhand von ungekerbten und unterschiedlich gekerbten Zugproben in Kap. 4 erläutert. Anschließend werden vergleichende elastisch-plastisch-schädigende numerische Simulationen mit dem hier vorgestellten Modell und dem Gurson-Tvergaard-Needleman-Modell durchgeführt. Ein neuer biaxialer Versuchskörper und eine neue biaxiale Versuchsmaschine werden in Kap. 5 vorgestellt. Anhand der experimentellen Ergebnisse werden die in Kap. 4 ermittelten Materialparameter evaluiert und gegebenenfalls verbessert. Die Vergleiche zwischen den numerischen Simulationen und den Experimenten werden durch die Verwendung von Rasterelektronenmikroskopaufnahmen unterstützt. In Kap. 6 werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und Schlussfolgerungen gezogen. Ein Ausblick auf eine mögliche weitere Modifizierung von Versuchskörper und der vorgestellten Theorie wird in Kap. 7 gegeben.

2 Kontinuumsmechanisches Modell

2.1 Kinematik

2.1.1 Kinematische Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Abschnitt werden die kinematischen Größen der Kontinuumsmechanik [1] eingeführt, die zur Erfassung der gesamten hier vorgestellten Theorie notwendig sind. Die Darstellung dieser erfolgt in gemischtvarianter Schreibweise [32]. Die Basen der Ausgangskonfiguration $\overset{\circ}{\mathbf{g}}_i$ und der Momentankonfiguration \mathbf{g}_i sind unterschiedlich. Mit Hilfe der Basen lassen sich die Metrikoeffizienten

$$\overset{\circ}{G}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{g}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_j, \quad (2.1)$$

$$G_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad (2.2)$$

$$G^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad (2.3)$$

und

$$\overset{\circ}{G}^{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{g}}^i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}^j \quad (2.4)$$

sowie der materielle Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{g}}^i, \quad (2.5)$$

welcher eine Starrkörperrotation und eine Streckung eines Körpers von der Ausgangskonfiguration zur Momentankonfiguration beschreibt, formulieren. Der symmetrische, auf die Momentankonfiguration bezogene Metriktransformationstensor

$$\mathbf{Q} = Q^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{B}\mathbf{G}, \quad (2.6)$$

ist das Tensorprodukt aus dem linken Cauchy-Green-Tensor \mathbf{B} und dem Metriktenor $\mathbf{G} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i$, wobei sich die Komponenten $Q^i_j = \overset{\circ}{G}^{ik} G_{kj}$ mit den Metrikoeffizienten ausdrücken lassen. Der auf die Momentankonfiguration bezogene materiell objektive Henkysche Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q} \quad (2.7)$$

kann unter Verwendung von \mathbf{Q} dargestellt werden.

2.1.2 Ungeschädigte Konfigurationen

Die Abb. 2.1 zeigt die verschiedenen Konfigurationen und ihren Zusammenhang zueinander. Dieses makroskopische kinematische Grundgerüst wurde von Brüning [15] vorgestellt und durch [17, 18] ergänzt. In diesem Abschnitt wird der untere ungeschädigte Teil der Abb. 2.1 behandelt, da dieser den elastisch-plastischen Anteil der Deformation darstellt. Größen, die zu der ungeschädigten Konfiguration gehören, werden im Folgenden immer mit einem “ $\bar{}$ ” gekennzeichnet. Die unverformte, ungeschädigte Konfiguration bzw. effektive Ausgangskonfiguration $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ wird durch die Metrikkoeffizienten $\overset{\circ}{E}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_j$ mit den Basisvektoren der effektiven Ausgangskonfiguration $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$ beschrieben, die elastisch-plastisch verformte Konfiguration bzw. effektive Momentankonfiguration \mathcal{E} durch die Metrikkoeffizienten $E_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ mit den Basisvektoren der effektiven Momentankonfiguration \mathbf{e}_i . Durch eine elastische Entlastung

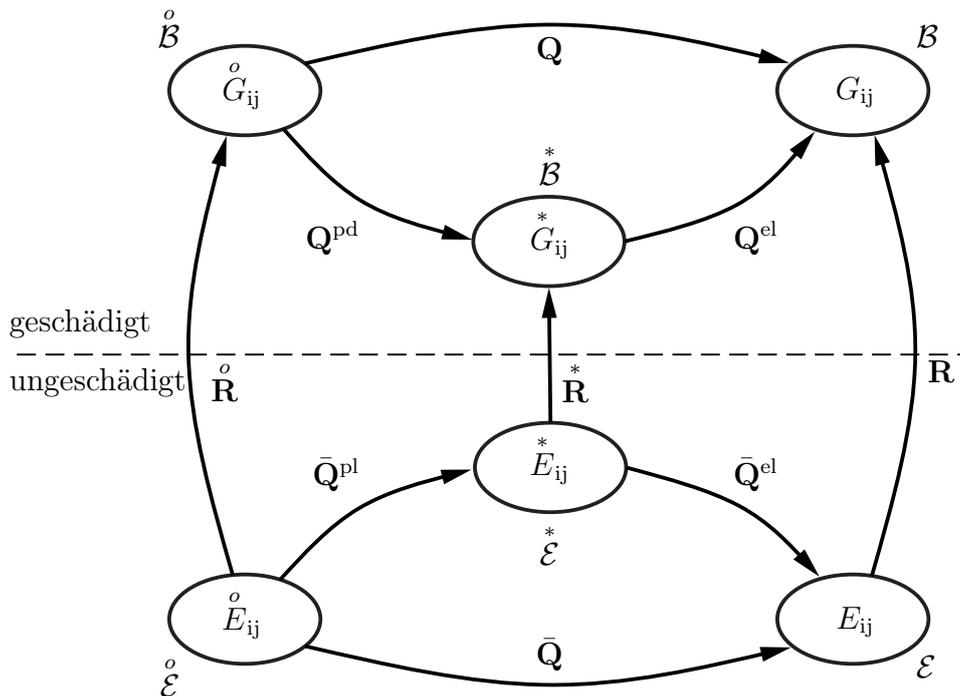


Abbildung 2.1: Geschädigte und ungeschädigte Konfigurationen mit Metrikkoeffizienten und Metriktransformationstensoren

entsteht ein spannungsfreier Zustand. Dieser wird in der Kinematik durch die Zwischenkonfiguration $\overset{*}{\mathcal{E}}$ charakterisiert und besitzt alle plastischen Verformungen der ungeschädigten Momentankonfiguration. In der Kinematik kann diese Aufspaltung mit der von Lehmann [64, 65] vorgestellten multiplikativen Zerlegung des effektiven

ungeschädigten Metriktransformationstensors

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}}^{\text{pl}} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \quad (2.8)$$

in elastische und plastische Anteile beschrieben werden. Lehmanns [66, 67] Idee wird von Brünig [13] aufgegriffen und sukzessive erweitert. Das Verhalten der ungeschädigten Konfigurationen für große elastisch-plastische Verzerrungen wird in [14] ausführlich dargestellt.

Die Metrikoeffizienten $\overset{*}{E}_{ij}$ dieser Zwischenkonfiguration werden mit den Basisvektoren $\overset{*}{\mathbf{e}}_i$ formuliert.

Alle ungeschädigten Metriktransformationstensoren beziehen sich auf die momentane verformte Konfiguration \mathcal{E} und werden mit den kovarianten und kontravarianten Basisvektoren \mathbf{e}_i und \mathbf{e}^j ausgedrückt. Es folgt

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\text{u}} = \bar{Q}_{,j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j, \quad (2.9)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\text{u}}^{\text{el}} = (\bar{Q}^{\text{el}})_{,j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.10)$$

und

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\text{u}}^{\text{pl}} = (\bar{Q}^{\text{pl}})_{,j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j. \quad (2.11)$$

Die gesamte Kinematik bezieht sich auf die ungeschädigten und die geschädigten Konfigurationen. Um diese in Kap. 2.1.4 einheitlich betrachten zu können, ist eine Transformation der ungeschädigten Konfigurationen auf die geschädigte Basis \mathbf{g}_i und \mathbf{g}^j notwendig. Die Basen lassen sich durch den Schädigungsdeformationsgradienten

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{e}^i \quad (2.12)$$

transformieren. Die neu eingeführten, in der Kinematik verwendeten Tensoren lauten

$$\bar{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{Q}}_{\text{u}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{\circ}{E}{}^{ik} E_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.13)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{Q}}_{\text{u}}^{\text{el}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{*}{E}{}^{ik} E_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.14)$$

und

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\text{pl}} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{Q}}_{\text{u}}^{\text{pl}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{\circ}{E}{}^{ik} \overset{*}{E}{}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.15)$$

Der logarithmische Hencky-Verzerrungstensor für ungeschädigte Konfigurationen

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{Q}} = \bar{A}_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.16)$$

und der elastische gemischtvariante logarithmische Hencky-Verzerrungstensor für ungeschädigte Konfigurationen

$$\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \frac{1}{2} (\ln \bar{Q}^{\text{el}})_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = (\bar{A}^{\text{el}})_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.17)$$

werden aus den entsprechenden Metriktransformationstensoren ermittelt. Mit (2.13) erhält man die unsymmetrische Oldroyd-Rate

$$\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \overset{\circ}{E}{}^{\text{ik}} \dot{E}_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.18)$$

des ungeschädigten Metriktransformationstensor $\bar{\mathbf{Q}}$. Die symmetrische Verzerrungsrate ist definiert als

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}. \quad (2.19)$$

und kann mit (2.8) durch multiplikative Aufspaltung in elastische

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{\text{el}} \quad (2.20)$$

und plastische Anteile

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}-1} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{pl}-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{\text{pl}} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \quad (2.21)$$

zerlegt werden. Es folgt die Beziehung

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}} = \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} + \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}}. \quad (2.22)$$

Es ist nicht erforderlich, einen plastischen Verzerrungstensor zu formulieren. Inelastische Verzerrungstensoren stellen keine thermodynamische Zustandsgröße dar. Die Bestimmung der plastischen Rate $\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}}$ ist daher ausreichend [65].

2.1.3 Geschädigte Konfigurationen

Die geschädigte Ausgangskonfiguration $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ wird durch die Metrikoeffizienten $\overset{\circ}{G}_{ij}$ (2.1) beschrieben (Abb. 2.1), die geschädigte Momentankonfiguration \mathcal{B} durch die Metrikoeffizienten G_{ij} (2.2). Im geschädigten Zustand sind neben den elastischen und plastischen Anteilen auch schädigende Anteile vorhanden. Da lediglich der elastische Prozess reversibel ist, findet eine multiplikative Aufspaltung des Metriktrans-

formationstensors

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\text{pd}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (2.23)$$

in elastische und inelastische Anteile statt. Die geschädigte und plastisch deformierte Zwischenkonfiguration \mathcal{B}^* wird durch die Metrikoeffizienten $G_{ij}^* = \mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{g}_j^*$ beschrieben. Die drei Metriktransformationstensoren \mathbf{Q} (2.6),

$$\mathbf{Q}^{\text{el}} = (Q^{\text{el}})_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = G^{ik} G_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.24)$$

und

$$\mathbf{Q}^{\text{pd}} = (Q^{\text{pd}})_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{G}^{ik} \overset{\circ}{G}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.25)$$

der geschädigten Konfiguration beziehen sich auf die momentane verformte geschädigte Konfiguration \mathcal{B} .

Wie in Kap. 2.1.2 ermittelt sich der logarithmische Hencky-Verzerrungstensor für geschädigte Konfigurationen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q} = \frac{1}{2} (\ln Q)_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = A_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.26)$$

und der elastische logarithmische Hencky-Verzerrungstensor für geschädigte Konfigurationen

$$\mathbf{A}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q}^{\text{el}} = \frac{1}{2} (\ln Q^{\text{el}})_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = (A^{\text{el}})_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.27)$$

aus den jeweiligen Metriktransformationstensoren. Die unsymmetrische Oldroyd-Rate von \mathbf{Q} ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{Q}} = \overset{\circ}{G}^{ik} \dot{G}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.28)$$

Somit kann die symmetrische Verzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}} \quad (2.29)$$

definiert werden. Mit (2.23) wird $\dot{\mathbf{H}}$ durch additive Aufspaltung in elastische

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \dot{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \quad (2.30)$$

und inelastische Komponenten

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{pd}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \mathbf{Q}^{\text{pd}-1} \dot{\mathbf{Q}}^{\text{pd}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (2.31)$$

zerlegt. Es folgt die Beziehung

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \dot{\mathbf{H}}^{\text{pd}} \quad (2.32)$$

In Kap. 2.1.2 wurde bereits aufgezeigt, dass nur eine ungeschädigte plastische Verzerrungsrate $\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}}$ und kein plastischer Verzerrungstensor formuliert werden muss. Für die inelastische geschädigte Verzerrungsrate $\dot{\mathbf{H}}^{\text{pd}}$ gilt dies ebenfalls.

2.1.4 Gesamte Deformation

In jedem beliebigen Körper kann schon vor einer möglichen Belastung ein Schädigungszustand durch mikroskopische Defekte existieren. Daher sind die geschädigten Konfigurationen \mathcal{B} und $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ aus Abb. 2.1 die einzigen real existierenden Konfigurationen. Die ungeschädigten Konfigurationen \mathcal{E} , $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ und $\overset{*}{\mathcal{E}}$ sowie die geschädigte Zwischenkonfiguration $\overset{*}{\mathcal{B}}$ sind fiktive Konfigurationen, die zur Formulierung der von Brüinig [15, 17, 18] vorgestellten Theorie benötigt werden (Abb. 2.1) aber real nicht existieren. Vergleichbare Ideen veröffentlichten Murakami [79], Betten [11, 12] sowie Voyiadis und Park [101], welche ebenfalls mit fiktiven ungeschädigten Konfigurationen arbeiten.

Durch zunehmende Schädigung, hervorgerufen durch das isotrope Aufweiten von Poren, deren Zusammenwachsen und deren Ausrichtung sowie die Bildung von Mikroscherrissen, kommt es zu einer Reduzierung der elastischen Steifigkeit. Die Schädigungen werden mit den auf die geschädigten Konfigurationen bezogenen Schädigungstensoren

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}} = \overset{\circ}{R}_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{E}^{\text{ik}} \overset{\circ}{G}_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.33)$$

$$\overset{*}{\mathbf{R}} = \overset{*}{R}_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{*}{E}^{\text{ik}} \overset{*}{G}_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.34)$$

und

$$\mathbf{R} = R_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = E^{\text{ik}} G_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.35)$$

beschrieben (Abb. 2.1). Der Metriktransformationstensor $\overset{\circ}{\mathbf{R}}$ repräsentiert den anfänglich vorhandenen Schädigungszustand. Die Tensoren $\overset{*}{\mathbf{R}}$ und \mathbf{R} sind Zustandsgrößen, welche den momentanen Schädigungszustand des Materials charakterisie-

ren. Eine Transformation durch $\bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}}$ und \mathbf{Q}^{el} von den Momentankonfigurationen \mathcal{E} und \mathcal{B} ergibt die unbelasteten Zwischenkonfigurationen \mathcal{E}^* und \mathcal{B}^* . Eine Transformation zwischen diesen beiden Zwischenkonfigurationen, welche die anfängliche und deformationsinduzierte Schädigung unabhängig von den elastischen Deformationen beschreibt, stellt \mathbf{R} dar [17]. Hingegen hängt \mathbf{R} von der gesamten Deformation des Körpers ab. Da in der gesamten Deformation auch reversible Änderungen der internen Struktur vorhanden sind, ist \mathbf{R} daher bei moderaten oder großen elastischen Deformationen nicht als Zustandsvariable der Schädigung geeignet. Der korrespondierende logarithmische Schädigungsverzerrungstensor

$$\mathbf{A}^{\text{da}} = \frac{1}{2} \ln^* \mathbf{R} \quad (2.36)$$

wird daher in Bezug auf den Schädigungstensor der spannungsfreien Zwischenkonfigurationen

$$\mathbf{R}^* = \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \quad (2.37)$$

formuliert. Dieser Verzerrungstensor (2.36) beschreibt alle Verzerrungen durch Schädigungen einschließlich der vorhandenen Verzerrungen aufgrund der Initialschädigung.

Der Metriktransformationstensor

$$\mathbf{Q} = \overset{\circ}{\mathbf{R}}^{-1} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{pl}*} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (2.38)$$

charakterisiert durch die Einführung einer multiplikativen Aufspaltung (Abb. 2.1) die komplette Deformation infolge Belastung zwischen der tatsächlich existierenden Konfigurationen $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ und \mathcal{B} . Wie in Kap. 2.1.2 und Kap. 2.1.3 wird die Verzerrungsrate mit der Oldroyd-Ableitung ermittelt (2.29). Unter Verwendung von (2.21), (2.30) und (2.38) und der schädigenden Verzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \frac{1}{2} \overset{*}{\mathbf{R}}^{-1} \dot{\overset{*}{\mathbf{R}}} \quad (2.39)$$

kann die Verzerrungsrate der gesamten Deformation

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \mathbf{R}^{-1} \dot{\overset{\circ}{\mathbf{H}}}^{\text{pl}} \mathbf{R} + \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (2.40)$$

additiv aufgespalten werden.

Die mechanische Äquivalenz der geschädigten und ungeschädigten Momentankonfiguration [79] besagt, dass die elastischen Makroverzerrungen nur durch elastische

Verzerrungen des Matrixmaterials entstehen. Mit

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \mathbf{Q}^{\text{el}}. \quad (2.41)$$

folgt, dass die elastischen Verzerrungstensoren

$$\mathbf{A}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} \quad (2.42)$$

und die elastischen Verzerrungsraten

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} \quad (2.43)$$

jeweils gleich sind.

2.2 Thermodynamische Betrachtungen

Bei duktilen Metallen kann nichtlineares Materialverhalten auftreten, das mit der Plastizitätstheorie und der Kontinuumschädigungsmechanik beschrieben werden kann.

Die Spannungen der aktuellen geschädigten Konfiguration werden mit dem Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\mathbf{T} = T_{;j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.44)$$

formuliert. Der symmetrische effektive Spannungstensor

$$\mathbf{S} = S_{;j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.45)$$

stellt die Spannungen der fiktiven ungeschädigten Konfiguration dar. Mit dem Schädigungsdeformationsgradienten (2.12) lässt sich der effektive Spannungstensor

$$\bar{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = S_{;j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.46)$$

auch im Bezug auf die Basen der geschädigten Konfiguration \mathcal{B} formulieren.

2.2.1 Ungeschädigte Konfigurationen

Plastisches Fließen ist bei Metallen das Resultat eines Versetzungsprozesses im Kristallgitter entlang bestimmter Gleitebenen und wird durch lokale Schubspannungen auf der Mikroskala hervorgerufen [4]. Experimentelle Beobachtungen zeigen, dass elastisches Verhalten durch das plastische Fließen nicht beeinflusst wird. Somit kann

elastisches und plastisches Verhalten für eine theoretische Anschauung getrennt werden. Durch additive Zerlegung der effektiven spezifischen freien Energie in elastische und plastische Anteile

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}^{\text{el}}(\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}) + \bar{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \quad (2.47)$$

lässt sich dies umsetzen. Der elastische Anteil wird in Abhängigkeit von dem ungeschädigten elastischen logarithmischen Hencky-Verzerrungstensor (2.17) formuliert. Der plastische Anteil wird in Abhängigkeit von der plastischen internen Variablen γ , welche die plastische Vergleichsdehnung darstellt, beschrieben.

Um Materialgleichungen des elastisch-plastischen Deformationsverhaltens des ungeschädigten Matrixmaterials zu formulieren, nutzt man Größen der ungeschädigten Konfiguration. Aus dem Skalarprodukt des effektiven Spannungstensors $\bar{\mathbf{T}}$ (2.46) und der symmetrischen Verzerrungsrate $\dot{\bar{\mathbf{H}}}$ (2.19) ergibt sich die spezifische Formänderungsenergie [13]

$$\rho_0 \dot{w} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}. \quad (2.48)$$

Aufgrund der verwendeten Kinematik (2.22) lassen sich beide Seiten der Gleichung durch additive Zerlegung in elastische und plastische Anteile trennen

$$\rho_0 \dot{w} = \rho_0 \dot{w}^{\text{el}} + \rho_0 \dot{w}^{\text{pl}} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} + \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}}. \quad (2.49)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik [76] (Clausius-Duhem-Ungleichung)

$$\dot{w} - \dot{\phi} \geq 0 \quad (2.50)$$

wird unter Verwendung von (2.49) und (2.47) zu

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} + \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}} - \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{A}}}^{\text{el}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \geq 0. \quad (2.51)$$

Betrachtet man lediglich die elastischen reversiblen Anteile von (2.51), ergibt sich die Gleichung

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} - \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{A}}}^{\text{el}} = 0, \quad (2.52)$$

welche mit (2.20) als

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{\text{el}} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{\text{el}} \quad (2.53)$$

dargestellt werden kann. Durch Umstellung lässt sich der effektive Spannungstensor

$$\bar{\mathbf{T}} = \rho_0 \left(\frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}}} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} + \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}}} \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \right) \quad (2.54)$$

ermitteln. Mit Annahme, dass das Matrixmaterial der ungeschädigten Konfiguration isotrope elastische Materialeigenschaften aufweist [15, 66] und in Bezug auf den elastischen logarithmischen Hencky-Verzerrungstensor (2.17) resultieren die Beziehungen

$$\bar{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \quad (2.55)$$

und

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{A}}}^{\text{el}}. \quad (2.56)$$

Durch Abzug der elastischen Anteile von (2.51) entsteht die effektive Dissipationsfunktion (Kelvin-Ungleichung)

$$\bar{D} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}} - \rho_0 \dot{\bar{\phi}}^{\text{pl}}(\gamma) \geq 0, \quad (2.57)$$

welche eine positive plastische Dissipation darstellt. Das Fließgesetz wird daher für $\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}}$ (2.21) formuliert und muss die Restriktion (2.57) erfüllen.

2.2.2 Geschädigte Konfigurationen

Wie in Kap. 2.2.1 bereits beschrieben, hat das plastische Fließen im Gegensatz zur Entwicklung von Mikroporen und Mikrorissen keinen Einfluss auf das elastische Verhalten.

Dass Schädigung und elastisches Verhalten gekoppelt sind, jedoch plastisches und elastisches Verhalten nicht, ist experimentell anhand von Zugversuchen an metallischen Proben durch die Veränderung des Elastizitätsmoduls erkennbar. Unter anderem haben Lemaitre [68] und Spitzig et al. [92] die Auswirkungen einsetzender Schädigung auf die elastischen Materialparameter untersucht. Während bei rein elastisch-plastischem Verhalten der Erst- und Entlastungspfad im Last-Verschiebungsdiagramm parallel sind und somit der Elastizitätsmodul unverändert bleibt, wird er mit einsetzender Schädigung kleiner und die Erst- und Entlastungspfade sind nicht mehr parallel. Auch die Querkontraktionszahl ν , der Schubmodul G und der Kompressionsmodul K verändern sich bei einsetzender Schädigung.

In [68, 75] wird zusätzlich die Unabhängigkeit der am plastischen Fließen und am Schädigungsprozess vorhandenen Energien voneinander angenommen, da der Anteil

der plastischen freien Energie gewöhnlich wesentlich kleiner ist als der Anteil der elastischen freien Energie. Somit kann der Einfluss der Schädigung auf den plastischen Anteil vernachlässigt werden [17]. Die effektive spezifische freie Energie kann additiv zerlegt werden

$$\phi = \phi^{\text{el}}(\mathbf{A}^{\text{el}}, \mathbf{A}^{\text{da}}) + \phi^{\text{pl}}(\gamma) + \phi^{\text{da}}(\mu). \quad (2.58)$$

Um den Einfluss der Schädigung auf das elastische Verhalten zu berücksichtigen, ist der elastische Energieanteil von dem elastischen logarithmischen Hencky-Verzerrungstensor \mathbf{A}^{el} (2.27) und dem logarithmischen Schädigungsverzerrungstensor \mathbf{A}^{da} (2.36) abhängig. Der plastische Anteil ist weiterhin lediglich von der plastischen internen Variablen γ abhängig. Hinzu kommt die durch Schädigung hervorgerufene Energie ϕ^{da} . Diese wird mit der schädigenden Vergleichsdehnung μ ausgedrückt. Aufgrund der kinematischen Annahme, dass der elastisch-plastische Deformationsprozess bei Einsetzen der Schädigung anisotrope Anteile enthalten kann, werden diese experimentellen Beobachtungen in die thermodynamische Betrachtung einbezogen. Die spezifische Formänderungsenergie für die geschädigte Konfiguration

$$\rho_0 \dot{w} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}} \quad (2.59)$$

wird mit dem Spannungstensor \mathbf{T} (2.44) und der Verzerrungsrate der gesamten Deformation $\dot{\mathbf{H}}$ (2.40) formuliert und lässt sich ebenfalls additiv zerlegen, wobei nun ein zusätzlicher schädigender Anteil vorhanden ist. Mit (2.40) resultiert

$$\rho_0 \dot{w} = \rho_0 \dot{w}^{\text{el}} + \rho_0 \dot{w}^{\text{pl}} + \rho_0 \dot{w}^{\text{da}} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} \mathbf{R} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \mathbf{Q}^{\text{el}}. \quad (2.60)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik [76] für die geschädigte Konfiguration

$$\dot{w} - \dot{\phi} \geq 0 \quad (2.61)$$

lautet unter Verwendung von (2.40) und (2.58)

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + (\mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} + (\mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{\text{el}-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \\ - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{da}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{da}}(\mu) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Werden ausschließlich die nicht dissipativen Prozesse dieser Gleichung betrachtet, ergibt sich

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} = 0. \quad (2.63)$$

Mit Einbeziehung von (2.30) folgt

$$\mathbf{T} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \dot{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \frac{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{Q}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\text{el}}. \quad (2.64)$$

Durch eine zur ungeschädigten Konfiguration vergleichbaren Umstellung lässt sich auch hier der Spannungstensor ermitteln

$$\mathbf{T} = \rho_0 \left(\frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \frac{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{Q}^{\text{el}}} \mathbf{Q}^{\text{el}} + \mathbf{Q}^{\text{el}} \frac{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{Q}^{\text{el}}} \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \right). \quad (2.65)$$

Da ϕ^{el} in der geschädigten Konfiguration nicht nur von elastischen Verzerrungen sondern auch von anisotropen schädigenden Verzerrungen (2.58) abhängig ist, ist eine Vereinfachung der Gleichung aufgrund von Isotropie wie in der ungeschädigten Konfiguration nicht möglich.

Die dissipativen Anteile von (2.62) können in einer strengeren Formulierung in plastische

$$(\mathbf{RTR}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \geq 0 \quad (2.66)$$

und schädigende Komponenten

$$(\mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{\text{el}-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{da}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{da}}(\mu) \geq 0 \quad (2.67)$$

zerlegt werden.

Die Restriktion für $\dot{\phi}^{\text{pl}}$ wurde bereits aufgestellt (2.57). Da das plastische Verhalten unabhängig von der Schädigung ist, wird (2.66) somit nicht weiter betrachtet. Die Bedingung (2.67) wird in dieser Theorie weiter genutzt, da Beschränkungen für die Formulierung von ϕ^{el} getroffen werden und eine Restriktion für ϕ^{da} gegeben wird. Die Bedingung kann auch zu Einschränkungen für die Materialparameter führen. Weiterhin führt (2.67) zu dem zu $\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}$ (2.29) arbeitskonjugierten Spannungstensor

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{\text{el}-1}. \quad (2.68)$$

2.3 Materialgleichungen

Die folgenden grundlegenden Gleichungen, sowohl für die ungeschädigte Konfiguration als auch für die geschädigte Konfiguration, beziehen sich auf die in Kap. 2.2 betrachteten thermodynamischen Beziehungen und werden auf makroskopischer Ebene formuliert, um die phänomenologischen Theorien darzustellen.

2.3.1 Ungeschädigte Konfigurationen

Die Materialgleichungen für die ungeschädigte Konfiguration gelten für ein isotropes elastisch-plastisches Materialmodell. Die darin enthaltenen effektiven Größen beschreiben das elastisch-plastische Materialverhalten des ungeschädigten Matrixmaterials.

Der elastische Hencky-Verzerrungstensor (2.17)

$$\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} = \text{dev} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \frac{1}{3} (\text{tr} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}) \mathbf{1} \quad (2.69)$$

lässt sich additiv in einen Deviator $\text{dev} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}$ und einen Kugeltensor $\frac{1}{3} (\text{tr} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}) \mathbf{1}$ zerlegen. Hierbei ist $\mathbf{1}$ der Einheitstensor. Die Funktion der freien Energie [14]

$$\rho_0 \bar{\phi}^{\text{el}}(\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}) = \underbrace{G (\text{dev} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}) \cdot (\text{dev} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}})}_{\text{Gestaltänderung}} + \underbrace{\frac{1}{2} K (\text{tr} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}})^2}_{\text{Volumenänderung}} \quad (2.70)$$

kann daher mit einem gestaltändernden und einem volumenändernden Anteil dargestellt werden. Die Funktion enthält den Schubmodul G und den Kompressionsmodul K . Unter Verwendung von (2.69) ist auch die Schreibweise

$$\rho_0 \bar{\phi}^{\text{el}} = G \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \frac{1}{2} \left(K - \frac{2}{3} G \right) (\text{tr} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}})^2 \quad (2.71)$$

möglich. Um die effektiven Spannungen zu ermitteln, ist es nach (2.55) notwendig, die Gl. (2.71) nach $\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}$ abzuleiten. Das resultierende hyperelastische Stoffgesetz lautet

$$\bar{\mathbf{T}} = 2G \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \left(K - \frac{2}{3} G \right) \text{tr} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} \mathbf{1}. \quad (2.72)$$

Die Beziehung

$$d\bar{\mathbf{T}} = \frac{d\bar{\mathbf{T}}}{d\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} d\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} = \bar{\mathbb{C}}^{\text{el}} d\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} \quad (2.73)$$

zeigt, dass die Ableitung der effektiven Spannung nach der elastischen Verzerrung unter Annahme von rein elastischem Verhalten den effektiven Elastizitätstensor

$$\bar{\mathbb{C}}^{\text{el}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} \otimes \partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} = 2G \mathbb{I} + \left(K - \frac{2}{3} G \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (2.74)$$

ergibt. Dieser Tensor wird unter der Voraussetzung der Symmetrie des Spannungstensors $\bar{\mathbf{T}}$ und des Verzerrungstensors $\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}$ sowie von der Potentialeigenschaft des

Materials mit zwei unabhängigen elastischen Materialkonstanten formuliert. Die Gl. (2.74) enthält den Einheitstensor vierter Stufe

$$\mathbb{I} = \delta_{i,k}^i \delta_{j,l}^l \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k. \quad (2.75)$$

Plastisches Materialverhalten tritt bei Belastung ab Überschreiten der Fließgrenze zusätzlich zu dem elastischen Materialverhalten auf (Abb. 1.2), wobei das elastische Verhalten nicht beeinflusst wird. Jedem Spannungszustand kann eine Vergleichsspannung zugeordnet werden. Überschreitet diese Vergleichsspannung die Fließspannung $c(\gamma)$, beginnt das plastische Fließen, was mit der Fließbedingung

$$f^{\text{pl}}(\bar{\mathbf{T}}, c) = 0 \quad (2.76)$$

beschrieben wird. Der Fließbeginn von Metallen wird auch durch eine aufgebrachte hydrostatische Spannung beeinflusst. Experimentelle Studien zeigen [93, 94], dass die Fließspannung linear abhängig von dem hydrostatischen Spannungszustand ist. Die Spannungs-Dehnungskurve eines einaxialen Druckversuches liegt daher oberhalb der eines Zugversuches. Steigt der hydrostatische Druck, so steigt auch jeweils die Fließspannung. Durch numerische Simulationen [14] zeigt sich, wie sich im Vergleich zwischen einer J_2 -Fließbedingung zu einer I_1 - J_2 -Fließbedingung der Beginn der Lokalisierung sowie die Art der lokalisierten Deformationen ändert. Dies führt zu einem wahrnehmbaren Abfall der Duktilität. Zur Modellierung des experimentell beobachteten Verhaltens wird daher die Drucker-Prager-Fließbedingung

$$f^{\text{pl}}(\bar{I}_1, \bar{J}_2, c) = \sqrt{\bar{J}_2} - c \left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1\right) = 0 \quad (2.77)$$

verwendet, welche das plastische Fließen des Matrixmaterials beschreibt. Hierbei ist $\bar{I}_1 = \text{tr} \bar{\mathbf{T}}$ die erste Invariante des effektiven Spannungstensors $\bar{\mathbf{T}}$ und $\bar{J}_2 = \frac{1}{2} \text{dev} \bar{\mathbf{T}} \cdot \text{dev} \bar{\mathbf{T}}$ die zweite Invariante des effektiven Spannungsdeviators $\text{dev} \bar{\mathbf{T}}$. Der Quotient aus dem hydrostatischen Spannungskoeffizient a und der aktuellen Fließspannung c ergibt den Materialparameter a/c [93, 94], auf dessen Ermittlung in Kap. 4.2 eingegangen wird. Durch Ableitung der Fließbedingung erhält man die plastische Konsistenzbedingung

$$\dot{f}^{\text{pl}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \text{dev} \bar{\mathbf{T}} + a \mathbf{1} \right) \cdot \dot{\bar{\mathbf{T}}} - \left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1\right) \dot{c} = 0. \quad (2.78)$$

Diese Nebenbedingung gewährleistet die Einhaltung der Fließbedingung während des plastischen Fließens.

Die plastische Potentialfunktion

$$g^{\text{pl}} = \sqrt{\bar{J}_2} \quad (2.79)$$

wird im Bezug auf die aktuelle effektive Spannung ausgedrückt.

Irreversible volumetrische Verzerrungen bei Metallen sind größtenteils auf die Schädigung zurückführbar. Bei Metallen sind volumetrische plastische Verzerrungen im Vergleich zu elastischen und schädigenden volumetrischen Verzerrungen sehr gering. Dies wurde in den Versuchen von Spitzig et al. [94, 93] teilweise gemessen. Die plastischen volumetrischen Verzerrungen können daher vernachlässigt werden. Man spricht somit von einer plastischen Volumenkonstanz. Durch Ableiten der plastischen Potentialfunktion ergibt sich das nicht assoziierte Fließgesetz

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \dot{\lambda} \frac{\partial g^{\text{pl}}}{\partial \bar{\mathbf{T}}} = \dot{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \text{dev} \bar{\mathbf{T}}. \quad (2.80)$$

In diesem stellt $\dot{\lambda} \geq 0$ einen skalaren Faktor dar. Der normierte effektive deviatorische Spannungstensor

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2\bar{J}_2}} \text{dev} \bar{\mathbf{T}} \quad (2.81)$$

führt zu der Definition für die plastische Vergleichsdehnungsrate

$$\dot{\gamma} = \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\lambda}. \quad (2.82)$$

Das nicht assoziierte Fließgesetz (2.80) kann nun als

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}} \quad (2.83)$$

formuliert werden.

2.3.2 Geschädigte Konfigurationen

Zunehmende Schädigungen im mikroskopischen Bereich durch Mikroscherrisse und isotrope Porenaufweitungen verringern die Spannungen im gesamten Material, während die Spannungen des Matrixmaterials steigen. Desweiteren verursachen diese Mikroschädigungen eine Verkleinerung der elastischen Materialparameter im Vergleich zum ungeschädigten Material [18, 92]. Im Gegensatz zur ungeschädigten Konfiguration ist in der geschädigten Konfiguration die freie Energie nicht nur von dem symmetrischen elastischen Verzerrungstensor \mathbf{A}^{el} sondern auch vom ebenfalls symmetrischen Schädigungsverzerrungstensor \mathbf{A}^{da} abhängig. Die elastische Verzerrungs-

energie ϕ^{el} wird daher als isotrope skalare Funktion in Abhängigkeit von \mathbf{A}^{el} und \mathbf{A}^{da} formuliert [17, 46]. Die Annahme von isotropem und linear-elastischem Verhalten im anfänglichen ungeschädigten elastisch-plastischen Material führt zu einem quadratischen Einfluss von \mathbf{A}^{el} in der Funktion $\bar{\phi}^{\text{el}}$ (2.70), (2.71). Mit einem möglichen linearen Einfluss von \mathbf{A}^{da} kann die Gleichung der freien Energie als

$$\begin{aligned} \rho_0 \phi^{\text{el}}(\mathbf{A}^{\text{el}}, \mathbf{A}^{\text{da}}) = & G \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} + \frac{1}{2} \left(K - \frac{2}{3} G \right) (\text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}})^2 \\ & + \eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} (\text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}})^2 + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} \\ & + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} + \eta_4 \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot (\mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}}) \end{aligned} \quad (2.84)$$

formuliert werden. Die Materialparameter $\eta_1 \dots \eta_4$ beschreiben die Abminderung der elastischen Eigenschaften bei einsetzender Schädigung. Die Bestimmung dieser Materialparameter wird in Kap. 4.2 erläutert.

Um den Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{T} (2.65) ermitteln zu können, ist es notwendig, ähnlich wie bei (2.71), die Gl. (2.84) abzuleiten. In der Ableitung

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} = & 2 \left(G + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \right) \mathbf{A}^{\text{el}} \\ & + \left[\left(K - \frac{2}{3} G + 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \right) \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} + \eta_3 (\mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}}) \right] \mathbf{1} \\ & + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}} + \eta_4 (\mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}} + \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{A}^{\text{el}}) \end{aligned} \quad (2.85)$$

sind \mathbf{A}^{el} und \mathbf{A}^{da} linear. Unter den Bedingungen, dass die Spannungstensoren \mathbf{T} und $\bar{\mathbf{T}}$ gleich sind, bevor im Material Schädigung auftritt [17], und dass der elastische Verzerrungstensor \mathbf{A}^{el} bei einsetzender Schädigung weiterhin einen linearen Einfluss behält, lässt sich (2.65) mit der allgemeinen Gleichung

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}(\mathbf{A}^{\text{el}}, \mathbf{A}^{\text{da}})}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \quad (2.86)$$

approximieren. Mit (2.63) ergibt sich

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}}. \quad (2.87)$$

Das totale Differential resultiert zu

$$d\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} d\mathbf{A}^{\text{el}} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{\text{da}}} d\mathbf{A}^{\text{da}}. \quad (2.88)$$

Der Elastizitätstensor

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{el}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} = & 2 \left(G + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \right) \mathbb{I} + \left(K - \frac{2}{3} G + 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ & + \eta_3 \left(\mathbf{A}^{\text{da}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{A}^{\text{da}} \right) + \eta_4 \mathbb{A}^{\text{da}} \end{aligned} \quad (2.89)$$

ergibt sich aus der partiellen Ableitung nach \mathbf{A}^{el} und beinhaltet

$$\mathbb{A}^{\text{da}} = \left[(A^{\text{da}})_{\cdot k}^i \delta_{\cdot j}^l + \delta_{\cdot k}^i (A^{\text{da}})_{\cdot j}^l \right] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k. \quad (2.90)$$

Der schädigende Tangentenmodul

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{da}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{\text{da}}} = & 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\eta_2 \mathbf{A}^{\text{el}} \otimes \mathbf{1} \\ & + \eta_3 \mathbf{1} \otimes \mathbf{A}^{\text{el}} + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbb{I} + \eta_4 \mathbb{A}^{\text{el}} \end{aligned} \quad (2.91)$$

ergibt sich hingegen aus der partiellen Ableitung nach \mathbf{A}^{da} und beinhaltet

$$\mathbb{A}^{\text{el}} = \left[(A^{\text{el}})_{\cdot k}^i \delta_{\cdot j}^l + \delta_{\cdot k}^i (A^{\text{el}})_{\cdot j}^l \right] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k. \quad (2.92)$$

Für $2\eta_2 = \eta_3$ ist \mathbb{C}^{da} symmetrisch. Die Gl. (2.89) zeigt, dass neben den effektiven elastischen Materialkonstanten G und K auch die Schädigung Einfluss auf das elastische Materialverhalten hat. Auf die anisotrope Schädigung haben nur die Konstanten η_3 und η_4 Auswirkungen.

In der Plastizitätstheorie wird die Fließbedingung (2.76) zur Charakterisierung des plastischen Fließens verwendet. Analog dazu wird in der Schädigungstheorie zusätzlich eine Schädigungsbedingung, welche den Beginn des schädigenden Verhaltens beschreibt, verwendet. Diese Schädigungsbedingung

$$f^{\text{da}} \left(\tilde{\mathbf{T}}, \sigma \right) = 0 \quad (2.93)$$

wird in Abhängigkeit einer Spannung $\tilde{\mathbf{T}}$ und der aktuellen Schädigungsvergleichsspannung σ formuliert [17, 28]. Die Funktion der Schädigungsbedingung ist daher vom Spannungszustand abhängig, welcher alternativ durch die Spannungstriaxialität, den Lodeparameter und die Spannungsintensität beschrieben werden kann.

Die Spannungstriaxialität

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma_{\text{eq}}} = \frac{I_1}{3\sqrt{3J_2}} \quad (2.94)$$

ist der Quotient von hydrostatischer Spannung $\sigma_m = I_1/3$ und der von-Mises-Vergleichsspannung $\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3J_2}$.

Der Einfluss der Spannungstriaxialität auf die Art der Schädigung bei duktilen Metallen wurde in einer Reihe von Experimenten und numerischen Simulationen nachgewiesen [6, 19, 20]. Die Abb. 2.2 zeigt die in dieser Arbeit verwendete Annahme verschiedener Schädigungsmechanismen in Abhängigkeit von der Spannungstriaxialität. Für

- negative Spannungstriaxialitäten $\eta \leq \eta_c$ entsteht keine Schädigung,
- bei negativen Spannungstriaxialitäten von $\eta_c < \eta < 0$ ist eine Schädigung durch Mikroscherrisse vorhanden,
- für hohe positive Spannungstriaxialitäten von $\eta > \eta_t$ zeigt sich Schädigung durch isotropes Porenwachstum und
- für kleine positive Spannungstriaxialitäten von $0 \leq \eta \leq \eta_t$ ist eine Kombination aus Schädigung durch Mikroscherrisse und durch isotropes Porenwachstum zu beobachten.

Die letzte Kombination stellt den fließenden Übergang von der Schädigung durch Mikroscherrisse zur Schädigung durch reine isotrope Porenaufweitung dar. Der Beginn der Schädigung durch reine isotrope Porenaufweitung ist durch η_t gekennzeichnet. Unterschreitet die Spannungstriaxialität einen bestimmten negativen Wert η_c , findet

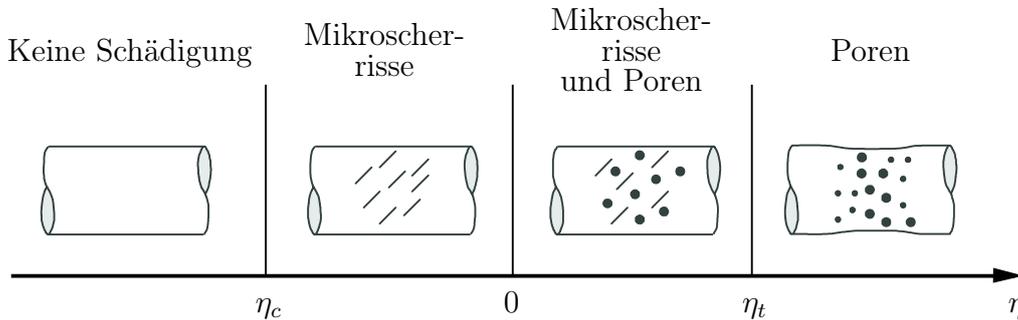


Abbildung 2.2: Verschiedene Schädigungsmechanismen in Abhängigkeit von der Spannungstriaxialität [21]

aufgrund des dann vorherrschenden hohen hydrostatischen Drucks keine Schädigung statt [7, 6]. In dieser Arbeit wird für η_c und η_t jeweils ein fester Wert angenommen, auf welchen in Kap. 4.2 eingegangen wird.

Der Lodeparameter

$$\omega = \frac{2\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1 - \tilde{T}_3}{\tilde{T}_1 - \tilde{T}_3} \quad \text{mit} \quad \tilde{T}_1 \geq \tilde{T}_2 \geq \tilde{T}_3 \quad (2.95)$$

ermittelt sich aus den Hauptspannungen \tilde{T}_i in den Grenzen $-1 \leq \omega \leq 1$. Die Bedeutung von ω lässt sich anhand von drei Werten exemplarisch aufzeigen [81]:

- Einaxialer Zug kombiniert mit hydrostatischer Spannung wird durch $\omega = -1$ repräsentiert,

- $\omega = 0$ repräsentiert die Kombination aus reiner Scherspannung und hydrostatischer Spannung und
- $\omega = 1$ steht für einaxialen Druck in Zusammenwirken mit hydrostatischer Spannung.

Der Parameter

$$L = -\frac{27J_3}{2\sigma_{\text{eq}}^3} \quad (2.96)$$

kann alternativ ermittelt werden [42, 31]. Durch Approximation mit

$$\omega \cong \tilde{\omega}(L) = \begin{cases} \sqrt{L+1} - 1 & \text{für } -1 \leq L \leq 0 \\ -\sqrt{-L+1} + 1 & \text{für } 0 < L \leq 1 \end{cases}$$

wird in dieser Arbeit eine ausreichend genaue Lösung des Lodeparameters ω (2.95) bestimmt. Dass der Einfluss des Lodeparameters auf die mikroskopische Schädigungsentwicklung besonders in Bereichen niedriger Spannungstriaxialität von Bedeutung ist, wurde unter anderem in [31] und [37] aufgezeigt.

Die vorhergehenden Gleichungen enthalten die erste Invariante des Spannungstensors $I_1 = \text{tr}\tilde{\mathbf{T}} = \text{tr}\mathbf{T}$ und die zweite und dritte Invariante $J_2 = \frac{1}{2}\text{dev}\tilde{\mathbf{T}} \cdot \text{dev}\tilde{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}\text{dev}\mathbf{T} \cdot \text{dev}\mathbf{T}$ beziehungsweise $J_3 = \det \text{dev}\mathbf{T} = \det \text{dev}\tilde{\mathbf{T}}$ des Spannungsdeviators. Die in dieser Arbeit verwendete Schädigungsbedingung (2.93)

$$f^{\text{da}}(I_1, J_2, \sigma) = \tilde{\alpha}I_1 + \tilde{\beta}\sqrt{J_2} - \sigma = 0. \quad (2.97)$$

beinhaltet die vom Spannungszustand abhängigen Parameter $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$, welche als Funktionen in Abhängigkeit der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters formuliert sind [23] und in Kap. 4.2 näher erläutert werden.

Die Schädigungspotentialfunktion

$$g^{\text{da}}(\tilde{\mathbf{T}}) = g^{\text{da}}(I_1, J_2, J_3) \quad (2.98)$$

wird in Abhängigkeit des geschädigten Spannungstensors $\tilde{\mathbf{T}}$ ausgedrückt. Wie schon in Kap. 2.2.2 beschrieben ist dieser arbeitskonjugiert zu der schädigenden Verzerungsrate $\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}$. Das nicht assoziierte Schädigungsgesetz

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \dot{\mu} \frac{\partial g^{\text{da}}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \dot{\mu} \left(\frac{\partial g^{\text{da}}}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial g^{\text{da}}}{\partial J_2} \text{dev}\tilde{\mathbf{T}} + \frac{\partial g^{\text{da}}}{\partial J_3} \text{dev}\tilde{\mathbf{S}} \right) \quad (2.99)$$

ist die Ableitung der Schädigungspotentialfunktion (2.98) und beinhaltet den die Schädigung beschreibenden, nicht negativen skalaren Faktor $\dot{\mu}$ und die deviatorische

Spannungsfunktion

$$\operatorname{dev}\tilde{\mathbf{S}} = \operatorname{dev}\tilde{\mathbf{T}} \operatorname{dev}\tilde{\mathbf{T}} - \frac{2}{3}J_2\mathbf{1}. \quad (2.100)$$

Alternativ lässt sich das Schädigungsgesetz auch als

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \dot{\mu} \left(\alpha \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{1} + \beta\mathbf{N} + \delta\mathbf{M} \right) \quad (2.101)$$

formulieren. In dieser Form beschreiben

$$\mathbf{N} = \frac{\operatorname{dev}\tilde{\mathbf{T}}}{\|\operatorname{dev}\tilde{\mathbf{T}}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}J_2}\operatorname{dev}\tilde{\mathbf{T}} \quad (2.102)$$

und

$$\mathbf{M} = \frac{\operatorname{dev}\tilde{\mathbf{S}}}{\|\operatorname{dev}\tilde{\mathbf{S}}\|} \quad (2.103)$$

die auf die Spannung bezogenen normierten deviatorischen Tensoren. Die Parameter α , β und δ sind kinematische Variablen, die ebenfalls wie bei (2.97) in Abhängigkeit von der Spannungstriaxialität und dem Lodeparameter ermittelt werden. Auch hier werden die Funktionen in Kap. 4.2 näher erläutert.

Isotrope Schädigung

Rein isotrope Schädigung liegt nur bei Schädigung allein durch Porenaufweitung vor. Dieser Sonderfall tritt bei $\eta \geq \eta_t$ auf (Abb. 2.2). Ist der Grenzwert η_t erreicht, findet gemäß dem in dieser Arbeit verwendeten Materialmodell keine Schädigung durch Mikroscherrisse statt. Die Schädigungsbedingung (2.97) vereinfacht sich für isotrope Schädigung zu

$$f^{\text{da}}(I_1, \sigma) = \tilde{\alpha}I_1 - \sigma = 0, \quad (2.104)$$

da lediglich die hydrostatische Spannung für die Porenaufweitung verantwortlich ist [17].

Gleichfalls fallen die deviatorischen Anteile des Schädigungsgesetzes (2.101) weg [17]. Daher ist nur die Spur des Schädigungsverzerrungstensors $\operatorname{tr}\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}$ vorhanden. Das isotrope Schädigungsgesetz lautet somit

$$\dot{\mathbf{H}}_{\text{iso}}^{\text{da}} = \dot{\mu} \left(\alpha \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{1} \right). \quad (2.105)$$

Anisotrope Schädigung

Anisotrope Schädigung tritt bei $\eta < \eta_t$ auf. Wenn die Schädigung allein durch Mikroscherrisse verursacht wird ($\eta_c \leq \eta < 0$), handelt es sich um rein anisotrope Schädigung (Abb. 2.2).

Im Übergangsbereich $0 \leq \eta < \eta_t$ findet sowohl Porenaufweitung als auch Mikroscheren statt. In diesem gemischten Schädigungsmechanismus ist eine Vereinfachung der Schädigungsbedingung (2.97) und des Schädigungsgesetzes (2.101) nicht möglich, da hydrostatische und deviatorische Spannungen für die Schädigung verantwortlich sind. Die Wichtung der Einflüsse der isochoren Anteile \mathbf{N} und \mathbf{M} werden durch die kinematischen Variablen β und δ , die des volumetrischen Anteils durch die kinematische Variable α festgelegt.

3 Numerische Implementierung

Im folgenden Kapitel werden die für diese Arbeit notwendigen Grundlagen der Finiten-Element-Methode (FEM) [95, 103] erläutert.

Die numerischen Simulationen werden mit der Finiten-Element-Software ANSYS 13.0 durchgeführt. Die gesamten numerischen Simulationen der zu untersuchenden Versuchskörper werden mit der „Ansys Parametric Design Language“ (APDL) in ANSYS-CLASSIC vorgenommen. Die zu implementierenden Materialgesetze sind in der Entwicklungsumgebung VISUAL STUDIO 2008 SP1 programmiert und werden mit dem INTEL FORTRAN 11.1 COMPILER kompiliert.

Eine Einführung in die von ANSYS verwendete Berechnungsmethode findet in Kap. 3.1 statt. Die numerische Implementierung der in dieser Arbeit verwendeten Theorie wird im Kap. 3.2 erläutert. In Kap. 3.3 wird aufgezeigt, welche Argumente, die für die Programmierung des verwendeten Materialgesetzes notwendig sind, in der Schnittstelle zu ANSYS zur Verfügung stehen.

3.1 Grundlagen der Finite-Element-Methode

Zur Berechnung nichtlinearer Probleme kann die Finite-Element-Methode genutzt werden. Mit diesem numerischen Verfahren können partielle Differentialgleichungen, welche in Variationsgleichungen zu überführen sind, näherungsweise gelöst werden. Dabei wird der zu untersuchende Körper in viele kleinere endliche Elemente unterteilt. Die Näherungslösung ist mit einer größeren Netzverfeinerung genauer.

In dieser Arbeit werden für die numerischen Simulationen der Versuche für die Diskretisierung des Probekörpers SOLID185-Elemente mit acht Knoten verwendet (Abb. 3.1). Die Verschiebungen werden somit mit linearen Ansatzfunktionen ermittelt. Jeder Knoten hat drei Freiheitsgrade: je eine Translation in x -, y - und z -Richtung [3]. Das SOLID185-Element [3] bietet die Möglichkeit, eigene Materialgesetze zu implementieren, und die Eignung für große Verzerrungen.

Für Berechnungen mit 3D-Kontaktproblemen wird das CONTA173-Element (Kontaktlement) und das entsprechende assoziierte TARGE170-Element („target“-Element) genutzt (Abb. 3.2). Diese beiden Elemente mit jeweils vier Knoten werden über ein „real constant set“ gekoppelt und sind über die Oberfläche der SOLID185-Elemente gelegt. Ihnen werden die gleichen Elementgrößen und Elementformen sowie die gleichen Materialeigenschaften wie denen des SOLID185-Elementes zugewiesen.

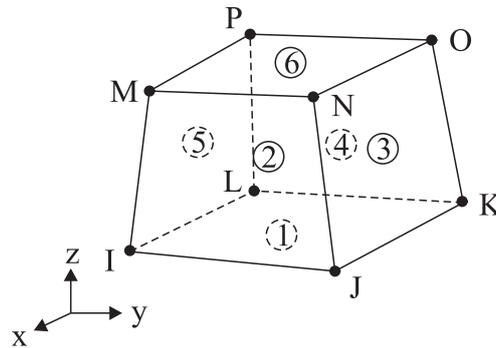


Abbildung 3.1: SOLID185-Element mit acht Knoten

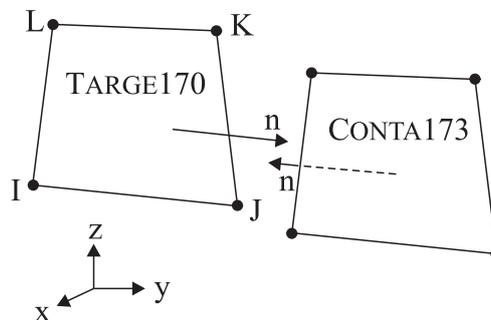


Abbildung 3.2: „Surface-to-Surface“-Kontaktelemente TARGE170 und CONTA173

Da es „Surface-to-Surface“-Kontaktelemente sind, wird ein Durchdringen der Oberflächen verhindert.

Desweiteren werden zur Modellierung LINK180-Elemente (Abb. 3.3) verwendet. Dieses dreidimensionale Fachwerkelement besteht aus zwei Knoten mit jeweils drei Freiheitsgraden: je eine Translation in x -, y - und z -Richtung [3]. Das Element selbst kann nur Normalkräfte aufnehmen.

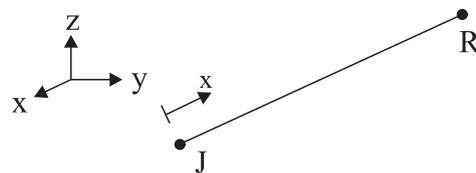


Abbildung 3.3: LINK180-Element mit zwei Knoten

Im Folgenden werden die Grundlagen der Finiten-Element-Verschiebungsmethode dargestellt und mögliche Erweiterungen vorgestellt.

Unter Vernachlässigung der dynamischen Anteile ergibt sich das Kräftegleichgewicht der Impulsbilanz mit der Massenkraftdichte \mathbf{b} und der Dichte ρ zu

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Gemäß der Randbedingung $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t}$ sind die inneren (\mathbf{t}) und die äußeren Spannungen ($\bar{\mathbf{t}}$) identisch. Durch skalare Multiplikation dieser Bedingung und Gl. (3.1) mit einer Testfunktion $\delta \mathbf{u}$, welche als virtuelle Verschiebung gedeutet werden kann, sowie einer anschließenden Integration über das Volumen beziehungsweise die Fläche ergibt sich eine integrierte Näherung der Bedingungen. Die Gleichung

$$\delta \Pi(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overset{\circ}{v} + \int (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overset{\circ}{a} = 0 \quad (3.2)$$

wird aufgrund ihrer Integration und der Bildung des Skalarproduktes die schwache Form des Gleichgewichts genannt und stellt das Prinzip der virtuellen Arbeit, auf welchem die Finite-Element-Methode basiert, dar.

Über den Gaußschen Integralsatz lässt sich aus (3.2) das Variationsprinzip der Finiten-Element-Verschiebungsmethode

$$\delta \Pi(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int \operatorname{grad}^T \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \, d\overset{\circ}{v} - \int \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overset{\circ}{v} - \int \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overset{\circ}{a} = 0 \quad (3.3)$$

herleiten. Das vordere Integral der Gl. (3.3) beschreibt die Formänderungsenergie, während die Summe der beiden hinteren Integrale die äußere Arbeit darstellt.

Durch eine anschließende Taylorreihenentwicklung von (3.3)

$$\delta \Pi(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) = \delta \Pi(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \delta \Pi}{\partial \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u} + \dots = 0, \quad (3.4)$$

bei der Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt werden, sowie dem Einsetzen von Ansatzfunktionen, dem Einbringen des Stoffgesetzes und der folgenden Assemblierung ergibt sich die mathematische Grundgleichung der Finiten-Element-Verschiebungsmethode

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{V} = \mathbf{P}, \quad (3.5)$$

welche zur rekursiven Ermittlung der inkrementellen bzw. iterativen Verschiebungen $\Delta \mathbf{V}$ dient. Die globale tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T ist unter anderem von dem aktuellen Tangentenmodul abhängig [18]. Die Matrix \mathbf{P} stellt das Residual des unausbalancierten Kraftvektors dar [18]. Die Gleichungen dieses globalen Gleichungssystems werden mit einer Newton-Raphson-Iteration gelöst [3].

Die stofffreie Grundgleichung (3.3) kann durch weitere Bedingungen ergänzt werden. Die in dieser Arbeit verwendeten SOLID185-Elemente nutzen die \bar{B} -Methode gemäß [49, 80], in welcher zusätzliche Bedingungen der Berücksichtigung der Inkompressibilität dienen. Die entsprechende Integrationstechnik für volumetrische Terme ersetzt die volumetrischen Verzerrungen in den Gaußpunkten durch die gemittelten Verzerrungen des gesamten Elementes [3].

3.2 Numerische Integration

Zu Beginn einer inkrementellen bzw. iterativen Berechnung sind alle skalaren und tensoriellen Größen jedes Integrationspunktes zum Zeitpunkt $t_n = t$ bekannt. Der Metriktransformationstensor \mathbf{Q} (2.6) und die Verschiebungen, welche während des Inkrementes Δt hinzu kommen, sind zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t + \Delta t$ für alle Punkte bestimmbar. Mit diesen Verschiebungen werden anschließend alle notwendigen tensoriellen und skalaren Größen des Zeitschrittes t_{n+1} errechnet.

Zur Integration der grundlegenden Ratengleichungen gibt es unterschiedliche Techniken, wie das einfache Euler-vorwärts-Verfahren, welches nur mit kleinen Inkrementen Δt bedingt stabil rechnet [105]. Diese Technik wurde auf verschiedene Arten modifiziert [86]. Weiter besteht der Nachteil, dass viele Iterationen durchgeführt werden müssen.

Bei der häufig verwendeten „elastischer Prädiktor - plastischer Korrektor“-Methode [86, 18] werden anfangs alle Verzerrungsinkremente als elastische Verzerrungsinkremente angenommen und anschließend plastisch korrigiert. Diese Methode rechnet für eine J_2 -Fließbedingung und ein assoziiertes Fließgesetz bei moderaten Schrittweiten stabil und genau [86]. Wenn die gewählte Schrittweite jedoch zu groß ist, ergeben sich im Prädiktorschritt extrem hohe Spannungen. Dies kann wiederum zu numerischen Schwierigkeiten bei der Lösung führen. Dafür sind bei dieser Technik nur wenige Iterationen auf globalen Level notwendig. Diese Technik wird unter anderem von de Souza Neto und Peric [33], Doghri [35], Simo und Ju [90] sowie Ju [50] erweitert, um Schädigungsverhalten simulieren zu können.

Alternativ dazu wird in [85, 86, 102] die „plastischer Prädiktor - elastischer Korrektor“-Methode vorgestellt. Bei dieser Methode werden umgekehrt anfangs alle Verzerrungsinkremente als plastische Verzerrungsinkremente angenommen und anschließend elastisch korrigiert. Dies führt dazu, dass die Spannungen auch bei großen Schrittweiten vor der Korrektur moderat bleiben. In [18, 16, 13, 14] wird die für die Schädigung erweiterte, in dieser Arbeit verwendete, „inelastischer Prädiktor - elastischer Korrektor“-Methode vorgestellt. Die Vorteile dieser Methode sind, dass sowohl mit kleinen als auch großen Schrittweiten ohne beachtenswerten Verlust der Genauigkeit gerechnet werden kann und dass auf der globalen Ebene wesentlich weniger Iterationen nötig sind, um eine ausreichende Konvergenz des globalen Gleichungssystems zu bekommen. Der Ablauf von Kap. 3.2.1 und Kap. 3.2.2 untergliedert sich jeweils in die vier Teile

- a) Umrechnung der benötigten Tensoren in skalare Vergleichsgrößen,
- b) Durchführung der numerischen Integration,

- c) Rücktransformation in tensorielle Größen und
- d) Ermittlung des entsprechenden Tangentenmoduls.

Da in dieser Arbeit keine Temperatureinflüsse sowie keine hohen Verzerrungsraten betrachtet werden, sind in der folgenden Herleitungen die gesamten dynamischen und thermischen Einflüsse vernachlässigt.

3.2.1 Ungeschädigte Konfigurationen

a) Skalare Größen

Die plastische Konsistenzbedingung (2.78) kann auch in der Form

$$\dot{f}^{\text{pl}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{T}} + a \mathbf{1} \cdot \dot{\mathbf{T}} - \left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1\right) \dot{c} = 0 \quad (3.6)$$

dargestellt werden. Durch Bildung des Skalarproduktes aus dem Einheitstensor und der Zeitableitung des hyperelastischen Stoffgesetzes (2.72)

$$\dot{\mathbf{T}} = 2G\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \left(K - \frac{2}{3}G\right) \text{tr}\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} \mathbf{1} \quad (3.7)$$

ergibt sich

$$\mathbf{1} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 3K \text{tr}\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}}. \quad (3.8)$$

Das Skalarprodukt aus dem normierten effektiven deviatorischen Spannungstensor (2.81) und (3.7) liefert hingegen

$$\bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 2G\bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}}. \quad (3.9)$$

Aufgrund der plastischen Volumenkonstanz $\text{tr}\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = 0$ gilt

$$\text{tr}\dot{\mathbf{H}} = \text{tr}\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}}. \quad (3.10)$$

Wird (3.8), (3.9) und (3.10) unter Verwendung der elastisch-plastischen Bedingung

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} \quad (3.11)$$

in die plastische Konsistenzbedingung (3.6) eingesetzt, resultiert diese zu

$$0 = \sqrt{2}G\bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}} - \sqrt{2}G\bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} + a3K\text{tr}\dot{\mathbf{H}} - \left(1 - \frac{a}{c}\bar{I}_1\right) \dot{c}. \quad (3.12)$$

Mit der Vergleichsdehnungsrate

$$\dot{\varepsilon} = \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}} + \frac{3aK}{\sqrt{2G}} \text{tr} \dot{\bar{\mathbf{H}}} \quad (3.13)$$

kann die Gl. (3.12) zu

$$\sqrt{2G}\dot{\varepsilon} - \sqrt{2G}\dot{\gamma} = \left(1 - \frac{a}{c}\bar{I}_1\right) \dot{c} \quad (3.14)$$

umgestellt werden, mit welcher nun die Berechnungen auf skalarer Ebene fortgeführt werden können. Eine alternative Darstellung von (3.14) lautet

$$\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma} = \alpha \dot{c} \quad (3.15)$$

und stellt die skalare Grundgleichung des Problems dar. Diese Gleichung beinhaltet die vom Spannungszustand abhängige Variable

$$\alpha = \frac{1 - \frac{a}{c}\bar{I}_1}{\sqrt{2G}}. \quad (3.16)$$

b) Numerische Integration

In (3.15) wird die Rate \dot{c} durch den Ausdruck $\Delta c = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{c} dt$ integriert. Die Gleichung

$$\hat{\alpha} \Delta c = \Delta \varepsilon - \Delta \gamma \quad (3.17)$$

wird nun mit der für die Mittelpunktintegration notwendigen Variablen $\hat{\alpha}$, welche die Variable α (3.16) in der Mitte des betrachteten Inkrementes darstellt, formuliert. Die angenommene plastische Vergleichsdehnungsrate ergibt sich unter der beschriebenen Annahme, dass anfangs alle Verzerrungsinkremente als plastisch definiert werden (plastischer Prädiktor), zu

$$\Delta \gamma_{\text{pr}} = \Delta \varepsilon. \quad (3.18)$$

Unter Verwendung eines Verfestigungsgesetzes wird die am Ende des Zeitinkrementes vorhandene plastische Prädiktorspannung

$$c_{\text{pr}} = c[\gamma(t) + \Delta \gamma_{\text{pr}}] \quad (3.19)$$

ermittelt, wobei $\gamma(t)$ die plastische Vergleichsdehnung zu Beginn des Zeitschrittes beschreibt. Die berechnete Spannung ist jedoch größer als die tatsächliche Spannung,

da

$$\Delta\gamma_{\text{pr}} > \Delta\gamma. \quad (3.20)$$

Das gesamte Verzerrungsinkrement $\Delta\varepsilon$ teilt sich in plastische Verzerrungsinkremente $\Delta\gamma$ und elastische Verzerrungsinkremente auf. Zugleich charakterisieren die elastischen Anteile den Fehler der Verzerrungsinkremente

$$\Delta_{\text{er}}\gamma = \Delta\varepsilon - \Delta\gamma. \quad (3.21)$$

Durch Einsetzen von (3.17) und (3.21) in den Fehler der Fließspannung

$$\Delta_{\text{er}}c = c_{\text{pr}} - c(t + \Delta t) \quad (3.22)$$

folgt

$$\Delta_{\text{er}}c = c_{\text{pr}} - c(t) - \frac{1}{\hat{\alpha}}\Delta_{\text{er}}\gamma. \quad (3.23)$$

Das Stoffgesetz

$$\Delta_{\text{er}}c \cong \frac{\partial c}{\partial \gamma}\Delta_{\text{er}}\gamma \quad (3.24)$$

resultiert aus der Auswertung des c - γ -Diagramms. Durch Gleichsetzen von (3.23) mit (3.24) resultiert

$$\Delta_{\text{er}}\gamma = \frac{c_{\text{pr}} - c(t)}{\frac{1}{\hat{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial \gamma}}. \quad (3.25)$$

Am Ende des Zeitinkrementes ergibt sich die tatsächlich vorhandene plastische Vergleichsverzerrung mit

$$\Delta\gamma = \Delta\gamma_{\text{pr}} - \Delta_{\text{er}}\gamma \quad (3.26)$$

zu

$$\gamma(t + \Delta t) = \gamma(t) + \Delta\gamma. \quad (3.27)$$

c) Tensorielle Größen

Zur Rückrechnung der skalaren Größen in tensorielle Größen wird der in der Mitte des Zeitinkrementes normierte effektive deviatorische Spannungstensor

$$\hat{\bar{\mathbf{N}}} = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{N}}(t + \Delta t) + \bar{\mathbf{N}}(t)] = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{N}}_{n+1} + \bar{\mathbf{N}}_n) \quad (3.28)$$

benötigt, um den plastischen Verzerrungszuwachs

$$\Delta \bar{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \Delta \gamma \hat{\bar{\mathbf{N}}} \quad (3.29)$$

des gesamten Zeitinkrementes zu bestimmen. Der Tensor $\hat{\bar{\mathbf{N}}}$ ermittelt sich aus dem zu Beginn des Zeitinkrementes normierten effektiven deviatorischen Spannungstensor

$$\bar{\mathbf{N}}_n = \frac{1}{\sqrt{2J_{2n}}} \text{dev} \bar{\mathbf{T}}_n \quad (3.30)$$

und dem zum Ende des Zeitinkrementes normierten effektiven deviatorischen Spannungstensor

$$\bar{\mathbf{N}}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2J_{2n+1}}} \text{dev} \bar{\mathbf{T}}_{n+1}. \quad (3.31)$$

Durch Einsetzen von (3.28), (3.29), (3.30) und (3.31) in die Integration der Gl. (3.7)

$$\begin{aligned} \text{dev} \Delta \bar{\mathbf{T}} &= \text{dev} \bar{\mathbf{T}}_{n+1} - \text{dev} \bar{\mathbf{T}}_n = 2G \text{dev} \Delta \bar{\mathbf{H}}^{\text{el}} \\ &= 2G [\text{dev} (\Delta \bar{\mathbf{H}} - \Delta \bar{\mathbf{H}}^{\text{pl}})] \end{aligned} \quad (3.32)$$

resultiert die Gleichung

$$\sqrt{2J_{2n+1}} \bar{\mathbf{N}}_{n+1} - \sqrt{2J_{2n}} \bar{\mathbf{N}}_n = 2G \text{dev} \Delta \bar{\mathbf{H}} - 2G \Delta \gamma \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{N}}_{n+1} + \bar{\mathbf{N}}_n), \quad (3.33)$$

welche umgestellt zu

$$\bar{\mathbf{N}}_{n+1} = \frac{2G \text{dev} \Delta \bar{\mathbf{H}} + (\sqrt{2J_{2n}} - G \Delta \gamma) \bar{\mathbf{N}}_n}{\sqrt{2J_{2n+1}} + G \Delta \gamma} \quad (3.34)$$

führt. Mit dem normierten Tensor $\bar{\mathbf{N}}_{n+1}$ lassen sich alle weiteren Größen für den Zeitschritt t_{n+1} berechnen.

d) Tangentenmodul

Für eine elastisch-plastische numerische Berechnung ist es notwendig, den konsistenten elastisch-plastischen Tangentenmodul

$$\bar{\mathbf{C}}^{\text{ep}} = \frac{d\bar{\mathbf{T}}}{d\bar{\mathbf{A}}} \quad (3.35)$$

zu ermitteln, um bei numerischen Berechnungen mit ANSYS eine quadratische Konvergenz zu erhalten.

Durch Einsetzen von (3.25) in (3.26) resultiert

$$d\gamma = d\gamma_{\text{pr}} \left(\frac{\frac{1}{\hat{\alpha}}}{\frac{1}{\hat{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial \gamma}} \right). \quad (3.36)$$

Unter Einbeziehung von (2.22), (3.29) sowie der Bedingung

$$d\bar{\mathbf{H}} = d\gamma_{\text{pr}} \bar{\mathbf{N}} \quad (3.37)$$

bekommt man für das Differential der elastischen Verzerrungen

$$d\bar{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \left[\mathbb{I} - \left(\frac{\frac{1}{\hat{\alpha}}}{\frac{1}{\hat{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial \gamma}} \right) \hat{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} \right] d\bar{\mathbf{H}}. \quad (3.38)$$

Der elastisch-plastische Tangentenmodul ergibt sich damit zu

$$\bar{\mathbb{C}}^{\text{ep}} = \bar{\mathbb{C}}^{\text{el}} - 2G \left(\frac{\frac{1}{\hat{\alpha}}}{\frac{1}{\hat{\alpha}} + \frac{\partial c}{\partial \gamma}} \right) \hat{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}}. \quad (3.39)$$

3.2.2 Geschädigte Konfigurationen

In Kap. 2.3.2 wurde gezeigt, dass sich die Schädigungsbedingung und das Schädigungsgesetz der isotropen Schädigung im Vergleich zur anisotropen Schädigung unterscheiden [23]. Somit ist auch die numerische Implementierung beider Schädigungen ungleich [18]. Die isotrope numerische Implementierung vereinfacht sich, da in dieser keine anisotropen Effekte berücksichtigt werden.

Isotrope Schädigung

a) Skalare Größen

Die für die isotrope Schädigungsbedingung (2.104) verwendete Annahme, dass bei isotroper Schädigung aufgrund des hydrostatischen Spannungszustandes lediglich ein Volumenzuwachs stattfindet, führt zu dem isotropen Schädigungstensor

$$\mathbf{R}_{\text{iso}} = \mathbf{R}^* = (1 - f)^{-\frac{2}{3}} \mathbf{1}. \quad (3.40)$$

Die Porosität

$$f = \frac{dv - d\bar{v}}{dv} \quad (3.41)$$

ermittelt sich aus dem Volumen des gesamten Elementes dv und dem Volumen des Matrixmaterials des Elementes $d\bar{v}$ [45]. Der Schädigungsverzerrungstensor (2.36) kann daher auch mit $f^* = \ln(1-f)^{-1}$ als

$$\mathbf{A}_{\text{iso}}^{\text{da}} = \frac{1}{3} \ln(1-f)^{-1} \mathbf{1} = \frac{1}{3} f^* \mathbf{1} \quad (3.42)$$

formuliert werden. Die Ableitung ist zugleich das isotrope Schädigungsgesetz (2.105)

$$\dot{\mathbf{H}}_{\text{iso}}^{\text{da}} = \dot{\mathbf{A}}_{\text{iso}}^{\text{da}} = \frac{1}{3} (1-f)^{-1} \dot{f} \mathbf{1} = \dot{\mu} \left(\alpha \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \right), \quad (3.43)$$

welches zum einen mit der Ableitung der Porosität \dot{f} und zum anderen mit der schädigenden Vergleichsdehnungsrate $\dot{\mu}$ dargestellt werden kann. Der Parameter $\alpha = 1$, auf welchen in Kap. 4.2 näher eingegangen wird, führt durch einen Koeffizientenvergleich zu der Beziehung

$$\dot{\mu} = \frac{1}{\sqrt{3}(1-f)} \dot{f}. \quad (3.44)$$

Die Spur der isotropen Rate des Schädigungsverzerrungstensors (3.43) ergibt sich zu

$$\text{tr} \dot{\mathbf{H}}_{\text{iso}}^{\text{da}} = \sqrt{3} \dot{\mu}. \quad (3.45)$$

Da der Tensor \mathbf{R}_{iso} und die isotrope Rate des Schädigungsverzerrungstensors $\dot{\mathbf{H}}_{\text{iso}}^{\text{da}}$ nur Diagonaltensoren sind, vereinfacht sich (2.40) zu

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} - \dot{\mathbf{H}}_{\text{iso}}^{\text{da}}. \quad (3.46)$$

Da auch hier die plastische Volumenkonstanz $\text{tr} \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = 0$ angenommen wird, kann die Gleichung weiter zu

$$\text{tr} \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \text{tr} \dot{\mathbf{H}} - \text{tr} \dot{\mathbf{H}}_{\text{iso}}^{\text{da}} = \text{tr} \dot{\mathbf{H}} - \sqrt{3} \dot{\mu} \quad (3.47)$$

vereinfacht werden. Zur Ermittlung der skalaren Größen wird die plastische Konsistenzbedingung (3.6)

$$\left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1 \right) \dot{c} = \left(\sqrt{2} G \bar{\mathbf{N}} + 3aK \mathbf{1} \right) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \mathbf{C}_3 \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} \quad (3.48)$$

verwendet. Mit (2.83), (3.45) und (3.46) ergibt sich

$$\dot{c} = \sqrt{2} G_1 (\dot{\epsilon}_{\text{isc}} - \dot{\gamma} + k_1 \dot{\epsilon}_{\text{vol}} - k_2 \dot{\mu}) \quad (3.49)$$

mit der isochoren Vergleichsdehnungsrate

$$\dot{\epsilon}_{\text{isc}} = \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}, \quad (3.50)$$

der volumetrischen Vergleichsdehnungsrate

$$\dot{\epsilon}_{\text{vol}} = \text{tr} \dot{\mathbf{H}} \quad (3.51)$$

sowie den Faktoren

$$G_1 = \frac{G}{1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1}, \quad (3.52)$$

$$k_1 = \frac{3aK}{\sqrt{2G}} \quad (3.53)$$

und

$$k_2 = \sqrt{3}k_1 = \frac{3\sqrt{3}aK}{\sqrt{2G}}. \quad (3.54)$$

Die Ableitung der isotropen Schädigungsbedingung (2.104) liefert die Konsistenzbedingung der isotropen Schädigung

$$\dot{\sigma} = \tilde{\alpha} \dot{I}_1. \quad (3.55)$$

Die Spur des Kirchhoffschen Spannungstensors \mathbf{T} (2.85) kann durch das Zusammenfassen von Faktoren vereinfacht werden. Durch Einbeziehung von $\text{tr} \mathbf{A}_{\text{iso}}^{\text{da}} = f^*$ (3.42) folgt

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{T} = 3\tilde{K} \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \quad (3.56)$$

mit

$$\tilde{K} = K + \tilde{\eta} f^* \quad (3.57)$$

und

$$\tilde{\eta} = 2\eta_1 + \frac{2}{3}(\eta_2 + \eta_3) + \frac{2}{9}\eta_4. \quad (3.58)$$

Die Ableitung

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \text{tr} \dot{\mathbf{T}} = 3\tilde{K} \text{tr} \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} + 3\tilde{\eta} (1 - f)^{-1} \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \dot{f} \\ &= 3\tilde{K} \text{tr} \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} + 3\sqrt{3}\tilde{\eta} \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \dot{\mu} \end{aligned} \quad (3.59)$$

eingesetzt in die Konsistenzbedingung der isotropen Schädigung (3.55) ergibt zusammen mit (3.47)

$$\dot{\sigma} = 3\tilde{\alpha}\tilde{K} (\dot{\varepsilon}_{\text{vol}} - k_3\dot{\mu}) , \quad (3.60)$$

wobei

$$k_3 = \frac{\sqrt{3}\tilde{K} - \sqrt{3}\tilde{\eta}\text{tr}\mathbf{A}^{\text{el}}}{\tilde{K}} \quad (3.61)$$

ist.

b) Numerische Integration

In der geschädigten Konfiguration werden die isochoren Verzerrungen mit der „plastischer Prädiktor - elastischer Korrektor“ -Methode ermittelt. Ein Koeffizientenvergleich der Gl. (3.17) und Gl. (3.49) liefert

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{\text{isc}} + k_1\dot{\varepsilon}_{\text{vol}} - k_2\dot{\mu} \quad (3.62)$$

und

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}G_1} . \quad (3.63)$$

Da weiterhin der plastische Prädiktor $\Delta\gamma_{\text{pr}} = \Delta\varepsilon$ verwendet wird, ist die numerische Berechnung der tatsächlich vorhandenen plastischen Verzerrung identisch der Berechnung in Kap. 3.2.1.

Zusätzlich zu den plastischen Verzerrungen müssen auch die schädigenden Verzerrungen bestimmt werden. Dies geschieht mit der „schädigender Prädiktor - elastischer Korrektor“ -Methode [18], welche vom schematischen Ablauf nur geringe Unterschiede zur „plastischer Prädiktor - elastischer Korrektor“ -Methode aufweist. Zu Beginn der Berechnung werden alle volumetrischen Verzerrungen des Zeitschrittes als schädigende Verzerrungen angenommen. Durch (3.60) resultiert diese angenommene Vergleichsverzerrung zu

$$\Delta\mu_{\text{pr}} = \frac{1}{k_3}\Delta\varepsilon_{\text{vol}} . \quad (3.64)$$

Die Prädiktorschädigungsspannung am Ende des Zeitinkrementes wird mit der schädigenden Vergleichsdehnung zu Beginn des Zeitschrittes $\mu(t)$ unter Verwendung eines Entfestigungsgesetzes zu

$$\sigma_{\text{pr}} = \sigma [\mu(t) + \Delta\mu_{\text{pr}}] \quad (3.65)$$

bestimmt. Die Prädiktorschädigungsspannung wird aufgrund der Bedingung

$$\Delta\mu_{\text{pr}} > \Delta\mu \quad (3.66)$$

falsch ermittelt und beinhaltet so zum Zeitpunkt t_{n+1} den Fehler der Spannungsinkremente

$$\Delta_{\text{er}}\sigma = \sigma_{\text{pr}} - \sigma(t + \Delta t) . \quad (3.67)$$

Der Fehler

$$\Delta_{\text{er}}\mu = \frac{1}{k_3}\Delta\varepsilon_{\text{vol}} - \Delta\mu = \frac{\Delta\sigma}{3\tilde{\alpha}\tilde{K}k_3} \quad (3.68)$$

beschreibt die elastischen Verzerrungsinkremente, welche durch den Prädiktor anfänglich als isotrope schädigende Verzerrungsinkremente angenommen werden. Mit (3.60) und (3.67) folgt

$$\Delta_{\text{er}}\sigma = \sigma_{\text{pr}} - \sigma(t) - \underbrace{3\tilde{\alpha}\tilde{K}k_3\Delta_{\text{er}}\mu}_{\sigma(t+\Delta t) - \sigma(t) = \Delta\sigma} . \quad (3.69)$$

Das Stoffgesetz

$$\Delta_{\text{er}}\sigma \cong \frac{\partial\sigma}{\partial\mu}\Delta_{\text{er}}\mu \quad (3.70)$$

resultiert aus der Auswertung des σ - μ -Diagramms. Mit (3.60) und (3.67) bis (3.70) folgt der Fehler in den Verzerrungsincrementen

$$\Delta_{\text{er}}\mu = \frac{\sigma_{\text{pr}} - \sigma(t)}{3\tilde{\alpha}\tilde{K}k_3 + \frac{\partial\sigma}{\partial\mu}} . \quad (3.71)$$

Die tatsächlich vorhandene schädigende Verzerrung am Ende des Zeitinkrementes berechnet sich mit

$$\Delta\mu = \Delta\mu_{\text{pr}} - \Delta_{\text{er}}\mu \quad (3.72)$$

zu

$$\mu(t + \Delta t) = \mu(t) + \Delta\mu . \quad (3.73)$$

c) Tensorielle Größen

Die Rückrechnung in tensorielle Größen verläuft ähnlich wie in Kap. 3.2.1. Da das elastische Verhalten des Matrixmaterials der geschädigten Konfiguration gleich dem

elastischen Verhalten des ungeschädigten Materials ist (2.42), kann für die ungeschädigte Konfiguration der Deviator des Spannungszuwachses (3.32) auch in der Form

$$\begin{aligned} \operatorname{dev}\Delta\bar{\mathbf{T}} &= \operatorname{dev}\bar{\mathbf{T}}_{n+1} - \operatorname{dev}\bar{\mathbf{T}}_n = 2G \operatorname{dev}\Delta\mathbf{H}^{\text{el}} \\ &= 2G [\operatorname{dev}(\Delta\mathbf{H} - \Delta\bar{\mathbf{H}}^{\text{pl}} - \Delta\mathbf{H}^{\text{da}})] \end{aligned} \quad (3.74)$$

dargestellt werden. Mit (3.28) und dem isotropen Schädigungsgesetz (3.43) wird (3.74) unter Verwendung von (3.29) zu

$$\operatorname{dev}\Delta\bar{\mathbf{T}} = 2G \left[\operatorname{dev}\Delta\mathbf{H} - \frac{1}{2}\Delta\gamma (\bar{\mathbf{N}}_{n+1} + \bar{\mathbf{N}}_n) \right]. \quad (3.75)$$

Mit der Fließbedingung (2.77)

$$\sqrt{\bar{J}_{2n+1}} = c_{n+1} \left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_{1n+1} \right) = \tilde{c}_{n+1} \quad (3.76)$$

ergibt sich der Spannungsdeviator (2.81) zu

$$\operatorname{dev}\bar{\mathbf{T}}_{n+1} = \sqrt{2\bar{J}_{2n+1}} \bar{\mathbf{N}}_{n+1} = \sqrt{2}\tilde{c}_{n+1} \bar{\mathbf{N}}_{n+1}. \quad (3.77)$$

Der für den Zeitpunkt t_{n+1} durchgeführte Schritt besitzt für den Zeitpunkt t_n ebenfalls Gültigkeit.

Durch Einsetzen von (3.77) in (3.75) resultiert

$$\bar{\mathbf{N}}_{n+1} = \frac{2G \operatorname{dev}\Delta\mathbf{H} + (\sqrt{2}\tilde{c}_n - G\Delta\gamma) \bar{\mathbf{N}}_n}{\sqrt{2}\tilde{c}_{n+1} - G\Delta\gamma}. \quad (3.78)$$

Wie schon in Kap. 3.2.1 lassen sich alle weiteren Größen für den Zeitschritt t_{n+1} mit dem normierten Tensor $\bar{\mathbf{N}}_{n+1}$ berechnen.

d) Tangentenmodul

Zur Ermittlung des isotropen elastisch-plastisch-schädigenden Tangentenmoduls $\mathbb{C}_{\text{iso}}^{\text{epd}}$ ist es notwendig, die schädigenden und plastischen Vergleichsdehnungsraten als Differentiale zu formulieren. Durch Einsetzen von (3.64) und (3.71) in die Gl. (3.72) resultiert

$$d\mu = \frac{3\tilde{\alpha}\tilde{K}}{3\tilde{\alpha}\tilde{K}k_3 + \frac{\partial\sigma}{\partial\mu}} \mathbf{1} \cdot d\mathbf{H} = a_3 \mathbf{1} \cdot d\mathbf{H}. \quad (3.79)$$

Mit der Abkürzung a_3 , der anfänglichen Bedingung $\Delta\gamma_{\text{pr}} = \Delta\varepsilon$ (3.18) und (3.49)

folgt

$$d\gamma_{\text{pr}} = \left[\bar{\mathbf{N}} + \underbrace{(k_1 - k_2 a_3)}_{a_1} \mathbf{1} \right] \cdot d\mathbf{H}. \quad (3.80)$$

Die Gleichungen (3.25) und (3.80) eingesetzt in (3.26) ergeben

$$d\gamma = \underbrace{\frac{\sqrt{2}G_1}{\sqrt{2}G_1 + \frac{\partial c}{\partial \gamma}}}_{a_2} (\bar{\mathbf{N}} + a_1 \mathbf{1}) \cdot d\mathbf{H}. \quad (3.81)$$

Unter Verwendung von (3.29), (3.43), (3.46), (3.79) und (3.81) findet sich für (2.88) die neue Darstellung

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} &= \mathbb{C}^{\text{el}} d\mathbf{A}^{\text{el}} + \mathbb{C}^{\text{da}} d\mathbf{A}^{\text{da}} \\ &= \mathbb{C}^{\text{el}} \left(d\mathbf{H} - \hat{\mathbf{N}} d\gamma \right) + (\mathbb{C}^{\text{da}} - \mathbb{C}^{\text{el}}) \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} d\mu \\ &= \mathbb{C}_{\text{iso}}^{\text{epd}} d\mathbf{H} \end{aligned} \quad (3.82)$$

mit dem isotropen elastisch-plastisch-schädigenden Tangentenmodul

$$\mathbb{C}_{\text{iso}}^{\text{epd}} = \mathbb{C}^{\text{el}} - a_2 \left(\mathbb{C}^{\text{el}} \hat{\mathbf{N}} \right) \otimes (\bar{\mathbf{N}} + a_1 \mathbf{1}) + \frac{1}{\sqrt{3}} a_3 [(\mathbb{C}^{\text{da}} - \mathbb{C}^{\text{el}}) \mathbf{1}] \otimes \mathbf{1}. \quad (3.83)$$

Anisotrope Schädigung

a) Skalare Größen

Die Schädigungsvergleichsspannung σ wird anhand eines einfachen Zugversuches ermittelt. Im isotropen Schädigungsfall besteht aufgrund der isotropen Schädigungsbedingung (2.104) die Beziehung $\sigma = I_1 = \sigma_{11}$. Im anisotropen Schädigungsfall resultieren die Invarianten der Schädigungsbedingung (2.97) für einen einfachen Zugversuch zu $I_1 = \sigma_{11}$ und $J_2 = 1/3 \sigma_{11}^2$. Eingesetzt in die Schädigungsbedingung (2.97) resultiert die anisotrope Schädigungsspannung zu

$$\sigma^* = \tilde{\alpha} \sigma_{11} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{3}} \sigma_{11} \quad (3.84)$$

Somit ergibt sich die allgemeine Schädigungsspannung zu

$$\sigma = \sigma_{11} = \frac{\sigma^*}{\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{3}}}. \quad (3.85)$$

Das Skalarprodukt aus Einheitstensor und der Rate des Spannungstensors (2.85)

$$\mathbf{1} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 3\tilde{K}^* \text{tr} \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} + c_1 \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} + c_2 \left(\mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} \right) \quad (3.86)$$

mit den skalaren Variablen

$$\tilde{K}^* = K + \left(2\eta_1 + \frac{2}{3}\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_3 \right) \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}}, \quad (3.87)$$

$$c_1 = (6\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3) \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}}, \quad (3.88)$$

$$c_2 = 3\eta_3 + 2\eta_4, \quad (3.89)$$

und das Skalarprodukt aus normiertem Spannungsdeviator \mathbf{N} (2.102) und der Rate des Spannungstensors (2.85)

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 2\tilde{G}\mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} c_3 \text{tr} \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \eta_4 (\mathbf{N}\mathbf{A}^{\text{da}} + \mathbf{A}^{\text{da}}\mathbf{N}) \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} \\ + c_4 \text{tr} \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} + \eta_4 (\mathbf{N}\mathbf{A}^{\text{el}} + \mathbf{A}^{\text{el}}\mathbf{N}) \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} \end{aligned} \quad (3.90)$$

mit den skalaren Variablen

$$\tilde{G} = G + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}}, \quad (3.91)$$

$$c_3 = \eta_3 \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{\text{da}}, \quad (3.92)$$

$$c_4 = 2\eta_2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} \quad (3.93)$$

eingesetzt in die anisotrope schädigende Konsistenzbedingung

$$\dot{\sigma}^* = \tilde{\alpha} \dot{I}_1 + \tilde{\beta} \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \dot{J}_2 = \left(\tilde{\alpha} \mathbf{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\beta} \mathbf{N} \right) \cdot \dot{\mathbf{T}} \quad (3.94)$$

liefert den Ausdruck

$$\dot{\sigma}^* = \mathbf{C}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \mathbf{C}_2 \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}. \quad (3.95)$$

Daraus folgt mit (2.40) eine weitere Formulierung für die anisotrope schädigende Konsistenzbedingung (3.94)

$$\dot{\sigma}^* = \mathbf{C}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{R}\mathbf{C}_1\mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} - (\mathbf{Q}^{\text{el}}\mathbf{C}_1\mathbf{Q}^{\text{el}-1} - \mathbf{C}_2) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}, \quad (3.96)$$

welche die Tensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 = & \left[\sqrt{2}\tilde{\beta}\tilde{G}\mathbf{N} + \left(3\tilde{\alpha}\tilde{K}^* + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\beta}c_3 \right) \mathbf{1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\beta}\eta_4 (\mathbf{N}\mathbf{A}^{\text{da}} + \mathbf{A}^{\text{da}}\mathbf{N}) + \tilde{\alpha}c_2\mathbf{A}^{\text{da}} \right] \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} \end{aligned} \quad (3.97)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2 = & \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\beta}\eta_3 \text{tr}\mathbf{A}^{\text{el}}\mathbf{N} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\beta}c_4 + \tilde{\alpha}c_1 \right) \mathbf{1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\beta}\eta_4 (\mathbf{N}\mathbf{A}^{\text{el}} + \mathbf{A}^{\text{el}}\mathbf{N}) + \tilde{\alpha}c_2\mathbf{A}^{\text{el}} \right] \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \end{aligned} \quad (3.98)$$

enthält. Mit den in der Mitte des Zeitinkrementes normierten Spannungsdeviatoren

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{2} [\mathbf{N}(t + \Delta t) + \mathbf{N}(t)] = \frac{1}{2} (\mathbf{N}_{n+1} + \mathbf{N}_n) , \quad (3.99)$$

und

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{2} [\mathbf{M}(t + \Delta t) + \mathbf{M}(t)] = \frac{1}{2} (\mathbf{M}_{n+1} + \mathbf{M}_n) , \quad (3.100)$$

welche aufgrund der Mittelpunktintegration benötigt werden, lässt sich das Inkrement der Schädigungsverzerrung (2.101) als

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{H}^{\text{da}} &= \Delta\mu\alpha\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{1} + \Delta\mu\frac{\beta}{2}(\mathbf{N}_{n+1} + \mathbf{N}_n) + \Delta\mu\frac{\delta}{2}(\mathbf{M}_{n+1} + \mathbf{M}_n) \\ &= \Delta\mu\mathbf{C}_4 \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_4 = \alpha\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{1} + \beta\hat{\mathbf{N}} + \delta\hat{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (3.101)$$

formulieren. Mit dem Tensor \mathbf{C}_4 sowie mit (3.85) lautet die neue Formulierung für (3.96)

$$\dot{\sigma} = \sqrt{2}\tilde{G}^* (\dot{\varepsilon}_2 - k_3^*\dot{\gamma} - k_4^*\dot{\mu}) \quad (3.102)$$

mit

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{G}}\mathbf{C}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}} , \quad (3.103)$$

$$k_3^* = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{G}}\mathbf{R}\mathbf{C}_1\mathbf{R}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{N}} , \quad (3.104)$$

$$k_4^* = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{G}} (\mathbf{Q}^{\text{el}}\mathbf{C}_1\mathbf{Q}^{\text{el}^{-1}} - \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{C}_4 \quad (3.105)$$

und

$$\tilde{G}^* = \frac{\tilde{G}}{\tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{3}}}. \quad (3.106)$$

Für die anisotrope Schädigung wird die plastische Konsistenzbedingung (3.48) mit den skalaren Größen

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_3 \cdot \dot{\mathbf{H}}, \quad (3.107)$$

$$k_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}G} \mathbf{R} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{R}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{N}} \quad (3.108)$$

$$k_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}G} \mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{C}_3 \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \cdot \mathbf{C}_4 \quad (3.109)$$

angegeben, so dass alternativ

$$\dot{c} = \sqrt{2}G_1 (\dot{\varepsilon}_1 - k_1^* \dot{\gamma} - k_2^* \dot{\mu}) \quad (3.110)$$

folgt.

b) Numerische Integration

Da die Gleichungen für die Fließspannungsrate (3.110) und für die Schädigungsspannungsrate (3.102) jeweils sowohl von der plastischen Vergleichsdehnungsrate $\dot{\gamma}$ und der schädigenden Vergleichsdehnungsrate $\dot{\mu}$ abhängen, ist für die anisotrope Schädigung eine Unterscheidung in plastischen und schädigenden Prädiktor nicht möglich. Stattdessen wird nun die „inelastische Prädiktor - elastischer Korrektor“-Methode verwendet [18]. Hierbei werden alle Verzerrungssinkremente $\Delta\varepsilon_1$ und $\Delta\varepsilon_2$ als inelastisch angenommen. Das gekoppelte Gleichungssystem aus (3.102) und (3.110) lautet

$$\begin{bmatrix} k_1^* & k_2^* \\ k_3^* & k_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\gamma_{\text{pr}} \\ \Delta\mu_{\text{pr}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

Diese Matrixgleichung

$$\mathbf{k}^* \Delta\boldsymbol{\gamma}_{\text{pr}} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.112)$$

liefert umgestellt die angenommenen inelastischen Vergleichsdehnungssinkremente

$$\Delta\boldsymbol{\gamma}_{\text{pr}} = \mathbf{k}^{*-1} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.113)$$

mit welchen die Prädiktorfließspannung c_{pr} (3.19) und die Prädiktorschädigungsspannung σ_{pr} (3.65) errechnet werden.

Mit (3.21), (3.23) und (3.24) wird der Fehler des Inkrementes der Fließspannung als

$$\Delta_{\text{er}}c \cong \frac{\partial c}{\partial \gamma} \Delta_{\text{er}}\gamma = c_{\text{pr}} - c(t) - \Delta c \quad (3.114)$$

formuliert. Der Fehler des Inkrementes der Schädigungsspannung wird mit (3.68), (3.69) und (3.70) zu

$$\Delta_{\text{er}}\sigma \cong \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \Delta_{\text{er}}\mu = \sigma_{\text{pr}} - \sigma(t) - \Delta \sigma. \quad (3.115)$$

Die Fehler in den Verzerrungsincrementen beschreiben die elastischen Verzerrungsincremente, mit denen die tatsächlichen Spannungsänderungen ermittelt werden. Somit beschreibt

$$\Delta c = \sqrt{2}G_1 (k_1^* \Delta_{\text{er}}\gamma - k_2^* \Delta_{\text{er}}\mu) \quad (3.116)$$

mit (3.110) die Änderung der Fließspannung. Mit (3.102) wird die Änderung der Schädigungsspannung als

$$\Delta \sigma = \sqrt{2}\tilde{G}^* (k_3^* \Delta_{\text{er}}\gamma - k_4^* \Delta_{\text{er}}\mu). \quad (3.117)$$

beschrieben. Aus den vorherigen vier Gleichungen folgt

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}G_1 k_1^* + \frac{\partial c}{\partial \gamma} & \sqrt{2}G_1 k_2^* \\ \sqrt{2}\tilde{G}^* k_3^* & \sqrt{2}\tilde{G}^* k_4^* + \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{\text{er}}\gamma \\ \Delta_{\text{er}}\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\text{pr}} - c(t) \\ \sigma_{\text{pr}} - \sigma(t) \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

Die dazugehörige Matrixgleichung

$$\mathbf{a} \Delta_{\text{er}}\boldsymbol{\gamma} = \Delta \mathbf{c}_{\text{pr}} \quad (3.119)$$

dient umgestellt

$$\Delta_{\text{er}}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{a}^{-1} \Delta \mathbf{c}_{\text{pr}} \quad (3.120)$$

zur Berechnung der Fehler der plastischen und schädigenden Vergleichsdehnungsincremente. Die Berechnung der tatsächlichen Vergleichsdehnungsincremente erfolgt mit der Matrixgleichung

$$\Delta \boldsymbol{\gamma} = \Delta \boldsymbol{\gamma}_{\text{pr}} - \Delta_{\text{er}}\boldsymbol{\gamma}. \quad (3.121)$$

c) Tensorielle Größen

Das Schädigungsgesetz (3.101) und (3.74) führt für den Deviator des Spannungszu-

wachses der ungeschädigten Konfiguration zu der Formulierung

$$\begin{aligned} \operatorname{dev}\Delta\bar{\mathbf{T}} = 2G \left\{ \operatorname{dev}\Delta\mathbf{H} - \frac{1}{2}\Delta\gamma [\bar{\mathbf{N}}_{n+1} + \bar{\mathbf{N}}_n] \right. \\ \left. - \left[\Delta\mu\frac{\beta}{2} (\mathbf{N}_{n+1} + \mathbf{N}_n) + \Delta\mu\frac{\delta}{2} (\mathbf{M}_{n+1} + \mathbf{M}_n) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Zur Rückrechnung auf tensorielle Größen werden die tatsächlichen Vergleichsdehnungen sowie Gl. (3.122) genutzt. In dieser Gleichung sind jedoch Größen vorhanden, welche zum Zeitpunkt t_{n+1} noch unbekannt sind. Diese deviatorischen Anteile dürfen aufgrund der Anisotropie nun nicht vernachlässigt werden.

Zum einen ist dies der normierte Spannungsdeviator \mathbf{M}_{n+1} . Zusammen mit \mathbf{M}_n ist der Einfluss dieser beiden Tensoren sehr gering, da der kinematische Parameter δ des Schädigungsgesetzes sehr klein ist. Eine numerische Iteration zur Lösung stellt im Verhältnis zum Einfluss des Ergebnisses einen zu hohen Aufwand da. Desweiteren ist die Differenz zwischen $(\mathbf{M}_n + \mathbf{M}_{n+1})$ und $(\mathbf{M}_n + \mathbf{M}_n)$ marginal, sodass in dieser Arbeit die Annahme

$$\mathbf{M}_{n+1} \cong \mathbf{M}_n \quad (3.123)$$

verwendet wird.

Zum anderen ist auch der normierte effektive Spannungsdeviator $\bar{\mathbf{N}}_{n+1}$ zum Ende des Zeitinkrementes unbekannt. Zur Vereinfachung wird in dieser Arbeit die zu (3.123) vergleichbare Annahme

$$\bar{\mathbf{N}}_{n+1} \cong \bar{\mathbf{N}}_n \quad (3.124)$$

gewählt.

Mit diesen numerischen Approximationen und (3.122) folgt für den normierten Spannungsdeviator

$$\begin{aligned} \beta G \Delta\mu \mathbf{N}_{n+1} = 2G \operatorname{dev}\Delta\mathbf{H} - 2G \Delta\gamma \bar{\mathbf{N}}_n - \beta G \Delta\mu \mathbf{N}_n \\ - 2\delta G \Delta\mu \mathbf{M}_n - \sqrt{2} \left(\sqrt{J_{2n+1}} - \sqrt{J_{2n}} \right) \bar{\mathbf{N}}_n. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Mit der Matrix

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial \gamma} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

folgt aus (3.120) die Matrixgleichung

$$d\gamma_{\text{er}} = \mathbf{a}^{-1} d\mathbf{c}_{\text{pr}} = \mathbf{a}^{-1} \mathbf{h} d\gamma_{\text{pr}}. \quad (3.127)$$

Durch Einsetzen von (3.113) und (3.127) in die Matrixgleichung (3.121) resultiert

$$d\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{b} \, d\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b} = \mathbf{k}^{-1} - \mathbf{a}^{-1} \mathbf{h} \mathbf{k}^{-1}. \quad (3.128)$$

Die ausgeschriebene Form

$$\begin{bmatrix} d\gamma \\ d\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

führt mit den Gleichungen (3.101), (3.103) und (3.107) zu

$$d\bar{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \hat{\mathbf{N}} d\gamma = \hat{\mathbf{N}} \left(\frac{b_{11}}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_3 + \frac{b_{12}}{\sqrt{2}\tilde{G}} \mathbf{C}_1 \right) \cdot d\mathbf{H} \quad (3.130)$$

und

$$\begin{aligned} d\mathbf{H}^{\text{da}} &= \left(\alpha \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} + \beta \hat{\mathbf{N}} + \delta \hat{\mathbf{M}} \right) d\gamma \\ &= \mathbf{C}_4 \left(\frac{b_{21}}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_3 + \frac{b_{22}}{\sqrt{2}\tilde{G}} \mathbf{C}_1 \right) \cdot d\mathbf{H}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

d) Tangentenmodul

Da sich im Anisotropen der Zusammenhang zwischen den Verzerrungsraten (2.40) ebenfalls nicht vereinfacht, ist der anisotrope konsistente Tangentenmodul äußerst komplex und ermittelt sich zu

$$d\mathbf{T} = \mathbb{C}^{\text{el}} d\mathbf{A}^{\text{el}} + \mathbb{C}^{\text{da}} d\mathbf{A}^{\text{da}} = \mathbb{C}^{\text{epd}} d\mathbf{H} \quad (3.132)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\text{epd}} &= \mathbb{C}^{\text{el}} - \left[\mathbb{C}^{\text{el}} \left(\mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{N}} \mathbf{R} \right) \right] \otimes \left(\frac{b_{11}}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_3 + \frac{b_{12}}{\sqrt{2}\tilde{G}} \mathbf{C}_1 \right) \\ &\quad - \left[\mathbb{C}^{\text{el}} \left(\alpha \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} + \beta \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \hat{\mathbf{N}} \mathbf{Q}^{\text{el}} + \delta \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \hat{\mathbf{M}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \right) \right] \\ &\quad \quad \quad \otimes \left(\frac{b_{21}}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_3 + \frac{b_{22}}{\sqrt{2}\tilde{G}} \mathbf{C}_1 \right) \\ &\quad + \left[\mathbb{C}^{\text{da}} \left(\alpha \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} + \beta \hat{\mathbf{N}} + \delta \hat{\mathbf{M}} \right) \right] \otimes \left(\frac{b_{21}}{\sqrt{2}G} \mathbf{C}_3 + \frac{b_{22}}{\sqrt{2}\tilde{G}} \mathbf{C}_1 \right). \end{aligned} \quad (3.133)$$

3.3 Schnittstelle Usermat

3.3.1 APDL-Code

Für das SOLID185-Element kann die Nutzer-Materialroutine USERMAT zur Implementierung eigener Materialgesetze genutzt werden. Im APDL-Code wird die Anzahl der Materialparameter über den `TB,USER`-Befehl definiert. Mit dem `TB,DATA`-Befehl werden die Werte der Materialparameter an die USERMAT-Routine übergeben. Zur Nutzung von Zustandsvariablen muss die Anzahl dieser mit dem `TB,STATE`-Befehl festgelegt werden.

Die Anwendung der Theorie großer Verzerrungen muss im APDL-Code vermerkt sein, da sich dadurch die Bedeutung einiger Variablen in der Nutzer-Materialroutine USERMAT ändert.

3.3.2 Routine Usermat

Die von ANSYS verarbeiteten Variablen werden an die Nutzer-Materialroutine USERMAT übergeben (Eingabe) beziehungsweise von dieser übernommen (Ausgabe). Sie können daher in die drei Gruppen

- Eingabeargumente,
- Eingabe-Ausgabeargumente und
- Ausgabeargumente.

aufgeteilt werden [2].

Im Folgenden werden nur die für die Implementierung des vorgestellten Materialgesetzes relevanten Argumente vorgestellt, beginnend mit den Eingabeargumenten. Die Komponenten F_{ij} des Deformationsgradienten \mathbf{F} (2.5) am Ende des aktuellen Zeitinkrements werden durch das „double precision“ (3×3)-Feld `defGrad` beschrieben.

Der Metriktransformationstensor (2.6)

$$\mathbf{Q} = \overset{o}{G}{}^{ik} G_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (3.134)$$

bezieht sich auf die Momentankonfiguration und wird mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} ermittelt. Die für die weiteren Berechnungen notwendigen Komponenten des Metriktransformationstensors \mathbf{Q} ergeben sich resultierend aus (3.134) zu

$$Q_{,j}^i = \overset{o}{G}{}^{ik} G_{kj} \quad (3.135)$$

Im Weiteren übergeben die „integer“-Variablen `elemId` und `kDomIntPt` die Elementnummer und die Nummer des Gaußintegrationspunktes. Die „double precision“

-Variable `dTime` gibt an, wie groß das aktuelle Zeitinkrement ist, in welchem die inkrementellen Verzerrungen `dStrain` aufgebracht werden. Die Verzerrungszuwächse `dStrain` werden als ein „double precision“ (6×1)-Feld übergeben, wobei die ersten drei Komponenten die Normalverzerrungen darstellen und die letzten drei die Schubverzerrungen. Die im APDL-Code definierten Materialparameter stehen in dem „double precision“ -Feld `prop`. Die Größe dieses Feldes hängt von der Anzahl der Materialparameter ab und wird mit der „integer“ -Variablen `nprop` festgelegt. Mit der „integer“ -Variablen `nstatev` wird die Anzahl der Zustandsvariablen definiert.

Bei den Zustandsvariablen handelt es sich um Eingabe-Ausgabevariablen, die nach dem letzten Iterationsschritt jedes Zeitinkrements aktualisiert werden. Das „double precision“ -Feld `ustatev` beinhaltet diese Variablen.

Die weiteren Eingabe-Ausgabeargumente werden lediglich als Ausgabeargumente behandelt. Dies sind zum einen die lediglich für die grafische Ausgabe benötigten „double precision“ -Variablen der elastischen Arbeit `sedE1`, der plastischen Arbeit `sedP1` und der plastischen Vergleichsdehnungsrate `epseq` und zum anderen die in einem „double precision“ (6×1)-Feld formulierten Spannungen. Hier beschreiben die ersten drei Komponenten die Normalspannungen und die letzten drei Komponenten die Schubspannungen.

Von besonderer Bedeutung ist der Tangentenmodul `dsdeP1`. Dieses Ausgabeargument muss als „double precision“ (6×6)-Feld formuliert und an ANSYS übergeben werden.

4 Einaxiale Versuche

In diesem Kapitel werden als erstes die Experimente mit einfachen Zugproben, welche zur Identifizierung der elastischen, plastischen und schädigenden Materialparameter dienen, beschrieben. Es folgt eine Erläuterung der mit den Experimenten zu vergleichenden numerischen Simulationen. Dabei werden unter anderem das Verfestigungsgesetz und ein neues Entfestigungsgesetz vorgestellt. Abschließend werden Vergleichsrechnungen mit dem Schädigungsmodell nach Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) durchgeführt, um die Vorteile des hier verwendeten Schädigungsmodells aufzuzeigen.

4.1 Beschreibung der Experimente

4.1.1 Probekörper

Zur Identifizierung der Materialparameter werden flache ungekerbte und verschiedenartig gekerbte ebene Zugproben (Abb. 4.1) mit einer Dicke von 4mm verwendet, wobei bei allen Proben die Querschnittsfläche im Zentrum jeweils 20mm^2 beträgt. Für die gekerbten Zugproben werden Radien von 25mm , $7,5\text{mm}$, $2,5\text{mm}$

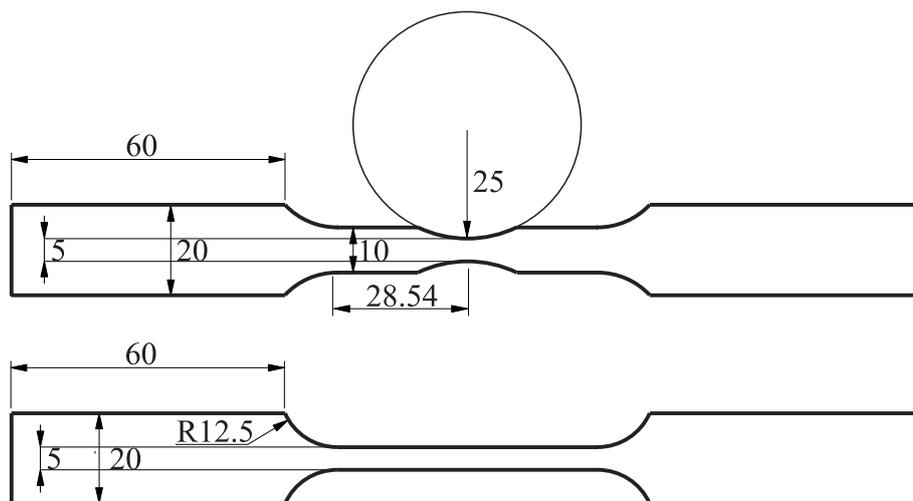


Abbildung 4.1: Zugstäbe mit und ohne Kerbradius

und $1,25\text{mm}$ gewählt (Abb. 4.2). Die Zugproben sind aus der Aluminiumlegierung

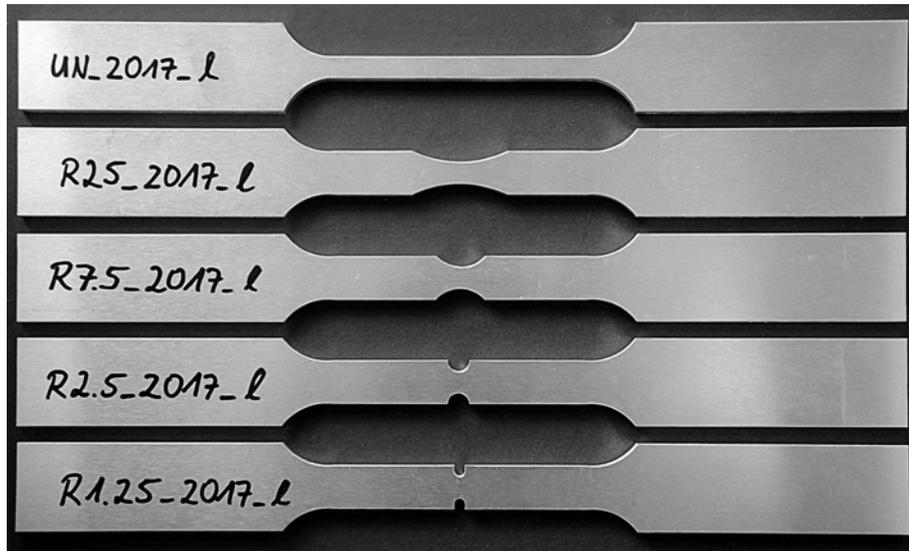


Abbildung 4.2: Ungekerbte und gekerbte Zugproben

AlCuMg1 EN AW 2017 gefertigt und wurden sowohl längs als auch quer zur Walzrichtung ausgeschnitten, um mögliche Streuungen der Versuchskurven aufgrund von anisotropen Materialeffekten ausschließen zu können, da sich die in dieser Arbeit verwendete Theorie auf ein isotropes Materialverhalten bezieht.

Für die Herstellung der zur Bestimmung der Materialparameter notwendigen Zugproben und der in Kap. 5 verwendeten biaxial belasteten Versuchskörper mussten aufgrund von produktions- und liefertechnischen Gründen jedoch leider zwei unterschiedliche Chargen verwendet werden. Die Auswirkungen auf die Bestimmung der Materialparameter wird in Kap. 4.2 erläutert.

4.1.2 Prüfmaschine

Die einaxialen Versuche wurden mit der Material-Prüfmaschine *TC-FR020TH.A50* der Firma *Zwick Roell* (Abb. 4.3) durchgeführt. Diese eignet sich für Lasten bis $20kN$. Zur Messung der Verschiebungen wurde der Längenänderungsaufnehmer *BTC-EXMULTI.012*, welcher ebenfalls von der Firma *Zwick Roell* hergestellt wurde, verwendet. Dieser arbeitet mit einer Genauigkeit Klasse 1 nach EN ISO 9513.

4.1.3 Versuchsaufbau und Ablauf

Der Probekörper wurde vertikal in die Prüfmaschine eingelegt und durch die Pressbacken oben und unten eingespannt. Die Pressbacken hatten einen Abstand von

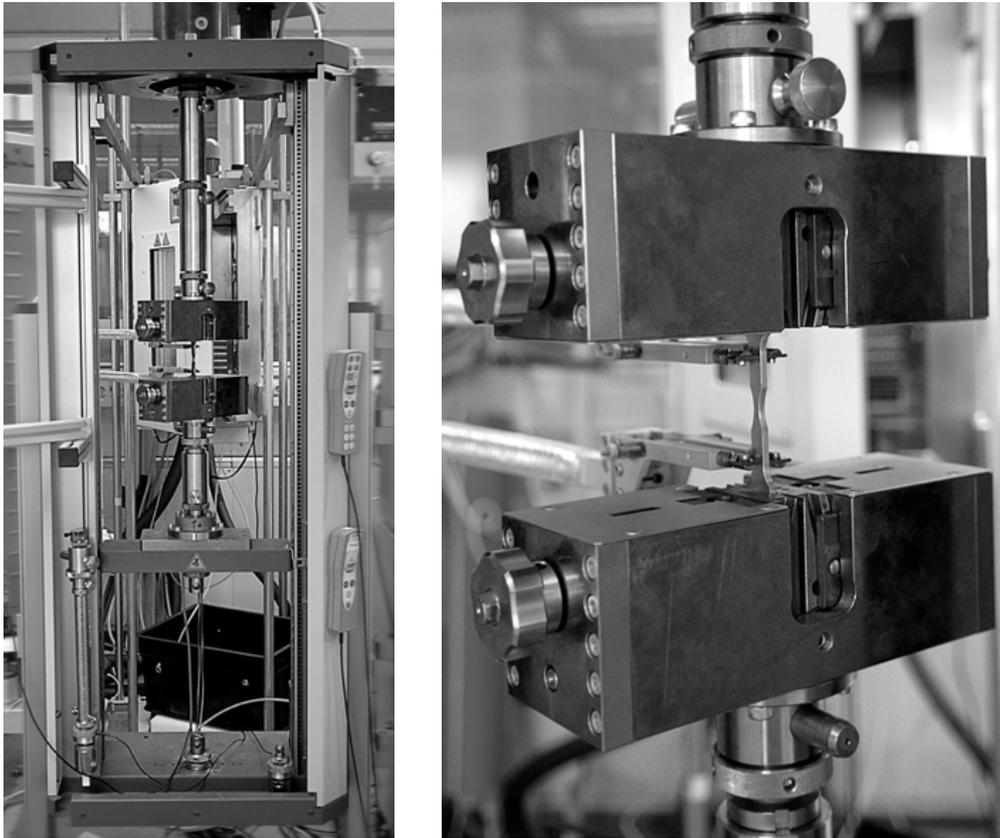


Abbildung 4.3: Material-Prüfmaschine Zwick/Roell TC-FR020TH.A50 mit gekerbten Zugstab $R = 25\text{mm}$

85mm und der Längenänderungsaufnehmer von 51mm. Zur Belastung in Zugrichtung wurde die obere Pressbacke linear weggesteuert mit 2mm/Minute verschoben. Die Speicherrate betrug 0,1 Sekunden. Es wurden jeweils sechs Versuche je Probengeometrie durchgeführt. Die Abb. 4.4 zeigt die Versuchsergebnisse des ungekerbten und aller gekerbten Versuchskörper. Die Verschiebungen beziehen sich hier und bei allen folgenden Last-Verschiebungsdiagrammen auf die 51mm zwischen dem Längenänderungsaufnehmer. Die jeweilige Streuung aller sechs gleichen Versuche ist trotz unterschiedlicher Walzrichtungen gering und beträgt etwa 5%. Es kann daher von einem isotropen Material ausgegangen werden. Die Versuchskurven zeigen, dass mit kleiner werdendem Radius die aufnehmbare Last steigt und es früher zum Bruch kommt. So steigen die maximalen Lasten von ca. 8,8kN für die ungekerbte Zugprobe auf etwa 10kN für den Versuch mit der Zugprobe mit dem Kerbradius $R = 1,25\text{mm}$ an. Hingegen kommt es bei den ungekerbten Zugproben erst bei etwa 9mm Verschiebung zum Versagen, während es bei der Zugprobe mit dem Kerbradius $R = 1,25\text{mm}$ schon bei etwa 1mm Verschiebung zum Versagen kommt.

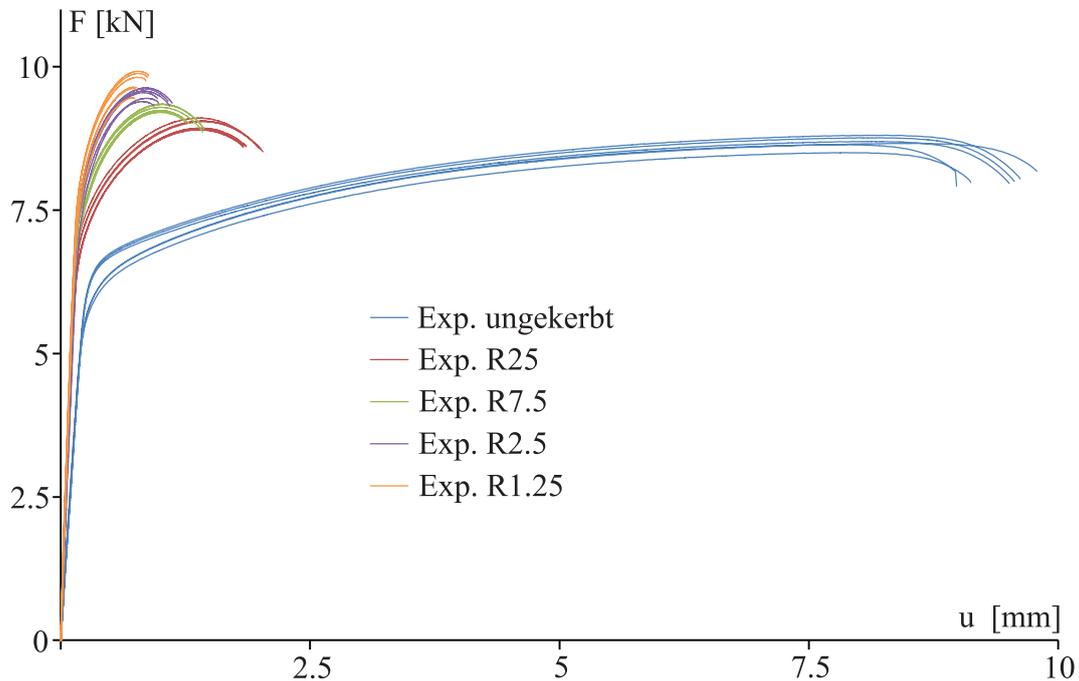


Abbildung 4.4: Last-Verschiebungsdiagramm aller Versuchsergebnisse der zweiten Charge

4.2 Bestimmung der Materialparameter

Zur Bestimmung der Materialparameter werden numerische Simulationen der Experimente durchgeführt. Die in Kap. 4.1 verwendeten Versuchskörper sind als Achtelmodell unter Ausnutzung der Symmetrie in x -, y - und z -Richtung mit den in Kap. 3.1 beschriebenen SOLID185-Elementen abgebildet. Die Achtelmodelle bestehen je nach Probenform aus 34800 bis 58400 Elementen. Da bei einsetzender Schädigung ein Abfall der Kraft zu verzeichnen ist, werden in den numerischen Simulation die Körper weggesteuert belastet. Dies ist gerade für die Ermittlung der schädigenden Materialparameter essentiell.

Die in dieser Arbeit in Kap. 5 vorgestellten biaxialen Probekörper und einige ungekerbte Zugproben wurden aus der ersten Charge hergestellt. Aus der zweiten Charge wurden ebenfalls einige ungekerbte sowie alle verschieden gekerbten Zugproben gefertigt.

In Abb. 4.5 ist ein Last-Verschiebungsdiagramm der ungekerbten Zugproben aus erster und zweiter Charge dargestellt. Die für die Darstellung gewählten Kurven der jeweiligen Charge liegen mittig der Streuung. Trotz des identischen Materials weisen die ungekerbten Zugproben beider Chargen unterschiedliche Materialeigenschaften auf, was an einem Unterschied von etwa 5% im Last-Verschiebungsdiagramm zu erkennen ist. Dies entspricht der Größenordnung der Schwankungen aus Abb. 4.4.

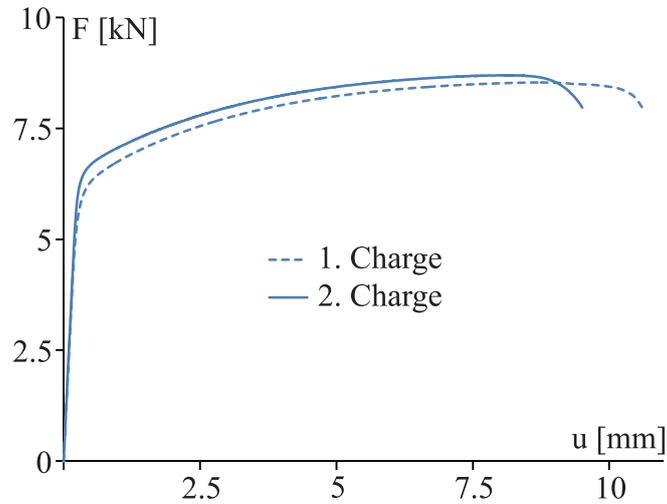


Abbildung 4.5: Last-Verschiebungsdiagramm der ungekerbten Zugproben aus erster und zweiter Charge

4.2.1 Materialparameter für elastisch-plastisches Verhalten

Die Abb. 4.5 zeigt das Last-Verschiebungsdiagramm beider Chargen für einen ungekerbten Zugstab. Für rein elastisches Verhalten sind keine Abweichungen zu erkennen. Daher sind die zu ermittelnden elastischen Materialparameter beider Chargen identisch. Eine gute Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit den numerischen Simulationen liefern der Elastizitätsmodul $E = 65000\text{MPa}$ und die Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$.

Das Einsetzen des elastisch-plastischen Verhaltens tritt bei der zweiten Charge später auf, während der Verlauf und der Anstieg beider Kurven im elastisch-plastischen Bereich ähnlich ist. Dies führt zu der Annahme, dass die Fließspannung c für die zweite Charge größer sein muss.

In dieser Arbeit wird das isotrope Verfestigungsgesetz

$$c(\gamma) = c_0 \left(\frac{H\gamma}{nc_0} + 1 \right)^n \quad (4.1)$$

der Fließspannung aus der Fließbedingung (2.77) zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens verwendet. Für alle Zugproben der zweiten Charge ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung (Abb. 4.6) des elastisch-plastischen Verhaltens zwischen Experiment und numerischer Simulation (...EP) mit $H = 1895\text{MPa}$, $n = 0,274$, $c_0 = 210\text{MPa}$ und $a/c = 0,00034\text{MPa}^{-1}$.

Der Materialparameter a/c steuert den Einfluss des hydrostatischen Spannungszustandes auf die Fließbedingung. Bei den gekerbten Zugstäben nimmt der Einfluss des hydrostatischen Spannungszustandes mit abnehmendem Radius zu. Zur Bestim-

mung des hydrostatischen Spannungskoeffizienten a/c werden daher die Proben der zweiten Charge verwendet. Die Materialparameter H , n und die anfängliche Fließgrenze c_0 wurden unter Verwendung der ungekerbten Zugprobe ermittelt. Sie sind jedoch von dem Materialparameter a/c abhängig. Dieser muss somit invers unter Nutzung der gekerbten Zugproben bestimmt werden. Diese alternative Ermittlung von a/c [20] hat sich neben der experimentellen Ermittlung unter verschiedenen hydrostatischen Drücken [93, 94] als praktisch erwiesen.

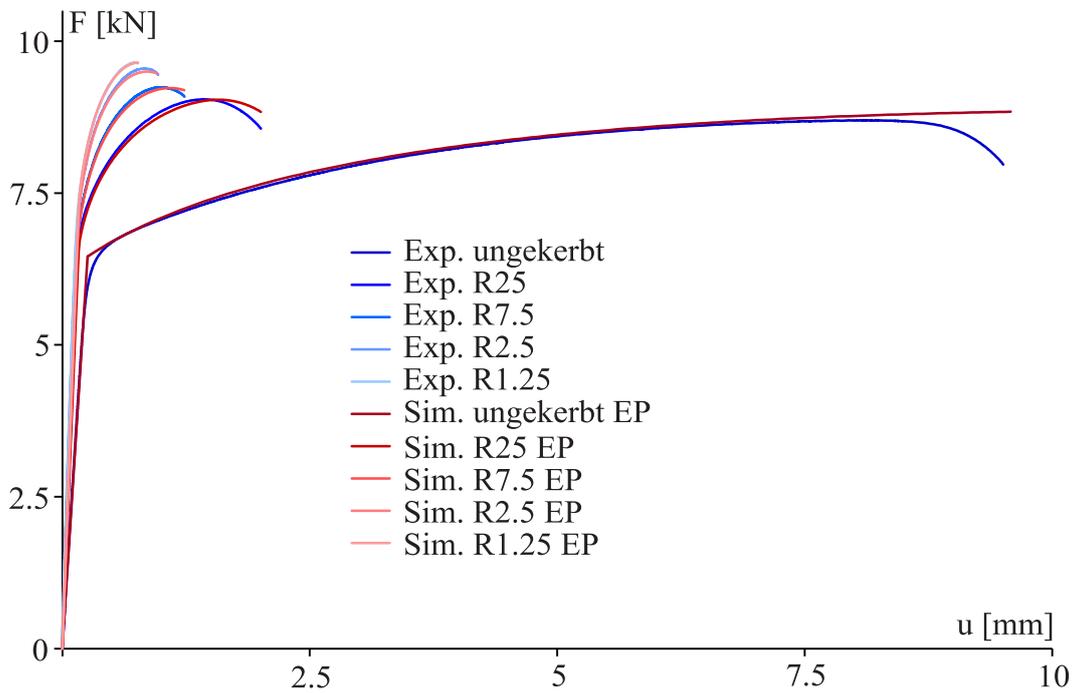


Abbildung 4.6: Last-Verschiebungsdiagramm aus Experimenten und elastisch-plastischen numerischen Simulationen aller Zugproben der zweiten Charge

4.2.2 Materialparameter für schädigendes Verhalten

In Abb. 4.5 ist deutlich zu erkennen, dass eine Abweichung der beiden Kurven mit einsetzender Schädigung vorhanden ist. Bei beiden Chargen ist die Streuung im Last-Verschiebungsdiagramm bei den ungekerbten Zugstäben in Bereich der einsetzenden Schädigung stärker als bei den gekerbten Zugstäben. Daher lassen sich mit dem ungekerbten Zugstab die schädigenden Materialparameter nur schlecht bestimmen. Ursache dafür ist ein relativ großer homogener Abschnitt, in welchem elastisch-plastische Deformationen stattfinden. Ist dieser Abschnitt nahezu frei von Imperfektionen und besitzt eine geringe homogene Vorschädigung, sind Beginn und

Verlauf der Schädigung abweichend zu Fällen mit zum Beispiel starken lokalen Vorschädigungen oder produktionsbedingten größeren Imperfektionen. Daher werden für die Ermittlung der Schädigungsparameter nochmals die gekerbten Zugproben der zweiten Charge verwendet.

In Kap. 2.3.2 wurde bereits erläutert, in welcher Beziehung die Spannungstriaxialität η zum Schädigungsverhalten und der Lodeparameter ω zur Kombination der verschiedenen Spannungsarten steht. Weiter wurde auch auf den Einfluss des Lodeparameters auf die Schädigung in Abhängigkeit von der Spannungstriaxialität hingewiesen. Um diese Effekte in das Schädigungsverhalten einzubeziehen, werden in [23] die anhand von mikroskopischen numerischen Simulationen entwickelten Funktionen der Parameter

$$\tilde{\alpha}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{-1}{3} \leq \eta \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{für } \eta > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

und

$$\tilde{\beta}(\eta, \omega) = \tilde{\beta}_0(\eta, \omega = 0) + \tilde{\beta}_\omega(\omega) \geq 0 \quad (4.3)$$

mit

$$\tilde{\beta}_0(\eta) = \begin{cases} -0,45\eta + 0,85 & \text{für } \frac{-1}{3} \leq \eta \leq 0 \\ -1,28\eta + 0,85 & \text{für } \eta > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

und

$$\tilde{\beta}_\omega(\omega) = -0,017\omega^3 - 0,065\omega^2 - 0,078\omega \quad (4.5)$$

der Schädigungsbedingung (2.97) sowie die Funktionen der kinematischen Parameter

$$\alpha(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{für } \eta < 0,09864 \\ -0,07903 + 0,80117\eta & \text{für } 0,09864 \leq \eta \leq 1 \\ 0,49428 + 0,22786\eta & \text{für } 1 < \eta \leq 2 \\ 0,875 + 0,0375\eta & \text{für } 2 < \eta \leq \frac{10}{3} \\ 1 & \text{für } \eta > \frac{10}{3} \end{cases}, \quad (4.6)$$

$$\beta(\eta, \omega) = \begin{cases} 0,9484 + 0,11965\eta + (0,0378\eta - 0,0252)(1 - \omega^2) & \text{für } \frac{-1}{3} \leq \eta \leq \frac{1}{3} \\ 1,14432 - 0,4681\eta + (0,0378\eta - 0,0252)(1 - \omega^2) & \text{für } \frac{1}{3} < \eta \leq \frac{2}{3} \\ 1,14432 - 0,4681\eta & \text{für } \frac{2}{3} < \eta \leq 2 \\ 0,5203 - 0,15609\eta & \text{für } 2 < \eta \leq \frac{10}{3} \\ 0 & \text{für } \eta > \frac{10}{3} \end{cases} \quad (4.7)$$

und

$$\delta(\eta, \omega) = \begin{cases} (-0,12936 + 0,119404\eta)(1 - \omega^2) & \text{für } \frac{-1}{3} \leq \eta \leq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{für } \eta > \frac{2}{3} \end{cases} \quad (4.8)$$

des Schädigungsgesetzes (2.101) eingeführt. Aus diesen vom Lodeparameter ω und der Spannungstriaxialität η abhängigen Funktionen lassen sich die Werte für die in Abb. 2.2 dargestellten Grenzwerte der Spannungstriaxialität ermitteln. Diese ergeben sich somit zu $\eta_c = -1/3$ und $\eta_t = 10/3$ [23]. Gemäß [74] handelt es sich bei diesem Grenzwert der Spannungstriaxialität (cut-off-value) η_c jedoch nicht um einen festen Wert der Spannungstriaxialität, sondern um eine Funktion der Spannungstriaxialität in Abhängigkeit von dem Lodeparameter, der Temperatur, der mikroskopischen Strukturen und der Verzerrungsraten.

Die Gültigkeit der hier vorgestellten Funktionen und Grenzwerte wird im Zuge dieser Arbeit auf makroskopischer Ebene untersucht.

Der Einfluss der Spannungstriaxialität η auf das Schädigungs- und Versagensverhalten ist deutlich in Abb. 4.7 zu erkennen. Beim Vergleich der Bruchfläche der ungekerbten Zugprobe, bei der der Radius als unendlich angenommen werden kann, mit der Bruchfläche der Zugprobe mit dem Radius $R = 1,25\text{mm}$ wird deutlich, dass mit kleiner werdendem Radius ein verstärktes isotropes Porenwachstum auftritt und sich der Einfluss von Mikroscherrissen reduziert. Dies ist zurückzuführen auf den Anstieg der Spannungstriaxialität bei abnehmendem Kerbradius. Erhöht sich die Spannungstriaxialität, steigt auch der Einfluss des hydrostatischen Spannungszustandes.

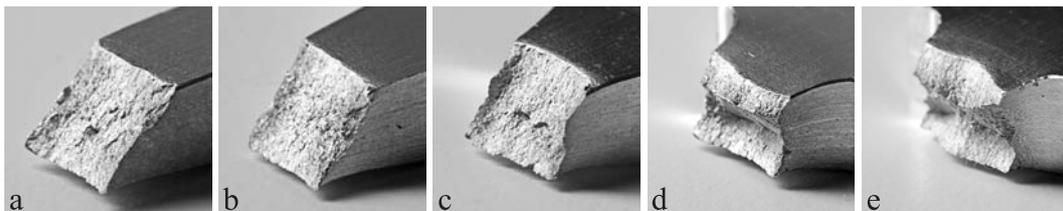


Abbildung 4.7: Bruchflächen der verschiedenen Zugproben; a) ungekerbt; b) $R = 25\text{mm}$; c) $R = 7,5\text{mm}$; d) $R = 2,5\text{mm}$; e) $R = 1,25\text{mm}$

Für das elastisch-plastische Verhalten ist der Verlauf des Verfestigungsgesetzes wichtig, um in diesem Bereich eine gute Annäherung der numerischen Simulationen zu den Experimenten zu erreichen.

Für das elastisch-plastisch-schädigende Verhalten ist die Wahl der Form und der Größe des Entfestigungsgesetzes ebenso bedeutsam. Erste numerische Simulationen der unterschiedlich gekerbten Zugproben wurden mit einem Entfestigungsgesetz durchgeführt, welches die letzte plastische Steigung des Verfestigungsgesetzes

als Anfangssteigung übernahm, um dann linear zu sinken [21]. Bei den numerischen Simulationen entstand dabei mit einsetzender Schädigung, unabhängig von den anderen Materialparametern, ein unnatürlicher knickartiger Abfall der Last-Verschiebungskurve. Da dieser Anstieg aus dem c - γ -Diagramm übernommen wurde, besitzt dieser keine Aussagekraft für das σ - μ -Diagramm.

Das hier vorgestellte Entfestigungsgesetz, welches in Abb. 4.8 dargestellt ist, besitzt daher eine hohe anfängliche Steigung. Im Vergleich zum elastisch-plastischen Verhal-

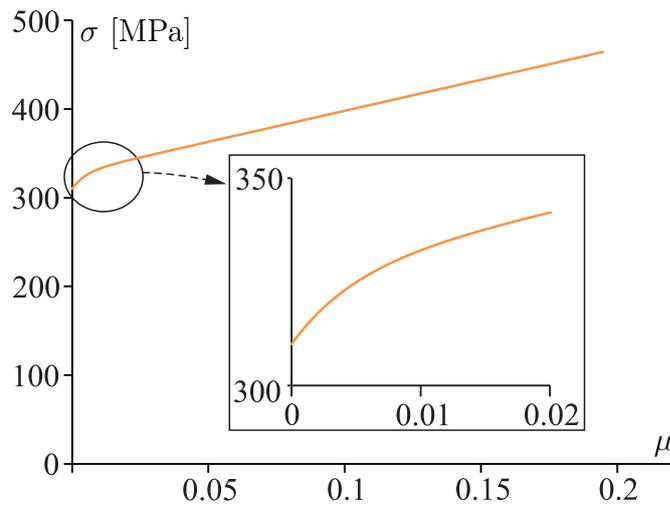


Abbildung 4.8: Exponentielles Entfestigungsgesetz

ten bewirkt diese Funktion, trotz des streng monotonen Anstiegs, eine Entfestigung auf Makroebene. Der Anstieg des Entfestigungsgesetzes

$$h_2(\mu) = D_1 + D_2 b_1 e^{-b_1 \mu} \quad (4.9)$$

ist die Ableitung der Schädigungsspannung

$$\sigma(\mu) = \sigma_0 - D_1 \mu + D_2 (1 - e^{-b_1 \mu}) \quad (4.10)$$

nach der schädigenden Vergleichsdehnung μ . Der Wert für die Initialschädigungsspannung σ_0 kann mit dem c - γ -Diagramm des ungekerbten Zugstabes ermittelt werden, da zu Schädigungsbeginn die Spannungen der geschädigten und ungeschädigten Konfiguration noch identisch sind. Die restlichen Materialparameter des Entfestigungsgesetzes müssen jedoch ebenfalls wie das Verhältnis a/c in Kap. 4.2.1 invers ermittelt werden. Die Abb. 4.9 zeigt die Last-Verschiebungsdiagramme der verschiedenen gekerbten Zugproben. Die gute Übereinstimmung zwischen Experiment und elastisch-plastisch-schädigender numerischer Simulation (...EPD) wurde mit $D_1 = 700 \text{ MPa}$, $D_2 = 18 \text{ MPa}$, $b_1 = 200$ und $\sigma_0 = 310 \text{ MPa}$ erreicht. Der Vorteil dieses exponentiellen Entfestigungsgesetzes ist die Möglichkeit, den Anstieg bei ein-

setzender Schädigung und für die fortschreitende Schädigung separat regulieren zu können. Der anfängliche Anstieg wird durch die Materialparameter D_2 und b_1 eingestellt, der Anstieg für große μ über den Materialparameter D_1 .

Einen weiteren Einfluss auf die numerischen Ergebnisse haben die Materialparameter $\eta_1 \dots \eta_4$ des Elastizitätstensors (2.89) und des schädigenden Tangentenmoduls (2.91). Sie charakterisieren den negativen Einfluss der Schädigung auf die elastischen Materialeigenschaften. Mit einsetzender Schädigung ist ein Abfall des Elastizitätsmoduls E , der Querkontraktionszahl ν , des Schubmoduls G und des Kompressionsmoduls K erkennbar, was in [92] experimentell nachgewiesen wurde. Unter Verwendung solcher experimenteller Daten lassen sich die Werte für $\eta_1 \dots \eta_4$ abschätzen [17]. Für das in dieser Arbeit verwendete Material stehen keine entsprechenden experimentellen Ergebnisse zur Verfügung. Als Grundlage für eine erste Abschätzung für $\eta_1 \dots \eta_4$ dienen daher die Materialparameter eines Aluminiumwerkstoffes aus [21, 43]. Die Werte $\eta_1 = -30000 \text{ MPa}$, $\eta_2 = -10000 \text{ MPa}$, $\eta_3 = -12500 \text{ MPa}$ und $\eta_4 = -2500 \text{ MPa}$ ergeben eine gute Anpassung der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulation an die Experimente. Die Abb. 4.9 zeigt für die verschieden gekerbten Zugproben jeweils ein Diagramm mit den Last-Verschiebungskurven der Experimente, der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen basierend auf der vorgestellten Theorie sowie die numerischen Simulationen mit dem in Kap. 4.3 vorgestellten Gurson-Tvergaard-Needleman-Modell. Die Last-Verschiebungskurven der Experimente und der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen basierend auf der vorgestellten Theorie zeigen für alle vier gekerbten Zugproben eine gute Übereinstimmung. In Tab. 4.1 sind die verwendeten Materialparameter noch einmal zusammengefasst.

4.3 Schädigungsmodell nach Gurson-Tvergaard-Needleman

Auf dem Gebiet der Schädigungsmechanik haben sich in den letzten Jahrzehnten einige Schädigungstheorien etabliert. Eine bedeutende, heute noch vielfach verwendete ist die Fließbedingung nach Gurson [45]. Diese recht einfache Darstellung wurde von Needleman und Tvergaard [99, 84] zum Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN)-Modell erweitert. Das GTN-Modell ist in viele kommerzielle FE-Programme wie zum Beispiel ANSYS implementiert. Daher werden die elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen basierend auf der vorgestellten Theorie mit den numerischen Ergebnissen nach dem GTN-Modell verglichen.

Tabelle 4.1: Zusammenfassung der elastischen, plastischen und schädigenden Materialparameter der zweiten Charge

Variable	Einheit	Beschreibung	Wert 2.Charge
<i>elastische Materialparameter</i>			
E	MPa	Elastizitätsmodul	65000
ν	-	Querkontraktionszahl	0,3
<i>plastische Materialparameter</i>			
c_0	MPa	Initialfließspannung	210
H	MPa	Verfestigungsparameter	1895
n	-	Verfestigungsexponent	0,274
a/c	MPa^{-1}	hydrostatischer Spannungskoeffizient	0,00034
<i>schädigende Materialparameter</i>			
D_1	MPa	Entfestigungsparameter 1	700
D_2	MPa	Entfestigungsparameter 2	18
b_1	-	Entfestigungsexponent	200
σ_0	MPa	Initialschädigungsspannung	310
η_1	MPa	elastischer Schädigungsmodul 1	-30000
η_2	MPa	elastischer Schädigungsmodul 2	-10000
η_3	MPa	elastischer Schädigungsmodul 3	-12500
η_4	MPa	elastischer Schädigungsmodul 4	-2500

4.3.1 Modell nach Gurson [45]

Die makroskopische Fließbedingung für poröses Material nach Gurson [45]

$$f^G(\mathbf{T}, \sigma_F, f) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_F^2} + 2f \cosh\left(\frac{\text{tr}\mathbf{T}}{2\sigma_F}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (4.11)$$

wird aus einem mikromechanischen Zellmodell durch Untersuchung des Deformationsverhaltens einer kugelförmigen Pore in einer kugelförmigen Zelle hergeleitet [38]. Dabei stellt σ_F die aktuelle Fließspannung des Matrixmaterials dar. Mit der Porosität $f = 0$ wird (4.11) zur von-Mises-Fließbedingung. Weiter liegt diesem Mehrskalmodell die Annahme eines starr-plastischen, inkompressiblen Matrixmaterials zugrunde [45].

Die volumenändernde Porenaufweitung kann in die drei verschiedenen Ursachen Porenwachstum, Poreneubildung und Porenvereinigung aufgeteilt werden. Die Fließbedingung nach Gurson [45] berücksichtigt lediglich das isotrope Porenwachstum.

4.3.2 Erweiterung nach Tvergaard und Needleman [99, 84]

Fließbedingung

Gemäß [99, 84] ist das Zusammenwachsen der Poren mit zunehmendem Porenvolumenanteil dominant und daher für Abweichungen zwischen Experimenten und numerischen Simulationen mit der Fließbedingung nach Gurson verantwortlich. Die in (4.11) theoretisch maximale Porosität $f = 1$ wird von realen Materialien nicht erreicht, da es schon vorher zum Versagen kommt. In [99, 84] wurde daher die effektive Porosität

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{für } f \leq f_c \\ f_c + \frac{1/q_1 - f_c}{f_F - f_c} (f - f_c) & \text{für } f > f_c \end{cases} \quad (4.12)$$

eingeführt. In der von der Porosität f abhängigen Gl. (4.12) charakterisiert f_c die Porosität zu Beginn des Zusammenwachsens von Poren und f_F die Porosität beim Bruch. Demnach tritt endgültiges Versagen für $f^*(f_F) = 1/q_1$ auf. Somit kann q_1 als ein den Porenvolumengehalt des endgültigen Versagens steuernder Materialparameter angesehen werden [38]. In der von Tvergaard und Needleman [99, 84] erweiterten Fließbedingung

$$f^{GTN}(\mathbf{T}, \sigma_F, f) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_F^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{q_2 \text{tr} \mathbf{T}}{2\sigma_F}\right) - 1 - \left(q_1 f^*\right)^2 = 0 \quad (4.13)$$

steuert der Materialparameter q_2 den Einfluss des hydrostatischen Spannungszustandes. Da die Gl. (4.13) von der Porosität abhängig ist, wird ein Evolutionsgesetz des Porenwachstums

$$\dot{f} = \dot{f}_G + \dot{f}_N \quad (4.14)$$

benötigt, welches aus den zwei unabhängigen Schädigungsmechanismen Porenwachstum \dot{f}_G und Porenneubildung \dot{f}_N resultiert. Aufgrund der plastischen Inkompressibilität des Matrixmaterials ist eine Volumenänderung nur durch die Vergrößerung der Pore möglich. In der Gleichung für das Porenwachstum

$$\dot{f}_G = (1 - f) \text{tr} \dot{\mathbf{E}}^{\text{pl}} \quad (4.15)$$

beschreibt $\dot{\mathbf{E}}^{\text{pl}}$ die Rate der plastischen Verzerrungen. Die Porenneubildung [83]

$$\dot{f}_N = A \dot{\varepsilon}_{eq}^{\text{pl}} \quad (4.16)$$

beinhaltet die plastische Vergleichsdehnungsrate $\dot{\varepsilon}_{\text{eq}}^{\text{pl}}$ des Matrixmaterials und die davon abhängige Funktion

$$A(\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}}) = \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}} - E_N}{S_N} \right)^2}. \quad (4.17)$$

Diese stochastische Formulierung [30] ist eine Gaußsche Normalverteilung und beinhaltet die Dehnung E_N , bei der Porenneubildung besonders stark auftritt, die dazu entsprechende Standardabweichung S_N und den Volumenanteil der neu gebildeten Pore f_N .

Elastisch-plastisches Verhalten

Da das GTN-Modell lediglich aus einer Fließbedingung besteht, die die Schädigung enthält, wird nicht zwischen Fließbedingung und Schädigungsbedingung unterschieden. Die Modellierung des Matrixmaterials findet mit einem nichtlinearen isotropen Verfestigungsgesetz statt, welches das rein plastische Verhalten beschreibt. Zur numerischen Simulation des Matrixmaterials wird in ANSYS das Gesetz

$$\sigma_F(\varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}}) = \sigma_{F0} + R_0 \varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}} + R_\infty \left(1 - e^{b \varepsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}}} \right) \quad (4.18)$$

verwendet. Dies wird in ANSYS unter der Bezeichnung NLISO geführt [3].

Das elastische Verhalten wird bis zum Erreichen der anfänglichen Fließgrenze σ_{F0} mit dem Hookeschen Gesetz modelliert. Die Materialparameter R_0 , R_∞ und b werden anhand eines einaxialen Zugversuches identifiziert.

Identifikation der Materialparameter

Für die einzelnen gekerbten Zugproben soll ein Vergleich des Experimentes mit den numerischen Simulationen nach dem GTN-Modell und der in dieser Arbeit vorgestellten Theorie durchgeführt werden. Dazu werden die Materialparameter des GTN-Modells für die zweite Charge ermittelt.

Für den ungekerbten Zugstab liefern die Materialparameter des Matrixmaterials aus Tab. 4.2 eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und der numerischen Simulation mit dem GTN-Modell. Die für die Fließbedingung nach dem GTN-Modell notwendigen Materialparameter für einen vergleichbaren Aluminiumwerkstoff wurden in [91] ermittelt und für diese Arbeit übernommen, siehe Tab. 4.3. Die Werte für q_1 und q_2 entsprechen den mikromechanisch ermittelten Werten in [97, 98] sowie in [96]. Der Einfluss der einzelnen Parameter des GTN-Modells auf numerische Simulationen wird von Tu et al. [96] ausführlich dargestellt.

Tabelle 4.2: Zusammenfassung der elastischen und plastischen Materialparameter der zweiten Charge für das GTN-Modell

E [MPa]	ν [-]	σ_{F0} [MPa]	R_0 [MPa]	R_∞ [MPa]	b [-]
65000	0,3	328	60	213	11

Tabelle 4.3: Zusammenfassung der für die Fließbedingung notwendigen Materialparameter der zweiten Charge für das GTN-Modell

q_1	q_2	f_0	f_c	f_F	E_N	S_N	f_N
1,5	1,0	0,001	0,1	0,2	0,3	0,1	0,01

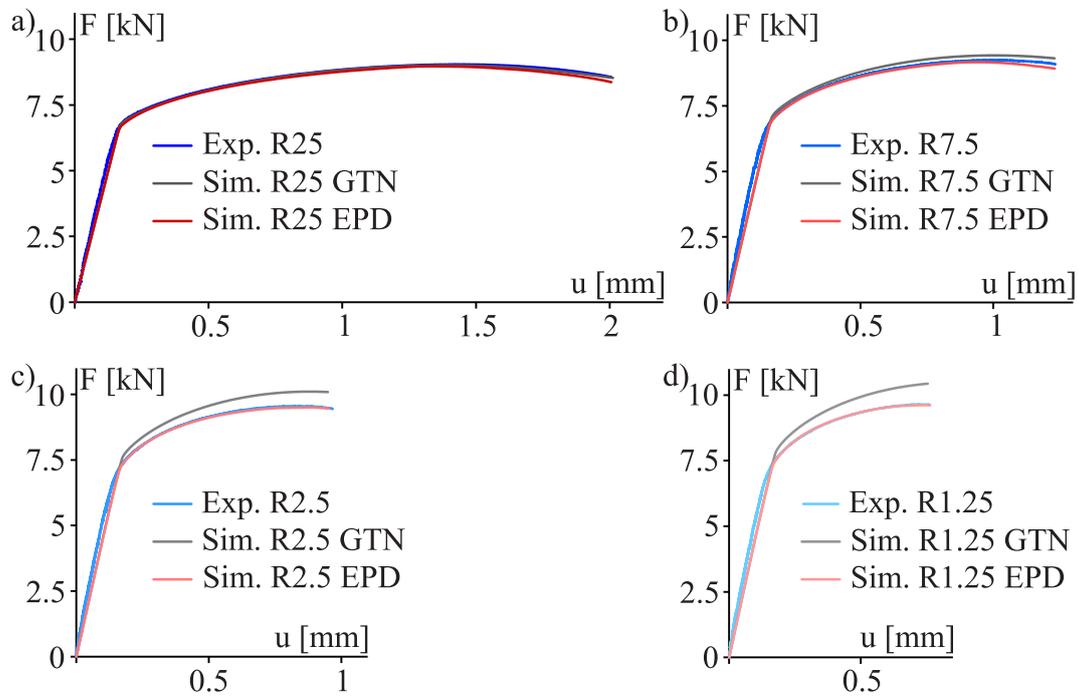


Abbildung 4.9: Last-Verschiebungsdiagramme von Experiment, numerischer Simulation mit GTN-Fließbedingung und elastisch-plastischer-schädigender numerischer Simulation der gekerbten Zugproben der zweiten Charge; a) $R = 25\text{mm}$; b) $R = 7,5\text{mm}$; c) $R = 2,5\text{mm}$; d) $R = 1,25\text{mm}$

In den in Abb. 4.9 dargestellten Last-Verschiebungsdiagrammen werden die numerischen Simulationen mit dem GTN-Modell für die gekerbten Zugproben mit den elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen basierend auf der vorgestellten Theorie und den Experimenten verglichen. Für große Kerbradien ($R = 25\text{mm}$) findet eine sehr gute Übereinstimmung zwischen beiden Simulationen

und Experiment in allen Bereichen statt. Mit abnehmendem Kerbradius weichen die numerischen Simulationen des GTN-Modells ab Überschreiten der Fließspannung jedoch immer stärker von den experimentellen Ergebnissen ab. Da die Identifikation der Materialparameter des Matrixmaterials für das GTN-Modell an der ungekerbten Zugprobe stattfindet, sind die Vorhersagen des GTN-Modells für große Kerbradien auch relativ genau. Da im Gegensatz zu der in dieser Arbeit vorgestellten Theorie keine weitere Anpassung an den Einfluss der Spannungstriaxialität vorgenommen werden kann, können Versuche, bei denen die Spannungstriaxialität von der Spannungstriaxialität des Versuchs mit der ungekerbten Zugprobe abweicht, mit dem GTN-Modell weniger genau simuliert werden. Während die Abweichung der numerischen Simulation mit dem GTN-Modell zum Experiment für die gekerbte Zugprobe mit dem Radius $R = 7,5\text{mm}$ am Ende des Versuches bei etwa 3% liegt, wächst diese Abweichung für die Zugprobe mit dem Radius $R = 1,25\text{mm}$ auf etwa 8,5% an. In Vergleich zu den numerischen Simulationen mit dem GTN-Modell zeigen die elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen basierend auf der vorgestellten Theorie ein bessere Übereinstimmung mit den Experimenten. Da die in dieser Arbeit vorgestellte Theorie eine Fließbedingung und eine dazu unabhängige Schädigungsbedingung, ein nicht assoziiertes Fließgesetz und ein davon unabhängiges nicht assoziiertes Schädigungsgesetz sowie ein c - γ -Verfestigungsgesetz für das plastische Verhalten und ein davon unabhängiges σ - μ -Entfestigungsgesetz für schädigendes Verhalten nutzt, ist eine bessere Prognose der Experimente unter verschiedenen Spannungszuständen möglich.

5 Biaxiale Versuche

Aus zahlreichen experimentellen Beobachtungen [5, 23] ist bekannt, dass Schädigungs- und Bruchmechanismen vom Spannungszustand, welcher zum Beispiel mit der Spannungsintensität, dem Lodeparameter und der Spannungstriaxialität beschrieben werden kann, abhängig sind. In Kap. 2.3.2 wurde bereits der Einfluss der Spannungstriaxialität auf die Art der Schädigung diskutiert. Um mehr Informationen über diese verschiedenen Schädigungsmechanismen zu erhalten, wurden unterschiedliche 1D Zug- und Scherexperimente durchgeführt [20]. Die dabei numerisch ermittelte Spannungstriaxialität im Zentrum der Versuchskörper liegt für die in Kap. 4.1 vorgestellte ungekerbte Zugprobe bei $\eta = 1/3$, für die in Kap. 4.1 vorgestellten unterschiedlich gekerbten Zugproben im Bereich von $1/3 < \eta \leq 1/\sqrt{3}$ und für den Scherversuch aus [20] bei $\eta = 0,055$ und $\eta = 0,3$. Die vorhandenen Experimente decken nicht die Bereiche großer positiver und negativer Spannungstriaxialitäten sowie Spannungstriaxialitäten zwischen $\eta = 0,055$ und $\eta = 0,3$ ab. Daher ist die Entwicklung neuer Versuchskörper, welche eine sehr große Bandbreite der Spannungstriaxialitäten abdecken, in Verbindung mit einer neuartigen Versuchsmaschine notwendig, um eine Validierung der Schädigungsbedingung (2.97) und des Schädigungsgesetzes (2.101) auf Makroebene durchführen zu können.

Dieses Kapitel befasst sich mit der Vorstellung und Auswertung der experimentellen und numerischen Ergebnisse eines neu entwickelten biaxialen Probekörpers.

5.1 Beschreibung der Experimente

5.1.1 Probekörper

Der neu entwickelte biaxiale Probekörper (Abb. 5.1) ist eine Weiterentwicklung des Schertest-Probekörpers [20] mit einer zusätzlichen Option für Zug oder Druck im rechten Winkel zur Scherrichtung. An allen vier Enden des Probekörpers befinden sich kreisrunde Löcher zur Aufnahme der kraftaufbringenden Bolzen. Somit ist eine freie Verdrehung am Rand gewährleistet, was eine Reduzierung der möglichen Querkräfte am Rand bewirkt. Die Abmaße des biaxialen Versuchskörpers sind der technischen Zeichnung aus Abb. 5.1 zu entnehmen. Die in dieser Studie verwendeten Bleche zur Herstellung der Probekörper sind wie schon in Kap. 4.1 beschrieben aus der Aluminiumlegierung *AlCuMg1 EN AW 2017*, 4mm dick und aus der ersten

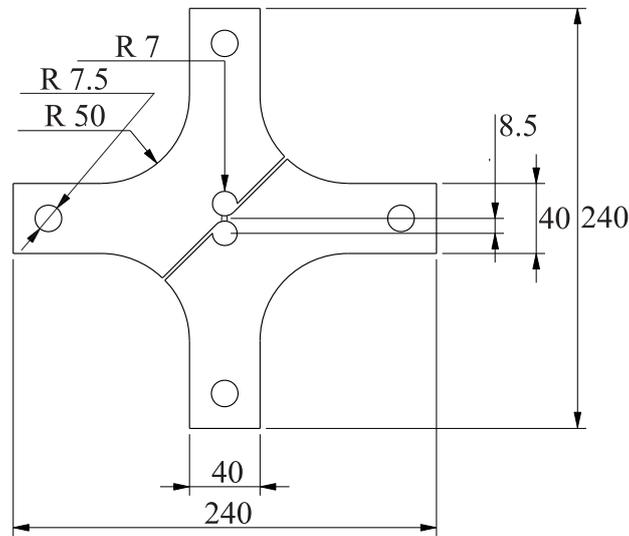


Abbildung 5.1: Technische Zeichnung des biaxialen Versuchskörper, Maße in [mm]

Charge. Im Zentrum des biaxialen Versuchskörpers befindet sich links und rechts eine jeweils 3mm breite und 1mm tiefe kreisrunde Kerbe, so dass die Querschnittsfläche im Zentrum 6mm^2 beträgt. Alle plastischen und schädigenden Verformungen finden bei den hier aufgebrachten Lasten ausschließlich in dem kleinen Abschnitt der Kerbe statt. Die vertikale Kraft F_1 (Abb. 5.2) erzeugt ein Scherverhalten im eingekerbten Zentrum des Probekörpers, wogegen die horizontale Kraft F_2 (Abb. 5.2) ein mögliches zusätzliches Zug- oder Druckverhalten bewirkt. In dieser Arbeit

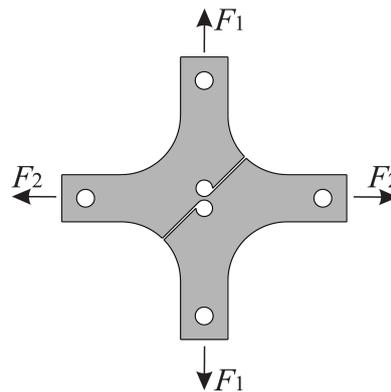


Abbildung 5.2: Biaxialer Versuchskörper mit möglichen aufzubringenden Lasten

werden die sechs verschiedenen Lastverhältnisse

- $F_1 : F_2 = 0 : 1$
- $F_1 : F_2 = 1 : 1$
- $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$

- $F_1 : F_2 = 1 : 0$
- $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$
- $F_1 : F_2 = 1 : -1$

untersucht. Die Lastkombination $F_1 : F_2 = 0 : 1$ stellt einen reinen Zugversuch dar, welcher folgend biaxialer Zugversuch genannt wird. Mit $F_1 : F_2 = 1 : 1$ und $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$ werden Scher-Zug-Lastkombinationen erzeugt und mit $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$ und $F_1 : F_2 = 1 : -1$ Scher-Druck-Lastkombinationen. Ein reiner Scherversuch wird durch die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$ erzeugt.

5.1.2 Prüfmaschine

Die Versuche wurden mit der elektromechanischen Biaxial-Prüfmaschine vom Typ *LFM-BIAX 20kN* der Firma *Walter + Bai AG* durchgeführt, welche in Abb. 5.3 dargestellt ist. Diese besteht aus vier getrennt steuerbaren elektromechanischen Prüfzy-

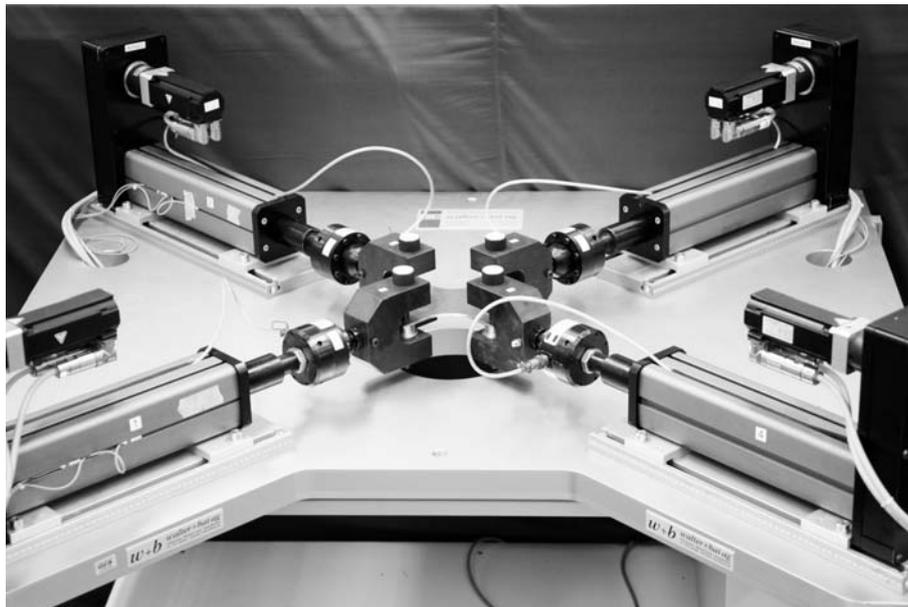


Abbildung 5.3: Elektromechanische biaxiale Prüfmaschine *LFM-BIAX 20kN* der Firma *Walter + Bai AG*

lindern der Serie *EC-20*, in welche jeweils eine Kraftmessdose des Typs *1730 EGX-20kN* integriert ist. Die Zylinder können jeweils eine Last von $20kN$ als Druck oder Zug aufbringen. Die Proben können an den Köpfen eingespannt oder gelenkig gelagert werden. Somit sind verschiedene Randbedingungen möglich. Die Steuerung wird mit der Software *DION7* realisiert.

5.1.3 Versuchsaufbau und Ablauf

Aufgrund des geringen Größenunterschiedes zwischen dem Durchmesser der Bolzen der Zylinderköpfe und den Löchern des biaxialen Probekörpers werden die Zylinderköpfe vor dem horizontalen Einlegen des biaxialen Probekörpers in die Maschine auf die exakte Ausgangsposition gefahren, siehe Abb. 5.3. Da bei einsetzender Schädigung ein Abfall der Kraft zu verzeichnen ist, werden bei den verschiedenen Lastkombinationen die Hauptachsen des Versuchskörpers weggesteuert belastet. Für die einzelnen Achsen muss die entsprechende Belastungskombination $F_1 : F_2$ mit steigenden Belastungen eingehalten werden. Die Speicherrate für die experimentellen Daten betrug 0,1 Sekunden.

5.1.4 Experimentelle Ergebnisse

Für verschiedene Lastkombinationen führten die Experimente zu dem in Abb. 5.4 gezeigten Last-Verschiebungsdiagramm der vertikalen Kraft F_1 zur Verschiebung u_1 . Die Verschiebungen beziehen sich in allen folgenden Diagrammen auf den Weg vom Zentrum des Bolzens in die entsprechende Krafrichtung. Im Diagramm (Abb. 5.4) ist zu erkennen, dass der Einfluss des horizontalen Last-Verschiebungsverhaltens $F_2 - u_2$ auf die Entwicklung der vertikalen Lasten klein ist. Ein Vergleich der Lastkombinationen $F_1 : F_2 = 1 : 1$ mit $F_1 : F_2 = 1 : -1$ und $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$ mit $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$ zeigt, dass bei den Scher-Druck-Lastkombinationen die Verschiebung beim Bruch etwa 6% größer ist und die maximale Last beim Bruch bis zu 20% kleiner ist. Insgesamt ist zu beobachten, dass die Verschiebung bis zum Bruch mit betragsmäßig steigender Last F_2 abnimmt. So ist die Verschiebung zum Bruch für die Lastkombinationen $F_1 : F_2 = 1 : 1$ und $F_1 : F_2 = 1 : -1$ durchschnittlich etwa 25% kleiner, die der Lastkombinationen $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$ und $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$ durchschnittlich etwa 12% kleiner als die der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$. Aufgrund von Imperfektionen im zentralen Bereich des biaxialen Versuchskörpers kann es auch zu einer geringen Streuung für eine Lastkombination kommen.

5.2 Vergleich von Experimenten und numerischen Simulationen

5.2.1 FE-Modellierung des biaxialen Versuchskörpers

Der Versuchskörper ist aufgrund seiner Antimetrie und der komplexen Lastaufbringungen als Vollmodell (Abb. 5.5) mit den in Kap. 3.1 beschriebenen SOLID185-

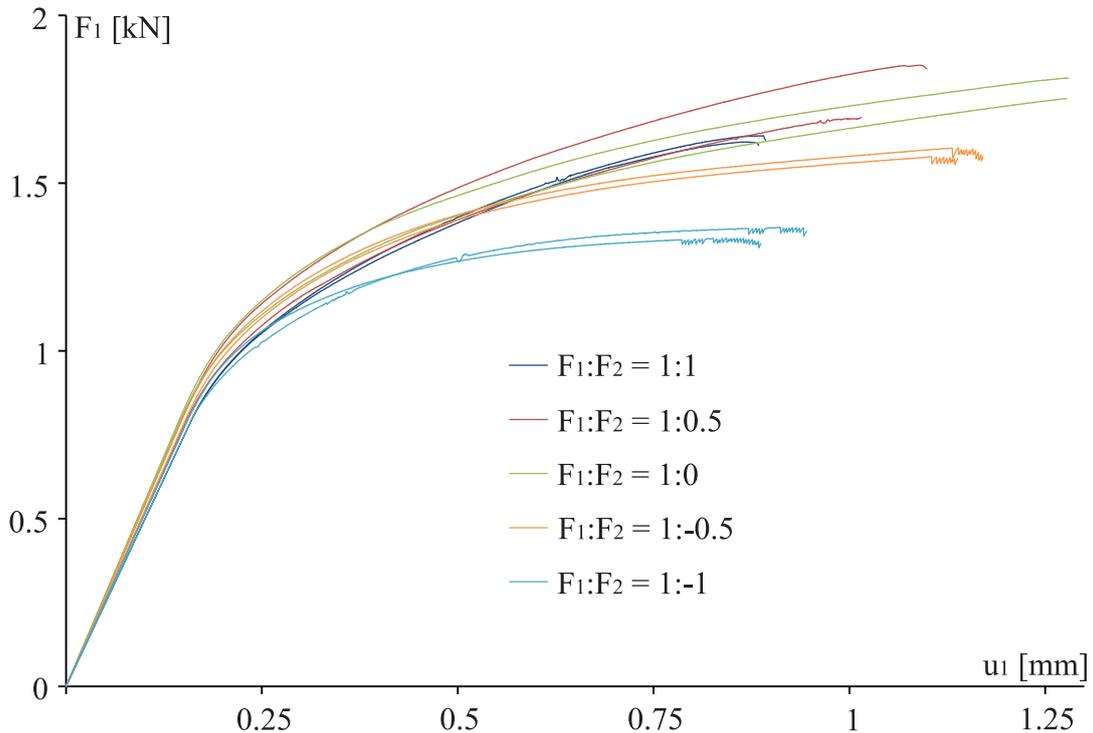


Abbildung 5.4: Last-Verschiebungsdiagramm (F_1 - u_1) der Experimente für verschiedene Lastkombinationen

Elementen diskretisiert. Das Modell des Versuchskörpers besteht aus 42248 Elementen.

5.2.2 Wahl der Randbedingungen

Die im Experiment verwendeten Bolzen erlauben eine Rotation der Enden des biaxialen Versuchskörpers. Hingegen sind die Verschiebungen des Bolzenzentrums in Kraftaufbringungsrichtung vorgegeben. Diese gelenkig gelagerten Randbedingungen werden mit zwei möglichen Modellierungen umgesetzt.

Zum einen wird der Bolzen mit 16384 SOLID185-Elementen als Vollkörper modelliert. Für die Kontaktflächen zwischen biaxialem Versuchskörper und Bolzen werden 1536 TARGE170-Elemente und 1536 CONTA173-Elemente verwendet. Die zweite Möglichkeit der Modellierung besteht aus der Verwendung von LINK180-Elementen. Dabei wird von jedem Randknoten der Löcher des biaxialen Versuchskörpers zu einem im Zentrum jeden Loches definierten Knoten ein LINK180-Element erzeugt. Pro Loch entstehen somit 320 LINK180-Elemente.

Bei beiden Möglichkeiten werden Verschiebungen und Kräfte jeweils nur auf den Knoten im Zentrum aufgebracht. Eine Rotation des jeweiligen Loches um den Knoten im Zentrum ist somit für beide Varianten möglich.

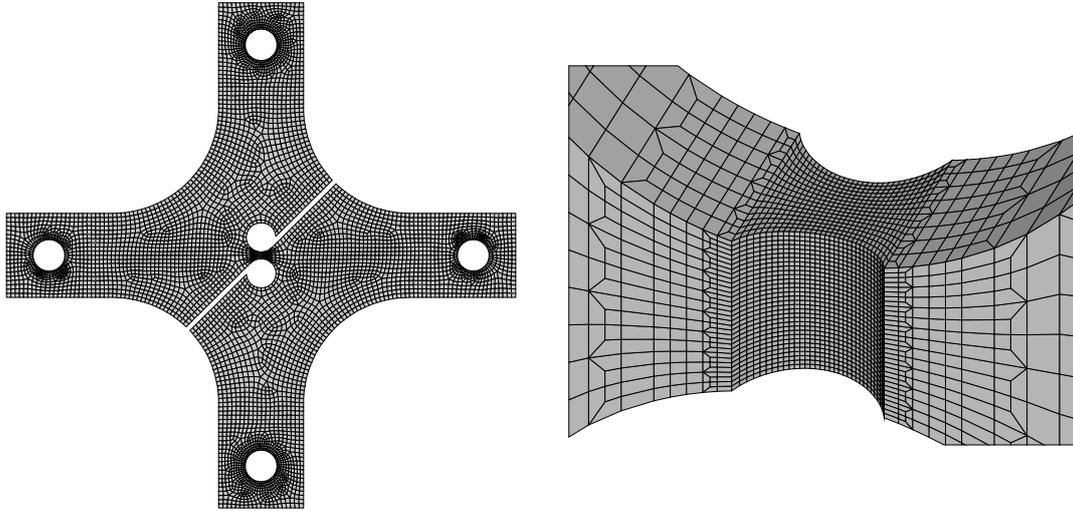


Abbildung 5.5: Links: gesamtes FE-Netz, rechts: Netzverfeinerung im zentralen Kerbbereich

Für die weiteren numerischen Simulationen wird die zweite Variante verwendet, da die erste Variante bei größeren Deformationen zu Konvergenzproblemen führen kann.

5.2.3 Materialparameter

Wie bereits in Kap. 4.1 erwähnt wurden die biaxialen Probekörper und einige ungekerbte Zugproben aus der ersten Charge hergestellt. Die elastischen Materialparameter, der Elastizitätsmodul $E = 65000\text{MPa}$ und die Querkontraktionszahl $\nu = 0,3$, wurden in Kap. 4.2 bereits bestimmt.

Da aufgrund der fehlenden gekerbten Zugproben eine Validierung des Parameters a/c für die erste Charge nicht möglich ist, werden in den folgenden Kapiteln die Werte $a/c = 0\text{MPa}^{-1}$ und $a/c = 0,00034\text{MPa}^{-1}$ untersucht. Dies ist auch notwendig, da eine Bestimmung dieses Materialparameters in Kap. 4.2.1 bisher nur mit Versuchen, welche ausschließlich Spannungstriaxialitäten im Bereich von $1/3 < \eta \leq 1/\sqrt{3}$ aufweisen, durchgeführt wurde. Für $a/c = 0\text{MPa}^{-1}$ ergibt sich für die ungekerbte Zugprobe der ersten Charge (Abb. 4.5) eine sehr gute Übereinstimmung des elastisch-plastischen Verhaltens zwischen Experiment und numerischer Simulation mit $H = 1800\text{MPa}$, $n = 0,23$ und $c_0 = 174\text{MPa}$. Für $a/c = 0,00034\text{MPa}^{-1}$ erhält man mit $H = 2220\text{MPa}$, $n = 0,27$ und $c_0 = 194\text{MPa}$ ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung des elastisch-plastischen Verhaltens zwischen Experiment und numerischer Simulation.

Da auch die schädigenden Materialparameter aus den Versuchen mit Spannungstriaxialitäten im Bereich von $1/3 < \eta \leq 1/\sqrt{3}$ ermittelt wurden, müssen diese

ebenfalls untersucht und gegebenenfalls modifiziert werden. Dies trifft auch für die Parameter $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ der Schädigungsbedingung (2.97) sowie die kinematischen Parameter α , β und δ des Schädigungsgesetzes (2.101) aus [23] zu.

Auch der bisher auf $\eta_c = -1/3$ festgelegte Grenzwert der Schädigung wird untersucht, da dies gerade für die Schädigungsentwicklung der Versuche mit Scher-Druck-Lastkombinationen von Bedeutung ist.

In den Diagrammen der Abb. 5.6, Abb. 5.7 und Abb. 5.8 werden die für die verschiedenen Lastkombinationen erhaltenen Last-Verschiebungskurven der Experimente, der elastisch-plastischen numerischen Simulationen (Sim EP) für $a/c = 0MPa^{-1}$ und $a/c = 0,00034MPa^{-1}$ sowie der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen (Sim EPD) für die Schädigungsbedingung nach [23] und einer im Folgenden erläuterten modifizierten Schädigungsbedingung (mod.) dargestellt. Im Gegensatz zu Abb. 5.4 wurden für die Darstellung dieser Diagramme die Fehler bei den Verschiebungen aufgrund des elastischen Verhaltens der Zylinder ermittelt und abgezogen. Im Folgenden werden die plastischen Materialparameter untersucht.

Numerische Simulationen haben gezeigt [22], dass der reine Zugversuch mit der Biaxialprobe ($F_1 : F_2 = 0 : 1$) im Bereich der inelastischen Deformationen hohe positive Spannungstriaxialitäten aufweist. Für die anderen fünf Lastkombinationen sinkt mit kleiner werdender Last F_2 auch die Spannungstriaxialität im gesamten Bereich der inelastischen Deformationen. So sind für die Lastkombinationen mit negativer Last F_2 im Bereich inelastischer Deformation die Spannungstriaxialitäten sehr klein und meist negativ.

Wie bereits gezeigt hängt die Wahl der plastischen Materialparameter H , n und c_0 von der Größe des Materialparameters a/c ab. Für den biaxialen Zugversuch (Abb: 5.6a) liegt die elastisch-plastische numerische Simulation für $a/c = 0MPa^{-1}$ oberhalb des Experimentes, für $a/c = 0,00034MPa^{-1}$ jedoch zu tief. Der Faktor a/c sollte daher für die erste Charge im Bereich $0MPa^{-1} < a/c < 0,00034MPa^{-1}$ liegen, jedoch tendenziell eher im höheren Bereich. Für die anderen fünf Lastkombinationen, welche im Bereich der inelastischen Deformationen größtenteils Spannungstriaxialitäten von $\eta \leq 1/3$ aufweisen [22], zeigen die Last-Verschiebungskurven der numerischen Simulationen mit $a/c = 0MPa^{-1}$ die beste Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Last-Verschiebungskurven. Mit sinkenden Spannungstriaxialitäten, hervorgerufen durch Reduzierung der Last F_2 , übersteigen die numerischen Simulationen mit $a/c = 0,00034MPa^{-1}$ die experimentellen Kurven, da plastisches Materialverhalten für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ bei einer 3% höheren Last eintritt. Für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -1$ tritt plastisches Materialverhalten erst bei einer Erhöhung der Last um 30% auf (Abb. 5.6b, Abb. 5.7 und Abb. 5.8). Daher wird in dieser Arbeit zur weiteren Berechnung und Auswertung

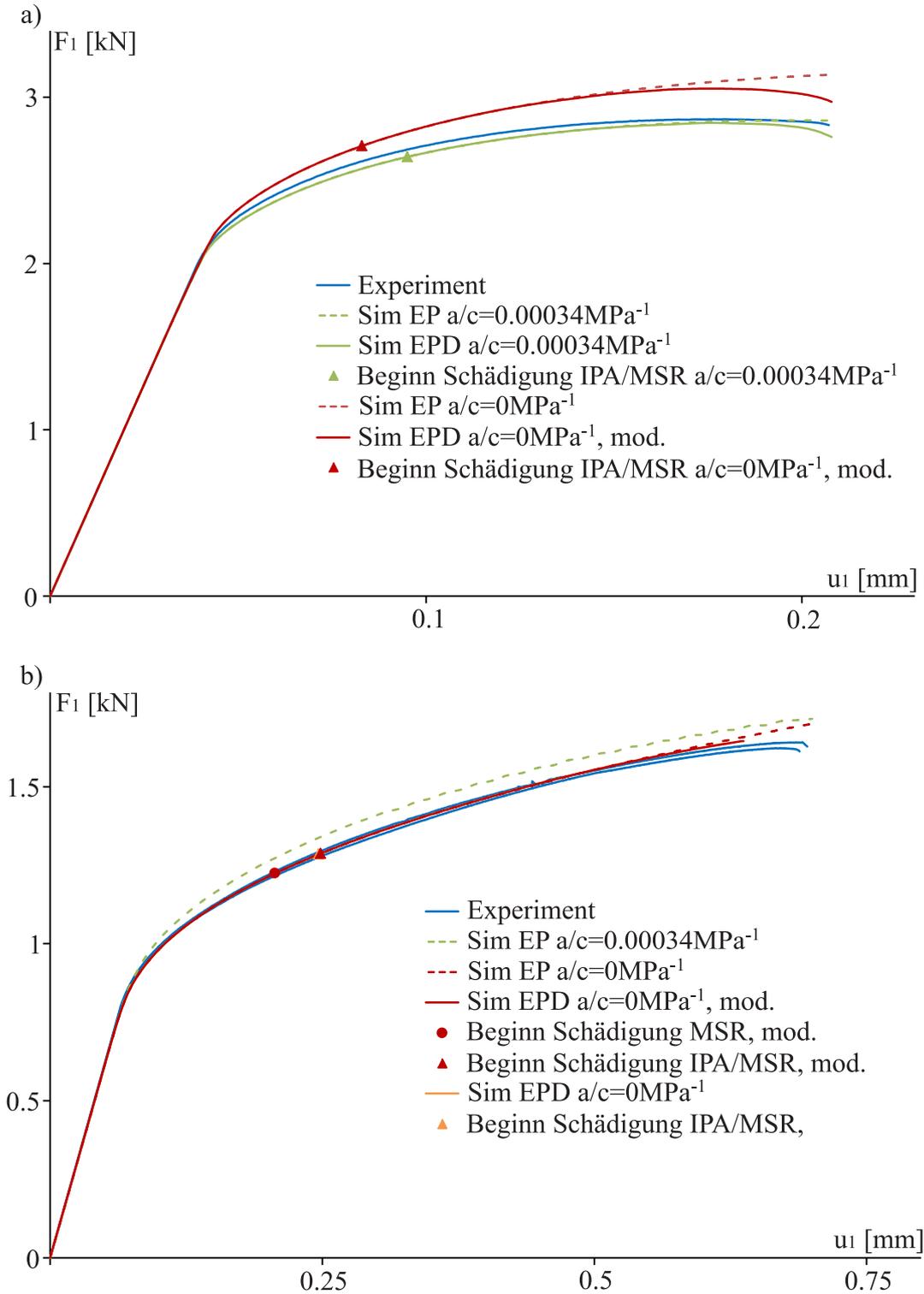


Abbildung 5.6: Last-Verschiebungsdiagramme aus Experimenten, elastisch-plastischen und elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen unter verschiedenen Lastkombinationen; a) $F_1 : F_2 = 0 : 1$; b) $F_1 : F_2 = 1 : 1$

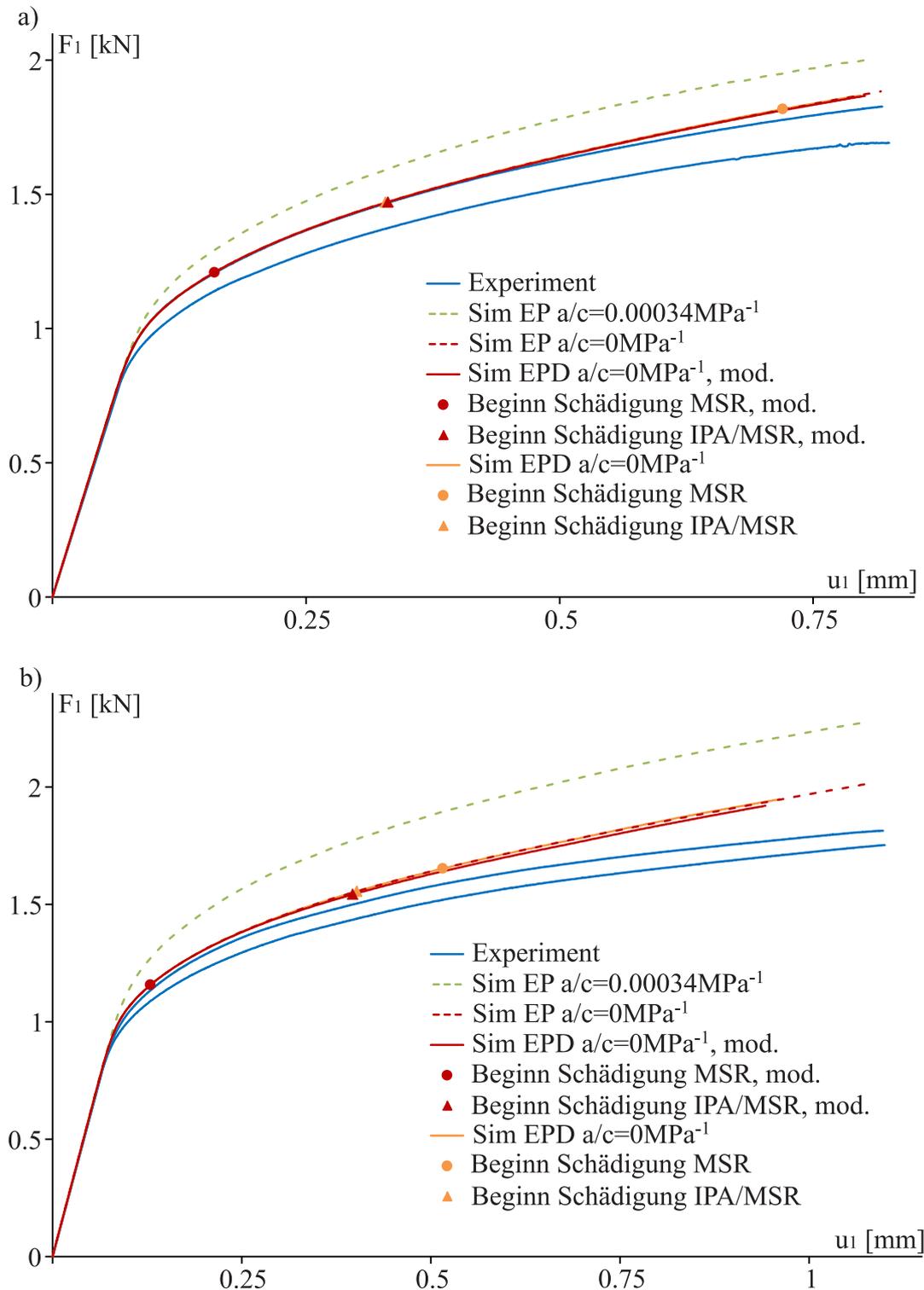


Abbildung 5.7: Last-Verschiebungsdiagramme aus Experimenten, elastisch-plastischen und elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen unter verschiedenen Lastkombinationen; a) $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$; b) $F_1 : F_2 = 1 : 0$

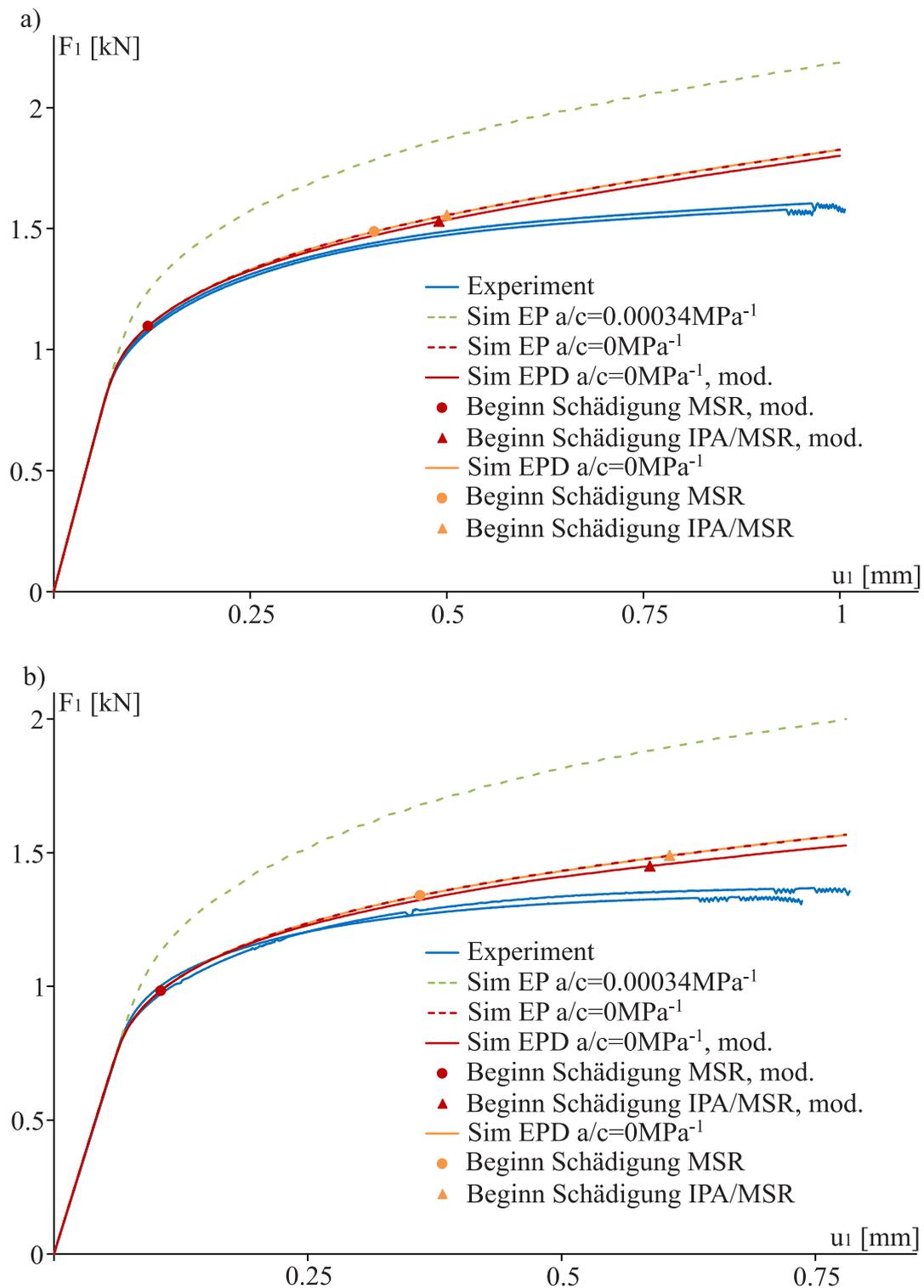


Abbildung 5.8: Last-Verschiebungsdiagramme aus Experimenten, elastisch-plastischen und elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen unter verschiedenen Lastkombinationen; a) $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$; b) $F_1 : F_2 = 1 : -1$

$a/c = 0MPa^{-1}$ verwendet.

Wie schon in Kap. 4.2.2 wird der Wert für die Initialschädigungsspannung σ_0 mit dem c - γ -Diagramm des ungekerbten Zugstabes ermittelt. Für die erste Charge ergibt sich die Initialschädigungsspannung zu $\sigma_0 = 295MPa$.

Der Parameter $\tilde{\beta}$ ist von besonderer Bedeutung für die Schädigungsbedingung (2.97), da er nicht wie der Parameter $\tilde{\alpha}$ lediglich zwei konstante Werte annehmen kann, sondern eine komplexe Funktion in Abhängigkeit von der Spannungstriaxialität und dem Lodeparameter ist [23].

In Kap. 2.3.2 wurden bereits die drei Arten der Schädigung vorgestellt (Abb. 2.2). Diese konnten differenziert werden nach Schädigung durch isotrope Porenaufweitung (IPA), eine gemischte Schädigung aufgrund von isotroper Porenaufweitung und Schädigung durch Mikroscherrisse (IPA/MSR) sowie nur Schädigung durch Mikroscherrisse (MSR). Hohe hydrostatische Spannungen korrespondieren mit isotropem Porenwachstum, was zur Schädigung durch isotrope Porenaufweitung führen kann. Hingegen führen deviatorische Spannungen zu einem isochoren Verformungsverhalten, was wiederum Schädigung durch Mikroscherrisse hervorrufen kann. Für die weitere Auswertung ist diese Einteilung der Schädigungsarten in Abhängigkeit von der Spannungstriaxialität von Bedeutung. Die Abb. 5.9 zeigt die Verteilung der Spannungstriaxialitäten der einzelnen Lastkombinationen zu Schädigungsbeginn unter Verwendung einer im Folgenden erläuterten modifizierten Schädigungsbedingung. Die Größe und Verteilung der Spannungstriaxialität ändert sich bei jeder Lastkombination sowohl für elastisch-plastische als auch elastisch-plastisch-schädigende numerische Simulationen von Beginn bis zum Ende der Belastung nur minimal. Mit Hilfe der Abb. 5.9 ist jedoch ersichtlich, in welchen Bereichen überhaupt welche Art der Schädigung auftreten könnte.

Die fünf Lastkombinationen mit Schereinwirkungen ($F_1 \neq 0$) weisen im oberen rechten und unteren linken Bereich um die Kerbe jeweils negative Spannungstriaxialitäten auf (Abb. 5.9). Bei den Scher-Druck-Lastkombinationen treten im gesamten inneren Bereich ebenfalls negative Spannungstriaxialitäten auf. In diesen Bereichen ist gemäß der in dieser Arbeit verwendeten Theorie nur Schädigung aufgrund von Mikroscherrissen zu erwarten. In allen anderen Bereichen inelastischer Deformationen dieser fünf Lastkombinationen und des biaxialen Zugversuchs liegt die Spannungstriaxialität in den Grenzen $0 \leq \eta \leq 10/3$. Somit wird in diesem Bereich nur eine gemischte Schädigung aufgrund von isotropen Porenaufweitungen und von Mikroscherrissen auftreten.

Elastisch-plastisch-schädigende numerische Simulationen mit $\tilde{\beta}$ nach (4.4) und (4.3) zeigen, dass für die fünf Lastkombinationen mit Schereinwirkungen die Schädigung immer im oberen rechten und unteren linken Bereich, wo die Spannungstriaxialitäten negativ sind, oder im oberen linken und unter rechten Bereich der Kerbe, wo

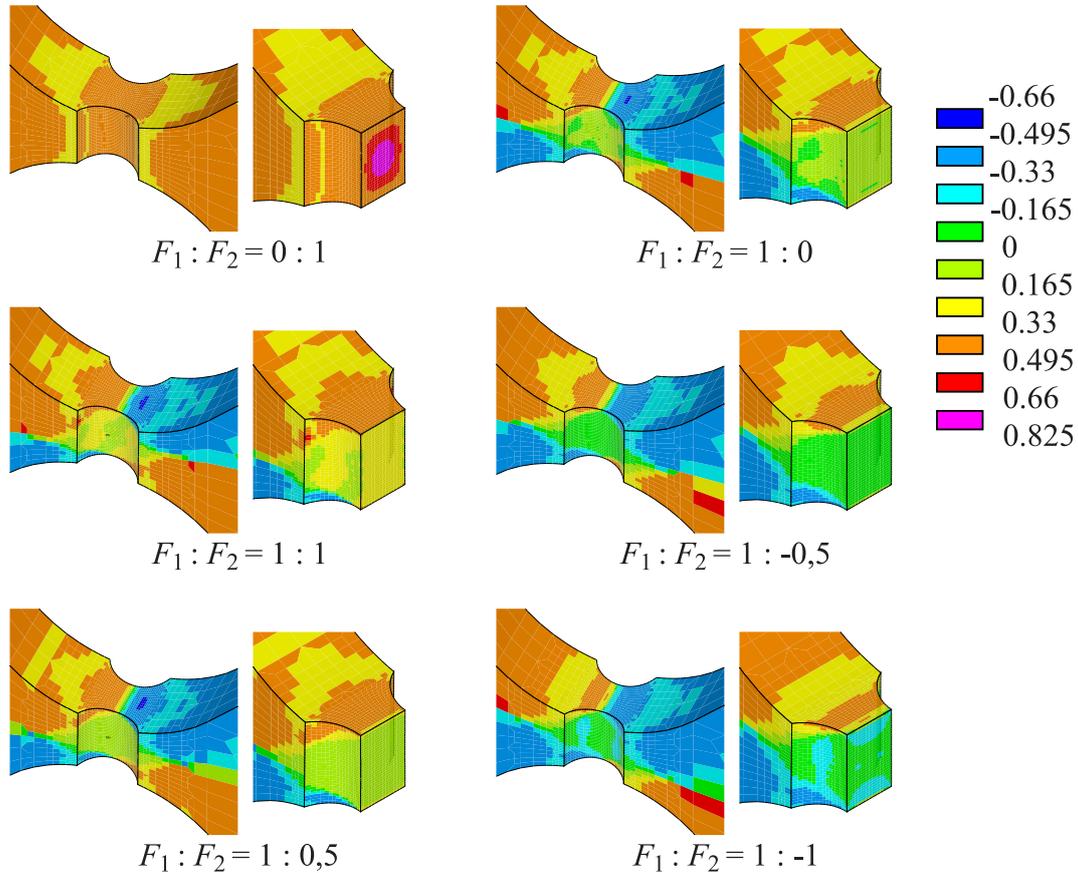


Abbildung 5.9: Spannungstriaaxialitäten der einzelnen Lastkombinationen zu Schädigungsbeginn mit modifiziertem Parameter $\hat{\beta}$ (5.1)

die Spannungstriaaxialitäten positiv sind, beginnt. Die Spannungstriaaxialität ist daher auch ein Indiz, ob es sich um Schädigung durch Mikroscherrisse oder gemischte Schädigung aufgrund von gleichzeitigen isotropen Porenaufweitungen und Mikroscherrissen handelt.

Die Last-Verschiebungskurven und der Beginn der einzelnen Schädigungsarten dieser numerischen Simulationen sind in den Diagrammen in Abb. 5.6b, Abb. 5.7 und Abb. 5.8 dargestellt. Bei den Scher-Druck-Lastkombinationen und bei der reinen Scherbelastung setzt die Schädigung durch Mikroscherrisse (MSR) sehr spät ein, so dass diese einen geringen Einfluss auf den Verlauf der Last-Verschiebungskurven hat. Daher ist der Verlauf der Kurven der elastisch-plastischen sowie der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen annähernd gleich. Für den biaxialen Zugversuch und die Scher-Zug-Lastkombinationen ist der Einfluss aufgrund von Schädigung durch Mikroscherrisse marginal.

Durch die Modifikation von (4.4) zu

$$\tilde{\beta}_0(\eta) = -1,28\eta + 0,85 \quad (5.1)$$

lässt sich der Einfluss der Schädigung durch Mikroscherrisse im Modell verstärken. Die Last-Verschiebungskurven (Abb. 5.6b, Abb. 5.7 und Abb. 5.8) der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen mit der modifizierten Schädigungsbedingung (mod.) zeigen jeweils ein früheres Einsetzen der Schädigung durch Mikroscherrisse. Dies hat jedoch nur Auswirkungen auf die Scher-Druck-Lastkombinationen und die reine Scherbelastung. Hier ist ein deutlicher Lastabfall im Vergleich zur elastisch-plastischen numerischen Simulation zu erkennen. Für die Scher-Zug-Lastkombinationen tritt Schädigung durch Mikroscherrisse deutlich früher auf, hat aber für die Schädigungsentwicklung einen zu vernachlässigenden Einfluss. Da beim biaxialen Zugversuch alle Spannungstriaxialitäten im schädigenden Bereich positiv sind, sind die elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen für beide Schädigungsbedingungen nahezu identisch. Da diese modifizierte Schädigungsbedingung eine bessere Übereinstimmung zwischen Experiment und numerischer Simulation aufweist, wird diese für die weitere Auswertung verwendet.

Im Folgenden werden drei Lastkombinationen bezüglich des Schädigungsbeginns dargestellt und ausgewertet. Jede Lastkombination zeigt eine der drei für diesen Versuchskörper möglichen Arten des Beginns der Schädigung.

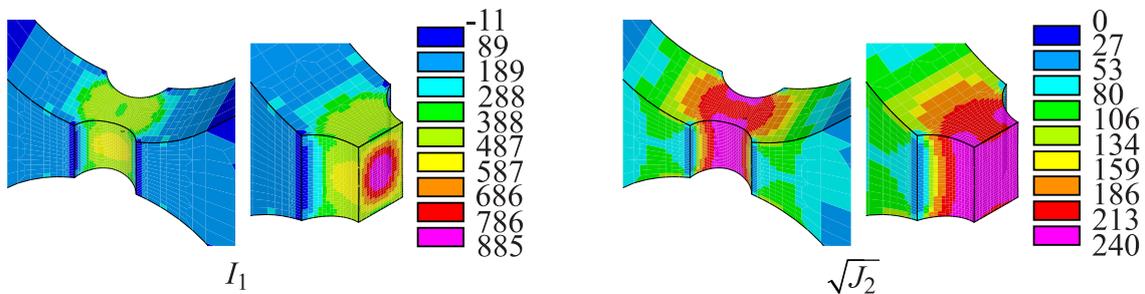


Abbildung 5.10: Erste Spannungsinvariante I_1 [MPa] und zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ [MPa] zu Schädigungsbeginn für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 0 : 1$

Für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 0 : 1$ setzt die Schädigung im Bereich der hohen Spannungstriaxialitäten (siehe Abb. 5.9) ein. In Abb. 5.10 sind die erste Spannungsinvariante I_1 und die zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ zu Schädigungsbeginn für diesen biaxialen Zugversuch abgebildet. Im Zentrum sind hohe hydrostatische Spannungen und hohe deviatorische Spannungen vorhanden. Letztere haben aufgrund der hohen Spannungstriaxialität in diesem zentralen Bereich einen sehr geringen Einfluss. Es handelt sich im zentralen Bereich zwar um eine

gemischte Schädigung, jedoch zeigen die Last-Verschiebungskurven der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen (Abb. 5.6a), dass der Anteil der Schädigung durch Mikroscherrisse vernachlässigbar ist im Gegensatz zur Schädigung aufgrund isotroper Porenaufweitung.

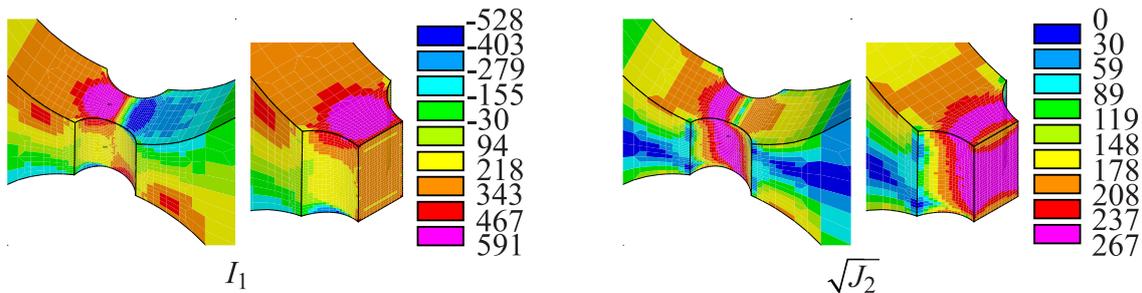


Abbildung 5.11: Erste Spannungsinvariante I_1 [MPa] und zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ [MPa] zu Schädigungsbeginn für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$

Die Abb. 5.11 zeigt die Invarianten I_1 und $\sqrt{J_2}$ für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ zu Schädigungsbeginn. Hohe hydrostatische Spannungen sind im oberen linken und unter rechten Bereich der Kerbe zu erkennen. Hohe deviatorische Spannungen entstehen vom oberen linken zum unteren rechten Bereich der Kerbe. Die Schädigung beginnt daher in den Bereichen hoher hydrostatischer Spannungen.

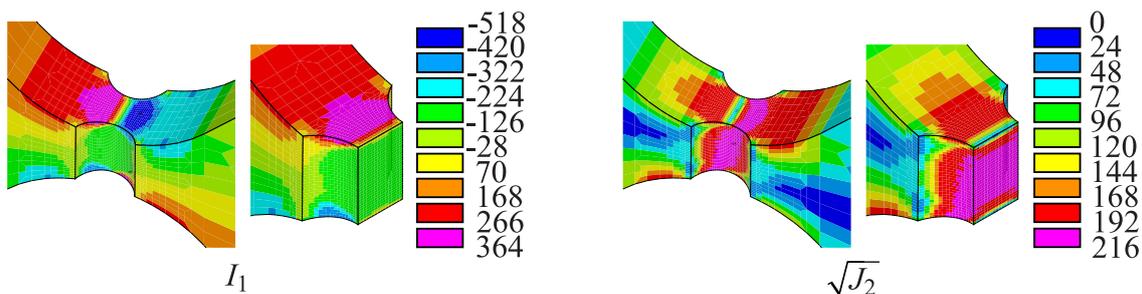


Abbildung 5.12: Erste Spannungsinvariante I_1 [MPa] und zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ [MPa] zu Schädigungsbeginn für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -1$

Als Drittes wird die Schädigungsbedingung für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -1$ ausgewertet. Dazu zeigt Abb. 5.12 die Invarianten I_1 und $\sqrt{J_2}$ zu Schädigungsbeginn. Im oberen linken und unteren rechten Bereich der Kerbe entstehen große hydrostatische Spannungen, während hohe deviatorische Spannungen vom oberen rechten zum unteren linken Bereich der Kerbe auftreten. Im Bereich hoher deviatorischer

Spannungen ist die Spannungstriaxialität negativ. Hydrostatische Spannungen haben daher gemäß der in dieser Arbeit verwendeten Theorie in diesem Bereich keinen Einfluss auf den Beginn der Schädigung. Die größten negativen Spannungstriaxialitäten befinden sich im oberen rechten und unteren linken Bereich der Kerbe. An dieser Stelle haben die deviatorischen Spannungen den größten Einfluss, da der Parameter $\tilde{\beta}$ dort am größten ist. Bei der hier ausgewerteten modifizierten Schädigungsbedingung setzt die Schädigung im Bereich der größten deviatorischen Spannungen daher wesentlich früher ein im Gegensatz zur ursprünglichen Schädigungsbedingung (Abb. 5.8b). An Stellen hoher hydrostatischer Spannungen sind auch relativ große deviatorische Spannungen vorhanden. Diese haben aber aufgrund der positiven Spannungstriaxialität und dem daraus resultierenden kleinen $\tilde{\beta}$ einen geringen Einfluss auf den Schädigungsbeginn. Da bei der modifizierten Schädigungsbedingung die Schädigung durch Mikroscherrisse im Vergleich zur ursprünglichen Schädigungsbedingung wesentlich früher stattfindet, ist auch eine größere Entfestigung in diesem Bereich vorhanden. Daher ändert sich auch der Spannungszustand im Bereich der hohen hydrostatischen Spannungen. Somit kommt es auch in diesem Bereich zu einem früheren Einsetzen der Schädigung (Abb. 5.8b).

Die Last-Verschiebungsdiagramme (Abb. 5.6, Abb. 5.7 und Abb. 5.8) zeigen, dass unter Verwendung der modifizierten Schädigungsbedingung die anisotrope Schädigung (MSR) bei allen Lastkombinationen wesentlich früher einsetzt. Mit einer kleiner werdenden Last F_2 setzt die gemischte Schädigung bei beiden Schädigungsbedingungen immer später ein.

Die Spannungstriaxialitäten der Lastkombinationen mit Schereinwirkungen sind im oberen rechten und unteren linken Bereich größtenteils kleiner als $\eta = -1/3$. Unter Verwendung des Grenzwertes der Spannungstriaxialität nach [6] mit $\eta_c = -1/3$ kann in diesen Bereichen somit kaum Schädigung auftreten. Für alle Lastkombinationen sind jeweils die Last-Verschiebungskurven für die elastisch-plastischen und die elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen mit $\eta_c = -1/3$ unter Verwendung beider Schädigungsbedingungen annähernd gleich.

Eine Modifizierung des Grenzwertes η_c wird auf der Grundlage dieser numerischen Simulationen und in Bezug auf die Ergebnisse aus [74, 48] durchgeführt. In Kap. 1 (siehe Abb. 1.2) wurde bereits erläutert, dass Schädigung gemäß des in dieser Arbeit verwendeten Modells erst auftreten kann, wenn bereits plastisches Verhalten vorliegt. In Bezug auf diese Bedingung und der neu gewählten Funktion für den Parameter $\tilde{\beta}$ der Schädigungsbedingung wird der Wert des Parameters η_c analytisch ermittelt. Für negative Spannungstriaxialitäten und den gewählten Parameter $a/c = 0$ ergibt sich die Fließbedingung (2.77) zu

$$f^{\text{pl}}(\bar{J}_2, c) = \sqrt{\bar{J}_2} - c = 0 \quad (5.2)$$

und die Schädigungsbedingung (2.97) zu

$$f^{\text{da}}(J_2, \sigma) = \tilde{\beta} \sqrt{J_2} - \sigma = 0. \quad (5.3)$$

Da zu Schädigungsbeginn die Spannungen der geschädigten und ungeschädigten Konfiguration noch identisch sind, gilt $\sqrt{J_2} = \sqrt{J_2}$. Somit lässt sich für die in dieser Arbeit verwendeten Materialparameter das Verhältnis

$$\tilde{\beta} = \frac{\sigma_0}{c_0} = \frac{295 \text{ MPa}}{174 \text{ MPa}} \quad (5.4)$$

aufstellen. Unter dem rechnerisch ungünstigsten Zustand von $\omega = -1$ resultiert mit (5.1) die Gl. (4.3) zu

$$\frac{295}{174} = -1,28\eta_c + 0,85 + 0,03. \quad (5.5)$$

Der somit ermittelte und in dieser Arbeit verwendete Grenzwert der Spannungstriaxialität hat die Größe von $\eta_c = -0,637$. Dieser Wert kann durch Veränderung der Funktion des Parameters $\tilde{\beta}$, durch die Änderung der Initialfließspannung c_0 oder durch die Änderung der Initialschädigungsspannung σ_0 verändert werden.

Von besonderer Bedeutung ist es nochmals zu erwähnen, dass dies eine analytische Herleitung des Grenzwertes η_c ist, die notwendig ist, um die Stabilität der numerischen Simulation nicht zu beeinträchtigen. Diese Herleitung des Grenzwerts der Spannungstriaxialität $\eta_c = -0,637$ beruht nicht auf experimentellen Beobachtungen. Es sollten dazu jedoch weitere experimentelle Untersuchungen durchgeführt werden.

Die für die zweite Charge verwendeten elastischen Schädigungsmodule $\eta_1 \dots \eta_4$ (Tab. 4.1) zeigen für den ungekerbten und die verschiedenen gekerbten Zugversuche aus Kap. 4 eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Experimenten und elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen. Bei diesen uniaxialen Versuchen treten jedoch nur Spannungstriaxialitäten im Bereich von $1/3 \leq \eta \leq 1/\sqrt{3}$ auf.

Die elastischen Schädigungsmodule bewirken eine Abminderung der elastischen Eigenschaften (2.84). Auf die isotrope Schädigung haben besonders die elastischen Schädigungsmodule η_1 und η_2 eine große Auswirkung. Daher haben diese in Bereichen mit großen positiven Spannungstriaxialitäten einen starken Einfluss auf die Schädigungsentwicklung. Mit kleiner werdenden Spannungstriaxialitäten bis hin zu $\eta = 0$ nimmt dieser Effekt ab. Für negative Spannungstriaxialitäten haben die elastischen Schädigungsmodule η_1 und η_2 nur noch einen geringen Einfluss.

Da die Schädigung im Bereich positiver Spannungstriaxialitäten besonders auf den biaxialen Zugversuch und die Scher-Zug-Lastkombinationen Auswirkungen hat, sind auch die Einflüsse von η_1 und η_2 für diese drei Lastkombinationen groß. Bei großen

negativen Werten für η_1 und η_2 kommt es bei dem biaxialen Zugversuch (Abb. 5.6a) mit einsetzender Schädigung zu einem raschen Abfall der Last, was zu einem frühzeitigen Abbruch der Simulationen führt. Hingegen wird mit hohen negativen Werten für η_1 und η_2 eine sehr gute Übereinstimmung der Last-Verschiebungskurven von elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen und Experimenten für die Scher-Zug-Lastkombinationen (Abb. 5.6b und Abb. 5.7a) erzielt. Wenn für diese beiden Lastkombinationen eine gute Übereinstimmung vorliegt, brechen die numerischen Simulationen jedoch vorzeitig ab, da ein plötzlicher starker Lastabfall auftritt. Werden kleine negative Werte für η_1 und η_2 gewählt, ist der Anstieg der Last-Verschiebungskurven nach Schädigungsbeginn von elastisch-plastisch-schädigender numerischer Simulation und Experiment für den biaxialen Zugversuch sowohl für $a/c = 0,00034MPa^{-1}$ als auch für $a/c = 0MPa^{-1}$ ähnlich. Hingegen ist für die Scher-Zug-Lastkombinationen im Last-Verschiebungsdiagramm keine Entfestigung zu erkennen (Abb. 5.6b und Abb. 5.7a).

Auf die Last-Verschiebungskurven der Scher-Druck-Lastkombinationen (Abb. 5.8) und der reinen Scherbelastung (Abb. 5.7b) hat die Änderung der Werte von η_1 und η_2 nur sehr geringe Auswirkungen.

Die Materialparameter η_3 und η_4 haben große Auswirkungen auf die anisotropen elastischen Eigenschaften. Der Einfluss von η_3 und η_4 auf die Schädigungsentwicklung ist daher in Bereichen mit einer negativen Spannungstriaxialität besonders groß. Daher sind die Auswirkungen von η_3 und η_4 für die Scher-Druck-Lastkombinationen und die reine Scherbelastung hoch. Sind für negative Spannungstriaxialitäten die Materialparameter η_3 und η_4 negativ, kommt es für diese Lastkombinationen zu einem weiteren Anstieg der Last-Verschiebungskurven. Um zu vermeiden, dass die Last-Verschiebungskurven der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen dieser Lastkombinationen nach Schädigungsbeginn oberhalb der Kurve der elastisch-plastischen numerischen Simulationen verlaufen, müssen die Materialparameter η_3 und η_4 große positive Werte annehmen.

Für Berechnungen mit Spannungstriaxialitäten $\eta \geq 1/3$ führen diese hohen positiven Werte für η_3 und η_4 zu nicht verwertbaren Ergebnissen.

Daher wurden die elastischen Schädigungsmodule zu

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -100000MPa \\ \eta_2 &= -50000MPa \\ \eta_3 &= \begin{cases} -12500MPa & \text{für } \eta \geq 0 \\ 600000MPa & \text{für } \eta < 0 \end{cases} \\ \eta_4 &= \begin{cases} -2500MPa & \text{für } \eta \geq 0 \\ 600000MPa & \text{für } \eta < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

gesetzt, um die elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen mit und

ohne modifizierter Schädigungsbedingung für die erste Charge durchzuführen. Dies führt zu den in den Diagrammen (Abb. 5.6, Abb. 5.7 und Abb. 5.8) dargestellten Last-Verschiebungskurven, wobei die in Tab. 5.1 dargestellten Materialparameter verwendet wurden.

Mit größeren positiven Werten für η_3 und η_4 können die Last-Verschiebungskurven der Scher-Druck-Lastkombinationen und der reinen Scherbelastung weiter gesenkt werden, um eine Übereinstimmung mit den Kurven der Experimente zu erreichen. Dies führt jedoch zu einem früheren Abbruch der numerischen Simulationen für die Scher-Zug-Lastkombinationen und die reine Scherbelastung.

Tabelle 5.1: Zusammenfassung der elastischen, plastischen und schädigenden Materialparameter der ersten Charge

Variable	Einheit	Beschreibung	Wert 1.Charge
<i>elastische Materialparameter</i>			
E	MPa	Elastizitätsmodul	65000
ν	[-]	Querkontraktionszahl	0,3
<i>plastische Materialparameter</i>			
c_0	MPa	Initialfließspannung	174
H	MPa	Verfestigungsparameter	1800
n	[-]	Verfestigungsexponent	0,23
a/c	MPa^{-1}	hydrostatischer Spannungskoeffizient	0
<i>schädigende Materialparameter</i>			
D_1	MPa	Entfestigungsparameter 1	700
D_2	MPa	Entfestigungsparameter 2	18
b_1	[-]	Entfestigungsexponent	200
σ_0	MPa	Initialschädigungsspannung	295
η_1	MPa	elastisches Schädigungsmodul 1	-100000
η_2	MPa	elastisches Schädigungsmodul 2	-50000
η_3 für $\eta \geq 0$	MPa	elastisches Schädigungsmodul 3	-12500
η_3 für $\eta < 0$	MPa	elastisches Schädigungsmodul 3	600000
η_4 für $\eta \geq 0$	MPa	elastisches Schädigungsmodul 4	-2500
η_4 für $\eta < 0$	MPa	elastisches Schädigungsmodul 4	600000

5.2.4 Analyse der Bruchflächen

Für mikroskopische Untersuchungen der Bruchflächen wurde das Rasterelektronenmikroskop *Philips XL-20* verwendet. Da die Bruchfläche nicht immer einen homogenen Schädigungszustand aufweist, wurden für verschiedene Lastkombinationen drei Abschnitte genauer untersucht. Diese Abschnitte A, B und C (Abb. 5.13) wurden

jeweils mit 100-facher, 200-facher und 500-facher Vergrößerung betrachtet. In den

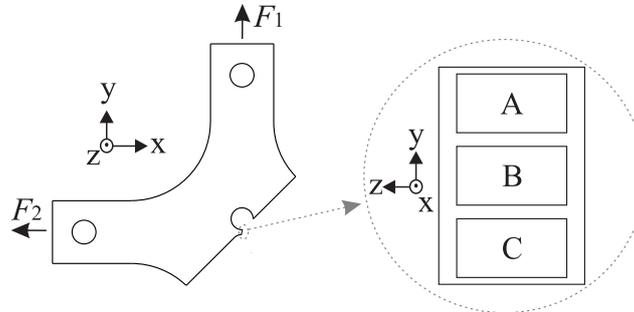


Abbildung 5.13: Schematische Darstellung der Bildpositionen A, B und C

folgenden Unterkapiteln werden für jede Lastkombination die numerischen Ergebnisse zum Ende der Simulation mit der Bruchfläche und dem Verlauf der Bruchkante verglichen.

Zur Validierung des in dieser Arbeit verwendeten Modells können so die verschiedenen Schädigungsmechanismen aufgezeigt und den entsprechenden Spannungszuständen zugeordnet werden. Durch den Vergleich von Rissverlauf und den elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen können zudem Aussagen über den Zusammenhang von Schädigung und Bruch getroffen werden.

Lastkombination $F_1 : F_2 = 0 : 1$

Im Gegensatz zu den uniaxialen gekerbten Zugstäben besitzt der biaxiale Versuchskörper eine zusätzliche Einkerbung in Dickenrichtung. Aufgrund dieser sind die hydrostatischen Spannungen I_1 im Bereich der zu beobachtenden Einschnürung höher als bei den uniaxialen gekerbten Zugstäben. Ebenso sind die deviatorischen Spannungen $\sqrt{J_2}$ im zentralen Bereich der Kerbe am größten (Abb. 5.14). Bei einem reinen Zugversuch mit dem biaxialen Versuchskörper treten somit im Vergleich zu den uniaxialen gekerbten Zugstäben höhere Spannungstriaxialitäten η im Zentrum der Kerbe auf. Die größten Werte liegen mit etwa $\eta = 0,85$ direkt in der Mitte des Versuchskörpers und sind daher in der Abb. 5.14 nicht zu erkennen. Da die Spannungstriaxialität im Bereich der inelastischen Deformationen hohe positive Werte von $\eta \geq 0,33$ annimmt, jedoch der Wert von $\eta_t = 10/3$ nicht überschritten wird, liegt eine gemischte Schädigung aufgrund von isotroper Porenaufweitung und gleichzeitiger Entstehung von Mikroscherrissen vor. Der Einfluss der Schädigung durch Mikroscherrisse ist in Bezug auf die hohen positiven Spannungstriaxialitäten (Abb. 5.14) nur gering. Da der geschädigte Bereich eine senkrechte Ausrichtung hat, ist diese Orientierung auch bei der Schädigungsvergleichsdehnung μ zu erkennen, welche zum Zeitpunkt des Versagens in dem zentralen Bereich mit Werten von

knapp über 9% am größten ist.

Der Bruch der Probe (Abb. 5.14) verläuft auf Höhe der Einschnürung ebenfalls senkrecht von oben nach unten. Die Bruchkante im Experiment passt daher zu den numerischen Ergebnissen, da die Ausrichtung von Bruchkante und numerisch ermittelter Schädigungsart identisch sind. Das Wegbrechen der unteren linken Ecke zeigt lediglich die Empfindlichkeit des Schädigungsprozesses auf Imperfektionen.

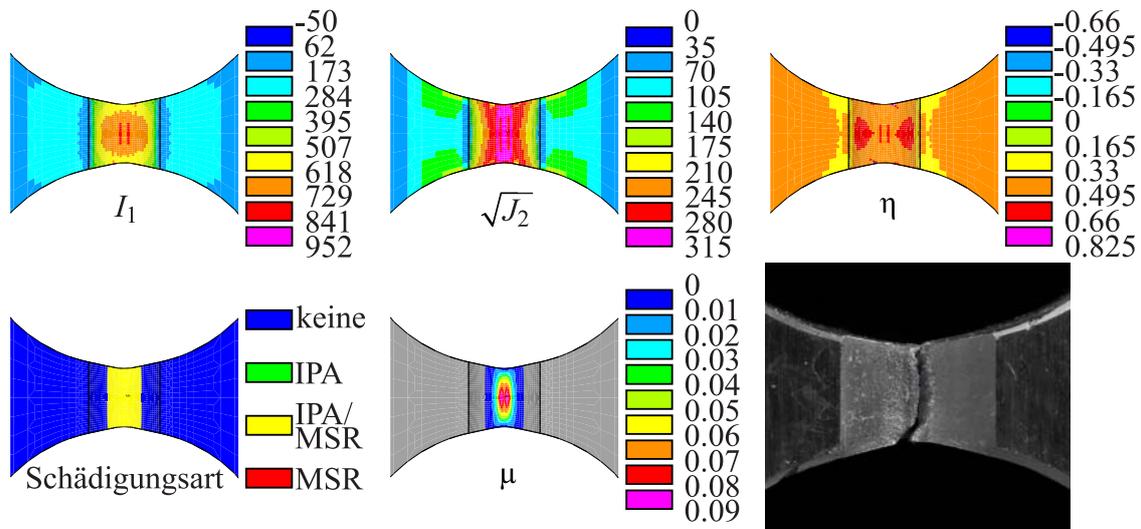


Abbildung 5.14: Erste Spannungsinvariante I_1 [MPa], zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ [MPa], Spannungstriaxialität η , ermittelte Schädigungsart und Schädigungsvergleichsdehnung μ am Ende der Berechnung sowie das Bruchbild für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 0 : 1$

Der reine Zugversuch der Biaxialprobe weist auf der Bruchfläche nur einen Schädigungsmechanismus auf. Daher wird für diese Lastkombination nur ein Abschnitt der Oberfläche (Abb. 5.15) gezeigt. Die gesamte Bruchfläche ist durch eine Aufweitung der Poren gekennzeichnet, hingegen sind Schermechanismen kaum zu erkennen.

Der Vergleich der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Ergebnisse (Abb. 5.14) mit den Experimenten zeigt eine gute Übereinstimmung. Der Schädigungsmechanismus wurde durch die numerischen Simulationen anhand der Spannungstriaxialität und der daraus resultierenden Schädigungsart korrekt vorhergesagt. Auch der senkrechte Verlauf des Bruchs wird durch die senkrechte Ausrichtung der hydrostatischen Spannung und der Schädigungsvergleichsdehnung μ annähernd wiedergegeben. Die gesamten Verformungen des Probekörpers im Experiment und in der numerischen Simulation ähneln sich, was in Abb. 5.14 ebenfalls deutlich wird.

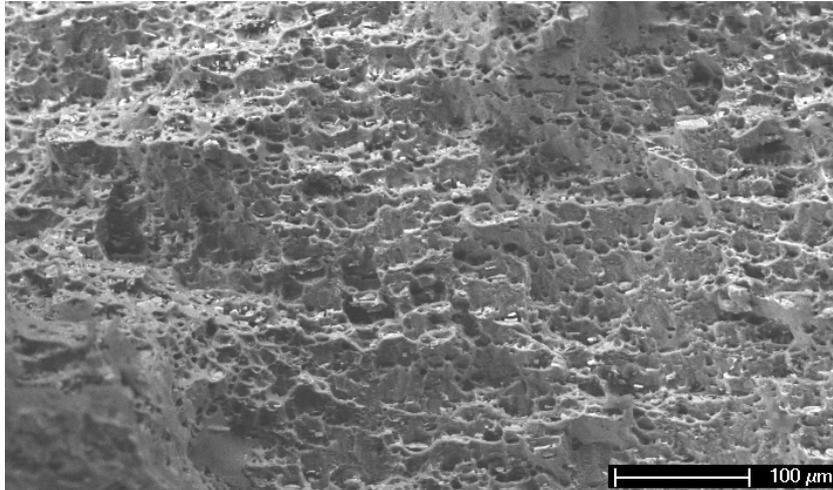


Abbildung 5.15: 200-fache Vergrößerung der Bruchfläche für das Belastungsverhältnis $F_1 : F_2 = 0 : 1$

Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$

Für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ sind die Ergebnisse der numerischen Simulation in Abb. 5.16 dargestellt. Die hydrostatische Spannung I_1 ist oben links und unten rechts am größten. Im gesamten Bereich der Kerbe weist die hydrostatische Spannung ausschließlich oben rechts und unten links negative Werte auf. Die deviatorischen Spannungen $\sqrt{J_2}$ sind im gesamten Bereich von oben links nach unten rechts hoch und haben ihr Maximum im zentralen Bereich. Die Spannungstriaxialität η ist daher fast im gesamten Bereich der Kerbe positiv und zeigt oben links und unten rechts große Werte. Aufgrund der negativen hydrostatischen Spannungen im oberen rechten und unteren linken Bereich der Kerbe sind die Spannungstriaxialitäten in diesem Bereich ebenfalls negativ. Daher ist am oberen rechten und unteren linken Bereich eine Schädigung durch Mikroscherrisse (MSR) vorhanden. Der restliche Bereich der Kerbe ist durch eine gemischte Schädigung (IPA/MSR) charakterisiert. Die Schädigungsvergleichsdehnung μ zeigt im Bereich der Schädigung durch Mikroscherrisse nur eine geringe Entwicklung, im Bereich der gemischten Schädigung ist diese jedoch groß. Die größten Schädigungsvergleichsdehnungen treten mit etwa 8% oben links und unten rechts auf, da dort die Spannungstriaxialität und somit auch der Einfluss der hydrostatischen Spannungen auf das Schädigungsverhalten hoch ist. Zwischen diesen beiden Maxima entwickelt sich ein Band mit einer maximalen Schädigungsvergleichsdehnung von etwa 6%.

Die Bruchkante des Probekörpers verläuft von oben links nach unten in die Mitte (Abb. 5.16). Sie ist nicht parallel zu einer Linie zwischen den beiden Maxima der Schädigungsvergleichsdehnung. Die Bruchkante erstreckt sich dabei oben durch

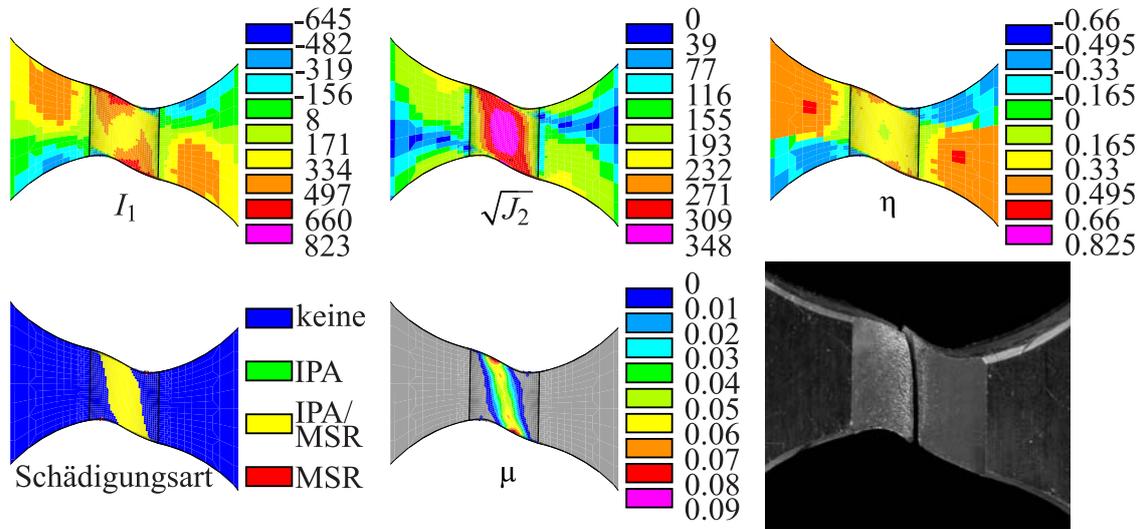


Abbildung 5.16: Erste Spannungsinvariante I_1 [MPa], zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ [MPa], Spannungstriaxialität η , ermittelte Schädigungsart und Schädigungsvergleichsdehnung μ am Ende der Berechnung sowie das Bruchbild für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$

Bereiche mit Spannungstriaxialitäten von $0,165 \leq \eta \leq 0,495$, mittig durch Bereiche mit Spannungstriaxialitäten in den Grenzen von $0,165 \leq \eta \leq 0,33$ und unten wiederum durch Bereiche mit Spannungstriaxialitäten von $0,165 \leq \eta \leq 0,495$. Im mittleren Bereich sind die Spannungstriaxialitäten nur oberflächlich kleiner als $\eta = 0,165$.

Die Bruchfläche weist im oberen und unteren Abschnitt (Abb. 5.17A,C) starkes isotropes Porenwachstum auf. Im Vergleich dazu haben sich die Poren im mittleren Abschnitt (Abb. 5.17B) weniger aufgeweitet. In allen drei Abschnitten sind jedoch auch geringe, durch den Belastungsprozess hervorgerufene, Schermechanismen zu erkennen. In den Abb. 5.17A,C sind teils starke Schereinwirkungen auf hervorstehende Bereiche sichtbar. Diese entstehen, wenn beide Bruchflächen direkt nach dem Bruch stoßartig aneinander reiben, was an dem gleichgerichteten senkrechten Scherverlauf und in den den Versuch dokumentierenden Filmaufnahmen erkennbar ist.

Die elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen stimmen mit den Experimenten überein, was schon durch die Ähnlichkeit der gesamten Verformungen der Probe von Experiment und numerischer Simulation (Abb. 5.16) deutlich wird. Die Größe der Spannungstriaxialitäten entlang der Bruchkante passt zu den Schädigungsmechanismen, die auf der Bruchfläche identifiziert wurden. Zudem geben die Ausrichtung der hydrostatischen und deviatorischen Spannungen sowie der Schädigungsvergleichsdehnung μ den Verlauf des Bruchs annähernd wieder.

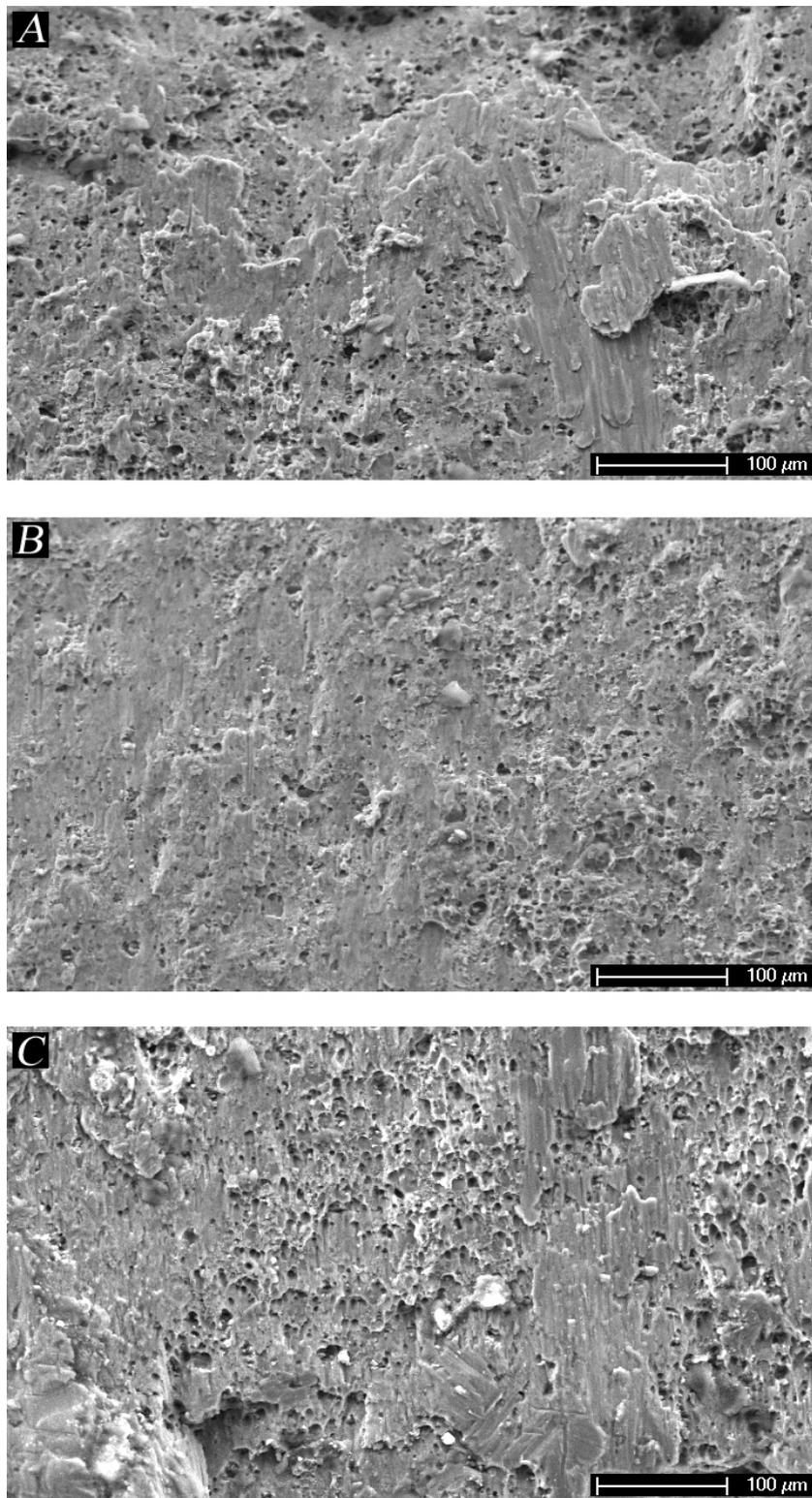


Abbildung 5.17: 200-fache Vergrößerung der Bruchfläche für das Belastungsverhältnis $F_1 : F_2 = 1 : 1$

Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$

Die Ergebnisse der numerischen Simulation für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$ (Abb. 5.18) ähneln den Ergebnissen aus Kap. 5.2.4. Die hydrostatische Spannung I_1 ist oben links und unten rechts am größten, jedoch etwa 7% kleiner als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ (Abb. 5.16). Im gesamten Bereich der Kerbe weist die hydrostatische Spannung auch für diese Lastkombination ausschließlich oben rechts und unten links negative Werte auf, welche betragsmäßig etwa 21% größer sind als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ (Abb. 5.16). Die deviatorischen Spannungen $\sqrt{J_2}$ haben ihr Maximum im zentralen Bereich der Kerbe (Abb. 5.18), welches etwa 4% größer ist als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ (Abb. 5.16). Im gesamten Bereich von oben links nach unten rechts sind die deviatorischen Spannungen hoch. Die Spannungstriaxialität η ist fast im gesamten Bereich der Kerbe positiv und weist oben links und unten rechts große Werte auf. Da im Vergleich zur Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ die positiven hydrostatischen Spannungen nun kleiner und die deviatorischen Spannungen größer sind, ergeben sich ebenfalls geringere Beträge für die positiven Spannungstriaxialitäten. Im Gegensatz dazu sind die negativen Spannungstriaxialitäten oben rechts und unten links aufgrund der betragsmäßig höheren negativen hydrostatischen Spannungen größer. Im oberen rechten und unteren linken Bereich ist eine Schädigung durch Mikroscherrisse (MSR) vorhanden. Im restlichen Bereich der Kerbe ist eine gemischte Schädigung (IPA/MSR) erkennbar (Abb. 5.18). Die Schädigungsvergleichsdehnung μ zeigt im Bereich der Schädigung durch Mikroscherrisse nur eine geringe Entwicklung von etwa 2%. Die größten Schädigungsvergleichsdehnungen treten mit etwa 8% oben links und unten rechts auf. Zwischen diesen beiden Maxima entwickelt sich ein Band mit einer maximalen Schädigungsvergleichsdehnung von etwa 4%. Im zentralen Bereich hat die Schädigungsentwicklung im Vergleich zur Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ abgenommen.

Die Bruchkante des Probekörpers verläuft von oben links senkrecht nach unten (Abb. 5.18). Für diese Lastkombination ist die Bruchkante ebenfalls nicht parallel zu einer Linie zwischen den beiden Maxima der Schädigungsvergleichsdehnung μ . Die Bruchkante erstreckt sich dabei oben durch Bereiche mit Spannungstriaxialitäten von $0,165 \leq \eta \leq 0,495$ sowie mittig und unten durch Bereiche mit Spannungstriaxialitäten in den Grenzen von $0 \leq \eta \leq 0,33$.

Die Bruchfläche weist im oberen Abschnitt (Abb. 5.19A) starkes isotropes Porenwachstum auf. In diesem oberen Teil ist das isotrope Porenwachstum dominant. Ebenso sind hier starke Schereinwirkungen auf hervorstehende Bereiche zu erkennen, welche entstehen, wenn beide Bruchflächen direkt nach dem Bruch stoßartig aneinander reiben. Im Vergleich dazu haben sich die Poren im mittleren und unteren Abschnitt (Abb. 5.19B,C) weniger aufgeweitet. Hier ist ein deutlicher Einfluss von

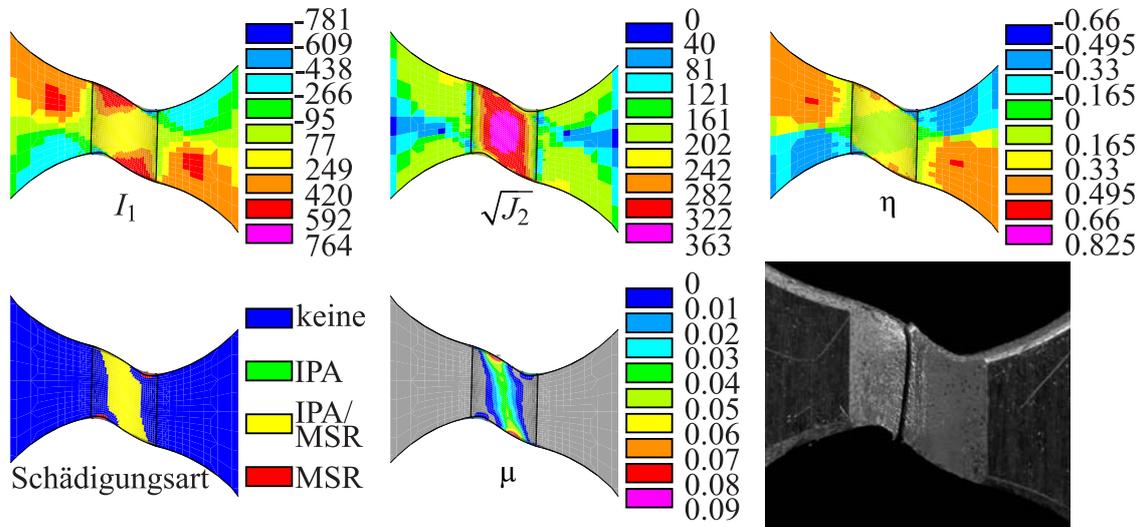


Abbildung 5.18: Erste Spannungsinvariante I_1 [MPa], zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ [MPa], Spannungstriaxialität η , ermittelte Schädigungsart und Schädigungsvergleichsdehnung μ am Ende der Berechnung sowie das Bruchbild für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$

durch den Belastungsprozess hervorgerufenen Schereinwirkungen sichtbar.

Die gesamten Verformungen der Probe von Experiment und numerischer Simulation (Abb. 5.18) gleichen sich annähernd. Die identifizierten Schädigungsmechanismen auf der Bruchfläche passen zu den ermittelten Schädigungsarten und den Spannungstriaxialitäten. Vor allem die Größe der Spannungstriaxialität, welche für die gemischte Schädigung die Wichtung von isotroper Porenaufweitung und Mikroscherrissen verdeutlicht, passt gut zu den experimentellen Ergebnissen. Auch die Ausrichtung der hydrostatischen und deviatorischen Spannungen sowie der Schädigungsvergleichsdehnung zeigen die Tendenz des Rissverlaufs.

Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$

Für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$ zeigt die Abb. 5.20 die Ergebnisse der numerischen Simulation. Die hydrostatische Spannung I_1 ist oben links und unten rechts am größten, jedoch etwa 3% kleiner als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$ (Abb. 5.18). Die größten negativen Werte oben rechts und unten links sind betragsmäßig etwa 8% größer als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$. Im zentralen Bereich sind ebenfalls kleine negative hydrostatischen Spannungen vorhanden. Die deviatorischen Spannungen $\sqrt{J_2}$ haben ihr Maximum (Abb. 5.20), welches etwa 7% größer ist als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$ (Abb. 5.18), im zentralen Bereich. Im gesamten Bereich von oben mittig nach unten mittig sind die deviatorischen

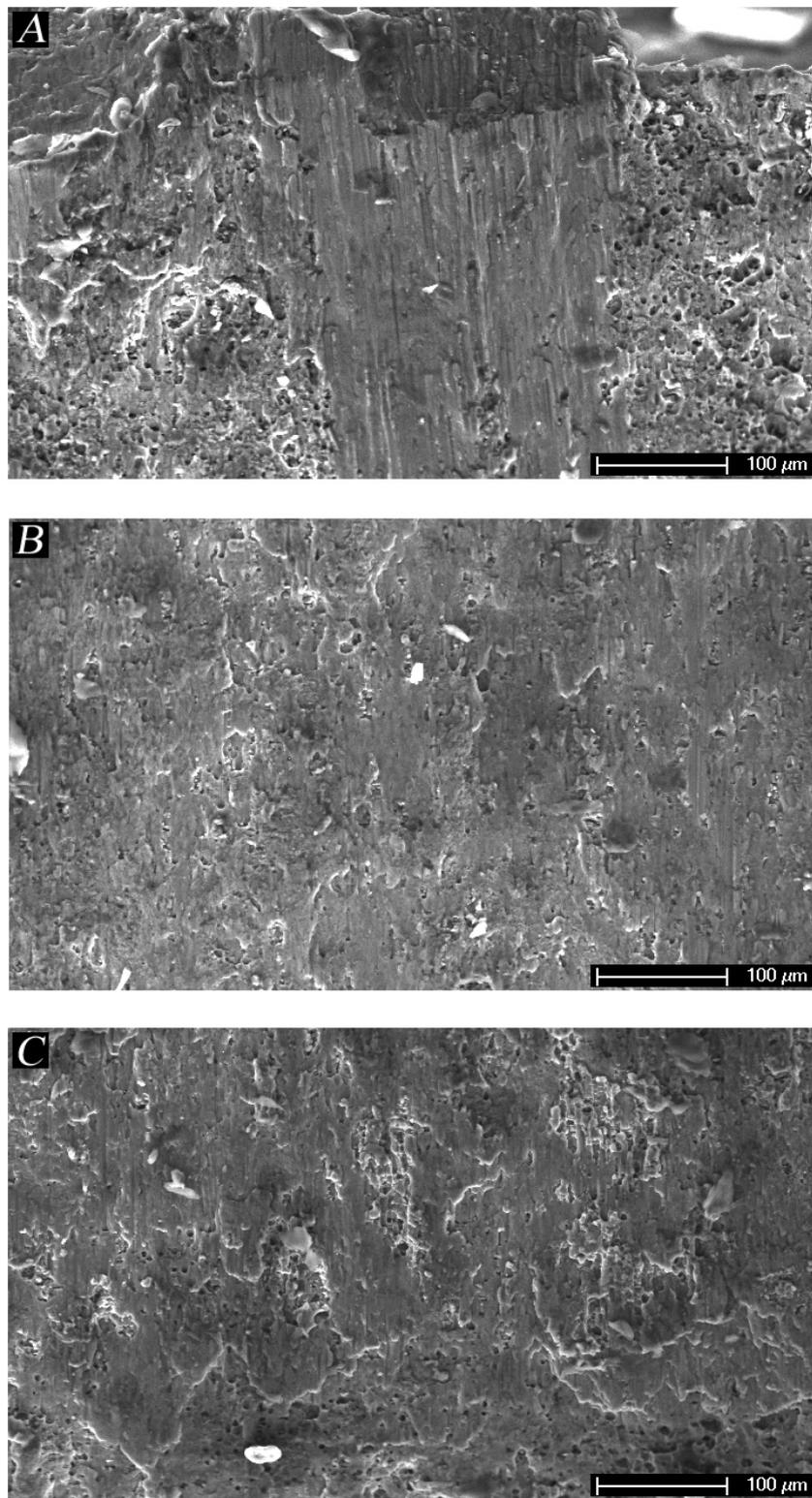


Abbildung 5.19: 200-fache Vergrößerung der Bruchfläche für das Belastungsverhältnis $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$

Spannungen hoch. Aufgrund der kleinen negativen hydrostatischen Spannungen im zentralen Bereich der Kerbe ist die Spannungstriaxialität η dort ebenfalls negativ (Abb. 5.20). Hohe positive Spannungstriaxialitäten sind somit oben links und unten rechts, hohe negative Spannungstriaxialitäten oben rechts und unten links vorhanden. Da im Vergleich zu den vorherigen Lastkombinationen $F_1 : F_2 = 1 : 1$ und $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$ die positiven hydrostatischen Spannungen nun kleiner und die deviatorischen Spannungen größer sind, ergeben sich ebenfalls kleinere Werte für die positiven Spannungstriaxialitäten. Dies gilt umgekehrt für die großen negativen Spannungstriaxialitäten. Demnach ist am oberen rechten und unteren linken Bereich sowie im zentralen Bereich der Kerbe eine Schädigung durch Mikroscherrisse (MSR) erkennbar (MSR) erkennbar. Im restlichen Bereich der Kerbe ist eine gemischte Schädigung (IPA/MSR) vorhanden (Abb. 5.20). Die größten Schädigungsvergleichsdehnungen μ treten mit etwa 8% weiterhin oben links und unten rechts auf. Die Schädigungsvergleichsdehnung zeigt im Bereich der hohen negativen Spannungstriaxialitäten nur eine geringe Entwicklung von etwa 2%, im zentralen Bereich liegt sie lediglich bei 1%. Zwischen den beiden Maxima der Schädigungsvergleichsdehnung ist kein ausgeprägtes Band mehr zu erkennen.

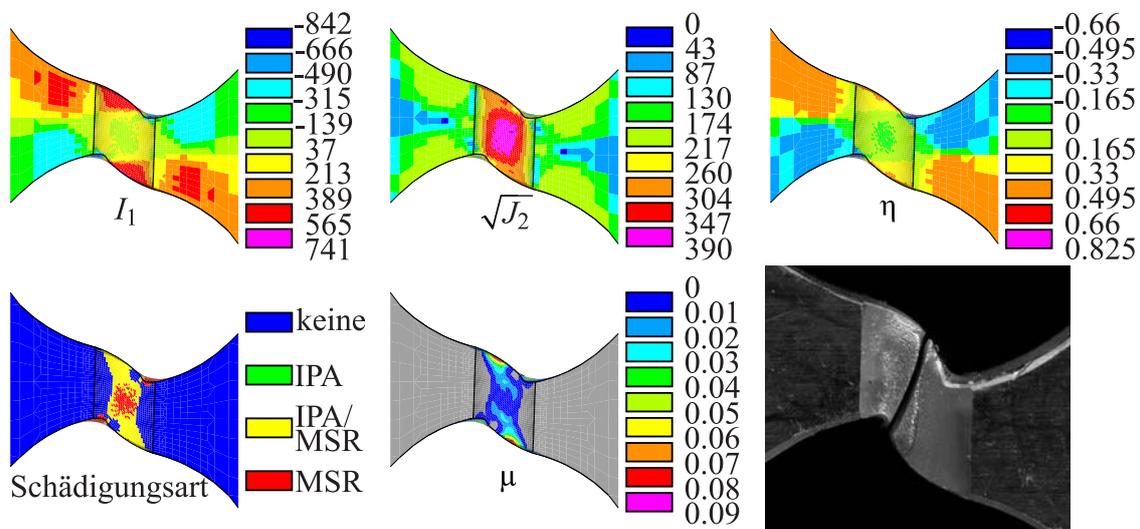


Abbildung 5.20: Erste Spannungsinvariante I_1 [MPa], zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ [MPa], Spannungstriaxialität η , ermittelte Schädigungsart und Schädigungsvergleichsdehnung μ am Ende der Berechnung sowie das Bruchbild für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$

Oben rechts und unten links entsteht aufgrund der Belastung jeweils ein fast rechtwinkliger Knick. Die Bruchkante des Experimentes verläuft von oben mittig nach unten links (Abb. 5.20). Im unteren Teil der Probe bleibt die Bruchkante jedoch

rechts von dem markanten Knick. Die Bruchkante verläuft dabei oben durch Bereiche mit Spannungstriaxialitäten von $0,165 \leq \eta \leq 0,495$ und mittig durch Bereiche mit kleinen negativen Spannungstriaxialitäten um $-0,165 < \eta \leq 0$. Im unteren Bereich der Bruchkante sind sowohl positive Spannungstriaxialitäten mit $0,165 \leq \eta \leq 0,495$ als auch am unteren Rand hohe negative Spannungstriaxialitäten mit $-0,66 \leq \eta \leq -0,165$ vorhanden (Abb. 5.20).

Im oberen Abschnitt (Abb. 5.21A) weist die Bruchfläche ein dominantes isotropes Porenwachstum auf. Im mittleren Abschnitt (Abb. 5.21B) ist kaum Porenaufweitung zu erkennen. Hier dominiert die Schädigung durch Mikroscherrisse. Eine geringe Porenaufweitung ist im oberen Teil der Abb. 5.21C zu erkennen. Der untere Teil ist durch starke anisotrope Effekte geprägt. Durch die ungleichmäßige Ausrichtung der Materialkörner sind sowohl horizontale als auch vertikale Scherbänder, welche beim Abscheren innerhalb der Körner entstehen, zu erkennen.

Auch für diese Lastkombination ähneln sich die Verformungen der Probe von Experiment und numerischer Simulation (Abb. 5.20). Die ermittelten Schädigungsarten und Spannungstriaxialitäten passen zu den identifizierten Schädigungsmechanismen auf der Bruchfläche. Deutlich wird dies besonders durch die Abb. 5.21C. Hier sind auf der Aufnahme detailliert die hohen positiven Spannungstriaxialitäten, welche isotrope Porenaufweitung hervorrufen, und die hohen negativen Spannungstriaxialitäten, welche anisotrope Effekte zur Folge haben, dargestellt. Dieses experimentelle Ergebnis gleicht annähernd den Vorhersagen der numerischen Simulation.

Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$

Die Ergebnisse der numerischen Simulation für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$ zeigt die Abb. 5.22. Oben links und unten rechts ist die hydrostatische Spannung I_1 am größten, jedoch etwa 6% kleiner als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$ (Abb. 5.20). Die größten negativen Werte oben rechts und unten links sind betragsmäßig etwa 16% größer als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$ (Abb. 5.20). Der zentrale Bereich der Kerbe wird von negativen hydrostatischen Spannungen dominiert. Wie bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$ entsteht aufgrund der Belastung oben rechts und unten links jeweils ein fast rechtwinkliger Knick. Die deviatorischen Spannungen $\sqrt{J_2}$ haben ihr Maximum (Abb. 5.22), welches etwa 3% kleiner ist als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$ (Abb. 5.20), im zentralen Bereich der Kerbe. Im gesamten Bereich vom Knick oben zum Knick unten sind die deviatorischen Spannungen am größten. Die Spannungstriaxialität η ist im zentralen Bereich der Kerbe negativ (Abb. 5.22), da hier moderate negative hydrostatische Spannungen vorhanden sind. Oben links und unten rechts sind die Spannungstriaxialitäten positiv, hingegen sind oben rechts und unten links hohe negative Spannungstriaxialitäten erkennbar. Daher ist am oberen rechten und unteren linken

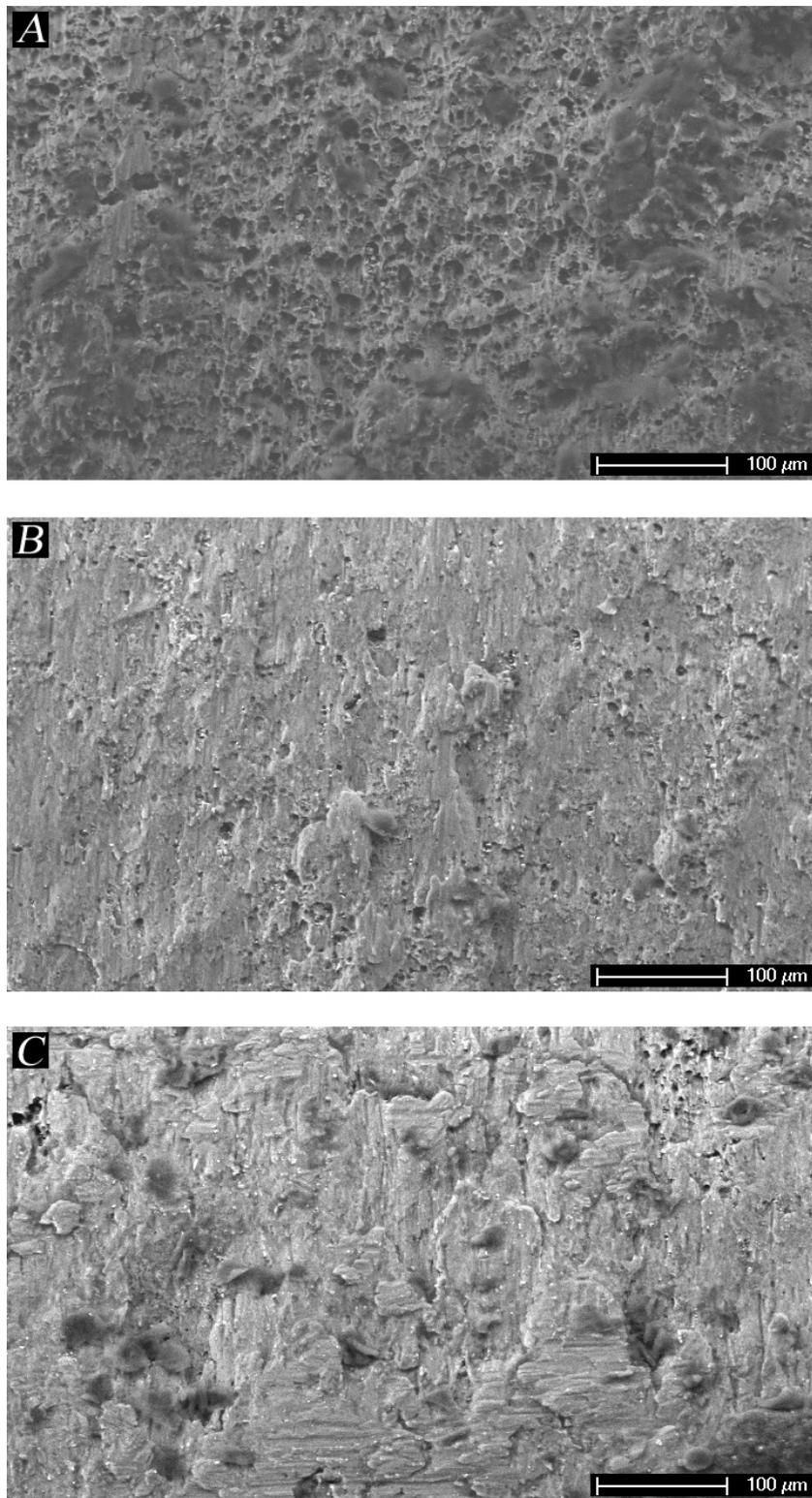


Abbildung 5.21: 200-fache Vergrößerung der Bruchfläche für das Belastungsverhältnis $F_1 : F_2 = 1 : 0$

Bereich sowie im gesamten zentralen Bereich der Kerbe eine Schädigung durch Mikroscherrisse (MSR) vorhanden. Eine gemischte Schädigung (IPA/MSR) tritt oben links und unten rechts auf (Abb. 5.22). Die größten Schädigungsvergleichsdehnungen μ treten mit etwa 4% nun oben rechts und unten links auf, jedoch sind die Schädigungsvergleichsdehnungen oben links und unten rechts mit etwa 3% ähnlich hoch. Die Schädigungsvergleichsdehnung zeigt im gesamten zentralen Bereich der Kerbe nur eine geringe Entwicklung von etwa 1%.

Die Bruchkante des Experimentes verläuft von oben mittig nach unten links in den Knick (Abb. 5.22). Diese erstreckt sich dabei oben durch Bereiche mit Spannungs-

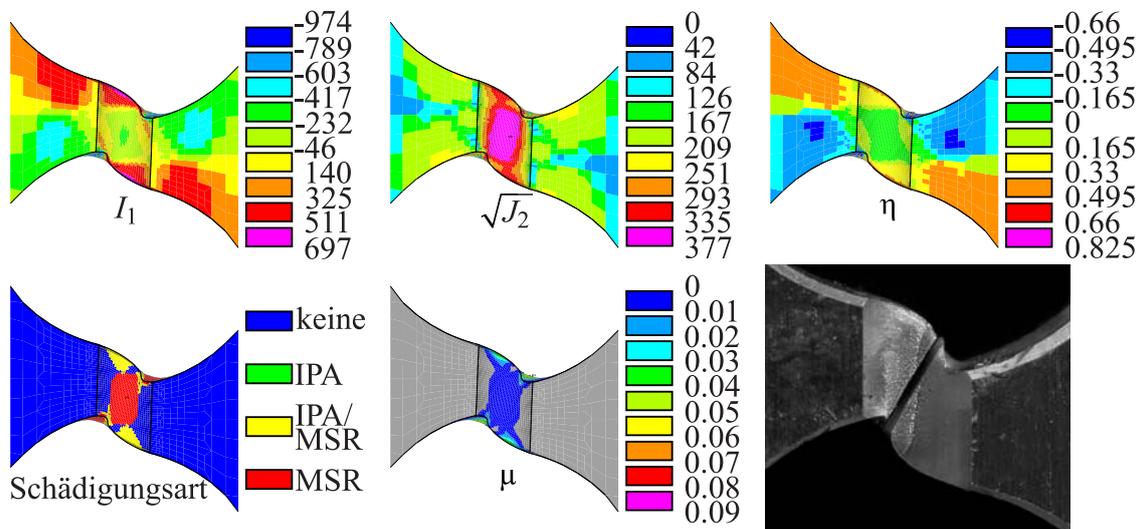


Abbildung 5.22: Erste Spannungsinvariante I_1 [MPa], zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ [MPa], Spannungstriaxialität η , ermittelte Schädigungsart und Schädigungsvergleichsdehnung μ am Ende der Berechnung sowie das Bruchbild für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$

triaxialitäten von $0,165 \leq \eta \leq 0,495$. Im mittleren Bereich sind die Spannungstriaxialitäten größtenteils negativ, jedoch betragsmäßig klein mit $-0,165 \leq \eta \leq 0$. Im unteren Bereich der Bruchkante sind sowohl positive als auch am unteren Rand hohe negative Spannungstriaxialitäten vorhanden.

Die Bruchfläche weist im oberen Abschnitt (Abb. 5.23A) starkes isotropes Porenwachstum auf. Eine Porenaufweitung ist im mittleren Abschnitt (Abb. 5.23B) kaum noch zu erkennen. Die Bruchfläche ist hier durch Schermechanismen gekennzeichnet. Eine starke anisotrope Schädigung ist im unteren Abschnitt sichtbar. Im oberen Teil des Bildes (Abb. 5.23C) ist jedoch auch eine Porenaufweitung zu identifizieren.

Für diese Lastkombination ähneln sich die Verformungen der Probe von Experiment und numerischer Simulation (Abb. 5.22) ebenfalls. Die ermittelten Schädigungsarten

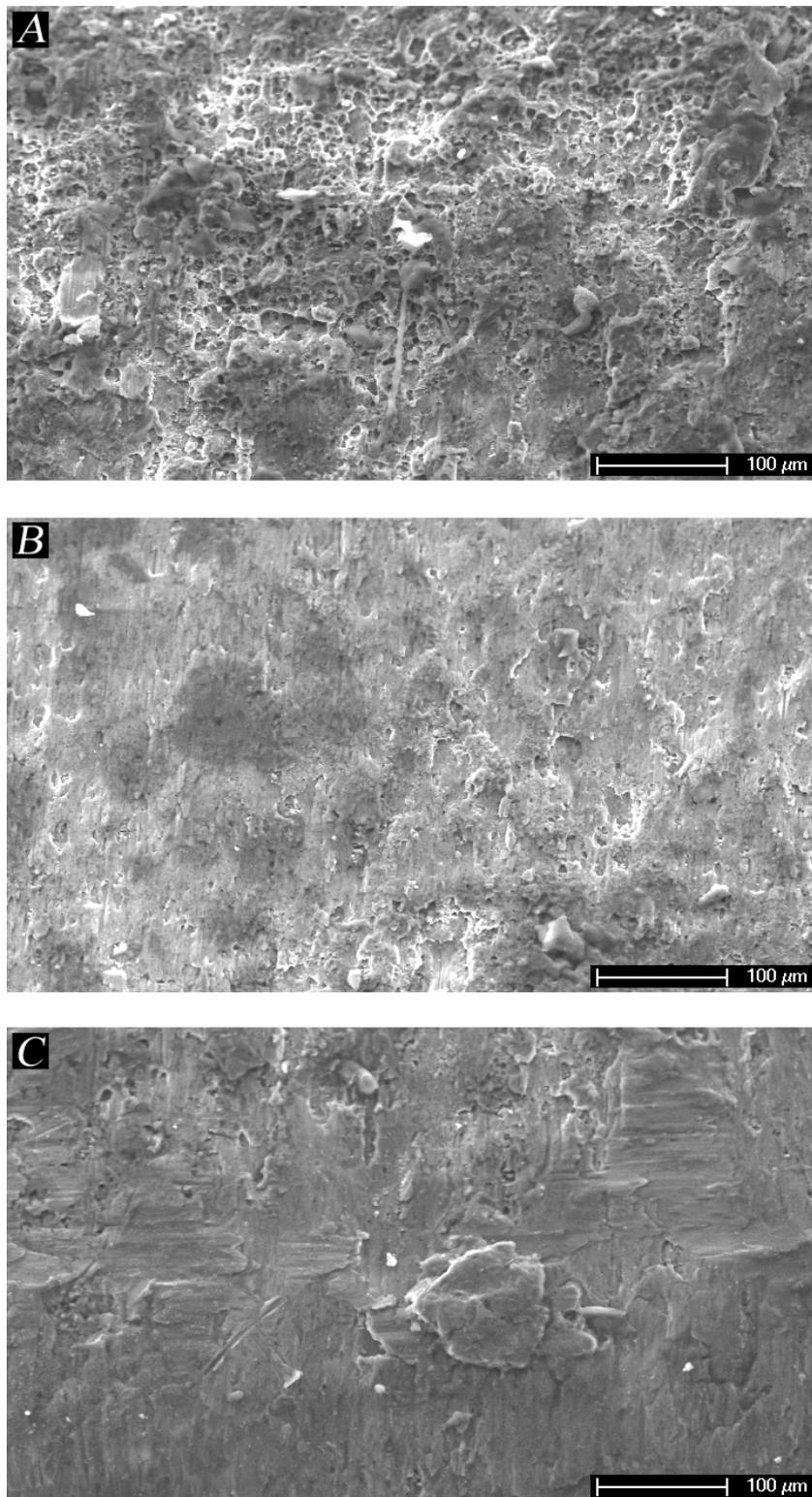


Abbildung 5.23: 200-fache Vergrößerung der Bruchfläche für das Belastungsverhältnis $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$

und Spannungstriaxialitäten sind wiederum konsistent zu den identifizierten Schädigungsmechanismen auf der Bruchfläche. Deutlich wird dies hier besonders durch die Abb. 5.23C, da die gleichen Effekte wie bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0$ zu erkennen sind. Hohe positive Spannungstriaxialitäten, welche isotrope Porenaufweitung hervorrufen, und hohe negative Spannungstriaxialitäten, welche anisotrope Effekte bewirken, sind gleichzeitig auf einem Bild zu erkennen. Dies ist eine sehr detaillierte Übereinstimmung zwischen Experiment und numerischer Simulation.

Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -1$

Für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -1$ zeigt die Abb. 5.24 die Ergebnisse der numerischen Simulation. Die hydrostatische Spannung I_1 ist oben links und unten rechts am größten. In diesem Bereich ist sie etwa 6% kleiner als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$ (Abb. 5.22). Oben rechts und unten links treten die größten negativen Werte auf, welche betragsmäßig etwa 5% kleiner sind als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$ (Abb. 5.22). Im gesamten zentralen Bereich sind negative hydrostatische Spannungen vorhanden. Wie zuvor entsteht auch für diese Lastkombination aufgrund der Belastung oben rechts und unten links ein jeweils fast rechtwinkliger Knick. Die deviatorischen Spannungen $\sqrt{J_2}$ haben ihr Maximum (Abb. 5.24) im zentralen Bereich der Kerbe. Im gesamten Bereich vom Knick oben zum Knick unten sind die deviatorischen Spannungen am größten, wobei das Maximum etwa 6% kleiner ist als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$ (Abb. 5.22). Da im zentralen Bereich der Kerbe moderate negative hydrostatische Spannungen vorhanden sind, resultieren in diesem Bereich ebenfalls negative Spannungstriaxialitäten η (Abb. 5.24). Gemäß der Verteilung der hydrostatischen Spannungen sind die Spannungstriaxialitäten oben links und unten rechts positiv, hingegen sind oben rechts und unten links hohe negative Spannungstriaxialitäten vorhanden. Vom oberen rechten zum unteren linken Bereich besteht daher eine Schädigung durch Mikroscherrisse (MSR). Gemischte Schädigung (IPA/MSR) tritt wie bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -0,5$ (Abb. 5.22) nur oben links und unten rechts auf (Abb. 5.22). Diese ist jedoch beim Bruch nicht sehr weit fortgeschritten. Daher sind oben links und unten rechts Schädigungsvergleichsdehnungen μ von maximal 1% erkennbar. Die größten Schädigungsvergleichsdehnungen treten mit nur etwa 3% oben rechts und unten links auf. Die Schädigungsvergleichsdehnung zeigt zudem im gesamten zentralen Bereich der Kerbe nur eine geringe Entwicklung von etwa 1%.

Die Bruchkante des Experimentes verläuft vom Knick oben rechts zum Knick unten links (Abb. 5.24). Diese erstreckt sich dabei oben und unten durch Bereiche mit hohen negativen Spannungstriaxialitäten von $(-0,66 \leq \eta \leq -0,33)$. An diese grenzen jedoch sehr knapp moderate positive Spannungstriaxialitäten von $0,165 \leq \eta \leq 0,495$. Im mittleren Bereich sind moderate negative Spannungstriaxia-

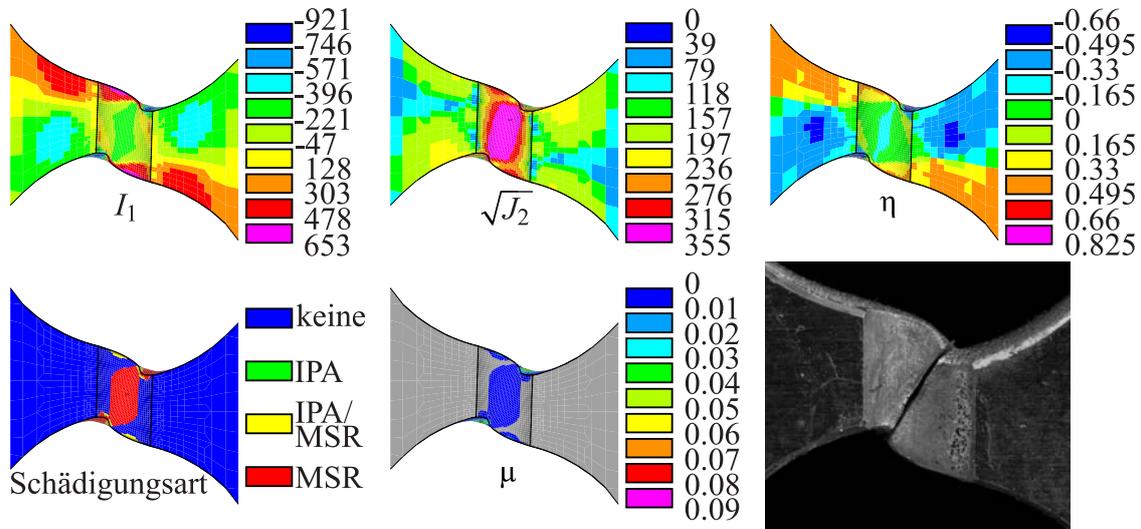


Abbildung 5.24: Erste Spannungsinvariante I_1 [MPa], zweite deviatorische Spannungsinvariante $\sqrt{J_2}$ [MPa], Spannungstriaxialität η , ermittelte Schädigungsart und Schädigungsvergleichsdehnung μ am Ende der Berechnung sowie das Bruchbild für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -1$

litäten von $-0,33 \leq \eta \leq 0$ vorhanden.

Die Bruchfläche weist im oberen und unteren Abschnitt (Abb. 5.25A,C) sowohl starke anisotrope Schädigungsmerkmale als auch geringe Anzeichen von Porenaufweitung auf. Die Bruchfläche ist im mittleren Abschnitt (Abb. 5.25B) fast ausschließlich durch Schermechanismen gekennzeichnet.

Die Verformungen der Probe von Experiment und numerischer Simulation (Abb. 5.24) gleichen sich annähernd auch für diese Lastkombination. Die ermittelten Schädigungsarten und Spannungstriaxialitäten sind, wie bei allen zuvor betrachteten Lastkombinationen auch, konsistent zu den identifizierten Schädigungsmechanismen auf der Bruchfläche. Ein weiteres Beispiel für die Genauigkeit der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen bietet der obere und untere Bereich des Bruchs, bei dem gemäß der numerischen Simulationen eine Zone vorhanden ist, in welcher ein sprunghafter Wechsel von hohen positiven zu hohen negativen Spannungstriaxialitäten stattfindet. Die Abb. 5.25A,C bestätigen die Ergebnisse der numerischen Simulation, da sowohl eine geringfügige isotrope Porenaufweitung als auch starke anisotrope Effekte zu erkennen sind.

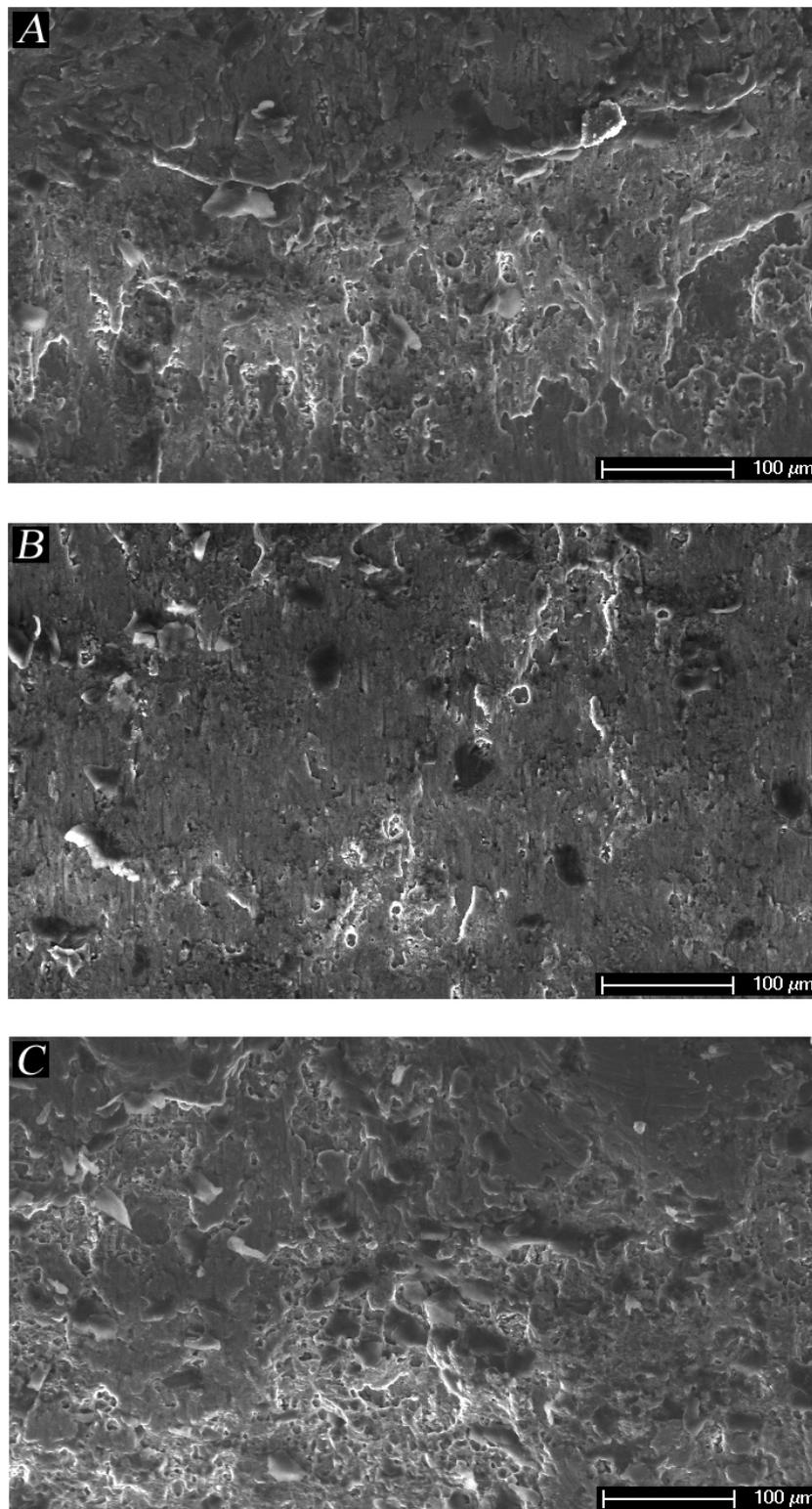


Abbildung 5.25: 200-fache Vergrößerung der Bruchfläche für das Belastungsverhältnis $F_1 : F_2 = 1 : -1$

Auswertung der Ergebnisse aller Lastkombinationen

Bei allen sechs untersuchten Lastkombinationen traten in der Bruchfläche die durch die elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen vorhergesagten Schädigungsarten, welche von der Spannungstriaxialität abhängig sind (Abb. 2.2), auf. Anhand der mikroskopischen Untersuchungen lässt sich zeigen, dass schon bei niedrigen positiven Spannungstriaxialitäten von etwa $\eta = 0,5$ das isotrope Porenwachstum dominant ist und Schereinwirkungen kaum noch zu erkennen sind. Als Beispiel hierfür soll die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ dienen, da hier im oberen und unteren Bereich (Abb. 5.17A,C) bei positiven Spannungstriaxialitäten ($0,165 \leq \eta \leq 0,495$) eine dominante Porenaufweitung sichtbar ist.

Mit abnehmenden Spannungstriaxialitäten nimmt der Einfluss der Schädigung durch Mikroscherrisse zu und die isotrope Porenaufweitung ab. Die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 0,5$ weist im mittleren Bereich kleinere Spannungstriaxialitäten auf (Abb. 5.19B). Der erhöhte Einfluss durch Mikroscherrisse ist deutlich zu erkennen. Hingegen sind die vorhandenen aufgeweiteten Poren wesentlich kleiner als bei der Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : 1$ (Abb. 5.17B).

Bei negativen Spannungstriaxialitäten ist eine isotrope Porenaufweitung kaum festzustellen. Dies zeigt die Abb. 5.25B, auf welcher der mittlere Abschnitt für die Lastkombination $F_1 : F_2 = 1 : -1$ dargestellt ist.

Der Vergleich der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen mit den Experimenten aller Lastkombinationen zeigt, dass für jede Lastkombination die Schädigungsmechanismen der Bruchfläche von den numerischen Simulationen detailliert prognostiziert werden.

Die Gegenüberstellung der numerischen Ergebnisse mit den Experimenten indiziert zudem, dass der Bruch nicht entlang der hohen Schädigungsvergleichsdehnungen verläuft, jedoch für jede Lastkombination durch einen der beiden Punkte der maximalen Schädigungsvergleichsdehnung.

6 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

In dieser Arbeit wird ein den Einfluss des Spannungszustands berücksichtigendes Kontinuumsschädigungsmodell verwendet, welches von Brünig [15] vorgestellt und sukzessiv erweitert [17]-[24] wurde. Für die Kinematik werden geschädigte und fiktive ungeschädigte Konfiguration eingeführt. Dadurch ist eine direkte Verwendung von Schädigungstensoren möglich.

Eine konsistente thermodynamische Betrachtungsweise liefert eine Definition für den effektiven Spannungstensor der ungeschädigten Konfiguration und den Spannungstensor der geschädigten Konfiguration. Es werden verschiedene elastische Potentialfunktionen eingeführt, um den Effekt der Schädigung auf das elastische Materialverhalten zu modellieren.

Zur Umsetzung der phänomenologischen Theorie werden die Materialgleichungen auf makroskopischer Ebene formuliert. Zur Berücksichtigung des hydrostatischen Spannungszustandes auf den Beginn des plastischen Verhaltens wird eine Drucker-Prager-Fließbedingung genutzt. Für das plastische Verhalten werden ein nicht assoziiertes Fließgesetz und ein Verfestigungsgesetz verwendet.

Das schädigende Verhalten ist unabhängig vom plastischen Verhalten. Die Schädigungsbedingung ist vom Spannungszustand abhängig und berücksichtigt ebenfalls hydrostatische und deviatorische Spannungen. Aufgrund der in dieser Arbeit durchgeführten makroskopischen Untersuchungen wird die Schädigungsbedingung für negative Spannungstriaxialitäten modifiziert. Ein nicht assoziiertes Schädigungsgesetz wird in Abhängigkeit der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters formuliert. Dazu wird in dieser Arbeit erstmals die gesamte numerische Implementierung des Spannungsdeviators $\hat{\mathbf{M}}$, zur Berücksichtigung der deviatorischen Spannungsinvariante J_3 im Schädigungsgesetz, durchgeführt. In dieser Arbeit wird zusätzlich ein neues exponentielles Entfestigungsgesetz zur Beschreibung des schädigenden Materialverhaltens vorgestellt und verwendet. Für die numerische Integration der Materialgleichungen wird eine erweiterte „inelastischer Prädiktor - elastischer Korrektor“-Technik sowie ein korrespondierender konsistenter Tangentenmodul genutzt.

Die Nutzer-Materialroutine USERMAT dient zur Implementierung eigener Materialgesetze in die kommerzielle Finite-Element-Software ANSYS. Mit dieser wird die numerische Implementierung der vorgestellten Theorie durchgeführt.

Für die Ermittlung der Materialparameter werden ein ungekerbter und verschiedene gekerbte, einaxial belastete Zugstäbe genutzt und numerisch und experimentell un-

tersucht. Die Versuche mit der ungekerbten Zugprobe (grün) und den verschiedenen gekerbten Zugproben (rot) decken jedoch nur einen kleinen Bereich der Spannungstriaxialitäten von $1/3 \leq \eta \leq 1/\sqrt{3}$ ab (Abb. 6.1). Der Scherversuch (blau) aus [20] hat im zentralen Bereich Spannungstriaxialitäten von $\eta = 0,055$ und $\eta = 0,3$ (Abb. 6.1). Zur Verifizierung der Materialparameter werden Experimente mit einem neuartigen biaxialen Versuchskörper, und einer neuen biaxialen Testmaschine durchgeführt. Unter Nutzung verschiedener Lastkombinationen wird so im zentralen Bereich der Kerbe dieses biaxialen Versuchskörpers (grau) ein sehr großer Bereich der Spannungstriaxialitäten von $-1/3 \leq \eta \leq 0,95$ abgedeckt (Abb. 6.1). Im Gebiet des gesamten Bruchs sind jedoch noch durchaus größere negative Spannungstriaxialitäten vorhanden. Es können sowohl Scher-Zug-, Scher-Druck- als auch Zug- und Scherspannungszustände mit dem gleichen Versuchskörper erzeugt werden. Je nach Lastkombination ist so eine Untersuchung verschiedener Spannungszustände und deren Einfluss auf das Schädigungsverhalten möglich, wodurch eine Validierung der vom Spannungszustand abhängigen Schädigungsbedingung und des vom Spannungszustand abhängigen Schädigungsgesetzes erreicht wird.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Materialparameter, welche mit Hilfe der Versuche mit ungekerbten und der verschiedenen gekerbten Zugproben ermittelt werden, nicht auf den gesamten Raum der Spannungstriaxialitäten anwendbar sind. Mit dem neuartigen biaxialen Versuchskörper ist jedoch eine Analyse der Materialparameter für die positiven und negativen Spannungstriaxialitäten möglich.

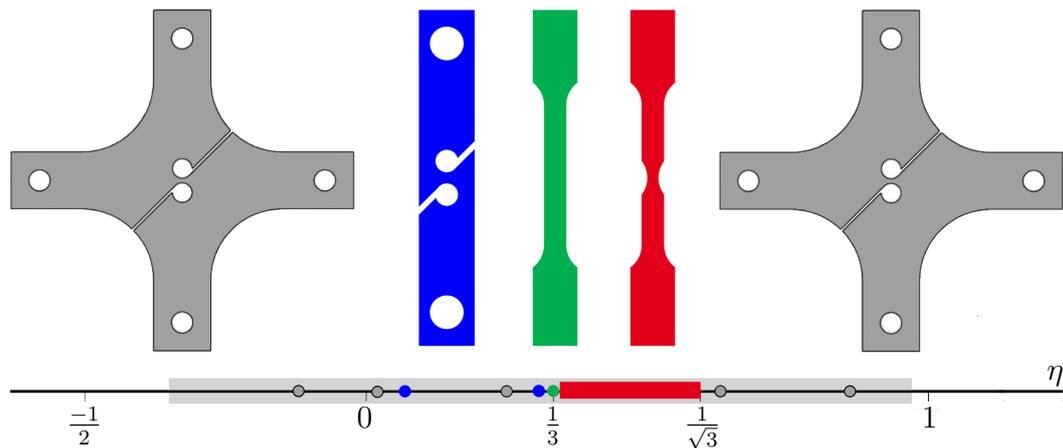


Abbildung 6.1: Spannungstriaxialitäten in der Bruchfläche der verschiedenen Versuchskörper

Die erzielten numerischen Ergebnisse beweisen im Vergleich mit den Experimenten, dass die hier verwendete Theorie eine hohe Vorhersagegenauigkeit erfüllt. So zeigen die Vergleiche der numerischen Simulationen mit den Experimenten für die Zugversuche mit dem ungekerbten und verschiedenen gekerbten Zugstäben, dass

eine gute Übereinstimmung der Last-Verschiebungskurven von der Wahl des plastischen Materialparameters a/c abhängig ist. Für den biaxialen Versuchskörper zeigt der Vergleich der numerischen Simulation mit dem Experiment für den reinen Zugversuch ebenfalls eine hohe Übereinstimmung der Last-Verschiebungskurven unter Verwendung des plastischen Materialparameters $a/c = 0,00034MPa^{-1}$. Die Versuche mit den biaxialen Versuchskörpern demonstrieren allerdings auch, dass sich dieser Wert des plastischen Materialparameters auf die Genauigkeit der Vorhersagen bei Lastkombinationen mit kleiner werdenden Spannungstriaxialitäten stärker negativ auswirkt. Bei hohen negativen Spannungstriaxialitäten liegen die Last-Verschiebungskurven der numerischen Simulationen oberhalb der experimentell ermittelten Last-Verschiebungskurven. Für diese Lastkombinationen wurde eine gute Konformität der Last-Verschiebungskurven mit $a/c = 0MPa^{-1}$ erreicht. Dies führt zu der Schlussfolgerung, dass der plastische Materialparameter a/c nicht konstant ist [93, 94], sondern eine Funktion in Abhängigkeit von der Spannungstriaxialität darstellt. Für kleine positive und negative Spannungstriaxialitäten könnte der Funktionswert $a/c(\eta) = 0$ sein und mit wachsenden Spannungstriaxialitäten ansteigen. Hierzu sind weitere Untersuchungen notwendig.

Große Auswirkungen auf den Verlauf der Last-Verschiebungskurven und die Schädigungsentwicklung der numerischen Simulationen haben die elastischen Schädigungsmodule $\eta_1 \dots \eta_4$. Für negative Spannungstriaxialitäten müssen die elastischen Schädigungsmodule η_3 und η_4 , welche vor allem den Einfluss der anisotropen Schädigung auf das elastische Materialverhalten regulieren, hohe positive Werte annehmen. Daher werden in dieser Arbeit für η_3 und η_4 abschnittsweise konstante Werte in Abhängigkeit von der Spannungstriaxialität verwendet.

Der in dieser Arbeit genutzte neue Grenzwert der Spannungstriaxialität η_c wird analytisch ermittelt ($\eta_c = -0,637$) und verifiziert. Erst mit diesem hohen negativen Grenzwert der Spannungstriaxialität ist für Lastkombinationen mit hohen negativen Spannungstriaxialitäten eine Entfestigung im Last-Verschiebungsdiagramm zu beobachten. Für eine höhere Genauigkeit der elastisch-plastisch-schädigenden numerischen Simulationen ist es somit notwendig, Schädigungen auch im Bereich mit Spannungstriaxialitäten unter $\eta = -1/3$ zuzulassen.

Die in dieser Arbeit gemachten Beobachtungen führen zu der Schlussfolgerung, dass Schädigung und Bruch gesondert voneinander betrachtet werden müssen. Die Schädigungsentwicklung hat Auswirkungen auf die Entwicklung des Spannungszustandes. Daher ist sie essentiell für den Verlauf der Last-Verschiebungskurve verantwortlich. Jedoch hat die Schädigung vermutlich einen Einfluss auf den Beginn des Bruchs. Die Bruchkanten der Experimente verlaufen bei allen Lastkombinationen durch einen der Punkte der numerisch ermittelten maximalen Schädigungsvergleichsdehnung. Dies kann darauf hindeuten, dass ab Überschreiten einer bestimmten Schädigungsvergleichsdehnung der Bruch ausgelöst wird.

7 Ausblick

Die Umsetzung der in dieser Arbeit vorgestellten Theorie liefert hervorragende numerische Ergebnisse. Um diese Resultate noch besser verifizieren zu können, sollte der biaxiale Versuchskörper weiter modifiziert werden. Da die Querschnittsfläche in dem Teil des biaxialen Versuchskörpers, in dem inelastische Deformationen auftreten, klein ist, können Bearbeitungsfehler bei der Herstellung der Proben, Fehler im Material und andere Vorschädigungen die experimentellen Ergebnisse beeinflussen. Um dies zu verhindern, sollte eine mögliche Vergrößerung der Querschnittsfläche im kritischen Probenbereich untersucht werden. Dabei sind jedoch die Restriktionen für die Versuchsdurchführung, welche vor allem durch die Belastungsgrenzen und Größe der biaxialen Prüfmaschine vorgegeben sind, zu beachten.

Die Abhängigkeit des plastischen Materialparameters a/c von der Spannungstriaxialität muss weiter theoretisch sowie experimentell und numerisch erforscht und in die Theorie eingebunden werden. Die richtige Verwendung dieses Materialparameters hat große Auswirkungen auf die Vorhersagegenauigkeit der numerischen Simulationen.

Die elastischen Schädigungsmodule $\eta_1 \dots \eta_4$ haben einen großen Einfluss auf den Verlauf der Last-Verschiebungskurve und die Art der Schädigungsentwicklung. In dieser Arbeit wurde mit abschnittsweise konstanten Werten in Abhängigkeit von der Spannungstriaxialität gearbeitet. Dies kann jedoch gerade im Bereich des Sprungs zu einem instabilen numerischen Verhalten führen. Für die Entwicklung von Funktionen der elastischen Schädigungsmodule in Abhängigkeit von dem Spannungszustand wird eine analytische Herangehensweise in Kombination mit numerischen Untersuchungen empfohlen.

Die Arbeit hat gezeigt, dass der ursprünglich verwendete Grenzwert der Spannungstriaxialität von $\eta_c = -1/3$ ungünstig ist, da die Verwendung für die Biaxialversuche unzureichende numerische Ergebnisse liefert. Daher wurde in dieser Arbeit ein analytisch ermittelter Grenzwert der Spannungstriaxialität verwendet. Dieser Wert kann durch eine Modifikation der Funktion des Materialparameters β der Schädigungsbedingung weiter herabgesetzt werden. Dazu ist es notwendig, den experimentellen Grenzwert der Spannungstriaxialität in Abhängigkeit vom Spannungszustand weiter zu erforschen, um eindeutige Grenzen festlegen zu können. Zusätzlich sollte untersucht werden, ob eine Unterscheidung eines Grenzwert der Spannungstriaxialität jeweils für Schädigung und Bruch sinnvoll beziehungsweise nötig ist.

Die aktuell verwendeten Funktionen der kinematischen Parameter des Schädigungs-

gesetzes sind sehr komplex und basierend auf mikromechanische Analysen formuliert. Elastisch-plastisch-schädigende numerische Simulationen mit Zugeinfluss zeigen während der Entfestigung ab einem gewissen Punkt einen plötzlichen starken Lastabfall, der zum vorzeitigen Abbruch der numerischen Simulation führte. Die Ursache für dieses Verhalten kann ebenfalls auf diese Funktionen zurückgeführt werden, da das Schädigungsgesetz maßgeblich für die Schädigungsentwicklung verantwortlich ist. Eine Vereinfachung und Modifikation dieser Funktionen sollte daher mit Experimenten und begleitenden numerischen Simulationen untersucht werden.

Um das Bruchverhalten numerisch simulieren zu können, sollte eine Bruchbedingung entwickelt werden. Zu untersuchen ist hierbei, ob der Bruch ab Überschreiten einer bestimmten Schädigungsvergleichsdehnung einsetzt. Zudem sollte der Zusammenhang des Bruchs von den Schädigungsverzerrungen und den Spannungen geprüft werden.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik, 2. Auflage*. Springer Vieweg, Berlin Heidelberg, 2012.
- [2] ANSYS, Inc., Canonsburg, PA 15317. *ANSYS USER Material Subroutine USERMAT*, 1999.
- [3] ANSYS, Inc., Canonsburg, PA 15317. *ANSYS 13.0 Help System*, 2010.
- [4] R. J. Asaro. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in Applied Mechanics*, 23:2–115, 1983.
- [5] Y. Bai and T. Wierzbicki. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. *International Journal of Plasticity*, 24:1071–1096, 2008.
- [6] Y. Bao and T. Wierzbicki. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46:81 – 98, 2004.
- [7] Y. Bao and T. Wierzbicki. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 72:1049–1069, 2005.
- [8] I. Barsoum and J. Faleskog. Rupture mechanisms in combined tension and shear - experiments. *International Journal of Solids and Structures*, 44:1768 – 1786, 2007.
- [9] I. Barsoum and J. Faleskog. Micromechanical analysis on the influence of the Lode parameter on void growth and coalescence. *International Journal of Solids and Structures*, 48:925 – 938, 2011.
- [10] R. Becker, A. Needleman, O. Richmond, and V. Tvergaard. Void growth and failure in notched bars. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 36:317 – 351, 1988.
- [11] J. Betten. Net-stress analyses in creep mechanics. *Ingenieur-Archiv*, 52:405–419, 1982.
- [12] J. Betten. Damage tensors in continuum mechanics. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 2:13–32, 1983.
- [13] M. Brünig. Large strain elastic-plastic theory and nonlinear finite element analysis based on metric transformation tensors. *Computational Mechanics*, 24:187–196, 1999.
- [14] M. Brünig. Numerical simulation of the large elastic-plastic deformation behavior of hydrostatic stress-sensitive solids. *International Journal of Plasticity*, 15:1237 – 1264, 1999.

-
- [15] M. Brünig. A framework for large strain elastic-plastic damage mechanics based on metric transformations. *International Journal of Engineering Science*, 39:1033–1056, 2001.
- [16] M. Brünig. Numerical analysis and elastic-plastic deformation behavior of anisotropically damaged solids. *International Journal of Plasticity*, 18:1237–1270, 2002.
- [17] M. Brünig. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics. *International Journal of Plasticity*, 19:1679–1713, 2003.
- [18] M. Brünig. Numerical analysis of anisotropic ductile continuum damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2949 – 2976, 2003.
- [19] M. Brünig, D. Albrecht, and S. Gerke. Numerical analyses of stress-triaxiality-dependent inelastic deformation behavior of aluminum alloys. *International Journal of Damage Mechanics*, 20:299–317, 2011.
- [20] M. Brünig, O. Chyra, D. Albrecht, L. Driemeier, and M. Alves. A ductile damage criterion at various stress triaxialities. *International Journal of Plasticity*, 24:1731 – 1755, 2008.
- [21] M. Brünig and S. Gerke. Simulation of damage evolution in ductile metals undergoing dynamic loading conditions. *International Journal of Plasticity*, 27:1598 – 1617, 2011.
- [22] M. Brünig, S. Gerke, and D. Brenner. New 2D-experiments and numerical simulations on stress-state-dependence of ductile damage and failure. *Procedia Materials Science*, 3:177–182, 2014.
- [23] M. Brünig, S. Gerke, and V. Hagenbrock. Micro-mechanical studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode parameter on ductile damage. *International Journal of Plasticity*, 50:49 – 65, 2013.
- [24] M. Brünig, S. Gerke, and V. Hagenbrock. Stress-state-dependence of damage strain rate tensors caused by growth and coalescence of micro-defects. *International Journal of Plasticity*, 63:49–63, 2014.
- [25] J.-L. Chaboche. Continuous damage mechanics - a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nuclear Engineering and Design*, 64:233 – 247, 1981.
- [26] J. L. Chaboche. Continuum damage mechanics: Part I - General concepts. *Journal of Applied Mechanics*, 55:59–64, 1988.
- [27] J. L. Chaboche. Continuum damage mechanics: Part II - Damage growth, crack initiation and crack growth. *Journal of Applied Mechanics*, 55:65–72, 1988.
- [28] C. Chow and J. Wang. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 27:547–558, 1987.
- [29] C. Chow and J. Wang. A finite element analysis of continuum damage mechanics for ductile fracture. *International Journal of Fracture*, 38:83–102, 1988.

-
- [30] C. C. Chu and A. Needleman. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 102:249–256, 1980.
- [31] K. Danas and P. P. Castaneda. Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 49:1325 – 1342, 2012.
- [32] R. de Boer. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1982.
- [33] E. de Souza Neto and D. Peric. A computational framework for a class of fully coupled models for elastoplastic damage at finite strains with reference to the linearization aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 130:179 – 193, 1996.
- [34] S. Demmerle and J. Boehler. Optimal design of biaxial tensile cruciform specimens. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41:143 – 181, 1993.
- [35] I. Doghri. Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:3403–3431, 1995.
- [36] L. Driemeier, M. Brünig, G. Micheli, and M. Alves. Experiments on stress-triaxiality dependence of material behavior of aluminum alloys. *Mechanics of Materials*, 42:207 – 217, 2010.
- [37] M. Dunand and D. Mohr. On the predictive capabilities of the shear modified Gurson and the modified Mohr-Coulomb fracture models over a wide range of stress triaxialities and Lode angles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59:1374 – 1394, 2011.
- [38] M. Feucht. *Ein gradientenabhängiges Gursonmodell zur Beschreibung duktiler Schädigung mit Entfestigung*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 1998.
- [39] M. Fourmeau, T. Börvik, A. Benallal, and O. Hopperstad. Anisotropic failure modes of high-strength aluminium alloy under various stress states. *International Journal of Plasticity*, 48:34 – 53, 2013.
- [40] X. Gao, T. Wang, and J. Kim. On ductile fracture initiation toughness: Effects of void volume fraction, void shape and void distribution. *International Journal of Solids and Structures*, 42:5097 – 5117, 2005.
- [41] X. Gao, G. Zhang, and C. Roe. A study on the effect of the stress state on ductile fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 19:75 – 94, 2010.
- [42] X. Gao, T. Zhang, M. Hayden, and C. Roe. Effects of the stress state on plasticity and ductile failure of an aluminum 5083 alloy. *International Journal of Plasticity*, 25:2366 – 2382, 2009.
- [43] S. Gerke. *Damage and fracture of ductile metals under dynamic loading conditions*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 2013.
- [44] G. Gruben, O. Hopperstad, and T. Börvik. Evaluation of uncoupled ductile

- fracture criteria for the dual-phase steel docol 600dl. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62:133 – 146, 2012.
- [45] A. L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99:2–15, 1977.
- [46] K. Hayakawa, S. Murakami, and Y. Liu. An irreversible thermodynamics theory for elastic-plastic-damage materials. *European Journal of Mechanics/A, Solids*, 17:13–32, 1998.
- [47] D. Hayhurst and F. Leckie. The effect of creep constitutive and damage relationships upon the rupture time of a solid circular torsion bar. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21:431 – 432, 1973.
- [48] B. Hois. Experimente und numerische Simulationen zur Grenze der Schädigung von duktilen Metallen bei negativen Spannungstriaxialitäten. Masterarbeit, Universität der Bundeswehr München, 2014.
- [49] T. J. R. Hughes. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1413–1418, 1980.
- [50] J. Ju. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 25:803–833, 1989.
- [51] L. M. Kachanov. Rupture time under creep conditions. *Izvestia akademii nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskich nauk*, 8:26–31, 1958.
- [52] M. Kachanov. Continuum model of medium with cracks. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 106:1039–1051, 1980.
- [53] A. S. Khan and H. Liu. A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy. *International Journal of Plasticity*, 35:1 – 12, 2012.
- [54] J. Kim, X. Gao, and T. Srivatsan. Modeling of crack growth in ductile solids: a three-dimensional analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 40:7357 – 7374, 2003.
- [55] D. Krajcinovic. Constitutive equations for damaging materials. *Journal of Applied Mechanics*, 50:355–360, 1983.
- [56] D. Krajcinovic. Continuum damage mechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 37:1–6, 1984.
- [57] D. Krajcinovic and G. Fonseka. The continuous damage theory of brittle materials, Part 1: General theory. *Journal of Applied Mechanics*, 48:809–815, 1981.
- [58] D. Krajcinovic and G. Fonseka. The continuous damage theory of brittle materials, Part 2: Uniaxial and plane response modes. *Journal of Applied Mechanics*, 48:816–824, 1981.

-
- [59] H. Kuhn. Shear, torsion, and multiaxial testing. In *ASM Handbook, 8, Mechanical Testing and Evaluation*. Materials Park, Ohio, ASM International, 2000.
- [60] D. Kulawinski, K. Nagel, S. Henkel, P. Hübner, H. Fischer, M. Kuna, and H. Biermann. Characterization of stress-strain behavior of a cast trip steel under different biaxial planar load ratios. *Engineering Fracture Mechanics*, 78:1684 – 1695, 2011.
- [61] T. Kuwabara. Advances in experiments on metal sheets and tubes in support of constitutive modeling and forming simulations. *International Journal of Plasticity*, 23:385 – 419, 2007.
- [62] F. Leckie and E. Onat. Tensorial nature of damage measuring internal variables. In J. Hult and J. Lemaitre, editors, *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, 140–155. Springer Berlin Heidelberg, 1981.
- [63] D. Lecompte, A. Smits, H. Sol, J. Vantomme, and D. V. Hemelrijck. Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 44:1643 – 1656, 2007.
- [64] T. Lehmann. Some remarks on the decomposition of deformations and mechanical work. *International Journal of Engineering Science*, 20:281 – 288, 1982.
- [65] T. Lehmann. Some theoretical considerations and experimental results concerning elastic-plastic stress-strain relations. *Ingenieur-Archiv*, 52:391 – 403, 1982.
- [66] T. Lehmann. Some thermodynamical considerations on inelastic deformations including damage processes. *Acta Mechanica*, 79:1–24, 1989.
- [67] T. Lehmann. Thermodynamical foundations of large inelastic deformations of solid bodies including damage. *International Journal of Plasticity*, 7:79–98, 1991.
- [68] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107:83–89, 1985.
- [69] J. Lemaitre. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:31–49, 1985.
- [70] J. Lemaitre. *A course on damage mechanics*, volume 2. Springer-Verlag, 1996.
- [71] J. Lemaitre. Evaluation of dissipation and damage in metals submitted to dynamic loading. *Proceedings of the First International Conference on the Mechanical Behavior of Materials*, 540–549, Kyoto, 1972.
- [72] J. Lemaitre, R. Desmorat, and M. Sauzay. Anisotropic damage law of evolution. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19:187 – 208, 2000.
- [73] H. Li, M. Fu, J. Lu, and H. Yang. Ductile fracture: Experiments and computations. *International Journal of Plasticity*, 27:147 – 180, 2011.

-
- [74] Y. Lou, J. W. Yoon, and H. Huh. Modeling of shear ductile fracture considering a changeable cut-off value for stress triaxiality. *International Journal of Plasticity*, 54:56 – 80, 2014.
- [75] T. J. Lu and C. L. Chow. On constitutive equations of inelastic solids with anisotropic damage. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 14:187–218, 1990.
- [76] J. Lubliner. Normality rules in large-deformation plasticity. *Mechanics of Materials*, 5:29 – 34, 1986.
- [77] A. Makinde, L. Thibodeau, and K. Neale. Development of an apparatus for biaxial testing using cruciform specimens. *Experimental Mechanics*, 32:138–144, 1992.
- [78] F. McClintock. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, June:363–371, 1968.
- [79] S. Murakami. Mechanical modeling of material damage. *Journal of Applied Mechanics*, 55:280–286, 1988.
- [80] J. Nagtegaal, D. Parks, and J. Rice. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4:153 – 177, 1974.
- [81] K. Nahshon and J. Hutchinson. Modification of the Gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27:1 – 17, 2008.
- [82] A. Needleman. Void growth in an elastic-plastic medium. *Journal of Applied Mechanics*, 4:964–970, 1972.
- [83] A. Needleman and J. Rice. Limits to ductility set by plastic flow localization. In D. Koistinen and N.-M. Wang, editors, *Mechanics of Sheet Metal Forming*, 237–267. Springer USA, 1978.
- [84] A. Needleman and V. Tvergaard. An analysis of ductile rupture in notched bars. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 32:461–490, 1984.
- [85] S. Nemat-Nasser. Rate-independent finite-deformation elastoplasticity: a new explicit constitutive algorithm. *Mechanics of Materials*, 11:235 – 249, 1991.
- [86] S. Nemat-Nasser and Y.-F. Li. A new explicit algorithm for finite-deformation elastoplasticity and elastoviscoplasticity: Performance evaluation. *Computers and Structures*, 44:937–963, 1992.
- [87] K. L. Nielsen and V. Tvergaard. Ductile shear failure or plug failure of spot welds modelled by modified Gurson model. *Engineering Fracture Mechanics*, 77:1031 – 1047, 2010.
- [88] Y. N. Rabotnov. On the equation of state for creep. *Progress in Applied Mechanics*, The Prager anniversary volume:307–315, 1963.
- [89] J. R. Rice and D. M. Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and the Physics of Solids*, 17:201–217, 1969.

-
- [90] J. Simo and J. Ju. Strain- and stress-based continuum damage models - II. computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 23:841–869, 1987.
- [91] A. Sindern. Numerische Untersuchungen geschädigter Metalle unter dynamischer Beanspruchung. Diplomarbeit, Technische Universität Dortmund, 2010.
- [92] W. A. Spitzig, R. J. Smelser, and O. Richmond. The evolution of damage and fracture in iron compacts with various initial porosities. *Acta Metallurgica*, 36:1201–1211, 1988.
- [93] W. A. Spitzig, R. J. Sober, and O. Richmond. Pressure dependence of yielding and associated volume expansion in tempered martensite. *Acta Metallurgica*, 23:885–893, 1975.
- [94] W. A. Spitzig, R. J. Sober, and O. Richmond. The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory. *Metallurgical Transactions A*, 7:1703–1710, 1976.
- [95] P. Steinke. *Finite-Element-Methode, Rechnergestützte Einführung, 4. Auflage*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [96] H. Tu, S. Schmauder, and U. Weber. Numerical study of electron beam welded butt joints with the GTN model. *Computational Mechanics*, 50:245–255, 2012.
- [97] V. Tvergaard. Material failure by void coalescence in localized shear bands. *International Journal of Solids and Structures*, 18:659 – 672, 1982.
- [98] V. Tvergaard. Material failure by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 27:83–151, 1990.
- [99] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32,1:157–169, 1984.
- [100] G. Z. Voyiadjis and P. I. Kattan. A plasticity-damage theory for large deformation of solids - I. Theoretical formulation. *International Journal of Engineering Science*, 9:1089–1108, 1992.
- [101] G. Z. Voyiadjis and T. Park. The kinematics of damage for finite-strain elastoplastic solids. *International Journal of Engineering Science*, 37:803–830, 1999.
- [102] L. Wang and S. Atluri. An analysis of an explicit algorithm and the radial return algorithm, and a proposed modification, in finite plasticity. *Computational Mechanics*, 13:380–389, 1994.
- [103] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [104] L. Xue. Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:3343 – 3366, 2008.
- [105] O. C. Zienkiewicz and I. C. Corneau. Visco-plasticity - plasticity and creep in elastic solids - a unified numerical solution approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8:821–845, 1974.