

# Ein Kontinuumsschädigungsmodell basierend auf mikromechanischen numerischen Berechnungen

Vanessa Hagenbrock

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

## Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Gutachter:

1. Prof. Dr.-Ing. habil. Michael Brünic
2. Prof. Dr.-Ing. habil. Hans Albert Richard
3. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. mult. Holm Altenbach

Die Dissertation wurde am 18. August 2016 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 29. November 2016 statt.

**Autorin:**

Vanessa Hagenbrock

*Vanessa.Hagenbrock@unibw.de*

Grubebachstr. 71

33129 Delbrück

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein phänomenologisches Kontinuumsschädigungsmodell zur Beschreibung des Schädigungs- und Versagensverhaltens duktiler Metalle verwendet. Mit dem mikromechanisch motivierten Modell kann das elastisch-plastisch-schädigende Materialverhalten bis zum endgültigen Versagen durch einen Riss abgebildet werden.

Zunächst werden in der Kinematik geschädigte und fiktiv ungeschädigte Konfigurationen definiert, die zur additiven Zerlegung der Verzerrungsraten in elastische, plastische und schädigende Anteile führen. Es werden unterschiedliche elastische Potentialfunktionen verwendet, um den Einfluss der Schädigung auf das elastische Materialverhalten zu berücksichtigen. Zur Modellierung des plastischen Verhaltens duktiler Metalle dient eine Fließbedingung, ein nicht assoziiertes Fließgesetz und ein Verfestigungsgesetz. Analog wird zur Beschreibung des schädigenden Materialverhaltens eine Schädigungsbedingung und ein nicht assoziiertes Schädigungsgesetz eingeführt. Mit fortschreitender Belastung kommt es zu weiterem Porenwachstum und der Entstehung von Mikroscherrissen. Der Beginn dieses Prozesses wird mit der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte beschrieben. Analog wird ein Risskriterium zur Charakterisierung des vollständigen Versagens des Materials eingeführt. Da sowohl das Schädigungs- als auch das Versagensverhalten spannungsabhängig ist, werden die Materialgleichungen in Abhängigkeit der Spannungsintensität, der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters formuliert.

Zur Ermittlung der spannungsabhängigen Parameter zur Beschreibung der Schädigung und des Versagens werden mikromechanische numerische Simulationen zum Verhalten von repräsentativen Volumenelementen mit einer oder mehreren Poren in einem elastisch-plastischen Material durchgeführt. Dabei wird der Einfluss der Porengröße, der Porenform und der Porenanordnung auf die Schädigung und das Versagen analysiert. Zusätzlich werden die Auswirkungen der Verwendung von Symmetrierandbedingungen und periodischen Randbedingungen betrachtet. Da auch in der industriellen Anwendung eine Vielzahl unterschiedlicher Lastkombinationen auftreten, wird in dieser Arbeit eine große Bandbreite unterschiedlicher Spannungstriaxialitäten und Lodeparameter untersucht.

Die Ergebnisse zeigen, dass das phänomenologische Kontinuumsschädigungsmodell die Ergebnisse der mikromechanischen Simulationen sehr gut approximiert. Es können die unterschiedlichen Schädigungsmechanismen, wie z. B. das Auftreten von Mikroscherrissen und die Porenaufweitung hervorragend berücksichtigt werden. Des Weiteren wird deutlich, dass das Ein-Poren-Modell zur Analyse des Schädigungs- und Versagensverhaltens duktiler Metalle sehr gut geeignet ist, da bei Betrachtung der anderen geometrischen Variationen des Poren-Modells nur geringe Abweichungen in den makromechanischen Schädigungsverzerrungen auftreten. Das Ein-Poren-Modell eignet sich daher zur Untersuchung der Auswirkungen von realen Porenverteilungen auf das Schädigungs- und Versagensverhalten von duktilen Metallen.



## Abstract

This thesis deals with a phenomenological continuum damage and failure model to describe the damage and failure behavior of ductile metals. The micro-mechanically motivated model allows the characterization of the elastic-plastic-damage material behavior until failure by a final crack.

The model is based on the introduction of damaged and fictitious undamaged configurations, leading to additive decomposition of the strains in elastic, plastic and damaged parts. To be able to model the effect of damage on elastic material properties, different elastic potential functions are introduced. The plastic behavior can be characterized by a yield condition, a non-associated flow rule and a hardening law. In a similar way, a damage condition and a non-associated damage rule describe the damage behavior. During loading of metal specimens voids grow and micro cracks develop. To be able to adequately describe the beginning of the coalescence process a coalescence criterion is introduced. In a similar way the fracture criterion is taken to characterize the final fracture of the material. The damage as well as the fracture process are stress-state-dependent. Therefore, the proposed material equations are formulated as a function of the stress intensity, the stress triaxiality and the Lode parameter.

To evaluate the stress-state-dependent parameters of the damage and failure model various micro-mechanical numerical simulations of void containing unit cells have been performed. Different sizes, shapes and distributions of voids are examined to analyze their influence on the damage quantities and failure process. Furthermore the effect of symmetry and periodic boundary conditions is investigated. In industrial applications, multiaxial loading conditions exist. Therefore, the calculations cover a wide range of stress intensities, stress triaxialities and Lode parameters to get more insight in the complex stress-state-dependent damage and failure behavior.

The results show very good accuracy of the phenomenological continuum damage model in comparison to the micro-mechanical simulations. The proposed damage equations and the constitutive parameters take into account various damage mechanisms e. g. formation of micro shear cracks and void growth. Furthermore the results show that the one-void-containing unit cells are convenient to analyze the damage and failure behavior of ductile metals. For different pore sizes, shapes and distributions only marginal differences in damage strains are observed. The one-void-model leads to good approximation for the parameters of the constitutive damage equations.



## Vorwort

In der Zeit von Juni 2011 bis Juli 2016 war ich am Institut für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr München als wissenschaftliche Mitarbeiterin tätig. In diesem Zeitraum bekam ich die Möglichkeit, meine Dissertation zu verfassen. Nach vielen Jahren intensiver wissenschaftlicher Arbeit nach dem Motto

*„Es ist schwieriger,  
eine vorgefasste Meinung zu zertrümmern als ein Atom“*

*Albert Einstein*

liegt nun diese Dissertation vor Ihnen. Somit ist es an der Zeit, mich bei all denjenigen zu bedanken, die mich in dieser herausfordernden Phase begleitet und unterstützt haben.

Zu besonderem Dank bin ich Herrn Professor Brünig verpflichtet. Dieser stand mir zu jeder Zeit mit seinem akademischen Wissen zur Seite und unterstützte mich mit wertvollen thematischen Anregungen. Durch seinen Glauben an meinen Erfolg bei der Erstellung dieser Arbeit, ist diese erst möglich geworden.

Des Weiteren danke ich Herrn Professor Altenbach und Herrn Professor Richard für die Übernahme der zusätzlichen Gutachten. Ebenso gilt mein Dank Herrn Professor Thienel für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Meinen wissenschaftlichen Kollegen danke ich besonders für die vielen fachlichen Diskussionen. Dabei möchte ich besonders Herrn Dr.-Ing. Daniel Brenner, Herrn Dr.-Ing. Steffen Gerke, Herrn Michalski und Herrn Schmidt erwähnen. Sie haben mich in den vergangenen Jahren mit bereichernden Diskussionsbeiträgen und wertvollen Tipps zu jeder Zeit unterstützt, denn eine wissenschaftliche Arbeit ist nie das Werk eines Einzelnen.

Nicht zu vergessen ist an dieser Stelle meine Familie. Ich bedanke mich bei Jedem, der dieses Werk mit seiner Zeit und seinen Taten unterstützt hat. Besonders hervorheben möchte ich meine Eltern. Sie gaben mir immer die Möglichkeit, alle meine Wünsche und Ziele zu erreichen.

Vanessa Hagenbrock  
Delbrück, November 2016



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>1</b>
1.1	Schädigungsverhalten duktiler Metalle . . . . .	1
1.2	Wissenschaftlicher Hintergrund der Arbeit . . . . .	3
1.3	Wissenschaftliche Ziele dieser Arbeit . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>17</b>
2.1	Kinematik . . . . .	17
2.2	Thermodynamische Betrachtungen . . . . .	26
2.3	Materialgleichungen . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Numerische Aspekte</b>	<b>45</b>
3.1	Grundlagen der Finite-Element-Methode . . . . .	45
3.2	Grundgedanken der mikromechanischen Berechnungen . . . . .	48
3.3	Ermittlung der Materialparameter der numerischen Simulationen .	64
<b>4</b>	<b>Mikromechanische Simulationen</b>	<b>67</b>
4.1	Ein-Poren-Modell . . . . .	68
4.2	Variation der Porosität . . . . .	73
4.3	Variation der Porenform . . . . .	80
4.4	Variationen der Porenanordnung . . . . .	84
4.5	Variation der Randbedingungen . . . . .	93
4.6	Bestimmung und Validierung der Parameter der Materialgleichungen	97
4.7	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Mikromechanische Simulationen zur Entstehung eines Makrorisses</b>	<b>115</b>
5.1	Variation der Porosität . . . . .	116
5.2	Variation der Porenform . . . . .	118
5.3	Variation der Randbedingungen . . . . .	120
5.4	Bestimmung und Validierung der Parameter der Materialgleichungen	124
5.5	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	131
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung der Ergebnisse</b>	<b>143</b>
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>147</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>149</b>

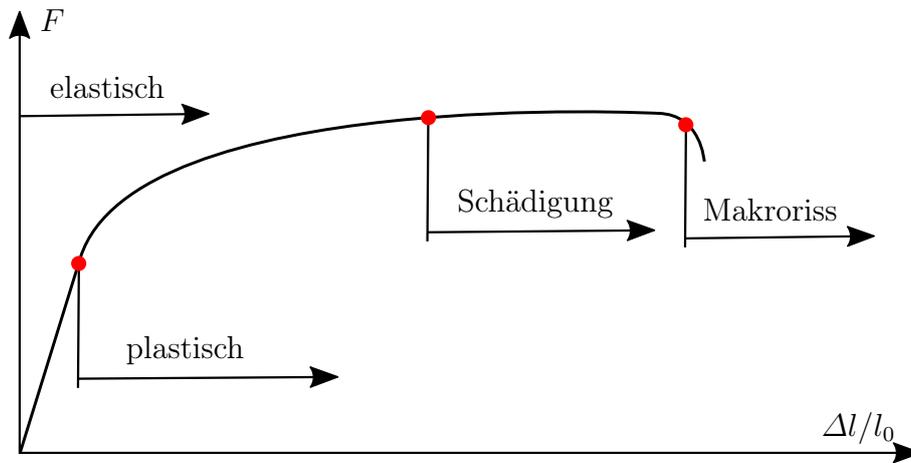


# 1 Motivation

Aufgrund der wachsenden Anforderungen der Industrie an Metalle und andere Rohstoffe ist es notwendig, deren Eigenschaften im Detail zu kennen. Dabei ist besonders das Verhalten unter diversen Belastungen, seien diese statischen, dynamischen oder auch thermischen Ursprungs, von großer Bedeutung. Um Informationen über die spezifischen Materialeigenschaften zu erhalten, sind oft kosten- und zeitintensive Experimente notwendig. Zusätzlich werden im Rahmen solcher Versuche eine Vielzahl an Ressourcen verbraucht. Aus diesem Grund sind Finite-Elemente-Berechnungen sowohl in der Industrie als auch in der Wissenschaft von großer Bedeutung. Sie ermöglichen die Ermittlung der spezifischen Eigenschaften eines Materials in kürzeren Zeiträumen. Außerdem können besondere Merkmale auf der Mikroebene, wie z. B. das Verhalten einzelner oder mehrerer Poren im Material unter Belastung analysiert werden, zu denen mit Hilfe experimenteller Methoden kein Zugang besteht. Somit werden auch im Rahmen dieser Arbeit numerische Simulationen genutzt, um das Schädigungs- und Versagensverhalten duktiler Metalle, vom Beginn der Schädigung bis zum vollständigen Makroriss, zu beschreiben.

## 1.1 Schädigungsverhalten duktiler Metalle

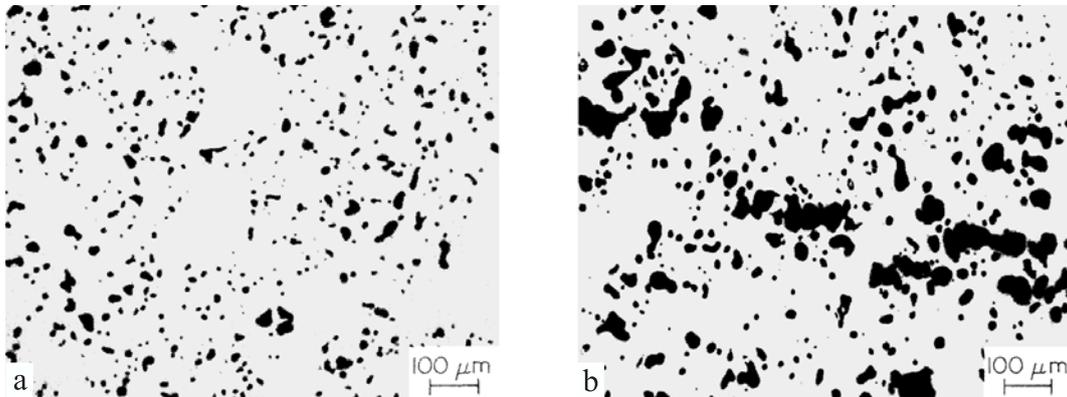
Um das Verhalten eines Materials, in diesem Fall das eines duktilen Metalls, verstehen zu können, ist es von Vorteil, die physikalischen Prozesse zu kennen. In Abb. 1.1 ist schematisch ein Last-Verschiebungs-Diagramm einer Zugprobe eines duktilen Metalls dargestellt. Bei Belastung dieses Materialtyps tritt zunächst elastisches Verhalten auf (Abb. 1.1). Dessen Ursprung liegt in der relativen Verschiebung von Atomen zueinander. Durch das Aufheben der Belastung nehmen die Atome jedoch wieder ihre ursprüngliche Position ein, somit ist das elastische Materialverhalten reversibel [89]. Im Anschluss an dieses Verhalten schließt



**Abb. 1.1:** Charakteristische Last-Verschiebungs-Kurve eines duktilen Metalls

sich bei weiterer Belastung elastisch-plastisches Materialverhalten an (Abb. 1.1). Dabei überschreitet die relative Bewegung der Atome eine Grenze, sodass es zu irreversiblen Versetzungen im Kristallgitter kommt [89]. Gleichzeitig hat dieses Verhalten eine Verfestigung des Materials zur Folge. Bei der Entlastung eines elastisch-plastisch verformten Materials kann beobachtet werden, dass der Elastizitätsmodul sich nicht verändert hat, da der Be- und Entlastungspfad parallel zueinander sind. Diese Beobachtung lässt den Schluss zu, dass elastisches und plastisches Materialverhalten unabhängig voneinander betrachtet werden kann.

Aufgrund des Herstellprozesses ist bei Metallen stets eine Initialschädigung vorhanden. Diese ist gekennzeichnet durch das Vorhandensein von Poren oder Luft-einschlüssen, sogenannten Lunkern (Abb. 1.2a)). Zusätzlich können bei der Herstellung Fremdpartikel in das Gefüge gelangen, die ebenfalls als Vorschädigung zu deuten sind. Bei weiterer Zugbelastung eines vorgeschädigten Materials vergrößern sich diese Poren und wachsen mit benachbarten Poren zusammen. Zusätzlich bilden sich neue Poren. Es kommt zur Entstehung von Mikrorissen (Abb. 1.2b)), die letztendlich zu Makrorissen führen. Bei der Schädigung handelt es sich also um einen Prozess, der mit der Entfestigung des duktilen Metalls einher geht. Dabei lösen sich auf atomarer Ebene die Knoten der Atome [89]. Dies hat eine Beeinflussung des elastischen Materialverhaltens durch die Schädigung zur Folge, welche bei der Entlastung des Materials deutlich wird. Der Be- und Entlastungspfad verlaufen nicht mehr parallel zueinander. Der Elastizitätsmodul wurde infolge der Schädigung abgemindert. Das plastische Verhalten bleibt durch die Schädigung



**Abb. 1.2:** Schädigung duktiler Metalle: a) vor Belastung ( $f_0 = 7\%$ ) und b) Mikroriss nach Belastung des Materials [11]

weitgehend unbeeinflusst, sodass dieser Einfluss in der Regel vernachlässigt wird. Da während eines experimentellen Versuches die Ereignisse auf atomarer Ebene nicht betrachtet werden können, ist es schwierig, den Beginn der Schädigung festzustellen. Lemaitre [89] stellte diesbezüglich verschiedene Methoden vor und bewertete diese. Eine mögliche Option ergibt sich durch den Einfluss der Schädigung auf das elastische Materialverhalten. Die Schädigung führt zur Abminderung des Elastizitätsmoduls und somit liefert die Messung dieser Abminderung die notwendige Information zur Charakterisierung des Schädigungsbeginns.

Alternativ kann der Beginn der Schädigung dadurch charakterisiert werden, dass in einem Last-Verschiebungs-Diagramm die Ergebnisse einer elastisch-plastischen Simulation von denen des experimentellen Versuches mit Schädigung abweichen [35].

## 1.2 Wissenschaftlicher Hintergrund der Arbeit

Zur effektiven Nutzung der Vielzahl verschiedener Materialien ist es notwendig, deren Verhalten und deren Grenzen infolge einer Belastung im Detail zu kennen und mit Hilfe von möglichst realitätsnahen Modellen zu beschreiben. In den letzten Jahren wurden entsprechende Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens von Wissenschaftlern vorgestellt. Dabei gibt es verschiedene Ansätze zur Beschreibung des elastischen, plastischen und geschädigten Verhaltens. Der Fo-

kus dieser Arbeit liegt auf der Schädigung duktiler Metalle. Somit werden die zugehörigen wissenschaftlichen Ansätze im Folgenden vorgestellt.

### 1.2.1 Schädigungs- und Versagensmodelle

Nach Garrison und Moody [61] wurde duktile Schädigung zum ersten Mal von Henry [67] in der Literatur erwähnt. Im Rahmen dieser Veröffentlichung wurde das Auftreten von Schädigung bei der Dehnung eines duktilen Metalls beschrieben. Fast ein Jahrhundert später beschrieb auch Ludwik [95] ein ähnliches Phänomen. Bei der Untersuchung einer eingeschnürten Zugprobe aus Aluminium stellte er fest, dass sich im Inneren bereits vor dem endgültigen Versagen des Zugstabes ein Riss ausgebildet hat.

Kachanov [72] stellte in einer Veröffentlichung ein Kontinuumsschädigungsmodell vor, welches vom Russischen ins Englische übersetzt wurde [74]. Das Modell von Kachanov basierte auf phänomenologischen Beobachtungen und nutzte eine Flächenvariable zur Charakterisierung der Schädigung. Es wurde eine erste Differenzierung zwischen der Schädigung und dem kompletten Versagen des Materials vorgenommen [72, 74]. Rabotnov [112] hat diese Ideen aufgegriffen und modifizierte sie in seinem Modell. Ein weiterer Aspekt von Rabotnov [112] ist die Vorstellung des Konzepts der effektiven Spannungen im geschädigten Material.

Auch Lemaitre [88, 89, 90] nutzte die Ideen von Kachanov [72, 74] und Rabotnov [112]. In seinem Kontinuumsschädigungsmodell charakterisierte er die Schädigung mit Hilfe einer Flächenvariablen. Des Weiteren führte er das Prinzip der Dehnungsäquivalenz ein, welches besagt, dass das elastische Dehnungsverhalten eines geschädigten Materials mit dem eines ungeschädigten Materials übereinstimmt. Gleichzeitig griff er hierbei auf das Konzept der effektiven Spannungen von Rabotnov [112] zurück. Ein weiterer Aspekt des Modells von Lemaitre [88, 89, 90] war die Verknüpfung des elastischen Verhaltens mit der Schädigung. Allerdings verwendete Lemaitre nur eine Potentialfunktion zur Ermittlung des Stoffgesetzes für plastisches und schädigendes Materialverhalten. Somit war eine separate Betrachtung der beiden Mechanismen nicht möglich. Lemaitre et al. [91] entwickelten später das Kontinuumsschädigungsmodell für die anisotrope Schädigung

weiter. Dabei wurde ein Tensor zweiter Stufe zur Charakterisierung der Schädigung in Richtung der Hauptachsen verwendet.

Die Ideen von Lemaitre lieferten ebenfalls für die wissenschaftliche Arbeit von Bonora [19] die Grundlagen. Dabei nutzte er die theoretischen Ansätze für sein Modell. Im Rahmen seiner Arbeit ging er von drei verschiedenen Mechanismen bei der Entwicklung des Porenwachstums aus [19]. Später validierten Bonora et al. [18] dieses Modell mit Hilfe experimenteller Untersuchungen. Neben diesen wissenschaftlichen Arbeiten nutzten auch weitere Autoren die Ideen von Lemaitre [88, 90] zur Formulierung eines phänomenologischen Kontinuumsschädigungsmodells [47, 48, 78].

Als besonders geeignet zur Beschreibung der Schädigung erwies sich in der Kontinuumsschädigungsmechanik zunächst eine Flächenvariable [72, 89]. Eine skalare Variable hat den Vorteil, dass sie richtungsunabhängig ist und daher zur Simulation kugelförmiger Poren verwendet werden kann. Dieser Vorteil bringt jedoch gleichzeitig die Einschränkung mit sich, dass anisotrope Schädigung nicht berücksichtigt werden kann. Sowohl das Zusammenwachsen als auch die Aufweitung der Poren sind von der Lastrichtung abhängig [23]. Daraus resultiert auch die Richtungsabhängigkeit des endgültigen Versagens.

Aus diesem Grund führten weitere Autoren verschiedene Ansätze zur Berücksichtigung anisotroper Schädigungseffekte ein. Zum Beispiel nutzte Krajcinovic [77] eine vektorielle Variable zur Beschreibung der Schädigung in duktilen Materialien. Dies war eine Erweiterung des zuvor für spröde Materialien vorgestellten Schädigungsmodells von Fonseka und Krajcinovic [57] und Krajcinovic und Fonseka [79]. Problematisch war bei dieser vektoriellen Schädigungsvariable jedoch, dass nicht alle Mikrodefekte im Modell berücksichtigt werden konnten. Dies war darauf zurückzuführen, dass die Schädigung eines repräsentativen Volumenelements (RVEs) auf drei orthogonale Flächen projiziert wurde. Defekte, die nicht parallel zu einer dieser Ebenen waren, konnten demnach nicht in das Modell aufgenommen werden [23].

Daher führte Kachanov [73] eine tensorielle Schädigungsvariable zur Beschreibung der anisotropen Effekte der Schädigung ein. Diese berücksichtigte gleichzeitig den Einfluss der Schädigung auf das elastische Materialverhalten. Dem Modell lagen eine geschädigte und eine ungeschädigte Konfiguration zu Grunde [73].

Auch Murakami [102, 103] nutzte einen Tensor zweiter Stufe zur Modellierung der Schädigung, wobei das Prinzip der Projektion der Schädigung von Fonseka und Krajcinovic [57] und Krajcinovic und Fonseka [79] aufgegriffen wurde. Lediglich der Rang des Tensors unterschied sich. Murakami [102, 103] nahm eine Aufteilung in drei zueinander orthogonale Flächen vor und charakterisierte die jeweilige Schädigung mit einer Flächenvariablen. Ein zusätzlicher Aspekt seines Modells war die Einführung einer geschädigten und einer fiktiv ungeschädigten Konfiguration. Diese konnten entweder belastet oder elastisch entlastet sein und wurden über entsprechende Deformationsgradienten transformiert [102, 103]. Auch wenn die Beschreibung der Schädigung mit einem Tensor von Vorteil war, brachten die Betrachtungsweisen von Fonseka und Krajcinovic [57], Krajcinovic und Fonseka [79] und Murakami [102, 103] den Nachteil mit sich, dass jeweils nur die Projektion der Schädigung berücksichtigt wurde. Unterschiedliche Porenformen konnten bei den Betrachtungen nicht mit einbezogen werden. Chaboche [46, 47, 48] führte in seinem Modell sogar einen Tensor vierter Stufe zur Charakterisierung der Schädigung ein. Im Rahmen der wissenschaftlichen Arbeiten von Betten [15, 16], Voyiadjis und Kattan [130], Voyiadjis und Park [129] und Chow und Wang [49] wurden ebenfalls tensorielle Schädigungsvariablen verwendet.

Aufgrund der vorangegangenen Ausführungen bezüglich der Ordnung der Schädigungsvariablen sollte bei der Entwicklung eines Schädigungsmodells stets zwischen den jeweiligen Vor- und Nachteilen abgewogen werden. Skalare Variablen haben eine einfache Modellformulierung zur Folge, können jedoch keine komplexen Mikrodefekte berücksichtigen. Schädigungstensoren vierter Stufe bringen hingegen eine enorme Steigerung der Komplexität des Modells mit sich. Somit eignen sich Schädigungstensoren zweiter Stufe besonders bei der Modellierung der Schädigung, da diese einen guten Mittelweg zwischen der Komplexität des Modells und der detaillierten Berücksichtigung der Mikrodefekte ermöglichen.

Eine Alternative zur phänomenologischen Herangehensweise auf der Makroebene ist die nähere Betrachtung einzelner Defekte auf der Mikroebene. Dabei werden numerische Simulationen eines elastisch-plastischen Materials durchgeführt und einzelne Poren bei der Erstellung des Modells auf der Mikroebene geometrisch modelliert. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass das Verhalten einzelner Poren unter verschiedenen Belastungen detailliert untersucht werden kann. Aus den Er-

gebnissen dieser Untersuchungen können dann Rückschlüsse auf die Entwicklung der Schädigung gezogen werden. Problematisch ist jedoch, dass mit Hilfe mikromechanischer Betrachtungen nur ein Ausschnitt einer gesamten Porenverteilung betrachtet werden kann und somit keine exakte Modellierung realer Porenanordnungen möglich ist [40, 42]. Mikromechanische numerische Berechnungen stellen somit eine Approximation eines realen Materials mit Poren, die aufgrund des Herstellprozesses vorhanden sind, dar.

Diese neuen Gedanken zur Untersuchung mikromechanischer Modelle wurden z. B. von McClintock [98] aufgenommen. Er betrachtete einen Körper mit elastisch-plastischem Materialverhalten, der mit einer Zugbelastung beansprucht wurde. Die Mikrodefekte wurden in Form von zylindrischen Poren mit kugel- oder ellipsenförmigem Querschnitt modelliert. Zur Charakterisierung der Schädigung verwendete McClintock [98] den Durchmesser der Poren. Eine Veränderung des Durchmessers war ein Zeichen für das Vorhandensein von Schädigung und diente gleichzeitig der Bestimmung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte. Zusätzlich beobachtete er bei den Ergebnissen seiner analytischen Betrachtungen eine Abhängigkeit vom Spannungszustand, den er mit Hilfe der Spannungstriaxialität charakterisierte. Auch Rice und Tracey [114] stellten eine Veröffentlichung zu diesem Thema vor. Sie untersuchten das Verhalten einer kugelförmigen Pore in einem starr elastischen und plastisch inkompressiblen Material. Auch ihre Betrachtungen führten zu dem Schluss, dass das Verhalten der Poren stark vom Spannungszustand abhängt. Dabei beobachteten sie für moderate und große positive Triaxialitäten ein Porenwachstum und für Triaxialitäten, die eine Scherbelastung charakterisierten, eine Gestaltänderung der Poren.

Wenige Jahre später führte Needleman [106] mikromechanische numerische Untersuchungen durch. Für seine Betrachtungen nutzte er ein elastisch-plastisches Material mit periodischen Porenanordnungen. Dabei wurden zylindrische Poren mit einem kreisrunden Querschnitt verwendet. Die Ergebnisse zeigten eine Entwicklung der Schädigung in Form von Porenwachstum und des Zusammenschlusses von Mikrodefekten.

Gurson [64] stellte ein weiteres analytisches Schädigungsmodell vor. Für seine Untersuchungen nutzte er ein inkompressibles Matrixmaterial mit starr-plastischem

Materialverhalten. Dies hatte beim Bruch große plastische Dehnungen zur Folge. Die Anfangsschädigung modellierte Gurson [64], indem er zwei unterschiedliche Porengeometrien in je einem RVE betrachtete: eine zylindrische Pore mit kreisförmigem Querschnitt und eine kugelförmige Pore. Die Porosität beschrieb er mit einer Volumenvariablen. Das Ergebnis seiner Untersuchungen waren in Anlehnung an die von-Mises-Fließbedingung zwei Fließbedingungen für die jeweilige Porenform, da sich aufgrund der unterschiedlichen RVEs mit den jeweiligen Porenformen zwei unterschiedliche Spannungszustände einstellten. Schwachpunkte dieses Modells waren, dass keine Abgrenzung zwischen den Deformationen des RVEs infolge der Plastizierung und der Schädigung vorgenommen und auch die Abminderung der elastischen Materialeigenschaften durch die Schädigung nicht berücksichtigt wurde. Zusätzlich handelte es sich bei dem Modell um eine analytische Lösung, die teilweise auf stark vereinfachenden Annahmen und nicht auf den Grundlagen der Kontinuumsschädigungsmechanik beruhte.

Erste Erweiterungen des Gurson-Modells [64] wurden von Needleman und Rice [108] vorgenommen. Mit den Erkenntnissen ihrer Arbeit war es Chu und Needleman [50] möglich, einen Term zur Berücksichtigung der Poreneubildung einzuarbeiten. Im weiteren Verlauf wurde von Needleman und Tvergaard [109] und Tvergaard und Needleman [122] das bekannte Gurson-Tvergaard-Needleman-Modell (GTN) vorgestellt. Needleman und Tvergaard [109] und Tvergaard und Needleman [122] nahmen dabei eine Erweiterung der Fließbedingung von Gurson [64] vor. Diese ermöglichte die zusätzliche Berücksichtigung der Poreneubildung und des Zusammenwachsens einzelner Defekte zu einem Mikroriss. Das GTN-Modell [109, 122] ist heutzutage weit verbreitet und wird vor allem aufgrund seiner Simplität gerne verwendet. Weitere Modifizierungen wurden sowohl von Nahshon und Hutchinson [105] als auch von Nielsen und Tvergaard [110] und Nielsen et al. [111] vorgenommen. In ihren Arbeiten wurden detaillierte Untersuchungen von mikromechanischen Modellen bei der Verwendung von schubdominierten Spannungszuständen durchgeführt. Auch Kuna und Sun [80] analysierten das Verhalten von Poren-Modellen zur Modifizierung des GTN-Modells.

Ein wichtiger Aspekt bei der Schädigung eines duktilen Metalls ist das Zusammenwachsen von Mikroporen, was letztendlich zum vollständigen Versagen des RVEs führt. Detaillierte Untersuchungen dieses Prozesses wurden von Hosoka-

wa et al. [68, 69, 70] vorgenommen. Die Autoren verwendeten dreidimensionale Probekörper mit einer Anordnung von Poren und nahmen während eines Zugversuches Röntgenaufnahmen auf, die Einblicke in den Probekörper ermöglichten. Zusätzlich wurden mikromechanische Simulationen durchgeführt und für einen Abgleich der experimentellen Ergebnisse verwendet. Ähnliche Betrachtungen wurden von Lecarme et al. [83] veröffentlicht. Das Zusammenwachsen von Mikroporen wurde jedoch nicht nur anhand von Röntgenaufnahmen untersucht. Auch mikromechanische Simulationen wurden zur Analyse des Versagensverhaltens genutzt. Leblond und Perrin [82] untersuchten den Zusammenschluss von Poren und verwendeten ihre Erkenntnisse und das GTN-Modell [109, 122] zur Bestimmung einer kritischen Porosität, die den Beginn des Zusammenwachsens von Poren kennzeichnete. Weitere Betrachtungen wurden von Gao und Kim [58] vorgenommen, wobei sie den Beginn des Zusammenwachsens mit Hilfe einer makroskopischen Verzerrung charakterisierten.

Brüning [22, 23] hat bei der Entwicklung seines phänomenologischen Modells verschiedene Ansätze der vorgestellten Theorien aufgegriffen. Aufbauend auf in der Literatur vorgestellten Beobachtungen basierend auf Experimenten und mikromechanischen numerischen Simulationen formulierte Brüning [25, 26, 27] ein phänomenologisches Modell, das gleichzeitig mikromechanische Aspekte berücksichtigte. Dieses beinhaltete die kinematische Betrachtung der Porenaufweitung. Dabei wurde eine irreversible Verzerrung infolge der Schädigung eingeführt. Das Modell dient als theoretische Grundlage der vorliegenden Arbeit. Da im Rahmen experimenteller Betrachtungen von Brüning et al. [35] schnell deutlich wurde, dass nur ein Teil der Parameter des Schädigungs- und Versagensmodells mit Hilfe von Experimenten ermittelt werden können, wurden zusätzliche mikromechanische Simulationen durchgeführt [32, 35, 37, 39, 42]. Diese lieferten detaillierte Aussagen über den Einfluss des Spannungszustandes, welcher mit Hilfe der Spannungsintensität, der Spannungstriaxialität und dem Lodeparameter charakterisiert wurde. Bei der verwendeten Schädigungsvariablen handelte es sich um einen Tensor zweiter Stufe, sodass eine relativ einfache Handhabung des Modells gewährleistet war. Des Weiteren bestand bei der Verwendung des Modells von Brüning et al. [39, 42] die Möglichkeit, das in Abb. 1.1 dargestellte elastisch-plastisch-schädigende Materialverhalten abzubilden. Dabei wurde sowohl die Schädigung, der Beginn des

Zusammenwachsens der Mikrodefekte als auch das Versagen in Form eines Makrorisses gesondert modelliert. Zusätzlich berücksichtigte das phänomenologische Modell eine große Bandbreite diverser Spannungszustände [39, 42]. Im Rahmen experimenteller Betrachtungen wurde von Brünig et al. [34, 36] die Gültigkeit des Modells bereits unter Verwendung verschiedener Probekörper überprüft und erste Vereinfachungen vorgenommen [21, 43, 44, 45]. Bei einem Vergleich der numerischen Ergebnisse des Modells mit den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen zeigte sich eine gute Übereinstimmung.

### 1.2.2 Einfluss der Spannungszustände auf das Schädigungs- und Versagensverhalten

Die jeweiligen Schädigungsmechanismen, die infolge einer Belastung auftreten, stehen in direktem Zusammenhang mit dem vorhandenen Spannungszustand [40, 42]. Dieser kann anhand verschiedener Parameter charakterisiert werden. Im Fall von isotropem Materialverhalten eignen sich die drei Hauptnormalspannungen. Alternativ können die Invarianten verwendet werden. Dabei korrespondiert die erste Invariante des Spannungstensors zur Spannungstriaxialität und die zweite Invariante des Spannungsdeviators zur von-Mises-Vergleichsspannung, die die Intensität der Spannung charakterisiert. Zusätzlich wird die dritte Invariante des Spannungsdeviators benötigt, welche in Korrelation mit dem Lodeparameter steht.

Es setzten sich besonders die Spannungsintensität, die Spannungstriaxialität und der Lodeparameter zur eindeutigen Charakterisierung des Spannungszustandes durch. Dabei zeigten verschiedene experimentelle und korrespondierende numerische Untersuchungen [4, 8, 7, 133], dass nur mit der Triaxialität der Spannungszustand bei einer dreidimensionalen Belastung nicht eindeutig bestimmt werden kann. Dies hatte zur Folge, dass in diesen Schädigungs- und Versagensmodellen ebenfalls nur eine unzureichende Modellierung der Schädigung möglich war. Besonders für negative und kleine positive Triaxialitäten, deren Spannungszustand schubdominiert war, war der Einfluss des Lodeparameters auf das Schädigungs- und Versagensverhalten nicht vernachlässigbar. Diese Beobachtung machten sowohl Barsoum und Faleskog [7, 8] als auch Danas und Ponte Castaneda [52] und

Dunand und Mohr [54]. Auch die Untersuchungen von Zhang et al. [134] ergaben, dass der Lodeparameter besonders bei der Schädigung infolge der Gestaltänderung der Poren, also im Bereich kleiner Triaxialitäten, einen Einfluss hat.

Des Weiteren zeigte sich für den Lodeparameter die Ausprägung bestimmter Merkmale bei der Entwicklung der Schädigung. So nahmen z. B. anfangs kugelförmige Poren infolge einer Belastung für den jeweiligen Lodeparameter eine bestimmte Porenform an [40]. All diese Beobachtungen ließen somit den Schluss zu, dass zur eindeutigen Charakterisierung des Spannungszustandes neben der Spannungstriaxialität und der Spannungsintensität auch der Lodeparameter unbedingt notwendig ist [52, 58, 59, 60, 76]. Eine Vernachlässigung konnte zu Einbußen bei der Genauigkeit der Schädigungs- und Versagensmodelle führen.

### 1.2.3 Mikromechanische Betrachtungen in der Literatur

Bei der Betrachtung duktiler Metalle auf der Mikroebene zeigen sich Einschlüsse von Luft und Fremdpartikeln und auch Poren, die während des Herstellprozesses entstehen. Zwar kann die Anzahl und Ausprägung dieser Defekte mit bestimmten Verfahren reduziert werden, eine komplette Vermeidung dieser Mikrodefekte ist jedoch nicht möglich. Diese Defekte stellen bei duktilen Metallen eine Initialschädigung dar, die im weiteren Verlauf einer Belastung das Versagen des Materials begünstigt. Aus diesem Grund ist es wichtig, das Verhalten der Defekte auf der Mikroebene unter dem Einfluss verschiedener Belastungen im Detail zu analysieren.

Zur Untersuchung dieser Mikrodefekte eignen sich besonders mikromechanische numerische Simulationen, da hierbei das Verhalten einzelner Poren oder einer Gruppierung von Poren in einem RVE berücksichtigt werden kann. Nachdem grundlegende Betrachtungen des Schädigungsverhaltens von Mikrodefekten, wie bereits zuvor dargelegt, von Gurson [64], Kuna und Sun [80], McClintock [98], Needleman [106], Needleman und Tvergaard [109] und Tvergaard und Needleman [122] vorgenommen wurden, widmeten sich auch andere Autoren diesem Thema. Nachteilig ist bei diesen Arbeiten, dass stets nur ein eingegrenzter Belastungsbereich, wie z. B. zugdominierte Lastfälle, betrachtet wurde, so dass zusätzliche Untersuchungen einer großen Bandbreite unterschiedlicher Lastfälle unbedingt

notwendig sind. Bei der Analyse von Mikrodefekten können verschiedene Forschungsbereiche abgegrenzt werden, die auch im Rahmen dieser Arbeit näher untersucht werden. In diesem Zusammenhang wird der Einfluss

- der Porengröße,
- der Porenform,
- unterschiedlicher Porenanordnungen und
- verschiedener Randbedingungen des RVEs

auf das Schädigungsverhalten duktiler Metalle unter verschiedenen Belastungen analysiert.

Betrachtungen bezüglich des Einflusses der Porengröße veröffentlichten Becker et al. [11]. Dabei untersuchten sie das Verhalten eines Materials mit verschiedenen Anfangsporositäten im Bereich von 0,4% bis 7% im Rahmen von numerischen und experimentellen Analysen. Spitzig et al. [118] veröffentlichten ähnliche Untersuchungen zu diesem Thema. Mikroskopische Aufnahmen zeigten, dass die Anfangsporosität zwischen 0,3% und 11,1% liegen kann, wobei die Poren bis zu einer Porosität von 3,7% meist kugelförmig waren. Oberhalb dieses Wertes kam es zu Abweichungen der Porenform. Weitere Betrachtungen wurden von Gao et al. [59] und Monchiet und Bonnet [100] vorgenommen. Die Untersuchungen von Monchiet und Bonnet [100] zeigten dabei, dass im Bereich großer positiver Triaxialitäten die Wachstumsrate großer Poren wesentlich größer als die kleiner Poren war. Somit gingen sie davon aus, dass eine höhere Anfangsporosität zu einem schnelleren Versagen des Materials führte. Im Rahmen der Untersuchungen von Brünig et al. [39] zeigte sich jedoch, dass unterschiedliche Anfangsporositäten nahezu keinen Einfluss auf die Ergebnisse des makromechanischen Schädigungsmodells nehmen.

Im Bereich der Analyse des Einflusses unterschiedlicher Porenformen sind besonders die Arbeiten von Gologanu et al. [62, 63] zu nennen. Sie untersuchten das Verhalten ellipsenförmiger Poren mit einer gestreckten und zwei gestreckten Hauptachsen. Zusätzlich wurden zufällige und parallele Anordnungen von mehreren ellipsenförmigen Poren analysiert. Die Ergebnisse dieser Betrachtungen dienten der Erweiterung des Modells von Gurson [64]. Auch Monchiet et

al. [101] untersuchten das Verhalten nicht-kugelförmiger Poren in einem starr-ideal plastischen Material zur Formulierung einer Fließbedingung in Anlehnung an [62, 63, 64]. Der Schwachpunkt dieser Modelle [62, 63, 101] war erneut die fehlende Abgrenzung zwischen Plastizierung und Schädigung, obwohl es sich hierbei um zwei getrennt voneinander zu betrachtende Mechanismen handelt [25, 26, 27].

Neben der Porengröße und der Porenform wurden in der Vergangenheit oft auch unterschiedliche Porenanordnungen und deren Auswirkung auf die Modelle zur Beschreibung des Schädigungs- und Versagensverhaltens analysiert. Melander [99] veröffentlichte Betrachtungen von zufällig angeordneten Porenanordnungen. Dabei zeigte sich, dass die Verzerrungen, die infolge einer Belastung auftraten, in den Probekörpern mit zufällig angeordneten Poren größer waren als bei gleichmäßiger Anordnung der Poren. Auch Dubensky und Koss [53] und Magnusen et al. [96] stellten ihre experimentellen Ergebnisse zu der Untersuchung von zufällig und gleichmäßig verteilten Poren vor. Die Autoren variierten dabei sowohl den Abstand der Poren zueinander als auch die Größe der Poren. Dabei zeigte sich beim duktilen Versagen der Probekörper eine Abhängigkeit von diesen Parametern. Becker und Smelser [12] führten numerische Analysen zum Einfluss der Porenanordnungen auf das Schädigungsverhalten duktiler Metalle durch. Ihre Betrachtungen führten zu dem Schluss, dass die gegenseitige Beeinflussung der Poren in einem Porencluster nicht vollständig mit einem Ein-Poren-Modell abgebildet werden konnte. Die lokalen Verzerrungen in einem Mehr-Poren-Modell waren größer als die in einem Ein-Poren-Modell. Weitere Betrachtungen bezüglich des Einflusses der Anordnung verschiedener Poren auf die Entwicklung duktiler Schädigung wurden von Needleman und Kushner [107], Leblond und Perrin [82] und Gao et al. [59] durchgeführt.

Auch die Wahl der Randbedingungen des numerischen Modells kann einen Einfluss auf das zu untersuchende Schädigungsverhalten haben. Neben Symmetriestandbedingungen besteht ebenfalls die Möglichkeit, periodische Randbedingungen zu verwenden [125, 126]. Tvergaard [125, 126] und Tvergaard und Nielsen [128] führten mit ihren numerischen Simulationen zu der Fragestellung, ob Simulationen mit periodischen Randbedingungen zur Nachbildung des Schädigungsverhaltens duktiler Metalle besser geeignet sind. In ihren Studien wurde besonders das Verhalten von Poren-Modellen bei Verwendung einer schubdominierten Be-

lastung analysiert. Dabei zeigte sich, dass sich ein Scherband ausbildete, welches letztendlich zum Versagen des Modells führte. Zusätzlich war vor dem Versagen des Modells zu beobachten, dass sich Poren unter einer schubdominierten Belastung in zwei Phasen verformten. Zuerst fand eine Drehung und im Anschluss eine Streckung der Pore statt. Die zweidimensionalen Analysen [125, 126, 128] mit periodischen Randbedingungen wurden im Laufe der Zeit für dreidimensionale Anwendungen erweitert [111, 127]. Auch Rahman et al. [113] und Tekoglu [121] führten Untersuchungen unter der Verwendung periodischer Randbedingungen in diesem Bereich durch.

Aufgrund der Vielzahl der Variationsmöglichkeiten bei der Analyse von mikromechanischen Porenbetrachtungen werden im Rahmen dieser Arbeit verschiedene Aspekte, wie z. B. die Porengröße, die Porenform und unterschiedliche Porenanordnungen, untersucht. Dabei wird besonders der Einfluss der mikromechanischen Eigenschaften eines Modells auf die Ergebnisse des Schädigungs- und Versagensmodells auf der Makroebene betrachtet. Damit die Gültigkeit des Modells nicht durch einen eingeschränkten Spannungszustand limitiert wird, wird eine große Bandbreite unterschiedlicher Lastfälle und deren Auswirkungen auf das Verhalten der Poren analysiert. Zuvor von anderen Autoren veröffentlichte Ergebnisse sind in diesem Zusammenhang nur sehr eingeschränkt nutzbar, da in dieser Arbeit zur Deutung der Schädigung ein kinematischer Ansatz verwendet wird. Des Weiteren ermöglichen die mikromechanischen Simulationen die Einarbeitung der Erkenntnisse aus den Analysen auf der Mikroebene in das makroskopische Schädigungs- und Versagensmodell. Zusätzlich soll die Fragestellung geklärt werden, ob mit Hilfe von Ein-Poren-Modellen das Schädigungsverhalten duktiler Metalle in ausreichender Weise nachgebildet werden kann oder ob zusätzliche detailgetreue Nachbildungen von geometrischen Unregelmäßigkeiten auf der Mikroebene in Finite-Element-Modellen unumgänglich sind.

### 1.3 Wissenschaftliche Ziele dieser Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird ein phänomenologisches Kontinuumsschädigungs- und Versagensmodell vorgestellt, dessen Parameter in Abhängigkeit des Spannungszustandes formuliert werden. Zur Identifizierung dieser Schädigungspara-

meter werden mikromechanische numerische Untersuchungen durchgeführt. Dabei ist es das Ziel, elastisch-plastisch-schädigendes Materialverhalten mit einer den Anforderungen angemessenen Komplexität zu modellieren. Zusätzlich wird eine detaillierte Untersuchung verschiedener geometrischer Variationen der Poren auf der Mikroebene vorgenommen. Es wird das Verhalten unterschiedlicher Porengrößen, Porenformen und Porenanordnungen bei der Belastung mit einer großen Bandbreite verschiedener Spannungszustände analysiert. Ebenfalls soll der Einfluss der Randbedingungen des RVEs auf die Ergebnisse des Schädigungs- und Versagensmodells untersucht werden. Die aus diesen Betrachtungen resultierende detaillierte Beschreibung des Verhaltens duktiler Metalle vom Beginn der Schädigung bis zum endgültigen Versagen des Materials ermöglichen genauere Vorhersagen bezüglich der Belastbarkeit und der Lebensdauer von Bauteilen, die in den verschiedenen Anwendungsbereichen der Industrie und des Alltags zum Einsatz kommen.

Die Arbeit ist in verschiedene Abschnitte gegliedert. Zunächst werden die Grundlagen des Kontinuumsschädigungsmodells in Kap. 2 vorgestellt. Das folgende Kap. 3 liefert zu Beginn einen Einstieg in die Theorie der Finite-Element-Technik und gibt dann einen Überblick über die verschiedenen mikromechanischen Modelle, die unterschiedliche geometrische Eigenschaften besitzen. Zusätzlich wird das für die numerischen Simulationen verwendete Materialgesetz und die Ermittlung der zugehörigen Materialparameter erläutert. Dann folgt die Darstellung und Diskussion der Ergebnisse der mikromechanischen numerischen Simulationen in Kap. 4 und 5. Dabei werden in Kap. 4 die Ergebnisse der Simulationen bis zum Beginn des Zusammenwachsens der Mikroporen (anfängliche Schädigung) und in Kap. 5 die Resultate ab dem Beginn des Zusammenwachsens (fortgeschrittene Schädigung) dargestellt. Die Analyse der Parameter des Kontinuumsschädigungsmodells ermöglichen die Bestimmung der vom Spannungszustand abhängigen Schädigungsparameter der Schädigungsbedingung, des Schädigungsgesetzes, der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte und des Risskriteriums. Dadurch wird der Zusammenhang zwischen den mikromechanischen Untersuchungen und dem makromechanischen Modell hergestellt. Anschließend folgt die Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells. Am Ende der Arbeit wird in Kap. 6 ein Überblick über die Ergebnisse gegeben und eine ab-

schließende Analyse der Möglichkeiten und Grenzen des Kontinuumsschädigungs- und Versagensmodells vorgenommen. Das Kap. 7 zeigt in einem Ausblick die noch offenen Fragestellungen und Ansätze für weitere Untersuchungen auf.

## 2 Theoretische Grundlagen

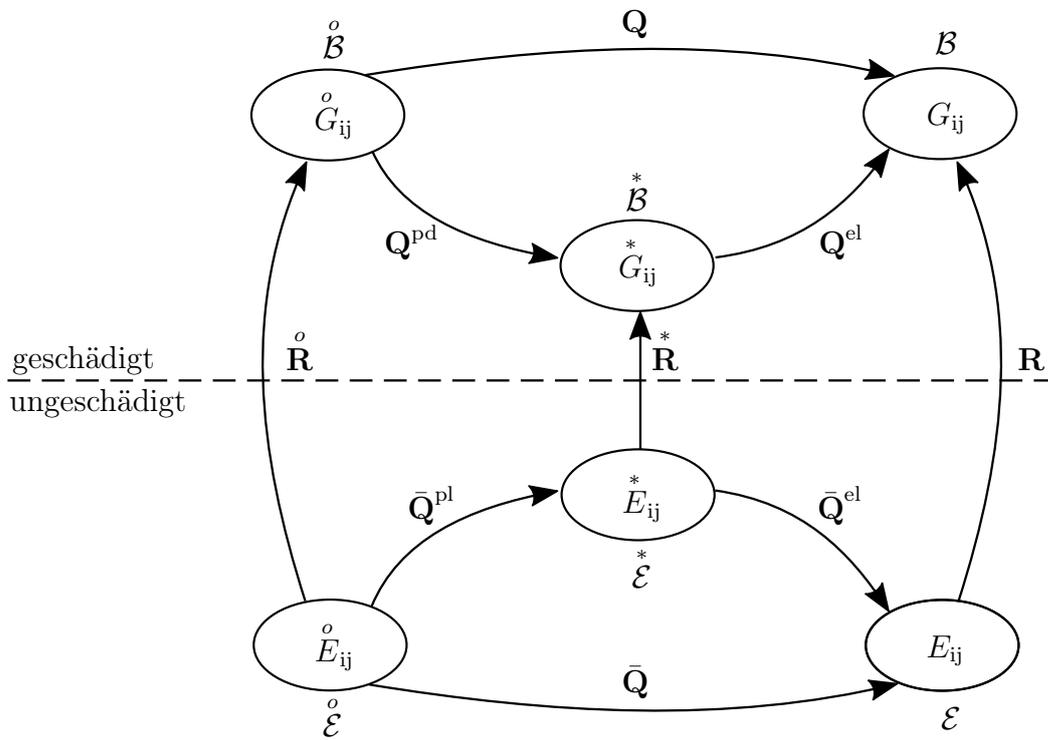
### 2.1 Kinematik

Die grundlegenden Gedanken der Theorie dieser Arbeit werden im Folgenden anhand der in Abb. 2.1 dargestellten Kinematik erläutert. Zur Umsetzung der Theorie wird auf die Grundlagen der Kontinuumsmechanik [1, 10, 97] und der Vektor- und Tensorrechnung [17] zurück gegriffen. Das phänomenologische Kontinuumsmodell von Brünig [24, 25, 30] greift dabei grundlegende Gedanken von Lehmann [84, 85, 86] auf. Diese werden sukzessive für das Schädigungsmodell erweitert [31, 32, 35]. Die Einführung fiktiv ungeschädigter und geschädigter Konfigurationen basiert auf verschiedenen Ideen, die bereits zuvor in der Literatur von Murakami [102, 103], Betten [15, 16] und Voyiadjis und Park [129] diskutiert wurden. Murakami [102, 103] zum Beispiel führte in seinem Modell für anisotrope Schädigung eine geschädigte und eine fiktiv ungeschädigte Konfiguration ein, die unter Verwendung entsprechender Deformationsgradienten transformiert werden können.

Bei der Herstellung von Metallen kommt es aufgrund des Herstellprozesses zur Bildung von Mikrodefekten. Diese können als Anfangsschädigung des Materials gewertet werden und werden in der Kinematik mit der real existierenden Konfiguration  $\overset{o}{\mathcal{B}}$  (Abb. 2.1) mit den Metrikkoeffizienten

$$\overset{o}{G}_{ij} = \overset{o}{\mathbf{g}}_i \cdot \overset{o}{\mathbf{g}}_j \quad (2.1)$$

und den Basen der ungeschädigten Ausgangskonfiguration  $\overset{o}{\mathbf{g}}_i$  abgebildet. Während einer Belastung weiten sich diese Defekte zu Mikroporen auf oder resultieren in Mikroscherrissen. Elastische, plastische und schädigende Verzerrungen entstehen. Diese werden in der ebenfalls real existierenden Momentankonfiguration  $\mathcal{B}$



**Abb. 2.1:** Kinematik der geschädigten und ungeschädigten Konfigurationen

(Abb. 2.1) mit den Metrikkoeffizienten

$$G_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (2.2)$$

und den Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  dargestellt. Zusätzlich von Bedeutung sind die zugehörigen inversen Metrikkoeffizienten

$$\overset{\circ}{G}^{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{g}}^i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}^j \quad (2.3)$$

und

$$G^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j, \quad (2.4)$$

da diese zur Formulierung weiterer Grundgleichungen verwendet werden. Neben der Ausgangs- und der Momentankonfiguration wird die Zwischenkonfiguration

$\overset{*}{\mathcal{B}}$  (Abb. 2.1) mit den Metrikkoeffizienten

$$\overset{*}{G}_{ij} = \overset{*}{\mathbf{g}}_i \cdot \overset{*}{\mathbf{g}}_j \quad (2.5)$$

definiert. Diese Zwischenkonfiguration wird aufgrund der Tatsache eingeführt, dass nur elastische Verzerrungen reversibel und inelastische Verzerrungen irreversibel sind. Alle eingeführten Konfigurationen in Abb. 2.1 dienen der Aufspaltung in elastische, plastische und schädigende Verzerrungen und deren detaillierter Betrachtung [23, 24, 25].

Zum allgemeinen Verständnis werden an dieser Stelle weitere grundlegende Gleichungen eingeführt. Der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \overset{o}{\mathbf{g}}^j \quad (2.6)$$

beschreibt die Starrkörperrotation und die Streckung in einem materiellen Punkt des betrachteten Körpers von der Ausgangskonfiguration zur Momentankonfiguration. Weiterhin werden der gemischtvariante, symmetrische Metriktransformationstensor

$$\mathbf{Q} = Q^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{o}{G}^{ik} G_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{B}\mathbf{G} \quad (2.7)$$

und der materiell objektive Henckysche Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q} \quad (2.8)$$

eingeführt [22, 28]. Dabei ist der Metriktransformationstensor das Produkt aus dem linken Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{B}$  und dem Metriktensor  $\mathbf{G} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$ . Diese Tensoren beziehen sich alle auf die Momentankonfiguration  $\mathcal{B}$ .

Die fiktiven ungeschädigten Konfigurationen werden zur Beschreibung des elastisch-plastischen Materialverhaltens eingeführt. Die Größen dieser Konfigurationen sind im Folgenden durch “ $\overset{\circ}{}$ ” gekennzeichnet und ermöglichen eine getrennte Betrachtung der einzelnen Verzerrungsmechanismen im Matrixmaterial. Zur Darstellung

der effektiven Ausgangskonfiguration  $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$  (Abb. 2.1) werden die Metrikkoeffizienten

$$\overset{\circ}{E}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_j \quad (2.9)$$

mit den Basen der effektiven Ausgangskonfiguration  $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$  verwendet. Bei dieser Konfiguration handelt es sich um eine unverformte und ungeschädigte Konfiguration. Die effektive Momentankonfiguration  $\mathcal{E}$  (Abb. 2.1), welche einer elastisch-plastisch verformten Konfiguration entspricht, wird durch die Metrikkoeffizienten

$$E_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.10)$$

mit den Basisvektoren der effektiven Momentankonfiguration  $\mathbf{e}_i$  dargestellt. Zusätzlich wird eine Zwischenkonfiguration  $\overset{*}{\mathcal{E}}$  (Abb. 2.1) mit den Metrikkoeffizienten

$$\overset{*}{E}_{ij} = \overset{*}{\mathbf{e}}_i \cdot \overset{*}{\mathbf{e}}_j \quad (2.11)$$

und den Basisvektoren  $\overset{*}{\mathbf{e}}_i$  eingeführt. Diese entsteht durch eine elastische Entlastung. Ein spannungsfreier Zustand entsteht, in dem alle plastischen Verformungen der effektiven Ausgangskonfiguration vorhanden sind.

### 2.1.1 Ungeschädigte Konfigurationen

Der effektive ungeschädigte Metriktransformationstensor  $\bar{\mathbf{Q}}_u$  [25] wird nach Lehmann [84, 85] in der Kinematik in elastische und plastische Anteile

$$\bar{\mathbf{Q}}_u = \bar{\mathbf{Q}}_u^{\text{pl}} \bar{\mathbf{Q}}_u^{\text{el}} \quad (2.12)$$

aufgespalten. Die Tensoren der multiplikativen Aufspaltung des ungeschädigten Metriktransformationstensors (2.12) sind auf die Momentankonfiguration  $\mathcal{E}$  bezogen, sodass

$$\bar{\mathbf{Q}}_u = \bar{Q}_{ij}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \overset{\circ}{E}^{\text{ik}} E_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j, \quad (2.13)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_u^{\text{el}} = (\bar{Q}^{\text{el}})_{,j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \overset{*}{E}^{\text{ik}} E_{\text{kj}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.14)$$

und

$$\bar{\mathbf{Q}}_u^{\text{pl}} = (\bar{Q}^{\text{pl}})_{,j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \overset{\circ}{E}^{\text{ik}} \overset{*}{E}_{\text{kj}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.15)$$

folgt. Um eine einheitliche Betrachtung der ungeschädigten und der geschädigten Konfigurationen zu ermöglichen, ist es notwendig, die Metriktransformationstensoren (2.13), (2.14), (2.15) der ungeschädigten Konfigurationen durch den Schädigungsdeformationsgradienten

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.16)$$

in die geschädigte Konfiguration zu transformieren. Aus dieser Transformation folgen die neuen Metriktransformationstensoren

$$\bar{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{Q}}_u \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{\circ}{E}^{\text{ik}} E_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.17)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{Q}}_u^{\text{el}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{*}{E}^{\text{ik}} E_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.18)$$

und

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\text{pl}} = \tilde{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{Q}}_u^{\text{pl}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{\circ}{E}^{\text{ik}} \overset{*}{E}_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.19)$$

die sich auf die Basen der geschädigten Konfiguration  $\mathbf{g}_i$  und  $\mathbf{g}^i$  beziehen. Damit ergibt sich für den Henckyschen Verzerrungstensor der ungeschädigten Konfiguration

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2} (\ln \bar{Q})_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \bar{A}_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.20)$$

und den elastischen ungeschädigten Henckyschen Verzerrungstensor

$$\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \frac{1}{2} (\ln \bar{Q}^{\text{el}})_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = (\bar{A}^{\text{el}})_{,j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.21)$$

Unter Verwendung von (2.17) ergibt sich die unsymmetrische Oldroydrate

$$\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \overset{\circ}{E}{}^{ik} \dot{E}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.22)$$

des ungeschädigten Metriktransformationstensors  $\bar{\mathbf{Q}}$ . Des Weiteren wird die symmetrische Verzerrungsrate

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}} \quad (2.23)$$

definiert, welche sich mit Hilfe von (2.12) in elastische

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{\text{el}} \quad (2.24)$$

und plastische Anteile

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}-1} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{pl}-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{\text{pl}} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \quad (2.25)$$

additiv aufspalten lässt [22, 29]. Für die symmetrische Verzerrungsrate gilt somit:

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}} = \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} + \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}}. \quad (2.26)$$

### 2.1.2 Geschädigte Konfigurationen

Der Metriktransformationstensor  $\mathbf{Q}$  kann in elastische und inelastische Anteile aufgespalten (Abb. 2.1) werden:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\text{pd}} \mathbf{Q}^{\text{el}}, \quad (2.27)$$

mit

$$\mathbf{Q}^{\text{el}} = (Q^{\text{el}})_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = G^{*\text{ik}} G_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.28)$$

und

$$\mathbf{Q}^{\text{pd}} = (Q^{\text{pd}})_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{G}^{*\text{ik}} G_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.29)$$

Diese Metriktransformationstensoren sind in der verformten und geschädigten Momentankonfiguration  $\mathcal{B}$  mit den zugehörigen Metrikkoeffizienten formuliert. Somit lassen sich der logarithmische Henckysche Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q} = \frac{1}{2} (\ln Q)_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = A_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.30)$$

und der elastische Henckysche Verzerrungstensor der geschädigten Konfiguration

$$\mathbf{A}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q}^{\text{el}} = \frac{1}{2} (\ln Q^{\text{el}})_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = (A^{\text{el}})_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.31)$$

direkt mit den jeweiligen Metriktransformationstensoren darstellen. Weiterhin gilt für die unsymmetrische Oldroydrate von  $\mathbf{Q}$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \overset{\circ}{G}^{*\text{ik}} \dot{G}_{\text{kj}} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.32)$$

woraus sich die symmetrische Verzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{Q}} \quad (2.33)$$

ergibt. Diese Verzerrungsrate kann mit (2.27) in elastische

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \dot{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \quad (2.34)$$

und inelastische Anteile

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{pd}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \mathbf{Q}^{\text{pd}-1} \dot{\mathbf{Q}}^{\text{pd}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (2.35)$$

additiv aufgespalten werden.

### 2.1.3 Gesamte Deformation

Zur Beschreibung der gesamten Deformation des Materials ist es notwendig, auch die Schädigung im Rahmen der Kinematik eindeutig zu definieren. Die Schädigung wird mit Hilfe der Schädigungstensoren  $\overset{\circ}{\mathbf{R}}$ ,  $\overset{*}{\mathbf{R}}$  und  $\mathbf{R}$  dargestellt. Diese dienen gleichzeitig auch als Metriktransformationstensoren zwischen den geschädigten und ungeschädigten Konfigurationen. Der Tensor

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}} = \overset{\circ}{R}{}^i{}_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{\circ}{E}{}^{ik} \overset{\circ}{G}{}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.36)$$

beschreibt die anfängliche Schädigung des Materials, während die Schädigungstensoren

$$\overset{*}{\mathbf{R}} = \overset{*}{R}{}^i{}_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \overset{*}{E}{}^{ik} \overset{*}{G}{}_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.37)$$

und

$$\mathbf{R} = R^i{}_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = E^{ik} G_{kj} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.38)$$

interne Zustandsvariablen darstellen. Der Tensor  $\overset{*}{\mathbf{R}}$  stellt den Zusammenhang zwischen der ungeschädigten und der geschädigten Zwischenkonfiguration  $\overset{*}{\mathcal{E}}$  bzw.  $\overset{*}{\mathcal{B}}$  dar. Damit enthält dieser Schädigungstensor sowohl die anfängliche als auch die deformationsinduzierte Schädigung unabhängig von den elastischen Deformationen, da diese zuvor unter Verwendung der Metriktransformationstensoren  $\bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}}$  bzw.  $\mathbf{Q}^{\text{el}}$  herausgenommen wurden. Der Schädigungstensor  $\mathbf{R}$  bildet hingegen die gesamte Schädigung ab. Dies führt dazu, dass (2.38) bei moderaten und großen

elastischen Deformationen nicht als Zustandsvariable der Schädigung geeignet ist [24]. Aus diesem Grund wird der zugehörige Schädigungsverzerrungstensor

$$\mathbf{A}^{\text{da}} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{R}^* \quad (2.39)$$

unter Verwendung des Schädigungstensors der spannungsfreien Zwischenkonfigurationen  $\mathbf{R}^*$  formuliert. Der Zusammenhang zwischen den Schädigungstensenoren  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{R}^*$  (Abb. 2.1) ist durch

$$\mathbf{R}^* = \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \quad (2.40)$$

gegeben. Somit stellt (2.39) eine Zustandsvariable dar, die Verzerrungen infolge der Anfangsschädigungen und der irreversiblen Schädigungen enthält. Weiterhin schließt der Metriktransformationstensor (Abb. 2.1)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{pl}*} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (2.41)$$

sowohl die multiplikative Aufspaltung des anfänglichen (2.36) und des deformationsinduzierten Schädigungstensors (2.37) als auch die multiplikative Aufspaltung des elastischen (2.28) und plastischen Metriktransformationstensors (2.19) ein. Die additive Aufspaltung der Verzerrungsrate der gesamten Deformation ergibt sich mit (2.25), (2.34) und (2.41) zu

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} \mathbf{R} + \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \mathbf{Q}^{\text{el}} \quad (2.42)$$

mit der Definition der schädigenden Verzerrungsrate

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{*-1} \dot{\mathbf{R}}^* \quad (2.43)$$

Nach Murakami [102, 103] besagt die mechanische Äquivalenz der geschädigten und ungeschädigten Momentankonfiguration, dass elastische Makroverzerrungen nur durch elastische Verzerrungen des Matrixmaterials entstehen. Somit gilt für

die Metriktransformationstensoren

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \mathbf{Q}^{\text{el}}, \quad (2.44)$$

womit sich für die elastischen Verzerrungstensoren

$$\mathbf{A}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{Q}^{\text{el}} = \frac{1}{2} \ln \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} \quad (2.45)$$

und die Verzerrungsraten

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} \quad (2.46)$$

ergibt.

## 2.2 Thermodynamische Betrachtungen

### 2.2.1 Definition der Spannungen

Der Spannungszustand der geschädigten Konfiguration  $\mathcal{B}$  kann mit dem Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\mathbf{T} = T_{;j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.47)$$

abgebildet werden. Dieser charakterisiert die Spannungen im geschädigten RVE. Korrespondierend hierzu wird der symmetrische effektive Spannungstensor

$$\mathbf{S} = S_{;j}^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.48)$$

zur Beschreibung der Spannungen im Matrixmaterial in der ungeschädigten Konfiguration  $\mathcal{E}$  formuliert. Um auch in diesem Fall eine einheitliche Betrachtung der Spannungen zu ermöglichen, wird der effektive Spannungstensor mit Hilfe des

Schädigungsdeformationsgradienten (2.16) auf die Basen der geschädigten Konfiguration transformiert:

$$\bar{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{F}}^{-1} = S_{;j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (2.49)$$

Es sei angemerkt, dass im Rahmen dieser Arbeit erst einmal kein Zusammenhang zwischen diesen Spannungen hergestellt wird, wie es z. B. bei Lemaitre [88, 89, 90] mit dem Prinzip der effektiven Spannungen erfolgte.

### 2.2.2 Ungeschädigte Konfigurationen

In den ungeschädigten Konfigurationen wird ein elastisch-plastisches Materialverhalten betrachtet. Dabei wird zur Formulierung der konstitutiven Gleichungen auf die Grundgleichungen der Thermodynamik zurück gegriffen. Die spezifische Formänderungsenergie der ungeschädigten Konfiguration

$$\rho_0 \dot{w} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}} \quad (2.50)$$

kann unter Verwendung von (2.26) in elastische und plastische Anteile

$$\rho_0 \dot{w} = \rho_0 \dot{w}^{\text{el}} + \rho_0 \dot{w}^{\text{pl}} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{el}} + \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{H}}}^{\text{pl}} \quad (2.51)$$

aufgespalten werden. Zusätzlich wird die freie Helmholtzsche Energie

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}^{\text{el}}(\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}) + \bar{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \quad (2.52)$$

der fiktiven ungeschädigten Konfiguration eingeführt [25]. Die additive Aufspaltung der freien Energie in elastische und plastische Anteile wird vorgenommen, da das elastische Verhalten des Matrixmaterials nicht durch das plastische Fließen beeinflusst wird [3] und somit für die unterschiedlichen Mechanismen getrennte Stoffgesetze formuliert werden können. Der elastische Anteil ist in Abhängigkeit des Henckyschen Verzerrungstensors  $\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}$  (2.21) und der plastische Anteil in Abhängigkeit der internen Zustandsvariablen  $\gamma$  formuliert, die die plastische

Vergleichsdehnung repräsentiert. Unter Verwendung von (2.52) und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik (Clausius-Duhem-Ungleichung)

$$\dot{w} - \dot{\phi} \geq 0 \quad (2.53)$$

folgt

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} - \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \geq 0. \quad (2.54)$$

Die reversiblen Anteile

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} - \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} = 0 \quad (2.55)$$

können mit (2.24) als

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}-1} \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{\text{el}} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{Q}}}^{\text{el}} \quad (2.56)$$

formuliert werden. Somit ergibt sich der effektive Spannungstensor zu

$$\bar{\mathbf{T}} = \rho_0 \left( \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}}} \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} + \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{Q}}^{\text{el}}} \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} \right). \quad (2.57)$$

Unter der Annahme, dass es sich bei dem Material der ungeschädigten Konfiguration um ein Material mit isotropen elastischen Materialeigenschaften handelt [23, 87], und unter Verwendung von (2.21) resultiert

$$\bar{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}}. \quad (2.58)$$

Nach Abzug der elastischen Anteile von (2.54) verbleiben lediglich die irreversiblen Anteile in Form einer Ungleichung, der effektiven Dissipationsfunktion

$$\bar{D} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \geq 0. \quad (2.59)$$

Diese entspricht einer positiven plastischen Dissipation. Somit wird das Fließgesetz für die effektive plastische Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}}$  (2.25) formuliert und muss die Restriktion (2.59) erfüllen.

### 2.2.3 Geschädigte Konfigurationen

In den geschädigten Konfigurationen tritt neben elastisch-plastischen Deformationen zusätzlich Schädigung auf. Die auftretenden Mechanismen können ebenfalls mit Hilfe von thermodynamischen Grundgleichungen beschrieben werden. Dabei findet eine eindeutige Trennung zwischen elastischen, plastischen und schädigenden Deformationen statt. Dies ist zurückzuführen auf experimentelle Beobachtungen. Während einer Belastung treten in duktilen Metallen verschiedene Gefügeänderungen auf: plastisches Fließen und die Bildung von Mikroporen und Mikroscherrissen. Plastisches Fließen tritt als Folge von Versetzungsprozessen in Kristallgittern entlang bestimmter Gleitebenen auf. Hervorgerufen wird dieser Prozess durch lokale Schubspannungen auf der Mikroskala [3]. Während das elastische Verhalten des Materials hierdurch unbeeinflusst bleibt, kommt es zu bleibenden plastischen Verzerrungen. Mikroporen und Mikroscherrisse hingegen trennen die Verknüpfung zwischen den Korngrenzen des Materials. Dies beeinflusst das Materialverhalten wesentlich. Im Gegensatz zu plastischen Deformationen beeinflussen die schädigenden Deformationen das elastische Verhalten des Materials [90]. Aus diesen Beobachtungen folgt, dass die elastischen Größen abhängig von der Schädigung sind, jedoch nicht durch plastische Deformationen beeinflusst werden. Zusätzlich wird angenommen, dass die Energien, die während des plastischen Fließens und des Schädigungsprozesses auftreten, unabhängig voneinander betrachtet [90, 93] werden können. Daraus folgt mit (2.42) die additive Aufspaltung der spezifischen Formänderungsenergie

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{w} &= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}} \\ \rho_0 \dot{w}^{\text{el}} + \rho_0 \dot{w}^{\text{pl}} + \rho_0 \dot{w}^{\text{da}} &= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} \mathbf{R} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \dot{\mathbf{Q}}^{\text{el}} \end{aligned} \quad (2.60)$$

in elastische, plastische und schädigende Anteile. Ebenso setzt sich die freie Helm-

holtzsche Energie aus drei Komponenten zusammen

$$\phi = \phi^{\text{el}}(\mathbf{A}^{\text{el}}, \mathbf{A}^{\text{da}}) + \phi^{\text{pl}}(\gamma) + \phi^{\text{da}}(\mu). \quad (2.61)$$

Der elastische Anteil  $\phi^{\text{el}}$  ist abhängig vom elastischen logarithmischen Hencky-schen Verzerrungstensor  $\mathbf{A}^{\text{el}}$  (2.31) und dem logarithmischen Schädigungsverzerrungstensor  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  (2.39) [25, 66, 94]. Der plastische Anteil bleibt weiterhin von der internen plastischen Zustandsvariablen  $\gamma$  abhängig. Die durch die Schädigung hervorgerufene Energie  $\phi^{\text{da}}$  wird in Abhängigkeit der schädigenden Vergleichsdehnung  $\mu$  formuliert, welche ebenfalls eine interne Zustandsvariable darstellt. Unter Verwendung von (2.60) und (2.61) ergibt sich der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{w} - \dot{\phi} \geq 0 \quad (2.62)$$

zu

$$\begin{aligned} & \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + (\mathbf{RTR}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} + (\mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{TQ}^{\text{el}-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \\ & - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) - \dot{\phi}^{\text{da}}(\mu) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Werden nun die nicht dissipativen Anteile von (2.63)

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}} = 0 \quad (2.64)$$

und die elastische Verzerrungsrate (2.34) betrachtet, folgt

$$\mathbf{T} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{\text{el}-1} \dot{\mathbf{Q}}^{\text{el}} = \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \frac{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{Q}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^{\text{el}}. \quad (2.65)$$

Durch weitere Umformungen resultiert daraus die Gleichung für den Spannungstensor

$$\mathbf{T} = \rho_0 \left( \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \frac{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{Q}^{\text{el}}} \mathbf{Q}^{\text{el}} + \mathbf{Q}^{\text{el}} \frac{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{Q}^{\text{el}}} \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \right). \quad (2.66)$$

Eine Vereinfachung der Gl. (2.66) aufgrund von Isotropie, wie in der ungeschädigten Konfiguration (2.58), ist an dieser Stelle nicht möglich, da die elastischen Anteile der freien Helmholtzschen Energie  $\phi^{\text{el}}$  nicht nur in Abhängigkeit des elastischen Verzerrungstensors  $\mathbf{A}^{\text{el}}$  sondern auch in Abhängigkeit des Schädigungsverzerrungstensors  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  formuliert sind. Somit werden, wie bereits zuvor erläutert, zusätzlich anisotrope schädigende Verzerrungen berücksichtigt, die das elastische Verhalten des geschädigten Materials beeinflussen.

Durch die Annahme, dass plastische Verzerrungen und die Schädigung getrennt voneinander betrachtet werden können, folgt für die weiteren Aufspaltungen eine strengere Formulierung in Form von

$$(\mathbf{RTR}^{-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} - \rho_0 \dot{\phi}^{\text{pl}}(\gamma) \geq 0 \quad (2.67)$$

und

$$(\mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{TQ}^{\text{el}-1}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} - \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{da}} - \dot{\phi}^{\text{da}}(\mu) \geq 0. \quad (2.68)$$

Eine weitere Betrachtung der plastischen Anteile der freien Helmholtzschen Energie  $\dot{\phi}^{\text{pl}}$  erfolgt nicht, da die effektive plastische Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}}$  mit Hilfe der ungeschädigten plastischen Anteile der freien Helmholtzschen Energie  $\dot{\phi}^{\text{pl}}$  ermittelt werden kann (2.2.2). Auch die einzuhaltenden Restriktionen wurden mit Gl. (2.59) bereits aufgestellt. Zusätzlich kann auf eine weitere Betrachtung verzichtet werden, da die Schädigung das plastische Verhalten des Matrixmaterials nicht beeinflusst [25, 27]. Mit Gl. (2.68) ergeben sich Restriktionen für die elastischen und schädigenden Anteile der freien Helmholtzschen Energie  $\phi^{\text{el}}$  bzw.  $\phi^{\text{da}}$  und ebenso für die Formulierung verschiedener konstitutiver Gleichungen. Zusätzlich kann mit (2.68) das Schädigungsgesetz bezüglich der schädigenden Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}$  aufgestellt werden. Der arbeitskonjugierte Spannungstensor ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}^{\text{el}} \mathbf{TQ}^{\text{el}-1}. \quad (2.69)$$

## 2.3 Materialgleichungen

Im Rahmen dieses Kapitels werden die grundlegenden Gleichungen für das Materialverhalten von Metallen in den geschädigten und ungeschädigten Konfigurationen dargestellt. Dabei werden die thermodynamischen Betrachtungen aus Kapitel 2.2 zur Herleitung verwendet.

### 2.3.1 Ungeschädigte Konfigurationen

In den ungeschädigten Konfigurationen kann ein isotropes elastisch-plastisches Materialverhalten beschrieben werden. Zunächst wird das elastische Verhalten des Matrixmaterials betrachtet. Dabei wird auf die elastischen Anteile der Energiebilanz aus Kapitel 2.2.2 zurückgegriffen. Die Formulierung des elastischen Anteils der Funktion der freien Energie wird wie folgt

$$\rho_0 \bar{\phi}^{\text{el}}(\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}) = G \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} \cdot \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \frac{1}{2} \left( K - \frac{2}{3} G \right) (\text{tr} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}})^2 \quad (2.70)$$

gewählt, wobei  $G$  den Schubmodul und  $K$  den Kompressionsmodul repräsentieren [23, 24, 25]. Wird diese Gleichung unter Verwendung von (2.58) nach dem elastischen Henckyschen Verzerrungstensor  $\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}$  abgeleitet, folgt daraus das hyperelastische Stoffgesetz

$$\bar{\mathbf{T}} = \rho_0 \frac{\partial \bar{\phi}^{\text{el}}}{\partial \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} = 2G \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} + \left( K - \frac{2}{3} G \right) \text{tr} \bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} \mathbf{1}. \quad (2.71)$$

Die Bildung des totalen Differentials

$$d\bar{\mathbf{T}} = \frac{d\bar{\mathbf{T}}}{d\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}}} d\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} = \bar{\mathbf{C}}^{\text{el}} d\bar{\mathbf{A}}^{\text{el}} \quad (2.72)$$

liefert die Gleichung für den effektiven Elastizitätstensor

$$\bar{\mathbf{C}}^{\text{el}} = 2G \mathbf{1} + \left( K - \frac{2}{3} G \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \quad (2.73)$$

Für den Einheitstensor vierter Stufe gilt

$$\mathbb{1} = \delta_{:k}^i \delta_{:j}^l \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k. \quad (2.74)$$

Der Tensor (2.73) wird mit den zwei unabhängigen elastischen Materialkonstanten  $G$  und  $K$  formuliert. Im weiteren Verlauf einer Belastung tritt nach Überschreiten einer Fließgrenze plastisches Fließen auf. Dabei bleibt das elastische Verhalten des Matrixmaterials unbeeinflusst. Jedem Spannungszustand kann eine Vergleichsspannung eindeutig zugeordnet werden. Überschreitet diese Vergleichsspannung die Fließspannung  $c(\gamma)$ , tritt plastisches Fließen auf. Die Fließbedingung

$$f^{\text{pl}}(\bar{\mathbf{T}}, c) = 0 \quad (2.75)$$

beschreibt dieses Verhalten. Verschiedene Experimente haben gezeigt, dass das plastische Fließen bei Metallen auch von der hydrostatischen Spannung abhängt. Dabei ist ein linearer Zusammenhang zwischen der Fließspannung und der hydrostatischen Spannung zu beobachten [119, 120]. Die Einwirkungen der hydrostatischen Spannung sind zwar gering, jedoch nicht komplett zu vernachlässigen, sodass für die Fließbedingung

$$f^{\text{pl}}(\bar{I}_1, \bar{J}_2, c) = a\bar{I}_1 + \sqrt{\bar{J}_2} - c = 0 \quad (2.76)$$

gilt. Zur Formulierung der Fließbedingung werden sowohl die erste Invariante des effektiven Spannungstensors  $\bar{\mathbf{T}}$

$$\bar{I}_1 = \text{tr}\bar{\mathbf{T}} \quad (2.77)$$

als auch die zweite Invariante des effektiven Spannungsdeviators  $\text{dev}\bar{\mathbf{T}}$

$$\bar{J}_2 = \frac{1}{2} \text{dev}\bar{\mathbf{T}} \cdot \text{dev}\bar{\mathbf{T}}. \quad (2.78)$$

verwendet. Die Umformung von (2.76) liefert die Fließbedingung

$$f^{\text{pl}}(\bar{I}_1, \bar{J}_2, c) = \sqrt{\bar{J}_2} - c \left(1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1\right) = 0. \quad (2.79)$$

Der Materialparameter  $a/c$  setzt sich aus dem hydrostatischen Spannungskoeffizienten  $a$  und der aktuellen Fließspannung  $c$  zusammen. Dieser Parameter wird mit Hilfe von Experimenten ermittelt [117], aus denen hervor geht, dass  $a/c$  ein konstanter Wert ist. Aus der Ableitung der Fließbedingung ergibt sich somit für  $a/c = \text{const.}$  die plastische Konsistenzbedingung

$$\dot{f}^{\text{pl}} = \left( \frac{1}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \text{dev} \bar{\mathbf{T}} + a \mathbf{1} \right) \cdot \dot{\bar{\mathbf{T}}} - \left( 1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1 \right) \dot{c} = 0, \quad (2.80)$$

die die Einhaltung der Fließbedingung während des plastischen Fließens garantiert. Die plastische Potentialfunktion

$$g^{\text{pl}}(\bar{\mathbf{T}}) = \sqrt{\bar{J}_2} \quad (2.81)$$

wird ebenfalls in Abhängigkeit des effektiven Spannungstensors  $\bar{\mathbf{T}}$  formuliert. Die irreversiblen volumetrischen Verzerrungen, die während einer Belastung entstehen, setzen sich zusammen aus elastischen und plastischen Anteilen. Experimente zeigen, dass dabei die plastischen volumetrischen Verzerrungen vergleichsweise klein sind und somit bei den weiteren Betrachtungen vernachlässigt werden können [119, 120]. Es wird daher von einer plastischen Volumenkonstanz ausgegangen. Mit der Ableitung der plastischen Potentialfunktion (2.81) folgt für das nicht assoziierte Fließgesetz

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \dot{\lambda} \frac{\partial g^{\text{pl}}}{\partial \bar{\mathbf{T}}} = \dot{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \text{dev} \bar{\mathbf{T}}, \quad (2.82)$$

wobei  $\dot{\lambda}$  einen positiven skalaren Faktor darstellt. Zusätzlich wird der normierte effektive deviatorische Spannungstensor

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \text{dev} \bar{\mathbf{T}} \quad (2.83)$$

eingeführt und zur Formulierung der plastischen Vergleichsdehnungsrate

$$\dot{\gamma} = \bar{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\lambda} \quad (2.84)$$

genutzt. Damit ergibt sich für das nicht assoziierte Fließgesetz (2.82)

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \dot{\gamma} \bar{\mathbf{N}}. \quad (2.85)$$

Die Komponente  $\dot{\gamma}$  beschreibt dabei die Größe und  $\bar{\mathbf{N}}$  die Richtung der plastischen Vergleichsdehnungsrate.

### 2.3.2 Geschädigte Konfigurationen

Die geschädigten Konfigurationen werden zur Formulierung der Stoffgesetze für elastisches und geschädigtes Materialverhalten verwendet. Dabei wird ein ähnliches Vorgehen wie in Kapitel 2.3.1 angewandt. In Folge einer Belastung kommt es zu einer zunehmenden Schädigung durch Porenaufweitungen und Mikroscherisse. In Folge dessen kann angenommen werden, dass die effektiven Spannungen nicht abnehmen [90]. Dies hat zur Folge, dass während einer Entlastung des Materials die Parameter im elastisch-schädigenden Stoffgesetz kleiner werden. Somit resultiert eine Verkleinerung der elastischen Materialparameter im Vergleich zu den Materialparametern des ungeschädigten Materials [25, 118]. Zur Beschreibung dieses Verhaltens wird der phänomenologische Ansatz aus Kapitel 2.1.2 unter Verwendung der Gleichungen aus Kapitel 2.2.3 genutzt.

Im anfänglich ungeschädigten Zustand wird davon ausgegangen, dass das Material sich isotrop und linear elastisch verhält. Der elastische Verzerrungstensor  $\mathbf{A}^{\text{el}}$  besitzt im elastischen Anteil der freien Helmholtzschen Energie  $\phi^{\text{el}}$  einen quadratischen Einfluss [25]. Für eine vollständige Invariantendarstellung wird als einfachste Möglichkeit eine lineare Funktion für den Schädigungsverzerrungstensor  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  gewählt, sodass

$$\begin{aligned} \rho_0 \phi^{\text{el}}(\mathbf{A}^{\text{el}}, \mathbf{A}^{\text{da}}) = & G \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} + \frac{1}{2} \left( K - \frac{2}{3} G \right) (\text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}})^2 \\ & + \eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} (\text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}})^2 + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} \\ & + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}} + \eta_4 \mathbf{A}^{\text{el}} \cdot (\mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}}) \end{aligned} \quad (2.86)$$

gilt. Die Komponenten  $\eta_1, \dots, \eta_4$  beschreiben die Abminderung der elastischen Eigenschaften im Material bei auftretender Schädigung. Die Ableitung von (2.86)

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} = & 2(G + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}}) \mathbf{A}^{\text{el}} \\
& + \left[ \left( K - \frac{2}{3}G + 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \right) \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} + \eta_3 (\mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \mathbf{A}^{\text{el}}) \right] \mathbf{1} \\
& + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}} + \eta_4 (\mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{A}^{\text{da}} + \mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{A}^{\text{el}})
\end{aligned} \tag{2.87}$$

und die Annahme, dass die Spannungstensoren  $\bar{\mathbf{T}}$  und  $\mathbf{T}$  vor Beginn der Schädigung gleich sind [25], liefern eine approximierte Gleichung für den Kirchhoffschen Spannungstensor (2.66)

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \phi^{\text{el}}(\mathbf{A}^{\text{el}}, \mathbf{A}^{\text{da}})}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}}. \tag{2.88}$$

Unter Verwendung von (2.64) folgt

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{A}}^{\text{el}}. \tag{2.89}$$

Das totale Differential

$$d\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{\text{el}}} d\mathbf{A}^{\text{el}} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{A}^{\text{da}}} d\mathbf{A}^{\text{da}} \tag{2.90}$$

liefert durch die Ableitung nach dem elastischen Verzerrungstensor  $\mathbf{A}^{\text{el}}$  den geschädigten Elastizitätstensor

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{\text{el}} = & 2(G + \eta_2 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}}) \mathbf{1} + \left( K - \frac{2}{3}G + 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\
& + \eta_3 (\mathbf{A}^{\text{da}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{A}^{\text{da}}) + \eta_4 \mathbf{A}^{\text{da}}
\end{aligned} \tag{2.91}$$

mit

$$\mathbf{A}^{\text{da}} = [(A^{\text{da}})_{\cdot k}^i \delta_{\cdot j}^l + \delta_{\cdot k}^i (A^{\text{da}})_{\cdot j}^l] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k. \tag{2.92}$$

In gleicher Weise kann mit Hilfe der Ableitung nach dem Schädigungsverzerrungs-

tensor  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  der schädigende Stofftensor

$$\mathbf{C}^{\text{da}} = 2\eta_1 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\eta_2 \mathbf{A}^{\text{el}} \otimes \mathbf{1} + \eta_3 \mathbf{1} \otimes \mathbf{A}^{\text{el}} + \eta_3 \text{tr} \mathbf{A}^{\text{el}} \mathbf{1} + \eta_4 \mathbf{A}^{\text{el}} \quad (2.93)$$

mit

$$\mathbf{A}^{\text{el}} = [ (A^{\text{el}})_{\cdot k}^i \delta_{\cdot j}^l + \delta_{\cdot k}^i (A^{\text{el}})_{\cdot j}^l ] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k \quad (2.94)$$

ermittelt werden. Der Stofftensor (2.93) ist für  $2\eta_2 = \eta_3$  symmetrisch. Bei Betrachtung von (2.91) wird deutlich, dass die Schädigung die elastischen Materialparameter  $G$  und  $K$  beeinflusst. Somit verändern sich auch die elastischen Eigenschaften des Materials mit einsetzender Schädigung. Die Parameter  $\eta_1$  und  $\eta_2$  in Gl. (2.91) korrespondieren zur isotropen Schädigung, da diese in Kombination mit der Spur des Schädigungsverzerrungstensors  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  formuliert sind. Die Parameter  $\eta_3$  und  $\eta_4$  stehen in Zusammenhang mit der anisotropen Schädigung.

Zur Beschreibung des Schädigungsbeginns wird in Analogie zur Fließbedingung (2.76) im Spannungsraum eine Schädigungsbedingung

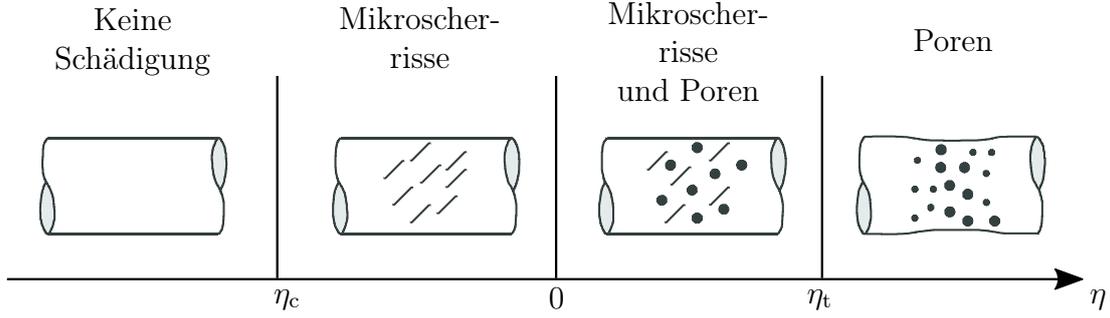
$$f^{\text{da}}(\tilde{\mathbf{T}}, \sigma_{\text{da}}) = 0 \quad (2.95)$$

eingeführt [49]. Diese ist in Abhängigkeit des zu der schädigenden Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}$  arbeitskonjugierten Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}$  (2.69) und der aktuellen Schädigungsvergleichsspannung  $\sigma_{\text{da}}$  formuliert [25, 49]. Der isotrope Spannungszustand bei Metallen lässt sich entweder mit Hilfe der Hauptspannungen oder mit der Triaxialität  $\eta$ , dem Lodeparameter  $\omega$  und der Spannungintensität  $\sigma_{\text{eq}}$  charakterisieren. Die Spannungstriaxialität

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{m}}}{\sigma_{\text{eq}}} \quad (2.96)$$

setzt sich aus der hydrostatischen Spannung

$$\sigma_{\text{m}} = \frac{I_1}{3} \quad (2.97)$$



**Abb. 2.2:** Einordnung der Schädigungsmechanismen anhand der Spannungstriaxialität

mit der ersten Invarianten des Spannungstensors  $I_1 = \text{tr}\tilde{\mathbf{T}}$  und der von-Mises-Vergleichsspannung

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3J_2} \quad (2.98)$$

mit der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators  $J_2 = (1/2)\text{dev}\tilde{\mathbf{T}} \cdot \text{dev}\tilde{\mathbf{T}}$  zusammen. Verschiedene Experimente und numerische Simulationen zeigen, dass sich unterschiedlichen Werten der Spannungstriaxialität verschiedene Schädigungsmechanismen zuordnen lassen [5, 32, 35]. Diese sind in Abb. 2.2 dargestellt. Dabei wird angenommen, dass für große negative Werte der Spannungstriaxialität  $\eta \leq \eta_c$  keine Schädigung auftritt. Der Parameter  $\eta_c$  stellt einen Grenzwert dar, unterhalb dessen bei duktilen Metallen keine Schädigung zu beobachten ist [6, 75, 92]. Im Bereich von  $\eta_c < \eta < 0$  sind Mikroscherrisse vorhanden. Isotropes Porenwachstum hingegen tritt bei großen positiven Werten der Triaxialität  $\eta > \eta_t$  auf. Eine gemischte Schädigung in Form von gleichzeitigem Auftreten von Mikroscherrissen und -poren ist bei einer kleinen positiven Triaxialität  $0 \leq \eta \leq \eta_t$  zu beobachten. Neben dem Einfluss der Triaxialität zeigt sich bei Metallen zusätzlich ein nicht zu vernachlässigender Einfluss des Lodeparameters

$$\omega = \frac{2\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1 - \tilde{T}_3}{\tilde{T}_1 - \tilde{T}_3} \quad (2.99)$$

auf die Schädigungsmechanismen (Abb. 2.2) [4]. Dabei gilt für die Bestimmung

des Lodeparameters, dass

$$\tilde{T}_1 \geq \tilde{T}_2 \geq \tilde{T}_3 \quad (2.100)$$

sein muss. Der Lodeparameter  $\omega$  wird mit den Hauptspannungen  $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3$  formuliert und liegt in einem Bereich zwischen  $-1$  und  $1$ . Auch der Lodeparameter lässt eine Deutung zu, die den vorhandenen Spannungszustand charakterisiert [105]. Der einaxiale Zug mit überlagerter hydrostatischer Spannung wird durch  $\omega = -1$  abgebildet. Für  $\omega = 0$  gilt, dass eine reine Schubspannung in Kombination mit hydrostatischer Spannung vorliegt. Der Lodeparameter  $\omega = 1$  repräsentiert das Zusammenwirken von einaxialem Druck und hydrostatischer Spannung. Bei Metallen ist ein besonders starker Einfluss des Lodeparameters (2.99) auf die Schädigungsmechanismen in Bereichen niedriger Spannungstriaxialität zu beobachten [52, 54].

Mit der Kenntnis dieser Beobachtungen kann die Schädigungsbedingung

$$f^{\text{da}}(I_1, J_2, \sigma_{\text{da}}) = \alpha I_1 + \beta \sqrt{J_2} - \sigma_{\text{da}} = 0 \quad (2.101)$$

als Funktion der ersten Invarianten des Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}$

$$I_1 = \text{tr} \tilde{\mathbf{T}} = \text{tr} \mathbf{T} \quad (2.102)$$

und der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators  $\text{dev} \tilde{\mathbf{T}}$

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{dev} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \text{dev} \tilde{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \text{dev} \mathbf{T} \cdot \text{dev} \mathbf{T} \quad (2.103)$$

mit den vom Spannungszustand abhängigen Parametern  $\alpha, \beta = f(\eta, \omega)$  formuliert werden [42]. Der Parameter  $\sigma_{\text{da}}$  stellt die aktuelle Schädigungsvergleichsspannung dar. Diese wird mit Experimenten ermittelt.

Anhand der Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  lässt sich eine Zuordnung der Schädigungsmechanismen vornehmen (Abb. 2.2). Erste Vorschläge für diese Parameter konnten durch Brünig et al. [31, 32, 35] anhand von Experimenten und ersten numerischen Simulationen mit unterschiedlich gekerbten Zug- und Scherproben aus

Aluminium gemacht werden. Für kleine negative Werte der Triaxialität muss der Parameter  $\alpha$  kleine Werte annehmen, sodass der Einfluss der ersten Invarianten  $I_1$  gering oder nicht vorhanden ist, da hydrostatische Spannungen isotropes Porenwachstum hervorrufen. Im Gegensatz dazu muss der Parameter  $\beta$  große Werte annehmen. Dies hat zur Folge, dass der Einfluss der zweiten Invarianten  $J_2$  des Spannungsdeviators groß ist und die Schädigung von Gestaltänderungen in Form von Mikroscherrissen dominiert wird. Neben der Triaxialität ist auch der Einfluss des Lodeparameters für die Triaxialität im kleinen negativen Wertebereich nicht zu vernachlässigen [4]. In Anlehnung an diese Erkenntnisse lassen sich ebenfalls Aussagen für große Wertebereiche der Spannungstriaxialität treffen. Isotrope Porenaufweitung wird durch hydrostatische Zugspannungszustände hervorgerufen, welche in Form der ersten Invarianten  $I_1$  in der Schädigungsbedingung berücksichtigt werden. Somit muss in diesem Fall der Parameter  $\alpha$  einen großen Wert und der Parameter  $\beta$  einen kleinen Wert annehmen. Der Beginn der Schädigung wird von Volumenänderungen dominiert. Im Übergangsbereich zwischen dem kleinen negativen und großen Wertebereich der Triaxialität besitzen beide Parameter eine ähnliche Gewichtung in der Schädigungsbedingung, da sowohl Mikroscherrisse als auch Poren als Schädigungsmechanismus auftreten. Diese Beobachtungen ermöglichen jedoch nur quantitative Aussagen über die Parameter der Schädigungsbedingung (2.101). Detaillierte Aussagen für eine große Bandbreite der Triaxialität und des Lodeparameters sind mit Hilfe experimenteller Beobachtungen nicht möglich. Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit dreidimensionale numerische Simulationen durchgeführt, die qualitative Ergebnisse für die Ermittlung der Parameter der Schädigungsbedingung liefern. Numerische Untersuchungen eines Ein-Poren-Modells unter verschiedenen Belastungen ermöglichen es, einen großen Wertebereich der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters abzudecken, sodass die verschiedenen Schädigungsmechanismen im Detail betrachtet und in der Schädigungsbedingung mit Hilfe der Parameter  $\alpha, \beta$  entsprechend berücksichtigt werden können [39, 40, 42]. Auf die genaue Vorgehensweise wird in den folgenden Kapiteln detailliert eingegangen.

Mit dem Beginn der Schädigung kommt es zu einer Abminderung der Trag- und Gebrauchsfähigkeit der Materialien. Um über dieses Verhalten genauere Information zu erhalten, ist es notwendig, den Verlauf der Schädigung beschreiben zu

können. Dies kann mit Hilfe eines Schädigungsgesetzes erfolgen. Zur Herleitung des Schädigungsgesetzes wird die Schädigungspotentialfunktion

$$g^{\text{da}}(\tilde{\mathbf{T}}) = g^{\text{da}}(I_1, J_2, J_3) \quad (2.104)$$

in Abhängigkeit des Spannungstensors  $\tilde{\mathbf{T}}$  (2.69) mit der ersten Invarianten  $I_1$ , der zweiten Invarianten  $J_2$  und der dritten Invarianten

$$J_3 = \det \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{T}} = \det \operatorname{dev} \mathbf{T} \quad (2.105)$$

eingeführt. Durch die Ableitung der Schädigungspotentialfunktion  $g^{\text{da}}$  nach dem Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  ergibt sich das nicht assoziierte Schädigungsgesetz

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \dot{\mu} \frac{\partial g^{\text{da}}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \dot{\mu} \left( \frac{\partial g^{\text{da}}}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial g^{\text{da}}}{\partial J_2} \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{T}} + \frac{\partial g^{\text{da}}}{\partial J_3} \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{S}} \right) \quad (2.106)$$

mit der deviatorischen Spannungsfunktion

$$\operatorname{dev} \tilde{\mathbf{S}} = \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{T}} \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{T}} - \frac{2}{3} J_2 \mathbf{1}. \quad (2.107)$$

Der nicht negative, skalare Faktor  $\dot{\mu}$  beschreibt die Größe der Schädigung des Materials. Alternativ lässt sich das Schädigungsgesetz unter Verwendung von (2.106) zu

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \dot{\mu} \left( \bar{\alpha} \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} + \bar{\beta} \mathbf{N} + \bar{\delta} \mathbf{M} \right) \quad (2.108)$$

formulieren [39, 40, 42]. Für die normierten deviatorischen Tensoren gilt, dass

$$\mathbf{N} = \frac{\operatorname{dev} \tilde{\mathbf{T}}}{\left\| \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{T}} \right\|} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.109)$$

und

$$\mathbf{M} = \frac{\operatorname{dev} \tilde{\mathbf{S}}}{\left\| \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{S}} \right\|} \quad (2.110)$$

sind. Bei diesen Tensoren handelt es sich um Einheitstensoren, sodass der skalare Faktor  $\mu$  die Größe der Schädigung charakterisiert.

In Gl. (2.108) werden sowohl isotrope als auch anisotrope Anteile berücksichtigt. Dabei korrespondiert der erste Summand des Schädigungsgesetzes (2.108) zum isotropen Porenwachstum und die anderen Summanden berücksichtigen die anisotrope Entwicklung von Mikroscherrissen [42]. Die kinematischen Variablen  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}$  werden in Abhängigkeit der Spannungstriaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$  formuliert, um die jeweiligen Schädigungsmechanismen (Abb. 2.2) im Schädigungsgesetz zu berücksichtigen. Dabei zeichnet sich bei der Gewichtung der Parameter  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}$  ein ähnliches Bild wie bei der Schädigungsbedingung ab. Der Parameter  $\bar{\alpha}$  nimmt für kleine negative Werte der Triaxialität geringe Werte an, sodass die Schädigung von einer Gestaltänderung dominiert wird. Es treten Mikroscherrisse auf. In diesem Wertebereich zeigt sich ebenfalls eine nicht zu vernachlässigende Abhängigkeit vom Lodeparameter [4]. In großen positiven Wertebereichen der Spannungstriaxialität zeichnet sich das gegensätzliche Bild ab. Der Parameter  $\bar{\alpha}$  nimmt große Werte an und die Parameter  $\bar{\beta}$  und  $\bar{\delta}$  nehmen kleine Werte an, sodass die Schädigung von Volumenänderungen in Form von Porenwachstum dominiert wird. Im Bereich mittlerer Werte für die Triaxialität setzt sich das Schädigungsgesetz (2.108) aus den drei Summanden in ähnlich großen Teilen zusammen, da die Schädigung sowohl von der Entstehung von Mikroscherrissen als auch von Porenaufweitungen bestimmt wird. Diese Zuordnung der Schädigungsmechanismen ist allein mit Experimenten nicht möglich [35]. Zusätzliche dreidimensionale numerische Simulationen auf der Mikroskala sind notwendig, um die Schädigungsmechanismen im Detail zu analysieren und mit diesen Erkenntnissen die Funktionen für die Parameter  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}$  in Abhängigkeit der Spannungstriaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$  vorzuschlagen.

Mit zunehmender Schädigung des Materials und daraus resultierendem Porenwachstum und resultierender Ausbreitung von Mikroscherrissen kommt es zum Zusammenwachsen von Mikrodefekten. Dieses Verhalten wurde bereits von Tvergaard [123] und Tvergaard und Needleman [122] beschrieben. Im Rahmen der hier vorgestellten Kontinuumstheorie wird der Beginn dieser Veränderung auf der Makroebene mit Hilfe der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusam-

menwachsens der Mikrodefekte

$$f^{\text{coal}}(\mathbf{A}^{\text{da}}, a_{\text{coal}}) = f^{\text{coal}}(I_1^{\text{da}}, I_2^{\text{da}}, I_3^{\text{da}}, a_{\text{coal}}) \quad (2.111)$$

abgebildet. In dieser Gleichung ist es nicht ausreichend, nur die erste Invariante

$$I_1^{\text{da}} = \text{tr} \mathbf{A}^{\text{da}} \quad (2.112)$$

des Schädigungsverzerrungstensors  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  zu verwenden. Es wird von einer anisotropen Schädigung ausgegangen, sodass auch die zweite Invariante

$$I_2^{\text{da}} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \mathbf{A}^{\text{da}} \quad (2.113)$$

und die dritte Invariante

$$I_3^{\text{da}} = \frac{1}{3} \mathbf{A}^{\text{da}} \cdot (\mathbf{A}^{\text{da}} \mathbf{A}^{\text{da}}) \quad (2.114)$$

des Schädigungsverzerrungstensors  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  in der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte berücksichtigt werden [39, 42]. Der Parameter  $a_{\text{coal}}$  stellt einen Grenzwert dar, ab dem das Zusammenwachsen der Mikrodefekte beginnt und kann mit mikromechanischen numerischen Simulationen bestimmt werden. In Folge des Zusammenwachsens der Mikrodefekte kommt es letztendlich zum Versagen des Materials auf der Makroebene: ein Riss entsteht. In der Literatur wurden verschiedene Risskriterien in Abhängigkeit der Triaxialität [5] und des Lodeparameters [51] vorgestellt. Diese Kriterien berücksichtigen jedoch lediglich den Einfluss des elastisch-plastischen Verhaltens des Materials. Die Schädigung, die während der Belastung eines duktilen Metalls weiter voranschreitet, bevor das Material auf der Makroebene versagt, wird vernachlässigt.

Im Gegensatz hierzu formulierten Tvergaard [123, 124] und Tvergaard und Needleman [122] ein Kriterium für das Versagen des Materials in Abhängigkeit einer Volumenvariablen - der kritischen Porosität. Basierend auf einer kontinuumsmechanischen Theorie wird bei Lemaitre [89] die Schädigung in Form einer Flächenvariablen berücksichtigt und das Versagen des Materials in Abhängigkeit einer

kritischen Flächenvariablen formuliert. Diese Grundgedanken zur Formulierung des Risskriteriums in Abhängigkeit der Schädigung wurden von Brünig et al. aufgegriffen [39, 42]. Der Übergang von Mikrodefekten zum Makroriss wird durch das Risskriterium

$$f^{\text{fr}}(\mathbf{A}^{\text{da}}, a_{\text{fr}}) = f^{\text{fr}}(I_1^{\text{da}}, I_2^{\text{da}}, I_3^{\text{da}}, a_{\text{fr}}) \quad (2.115)$$

charakterisiert. Das Kriterium ist ebenfalls in Abhängigkeit der Invarianten  $I_1^{\text{da}}$ ,  $I_2^{\text{da}}$  und  $I_3^{\text{da}}$  des Schädigungsverzerrungstensors  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  formuliert. Der Parameter  $a_{\text{fr}}$  wird anhand numerischer Simulationen auf der Mikroebene ermittelt und kennzeichnet den Wert, ab dem ein Makroriss auftritt.

## 3 Numerische Aspekte

Im Rahmen dieses Kapitels werden die hier benötigten Grundlagen der Finite-Element-Methode (FEM) erläutert. Dabei wird zunächst auf die mathematischen Grundlagen der Berechnungen und der verwendeten Elemente eingegangen. Im weiteren Verlauf wird die Umsetzung der numerischen Simulationen erläutert.

Für die Durchführung der numerischen Simulationen wird die Finite-Element-Software ANSYS 13.0 der Firma ANSYS, Inc. verwendet. Die Eingabedateien zur Umsetzung der Simulationen werden mit der „Ansys Parametric Design Language“ (APDL) formuliert und anschließend in ANSYS-CLASSIC eingelesen, um die Finite-Element-Berechnungen durchzuführen.

### 3.1 Grundlagen der Finite-Element-Methode

Die Finite-Element-Methode kann verwendet werden, wenn im Ingenieurwesen für physikalisch nichtlineare Probleme ein mathematisches Modell aufgestellt und eine effiziente Lösung gesucht wird [9]. Bei der Aufstellung des mathematischen Modells ist es notwendig, das physikalische Problem zu idealisieren und verschiedene Annahmen, z. B. bezüglich der Kinematik, der Belastungen und der Randbedingungen, zu treffen. Bei dem physikalischen Problem handelt es sich in den Ingenieurwissenschaften oft um eine Struktur oder einen Körper unter bestimmten Belastungen. Zur Lösung des Problems wird der Körper in endlich viele kleine Elemente unterteilt. Die Genauigkeit der Lösung kann durch eine Netzverfeinerung gesteigert werden. Im Anschluss an die Finite-Element-Berechnungen müssen die Ergebnisse gedeutet werden und können zur Lösung des physikalischen Problems herangezogen werden [9]. Das Grundgerüst der Finite-Element-Methode bildet ein Variationsprinzip. Da die Lösung des Variationsprinzips in der Regel ungleich

der Lösung der exakten Differentialgleichung zur Beschreibung des Problems ist, stellt die FE-Lösung nur eine Näherungslösung dar.

Beispielsweise wird die Impulsbilanz

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

mit der Massenkraftdichte  $\mathbf{b}$  und der Dichte  $\rho$  als Differentialgleichung verwendet. Die Gl. (3.1) wird mit einer Testfunktion  $\delta\mathbf{u}$ , welche als virtuelle Verschiebung gedeutet werden kann, skalar multipliziert und über das Volumen  $\hat{v}$ , beziehungsweise im zweidimensionalen Fall über die Fläche  $\hat{a}$ , integriert

$$\int (\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\hat{v} = 0. \quad (3.2)$$

Dabei handelt es sich um die schwache Form des Gleichgewichts, da zunächst die drei Richtungen durch die skalare Multiplikation mit einer Testfunktion zusammen gefasst werden und anschließend zur Lösung von Gl. (3.4) eine Integration über das gesamte Gebiet vorgenommen wird. Die Lösung bezieht sich somit auf das gesamte Gebiet anstatt auf jeden einzelnen Punkt [132]. Die Einarbeitung der Kräfte- und Randbedingung

$$\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t}, \quad (3.3)$$

welche besagt, dass die inneren Randspannungen  $\mathbf{t}$  und die Oberflächenspannungen  $\bar{\mathbf{t}}$  identisch sind, liefert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta\Pi(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int (\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\hat{v} + \int (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\hat{a} = 0. \quad (3.4)$$

Mit der Anwendung des Gaußschen Integralsatzes folgt für Gl. (3.4) das Variationsprinzip der Finite-Element-Verschiebungsmethode

$$-\delta\Pi(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int \operatorname{grad}^T \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \, d\hat{v} - \int \rho\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\hat{v} - \int \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\hat{a} = 0. \quad (3.5)$$

Der erste Term der Gleichung (3.5) entspricht der virtuellen Formänderungsenergie. Die Summe der beiden letzten Terme beschreibt die virtuelle Arbeit der

äußeren Belastungen [132]. Diese Vorgehensweise ist für nichtlineares Materialverhalten aber auch für Probleme mit Reibung anwendbar, da keine Annahmen, wie z. B. das Vorhandensein eines Potentials, getroffen werden.

Bei der Betrachtung mathematischer Nichtlinearitäten wird zur Herleitung der Grundgleichung der Finite-Element-Verschiebungsmethode eine Taylorreihenentwicklung der Gl. (3.5) unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung

$$\delta\Pi(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \delta\Pi(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{\partial\delta\Pi}{\partial\mathbf{u}} \cdot \Delta\mathbf{u} + \dots = 0 \quad (3.6)$$

durchgeführt. Im Anschluss werden die Ansatzfunktionen für die Verschiebungen und das Stoffgesetz in Gl. (3.6) eingearbeitet und es folgt die Matrizenformulierung der inkrementellen Finite-Element-Verschiebungsmethode für ein Element

$$\mathbf{k}_T \Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{p} + \text{Randterme} . \quad (3.7)$$

Die Matrix  $\mathbf{k}_T$  repräsentiert die tangentielle Steifigkeitsmatrix, welche vom aktuellen Tangentenmodul abhängt [26]. Der Vektor  $\Delta\mathbf{p}$  stellt das Residuum des Kraftvektors dar. Da diese Gleichung nur für ein Element gültig ist, ist eine Assemblierung der Elemente notwendig. Dabei werden die Elementmatrizen aus Gl. (3.7) zu globalen Systemmatrizen

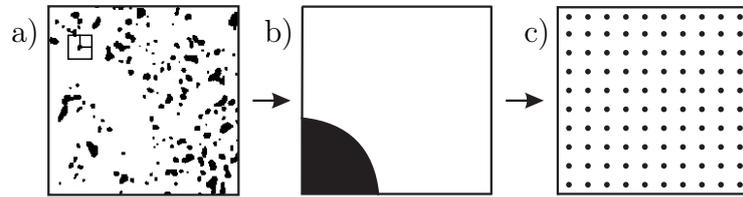
$$\mathbf{K}_T = \sum \mathbf{k}_T , \quad (3.8)$$

$$\Delta\mathbf{V} = \sum \Delta\mathbf{v} \text{ und} \quad (3.9)$$

$$\Delta\mathbf{P} = \sum \Delta\mathbf{p} \quad (3.10)$$

zusammen gefügt. Es folgt die globale Matrizenformulierung der inkrementellen Verschiebungsmethode

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{P} . \quad (3.11)$$



**Abb. 3.1:** Schematische Darstellung der Vorgehensweise bei der Modellentwicklung a) reale Porenverteilung [11] b) Ein-Poren-Modell (ein Achtel) c) Gesamtmodell nach Anwendung der Symmetrierandbedingungen

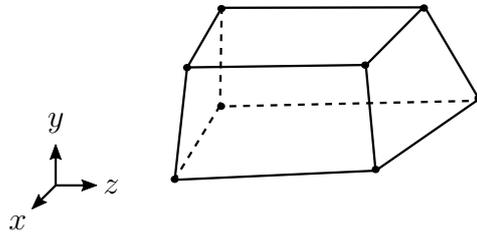
Zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems wird das Newton-Raphson-Verfahren verwendet [2, 132]. Dies hat den Vorteil, dass oft nur wenige Iterationen benötigt werden, um die Lösung des Gleichungssystems zu erhalten.

## 3.2 Grundgedanken der mikromechanischen Berechnungen

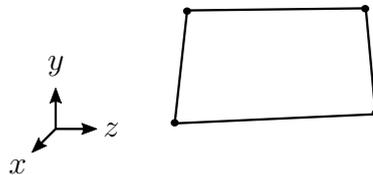
### 3.2.1 Allgemeines

Zur numerischen Untersuchung der Einflüsse von Mikrodefekten auf das Materialverhalten wird eine reale Verteilung unterschiedlich geformter Mikroporen betrachtet (Abb. 3.1a)) [11]. Aus dieser Betrachtung lassen sich erste Vorschläge für die Umsetzung der Porenmodelle und zugehöriger Randbedingungen ableiten.

Zunächst wird eine einzelne Pore exemplarisch im Detail betrachtet (Abb. 3.1a)). Daraus ergibt sich, dass ein Achtel eines Ein-Poren-Modells mit einer kugelförmigen Pore mit Symmetrierandbedingungen modelliert (Abb. 3.1b)) werden kann. Diese Idealisierung (Abb. 3.1c)) bildet nicht die reale Porenverteilung ab, kann allerdings als eine erste Approximation der realen Gegebenheiten genutzt werden. Zusätzlich zu der Vorgehensweise bei der Erstellung der Porenmodelle liefert die Betrachtung der realen Verteilung dieser Defekte (Abb. 3.1a)) erste Ideen bezüglich der Variationsmöglichkeiten bei der Untersuchung der Poren-Modelle. Es können neben unterschiedlichen Größen der Defekte zusätzlich unterschiedliche Formen und Verteilungen der Mikrodefekte beobachtet werden.



**Abb. 3.2:** SOLID185-Element [2]



**Abb. 3.3:** CONTA173-Element [2]

Für die Diskretisierung der Poren-Modelle werden im Rahmen dieser Arbeit SOLID185-Elemente (Abb. 3.2) verwendet. Dabei handelt es sich um Elemente mit acht Knoten, die je drei Freiheitsgrade besitzen. Es ist je eine Translation in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung möglich. Dieser Elementtyp ist besonders für große Verzerrungen geeignet und bietet zusätzlich die Möglichkeit, eigene Materialgesetze anzuwenden [2]. Bei der verwendeten Element-Technologie handelt es sich um die  $\bar{B}$ -Methode [14, 71, 104, 116], die als gemischte Methode oder auch selektive reduzierte Integration bekannt ist. Bei dieser Methode wird der Spannungstensor in deviatorische und hydrostatische Anteile aufgespalten. Infolge dessen können während der Integration die auftretenden Energien infolge dieser Spannungen getrennt voneinander betrachtet werden. Dabei wird die deviatorische Energie voll integriert und die hydrostatische Energie wird reduziert integriert [14].

Zur grafischen Ausgabe der Porenform werden zusätzlich CONTA173-Elemente (Abb. 3.3) verwendet. Bei diesem Elementtyp handelt es sich um ein Kontaktelement mit vier Knoten [2]. Diese werden über die Oberfläche der SOLID185-Elemente der Pore gelegt. Somit ergeben sich identische Knotenverschiebungen. Im Rahmen des Postprocessing können die CONTA173-Elemente selektiert werden und ermöglichen die grafische Auswertung der deformierten Porenformen.

Zur Umsetzung des linearen Materialverhaltens wird den Elementen ein linear elastisches Materialverhalten unter Verwendung eines Elastizitätsmoduls  $E$  und einer Querkontraktionszahl  $\nu$  zugewiesen. Bei dem verwendeten Materialgesetz handelt es sich um das Hookesche Gesetz. Das plastische Verhalten des Matrixmaterials, welches bei Überschreiten der anfänglichen Fließgrenze auftritt, wird mit dem Materialgesetz NLISO umgesetzt. Dem Materialgesetz NLISO liegen die von-Mises-Fließbedingung, ein assoziiertes Fließgesetz und ein isotropes Verfestigungsmodell zu Grunde, um das plastische Verhalten des Materials zu beschreiben [2]. Dabei berücksichtigt die von-Mises-Fließbedingung die zweite Invariante des Spannungstensors  $\mathbf{T}$ , sodass mit

$$\sigma_F = \sqrt{3} c \left( 1 - \frac{a}{c} \bar{I}_1 \right) \quad (3.12)$$

für die Fließbedingung aus Kapitel 2.3.1

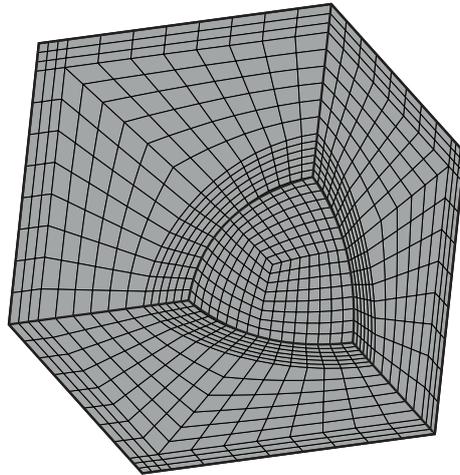
$$f^{\text{pl}}(J_2, \sigma_F) = 0 \quad (3.13)$$

folgt. Da in diesem Fall die Fließbedingung auch als Potentialfunktion für das Fließgesetz genutzt wird, ergibt sich ein assoziiertes Fließgesetz. Zur Beschreibung der Änderung der Fließbedingung während des plastischen Fließens wird ein Verfestigungsmodell eingeführt. Das Materialgesetz NLISO greift auf ein isotropes Verfestigungsmodell zurück, welches eine affine Aufweitung der ursprünglichen Fließbedingung bewirkt. Dieses wird mit Hilfe von

$$\sigma_F(\epsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}}) = \sigma_{F0} + R_0 \epsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}} + R_\infty (1 - \exp^{-b \epsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}}}) \quad (3.14)$$

beschrieben, wobei  $\sigma_{F0}$  die anfängliche Fließgrenze und  $R_0$ ,  $R_\infty$  und  $b$  Materialparameter zur Beschreibung des isotropen Verfestigungsverhaltens darstellen. Der Parameter  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}}$  charakterisiert die plastische Vergleichsdehnung [2] und ergibt sich unter Verwendung von Gl. (2.85) zu

$$\epsilon_{\text{eq}}^{\text{pl}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma. \quad (3.15)$$



**Abb. 3.4:** Ein Achtel eines Ein-Poren-Modells mit einer kugelförmigen Pore und einer Anfangsporosität von 3%

### 3.2.2 Ein-Poren-Modelle

Zur Umsetzung der Ein-Poren-Modelle wird ein Achtel eines repräsentativen Volumenelementes (RVE) mit einer kugelförmigen Pore unter Verwendung von 3123 SOLID185-Elementen modelliert (Abb. 3.4) [37, 38]. Dieser Ansatz wurde bereits in der Literatur zur Untersuchung verschiedener Aspekte der Schädigung genutzt [56, 80, 113] und zeigte sich dabei als geeignetes Modell. Auch im Rahmen von ersten Untersuchungen auf der Mikroebene bestätigte sich, dass die Ein-Poren-Modelle wesentliche Einblicke in die jeweiligen Schädigungsmechanismen ermöglichen [39, 40]. Der Koordinatenursprung des Modells befindet sich im Ursprung der Pore und das RVE besitzt die Abmessungen  $l_x = 1$  mm,  $l_y = 1$  mm und  $l_z = 1$  mm. Zunächst werden Symmetrierandbedingungen verwendet, da sich somit das Ein-Achtel-Modell wie ein komplettes Modell des repräsentativen Volumenelementes während der Simulationen verhält. Die Reduzierung des Modells auf ein Achtel hat den Vorteil, dass sich aufgrund der geringeren Elementanzahl der Rechenaufwand und damit auch die Rechenzeit verringern. Zur Aufbringung der Lasten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  werden die Verschiebungen, der sich am Rand befindlichen Knoten der äußeren Flächen in Lastrichtung miteinander gekoppelt, sodass eine homogene Lastaufbringung in einem Punkt an den Modellrändern möglich ist. Das Verhältnis der einzelnen Lasten  $P_1 : P_2 : P_3$  wird durch den Spannungszustand bestimmt (Tab. 3.1). Dieser wird durch den Wert der Triaxialität  $\eta$  und

des Lodeparameters  $\omega$  charakterisiert. Um den Einfluss der Triaxialität und des Lodeparameters auf das Schädigungs- und Versagensverhalten im Detail untersuchen zu können, werden diese während der numerischen Simulationen konstant gehalten und an vorgewählten Punkten untersucht und ausgewertet [37]. Somit ergeben sich für einen konstanten Wert der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters die zugehörigen Skalierungsfaktoren

$$y_2(x_1, \omega, \eta) = \frac{(-6\omega + 27\eta^2 + 9\omega^2\eta^2 + 2\omega^2 \pm 9\sqrt{\eta^2\hat{\omega}})x_1}{-9 + 6\omega - \omega^2 + 27\eta^2 + 9\omega^2\eta^2} \quad (3.16)$$

mit

$$\hat{\omega} = -6\omega - 2\omega^3 + 4\omega^2 + \omega^4 + 3 \quad (3.17)$$

und

$$z_3(x_1, \omega, \eta) = \frac{(27\eta^2 + 9 + 9\omega^2\eta^2 - \omega^2 \pm 18\sqrt{\eta^2(3 + \omega^2)})x_1}{-9 + 6\omega - \omega^2 + 27\eta^2 + 9\omega^2\eta^2} \quad (3.18)$$

der Last  $P$ , wobei  $x_1$  die Intensität der Belastung bestimmt [39, 40]. Der maximale Wert der jeweiligen Last  $P$  beträgt 2000 N und wird in 1000 Lastschritten in einem Punkt der äußeren Flächen in Hauptachsenrichtung aufgebracht. Die Last  $P$  wird je nach Spannungszustand mit den zugehörigen Faktoren in den drei Hauptrichtungen skaliert:

$$P_1 = x_1 P, \quad (3.19)$$

$$P_2 = y_2 P \text{ und} \quad (3.20)$$

$$P_3 = z_3 P, \quad (3.21)$$

wobei  $x_1$ ,  $y_2$  und  $z_3$  die Skalierungsfaktoren der Last charakterisieren. Um einen möglichst großen Spannungsbereich abdecken zu können, wird ein großer Wertebereich der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters genutzt (Tab. 3.1).

Zunächst wird der Würfel mit einer Anfangsporosität von 3% modelliert, da sich

Triaxialität	Lodeparameter	Skalierungsfaktoren		
$\eta$	$\omega$	$x_1$	$y_2$	$z_3$
-1	-1	-0,25	-1,00	-1,00
	0	-0,27	-0,63	-1,00
	1	-0,40	-0,40	-1,00
-2/3	-1	0,00	-1,00	-1,00
	0	-0,07	-0,54	-1,00
	1	-0,25	-0,25	-1,00
-1/3	-1	0,50	-1,00	-1,00
	0	0,27	-0,37	-1,00
	1	0,00	0,00	-1,00
0	-1	1,00	-0,50	-0,50
	0	1,00	0,00	-1,00
	1	0,50	0,50	-1,00
1/3	-1	1,00	0,00	0,00
	0	1,00	0,37	-0,27
	1	1,00	1,00	-0,50
2/3	-1	1,00	0,25	0,25
	0	1,00	0,54	0,07
	1	1,00	1,00	0,00
1	-1	1,00	0,40	0,40
	0	1,00	0,63	0,27
	1	1,00	1,00	0,25

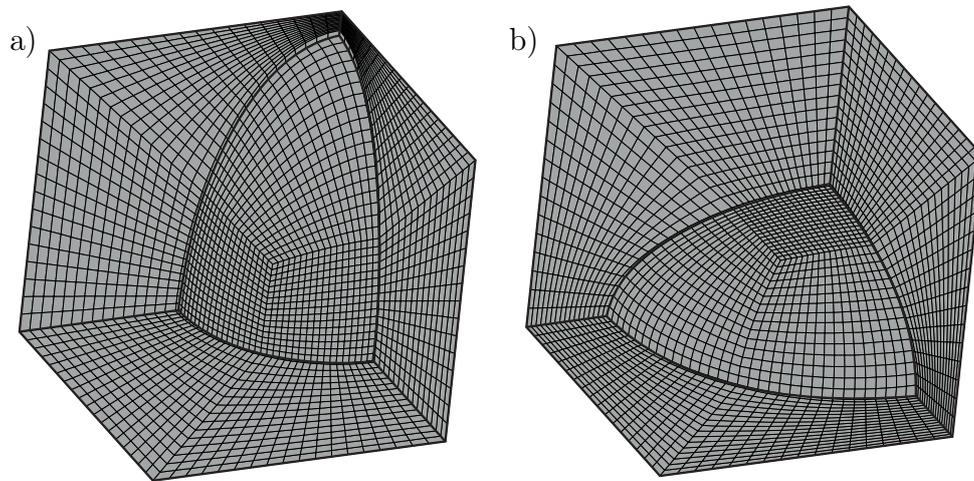
**Tab. 3.1:** Skalierungsfaktoren der Last  $P$  der drei Hauptrichtungen in Abhängigkeit von der Triaxialität und dem Lodeparameter bei der Verwendung von Hauptnormalspannungen

$x$ -Achse	$y$ -Achse	$z$ -Achse
gestreckte Poren		
1	1	2
1	2	1
2	1	1
flache Poren		
2	2	1
2	1	2
1	2	2

**Tab. 3.2:** Skalierungsfaktoren der Hauptachsen in  $x$ -,  $y$ -, und  $z$ -Richtung zur Modellierung der ellipsenförmigen Poren

diese im Rahmen von Experimenten als häufig auftretende Anfangsporosität heraus kristallisierte [118]. Zusätzlich ermöglicht diese Anfangsporosität, erste Aussagen über das Verhalten der Pore unter verschiedenen Belastungen treffen zu können. Neben einer Porosität von 3% werden auch Modelle mit einer Anfangsporosität von 1% und 10% betrachtet. Diese Variationen wurden gewählt, da sie sich im Rahmen von Experimenten als geeignete obere und untere Randwerte herausstellten [11, 118]. Die Modelle besitzen ebenfalls Symmetrierandbedingungen und die Lastaufbringung erfolgt unter gleichen Voraussetzungen wie bereits zuvor erläutert.

Da es sich bei den Mikrodefekten in der Realität nicht immer um kugelförmige Poren handelt, werden zusätzlich zur Variation der Porosität unterschiedliche Porenformen untersucht. Für diese Modelle wird eine Anfangsporosität von 10% gewählt, da sich zeigte, dass ab ungefähr dieser Porosität nicht mehr nur kugelförmige Poren vorhanden sind [118]. Im Rahmen der Untersuchung der ellipsenförmigen Poren wird eine Fallunterscheidung vorgenommen. Es wird das Verhalten von drei Poren mit einer gestreckten Hauptachse und das Verhalten von drei Poren mit zwei gestreckten Hauptachsen untersucht (Abb. 3.5). Zur Modellierung der unterschiedlichen Porenformen wird das Hauptachsenverhältnis der Pore skaliert (Tab. 3.2). Das repräsentative Volumen besteht aus 14400 SOLID185-Elementen. Die Verschiebungs- und Kräfte-Randbedingungen werden nach zuvor erläuterten Prinzip aufgebracht.



**Abb. 3.5:** Ein-Poren-Modelle mit einer ellipsenförmigen Pore und einer Anfangs-  
porosität von 10% (Ein-Achtel-Modelle) a) gestreckte Pore b) flache  
Pore

### 3.2.3 Mehr-Poren-Modelle

Zur Untersuchung des Einflusses unterschiedlicher Porenanordnungen wurden in der Literatur sowohl regelmäßige als auch unregelmäßige Anordnungen von Poren diskutiert. Dabei wurden neben Experimenten [53] auch numerische Simulationen auf der Mikroebene durchgeführt [12, 20, 99, 107]. Auch im Rahmen dieser Arbeit soll der Einfluss unterschiedlicher Porenanordnungen mit Hilfe von numerischen Analysen untersucht werden. Dabei soll insbesondere der Einfluss der Porenanordnung auf die Parameter der Schädigungsbedingung, des Schädigungsgesetzes, der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte und des Risskriteriums diskutiert werden.

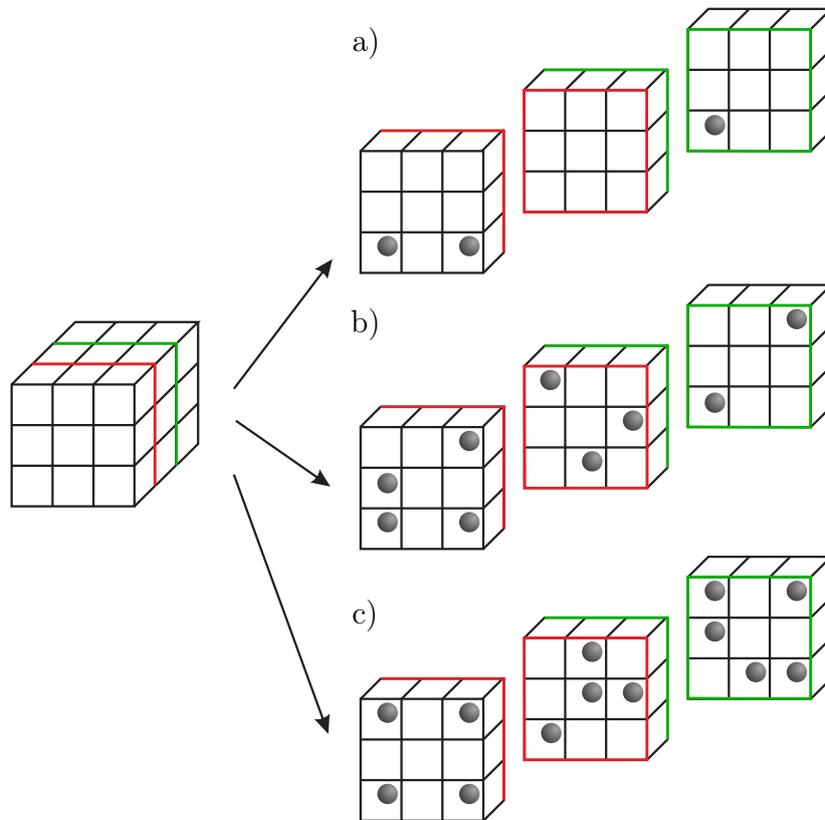
Für die Untersuchung unterschiedlicher Porenanordnungen werden in dieser Arbeit Mehr-Poren-Modellen verwendet, bei denen es sich um RVEs mit den Abmessungen  $l_x = 1 \text{ mm}$ ,  $l_y = 1 \text{ mm}$  und  $l_z = 1 \text{ mm}$  handelt. Es werden an unterschiedlichen Positionen drei, neun oder dreizehn kugelförmige Poren angeordnet. Bei der Erstellung des RVEs wird ein  $3 \times 3 \times 3$  Cluster bestehend aus 27 regelmäßig angeordneten quadratischen Körpern angelegt, in dem die Poren zentrisch innerhalb der einzelnen Körper positioniert werden können (Abb. 3.6). Die Positionierung der Poren ist so gewählt, dass zum einen realitätsnahe Ver-

teilungen aber auch maximale Porenkonzentrationen in einem Bereich abgebildet werden. Diese Verteilungen sind exemplarisch in Abb. 3.6 dargestellt. Bei dem Mehr-Poren-Modell mit drei Poren beträgt die Anfangsporosität 3% (Abb. 3.6a). Bei dem Modell mit neun Poren (Abb. 3.6b) und dem Modell mit dreizehn Poren (Abb. 3.6c) liegt die Anfangsporosität bei 10%, da eine niedrigere Porosität zu Poren mit verhältnismäßig viel zu kleinen Radien führen würde, welche nicht mehr mit realen Porenabmessungen zu vergleichen wären. Um die dreidimensionale Verteilung der Poren darzustellen, wird in Abb. 3.6 das RVE in drei Teile aufgespalten.

Aufgrund der unterschiedlichen Porenanzahl und Porenverteilung kann an dieser Stelle keine feste Elementanzahl angegeben werden. Alle Modelle werden jedoch mit dem bereits erläuterten Elementtyp SOLID185 modelliert. Es werden ebenfalls Symmetrierandbedingungen verwendet. Die Belastungen  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  werden in 1000 Lastschritten an den äußeren, über die Knoten gekoppelten Rändern aufgebracht. Auch bei den Mehr-Poren-Modellen wird für den maximalen Wert der Last  $P$  der Wert 2000 N verwendet, der je nach Spannungszustand skaliert wird (Tab. 3.1).

### 3.2.4 Simulation der Entstehung eines Makrorisses

Die Untersuchungen zur Entstehung eines Makrorisses sind vor dem Hintergrund entwickelt worden, dass im Anschluss an das Wachstum und Zusammenwachsen von Mikroporen das Versagen des Modells durch einen Makroriss folgt [41]. Mit Hilfe der in ANSYS verwendeten Element-Erosion-Technik kann die Rissentwicklung bis zum endgültigen Versagen des RVEs durch das Auftreten eines Makrorisses simuliert werden. Als Randbedingungen werden auch in diesen Modellen Symmetrierandbedingungen gewählt. Im Gegensatz zu den anderen Modellen ist es bei diesen Berechnungen jedoch notwendig, die Berechnungen nicht lastgesteuert sondern verschiebungsgesteuert durchzuführen. Diese Vorgehensweise liegt darin begründet, dass mit einsetzender Schädigung ein Steifigkeitsverlust einher geht, welcher zu einem Abfall der Last führen kann. Somit kann ein kontinuierliches Anwachsen der Schädigung trotz Lastabfall garantiert werden. Zur Ermittlung der aufzubringenden Verschiebungen müssen zunächst lastgesteuerte



**Abb. 3.6:** Mehr-Poren-Modelle mit a) drei kugelförmigen Poren und einer Anfangsporosität von 3%, b) neun kugelförmigen Poren und einer Anfangsporosität von 10% und c) dreizehn kugelförmigen Poren und einer Anfangsporosität von 10%

Simulationen mit äquivalenten Inkrementen durchgeführt werden, aus denen die Verschiebungen ausgelesen werden. Diese Verschiebungen werden in den Berechnungen mit der Element-Erosion-Technik verwendet. Die Verschiebungen werden ebenfalls an den äußeren, über die Knoten gekoppelten Rändern in Richtung der Hauptachsen aufgebracht.

Zur Umsetzung der Element-Erosion-Technik wird der EKILL-Befehl aus ANSYS verwendet. Dabei werden die kritischen Elemente nicht gelöscht, sondern die Steifigkeit jedes gewählten Elementes wird auf  $1 \cdot 10^{-6}$  herabgesetzt. Die Selektion der Elemente erfolgt unter Verwendung der Schädigungsbedingung (2.101). Die

Schädigungsvergleichsspannung ergibt sich durch Umstellung von (2.101) zu

$$\sigma_{\text{da}} = \tilde{\alpha}I_1 + \tilde{\beta}\sqrt{J_2}. \quad (3.22)$$

Während der Simulationen wird diese Spannung in jedem Element ermittelt. Sobald die Bedingung

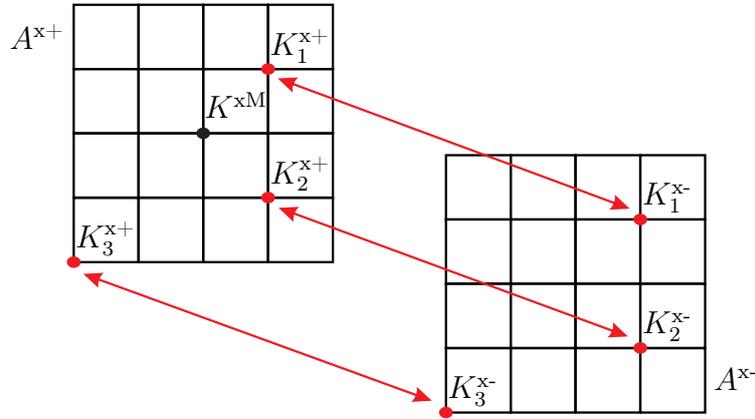
$$\sigma_{\text{da}} \geq \sigma_{\text{Kill}} \quad (3.23)$$

erfüllt wird, werden die Elemente selektiert und der Größe der Schädigungsvergleichsspannung nach abwärts sortiert. Die Grenzspannung  $\sigma_{\text{Kill}}$  wird anhand von Experimenten mit Zugstäben ermittelt. Im Anschluss an die Sortierung erfolgt das Herabsetzen der Steifigkeit der einzelnen Elemente, was im Folgenden als Löschen eines Elementes bezeichnet wird.

### 3.2.5 Periodische Randbedingungen

Da bereits in der Literatur Diskussionen zum Thema des Einflusses verschiedener Randbedingungen auf die Ergebnisse numerischer Berechnungen geführt wurden [126, 127], werden im Rahmen dieser Arbeit zusätzliche Simulationen mit periodischen Randbedingungen durchgeführt. Dabei soll geprüft werden, ob die Verwendung dieser Randbedingungen abweichende Ergebnissen in der Auswertung der Parameter der Schädigungsbedingung, des Schädigungsgesetzes, der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte oder des Risskriteriums zur Folge hat.

Zur Umsetzung der periodischen Randbedingungen wird eine gesamte Pore mit umhüllendem Matrixmaterial mit den Abmessungen  $l_x = 1 \text{ mm}$ ,  $l_y = 1 \text{ mm}$  und  $l_z = 1 \text{ mm}$  verwendet. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich im Mittelpunkt der Pore und damit auch im Mittelpunkt des gesamten Modells. Die Vernetzung wird so gewählt, dass ein homogenes Netz entsteht, welches garantiert, dass die Knotenanordnung auf den gegenüberliegenden Flächen ( $A^{x+}$  und  $A^{x-}$ ,  $A^{y+}$  und  $A^{y-}$ ,  $A^{z+}$  und  $A^{z-}$ ) identisch ist (Abb. 3.7). Exemplarisch wird die



**Abb. 3.7:** Vorgehensweise zur Umsetzung der periodischen Randbedingungen

Verwendung der periodischen Randbedingungen anhand der Kopplung der Flächen  $A^{x+}$  und  $A^{x-}$  erläutert. Zur Umsetzung dieses Randbedingungstyps werden die gegenüberliegenden Knoten  $K_i^{x+}$  und  $K_i^{x-}$  miteinander gekoppelt (Abb. 3.7). Dies hat zur Folge, dass die Differenz der Verschiebungen jedes Knotenpaares identisch ist [127]. Die Differenz der Verschiebungen eines Knotenpaares  $\Delta \mathbf{u}_i$ , welche sich aus den Verschiebungen  $\mathbf{u}_i^{x+}$  und  $\mathbf{u}_i^{x-}$  der gegenüberliegenden Knoten  $K_i^{x+}$  und  $K_i^{x-}$  zusammensetzt, ergibt sich zu

$$\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^{x+} - \mathbf{u}_i^{x-} \quad (3.24)$$

mit

$$\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}^{xM}. \quad (3.25)$$

Der Vektor  $\mathbf{u}^{xM}$  enthält die Verschiebungen des Masterknotens  $K^{xM}$  in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung, die in Folge der aufgetragenen Belastungen auftreten (Tab. 3.3). Die sogenannten Masterknoten  $K^{xM}$ ,  $K^{yM}$  und  $K^{zM}$  werden während der Generierung des Finite-Element-Modells zusätzlich zu den normalen Knoten angelegt. Diesen Knoten werden MASS21-Elemente zugewiesen [2], welche drei translatorische Freiheitsgrade besitzen. Der Masterknoten  $K^{xM}$  befindet sich auf der Fläche  $A^{x+}$  an der Position  $x = 0,5 \text{ mm}$ ,  $y = 0 \text{ mm}$ ,  $z = 0 \text{ mm}$ , der Masterknoten  $K^{yM}$  auf der Fläche  $A^{y+}$  an der Position  $x = 0 \text{ mm}$ ,  $y = 0,5 \text{ mm}$ ,  $z = 0 \text{ mm}$  und der

Masterknoten  $K^{zM}$  auf der Fläche  $A^{z+}$  an der Position  $x = 0$  mm,  $y = 0$  mm,  $z = 0,5$  mm (Abb. 3.7). Somit besitzt je eine der äußeren Flächen im Zentrum einen Masterknoten, welcher die Verschiebungen der Knoten miteinander koppelt.

Um die Auswirkungen der periodischen Randbedingungen darstellen zu können, werden die Hauptnormalspannungen der 1-2-Ebene in die korrespondierenden Hauptschubspannungen transformiert ( $x$ - $y$ -Ebene) (Abb. 3.8) [115]. Da die Hauptschubspannungsebenen in der Regel nicht normalspannungsfrei sind, sind zusätzlich die zugehörigen Normalspannungen zu ermitteln (Tab. 3.3) [115]. Zur Umsetzung der Transformation wird das Koordinatensystem des Hauptachsensystems um  $45^\circ$  gedreht. Die Hauptnormalspannung  $T_3$  in  $z$ -Richtung wird durch diesen Transformationsvorgang nicht beeinflusst. Durch die Umsetzung dieser Bedingungen kommt es anstatt zu einer homogenen Verformung (Abb. 3.8a)), wie bei den Symmetrierandbedingungen, zu einer Schubverformung (Abb. 3.8b)) des Körpers.

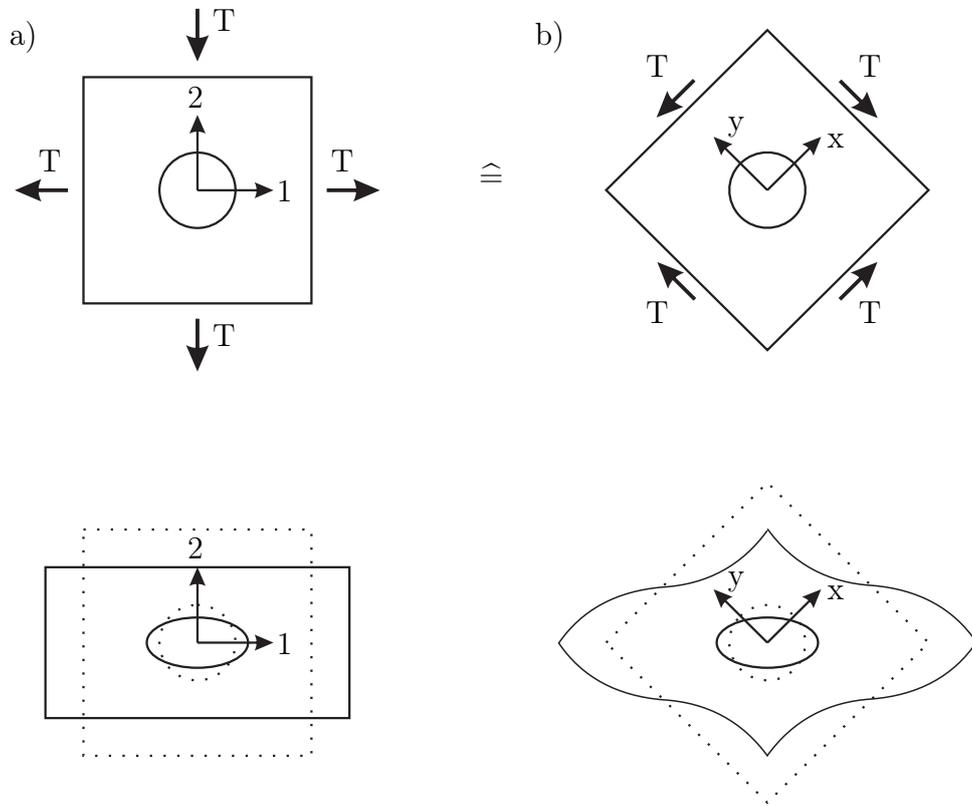
Zur Aufbringung der Belastungen auf den jeweiligen Masterknoten wird, wie bereits zuvor für die anderen Modelle erläutert, eine Belastung  $P$  mit den jeweiligen Lastfaktoren skaliert (Tab. 3.3), sodass ein konstanter Spannungszustand während der Simulationen eingehalten werden kann. Die Belastung in der jeweiligen Richtung (Abb. 3.9) ergibt sich durch

$$P_x = xP = yP = P_y \quad (3.26)$$

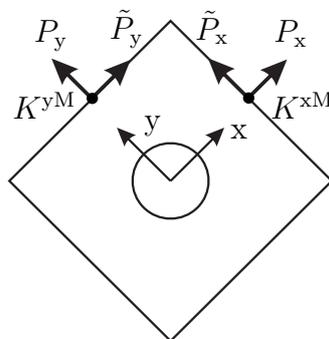
und

$$\tilde{P}_x = \tilde{x}P = \tilde{y}P = \tilde{P}_y, \quad (3.27)$$

wobei die Parameter, die mit einer Tilde gekennzeichnet sind, die Belastungen in Schubrichtung charakterisieren. Die Skalierungsfaktoren (Tab. 3.3) ergeben sich durch die Transformation (Abb. 3.8) der Hauptnormalspannungen in Hauptschubspannungen und zugehörige Normalspannungen.



**Abb. 3.8:** Belastung und Deformation des RVEs infolge reiner Schubbelastung bei a) Symmetrierandbedingungen und b) periodischen Randbedingungen



**Abb. 3.9:** Lastaufbringung bei Verwendung der periodischen Randbedingungen

Triaxialität	Lodeparameter	Skalierungsfaktoren		
		$\tilde{x} = \tilde{y}$	$x = y$	$z$
-1	-1	0,38	-0,63	-1,00
	0	0,18	-0,45	-1,00
	1	0,30	-0,70	-1,00
0	-1	0,75	0,25	-0,50
	0	0,50	0,50	-1,00
	1	0,50	0,50	-1,00
1/3	-1	0,50	0,50	0,00
	0	0,32	0,69	-0,27
	1	0,75	0,25	-0,50
1	-1	0,30	0,70	0,40
	0	0,19	0,88	0,27
	1	0,38	0,63	0,25

**Tab. 3.3:** Skalierungsfaktoren der Last  $P$  in  $x$ -,  $y$ -,  $\tilde{x}$ -,  $\tilde{y}$ - und  $z$ -Richtung in Abhängigkeit von der Triaxialität und dem Lodeparameter bei der Verwendung von Hauptschubspannungen in Kombination mit Normalspannungen (Abb. 3.9)

### 3.2.6 Auswertung der Simulationsergebnisse

Zur Auswertung der Simulationsergebnisse werden in jedem Lastschritt der Berechnungen verschiedene Parameter ausgelesen. Dazu zählen die aktuellen Abmessungen der äußeren Flächen, die zugehörigen Verschiebungen dieser Flächen, die über diese Flächen aufsummierten Kräfte, die Porosität und das aktuelle Volumen des Matrixmaterials. Zusätzlich werden die elastischen und plastischen Verzerrungsraten, die im ungeschädigten Matrixmaterial vorhanden sind, in jedem Lastschritt ermittelt.

Der Schädigungsvorgang im vorgestellten Kontinuumsschädigungsmodell ist (Kap. 2) durch die Entwicklung der Schädigungsverzerrungen auf der Makroebene charakterisiert. Diese basieren auf dem Wachstum und dem Zusammenwachsen der Mikrodefekte. Dadurch, dass nur Belastungen in Richtung der Hauptachsen des

Modells aufgebracht werden, ist der Verzerrungsraten-Tensor auf der Makroebene nur auf der Hauptachse besetzt und somit kann unter Verwendung der Kinetik (Gl. (2.42)) die Verzerrungsrate auf der Makroebene additiv in elastische, plastische und schädigende Anteile

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{RVE}} = \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} + \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \quad (3.28)$$

aufgespalten werden. Im ungeschädigten Matrixmaterial des RVEs sind auf der Mikroebene nur elastische und plastische Verzerrungsraten  $\dot{\mathbf{h}}^{\text{el}}$  und  $\dot{\mathbf{h}}^{\text{pl}}$  vorhanden, sodass mit Hilfe dieser die zugehörige Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{H}}^{\text{ep}}$  auf der Makroebene

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{ep}} = \dot{\mathbf{H}}^{\text{el}} + \dot{\mathbf{H}}^{\text{pl}} = \frac{1}{V} \int_{V_{\text{Matrix}}} (\dot{\mathbf{h}}^{\text{el}} + \dot{\mathbf{h}}^{\text{pl}}) dv \quad (3.29)$$

ermittelt werden kann [42]. Der Parameter  $V$  charakterisiert das Volumen des RVEs und der Parameter  $V_{\text{Matrix}}$  das Volumen des ungeschädigten Matrixmaterials. Der Schädigungsverzerrungstensor ergibt sich unter Verwendung von (3.28) und (3.29) zu

$$\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} = \dot{\mathbf{H}}^{\text{RVE}} - \dot{\mathbf{H}}^{\text{ep}}. \quad (3.30)$$

Mit den Gl. (2.39), (2.40) und (2.43) folgt dadurch für den Tensor der Schädigungsverzerrungen

$$\mathbf{A}^{\text{da}} = \int \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} dt. \quad (3.31)$$

Neben dem Schädigungsverzerrungstensor ist ein skalarer Parameter zur quantitativen Einschätzung der Ergebnisse hilfreich. Hierfür wird zunächst eine Vergleichsverzerrungsrate

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{H}}} \quad (3.32)$$

eingeführt, die durch Integration zu einer Vergleichsverzerrung

$$\epsilon_{\text{eq}} = \int \dot{\epsilon}_{\text{eq}} dt \quad (3.33)$$

führt. In Anlehnung an Gl. (3.32) und (3.33) gilt für den Vergleichswert der Schädigungsverzerrung

$$\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}} = \int \dot{\epsilon}_{\text{eq}}^{\text{da}} dt \quad (3.34)$$

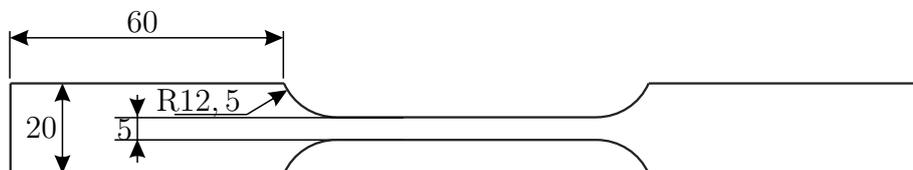
mit der Vergleichsschädigungsverzerrungsrate

$$\dot{\epsilon}_{\text{eq}}^{\text{da}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}} \cdot \dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}} \quad (3.35)$$

[39, 40]. Mit Hilfe des skalaren Wertes der Vergleichsschädigungsverzerrung (3.34) kann auf der makroskopischen Ebene eine Aussage über die Entwicklung der Schädigung während der jeweiligen Simulationen getroffen werden.

### 3.3 Ermittlung der Materialparameter der numerischen Simulationen

Zur Identifizierung der elastischen und plastischen Materialparameter für die in ANSYS verwendeten Materialgesetze (Kapitel 3.2.1) werden die Ergebnisse eines Zugversuches verwendet. Bei dem verwendeten Probekörper handelt es sich um einen ungekerbten Zugstab aus der Aluminiumlegierung AlCuMg1 EN AW 2017. Die Versuchskörper werden sowohl längs als auch quer zur Walzrichtung ausge-



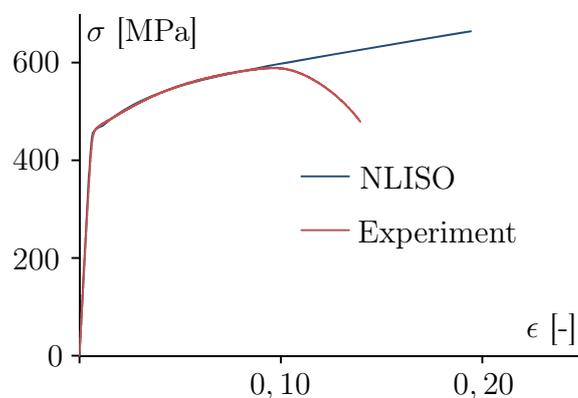
**Abb. 3.10:** ungekerbter Zugstab [21]

schnitten, um Streuungen durch anisotrope Materialeffekte ausschließen zu können [21]. Die Ergebnisse werden unter Verwendung der von-Mises-Fließbedingung ausgewertet, da diese dem Materialgesetz NLISO zu Grunde liegt. Eine gute Übereinstimmung (Abb. 3.11) zwischen den Experimenten und den Simulationen liefern die in Tab. 3.4 aufgeführten Materialparameter. Mit Beginn der Abweichung

$E$ [MPa]	$\nu$ [-]	$\sigma_{F0}$ [MPa]	$R_0$ [MPa]	$R_\infty$ [MPa]	$b$ [-]
72000	0,3	450	700	85	45

**Tab. 3.4:** Zusammenfassung der elastischen und plastischen Parameter für das Materialgesetz NLISO

zwischen den numerischen elastisch-plastischen Ergebnissen (NLISO) und den elastisch-plastisch-geschädigten Ergebnissen (Experiment) setzt die Schädigung des Materials bei einer Spannung von ca. 600 MPa ein. Dieser Wert wird im Rahmen dieser Arbeit als Grenzspannung  $\sigma_{\text{Kill}}$  verwendet und beschreibt den Punkt, an dem der Beginn des Zusammenwachsens der Pore einsetzt. Dieses Verhalten kann mit Hilfe des Materialgesetzes NLISO nicht mehr beschrieben werden, da es sich hierbei um ein elastisch-plastisches Materialgesetz handelt, welches die Schädigung nicht berücksichtigt.



**Abb. 3.11:** Vergleich zwischen dem experimentellen Ergebnis eines Zugversuches und dem Ergebnis der Simulation mit dem Materialgesetz NLISO



## 4 Auswertung der mikromechanischen numerischen Simulationen

Wie bereits in Kap. 2.3.2 diskutiert, hängen die Schädigungsmechanismen stark vom Spannungszustand ab. Diese können bei Vorhandensein von Isotropie mit Hilfe der Spannungsintensität, der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters eindeutig charakterisiert werden. Um über diese Zusammenhänge detaillierte Informationen zu erhalten, sind sowohl experimentelle als auch numerische Untersuchungen notwendig.

Experimentelle Untersuchungen ermöglichen erste Aussagen über das Verhalten ausgewählter Probekörper unter verschiedenen Belastungen [21, 35]. Es können Verzerrungen ermittelt werden, und eine qualitative Beurteilung des infolge der Belastung auftretenden Versagens ist möglich. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen jedoch keine Aussagen über die Vorgänge auf der Mikroebene zu. Ein Einblick in die sich infolge der Belastung einstellenden Spannungszustände ist nicht möglich. Allerdings ist die Entwicklung der Schädigung und der daraus resultierenden Spannungszustände auf der Mikroebene von großem Interesse, da sich daraus Rückschlüsse auf die Entwicklung der Schädigung bis zum Riss auf der Makroebene ziehen lassen. In der Vergangenheit hat es sich zur Untersuchung dieser Phänomene bewährt, mikromechanische numerische Simulationen durchzuführen [13, 55, 98, 106, 114]. Andere Verfahren, wie z. B. Röntgenaufnahmen während eines experimentellen Versuches [68, 69, 70] sind hingegen sehr teuer und vor allem aufwendig. Diese Ergebnisse können genutzt werden, um die jeweiligen Schädigungsmechanismen aufzuzeigen. Zusätzlich können die Verzerrungen infolge der Schädigung zur quantitativen Beschreibung der Schädigungsentwicklung auf der Makroebene verwendet werden.

Zunächst werden mikromechanische numerische Simulationen mit Ein-Poren-Modellen mit unterschiedlich gewählten Anfangsporositäten durchgeführt und die

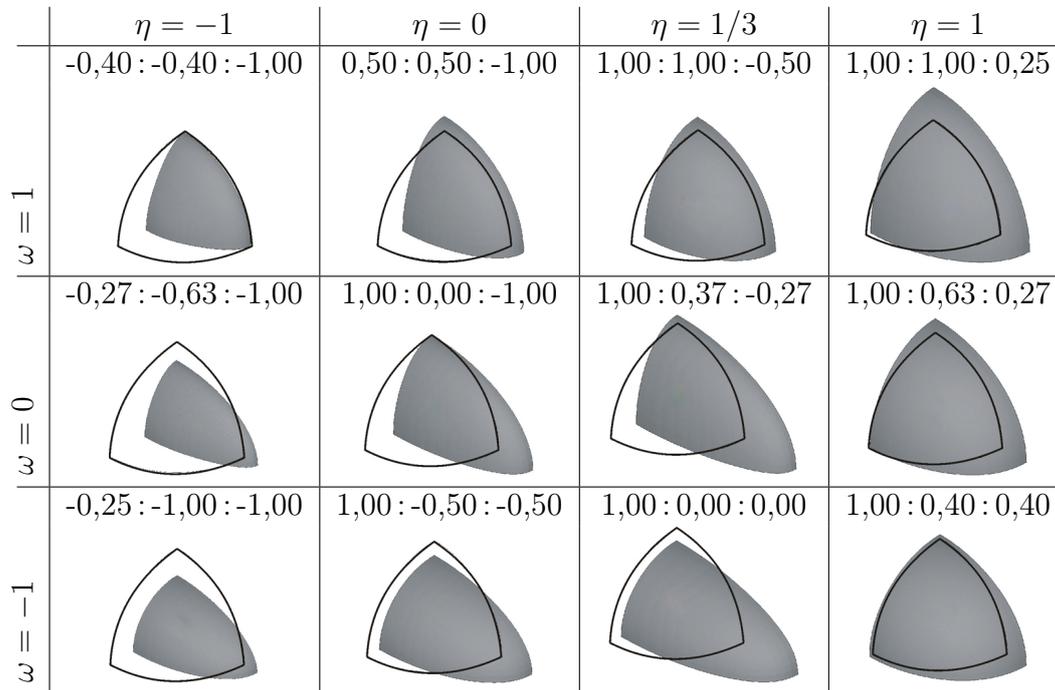
Ergebnisse auf der Makroebene ausgewertet und miteinander verglichen. Da bei der Herstellung von duktilen Metallen nicht nur unterschiedliche Anfangsporositäten auftreten, sondern auch verschiedene Porenformen und Anordnungen, werden diese Betrachtungen durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden auf der Makroebene ausgewertet, um so herauszustellen, ob Unterschiede in der Mikrostruktur Auswirkungen auf die Ergebnisse auf der Makroebene zur Folge haben. Neben mikrostrukturellen Variationen wird auch der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen des RVEs betrachtet. Besonders bei schubdominierten Belastungen treten bei der Verwendung periodischer Randbedingungen stark unterschiedliche Verformungen auf der Mikroebene auf [126, 127] im Gegensatz zu den Verformungen, die bei der Nutzung von Symmetrierandbedingungen auftreten.

Das Ziel der Betrachtungen ist es somit, herauszukristallisieren, ob mikrostrukturelle Unterschiede zu abweichenden Ergebnissen auf der Makroebene führen und entsprechend bei der Formulierung der Materialgesetze des Kontinuumsmodells berücksichtigt werden müssen.

## 4.1 Ein-Poren-Modell

Zur Ermittlung der Parameter der Schädigungsbedingung und des Schädigungsgesetzes werden zunächst die Ergebnisse der Ein-Poren-Modelle mit der Anfangsporosität 3% genutzt. Dabei werden Werte der Triaxialität im Bereich von  $\eta = -1$  bis  $\eta = 3$  analysiert. Der Lodeparameter wird zwischen  $\omega = -1$  und  $\omega = 1$  variiert. Durch die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten aus Spannungstriaxialität und Lodeparameter lässt sich eine große Anzahl verschiedener Spannungszustände untersuchen. Als ausgewählte Lastfälle werden folgende Spannungszustände an dieser Stelle diskutiert:

- $\eta = -1/3, \omega = 0$  (rot),
- $\eta = 0, \omega = 0$  (gelb),
- $\eta = 1/3, \omega = -1$  (blau),
- $\eta = 2/3, \omega = 1$  (lila) und

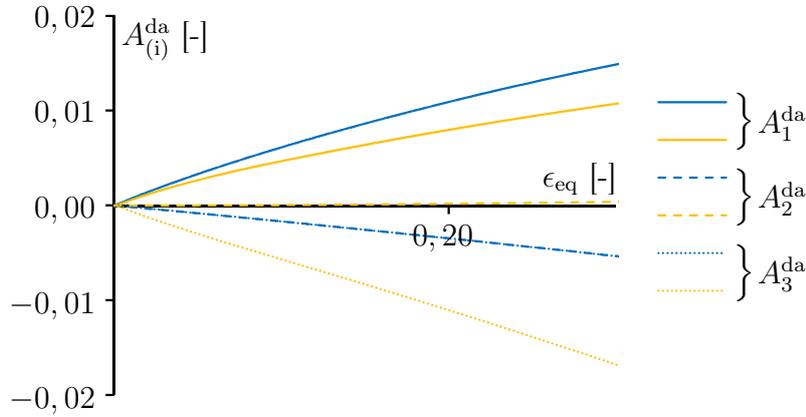


**Tab. 4.1:** Anfängliche (Kontur) und verformte (grau) Porenform eines Ein-Achtel-Poren-Modells mit einer Anfangsporosität von 3%

- $\eta = 5/3$ ,  $\omega = 0$  (grün).

Diese Lastfälle werden im Folgenden näher betrachtet und anhand verschiedener Diagramme sowohl quantitativ als auch qualitativ bewertet. An dieser Stelle ist jedoch anzumerken, dass im Rahmen dieser Arbeit in den folgenden Kapiteln und der damit einhergehenden Darstellung der Variation auf der Mikroebene nur eine repräsentative Auswahl der Ergebnisse vorgestellt wird, da sich bei den Auswertungen jeweils deutliche Tendenzen zeigen. Die verwendete Farbgebung für die einzelnen Lastfälle wird im weiteren Verlauf der Arbeit konsistent weiter genutzt.

Die Tab. 4.1 zeigt die anfängliche Porenform (Kontur) im Vergleich zur verformten Porenform (grau) eines Achtels einer anfänglich kugelförmigen Pore. Zusätzlich kann dieser Tabelle das Lastverhältnis  $P_1 : P_2 : P_3$  (Kap. 3.2.2) entnommen werden. Es wird deutlich, dass für die Triaxialität  $\eta = 1$  eine nahezu homogene Verformung der Pore auftritt. Ein Einfluss des Lodeparameters  $\omega$  ist kaum zu beobachten. Daraus lässt sich schließen, dass für große positive Spannungstriaxialitäten die Schädigung von isotropem Porenwachstum dominiert wird. Des



**Abb. 4.1:** Schädigungsverzerrungstensoren für den Wert der Triaxialität  $\eta = 0$  und den Lodeparameter  $\omega = 0$  (gelb) und für  $\eta = 1/3$  und  $\omega = -1$  (blau)

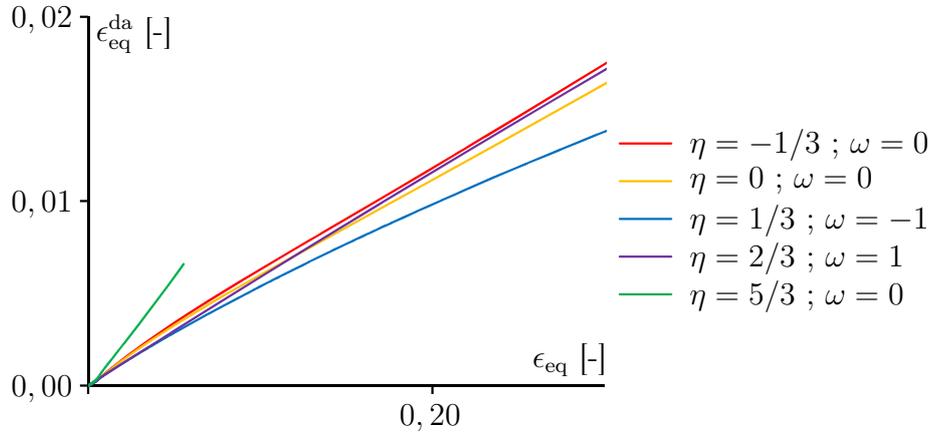
Weiteren kann mit abnehmender Triaxialität  $\eta$  ein Zuwachs in der Abhängigkeit vom Lodeparameter  $\omega$  beobachtet werden. Bei negativen und kleinen positiven Triaxialitäten ergibt sich für den Lodeparameter  $\omega = -1$  eine elliptische Pore mit zwei gestreckten Hauptachsen. Im Gegensatz dazu besitzt die verformte Pore für den Lodeparameter  $\omega = 1$  bei gleicher Triaxialität nur eine gestreckte Hauptachse. Diese Tatsache beweist die Abhängigkeit des Schädigungsmechanismus vom Lodeparameter bei kleinen positiven bzw. negativen Werten der Triaxialität. Ähnliche Beobachtungen wurden von Barsoum und Faleskog [8], Danas und Ponte Castaneda [52], Dunand und Mohr [54] und Wierzbicki et al. [131] in ihren Untersuchungen gemacht. Zusätzlich ist zu beobachten, dass für die große negative Triaxialität  $\eta = -1$  die Porengröße abnimmt. Dies ist ein Hinweis auf das Vorhandensein eines Grenzwertes, unterhalb dem keine weitere Schädigung mehr auftritt. In der Literatur wurde dieser Effekt bereits von Bao und Wierzbicki [6] und Kweon [81] diskutiert, da im Rahmen von experimentellen Untersuchungen ebenfalls das Vorhandensein dieses Grenzwertes zu beobachten ist.

Die Abb. 4.1 zeigt die Entwicklung der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{da}$  (Gl. (2.39)) in den jeweiligen Hauptrichtungen der Belastung (1-, 2- und 3-Richtung) in Abhängigkeit der Vergleichsverzerrung  $\epsilon_{eq}$  (Gl. (3.33)) im Verlauf der Belastung. Für den Zugversuch mit der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  (blau) ist ein deutlicher Anstieg der Schädigungsverzerrung  $A_1^{da}$  in 1-Richtung

zu verzeichnen. Zusätzlich zeigt sich für die unbelastete 2- und 3-Richtung eine leichte Abnahme der Schädigungsverzerrung. Diese Beobachtungen decken sich mit der Entwicklung der Porenform (Tab. 4.1). In 1-Richtung bildet sich eine gestreckte Achse aus, wohingegen in 2- und 3-Richtung kurze Achsen vorhanden sind. Die anfangs kugelförmige Pore entwickelt sich zu einer eiförmigen Pore.

Die Ergebnisse des Schubversuches mit  $\eta = 0$  und  $\omega = 0$  liefern im Gegensatz dazu ein anderes Bild der Entwicklung der Schädigungsverzerrungen. Die Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  besitzt einen geringeren Anstieg als die des Zugversuches. Die Schädigungsverzerrung  $A_2^{\text{da}}$  ist nahezu zu vernachlässigen, da diese Werte nahe null annimmt. Die Schädigungsverzerrung  $A_3^{\text{da}}$  in 3-Richtung besitzt betragsmäßig die gleiche Größenordnung wie die Schädigungsverzerrung in 1-Richtung. Mit Hilfe dieser Beobachtungen lässt sich bestätigen, dass bei schubdominierten Belastungen nahezu isochore Schädigungsverzerrungen auftreten. Auch für diesen Belastungsfall lassen sich Zusammenhänge zwischen der Entwicklung der Schädigungsverzerrungen und der Entwicklung der Porenform herstellen (Tab. 4.1). Es entsteht eine linsenförmige Pore, die in 1-Richtung gestreckt und in 3-Richtung betragsmäßig gleich gestaucht wird. Die Verformung der Pore ist nicht durch eine Porenaufweitung, sondern durch eine Gestaltänderung charakterisiert.

Neben den Schädigungsverzerrungen werden zur Beurteilung der Schädigung auch die Schädigungsvergleichsverzerrungen  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}$  (Gl. (3.34)) in Abhängigkeit der Vergleichsverzerrung  $\epsilon_{\text{eq}}$  betrachtet (Abb. 4.2). Diese skalare Größe ist besonders zur quantitativen Beurteilung der Schädigung geeignet. Für alle betrachteten Lastfälle ist ein deutlicher Anstieg der Schädigungsvergleichsverzerrung zu beobachten, wobei der Anstieg für große positive Werte der Triaxialität ( $\eta = 5/3$ ) stärker ist als für niedrigere Werte der Triaxialität (z. B.  $\eta = 0$ ). Trotz des stärkeren Anstiegs erreicht die Simulation mit der Triaxialität  $\eta = 5/3$  nur eine maximale Schädigungsvergleichsverzerrung von 0,007. Dieser vergleichsweise niedrige Wert wird erreicht, da das Material mit steigender Triaxialität und dem damit verbundenen steigenden Einfluss der Invarianten  $I_1$  immer spröder wird. Es treten im Matrixmaterial nur geringe Plastizierungen vor dem endgültigen Versagen auf. Auffällig ist außerdem, dass für negative Triaxialitäten ( $\eta = -1/3$ ) ebenfalls ein Anstieg der Schädigungsvergleichsverzerrung zu beobachten ist, obwohl für diesen Fall eine reine Druckbelastung aufgebracht wird und dadurch, wie zuvor



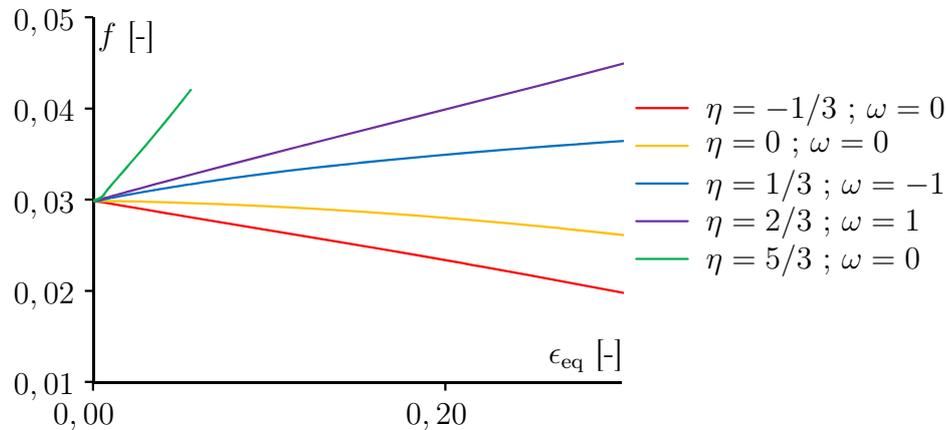
**Abb. 4.2:** Entwicklung der Schädigungsvergleichsverzerrung für unterschiedliche Werte der Triaxialität und des Lodeparameters

diskutiert, keine weitere Schädigung zu erwarten gewesen wäre. Dies ist damit zu begründen, dass bei der Bestimmung der Schädigungsvergleichsverzerrung  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}$  (Gl. (3.34)) nur der Betrag der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  verwendet wird, also auch negative Hauptwerte (Zusammendrücken der Pore) zu einem Anwachsen des skalaren Parameters führen.

Daher wird zusätzlich die Entwicklung der Porosität  $f$  in Abhängigkeit der Vergleichsverzerrung  $\epsilon_{\text{eq}}$  betrachtet (Abb. 4.3). Die Porosität  $f$  wird in jedem Lastschritt aus den geometrischen Eigenschaften des RVEs mit

$$f = \frac{V_{\text{Pore}}}{V} \quad (4.1)$$

ermittelt. Dabei charakterisiert der Parameter  $V_{\text{Pore}}$  das aktuelle Volumen der Pore und der Parameter  $V$  das gesamte Volumen des RVEs. Die Ergebnisse dieser Auswertung (Abb. 4.3) zeigen für große Triaxialitäten einen Anstieg der Porosität  $f$ . Für schubdominierte Belastungen ( $\eta = \omega = 0$ ) bleibt die Porosität nahezu konstant, was erneut auf ein isochores Verhalten hinweist. Im Gegensatz dazu ist für negative Triaxialitäten ( $\eta = -1/3$ ) eine Abnahme der Porosität zu beobachten. Daraus lässt sich schließen, dass für negative Werte der Triaxialität keine weitere Schädigung auftritt. Aufgrund der Ergebnisse der durchgeführten mikromechanischen numerischen Simulationen wird im Rahmen dieser Arbeit der Grenzwert, unterhalb dem keine Schädigung mehr auftritt, bei der Triaxialität



**Abb. 4.3:** Entwicklung der Porosität  $f$  für unterschiedliche Werte der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$

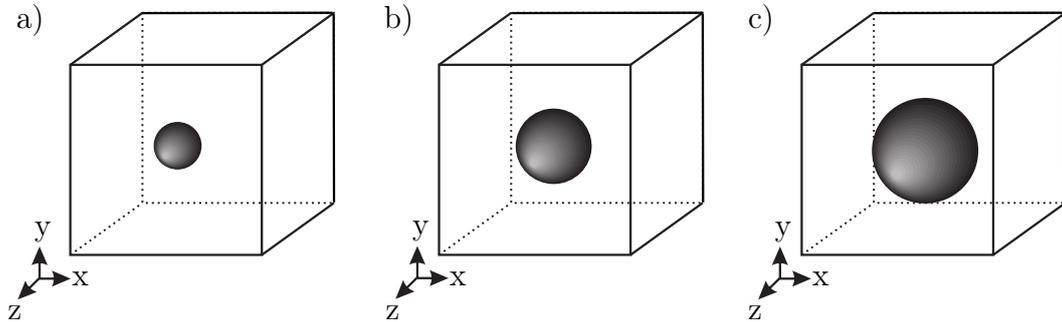
$\eta = -1/3$  gewählt [6, 39].

Abschließend lässt sich festhalten, dass bei Betrachtung der Ergebnisse der Ein-Poren-Modelle mit der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  erste Rückschlüsse auf das Verhalten der Poren unter verschiedenen Belastungen möglich sind. Die Ergebnisse vermitteln einen Eindruck darüber, welche Schädigungsmechanismen infolge der jeweiligen Belastung zu erwarten sind. Zusätzlich wird deutlich, dass besonders die Schädigungsverzerrung und auch die Schädigungsvergleichsverzerrung bei der Formulierung der Materialgesetze von Bedeutung sind, da ihre Entwicklung direkte Zusammenhänge zum Verhalten der Pore zeigen (Tab. 4.1).

## 4.2 Variation der Porosität

Um den Einfluss unterschiedlicher Porositäten untersuchen zu können, werden neben den Simulationen mit einer Anfangsporosität von 3% (P3K) zusätzliche Berechnungen mit einer Anfangsporosität von 1% (P1K) und 10% (P10K) durchgeführt (Abb. 4.4). Bei der Auswertung der numerischen Studien werden alle die Schädigung charakterisierenden Größen auf die entsprechende Anfangsporosität bezogen.

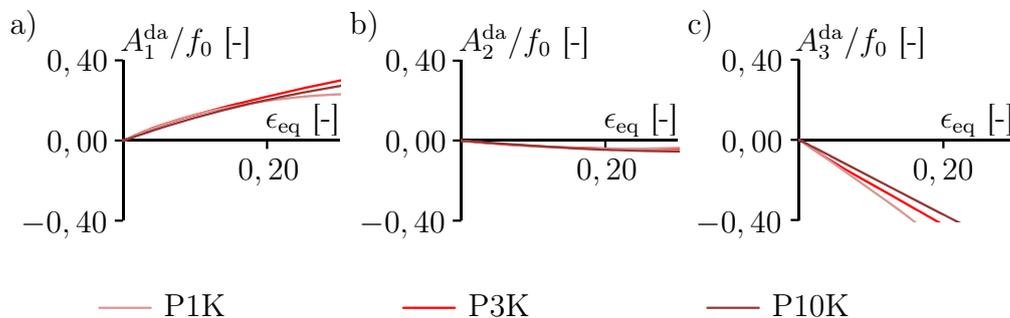
Bei der Triaxialität  $\eta = -1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  wird während der Berechnung eine druckdominierte Belastung aufgebracht (Tab. 3.1). Bei Betrachtung



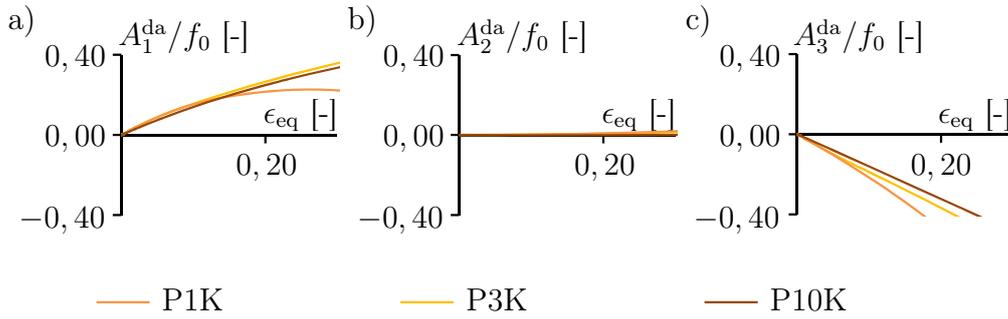
**Abb. 4.4:** Variation der Porosität a) P1K b) P3K c) P10K

zung der bezogenen Schädigungsverzerrungen in 1-, 2- und 3-Richtung (Abb. 4.5) in Abhängigkeit der Vergleichsverzerrung  $\epsilon_{eq}$  zeigen sich nur geringe Abweichungen in den Ergebnissen für unterschiedlich gewählte Werte der Anfangsporosität. Die Ergebnisse der Schädigungsverzerrung im Verhältnis zur Anfangsporosität  $A_1^{da}/f_0$  (Abb. 4.5a)) der Berechnungen mit der Anfangsporosität 1% (P1K) stimmen nahezu mit den Ergebnissen der Berechnungen mit einer Anfangsporosität von 3% (P3K) überein. Diese Beobachtung gilt auch für die Ergebnisse der Simulationen der Berechnungen mit der Anfangsporosität 10% (P10K). Für das Verhältnis der Schädigungsverzerrung zur Anfangsporosität  $A_2^{da}/f_0$  (Abb. 4.5b)) sind fast keine Abweichungen zu beobachten. Die Ergebnisse der bezogenen Schädigungsverzerrung  $A_3^{da}/f_0$  (Abb. 4.5c)) zeigen ebenfalls nur geringe Abweichungen bei unterschiedlichen Anfangsporositäten.

Ähnliche Ergebnisse zeigen sich für den schubdominierten Lastfall, für den  $\eta = \omega = 0$  gilt (Abb. 4.6). Es sind unwesentliche Unterschiede in den Ergebnissen



**Abb. 4.5:** Vergleich der bezogenen Schädigungsverzerrung in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = -1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$

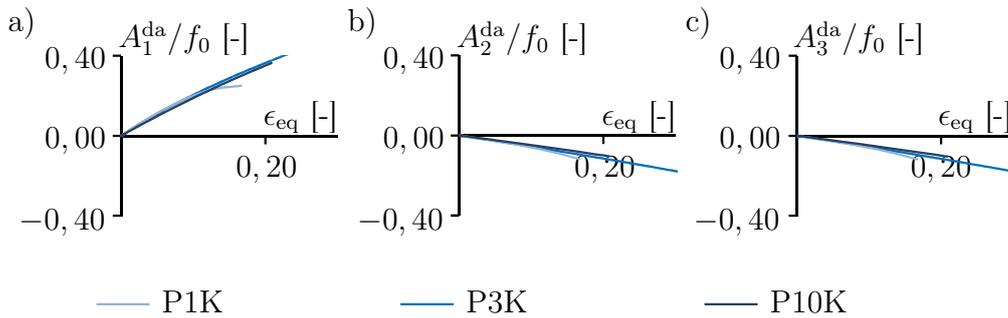


**Abb. 4.6:** Vergleich der bezogenen Schädigungsverzerrung in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 0$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$

der bezogenen Schädigungsverzerrungen  $A_1^{da}/f_0$  (Abb. 4.6a)) und  $A_3^{da}/f_0$  (Abb. 4.6c)) für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$  zu erkennen. Die Ergebnisse des Verhältnisses der Schädigungsverzerrung zur Anfangsporosität  $A_2^{da}/f_0$  (Abb. 4.6b)) weisen keine Unterschiede bei verschiedenen Anfangsporositäten auf.

Für die Simulationen mit der Spannungstriaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  liegt eine Zugbelastung in 1-Richtung als Belastung vor. Es zeigen sich nahezu keine Abweichungen bei den Ergebnissen der bezogenen Schädigungsverzerrungen (Abb. 4.7). Die bezogene Schädigungsverzerrung  $A_1^{da}/f_0$  (Abb. 4.7a)) nimmt für alle untersuchten Variationen der Porosität positive Werte an. Des Weiteren sind die bezogenen Schädigungsverzerrungen  $A_2^{da}/f_0$  (Abb. 4.7b)) und  $A_3^{da}/f_0$  (Abb. 4.7c)) identisch, was auf die übereinstimmenden Lastfaktoren in 2- und 3-Richtung zurückzuführen ist (Tab. 3.1). Diese Verhältnisse von Schädigungsverzerrung zu Anfangsporosität nehmen negative Werte an.

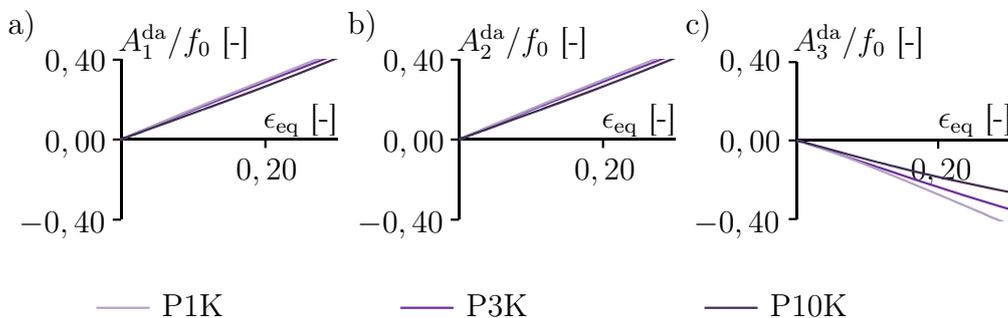
Während der Simulationen mit der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$  wird eine identische Zugbelastung in 1- und 2-Richtung (Tab. 3.1) aufgebracht. Dadurch ergeben sich übereinstimmende Ergebnisse für die bezogenen Schädigungsverzerrungen  $A_1^{da}/f_0$  (Abb. 4.8a)) und  $A_2^{da}/f_0$  (Abb. 4.8b)). Die Abweichungen zwischen den einzelnen Simulationen mit unterschiedlich gewählten Werten der Anfangsporosität sind vernachlässigbar. Für das Verhältnis der Schädigungsverzerrung zur Anfangsporosität  $A_3^{da}/f_0$  (Abb. 4.8c)) sind geringe Unterschiede in den Ergebnissen für unterschiedliche Anfangsporositäten zu beobachten. Die Resultate der Berechnung P1K sind kleiner als die der Berechnung P3K. Die Ergebnisse der Simulation P10K sind größer. Die Größenordnung



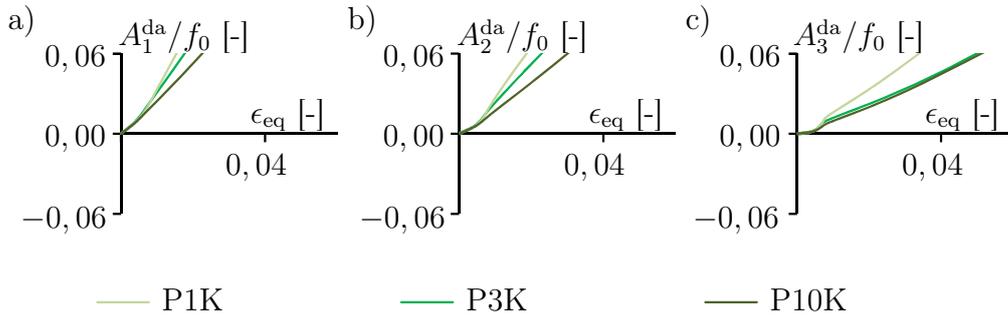
**Abb. 4.7:** Vergleich der bezogenen Schädigungsverzerrung in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$

dieser Abweichungen ist jedoch so gering, dass diese, wie bei zuvor diskutierten Lastfällen (Abb. 4.5-4.7), zu vernachlässigen sind.

Ebenfalls werden die Ergebnisse eines Lastfalls mit einer hohen Spannungstriaxialität untersucht. Dafür wird ein Lastfall mit der Triaxialität  $\eta = 5/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  betrachtet (Abb. 4.9). Bei diesem Lastfall werden Zugbelastungen in alle drei Hauptrichtungen aufgebracht (Tab. 3.1). Auffällig bei den Ergebnissen der Schädigungsverzerrungen ist, dass diese um den Faktor 7 kleiner sind als die der zuvor betrachteten Lastfälle. Auch die Vergleichsverzerrung  $\epsilon_{eq}$  ist um den Faktor 5 kleiner. Aufgrund der deutlich kleineren Größenordnung der Ergebnisse kommen bereits geringe Abweichungen deutlich zum Vorschein. Die auftretende geringere Größenordnung der Ergebnisse ist darauf zurückzuführen, dass mit steigenden hydrostatisch dominierten Belastungen die plastischen



**Abb. 4.8:** Vergleich der bezogenen Schädigungsverzerrung in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$  für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$

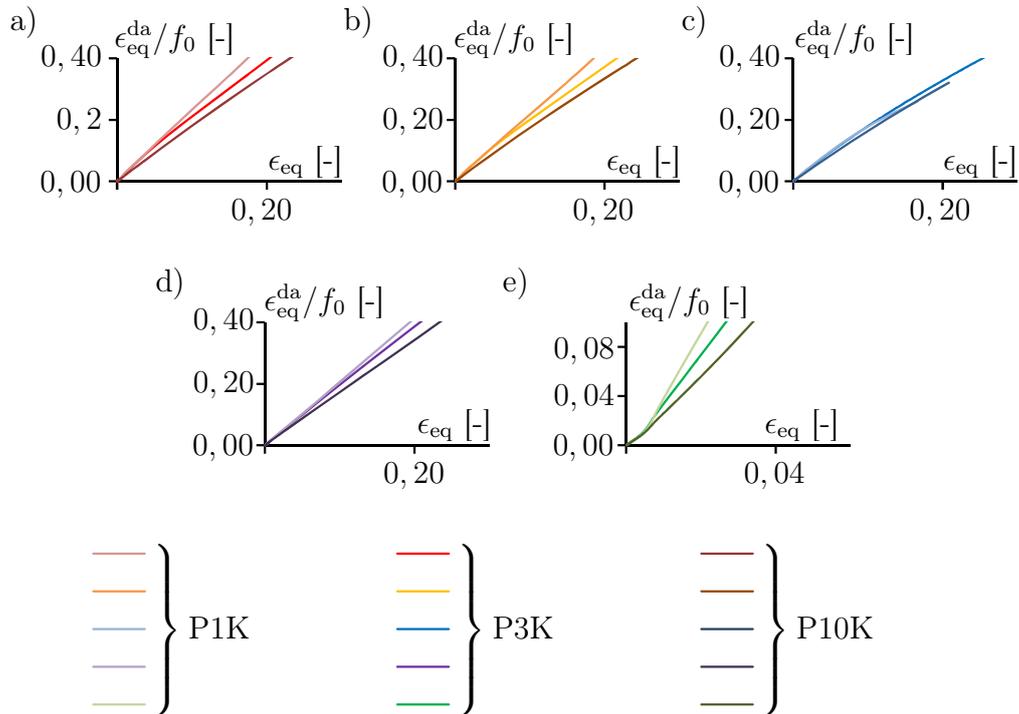


**Abb. 4.9:** Vergleich der bezogenen Schädigungsverzerrung in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 5/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$

Verzerrungen und damit auch die Gesamtverzerrungen kleiner werden. Begründet werden kann dieses Verhalten durch das verwendete Materialgesetz NLISO, welches eine Von-Mises-Fließbedingung verwendet, die in Abhängigkeit der Invarianten des deviatorischen Spannungstensors  $J_2$  formuliert ist (Kap. 3.2.1) und somit kein plastisches Fließen bei hydrostatischen Spannungszuständen simuliert.

Auch wenn die Größenordnung der Abweichungen (Abb. 4.9) zwischen den Ergebnissen der bezogenen Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}/f_0$  nur sehr gering ist, können diese bei Betrachtung der Ergebnisse identifiziert werden. Die Abweichungen der Ergebnisse der Simulationen mit unterschiedlichen Anfangsporositäten besitzen für die bezogenen Schädigungsverzerrungen  $A_1^{\text{da}}/f_0$  (Abb. 4.9a)) und  $A_2^{\text{da}}/f_0$  (Abb. 4.9b)) eine ähnliche Größenordnung. Die Ergebnisse der Berechnung P1K liegen oberhalb und die der Berechnung P10K liegen unterhalb der Ergebnisse der bezogenen Schädigungsverzerrung der Referenzsimulation P3K. Auch bei dem Verhältnis der Schädigungsverzerrung zur Anfangsporosität  $A_3^{\text{da}}/f_0$  (Abb. 4.9c)) ist ein ähnliches Verhalten zu beobachten.

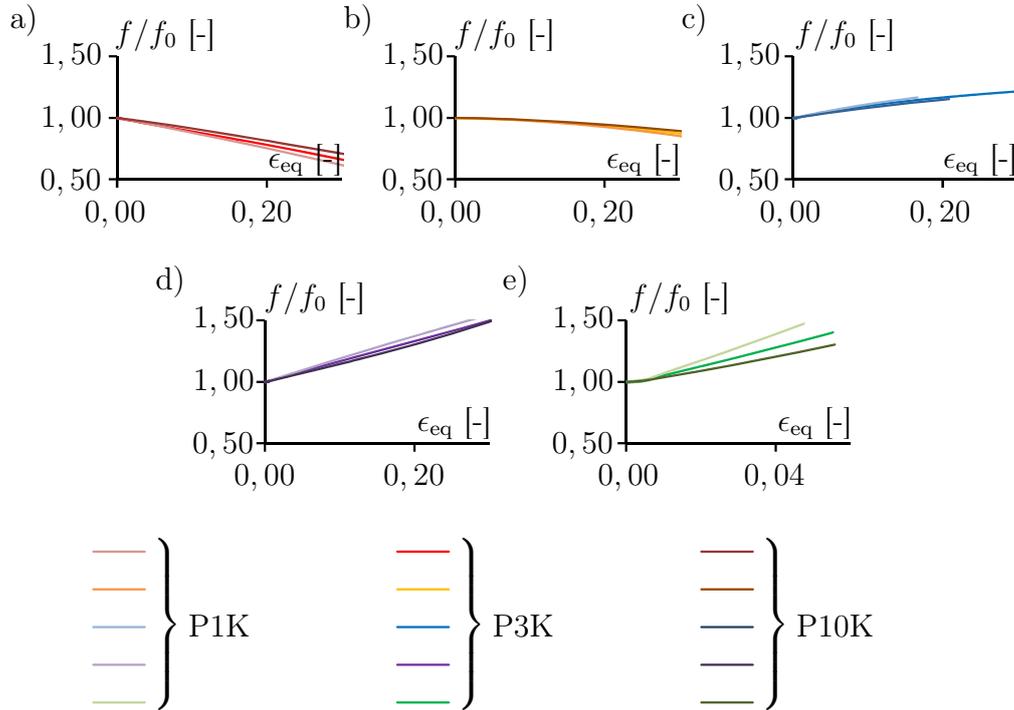
Neben den bezogenen Schädigungsverzerrungen wird auch die Entwicklung der Schädigungsvergleichsverzerrung  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}$  im Verhältnis zur Anfangsporosität  $f_0$  in Abhängigkeit der Vergleichsverzerrung  $\epsilon_{\text{eq}}$  (Abb. 4.10) betrachtet, um qualitative Aussagen über die Entwicklung der Schädigung treffen zu können. Bei allen untersuchten Lastfällen ist ein deutlicher Anstieg der bezogenen Schädigungsvergleichsverzerrungen festzustellen. Für den Lastfall  $\eta = -1/3$  und  $\omega = 0$  (Abb. 4.10a)) sind geringe Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Simulation mit



**Abb. 4.10:** Vergleich der bezogenen Schädigungsvergleichsverzerrung bei unterschiedlichen Werten der Triaxialität und des Lodeparameters für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$

einer Anfangsporosität von 1% (P1K) und der Referenzsimulation P3K festzustellen. Die Kurve dieser Ergebnisse befindet sich etwas oberhalb der Kurve der Referenzsimulation. Im Gegensatz dazu weisen die Ergebnisse der Simulation mit einer Anfangsporosität von 10% (P10K) kaum Unterschiede auf. Die Kurve liegt mit geringem Abstand unterhalb der Simulation mit einer Anfangsporosität von 3% (P3K). Ein vergleichbares Bild zeigt sich für die anderen Lastfälle (Abb. 4.10b)-4.10e)). Bei dem Lastfall mit reiner Zugbelastung in 1-Richtung (Abb. 4.10c)) sind sogar fast keine Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Simulationen mit unterschiedlich gewählten Anfangsporositäten  $f_0$  festzustellen.

Zusätzlich zur bezogenen Schädigungsvergleichsverzerrung  $\epsilon_{eq}^{da}/f_0$  wird auch die bezogene Porosität  $f/f_0$  zur Beurteilung der Entwicklung der Schädigung herangezogen. Bei Betrachtung der Ergebnisse wird deutlich, dass für nahezu alle Lastfälle (Abb. 4.11a)-4.11d)) nur geringfügige Abweichungen zwischen den Simulationen P1K, P3K und P10K auftreten. Nur für den Lastfall mit der hohen



**Abb. 4.11:** Vergleich der bezogenen Porosität bei unterschiedlichen Werten der Triaxialität und des Lodeparameters für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$

Triaxialität  $\eta = 5/3$  (Abb. 4.11e)) sind geringe Abweichungen zwischen den Ergebnissen für die bezogene Porosität zu beobachten. Die Größenordnung dieser ist jedoch, wie bei den zuvor betrachteten Ergebnissen, vernachlässigbar klein.

Eine weitere Schlussfolgerung, die bei Betrachtung der Entwicklung der bezogenen Porosität getroffen werden kann, ist, dass mit Hilfe dieser Größe beurteilt werden kann, ob Schädigung auftritt oder nicht. Diese Beobachtung wurde bereits in Kap. 4 anhand von Abb. 4.3 erläutert. Für große Triaxialitäten kommt es zu einem Anstieg der Porosität (Abb. 4.11c)-4.11e)). Im Gegensatz dazu ist bei kleinen Triaxialitäten (Abb. 4.11a) und 4.11b)) eine Abnahme der bezogenen Porosität zu beobachten. Diese Feststellung bestätigt erneut das Vorhandensein eines Grenzwertes für die Spannungstriaxialität, unterhalb dessen keine Schädigung mehr auftritt.

Bei der Betrachtung unterschiedlicher Anfangsporositäten wird deutlich, dass diese kaum einen Einfluss auf das allgemeine Verhalten der Pore unter einer Belas-

tung haben. Sowohl die bezogenen Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}/f_0$ , als auch die bezogenen Schädigungsvergleichsverzerrungen  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}/f_0$  und die bezogene Porosität  $f/f_0$  entwickeln sich unabhängig von dem Wert der Anfangsporosität  $f_0$  nahezu identisch. Die Abweichungen besitzen stets eine sehr geringe Größenordnung. Des Weiteren zeigen sich erneut die in Kap. 4.1 beobachteten Tendenzen bei der Entwicklung der bezogenen Schädigungsverzerrung, sodass sich daraus ableiten lässt, dass sich auch für unterschiedliche Anfangsporositäten die Poren unter Belastung entsprechend identisch verformen (Tab. 4.1).

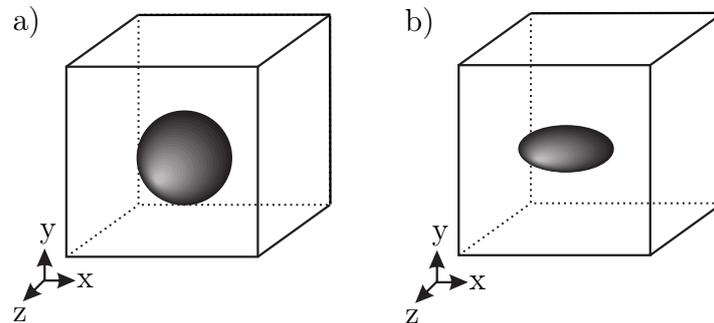
### 4.3 Variation der Porenform

Da bei der Herstellung von duktilen Metallen nicht nur unterschiedlich große Poren, sondern auch unterschiedlich geformte Poren entstehen, soll auch dieser Einfluss auf das makroskopische Modell im Folgenden betrachtet werden. Um unterschiedlich geformte Poren abzubilden, werden ellipsenförmige Poren mit unterschiedlich skalierten Hauptachsen und der Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$  verwendet (Kap. 3.2.2). In Abb. 4.12 sind zwei Variationen anschaulich dargestellt. Dabei wird unterschieden zwischen Poren mit zwei großen Hauptachsen (Abb. 4.12a)) und Poren mit einer großen Hauptachse (Abb. 4.12b)). Bei der Verwendung von zwei gestreckten Hauptachsen ergeben sich flache, linsenförmige Poren und bei der Verwendung einer gestreckten Hauptachse eiförmige Poren. Zusätzlich zu den in Abb. 4.12 dargestellten ellipsenförmigen Poren werden folgende weitere Porenformen untersucht:

- P10E2-1-2,
- P10E1-2-2,
- P10E1-2-1 und
- P10E1-1-2,

wobei die Zahlenfolge in der Benennung der Simulation die Skalierungsfaktoren der Hauptachsen der Poren in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung angibt (Tab. 3.2).

Als Referenzsimulation wird in diesem Fall ein Ein-Poren-Modell mit einer kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität 10% verwendet, da ein Vergleich der

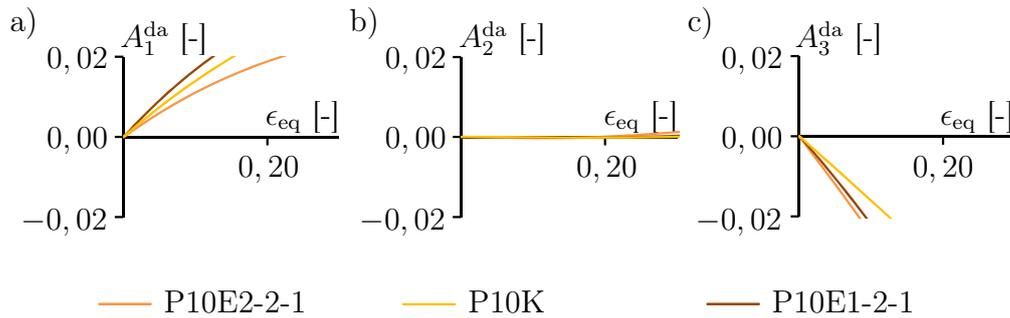


**Abb. 4.12:** Variation der Porenform durch unterschiedlich gewählte Verhältnisse der Hauptachsen a) P10E2-2-1 b) P10E2-1-1

Schädigungsentwicklung nur unter der Voraussetzung einer gleichen Anfangsporosität möglich ist. Bei der Untersuchung dieser Ergebnisse werden die Schädigungsverzerrungen und die Schädigungvergleichsverzerrungen für ausgewählte Porenformen und Lastfälle betrachtet, da sich für alle weiteren untersuchten Lastfälle und Porenformen ein äquivalentes Bild ergibt. Bei den ausgewählten Berechnungen handelt es sich um Simulationen mit einer ellipsenförmigen Pore mit einer großen Hauptachse (P10E1-2-1) und um Simulationen mit einer ellipsenförmigen Pore mit zwei großen Hauptachsen (P10E2-2-1).

Bei der Betrachtung der Schädigungsverzerrungen des schubdominierten Lastfalls (Abb. 4.13,  $\eta = \omega = 0$ ) wird deutlich, dass die Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.13a)) positive und die Schädigungsverzerrung  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.13c)) betragsmäßig nahezu identische negative Werte annimmt. Die Schädigungsverzerrung  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.13b)) nimmt Werte nahe Null an. Die Vorzeichen der Ergebnisse der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  entsprechen damit den verwendeten Lastfaktoren. Bei der Schädigungsverzerrung  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.13b)) treten vernachlässigbar geringe Abweichungen auf. Die Resultate für alle Porenformen sind nahezu identisch. Im Gegensatz dazu zeigen sich bei den Schädigungsverzerrungen  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.13a)) und  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.13c)) kleine Abweichungen bei den Ergebnissen der unterschiedlichen Porenformen. Trotz dieser auftretenden Differenzen bildet die Simulation mit der kugelförmigen Pore (P10K) die Ergebnisse im Mittel gut ab.

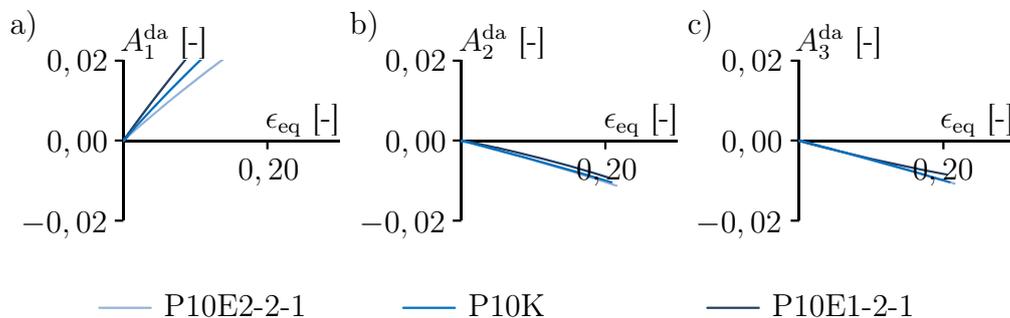
Die Ergebnisse der Simulationen mit einer reinen Zugbelastung in 1-Richtung (Abb. 4.14) besitzen in 1-Richtung ein positives und in 2- und 3-Richtung ein negatives Vorzeichen. Des Weiteren zeigen diese ebenfalls nur geringe Abwei-



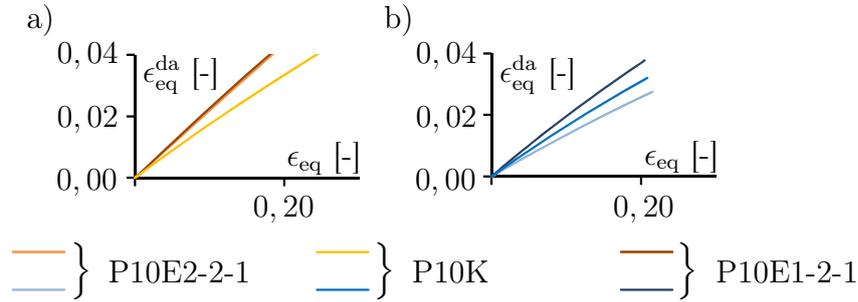
**Abb. 4.13:** Vergleich der Schädigungsverzerrungen in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 0$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Porenformen

chungen. Bei Betrachtung der Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.14a)) sind nur vernachlässigbar kleine Differenzen zwischen den Ergebnissen der Simulationen mit unterschiedlichen Porenformen feststellbar. Die Ergebnisse der Schädigungsverzerrungen  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.14b)) und  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.14c)) weisen hingegen nahezu keine Unterschiede auf. Zusätzlich sind die Ergebnisse dieser Verzerrungen identisch, da in 2- und 3-Richtung die gleichen Lastfaktoren verwendet werden.

Weiterhin werden auch die Ergebnisse der Schädigungsvergleichsverzerrungen betrachtet. Für den schubdominierten Lastfall (Abb. 4.15a)) sind die Ergebnisse für die unterschiedlichen ellipsenförmigen Poren P10E1-2-1 und P10E2-2-1 nahezu identisch. Es treten lediglich kleine Abweichungen zu den Ergebnissen der Referenzsimulation P10K auf. Bei Betrachtung des Lastfalls  $\eta = 1/3$  und  $\omega = -1$  (Abb. 4.15b)) sind kleine Abweichungen zwischen den Ergebnissen der Schädigungs-



**Abb. 4.14:** Vergleich der Schädigungsverzerrungen in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  für unterschiedliche Porenformen



**Abb. 4.15:** Vergleich der Schädigungsvergleichsverzerrungen bei unterschiedlichen Werten der Triaxialität und des Lodeparameters für unterschiedliche Porenformen (a)  $\eta = \omega = 0$  (Gelbtöne) und b)  $\eta = 1/3$ ,  $\omega = -1$  (Blautöne))

gungsvergleichsverzerrungen für die unterschiedlichen Porenformen zu beobachten. Die Ergebnisse der Simulation P10E1-2-1 liegen in geringem Abstand oberhalb der Ergebnisse der Referenzsimulation und die Ergebnisse der Simulation P10E2-2-1 liegen in geringem Abstand unterhalb dieser Ergebnisse. Auch diese Abweichungen besitzen demnach nur eine geringe Größenordnung und die Simulation des RVEs mit der kugelförmigen Pore (P10K) liefert einen guten Mittelwert der Ergebnisse.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die hier dargestellten Ergebnisse einen guten Überblick über das tendenzielle Verhalten unterschiedlicher Porenformen unter Belastung im Vergleich zu kugelförmigen Poren geben. Es treten sowohl bei den Schädigungsvverzerrungen  $A_{(i)}^{da}$  als auch bei den Schädigungsvverzerrungen  $\epsilon_{eq}^{da}$  nur geringe Abweichungen auf. Diese Tendenz zeigt sich auch bei den hier nicht dargestellten weiteren untersuchten Lastfällen und Porenformen. Daraus lässt sich schließen, dass mikrostrukturelle Unterschiede in Form von unterschiedlichen Porenformen kaum Einfluss auf das globale Verhalten des Porenmodells nehmen. Das Ein-Poren-Modell mit einer kugelförmigen Pore kann somit als guter Repräsentant des globalen Verhaltens, auch für abweichende Porenformen, genutzt werden. In der Literatur wurden ebenfalls verschiedene Untersuchungen zum Einfluss der Porenform auf Schädigungs- und Versagensmodelle durchgeführt. Gologanu et al. [62, 63] beziehen unterschiedliche Porenformen mit Hilfe eines Formfaktors als Erweiterung der verallgemeinerten Gurson-Fließbedingung [64] ein.

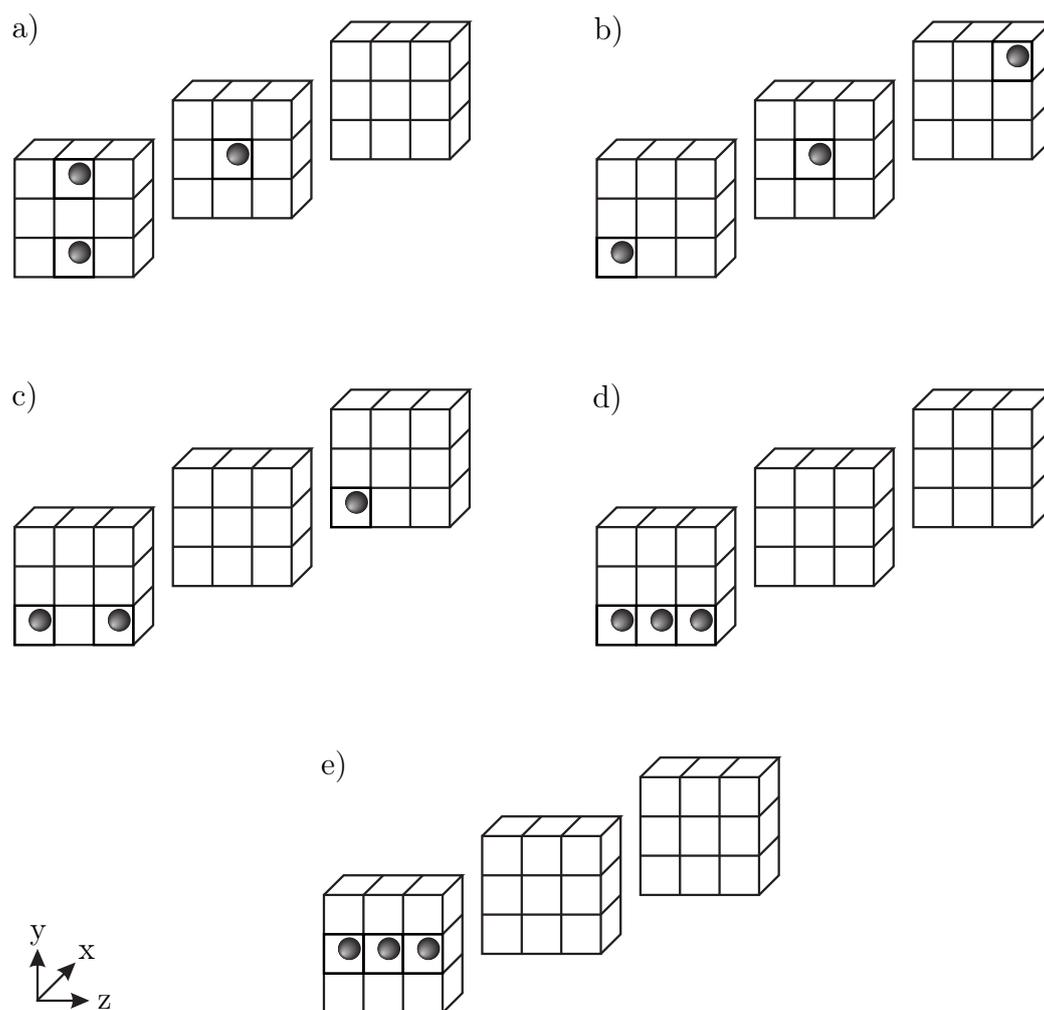
## 4.4 Variationen der Porenanordnung

Neben unterschiedlichen Porengrößen und Porenformen werden auch unterschiedliche Verteilungen von Poren untersucht. Diese zusätzliche Betrachtungsweise wurde gewählt, da in geschädigten Materialien nicht immer regelmäßige Anordnungen von Poren vorhanden sind (Abb. 1.2). Teilweise gibt es Bereiche, in denen die Poren sehr konzentriert vorliegen. Andererseits gibt es auch Bereiche, in denen nur sehr wenige Poren vorkommen [11]. Somit werden im Rahmen dieser Untersuchungen verschiedene Verteilungen mit drei, neun und dreizehn Poren betrachtet, um eine möglichst große Bandbreite an Porenverteilungen zu untersuchen. Auch in der Literatur wurden bereits die Ergebnisse regelmäßiger und unregelmäßiger Porenanordnungen und deren Einfluss auf das globale Verhalten des Matrixmaterials diskutiert [107].

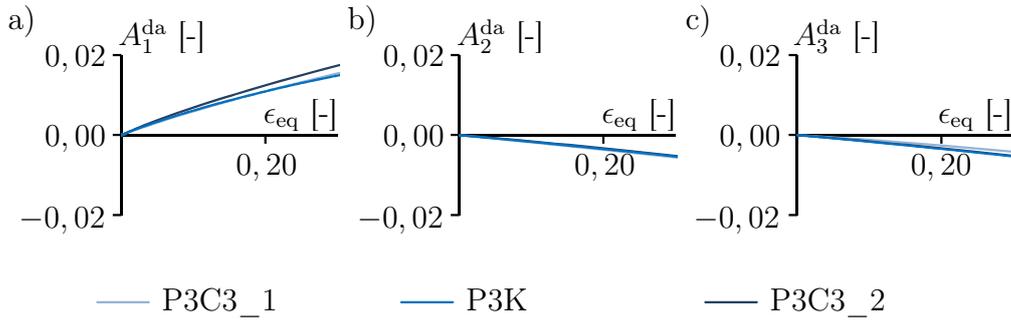
### 4.4.1 Mehr-Poren-Modelle mit drei Poren

Zunächst werden Mehr-Poren-Modelle mit drei Poren an unterschiedlichen Positionen untersucht. Diese Modelle besitzen die Anfangsporosität 3%. Entsprechend werden die Ergebnisse dieser Simulationen mit den Ergebnissen eines Ein-Poren-Modells mit der gleichen Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  verglichen. Bei der Auswahl der Anordnungen werden sowohl regelmäßige (z. B. Abb. 4.16d)) als auch unregelmäßige Anordnungen (z. B. Abb. 4.16c)) berücksichtigt. Neben diesem Aspekt ist es wichtig, Anordnungen zu betrachten, in denen sich Poren konzentriert an einer Stelle befinden (z. B. Abb. 4.16e)). Im Folgenden werden repräsentativ die Ergebnisse von zwei Porenanordnungen (P3C3\_1, Abb. 4.16a) und P3C3\_2, Abb. 4.16b)) und zwei Belastungen vorgestellt, da alle weiteren Anordnungen und Spannungszustände ähnliche Ergebnisse für das Kontinuumsmodell liefern.

Während der Simulationen mit der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  wird eine Zugbelastung in 1-Richtung aufgebracht, die 2- und 3-Richtung bleiben dabei unbelastet. Die Ergebnisse dieser Simulationen (Abb. 4.17) zeigen nur geringe Abweichungen. Die Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.17a)) der Simulation P3C3\_2 ist etwas größer als die der Referenzsimulation und die der Anordnung P3C3\_1. Die Größenordnung dieser Abweichung ist jedoch sehr



**Abb. 4.16:** Mehr-Poren-Modelle mit drei Poren und einer Anfangsporosität von 3% a) P3C3\_1 b) P3C3\_2 c) P3C3\_3 d) P3C3\_4 e) P3C3\_5

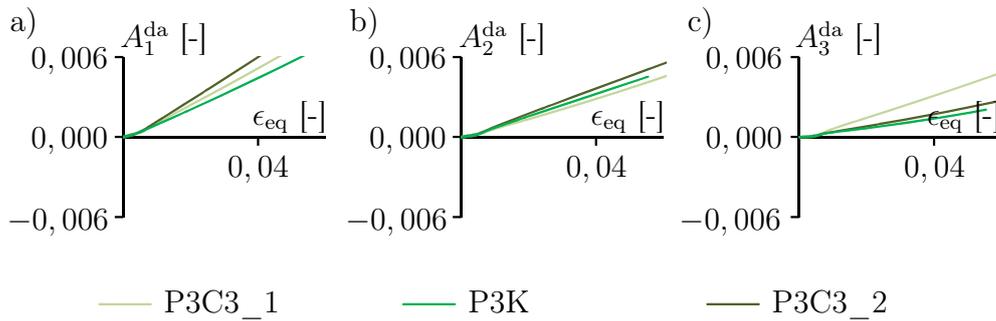


**Abb. 4.17:** Vergleich der Schädigungsverzerrungen in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  für unterschiedliche Porenanordnungen mit drei Poren

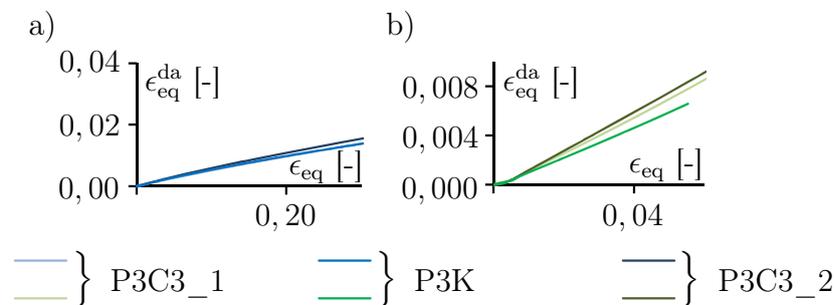
gering. Da die 2- und 3- Richtung nicht belastet werden und damit die identischen Lastfaktoren besitzen (Tab. 3.1) sind auch die Ergebnisse der Schädigungsverzerrungen  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.17b)) und  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.17c)) nahezu identisch. Auch in diesem Fall sind die Abweichungen der Ergebnisse der unterschiedlichen Anordnungen zu den Ergebnissen der Referenzsimulation sehr gering.

Die Schädigungsverzerrungen der Simulationen mit der Triaxialität  $\eta = 5/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  (Abb. 4.18) weisen im Gegensatz zu dem zuvor betrachteten Lastfall Abweichungen auf. Die Schädigungsverzerrungen  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.18a)) der Anordnung P3C3\_1 und P3C3\_2 liegen mit geringem Abstand oberhalb der Verzerrungen der Referenzsimulation P3K. Die Abweichungen besitzen jedoch ebenfalls nur eine geringe Größenordnung. Bei Betrachtung der Schädigungsverzerrung  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.18b)) sind nur minimale Differenzen zwischen den einzelnen Ergebnissen der Schädigungsverzerrung zu beobachten. Die Untersuchung der Schädigungsverzerrung  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.18c)) zeigt, dass ebenfalls nur geringe Abweichungen vorhanden sind. Die Schädigungsverzerrung der Simulation P3C3\_1 ist etwas größer als die der Referenzsimulation P3K und die der anderen Porenanordnung P3C3\_2.

Neben der Schädigungsverzerrung wird auch an dieser Stelle ein skalarer Wert zur Beurteilung der Entwicklung der Schädigung herangezogen: die Schädigungvergleichsverzerrung. Für diesen Wert gibt es für die Simulation mit der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  kaum Abweichungen zwischen den Anordnungen P3C3\_1 und P3C3\_2 sowie der Referenzsimulation P3K (Abb. 4.19a)). Die Kurven dieser Betrachtungen besitzen den gleichen Anstieg. Ein



**Abb. 4.18:** Vergleich der Schädigungsverzerrungen in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 5/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Porenanordnungen mit drei Poren



**Abb. 4.19:** Vergleich der Schädigungsvergleichsverzerrung bei unterschiedlichen Werten der Triaxialität und des Lodeparameters für unterschiedliche Porenanordnungen mit drei Poren (a)  $\eta = 1/3, \omega = -1$  (Blautöne) und b)  $\eta = 5/3, \omega = 0$  (Grüntöne)

ähnliches Bild ergibt sich für die Ergebnisse der Simulation mit der Triaxialität  $\eta = 5/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  (Abb. 4.19b)). Die Schädigungsvergleichsverzerrung der einzelnen Betrachtungen weist nur minimale Unterschiede auf. Auffällig ist jedoch, dass die Größenordnung dieser Ergebnisse wesentlich kleiner ist als die der vorherigen betrachteten Lastfälle. Dieses Verhalten wurde bereits in Kap. 4.2 erläutert. Des Weiteren zeigt die Betrachtung dieses Lastfalls, dass mit steigender Triaxialität auch die Steigung der Schädigungsvergleichsverzerrung zunimmt.

Neben den zuvor dargestellten Ergebnissen der Simulationen unterschiedlicher Lastfälle und Porenanordnungen mit drei Poren zeigen auch die anderen betrachteten Spannungszustände und Cluster mit drei Poren ein vergleichbares Verhalten, sodass diese im Folgenden nicht weiter vorgestellt werden. Die Betrachtung

unterschiedlicher Porenanordnungen mit drei Poren zeigt, dass Unterschiede auf der Mikroebene kaum einen Einfluss auf die makromechanischen Ergebnisse haben, da bei der Auswertung der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  und der Schädigungsvergleichsverzerrungen  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}$  nur geringe Abweichungen zu den Ergebnissen der Referenzsimulation auftreten.

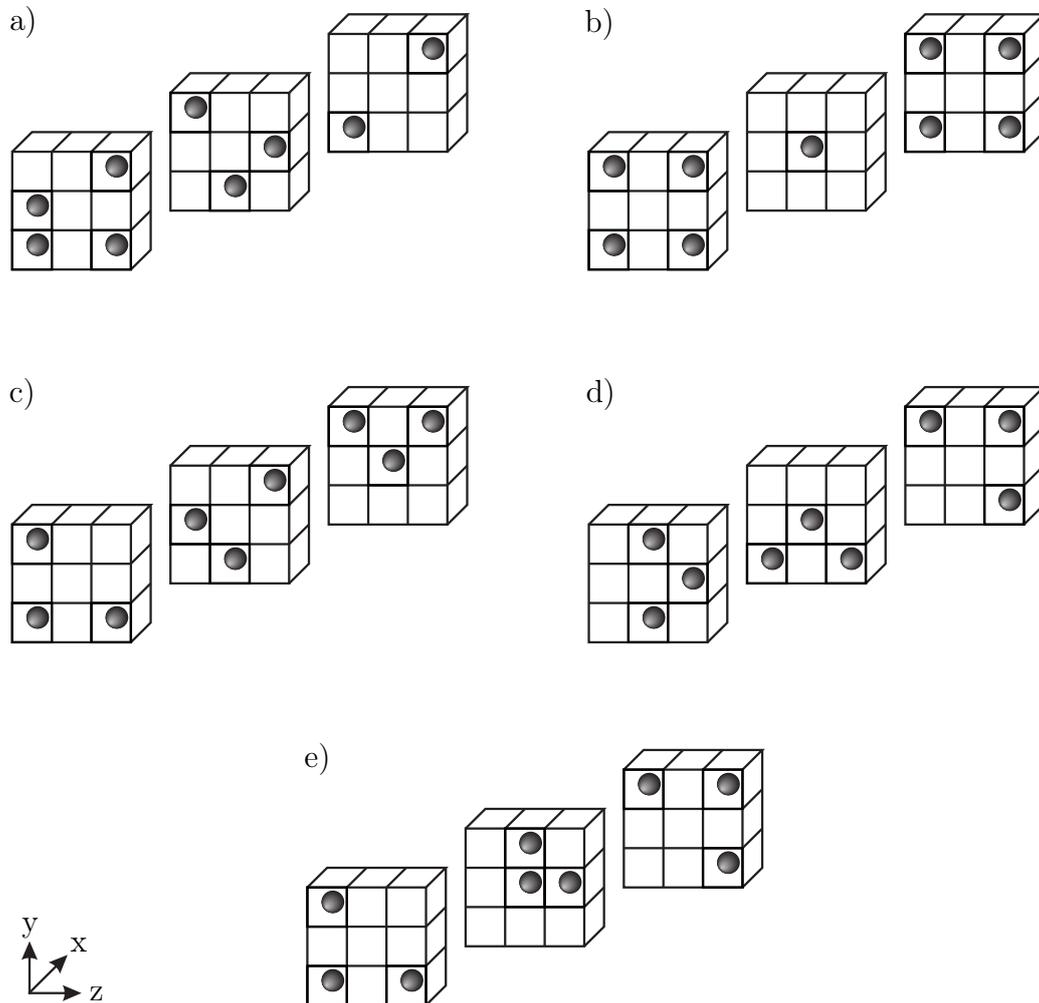
#### 4.4.2 Mehr-Poren-Modelle mit neun Poren

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Modelle mit neun Poren und der Anfangsporosität 10% betrachtet. Auch in diesem Fall werden exemplarisch fünf verschiedene Anordnungen untersucht, die sich sowohl aus regelmäßigen als auch aus unregelmäßigen Porenanordnungen zusammensetzen (Abb. 4.20). Die Referenzsimulation ist ein Ein-Poren-Modell mit der Anfangsporosität 10%. An dieser Stelle werden nur die Ergebnisse der Simulation mit einer schubdominierten Belastung ( $\eta = \omega = 0$ ) dargestellt, da diese repräsentativ für die Ergebnisse der anderen Porenanordnungen und Belastungen sind.

Bei Betrachtung der Schädigungsverzerrungen in 1-, 2- und 3-Richtung des Lastfalls  $\eta = 0$  und  $\omega = 0$  wird deutlich, dass es kaum Unterschiede zwischen den Simulationen des Ein-Poren- und der Mehr-Poren-Modelle gibt. Sowohl die Schädigungsverzerrungen  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.21a)) und  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.21b)), als auch  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.21c)) sind für die unterschiedlichen Modelle nahezu identisch.

Dieses Verhalten zeigt sich ebenfalls bei der Betrachtung der Schädigungsvergleichsverzerrungen  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}$  (Abb. 4.22). Auch für diesen Parameter sind die Ergebnisse der unterschiedlichen Porenanordnungen mit neun Poren und die der Referenzsimulation P10K nahezu identisch. Es treten kaum Abweichungen zwischen den Ergebnissen auf.

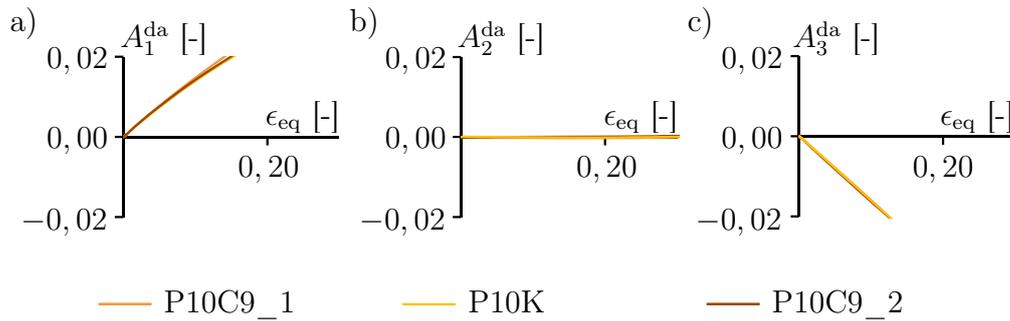
Alle weiteren durchgeführten Betrachtungen mit Clustern mit neun Poren führen zu ähnlichen Ergebnissen und lassen ebenfalls darauf schließen, dass die Unterschiede auf der Mikroebene einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Ergebnisse auf der Makroebene haben. Aus diesem Grund wird darauf verzichtet, an dieser Stelle weitere Ergebnisse darzustellen. Der genannte Rückschluss liegt darin begründet, dass stets nur geringe Abweichungen bei den Ergebnissen unterschiedlicher Lastfälle und verschiedener Porenanordnungen auftreten.



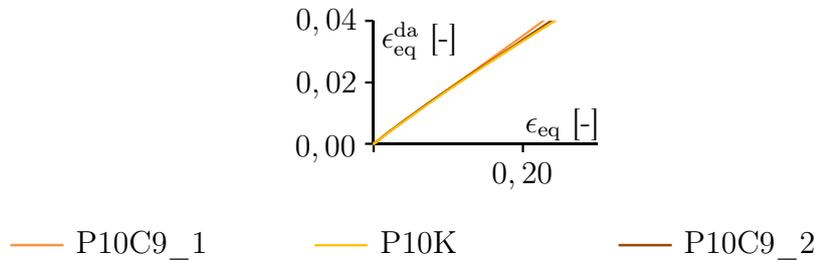
**Abb. 4.20:** Mehr-Poren-Modelle mit neun Poren und einer Anfangsporosität von 10% a) P10C9\_1 b) P10C9\_2 c) P10C9\_3 d) P10C9\_4 e) P10C9\_5

#### 4.4.3 Mehr-Poren-Modelle mit dreizehn Poren

Zusätzlich zu den Simulationen von Mehr-Poren-Modellen mit neun Poren werden Mehr-Poren-Modelle mit der Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$  und dreizehn Poren untersucht. Die Anzahl der Poren wurde bei gleichbleibender Porosität zusätzlich erhöht, um so eine noch größere Konzentration der Poren simulieren zu können. Als Referenzsimulation wird an dieser Stelle ebenfalls eine Simulation mit einer Pore und der Anfangsporosität 10% genutzt. Des Weiteren werden wieder nur exemplarische Lastfälle und Porenanordnungen diskutiert, da diese repräsenta-



**Abb. 4.21:** Vergleich der Schädigungsverzerrungen in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 0$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Porenanordnungen mit neun Poren

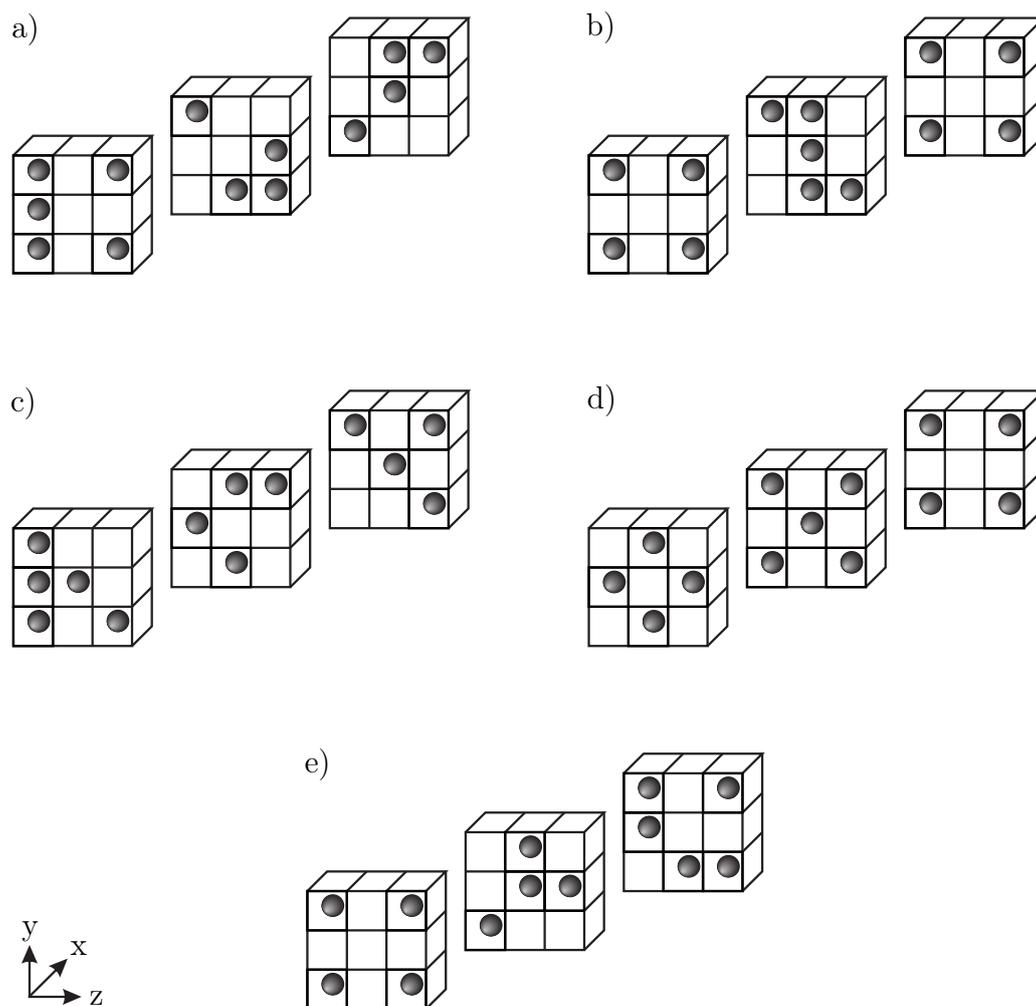


**Abb. 4.22:** Vergleich der Schädigungsvergleichsverzerrung für unterschiedliche Porenanordnungen mit neun Poren ( $\eta = \omega = 0$ )

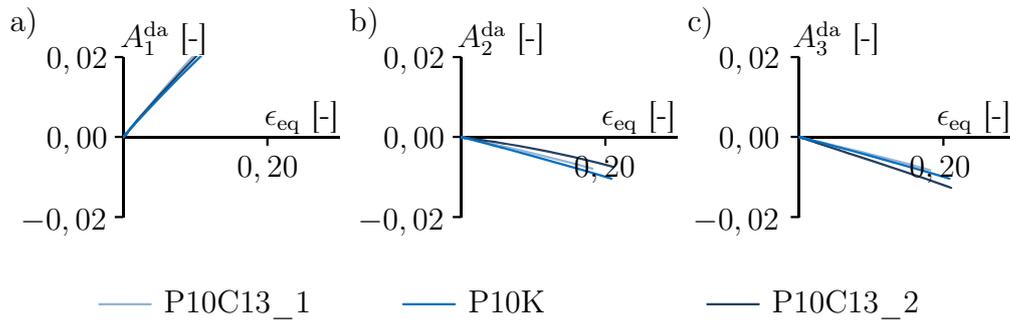
tiv für alle anderen Betrachtungen sind. Bei den gewählten Porenanordnungen handelt es sich um eine unregelmäßige (Abb. 4.23a)) und eine regelmäßige Porenanordnung (Abb. 4.23b)).

Zunächst wird die Entwicklung der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  in 1-, 2- und 3-Richtung betrachtet. Die Ergebnisse des Lastfalls  $\eta = 1/3$  und  $\omega = -1$  (Abb. 4.24) zeigen für die Schädigungsverzerrung in 1-Richtung (Abb. 4.24a)) kaum Abweichungen. Im Gegensatz dazu sind bei den Verzerrungen in 2-Richtung (Abb. 4.24b)) und 3-Richtung (Abb. 4.24c)) geringe Abweichungen vorhanden. Die Größenordnung dieser ist sehr gering. Weiterhin sind die Schädigungsverzerrungen dieser beiden Richtungen identisch, da während der Simulationen die gleichen Lastfaktoren verwendet werden (Tab. 3.1).

Ebenfalls untersucht werden die Schädigungsverzerrungen der Simulationen mit der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$ . Die Ergebnisse der 1-



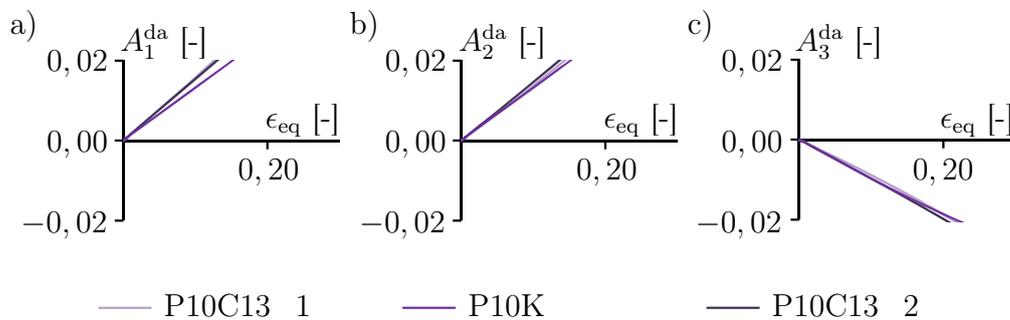
**Abb. 4.23:** Mehr-Poren-Modelle mit 13 Poren und einer Anfangsporosität von 10% a) P10C13\_1 b) P10C13\_2 c) P10C13\_3 d) P10C13\_4 e) P10C13\_5



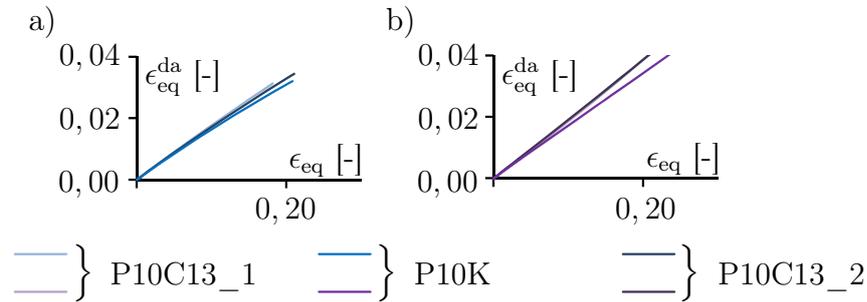
**Abb. 4.24:** Vergleich der Schädigungsverzerrungen in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  für unterschiedliche Porenanordnungen mit 13 Poren

(Abb. 4.25a)) und 2-Richtung (Abb. 4.25b)) sind nahezu identisch. Dies ist ebenfalls auf die identischen Lastfaktoren dieser Richtungen zurückzuführen. Sowohl die Last in 1- als auch die Last in 2-Richtung wird mit dem Faktor 1 skaliert (Tab. 3.1). Zusätzlich sind nur geringe Abweichungen zwischen den Simulationen mit unterschiedlichen Porenanordnungen (P10C13\_1 und P10C13\_2) und der Referenzsimulation P10K festzustellen. Die Ergebnisse der Schädigungsverzerrung  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.25c)) weisen kaum Abweichungen auf.

Bei Betrachtung der Schädigungsvergleichsverzerrungen zeigt sich ein ähnliches Bild wie bei den Schädigungsverzerrungen. Sowohl für den Lastfall  $\eta = 1/3$  und  $\omega = -1$  (Abb. 4.26a)) als auch für den Lastfall  $\eta = 2/3$  und  $\omega = 1$  (Abb. 4.26b)) sind nahezu keine Abweichungen festzustellen. Die Ergebnisse der Porenanordnungen P10C13\_1 und P10C13\_2 sind etwa identisch mit denen der



**Abb. 4.25:** Vergleich der Schädigungsverzerrungen in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$  für unterschiedliche Porenanordnungen mit 13 Poren



**Abb. 4.26:** Vergleich der Schädigungsvergleichsverzerrung bei unterschiedlichen Werten der Triaxialität und des Lodeparameters für unterschiedliche Porenanordnungen mit 13 Poren (a)  $\eta = 1/3, \omega = -1$  (Blautöne) und b)  $\eta = 2/3, \omega = 1$  (Lilatöne)

Referenzsimulation P10K. Zusätzlich ist zu beobachten, dass beide betrachteten Lastfälle einen nahezu identischen Anstieg besitzen.

Abschließend lässt sich festhalten, dass auch eine Steigerung der Porenkonzentration auf dreizehn Poren in einem Cluster nicht zu großen Abweichungen zwischen den Ergebnissen der untersuchten Porenanordnungen und der Referenzsimulation geführt haben. Es treten geringe Abweichungen bei den Ergebnissen der Schädigungsverzerrungen und den Schädigungsvergleichsverzerrungen auf, die Größenordnung dieser ist jedoch meist vernachlässigbar gering. Diese Beobachtung lässt auch an dieser Stelle den Rückschluss zu, dass mikromechanische Unterschiede einen marginalen Einfluss auf die Ergebnisse auf der Makroebene haben. Dadurch wird deutlich, dass die Ein-Poren-Modelle eine gute Approximation unterschiedlicher Gegebenheiten im Matrixmaterial (Porenform, Porenkonzentration etc.) darstellen.

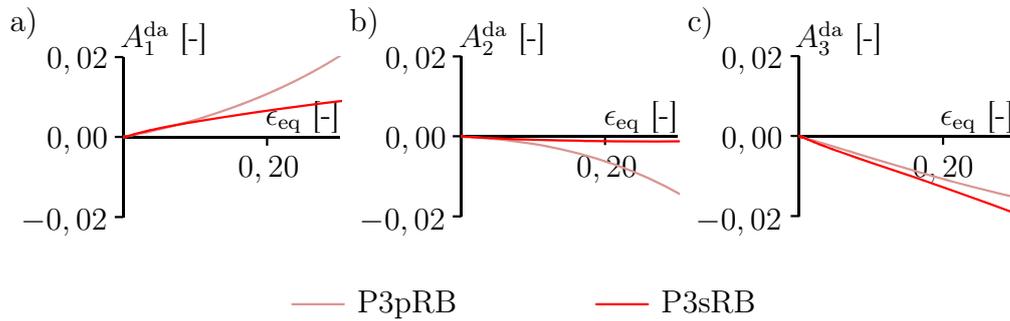
## 4.5 Variation der Randbedingungen

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Simulationen mit periodischen Randbedingungen (Kap. 3.2.5) diskutiert. Dabei wird ein Vergleich mit den Ergebnissen der Simulationen mit Symmetrierandbedingungen durchgeführt. Mit Hilfe dieser Vorgehensweise soll geprüft werden, ob es zu Abweichungen zwischen den numerischen Ergebnissen aufgrund der Verwendung unterschiedlicher Randbedingungen kommt. Die Simulationen mit periodischen Randbedingungen werden mit

einem Ein-Poren-Modell mit einer Anfangsporosität von 3% (P3pRB) durchgeführt. Um einen aussagekräftigen Vergleich durchzuführen, wird bei Verwendung der Symmetrierandbedingungen ebenfalls ein Ein-Poren-Modell mit der Porosität  $f_0 = 3\%$  (P3sRB) verwendet. Von besonderem Interesse sind bei dieser Untersuchung Simulationen mit kleinen Triaxialitäten, da es sich hierbei um schubdominierte Lastfälle handelt. Diese Lastfälle zeigen bei der Verwendung periodischer Randbedingungen deutliche Unterschiede im Deformationsverhalten des RVEs [125, 126, 128] im Vergleich zu den Deformationen bei der Verwendung von Symmetrierandbedingungen.

Zunächst werden die Schädigungsverzerrungen der Simulationen mit der Triaxialität  $\eta = -1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  betrachtet (Abb. 4.27). Bei diesem Spannungszustand handelt es sich um einen schubdominierten Lastfall. Für die Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.27a)) sind die Ergebnisse der Simulation mit periodischen Randbedingungen und die der mit Symmetrierandbedingungen zu Beginn der Simulation nahezu identisch. Im weiteren Verlauf treten jedoch Abweichungen auf, da sich lokal verhältnismäßig große Mikrospannungen entwickeln. Diese sind bei der Verwendung von Symmetrierandbedingungen damit zu begründen, dass sich das RVE wesentlich steifer verhält. Deren Folge ist der Anstieg der Schädigungsverzerrungen auf der Makroebene. Ein ähnliches Bild zeigt sich bei der Betrachtung der Schädigungsverzerrung  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.27b)). Die Ergebnisse stimmen zu Beginn der Berechnung etwa überein. Im Anschluss kommt es jedoch zu Abweichungen, deren Größenordnung mit den zuvor diskutierten Abweichungen der Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  nahezu übereinstimmen. Auch diese Abweichungen sind mit den lokal auftretenden größeren Mikrospannungen zu begründen. Im Gegensatz dazu treten bei den Ergebnissen der Schädigungsverzerrung  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.27c)) nur sehr geringe Abweichungen auf. Zusätzlich wird bei der Betrachtung dieser Ergebnisse deutlich, dass sich aufgrund der abweichenden Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  ebenfalls eine leicht abweichende Porenform ergibt.

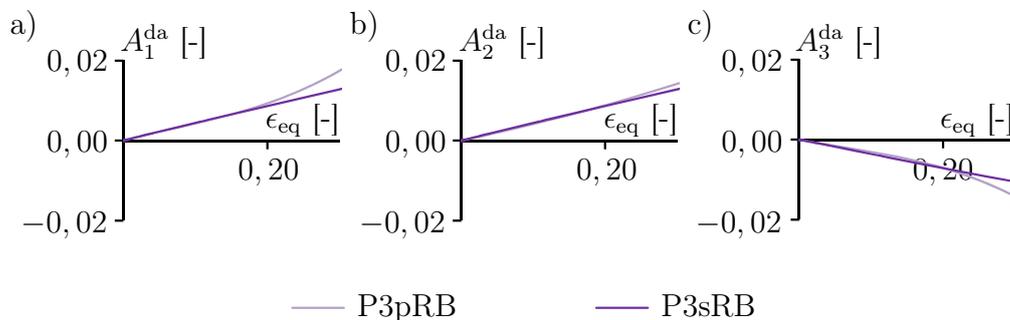
Bei Betrachtung der Ergebnisse der Simulationen mit der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$  wird deutlich, dass bei Verwendung dieses Lastfalls nur geringe Abweichungen zwischen den Simulationen mit periodischen Randbedingungen und Symmetrierandbedingungen auftreten. Sowohl die Ergebnisse der Schädigungsverzerrung in 1- (Abb. 4.28a)) als auch in 3-Richtung (Abb. 4.28c))



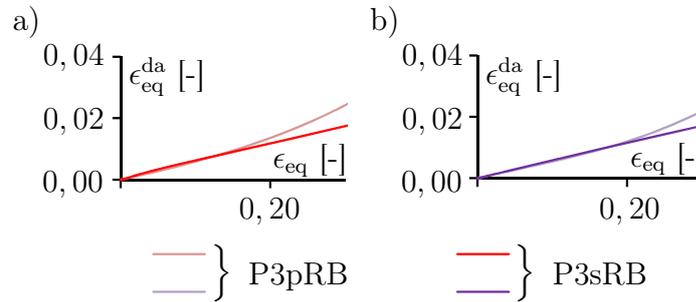
**Abb. 4.27:** Vergleich der Schädigungsverzerrungen in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = -1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Randbedingungen

weisen erst zum Ende der Simulation geringe Differenzen auf. Zuvor sind die Ergebnisse beider verwendeten Randbedingungen nahezu identisch. Diese Differenz ist für die Ergebnisse der Schädigungsverzerrung  $A_2^{da}$  (Abb. 4.28b)) so gering, dass diese vernachlässigt werden kann.

Auch im Falle dieses Vergleichs werden die Schädigungsvergleichsverzerrungen der unterschiedlichen Randbedingungen untersucht. Wie bereits zuvor diskutiert sind auch die Ergebnisse dieser Verzerrung zu Beginn der Simulationen identisch (Abb. 4.29). Erste Abweichungen treten für den Lastfall  $\eta = -1/3$  und  $\omega = 0$  (Abb. 4.29a)) erst ab einer Vergleichsverzerrung von ca.  $\epsilon_{eq} = 0,19$  auf. Zusätzlich besitzen diese nur eine sehr geringe Größenordnung. Ein ähnliches Bild ergibt sich für den Fall  $\eta = 2/3$  und  $\omega = 1$  (Abb. 4.29b)). Die Abweichungen der Ergebnisse der Simulationen mit periodischen Randbedingungen von denen mit Symmetrierand-



**Abb. 4.28:** Vergleich der Schädigungsverzerrungen in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$  für unterschiedliche Randbedingungen



**Abb. 4.29:** Vergleich der Schädigungsvergleichsverzerrungen bei unterschiedlichen Werten der Triaxialität und des Lodeparameters für unterschiedliche Randbedingungen (a)  $\eta = -1/3$ ,  $\omega = 0$  (Rottöne) und b)  $\eta = 2/3$ ,  $\omega = 1$  (Lilatöne)

bedingungen treten ab einer Vergleichsverzerrung von ca.  $\epsilon_{eq} = 0,21$  auf. Diese Abweichungen sind ebenfalls sehr gering und daher vernachlässigbar. Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass an diesem Punkt die Schädigung bereits vorangeschritten sein kann und erste Mikrorisse auftreten, die in der elastisch-plastischen Berechnung mit dem Materialgesetz NLISO zu diesem Zeitpunkt noch nicht berücksichtigt werden.

Die weiteren betrachteten Lastfälle

- $\eta = 0$ ,  $\omega = 0$ ,
- $\eta = 1/3$ ,  $\omega = -1$  und
- $\eta = 5/3$ ,  $\omega = 0$

zeigen ein ähnliches Verhalten bei der Auswertung der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{da}$  und der Schädigungsvergleichsverzerrungen  $\epsilon_{eq}^{da}$ . Die Ergebnisse sind zu Beginn der Simulationen identisch und im weiteren Verlauf treten geringe Abweichungen zwischen den Daten der Simulationen mit periodischen Randbedingungen und denen mit Symmetrierandbedingungen auf, die mit lokal auftretenden Mikrospannungen zu begründen sind. Aufgrund der Ähnlichkeit werden an dieser Stelle keine weiteren Ergebnisse vorgestellt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass auch bei einer Variation der Randbedingungen nur geringe Abweichungen zwischen den Ergebnissen der Simulationen

mit Symmetrierandbedingungen und periodischen Randbedingungen auftreten. Der Unterschied auf der Mikroebene nimmt damit kaum einen Einfluss auf die Ergebnisse auf der Makroebene, sodass sich auch in diesem Fall bestätigt, dass das Ein-Poren-Modell mit Symmetrierandbedingungen eine gute Approximation darstellt. Lediglich das Deformationsverhalten der RVEs mit periodischen Randbedingungen unterscheidet sich von dem der RVEs mit Symmetrierandbedingungen. Besonders deutlich wird dies im Bereich von schubdominierten Belastungen, also für negative und kleine positive Werte der Triaxialität. Die abweichende Deformation des RVEs wird auch bei der Betrachtung der zweidimensionalen Ergebnisse von Tvergaard [125, 126] und Tvergaard und Nielsen [128] deutlich. Eine Erweiterung der Untersuchungen um dreidimensionale Analysen [127] eines RVEs unter Scherbelastung wurde ebenfalls vorgestellt. Dabei zeigen die dreidimensionalen Modelle ein ähnliches Verhalten wie die zuvor analysierten zweidimensionalen Modelle.

## 4.6 Bestimmung und Validierung der Parameter der Materialgleichungen

Zur Bestimmung der Parameter der Materialgleichungen des zuvor diskutierten Kontinuumsmodells (Kap. 2.3.2) werden die Ergebnisse der Simulationen der Ein-Poren-Modelle mit der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  verwendet. Dabei werden zunächst die vom Spannungszustand abhängigen Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  der Schädigungsbedingung (Gl. (2.101)) identifiziert.

Der Beginn der Schädigung wird mit Hilfe experimenteller Ergebnisse eines Zugversuchs einer Aluminiumlegierung ermittelt [31]. Dieser Versuch ergibt, dass die Schädigung bei einer Spannung von  $\sigma_0 = 325$  MPa einsetzt. In Anlehnung an dieses Ergebnis können mit Hilfe der korrespondierenden numerischen Simulation mit der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  weitere den Beginn der Schädigung charakterisierende Parameter bei dem Belastungszustand  $\sigma_0 = 325$  MPa bestimmt werden [39, 42]. In diesem Fall wird die Schädigungsvergleichsverzerrung  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}$  (Gl. (3.34)) als charakteristischer Parameter gewählt. Somit

folgt, dass die Schädigung bei der Schädigungsvergleichsverzerrung

$$\epsilon_{\text{eq0}}^{\text{da}}(\sigma_0 = 325 \text{ MPa}) = 0,0063 \quad (4.2)$$

beginnt. Mit Hilfe dieses Parameters werden für alle untersuchten Spannungszustände die Invarianten  $I_1(\epsilon_{\text{eq0}}^{\text{da}})$  und  $J_2(\epsilon_{\text{eq0}}^{\text{da}})$  ausgewertet und zur Ermittlung des Parameters  $\beta(\eta, \omega)$  der Schädigungsbedingung (Gl. (2.101)) herangezogen. Dadurch ergibt sich für verschiedene Werte der Spannungstriaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$  die nicht-negative Funktion (Abb. 4.30)

$$\beta(\eta, \omega) = \beta_0(\eta, \omega = 0) + \beta_\omega(\omega) \geq 0 \quad (4.3)$$

mit

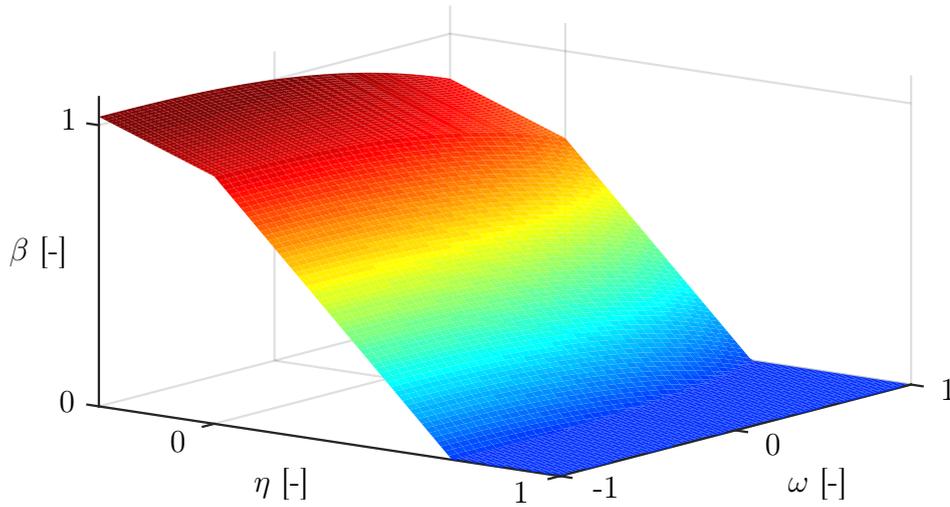
$$\beta(\eta) = \begin{cases} -0,45\eta + 0,85 & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 0 \\ -1,28\eta + 0,85 & \text{für } \eta > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

und

$$\beta_\omega(\omega) = -0,017\omega^3 - 0,065\omega^2 - 0,078\omega \quad (4.5)$$

[39, 42]. Des Weiteren kann der Parameter  $\alpha$  wie folgt gewählt werden:

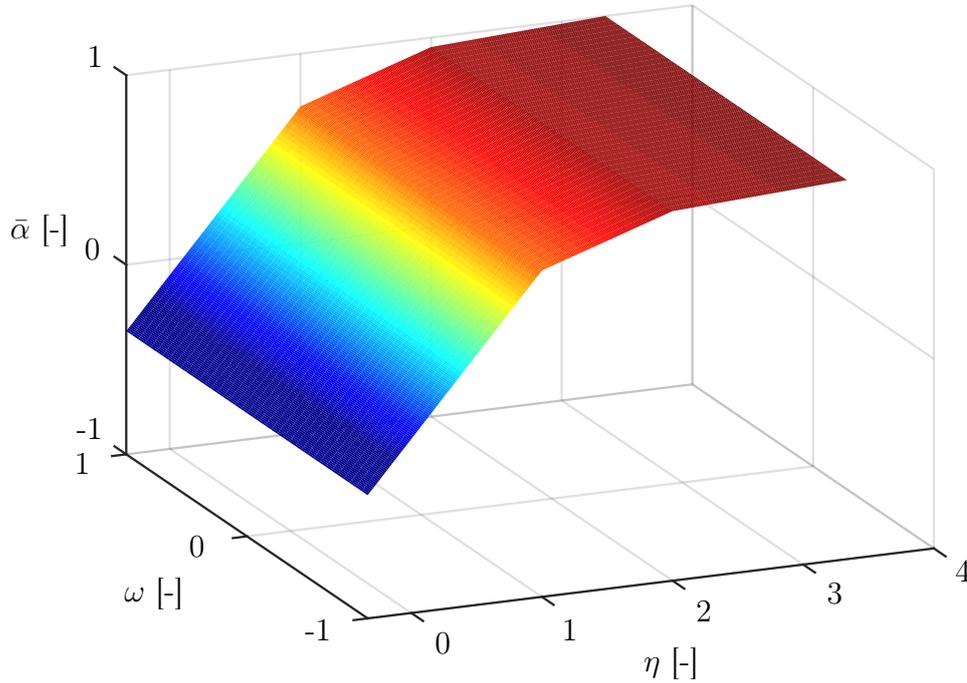
$$\alpha(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 0 \\ 1/3 & \text{für } \eta > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$



**Abb. 4.30:** Schädigungsparameter  $\beta$  der Schädigungsbedingung in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$

Bei Betrachtung der Abb. 4.30 wird deutlich, dass für den negativen Wertebereich der Spannungstriaxialität  $-1/3 \leq \eta \leq 0$  der Schädigungsparameter  $\beta$  (Gl. (4.3)) groß ist und damit auch der Einfluss der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators  $J_2$  dominiert. Dadurch wird der Beginn der Schädigung durch Schermechanismen charakterisiert. Der Einfluss der ersten Invarianten des Spannungstensors  $I_1$  ist dadurch, dass  $\alpha$  (Gl. (4.6)) in diesem Bereich den Wert Null annimmt, vernachlässigbar. Es treten kaum Porenaufweitungen auf, die den Beginn der Schädigung beeinflussen [39, 42].

Im Gegensatz dazu dominiert für große Werte der Triaxialität  $\eta$  die Invariante  $I_1$ . Der Schädigungsparameter  $\beta$  (Gl. (4.3)) nimmt den Wert Null (Abb. 4.30) an, sodass der Beginn der Schädigung durch isotropes Porenwachstum charakterisiert wird [39, 42]. Des Weiteren zeigen die mikromechanischen numerischen Betrachtungen, dass die Triaxialität  $\eta_t$  (Abb. 2.2), welche den Übergang zwischen den jeweiligen Schädigungsmechanismen charakterisiert, vom Lodeparameter abhängt. Für negative Werte des Lodeparameters ( $\omega < 0$ ) sind die Schermechanismen dominanter als für positive Werte des Lodeparameters ( $\omega > 0$ ). Dieses Verhalten spiegelt sich ebenfalls bei der Betrachtung der Porenformen (Tab. 4.1) wieder [39, 42].



**Abb. 4.31:** Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$  des Schädigungsgesetzes in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$

Neben den Parametern der Schädigungsbedingung werden auch die des Schädigungsgesetzes (Gl. (2.108)) unter Verwendung der Ergebnisse der mikromechanischen numerischen Berechnungen identifiziert. Dabei werden die Komponenten der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  (Gl. (2.108), (3.31)) analysiert. Damit ergibt sich der Parameter  $\bar{\alpha}$  (Abb. 4.31) zu

$$\bar{\alpha}(\eta) = \begin{cases} -0,08197 + 0,80411\eta & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 1 \\ 0,49428 + 0,22786\eta & \text{für } 1 < \eta \leq 2 \\ 0,87500 + 0,03750\eta & \text{für } 2 < \eta \leq 10/3 \\ 1 & \text{für } \eta > 10/3. \end{cases} \quad (4.7)$$

Dieser Parameter (Gl. (4.7)) nimmt negative Werte im Bereich negativer Triaxialitäten an und steigt mit steigender Triaxialität bis zu dem maximalen Wert Eins an (Abb. 4.31). Mit steigender Triaxialität wächst somit auch der Einfluss der ersten Invarianten des Spannungstensors  $\mathbf{T}$ . Daraus folgt, dass der Schädigungs-

mechanismus bei hohen Werten der Triaxialität von isotropem Porenwachstum dominiert wird. Basierend auf den numerischen Ergebnissen wird für den Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$  kein Einfluss des Lodeparameters berücksichtigt.

Zusätzlich wird der Parameter  $\bar{\beta}$  in Abhängigkeit der Spannungstriaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$  ermittelt, sodass

$$\bar{\beta}(\eta, \omega) = \bar{\beta}_0(\eta) + f_\beta(\eta)\bar{\beta}_\omega(\omega) \quad (4.8)$$

folgt. Die Komponenten dieser Gleichung (Gl. (4.8)) ergeben sich nach Auswertung der Schädigungsverzerrungen zu

$$\bar{\beta}(\eta, \omega) = \begin{cases} 0,94840 + 0,11965\eta + f_\beta(\eta)\bar{\beta}_\omega(\omega) & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 1/3 \\ 1,14432 - 0,46810\eta + f_\beta(\eta)\bar{\beta}_\omega(\omega) & \text{für } 1/3 < \eta \leq 2/3 \\ 1,14432 - 0,46810\eta & \text{für } 2/3 < \eta \leq 2 \\ 0,52030 - 0,15609\eta & \text{für } 2 < \eta \leq 10/3 \\ 0 & \text{für } \eta > 10/3 \end{cases} \quad (4.9)$$

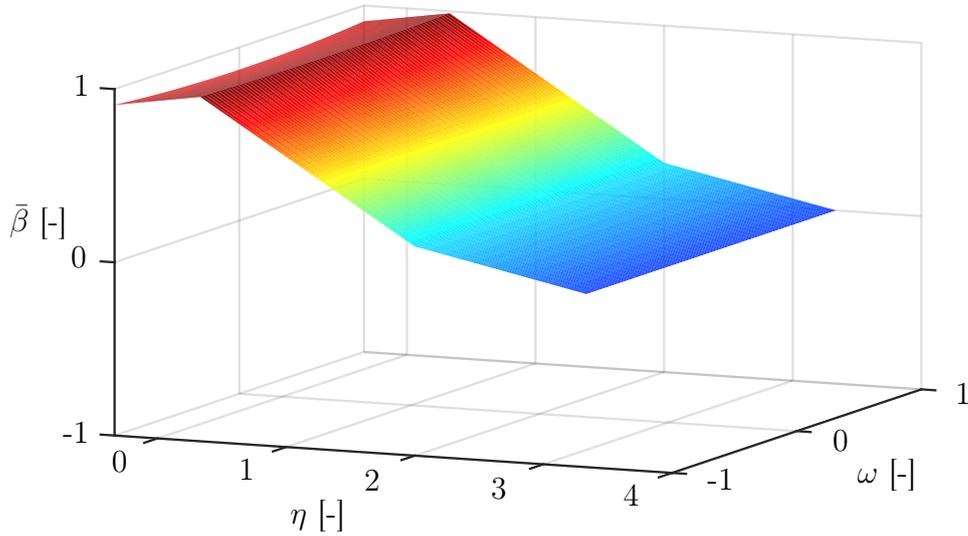
mit

$$f_\beta(\eta) = (-0,0252 + 0,0378\eta) \quad (4.10)$$

und

$$\bar{\beta}_\omega(\omega) = (1 - \omega^2). \quad (4.11)$$

Bei Betrachtung der grafischen Darstellung der Funktion  $\bar{\beta}(\eta, \omega)$  (Abb. 4.32) zeigt sich ein gegensätzliches Verhalten wie für den Parameter  $\bar{\alpha}$ . Mit steigender Triaxialität nimmt der Einfluss des Parameters  $\bar{\beta}$  ab. Für kleine Triaxialitäten besitzt dieser somit Werte nahe Eins und der Schädigungsmechanismus wird von auftretenden Mikroscherrissen charakterisiert. Ebenfalls zeigt sich im Bereich kleiner Triaxialitäten ein Einfluss des Lodeparameters  $\omega$ . Dieser Einfluss wird mit der Gl. (4.11) berücksichtigt. Auch im Rahmen der Untersuchungen anderer Autoren [7, 8, 52, 54, 92] wurde deutlich, dass der Lodeparameter im Bereich kleiner



**Abb. 4.32:** Schädigungsparameter  $\bar{\beta}$  des Schädigungsgesetzes in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$

Triaxialitäten bei der Modellierung der Schädigung nicht vernachlässigt werden darf, da dies eine nicht-akkurate Modellierung des Schädigungs- und Versagensverhaltens zur Folge hat.

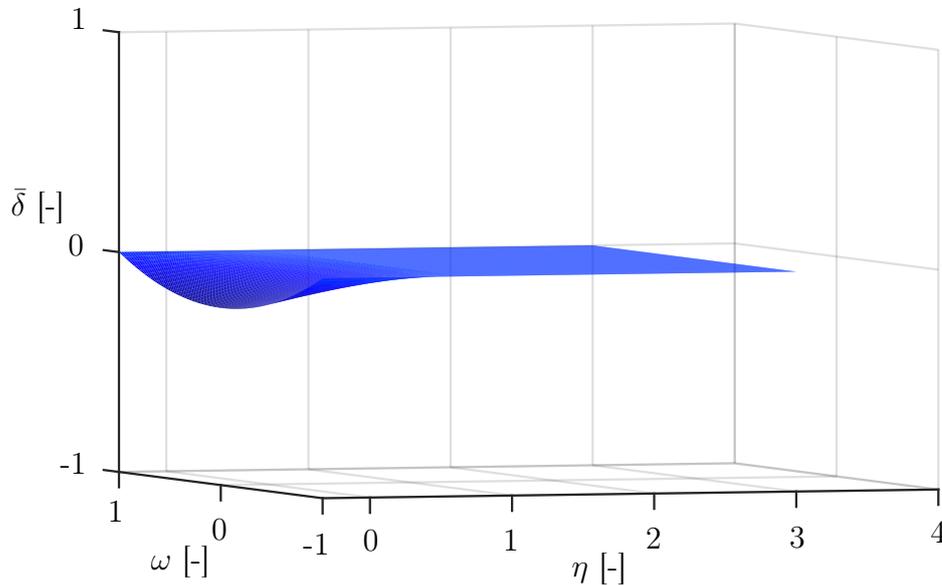
Allerdings sind die Parameter  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\beta}$  allein nicht ausreichend, um die Entwicklung der Schädigung auf der Makroebene zu modellieren. Aus diesem Grund wird zusätzlich der Parameter

$$\bar{\delta}(\eta, \omega) = f_{\delta}(\eta)\bar{\delta}_{\omega}(\omega) \quad (4.12)$$

mit

$$\bar{\delta}(\eta, \omega) = \begin{cases} (-0,12936 + 0,19404\eta)(1 - \omega^2) & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 2/3 \\ 0 & \text{für } \eta > 2/3 \end{cases} \quad (4.13)$$

eingeführt. Die Gl. (4.13) nimmt im Bereich kleiner Triaxialitäten negative Werte an. Dadurch besitzt der Schädigungsparameter eine Bedeutung bei der Modellierung der Schädigungsverzerrungen infolge der Entstehung von Mikroscherrissen. Zusätzlich zeigt sich ein Einfluss des Lodeparameters  $\omega$  im Bereich von negativen



**Abb. 4.33:** Schädigungsparameter  $\bar{\delta}$  des Schädigungsgesetzes in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$

und kleinen positiven Werten der Triaxialität. Dieser konnte auch bei der Formulierung der Parameter  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\beta}$  in einem ähnlichen Wertebereich der Triaxialität festgestellt werden [39, 42]. Auch wenn dieser Parameter nur sehr kleine Werte annimmt, führt eine Vernachlässigung bei der Modellierung zu Fehlern von bis zu 20% in den Schädigungsverzerrungen [65]. Zusätzlich zeigt sich bei der Auswertung der mikromechanischen numerischen Simulationen, dass der Parameter  $\bar{\delta}$  (Gl. (4.13)) für Werte der Triaxialität  $\eta > 2/3$  zu Null wird. Somit ist in diesem Bereich kein Einfluss auf den Schädigungsmechanismus vorhanden.

## 4.7 Diskussion der Ergebnisse

Im Rahmen dieses Abschnitts werden die vorgestellten Ergebnisse für die Schädigungsbedingung und das Schädigungsgesetz kritisch analysiert. Dabei liegt ein besonderes Augenmerk darauf, ob verschiedene Anfangsporositäten, Porenformen oder Porenanordnungen in den entsprechenden Gesetzen gesondert berücksichtigt werden müssen. Des Weiteren wird eine Validierung der vorgestellten Ergebnisse vorgenommen, um so die Übereinstimmung zwischen dem numerischen Experi-

ment (d. h. der mikromechanischen Berechnung (Kap. 3.2)) und dem vorgestellten Kontinuumschädigungsmodell (Kap. 2.3) zu überprüfen.

Aufgrund der großen Menge der untersuchten Variationen wird zunächst die Legende der folgenden Diagramme erläutert (Abb. 4.34). Der Würfel mit einer kugelförmigen Pore symbolisiert dabei die verschiedenen Ein-Poren-Modelle mit einer kugelförmigen Pore. Es werden Modelle mit der Anfangsporosität  $f_0 = 1\%$  (P1K),  $f_0 = 3\%$  (P3K) und  $f_0 = 10\%$  (P10K) untersucht. Zusätzlich wird ein Ein-Poren-Modell mit periodischen Randbedingungen und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  (P3pRB) betrachtet. Die Ein-Poren-Modelle werden durch Datenpunkte in Blautönen gekennzeichnet. Weiterhin werden verschiedene Porenformen im Rahmen der Simulationen analysiert, welche durch den Würfel mit einer ellipsenförmigen Pore symbolisiert werden. Für die Farbgebung wird in diesem Fall ein Grünton verwendet. Es werden sowohl Modelle mit jeweils einer Pore mit zwei gestreckten Hauptachsen (P10E1-2-2, P10E2-1-2 und P10E2-2-1), als auch mit Poren mit einer gestreckten Hauptachse (P10E1-1-2, P10E1-2-1 und P10E2-1-1) untersucht. Zur Analyse des Einflusses unterschiedlicher Porenanordnungen, werden Cluster mit unterschiedlichen Anfangsporositäten und Porenanordnungen betrachtet. Diese werden durch den dreidimensional aufgespaltenen Würfel und die Markierungspunkte in Rottönen symbolisiert. Dabei werden Mehr-Poren-Modelle mit drei Poren und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  (P3C3\_1-5, Abb. 4.16), mit neun Poren und der Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$  (P10C9\_1-5, Abb. 4.20) und mit dreizehn Poren mit der Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$  (P10C13\_1-5, Abb. 4.23) betrachtet.

In den folgenden Diagrammen werden die Funktionen für die Schädigungsbedingung bzw. das Schädigungsgesetz für einen konstanten Wert des Lodeparameters dargestellt. Zusätzlich werden die Ergebnisse der untersuchten mikromechanischen Modelle in diesen Kontext eingeordnet. Dadurch kann herausgearbeitet werden, ob die mit einem Ein-Poren-Modell und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  (P3K) erstellten Funktionen eine gute Approximation für die unterschiedlichen phänomenologischen Eigenschaften eines duktilen Metalls liefern.

Zunächst wird die Verteilung der Ergebnisse der verschiedenen Modelle im Vergleich zu der Funktion  $\beta$  (Gl. (4.3)) der Schädigungsbedingung mit dem Lodeparameter  $\omega = 0$  betrachtet (Abb. 4.35). Dabei wird deutlich, dass die Ergebnisse der

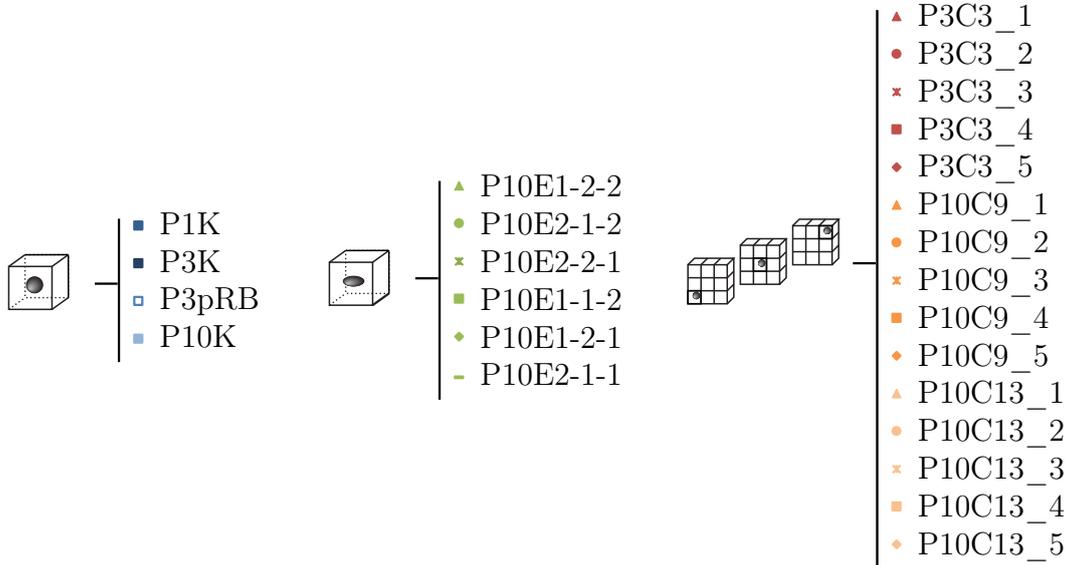


Abb. 4.34: Aufschlüsselung der Legende

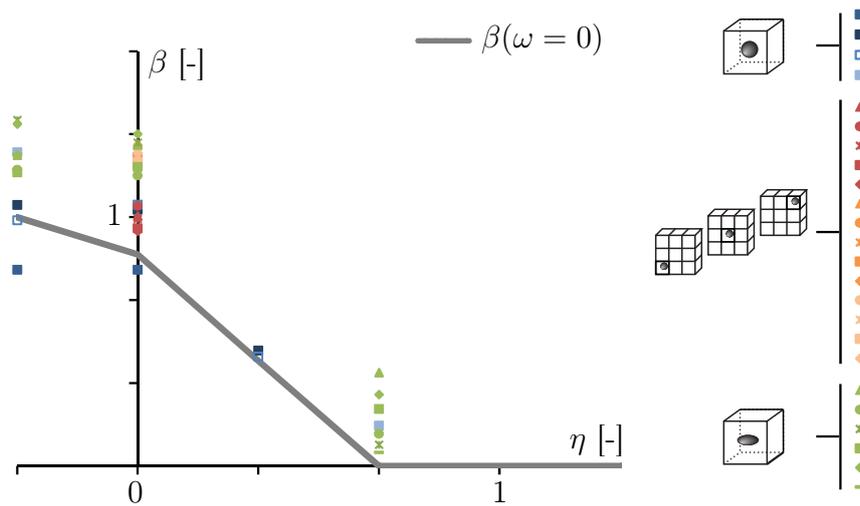
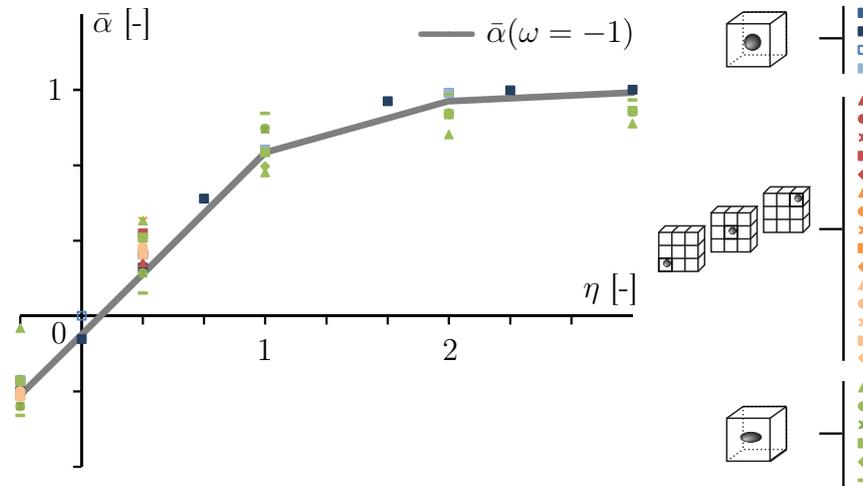


Abb. 4.35: Schädigungsparameter  $\beta$  für den Lodeparameter  $\omega = 0$  und Einordnung der Ergebnisse der verschiedenen numerischen Modelle

Ein-Poren-Modelle mit der vorgeschlagenen Funktion nahezu übereinstimmen. Auch die Ergebnisse der Mehr-Poren-Modelle weisen nur kleinere Abweichungen zu der Funktion  $\beta(\omega = 0)$  auf. Lediglich die Ergebnisse der Simulationen mit unterschiedlichen Porenformen befinden sich oberhalb dieser Funktionen. Hierbei ist jedoch auch zu beachten, dass die Größenordnung dieser Abweichungen in einem moderaten Bereich liegt. Zusätzlich wird deutlich, dass die unterschiedlichen Porenformen nahezu identische Ergebnisse für den Schädigungsparameter  $\beta$  liefern. Zu berücksichtigen ist an dieser Stelle jedoch auch, dass eine konzentrierte Anordnung von gleichgerichteten rein ellipsenförmigen Poren in realen Porenverteilungen quasi nicht vorkommt. Dieser eher unrealistische Zustand passt somit nicht zu den Ergebnissen experimenteller Beobachtungen, sodass die Abweichungen der grünen Punkte von den gewählten Funktionen als weniger kritisch anzusehen sind. Auf die Darstellung der Ergebnisse für den Schädigungsparameter  $\beta$  für den Lodeparameter  $\omega = -1$  und  $\omega = 1$  wird an dieser Stelle verzichtet, da diese ein ähnliches Bild wie die vorausgegangenen Ergebnisse (Abb. 4.35) liefern. Auch bei diesen Fällen zeigen sich geringe Abweichungen im Vergleich zu der vorgeschlagenen Funktion  $\beta$  (Gl. (4.3)), die jedoch ebenfalls eine sehr geringe Größenordnung besitzen.

Abschließend ist festzuhalten, dass die unterschiedlichen phänomenologischen Eigenschaften zwar zu Abweichungen für den Schädigungsparameter  $\beta$  (Gl. (4.3)) führen, diese aber eine sehr geringe Größenordnung besitzen. Somit stellt die vorgeschlagene Funktion  $\beta$  (Gl. (4.3)) der Schädigungsbedingung eine gute Approximation der numerischen Ergebnisse dar.

Weiterhin werden die Ergebnisse der Auswertung des Schädigungsgesetzes diskutiert. Zu Beginn wird dabei der Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$  für den Lodeparameter  $\omega = -1$  (Abb. 4.36) mit den zugehörigen Ergebnissen der verschiedenen numerischen Modelle betrachtet. Die Ergebnisse der Ein-Poren-Modelle befinden sich stets in direkter Nähe zu der vorgeschlagenen Funktion  $\bar{\alpha}$  (Gl. (4.7)). Es treten nur vernachlässigbar geringe Abweichungen auf. Ein ähnliches Bild zeigt sich bei den Ergebnissen der Mehr-Poren-Modelle. Auch in diesem Fall treten geringe Abweichungen auf. Die Ergebnisse der Simulationen mit unterschiedlichen Porenanordnungen liegen in geringem Abstand oberhalb der Funktion für  $\bar{\alpha}(\omega = -1)$ . Für die Resultate der Ein-Poren-Modelle mit unterschiedlichen Porenformen und der

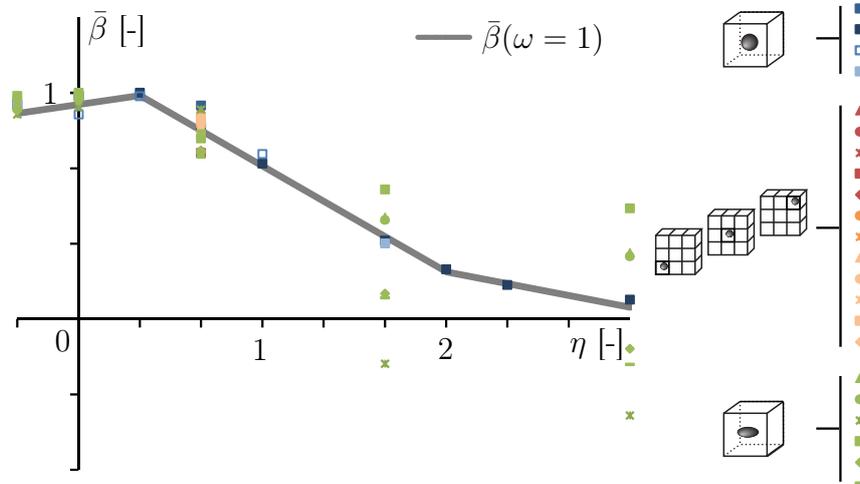


**Abb. 4.36:** Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$  für den Lodeparameter  $\omega = -1$  und Einordnung der Ergebnisse der verschiedenen numerischen Modelle

Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  ist eine ähnliche Tendenz zu beobachten. Die Ergebnisse für den Schädigungsparameter befinden sich leicht unter- bzw. oberhalb der vorgeschlagenen Funktion. Die Größenordnung dieser Abweichungen ist jedoch ebenfalls nur sehr gering. Auch an dieser Stelle wird auf die Darstellung weiterer Ergebnisse für den Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$  für den Lodeparameter  $\omega = 0$  und  $\omega = 1$  verzichtet. Die Resultate dieser zeigen stets nur geringe Abweichungen und stimmen mit den zuvor diskutierten Ergebnissen (Abb. 4.36) nahezu überein.

Aufgrund der nur sehr geringen Abweichungen in den Ergebnissen für den Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$  ist an dieser Stelle festzuhalten, dass die vorgeschlagene Funktion  $\bar{\alpha}$  (Gl. (4.7)) eine gute Näherungslösung für diesen Parameter liefert und keine zusätzlichen Komponenten zur Berücksichtigung verschiedener phänomenologischer Eigenschaften hinzugefügt werden müssen.

Im Folgenden werden die Ergebnisse für den Schädigungsparameter  $\bar{\beta}$  für den Lodeparameter  $\omega = 1$  (Abb. 4.37) analysiert. Für niedrige und moderate Triaxialitäten treten nur geringe Abweichungen im Vergleich zu der vorgeschlagenen Funktion  $\bar{\beta}$  (Gl. (4.8)) auf. Die Ergebnisse der Simulationen mit den verschiedenen phänomenologischen Eigenschaften befinden sich in geringem Abstand ober- oder unterhalb dieser Funktion. Erst ab der Triaxialität  $\eta = 5/3$  treten signifi-

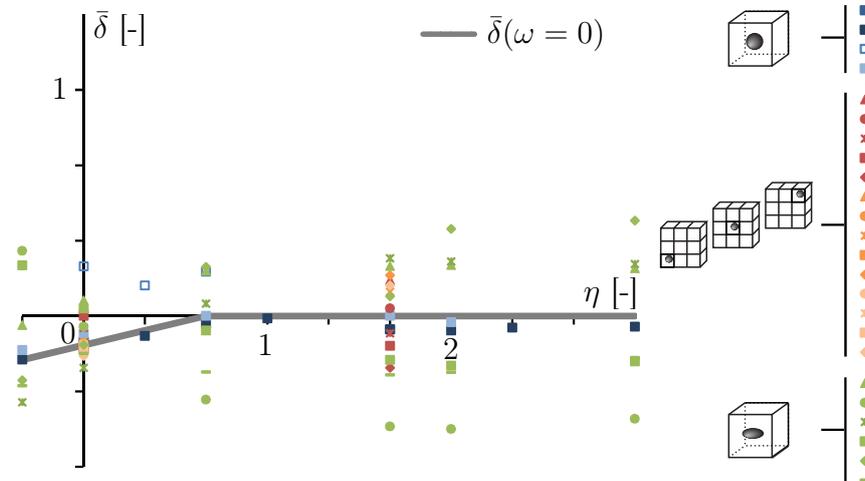


**Abb. 4.37:** Schädigungsparameter  $\bar{\beta}$  für den Lodeparameter  $\omega = 1$  und Einordnung der Ergebnisse der verschiedenen numerischen Modelle

kante Unterschiede bei den Ergebnissen der Untersuchung unterschiedlicher Porenformen auf. Dabei ist jedoch zu beachten, dass trotz der Abweichungen die vorgeschlagene Funktion für den Parameter  $\bar{\beta}$  (Gl. (4.8)) einen guten Mittelwert der Ergebnisse darstellt. Zusätzlich besitzen diese Ergebnisse erneut eine untergeordnete Bedeutung, da, wie bereits zuvor erläutert, die konzentrierte Anordnung ellipsenförmiger Poren in realen Porenanordnungen eher unwahrscheinlich ist. Meist treten nur vereinzelt ellipsenförmige Poren auf. Die weiteren Resultate für die Auswertung des Schädigungsparameters  $\bar{\beta}$  für den Lodeparameter  $\omega = -1$  und  $\omega = 0$  entsprechen den zuvor diskutierten Ergebnissen (Abb. 4.37), sodass auf diese nicht weiter eingegangen wird. Die Ergebnisse zeigen die nahezu gleiche Tendenz.

Aus diesen Beobachtungen folgt, dass trotz der auftretenden Abweichungen, die vorgeschlagene Funktion für den Parameter  $\bar{\beta}$  (Gl. (4.8)) eine gute Approximation der Bandbreite der untersuchten Variationen der mikromechanischen Modelle darstellt.

Neben den Parametern  $\bar{\alpha}$  (Gl. (4.7)) und  $\bar{\beta}$  (Gl. (4.8)) ist auch der Parameter  $\bar{\delta}$  (Gl. (4.13)) des Schädigungsgesetzes (Abb. 4.38) nicht zu vernachlässigen. Auch wenn dieser nur sehr geringe Werte annimmt, führt eine Vernachlässigung zu



**Abb. 4.38:** Schädigungsparameter  $\bar{\delta}$  für den Lodeparameter  $\omega = 0$  und Einordnung der Ergebnisse der verschiedenen numerischen Modelle

Fehlern von bis zu 20% in den Schädigungsverzerrungen. Die Ergebnisse der Ein-Poren-Modelle entsprechen nahezu den Ergebnissen der vorgeschlagenen Funktion  $\bar{\delta}$  (Gl. (4.13)). Nur bei der Verwendung periodischer Randbedingungen treten Abweichungen auf. Des Weiteren zeigen die Ergebnisse der Mehr-Poren-Modelle ebenfalls leichte Abweichungen von der Funktion  $\bar{\delta}$ . Allerdings stellt auch in diesem Fall die vorgeschlagene Funktion (Gl. (4.13)) einen guten Mittelwert der Resultate der numerischen Untersuchungen dar. Bei der Betrachtung der Ergebnisse der Simulationen mit unterschiedlichen Porenformen fällt auf, dass die Ergebnisse dieser eine relativ große Bandbreite besitzen. Auch diese Ergebnisse besitzen eine eher untergeordnete Bedeutung, da das konzentrierte Vorkommen ellipsenförmiger Poren nicht zu experimentellen Beobachtungen passt. Jedoch liefert auch hier die Funktion  $\bar{\delta}$  eine gute Approximation der Ergebnisse. Wie bereits bei den zuvor diskutierten Ergebnissen wird auch an dieser Stelle auf die Darstellung weiterer Resultate für den Lodeparameter  $\omega = -1$  und  $\omega = 1$  verzichtet, da diese der vorangegangenen Analyse (Abb. 4.38) entsprechen. Die vorgeschlagene Funktion für den Parameter  $\bar{\delta}$  (Gl. (4.13)) stellt für die weiteren Lodeparameter ebenfalls eine gute Näherungslösung dar.

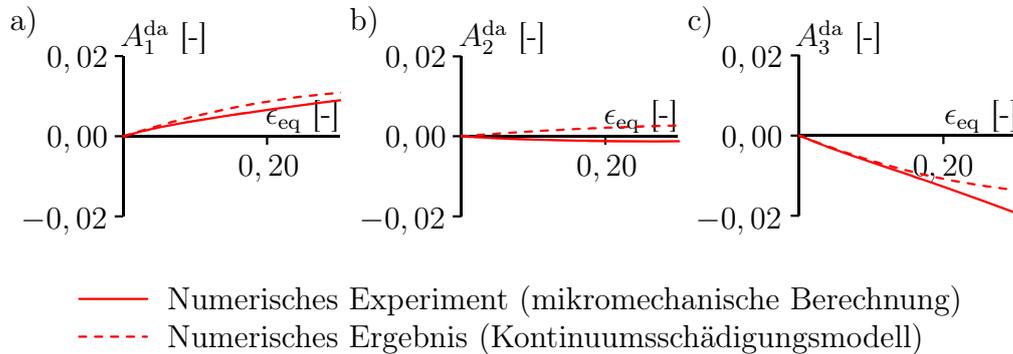
Zusammenfassend lässt sich aus den dargestellten Ergebnissen ableiten, dass die

auftretenden Abweichungen in nahezu allen Fällen gering sind. Auch wenn diese eine etwas größere Größenordnung annehmen, stellt die Funktion  $\bar{\delta}$  (Gl. (4.13)) einen guten Mittelwert des Schädigungsparameters der untersuchten mikromechanischen Variationen dar.

Aufgrund der Tatsache, dass die festgestellten Abweichungen fast immer relativ klein sind, kann davon ausgegangen werden, dass die Gleichungen für die Parameter der Schädigungsbedingung und des Schädigungsgesetzes einen guten Mittelwert der Ergebnisse der vorhandenen mikromechanischen Variationen darstellen. Die im Mittel gültigen Funktionen liefern in sofern ein gutes Ergebnis, da in realen Porenverteilungen gleichzeitig verschiedene mikromechanische Phänomene auftreten können. Eine einzelne Erfassung dieser ist nicht möglich. Daher müssen auch diese unterschiedlichen geometrischen Eigenschaften im Mittel berücksichtigt werden. Des Weiteren stellten auch Needleman und Kushner [107] im Rahmen ihrer Untersuchungen ähnlich große Differenzen fest. Die vorgestellten Gleichungen wurden anhand der Ergebnisse des Ein-Poren-Modells mit einer kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  aufgestellt. Da diese Resultate einen guten Mittelwert darstellen, wird auch die Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells mit diesen vorgenommen. Dabei werden erneut die Lastfälle

- $\eta = -1/3, \omega = 0$  (rot),
- $\eta = 0, \omega = 0$  (gelb),
- $\eta = 1/3, \omega = -1$  (blau),
- $\eta = 2/3, \omega = 1$  (lila) und
- $\eta = 5/3, \omega = 0$  (grün).

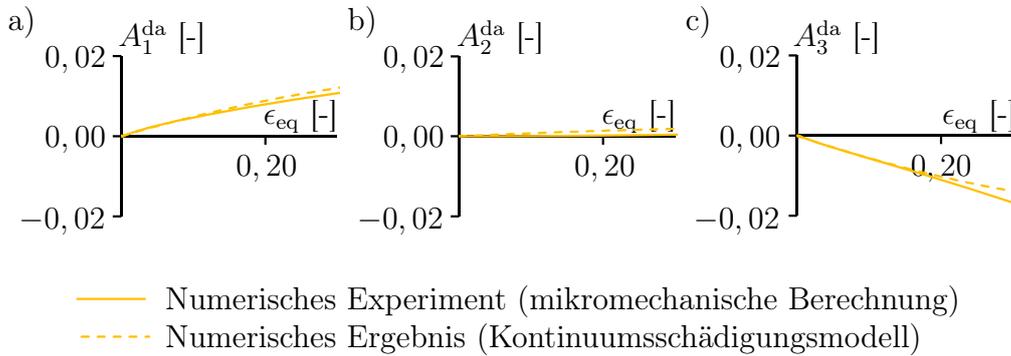
repräsentativ für die gesamte Bandbreite der untersuchten Spannungszustände analysiert. Zur Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells werden die Ergebnisse der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  der mikromechanischen Berechnungen (durchgezogene Linie) mit denen des makromechanischen Modells (gestrichelte Linie) verglichen.



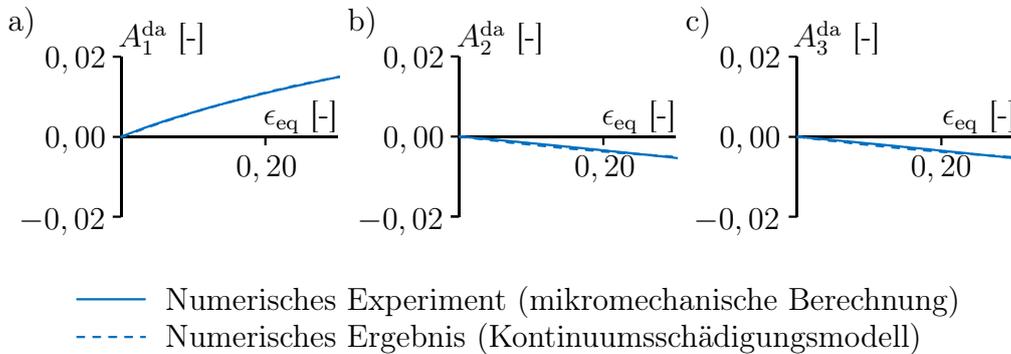
**Abb. 4.39:** Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells für die Triaxialität  $\eta = -1/3$  und den Lodeparameter  $\omega = 0$

Zunächst wird der druckdominierte Spannungszustand mit der Triaxialität  $\eta = -1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  untersucht (Abb. 4.39). Bei der Betrachtung der Ergebnisse wird deutlich, dass das Kontinuumsschädigungsmodell eine sehr gute Approximation der mikromechanischen Simulationen liefert. Für die Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.39a)) stimmen die Ergebnisse nahezu überein. Ein ähnliches Bild ergibt sich für die Schädigungsverzerrungen in 3-Richtung (Abb. 4.39c)). Bis zu einer Vergleichsverzerrung von ca. 0,20 treten vernachlässigbar kleine Abweichungen zwischen den jeweiligen Ergebnissen auf. Ab diesem Punkt treten Differenzen auf, die jedoch mit der vorangeschrittenen Schädigung, bei der eventuell schon Risse durch den Zusammenschluss der Mikrodefekte auftreten, zu begründen sind. Diese Effekte wurden bisher in den Analysen nicht berücksichtigt und sollen im Folgenden betrachtet werden. Auch bei der Schädigungsverzerrung  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.39b)) treten bereits zu Beginn der Simulation geringe Abweichungen auf. Deren Größenordnung befindet sich jedoch ebenfalls in einem moderaten Bereich.

Die Ergebnisse des schubdominierten Lastfalls mit der Triaxialität  $\eta = \omega = 0$  (Abb. 4.40) zeigen eine gute Übereinstimmung bei der Betrachtung der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$ . In Abb. 4.40a) sind diese für die 1-Richtung dargestellt. Es treten nur sehr geringe Abweichungen zwischen den mikromechanischen Berechnungen und dem Schädigungsmodell auf. Ein ähnliches Bild ergibt sich für die Schädigungsverzerrungen in 2- (Abb. 4.40b)) und 3-Richtung (Abb. 4.40c)). Lediglich zum Ende der Berechnungen sind vernachlässigbar kleine Abweichun-



**Abb. 4.40:** Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells für die Triaxialität  $\eta = 0$  und den Lodeparameter  $\omega = 0$

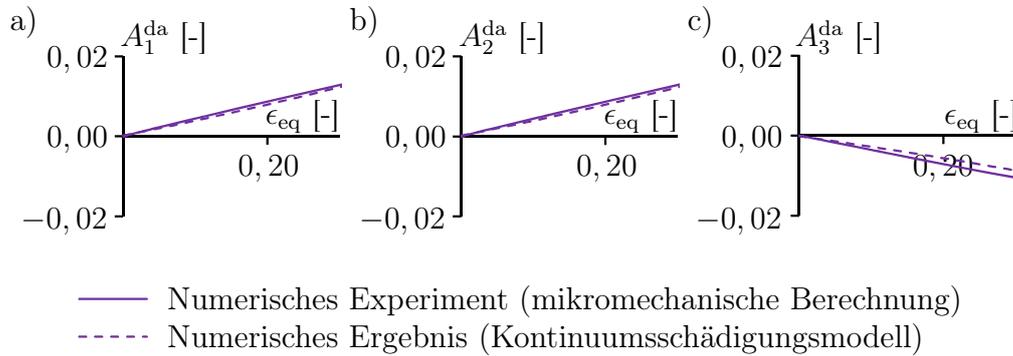


**Abb. 4.41:** Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells für die Triaxialität  $\eta = 1/3$  und den Lodeparameter  $\omega = -1$

gen zu beobachten, die auch für diesen Spannungszustand auf die fortgeschrittene Schädigung des Materials zurückzuführen sind.

Auch die Ergebnisse des Lastfalls, bei dem eine reine Zugbelastung in 1-Richtung aufgebracht wird, werden im Folgenden überprüft. Dieser Lastfall entspricht einem Spannungszustand mit der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  (Abb. 4.41). Die Resultate des Kontinuumsschädigungsmodells liefern sowohl für die Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.41a)) als auch für die Verzerrungen  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.41b)) und  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.41c)) eine sehr gute Übereinstimmung. Es treten fast keine Unterschiede zwischen den Ergebnissen des makromechanischen Modells und denen der mikromechanischen Berechnungen auf.

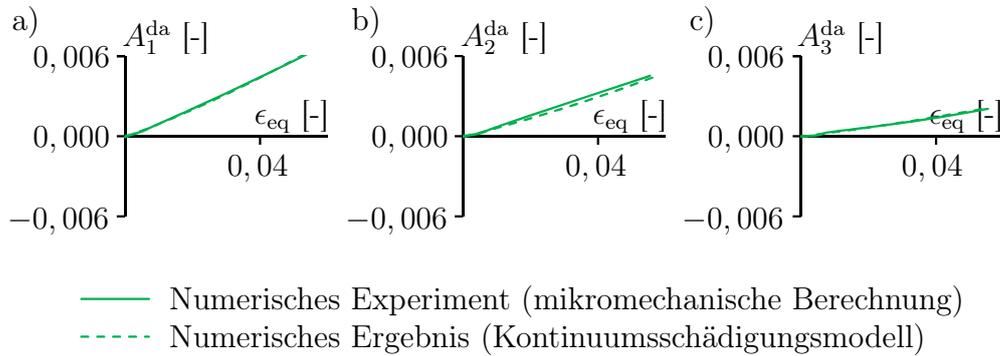
Zusätzlich zu den Ergebnissen der zuvor diskutierten Spannungszuständen wer-



**Abb. 4.42:** Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells für die Triaxialität  $\eta = 2/3$  und den Lodeparameter  $\omega = 1$

den auch die eines Zustandes mit der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$  analysiert (Abb. 4.42). Bei diesem Spannungszustand wird eine reine Zugbelastung in 1- und 2-Richtung aufgebracht. Die 3-Richtung bleibt dabei unbelastet. Die Ergebnisse der Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.42a)) sind nahezu identisch. Es treten vernachlässigbar geringe Abweichungen zwischen den Ergebnissen des Kontinuumsschädigungsmodells und denen der mikromechanischen Simulation auf. Diese Tendenz zeigt sich auch bei Betrachtung der Schädigungsverzerrung  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 4.42b)). Die Ergebnisse des Kontinuumsschädigungsmodells sind nur unwesentlich kleiner als die der mikromechanischen Betrachtung. Auch für die Schädigungsverzerrung  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 4.42c)) zeigt sich ein äquivalentes Verhalten. Die Unterschiede zwischen den Resultaten der mikromechanischen Simulationen sind vernachlässigbar gering. Somit kann auch bei diesem Lastfall festgehalten werden, dass das Modell eine sehr gute Approximation der mikromechanischen Ergebnisse liefert.

Um auch die Gültigkeit des Kontinuumsschädigungsmodells für große positive Triaxialitäten zu verifizieren, wird ein Lastfall mit der Triaxialität  $\eta = 5/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  überprüft. Hierbei werden Zugbelastungen in alle drei Hauptrichtungen aufgebracht. Für die Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}$  (Abb. 4.43a)) treten nahezu keine Abweichungen zwischen den Ergebnissen der mikromechanischen Simulationen und des Schädigungsmodells auf. Das numerische Ergebnis ist unwesentlich kleiner. Diese Tendenz ist auch bei den Resultaten der Schädigungsverzerrungen in 2- (Abb. 4.43b)) und 3-Richtung (Abb. 4.43c)) zu beobachten.



**Abb. 4.43:** Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells für die Triaxialität  $\eta = 5/3$  und den Lodeparameter  $\omega = 0$

Das Kontinuumsschädigungsmodell liefert eine sehr gute Approximation der mikromechanischen Betrachtungen.

Nach Einordnung der Ergebnisse der untersuchten Variationen auf der Mikroebene und der Validierung der zugehörigen Ergebnisse lässt sich abschließend festhalten, dass die aufgestellten Gleichungen für die Parameter der Schädigungsbedingung (Gl. (4.3) und (4.6)) und des Schädigungsgesetzes (Gl. (4.7), (4.8) und (4.13)) eine gute approximierte Lösung darstellen. Diese Gleichungen wurden anhand eines Ein-Poren-Modells mit einer kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  aufgestellt. Weitere Unregelmäßigkeiten auf der Mikroebene wie z. B. unterschiedliche Porenformen und -anordnungen wurden ebenfalls überprüft. Obwohl bei der Auswertung dieser Daten geringe Abweichungen von den vorgestellten Gleichungen auftreten, besitzen diese in den meisten Fällen eine kleine Größenordnung (Kap. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 und 4.5). Diese Tatsache und die gute Übereinstimmung bei der Validierung der Ergebnisse lässt den Schluss zu, dass in dem vorgestellten Kontinuumsschädigungsmodell Unterschiede auf der Mikroebene nicht in Form von gesonderten Parametern berücksichtigt werden müssen. Mikromechanische Unregelmäßigkeiten haben somit nahezu keinen Einfluss auf die Ergebnisse des Kontinuumsschädigungsmodells auf der Makroebene.

## 5 Auswertung der mikromechanischen Simulationen zur Entstehung eines Makrorisses

Nach dem Beginn der Schädigung kommt es zur Bildung von Mikroscherrissen bzw. zur Aufweitung der Poren. Die Defekte wachsen im weiteren Verlauf der Schädigung zu Makrorissen zusammen. Um dieses Verhalten mit Hilfe numerischer Simulationen abzubilden, wird die Element-Erosion-Technik verwendet. Bei Erreichen einer Grenzspannung  $\sigma_{\text{Kill}}$ , die anhand von Experimenten ermittelt wurde (Kap. 3.3), wird, wie bereits in Kap. 3.2.4 erläutert, die Steifigkeit eines Elementes herabgesetzt, und die Rissausbreitung kann simuliert werden. Diese mikroskopische Veränderung hat zur Folge, dass mit Beginn des Zusammenwachsens der Mikrodefekte weitere irreversible Verzerrungen entstehen und sich somit auch das Schädigungsgesetz verändert. Dadurch müssen die Parameter  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  und  $\bar{\delta}$  des Schädigungsgesetzes neu ermittelt werden. Weiterhin ist es notwendig, ein Kriterium einzuführen, welches den Beginn des Zusammenwachsens der Mikrodefekte zu einem Makroriss charakterisiert (Gl. (2.111)). Letztendlich kommt es nach der Entstehung des Makrorisses zum Versagen des gesamten RVEs. Dieser Punkt kann mit dem Risskriterium (Gl. (2.115)) beschrieben werden.

Zur Ermittlung dieser Gleichungen werden mikromechanische Berechnungen durchgeführt. Dabei werden erneut neben den Ergebnissen des Ein-Poren-Modells mit einer kugelförmigen Pore auch die Ergebnisse anderer Simulationen analysiert. Diese enthalten mikromechanische Unregelmäßigkeiten, wie z. B. unterschiedliche Anfangsporositäten, Porenformen oder Porenanordnungen. Die Untersuchung dieses breiten Spektrums ermöglicht es, herauszukristallisieren, ob auch bei der Modellierung eines Makrorisses das Ein-Poren-Modell mit einer kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  eine gute Approximation der Ergebnisse der gesamten untersuchten Variationen liefert. Dafür werden im Folgenden die Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  (Gl. (3.31)) in 1-, 2- und 3-Richtung und die Schädigungsvergleichsverzerrungen  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}$  (Gl. (3.34)) überprüft. Für einen qualitativ und

quantitativ richtigen Vergleich müssen immer Berechnungen mit der identischen Anfangsporosität verglichen werden. Als Referenzsimulation wird dabei stets ein Ein-Poren-Modell mit einer kugelförmigen Pore verwendet. Bei den untersuchten Lastfällen handelt es sich wie im vorausgehenden Kapitel 4 um die folgenden:

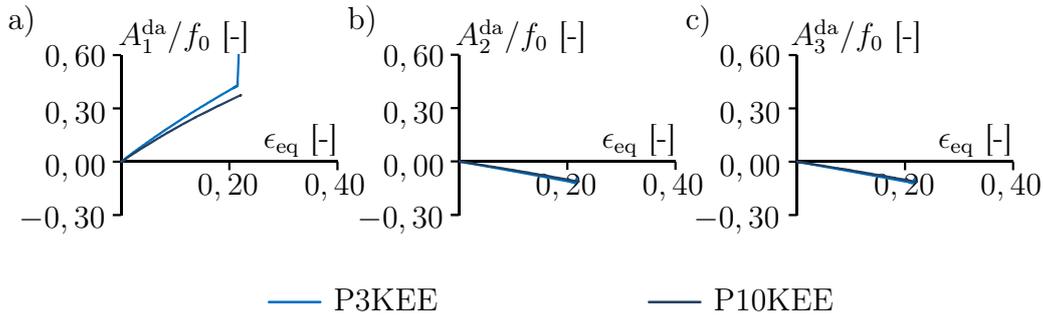
- $\eta = -1/3, \omega = 0$  (rot),
- $\eta = 0, \omega = 0$  (gelb),
- $\eta = 1/3, \omega = -1$  (blau),
- $\eta = 2/3, \omega = 1$  (lila) und
- $\eta = 5/3, \omega = 0$  (grün).

Diese werden in den nachfolgenden Kapiteln anhand verschiedener Diagramme analysiert. Dabei wird jedoch pro Kapitel nur ein Lastfall dargestellt, da die Resultate der anderen Spannungszustände stets ähnlich zu den diskutierten Ergebnissen sind.

## 5.1 Variation der Porosität

Zunächst wird der Einfluss unterschiedlicher Anfangsporositäten untersucht. Dafür werden die Ergebnisse eines Ein-Poren-Modells mit einer kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$  (P10KEE) mit denen der Referenzsimulation P3KEE ( $f_0 = 3\%$ ) verglichen. Die Schädigungsverzerrungen und die Schädigungsvergleichsverzerrung werden dabei wieder wie zuvor auf die Anfangsporosität  $f_0$  bezogen, um so einen Vergleich zu ermöglichen. Auf die Analyse eines Ein-Poren-Modells mit der Anfangsporosität  $f_0 = 1\%$  wird an dieser Stelle verzichtet, da es bei einer geringen Vorschädigung des Materials nicht zur Entstehung eines Makrorisses kommt.

Um einen ersten Eindruck über die Ergebnisse der jeweiligen Simulationen zu erhalten, werden die Ergebnisse der bezogenen Schädigungsverzerrungen in 1-, 2- und 3-Richtung miteinander verglichen. Dabei werden die Ergebnisse des Zugversuches mit der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  untersucht.

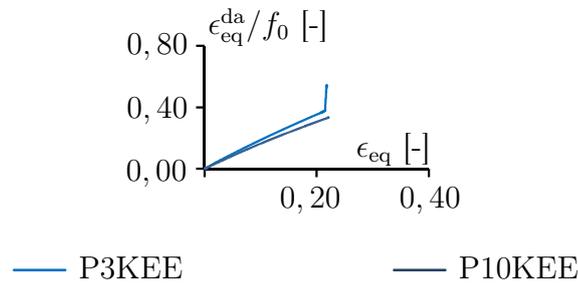


**Abb. 5.1:** Vergleich der bezogenen Schädigungsverzerrung in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$

Während der Simulation wird somit eine reine Zugbelastung in 1-Richtung aufgebracht. Bei Betrachtung der bezogenen Schädigungsverzerrung  $A_1^{\text{da}}/f_0$  (Abb. 5.1a)) wird deutlich, dass nur geringe Unterschiede auftreten. Die Abweichungen nehmen zum Ende der Simulation zwar zu, jedoch bleibt die Größenordnung vernachlässigbar klein. Der Verlauf der bezogenen Schädigungsverzerrungen  $A_2^{\text{da}}/f_0$  (Abb. 5.1b)) und  $A_3^{\text{da}}/f_0$  (Abb. 5.1c)) stimmt nahezu überein. Diese Übereinstimmung ist mit dem vorliegenden Belastungsfall zu erklären. In 2- und 3-Richtung wird keine zusätzliche Belastung aufgebracht. Beide Lastfaktoren nehmen den Wert Null an, sodass auch die resultierenden Schädigungsverzerrungen übereinstimmen. Weiterhin treten zwischen den Ergebnissen der Simulationen P3KEE und P10KEE nahezu keine Differenzen auf.

Zusätzlich wird die bezogene Schädigungsvergleichsverzerrung  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}/f_0$  (Abb. 5.2) untersucht. Zu Beginn der Simulation treten nur sehr geringe Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Simulation mit der Anfangsporosität 3% und denen der Berechnung mit der Anfangsporosität 10% auf. Im weiteren Verlauf nehmen die Abweichungen jedoch leicht zu. Dennoch bleibt deren Größenordnung in einem moderaten Bereich. Der plötzliche vertikale Anstieg der Schädigungsvergleichsverzerrung der Simulation P3KEE ist auf eine große Anzahl gelöschter Elemente zurückzuführen, was mit einer starken Schädigung des RVEs gleich zu setzen ist.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass es zwischen den Ergebnissen der Berechnungen P3KEE und P10KEE nahezu keine Abweichungen gibt. Im Verlauf der Simulation nehmen diese zwar geringfügig zu, die Größenordnung dieser



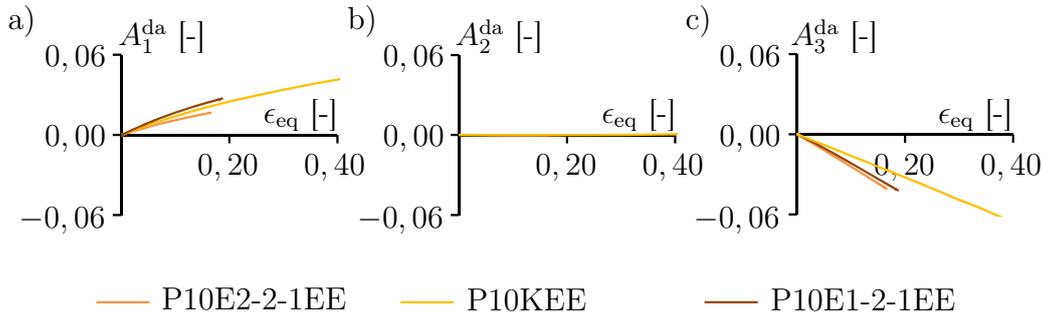
**Abb. 5.2:** Vergleich der bezogenen Schädigungsvergleichsverzerrung bei der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$  für unterschiedliche Anfangsporositäten  $f_0$

bleibt jedoch weiterhin in einem moderaten Bereich. Weiterhin werden im Folgenden keine zusätzlichen Ergebnisse anderer Spannungszustände vorgestellt, da die Tendenz der Ergebnisse der der vorgestellten Resultate entspricht.

## 5.2 Variation der Porenform

Neben unterschiedlich großen Poren treten in duktilen Metallen außerdem Poren auf, deren Ausgangsform nicht kugelförmig ist. Aus diesem Grund werden auch hier zusätzlich Ein-Poren-Modelle mit einer ellipsenförmigen Pore analysiert. Dabei wird wieder die Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$  verwendet. Als Referenzsimulation dient ein Ein-Poren-Modell mit einer kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$  (P10KEE). Im Rahmen der Untersuchungen, werden je drei ellipsenförmige Poren mit zwei gestreckten Hauptachsen und mit einer gestreckten Hauptachse betrachtet. Die Ergebnisse werden im Folgenden anhand je einer repräsentativen Porenform erläutert (P10E2-2-1EE und P10E1-2-1EE), da die Darstellung weiterer Ergebnisse von unterschiedlichen Porenformen keine zusätzlichen Erkenntnisse liefern.

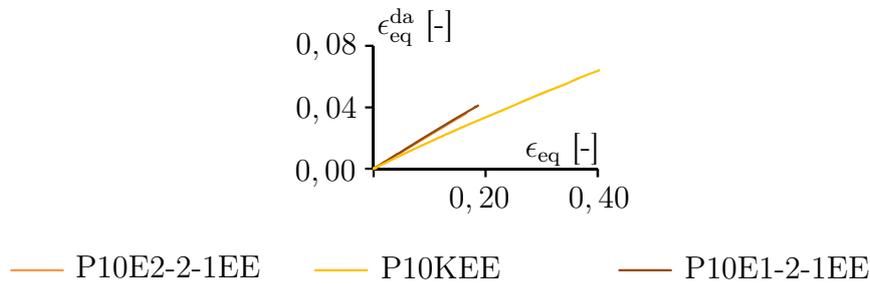
Zunächst werden die Ergebnisse der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{da}$  (Abb. 5.3) des Schubversuches ( $\eta = \omega = 0$ ) untersucht. Bei Betrachtung dieser Verzerrungen wird deutlich, dass die Simulationen mit der ellipsenförmigen Pore (P10E2-2-1EE und P10E1-2-1EE) numerisch instabiler sind als die mit der kugelförmigen Pore. Dies ist darauf zurück zu führen, dass es aufgrund der inhomogenen Porenform zu einem schnelleren Versagen des Modells kommt. Des Weiteren zeigt sich



**Abb. 5.3:** Vergleich der Schädigungsverzerrung in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 0$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Porenformen

bei der Schädigungsverzerrung in 1-Richtung (Abb. 5.3a)), dass es nur geringe Abweichungen zwischen den einzelnen Simulationen mit unterschiedlichen Porenformen gibt. Die Berechnung P10KEE stellt dabei einen guten Mittelwert der Ergebnisse dar. Die Schädigungsverzerrung  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 5.3b)) nimmt einen Wert nahe Null an und es treten nahezu keine Abweichungen zwischen den Ergebnissen der einzelnen Simulationen auf. Auch die Ergebnisse der Schädigungsverzerrung  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 5.3c)) weisen kleine Unterschiede auf. Die Resultate der Berechnungen P10E2-2-1EE und P10E1-2-1EE sind hierbei nahezu identisch und befinden sich nur in einem geringen Abstand unterhalb der Ergebnisse der Referenzsimulation P10KEE. Insgesamt besitzen die Abweichungen eine moderate Größenordnung, die aber aufgrund der, wie zuvor diskutiert, eher unrealistischen Porenverteilung eine untergeordnete Bedeutung haben.

Bei Betrachtung der Schädigungsvergleichsverzerrung (Abb. 5.4) zeigt sich eine ähnliche Tendenz wie bei den Ergebnissen der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$ . Die Resultate der Simulationen mit den elliptischen Porenformen (P10E2-2-1EE und P10E1-2-1EE) sind nahezu identisch. Diese Beobachtung deutet darauf hin, dass es für die irreversiblen Makroverzerrungen vernachlässigbar ist, ob eine Pore eine oder zwei gestreckte Hauptachsen besitzt. Des Weiteren befinden sich die Ergebnisse in geringem Abstand oberhalb der Resultate der Referenzsimulation P10KEE. Die Größenordnung dieses Abstandes ist jedoch gering, sodass anhand dieses Parameters die Aussage getroffen werden kann, dass eine von der Kugelform abweichende Porenform nur einen geringen Einfluss auf die Ergebnisse der Schädigungsverzerrungen hat.



**Abb. 5.4:** Vergleich der Schädigungsvergleichsverzerrung bei der Triaxialität  $\eta = 0$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Porenformen

Auf die Darstellung zusätzlicher Ergebnisse der Studien zur Porenform wird im Folgenden verzichtet, da sowohl andere Porenformen als auch weitere Lastfälle ein ähnliches Bild bei der Auswertung der Schädigungsverzerrungen und der Schädigungsvergleichsverzerrungen liefern. Abschließend kann davon ausgegangen werden, dass die unterschiedlichen Porenformen nur einen geringen Einfluss auf die Ergebnisse der Schädigungsparameter haben, da bei der Auswertung nur kleine Abweichungen auftreten. Somit müssen Variationen auf der Mikroebene in Form von unterschiedlichen Porenformen zunächst nicht weiter analysiert werden, da diese nahezu keinen Einfluss auf die Ergebnisse auf der Makroebene haben.

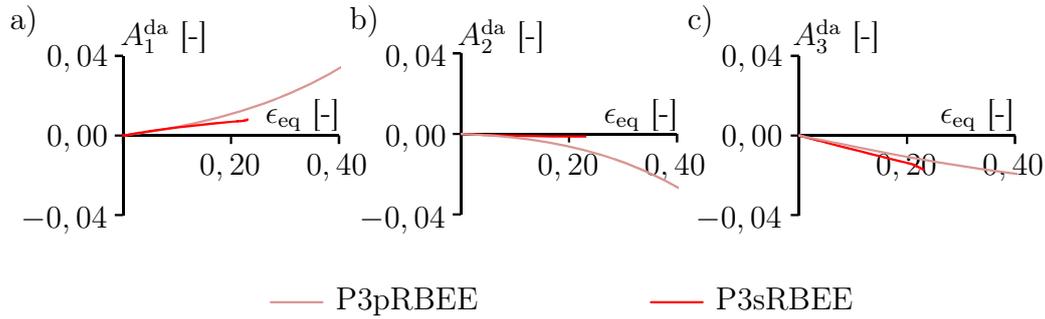
### 5.3 Variation der Randbedingungen

Zusätzlich zu der Bedeutung von geometrischen Unregelmäßigkeiten auf der Mikroebene, wie z. B. unterschiedliche Porenformen, soll auch der Einfluss der Randbedingungen des RVEs auf die Ergebnisse auf der Makroebene untersucht werden. Dabei ist die Fragestellung zu beantworten, ob periodische Randbedingungen im Vergleich zu Symmetrierandbedingungen zu einer abweichenden Schädigungsentwicklung und Entstehung von Makrorissen führen. Zu diesem Zweck werden die Resultate der Simulationen mit den periodischen Randbedingungen mit denen der Berechnungen mit Symmetrierandbedingungen verglichen. Für die Überprüfung werden wieder Ein-Poren-Modelle mit einer kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  und  $f_0 = 10\%$  in Kombination mit der Element-Erosionstechnik verwendet. Wichtig ist dabei, nur Modelle mit der gleichen Anfangsporosität zu vergleichen, was mit einer identischen Vorschädigung gleichzusetzen ist.

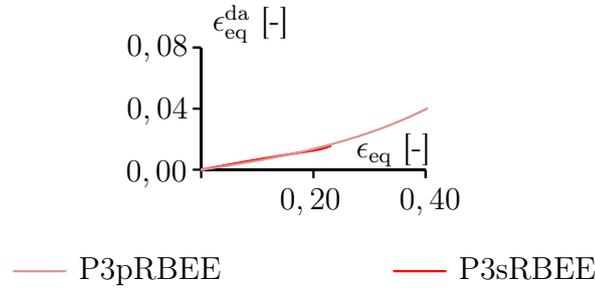
Die vergleichsweise einfachen Ein-Poren-Modelle eignen sich für diese Analyse besonders, da somit die Ergebnisse nicht durch andere geometrische Unregelmäßigkeiten beeinflusst werden können.

Zunächst werden die Resultate der Simulationen mit der Anfangsporosität 3% betrachtet. Dazu wird der Spannungszustand mit der Triaxialität  $\eta = -1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  untersucht. Bei diesem Lastfall wird in 1-Richtung eine Zugbelastung und in 2- und 3-Richtung eine Druckbelastung aufgebracht. Die Ergebnisse der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  (Abb. 5.5) zeigen, dass die Simulationen mit den periodischen Randbedingungen (P3pRBEE) sich numerisch deutlich stabiler verhalten als die mit den Symmetrierandbedingungen (P3sRBEE). Dies ist wieder darauf zurückzuführen, dass durch die periodischen Randbedingungen das Modell nicht so steif ist. Es sind somit größere Verformungen möglich. Bei der Verwendung von Symmetrierandbedingungen ist das Gegenteil der Fall. Aufgrund der Randbedingungen kann sich das Modell nicht so stark verformen und es kommt früher zu Spannungsspitzen, die zu einem früheren Einsetzen der Element-Erosion-Technik und damit auch zu einem vorzeitigen Abbruch der Simulation führen. Des Weiteren zeigt die Auswertung der Schädigungsverzerrung in 1-Richtung (Abb. 5.5a)), dass die Simulationen mit den unterschiedlichen Randbedingungen zunächst übereinstimmen. Im weiteren Verlauf treten kleine Abweichungen auf, welche jedoch eine geringe Größenordnung besitzen. Auch bei Betrachtung der Schädigungsverzerrung  $A_2^{\text{da}}$  (Abb. 5.5b)) sind ähnliche Differenzen zu beobachten. Die Verzerrungen der Simulation P3sRBEE nehmen Werte nahe Null an. Im Gegensatz dazu nehmen die der Berechnung P3pRBEE negative Werte an. Bis zum Abbruch der Simulation mit den Symmetrierandbedingungen bleiben jedoch auch diese Abweichungen in einem moderaten Bereich, sodass diesen eine untergeordnete Bedeutung zugewiesen werden kann. Die Ergebnisse der Schädigungsverzerrung  $A_3^{\text{da}}$  (Abb. 5.5c)) zeigen hingegen nahezu keine Unterschiede bei den Resultaten der Simulationen mit den unterschiedlichen Randbedingungen. Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen sind vernachlässigbar klein.

Neben der Untersuchung der Schädigungsverzerrungen sind auch die Ergebnisse der Schädigungsvergleichsverzerrung von Bedeutung, da es sich bei diesem Wert um einen skalaren Parameter handelt, der den Grad der Schädigungsent-



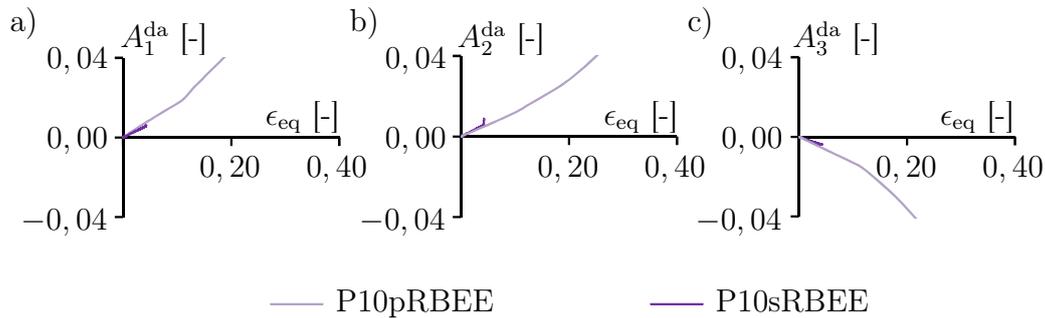
**Abb. 5.5:** Vergleich der Schädigungsverzerrung in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = -1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Randbedingungen



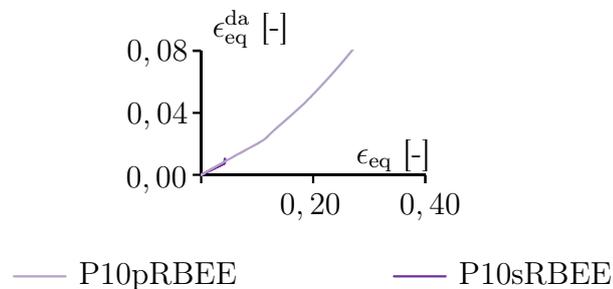
**Abb. 5.6:** Vergleich der Schädigungsvergleichsverzerrung bei der Triaxialität  $\eta = -1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 0$  für unterschiedliche Randbedingungen

wicklung charakterisiert. Die Resultate der Schädigungsvergleichsverzerrung  $\epsilon_{eq}^{da}$  (Abb. 5.6) sind für die Simulationen mit Symmetrierandbedingungen und periodischen Randbedingungen nahezu identisch. Die Abweichungen besitzen eine minimale Größenordnung. Diese Tatsache deutet darauf hin, dass trotz der Abweichungen bei den Schädigungsverzerrungen sich die Größe der Schädigung für beide Randbedingungstypen fast gleich entwickelt. Auf die Darstellung weiterer Lastfälle wird verzichtet, da sich auch bei diesen Ergebnissen eine ähnliche Tendenz zeigt. Um die vorangestellten Schlussfolgerungen noch weiter zu bestätigen, werden zusätzlich die Ergebnisse der Simulationen mit der Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$  untersucht.

Auch bei dieser Betrachtung fällt direkt auf, dass die Simulationen mit den periodischen Randbedingungen numerisch stabiler sind (Abb. 5.7). Sie brechen ca. bei der Vergleichsverzerrung  $\epsilon_{eq} = 0,20$  ab. Im Gegensatz dazu gehen die Simu-



**Abb. 5.7:** Vergleich der Schädigungsverzerrung in a) 1-, b) 2- und c) 3-Richtung bei der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$  für unterschiedliche Randbedingungen



**Abb. 5.8:** Vergleich der Schädigungsvergleichsverzerrung bei der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$  für unterschiedliche Randbedingungen

lationen mit den Symmetrierandbedingungen nur bis zu der Vergleichsverzerrung  $\epsilon_{\text{eq}} = 0,05$ . Auch in diesem Fall kann die oben erläuterte Begründung angeführt werden. Durch die periodischen Randbedingungen verhält sich das RVE nicht so steif und es sind größere Verformungen bis zum Abbruch der Simulation möglich. Trotz dieser Differenz zeigt die Auswertung der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  (Abb. 5.7) nahezu keine Abweichungen. Sowohl in 1- (Abb. 5.7a)), 2- (Abb. 5.7b)) als auch in 3-Richtung (Abb. 5.7c)) ist der Verlauf der Schädigungsverzerrung für beide Randbedingungstypen fast identisch.

Ein ähnliches Bild ergibt sich bei der Auswertung der Schädigungsvergleichsverzerrung  $\epsilon_{\text{eq}}^{\text{da}}$  (Abb. 5.8). Die Ergebnisse der Simulationen mit periodischen Randbedingungen (P10pRBEE) und Symmetrierandbedingungen (P10sRBEE) stimmen quasi überein.

Zusammenfassend zeigt der Vergleich der verschiedenen Randbedingungen eine eindeutige Tendenz. Der Verlauf der Schädigung ist für beide untersuchten Randbedingungsformen nahezu identisch. Sowohl bei den Schädigungsverzerrungen als auch bei den Schädigungsvergleichsverzerrungen treten nur vernachlässigbar kleine Abweichungen auf. Dies deutet darauf hin, dass neben den Symmetrierandbedingungen auch periodische Randbedingungen für die Untersuchung der Schädigung geeignet sind. Aufgrund der fast identischen Ergebnisse kann somit davon ausgegangen werden, dass die Randbedingungen nahezu keinen Einfluss auf die Resultate auf der Makroebene nehmen. Ein Aspekt, der bei der zukünftigen Wahl der Randbedingungen jedoch berücksichtigt werden sollte, ist, dass mit den periodischen Randbedingungen realistischere Deformationen modelliert werden können.

## 5.4 Bestimmung und Validierung der Parameter der Materialgleichungen

Aufgrund der guten Übereinstimmung der Ergebnisse der untersuchten Variationen mit den Ergebnissen des Ein-Poren-Modells mit einer kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  können die Resultate dieses Modells zur Ermittlung der Schädigungsparameter herangezogen werden. Dabei werden die Ergebnisse in dem Bereich der Triaxialität  $-1/3 \leq \eta \leq 3$  berücksichtigt. Der Lodeparameter kann den Wert  $-1 \leq \eta \leq 1$  annehmen. Die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten von Triaxialität und Lodeparameter ermöglichen es somit, ein großes Feld verschiedener Spannungszustände zu berücksichtigen.

Die zuvor diskutierten Ergebnisse werden nun genutzt, um die Parameter der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte  $f^{\text{coal}}$  (Gl. (2.111)) vorzuschlagen. Zur genauen Beschreibung dieses Prozesses hat sich im Verlauf der Auswertung der mikromechanischen Simulationen gezeigt, dass unter Verwendung von Gl. (2.112) und (2.113) die zweite Invariante

$$I_2^{\text{da}} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^{\text{da}} \cdot \mathbf{A}^{\text{da}} \quad (5.1)$$

des Schädigungsverzerrungstensors  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  besonders zur Charakterisierung des Beginns des Zusammenwachsens geeignet ist [42]. Dadurch ergibt sich mit Gl. (5.1) für die Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte

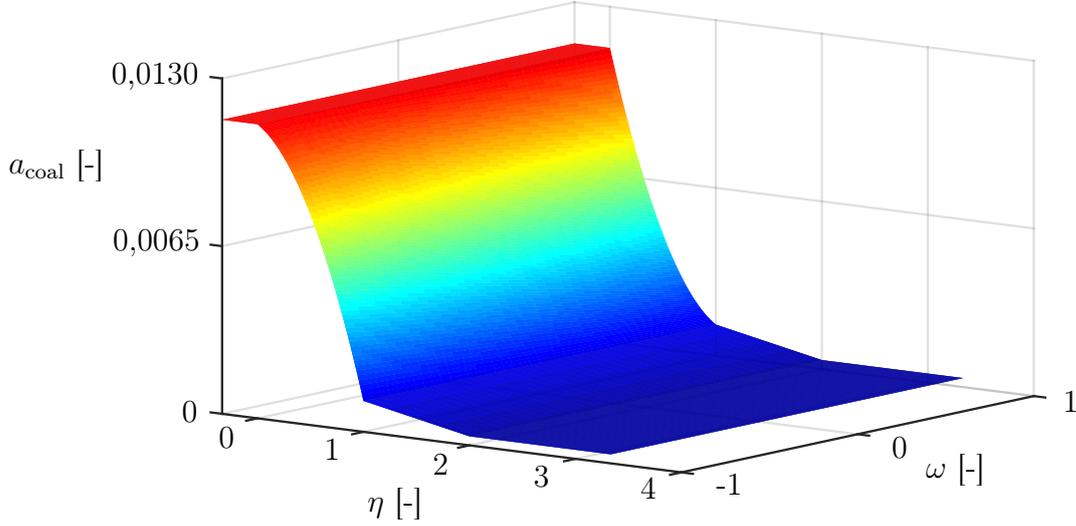
$$f^{\text{coal}}(\mathbf{A}^{\text{da}}, a_{\text{coal}}) = \sqrt{I_2^{\text{da}}} - a_{\text{coal}}(\eta, \omega) = 0 \quad (5.2)$$

mit dem vom Spannungszustand abhängigen Parameter

$$a_{\text{coal}}(\eta, \omega) = \begin{cases} 0,01140 & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 0 \\ 0,01140 - 0,01020\eta + (0,00740\eta - 0,00740\eta^2)(-\omega) & \text{für } 0 < \eta \leq 1 \\ 0,00205 - 0,00085\eta & \text{für } 1 < \eta \leq 2 \\ 0,00035 & \text{für } \eta > 2 \end{cases} \quad (5.3)$$

(Abb. 5.9) [42]. Diese Funktionen weisen nur für moderate Triaxialitäten  $0 < \eta \leq 1$  eine Abhängigkeit vom Lodeparameter auf. Für kleine und große positive Werte der Triaxialität ist diese Abhängigkeit anhand der vorhandenen Daten nicht erkennbar. Des Weiteren nimmt der Parameter  $a_{\text{coal}}(\eta, \omega)$  ab der Triaxialität  $\eta > 2$  den konstanten Wert 0,00035 an (Abb. 5.9). Aus dieser Tatsache kann geschlossen werden, dass das Zusammenwachsen für große positive Triaxialitäten immer bei diesem festen Wert von  $\sqrt{I_2^{\text{da}}}$  beginnt [42].

Nach dem Beginn des Zusammenwachsens der Mikrodefekte kommt es jedoch zu einer leichten Veränderung der Schädigungsmechanismen mit einer deutlichen Zunahme der Mikrorisse, wobei ab diesem Punkt eine Zunahme des Einflusses des Lodeparameters auf die Entwicklung der Schädigungsverzerrungen zu erkennen ist. Neben der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte (Gl. (2.111)), die den Punkt des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte im Verlauf der Schädigungsentwicklung kennzeichnet, ist es zusätzlich notwendig, die kinematischen Parameter  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  und  $\bar{\delta}$  des Schädigungsgesetzes  $\dot{\mathbf{H}}^{\text{da}}$  (Gl. (2.108)) mit dem Beginn des Zusammenwachsens der

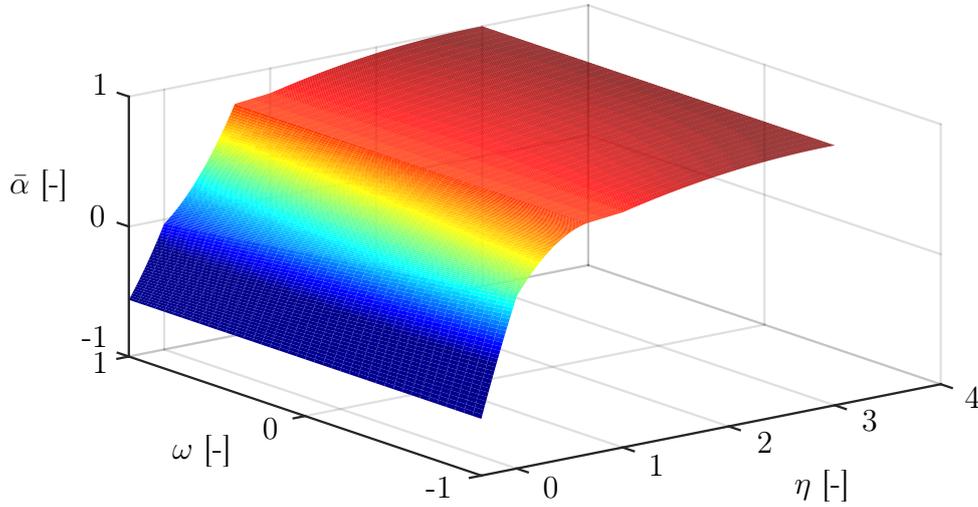


**Abb. 5.9:** Schädigungsparameter  $a_{\text{coal}}$  der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte  $f^{\text{coal}}$  in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$

Mikrodefekte anzupassen [42]. Diese verändern sich im Gegensatz zu den zuvor bestimmten Parametern (Gl. (4.7), (4.8) und (4.13)), da mit zunehmender Schädigung die anisotropen Anteile der Schädigung immer mehr Einfluss nehmen. Somit ergibt sich ab  $f^{\text{coal}}(\mathbf{A}^{\text{da}}, a_{\text{coal}}) = 0$  für die Rate der Verzerrungen infolge Schädigung folgende Formulierung für den Parameter

$$\bar{\alpha}(\eta, \omega) = \begin{cases} 0,14525 + 2,12630\eta - [-0,8(\eta - 0,16667)^2 + 0,2]\omega & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 0 \\ 0,14525 + 0,95404\eta - [-0,8(\eta - 0,16667)^2 + 0,2]\omega & \text{für } 0 < \eta \leq 2/3 \\ 0,72472 + 0,08483\eta & \text{für } 2/3 < \eta \leq 1 \\ 0,71433 + 0,09522\eta + [-0,05(\eta - 2)^2 + 0,05]\omega^2 & \text{für } 1 < \eta \leq 3 \\ 1 & \text{für } \eta > 3 \end{cases} \quad (5.4)$$

als Funktion der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$ . Bei Betrachtung der grafischen Darstellung des Schädigungsparameters  $\bar{\alpha}$  (Abb. 5.10) wird deutlich,



**Abb. 5.10:** Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$  des Schädigungsgesetzes in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$  nach dem Beginn des Zusammenwachsens der Mikroporen

dass auch in diesem Fall der Einfluss der ersten Invarianten  $I_1$  des Spannungstensors mit steigender Triaxialität zunimmt. Dies bestätigt erneut die Annahme, dass bei großen positiven Triaxialitäten der Schädigungsmechanismus durch Porenaufweitung dominiert wird. Eine Abhängigkeit vom Lodeparameter  $\omega$  ist im Bereich negativer und moderater Spannungstriaxialitäten zu beobachten. Für Werte der Triaxialität  $1 < \eta \leq 3$  ist dieser Einfluss auch vorhanden, jedoch nicht so stark ausgeprägt [42].

Des Weiteren kann der Schädigungsparameter

$$\bar{\beta}(\eta, \omega) = \begin{cases} 0,98769 + 0,98477\eta - 0,05700\eta\omega^2 & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 0 \\ 0,98769 - 0,01741\eta & \text{für } 0 < \eta \leq 1/3 \\ 1,36280 - 1,14272\eta + \bar{\beta}_{\eta\omega} & \text{für } 1/3 < \eta \leq 2/3 \\ 0,62660 - 0,03843\eta + \bar{\beta}_{\eta\omega} & \text{für } 2/3 < \eta \leq 2 \\ 1,64922 - 0,54974\eta + \bar{\beta}_{\eta\omega} & \text{für } 2 < \eta \leq 3 \\ 0 & \text{für } \eta > 3 \end{cases} \quad (5.5)$$

mit

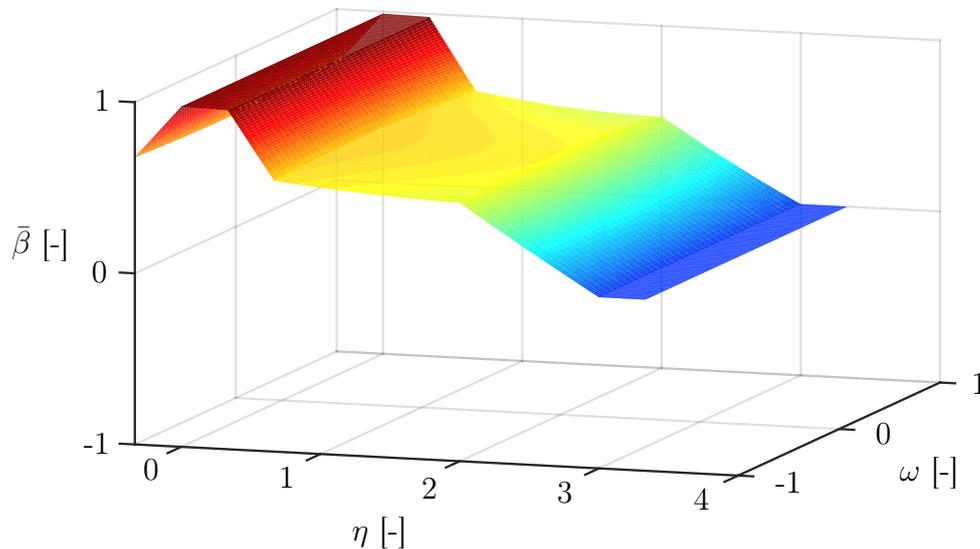
$$\bar{\beta}_{\eta\omega} = (-0,24 + 0,80\eta - 0,24\eta^2)(-0,05\omega - 0,15\omega^2) \quad (5.6)$$

anhand der Ergebnisse der mikromechanischen numerischen Simulationen ermittelt werden [42]. Dieser Parameter steht im Schädigungsgesetz in Korrelation mit der zweiten Invarianten  $J_2$  des Spannungsdeviators. Abb. 5.11 zeigt den dreidimensionalen Verlauf des Parameters  $\bar{\beta}(\eta, \omega)$ . Dabei wird deutlich, dass der Einfluss dieses Parameters groß für kleine Triaxialitäten und klein für große Triaxialitäten ist. Im Bereich moderater Triaxialitäten nimmt der Einfluss ab. Somit wird der Schädigungsmechanismus im Bereich negativer und moderater positiver Spannungstriaxialitäten durch Schermechanismen charakterisiert. Zusätzlich zeigt der Parameter  $\bar{\beta}(\eta, \omega)$  eine Abhängigkeit vom Lodeparameter für negative Triaxialitäten. Auch für moderate und hohe Spannungstriaxialitäten ist dieser Einfluss feststellbar (Abb. 5.11). Bei einem Vergleich mit dem Parameter  $\bar{\beta}$ , der bis zum Beginn des Zusammenwachsens gültig ist (Abb. 4.32), wird deutlich, dass zwischen den beiden Parametern deutliche Unterschiede auftreten. Die Begründung hierfür liegt darin, dass die Anteile der anisotropen Schädigung nach Beginn des Zusammenwachsens der Mikroporen zunehmen und es dadurch zu anderen Schädigungsmechanismen kommt [42].

Der Parameter  $\bar{\delta}(\eta, \omega)$ , welcher ebenfalls zu den anisotropen Komponenten der Schädigungsverzerrungen korrespondiert, wird in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$  zu

$$\bar{\delta}(\eta, \omega) = \begin{cases} 1,18698\eta(1 - \omega^2) & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < \eta \leq 1/3 \\ (-0,16320 + 0,54400\eta - 0,1632\eta^2)(1 - \omega^2) & \text{für } 1/3 < \eta \leq 3 \\ 0 & \text{für } \eta > 3 \end{cases} \quad (5.7)$$

gewählt [42]. Im Vergleich zu den Schädigungsparametern  $\bar{\alpha}$  (Gl. (5.4)) und  $\bar{\beta}$  (Gl. (5.5)) ist dieser Parameter verhältnismäßig klein. Eine Vernachlässigung dessen

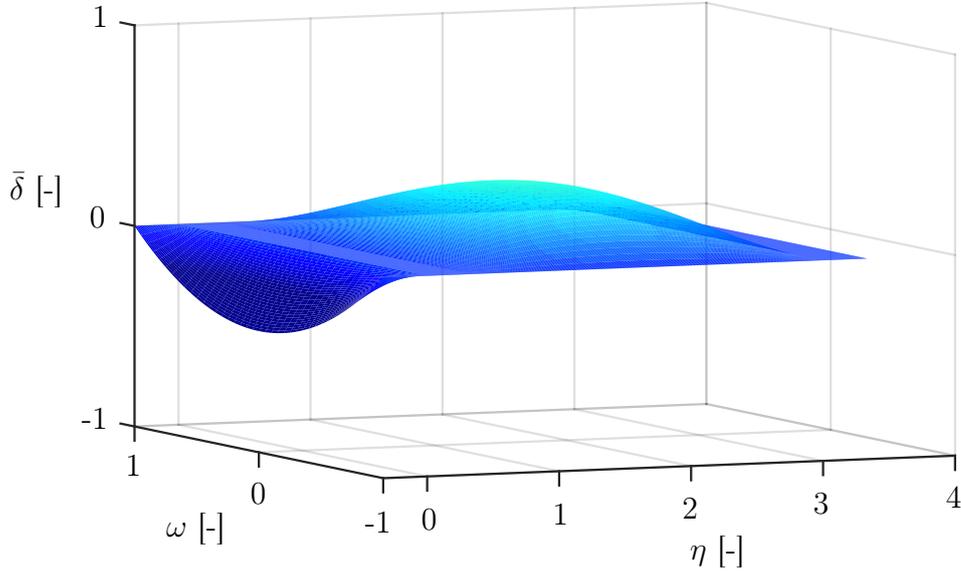


**Abb. 5.11:** Schädigungsparameter  $\bar{\beta}$  des Schädigungsgesetzes in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$  nach dem Beginn des Zusammenwachsens der Mikroporen

führt jedoch zu deutlichen Fehlern in den Ergebnissen der Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$ . Außerdem wird deutlich, dass vor allem der Lodeparameter die zugehörigen Funktionen dominiert (Gl. (5.7)). Er nimmt seinen Einfluss sowohl im Bereich negativer Triaxialitäten als auch im Bereich moderater und großer positiver Triaxialitäten. Im Gegensatz dazu besitzt der Schädigungsparameter  $\bar{\delta}$  vor dem Beginn des Zusammenwachsens den Wert Null (Gl. (4.13)), sodass er in diesem Fall keinen Einfluss auf das Schädigungsgesetz nimmt [42].

Aufgrund der diskutierten Ergebnisse (Abb. 5.10 - 5.12) wird deutlich, dass für kleine Spannungstriaxialitäten  $\eta$  stets ein Einfluss des Lodeparameters zu verzeichnen ist. Mit dem Beginn des Zusammenwachsens der Mikrodefekte kommt es jedoch zu Veränderungen der Schädigungsmechanismen. Ab diesem Punkt gewinnt auch für moderate und große positive Triaxialitäten der Lodeparameter  $\omega$  an Bedeutung [42].

In Anlehnung an die Vorgehensweise bei der Ermittlung der Parameter der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte wird auch das Risskriterium formuliert, welches das vollständige Versagen des Modells



**Abb. 5.12:** Schädigungsparameter  $\bar{\delta}$  des Schädigungsgesetzes in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$  nach dem Beginn des Zusammenwachsens der Mikroporen

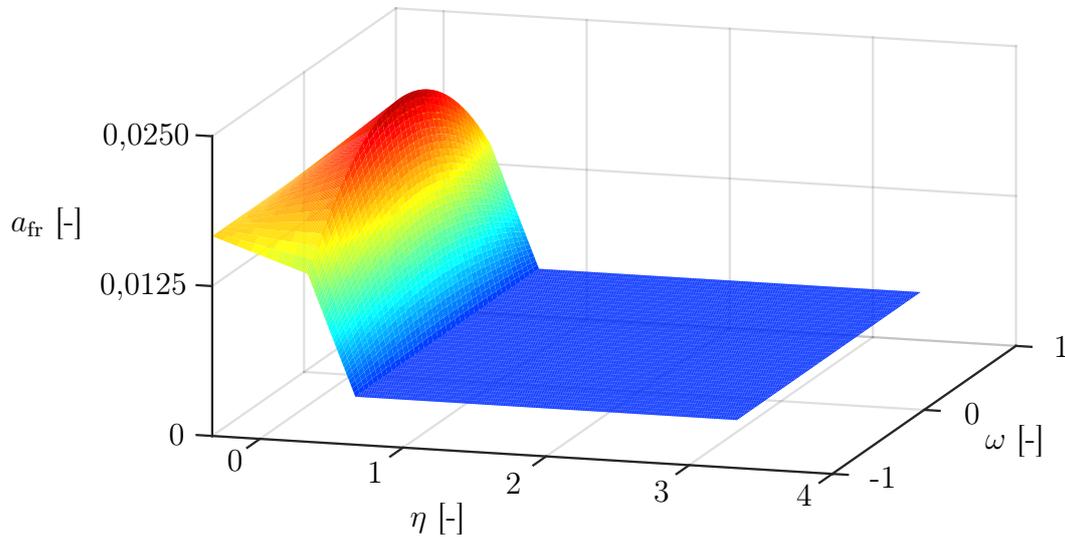
auf der Makroebene charakterisiert. Auch in diesem Fall eignet sich die zweite Invariante  $I_2^{\text{da}}$  (Gl. (5.1)) des Schädigungsverzerrungstensors  $\mathbf{A}^{\text{da}}$  zur Formulierung des Kriteriums [42]. Das Risskriterium ergibt sich somit zu

$$f^{\text{fr}}(\mathbf{A}^{\text{da}}, a_{\text{fr}}) = \sqrt{I_2^{\text{da}}} - a_{\text{fr}}(\eta, \omega) = 0 \quad (5.8)$$

mit dem von der Spannungstriaxialität  $\eta$  und dem Lodeparameter  $\omega$  abhängigem Parameter

$$a_{\text{fr}}(\eta, \omega) = \begin{cases} 0,01998 + 0,00995\eta - (0,00465 + 0,01395\eta)\omega^2 & \text{für } -1/3 \leq \eta \leq 1/3 \\ 0,04260 - 0,05790\eta + (0,01860 - 0,02790\eta)\omega^2 & \text{für } 1/3 < \eta \leq 2/3 \\ 0,004 & \text{für } \eta > 2/3 \end{cases} \quad (5.9)$$

[42]. Bei diesem Parameter wird bis zu der Triaxialität  $\eta \leq 2/3$  eine quadratische



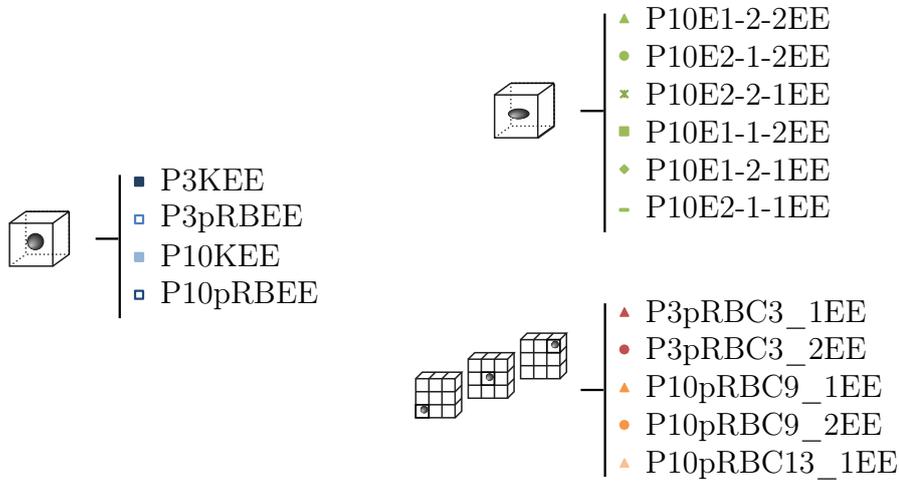
**Abb. 5.13:** Schädigungsparameter  $a_{fr}$  des Risskriteriums  $f^{fr}$  in Abhängigkeit der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$

Abhängigkeit vom Lodeparameter angenommen (Abb. 5.13). Im weiteren Verlauf nimmt der Schädigungsparameter  $a_{fr}(\eta, \omega)$  (Gl. (5.9)) dann den konstanten Wert 0,004 an. Zusammenfassend kann davon ausgegangen werden, dass der Einfluss des Lodeparameters  $\omega$  hauptsächlich im Bereich kleiner Spannungstriaxialitäten eine Bedeutung hat.

## 5.5 Diskussion der Ergebnisse

Im Anschluss an die Festlegung der Schädigungsparameter, die mit dem Beginn des Zusammenwachsens der Mikrodefekte ihre Gültigkeit besitzen, wird eine Überprüfung der Grenzen dieser Parameter vorgenommen. Dabei wird untersucht, ob Unregelmäßigkeiten auf der Mikroebene (z. B. Porenform, Anordnung der Poren) in den ermittelten Gleichungen berücksichtigt werden müssen. Zusätzlich wird die Validierung der Ergebnisse durchgeführt, um die Übereinstimmung der Ergebnisse des Kontinuumsmodells und der mikromechanischen Berechnungen zu überprüfen.

Zur besseren Übersicht wird zunächst die Legende der im folgenden erläuterten



**Abb. 5.14:** Aufschlüsselung der Legende bei der Verwendung der Element-Erosion-Technik

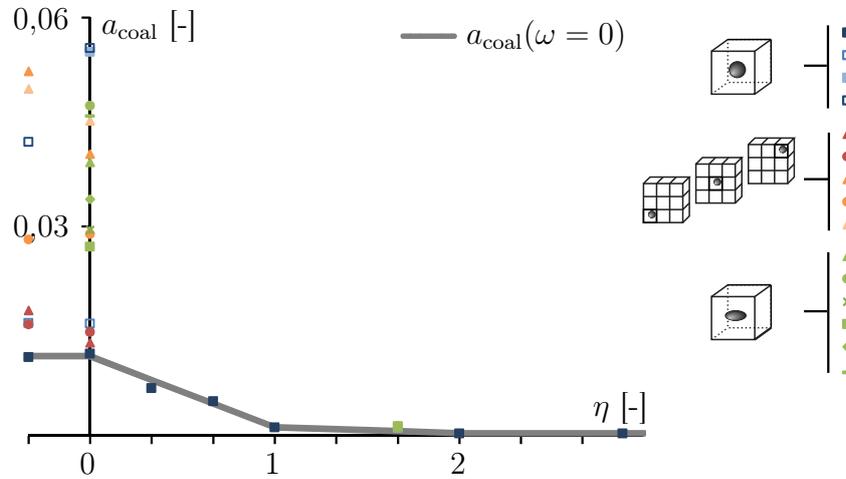
ten Diagramme erklärt. Die Datenpunkte in Blautönen charakterisieren die Ein-Poren-Modelle mit einer kugelförmigen Pore. Dabei liegen sowohl Ergebnisse für Simulationen mit der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  (P3KEE) als auch für Berechnungen mit der Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$  (P10KEE) vor. Bei diesen Simulationen werden Symmetrierandbedingungen verwendet. Zur Variation der Randbedingung werden zusätzlich die Ergebnisse mikromechanischer Modelle mit periodischen Randbedingungen (P3pRBEE und P10pRBEE) ermittelt. Des Weiteren repräsentieren die Datenpunkte in Grüntönen die Ergebnisse der Berechnungen mit unterschiedlichen Porenformen und der Anfangsporosität  $f_0 = 10\%$ . Zusätzlich zu diesen Variationen werden ebenfalls die Ergebnisse ausgewählter Porenanordnungen unter Verwendung periodischer Randbedingungen mit den zugehörigen Anfangsporositäten untersucht. Die Ergebnisse dieser Betrachtungen sind in Rottönen dargestellt.

Zunächst werden die Ergebnisse des Schädigungsparameters  $a_{\text{coal}}(\omega = 0)$  (Gl. (5.3)) analysiert (Abb. 5.15). Die Ergebnisse der Ein-Poren-Modelle zeigen dabei eine relativ gute Übereinstimmung mit der vorgeschlagenen Funktion. Bei Betrachtung der Resultate der Simulationen mit den periodischen Randbedingungen (P3pRBEE und P10pRBEE) treten bei der Triaxialität  $\eta = -1/3$  und

$\eta = 0$  jedoch Abweichungen auf. Ein ähnliches Verhalten zeigen in diesem Wertebereich auch die anderen Berechnungen mit den unterschiedlichen Porenformen und Porenanordnungen. Diese breite Streuung der Ergebnisse des Schädigungsparameters  $a_{\text{coal}}$  kann darauf zurückgeführt werden, dass es sich in diesem Fall um den Randbereich in der Nähe des Grenzwertes  $\eta_c$  (Kap. 2.3.2) handelt, unterhalb dem kaum noch bzw. keine Schädigung mehr auftritt. In diesem Bereich stimmen die Funktionen  $\bar{\beta}$  vor (Gl. (4.9)) und nach dem Beginn des Zusammenwachsens (Gl. (5.5)) nahezu überein. Somit hat die Funktion  $a_{\text{coal}}$  nur eine untergeordnete Auswirkung auf die weitere Entwicklung der Schädigungsverzerrungen für Triaxialitäten  $\eta \leq 0$ . Im Gegensatz dazu ist für große positive Triaxialitäten (z. B.  $\eta = 5/3$ ) eine gute Übereinstimmung zwischen vorgeschlagener Funktion  $a_{\text{coal}}$  und den untersuchten Variationen festzustellen. Sowohl bei den zusätzlichen Ein-Poren-Modellen (Blautöne) als auch bei den unterschiedlichen Porenformen (Grüntöne) treten nur geringe Abweichungen auf (Abb. 5.15). Auf die Darstellung der Ergebnisse  $a_{\text{coal}}(\omega = -1)$  und  $a_{\text{coal}}(\omega = 1)$  wird verzichtet, da sich bei den zugehörigen Auswertungen nahezu identische Tendenzen zeigen.

Abschließend kann festgehalten werden, dass die vorgeschlagenen Funktionen für den Schädigungsparameter  $a_{\text{coal}}$  insbesondere, wenn es zu einem Wechsel der Schädigungsmechanismen (moderate  $\eta$ ) kommt, eine gute Approximation darstellen.

Auch der Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$ , der mit Beginn des Zusammenwachsens der Mikroporen seine Gültigkeit besitzt, wird für unterschiedliche Variationen auf der Mikroebene bestimmt. Im Folgenden werden die Resultate für den Lodeparameter  $\omega = 0$  dargestellt (Abb. 5.16). Für die Triaxialität  $\eta = 5/3$  verteilen sich die Ergebnisse der Ein-Poren-Modelle mit unterschiedlichen Porenformen in geringem Abstand um die vorgeschlagene Funktion. Ein Teil der Datenpunkte befindet sich oberhalb und der andere Teil unterhalb dieser Funktion. Bei den Triaxialitäten  $\eta = -1/3$  und  $\eta = 0$  tritt erneut eine breitere Streuung der Datenpunkte auf. Sowohl für die unterschiedlichen Porenanordnungen als auch für unterschiedliche Porenformen sind entsprechende Abweichungen zu beobachten. Bei der Triaxialität  $\eta = -1/3$  liegen die Resultate oberhalb der vorgeschlagenen Funktion. Im Gegensatz dazu befinden sie sich für die Triaxialität  $\eta = 0$  unterhalb dieser. Diese Abweichungen sind ebenfalls darauf zurückzuführen, dass es sich bei diesen Triaxialitäten um den Grenzbereich zu der nicht vorhandenen Schädigung han-

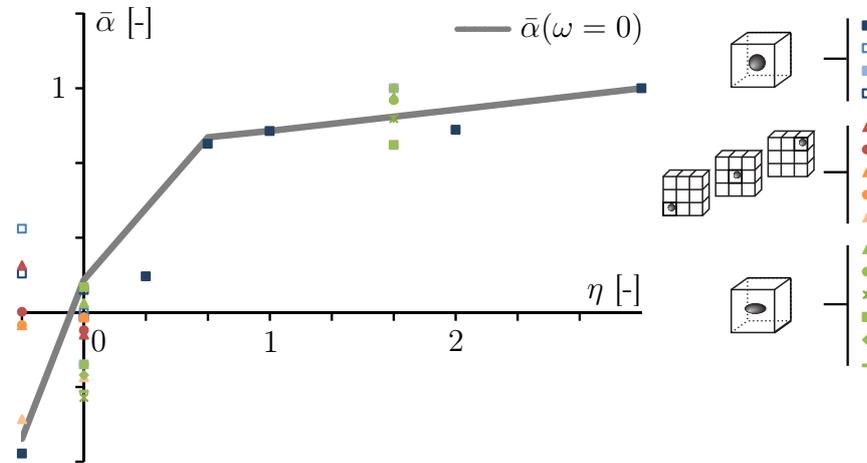


**Abb. 5.15:** Schädigungsparameter  $a_{\text{coal}}$  für den Lodeparameter  $\omega = 0$  und Einordnung der Ergebnisse der verschiedenen numerischen Modelle bei Verwendung der Element-Erosion-Technik

delt. Eine ähnliche Tendenz zeigt sich für die Lodeparameter  $\omega = -1$  und  $\omega = 1$ . Für positive Werte der Triaxialität treten nur geringe Abweichungen bei den Ergebnissen der überprüften Variationen auf. An den Grenzen des Wertebereichs der Triaxialität nehmen diese zu.

Trotz der auftretenden Abweichungen wird bei Betrachtung der Ergebnisse (Abb. 5.16) deutlich, dass es sich bei den vorgeschlagenen Funktionen für den Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$  des Schädigungsgesetzes um eine gute Approximation handelt. Unregelmäßigkeiten auf der Mikroebene müssen somit nicht zusätzlich berücksichtigt werden.

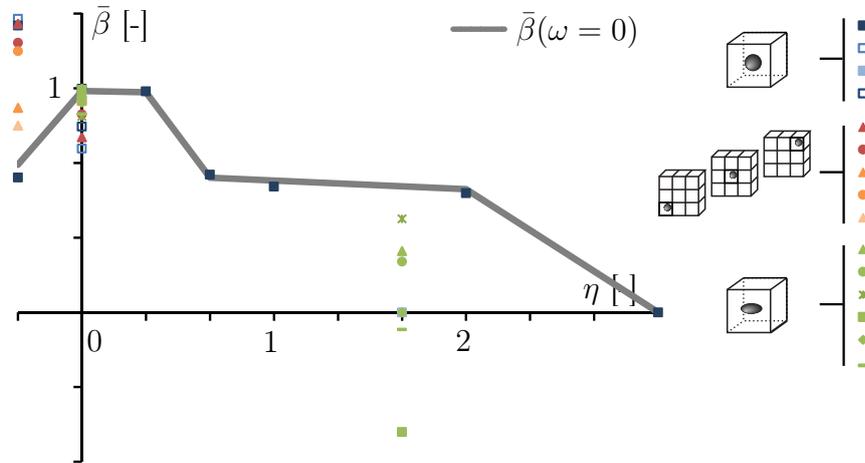
Im Folgenden werden die Ergebnisse des Schädigungsparameters  $\bar{\beta}(\eta, \omega)$  (Gl. (5.5)) betrachtet. Im Detail werden die Resultate des Lodeparameters  $\omega = 0$  analysiert (Abb. 5.17). Auf die Betrachtung weiterer Ergebnisse der Lodeparameter  $\omega = -1$  und  $\omega = 1$  wird verzichtet, da die Resultate der unterschiedlichen Lodeparameter eine vergleichbare Tendenz zeigen und dadurch keine zusätzlichen Erkenntnisse gewonnen werden. Bei den Datenpunkten der Simulationen mit unterschiedlichen Porenformen (Grüntöne) treten bei kleinen Triaxialitäten nur geringe Abweichungen zu der vorgeschlagenen Funktion für den Schädigungs-



**Abb. 5.16:** Schädigungsparameter  $\bar{\alpha}$  für den Lodeparameter  $\omega = 0$  und Einordnung der Ergebnisse der verschiedenen numerischen Modelle bei Verwendung der Element-Erosion-Technik

parameter  $\bar{\beta}(\omega = 0)$  auf. Diese Funktion stellt somit einen guten Mittelwert dar. Eine ähnliche Tendenz zeigt sich bei den Ergebnissen der Berechnungen mit den periodischen Randbedingungen. Sowohl die Auswertungen der Ein-Poren-Modelle (Blautöne), als auch die der Mehr-Poren-Modelle (Rottöne) Abweichungen zu der vorgeschlagenen Funktion auf. Diese Datenpunkte befinden sich jedoch im Randbereich des Grenzwertes der Schädigung, sodass deren Bedeutung untergeordnet ist. Auch bei höheren Werten der Triaxialität kommt es zu Abweichungen von der vorgeschlagenen Funktion für unterschiedliche Porenformen. Allerdings ist auch an dieser Stelle wieder zu berücksichtigen, dass eine konzentrierte Anordnung von gleichgerichteten rein ellipsenförmigen Poren in realen Porenverteilungen quasi nicht vorkommt. Dieser eher unrealistische Zustand passt somit nicht zu den Ergebnissen experimenteller Beobachtungen. Die Abweichungen der grünen Punkte von den gewählten Funktionen sind daher als weniger kritisch anzusehen.

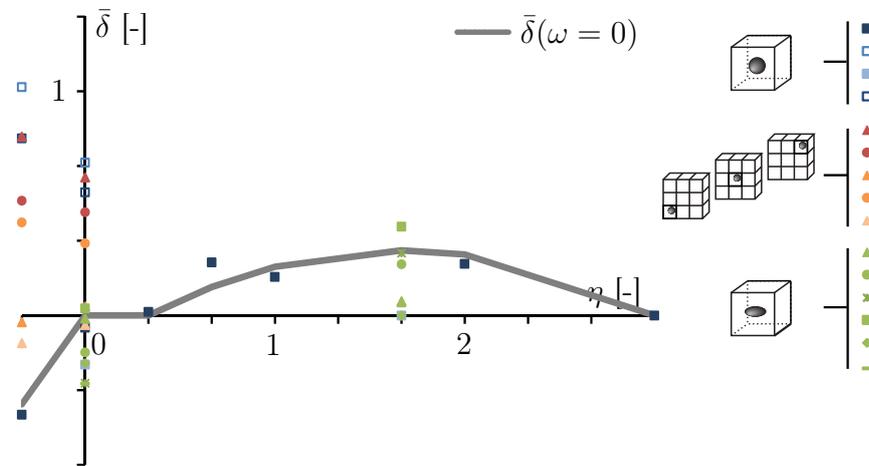
Aufgrund dieser Beobachtungen kann auch in diesem Fall festgehalten werden, dass das Ein-Poren-Modell mit der kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  (P3KEE) ein geeignetes Modell zur Bestimmung der Parameter der Materialgleichungen, die die Entstehung eines Makrorisses charakterisieren, ist.



**Abb. 5.17:** Schädigungsparameter  $\bar{\beta}$  für den Lodeparameter  $\omega = 0$  und Einordnung der Ergebnisse der verschiedenen numerischen Modelle bei Verwendung der Element-Erosion-Technik

Neben den Ergebnissen für die Parameter  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\beta}$  werden auch die Resultate des Schädigungsparameters  $\bar{\delta}$  (Abb. 5.18) analysiert. Exemplarisch werden in diesem Fall die Ergebnisse für den Lodeparameter  $\omega = 0$  betrachtet. Für die Triaxialitäten  $\eta \leq 0$  zeigt sich eine verhältnismäßig breite Streuung der Ergebnisse. Diese Abweichungen sind erneut darauf zurückzuführen, dass es sich bei diesen Triaxialitäten um den Grenzbereich zu der nicht vorhandenen Schädigung handelt. Auch die Datenpunkte der Simulationen mit unterschiedlichen Porenformen weisen geringe Abweichungen auf. Trotz der Differenzen in den Ergebnissen stellt die Funktion  $\bar{\delta}(\omega = 0)$  einen guten Mittelwert dar. Die Resultate für den Lodeparameter  $\omega = -1$  und  $\omega = 1$  des Schädigungsparameters  $\bar{\delta}(\eta, \omega)$  werden an dieser Stelle nicht im Detail diskutiert, da die Ergebnisse für diese Fälle eine vergleichbare Tendenz zeigen. Die vorgeschlagenen Funktionen bilden im Mittel die Ergebnisse sehr gut ab, sodass Unregelmäßigkeiten auf der Mikroebene nicht durch zusätzliche Parameter berücksichtigt werden müssen.

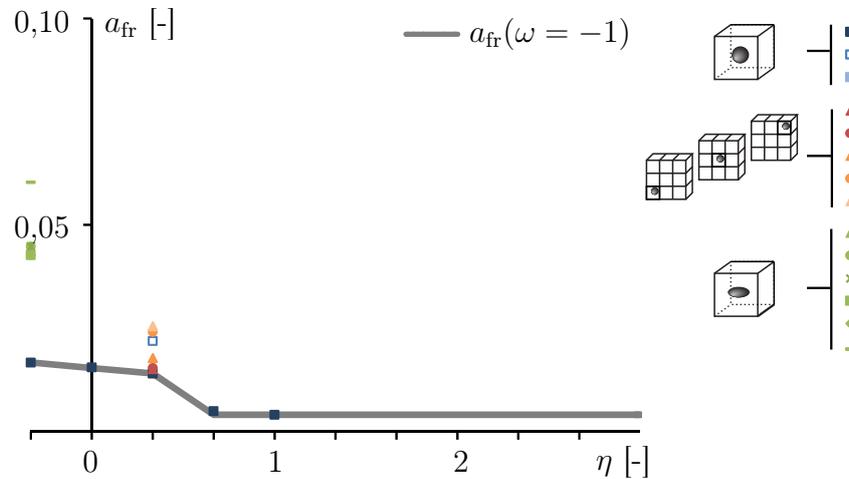
Neben den Ergebnissen der vorangegangenen Betrachtungen wird auch die Verteilung der Ergebnisse für den Schädigungsparameter  $a_{fr}(\eta, \omega)$  (Gl. (5.9)) untersucht. Zur Analyse dieser werden die Resultate des Lodeparameters  $\omega = -1$  herangezogen (Abb. 5.19). Hierbei zeigen sich für die Triaxialität  $\eta = 1/3$  nur geringe



**Abb. 5.18:** Schädigungsparameter  $\bar{\delta}$  für den Lodeparameter  $\omega = 0$  und Einordnung der Ergebnisse der verschiedenen numerischen Modelle bei Verwendung der Element-Erosion-Technik

Abweichungen für die Simulationen mit den unterschiedlichen Porenanordnungen in Kombination mit den periodischen Randbedingungen. Alle Datenpunkte liegen nur leicht oberhalb der vorgeschlagenen Funktion. Auch bei dem Ergebnis der Simulation P3pRBEE treten nur geringe Abweichungen auf. Im Gegensatz dazu sind für die Resultate der Berechnungen mit unterschiedlichen Porenformen bei der Triaxialität  $\eta = -1/3$  größere Abweichungen zu verzeichnen. Auch diese können darauf zurückgeführt werden, dass es sich in diesem Fall um den Randbereich in der Nähe des Grenzwertes  $\eta_c$  (Kap. 2.3.2) handelt. In diesem Grenzgebiet kann es eher zu leichten Abweichungen kommen. Dennoch ist deren Größenordnung in einem moderaten Bereich. Weitere Ergebnisse werden für den Schädigungsparameter  $a_{\text{coal}}$  nicht vorgestellt, da in der vorangegangenen Diskussion alle Aspekte dargestellt wurden. Durch die Darstellung der Ergebnisse des Lodeparameters  $\omega = 0$  und  $\omega = 1$  können keinen neuen Aspekte hinzugefügt werden.

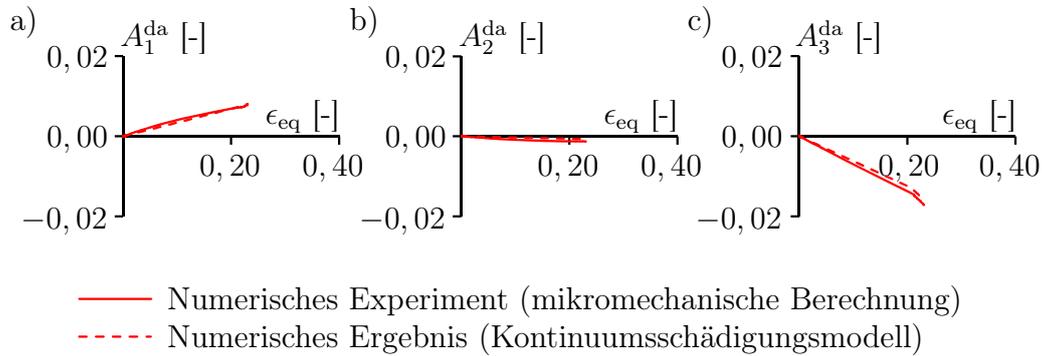
Zusammenfassend kann mit den vorgeschlagenen Funktionen für den Parameter  $a_{\text{fr}}(\eta, \omega)$  des Risskriteriums das Verhalten unterschiedlicher mikromechanischer Modelle gut abgebildet werden. Die Unregelmäßigkeiten auf der Mikroebene müssen somit nicht in Form zusätzlicher Parameter berücksichtigt werden. Die Ergebnisse des Ein-Poren-Modells mit der kugelförmigen Pore und der Anfangs-



**Abb. 5.19:** Schädigungsparameter  $a_{fr}$  für den Lodeparameter  $\omega = -1$  und Einordnung der Ergebnisse der verschiedenen numerischen Modelle bei Verwendung der Element-Erosion-Technik

porosität  $f_0 = 3\%$  (P3KEE) bilden im Mittel die vorhandenen Ergebnisse gut ab.

Abschließend kann nach Betrachtung der Ergebnisse der vorgeschlagenen Funktionen und der zugehörigen Resultate der Simulationen mit unterschiedlichen mikrostrukturellen Eigenschaften (Abb. 5.15-5.19) festgehalten werden, dass die Funktionen für die unterschiedlichen Schädigungsparameter eine gute Approximation der vorgestellten Ergebnisse liefern. Bei der Überprüfung der Ergebnisse der Simulationen mit verschiedenen geometrischen Eigenschaften auf der Mikroebene zeigen sich zwar Abweichungen, deren Größenordnung befindet sich jedoch in einem moderaten Bereich. Somit kann davon ausgegangen werden, dass diese nicht in Form zusätzlicher Parameter bei der Ermittlung der Parameter des Schädigungsgesetzes, der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte und des Risskriteriums berücksichtigt werden müssen. Die Ergebnisse der Berechnungen des Ein-Poren-Modells mit der kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  liefern dadurch auch bei der Simulation der Entstehung eines Makrorisses eine gute Näherungslösung für verschiedene Unregelmäßigkeiten auf der Mikroebene. Aufgrund dieser Tatsache wird die folgende Validierung der Ergebnisse ebenfalls anhand dieser Modelle durchgeführt



**Abb. 5.20:** Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells für die Triaxialität  $\eta = -1/3$  und den Lodeparameter  $\omega = 0$

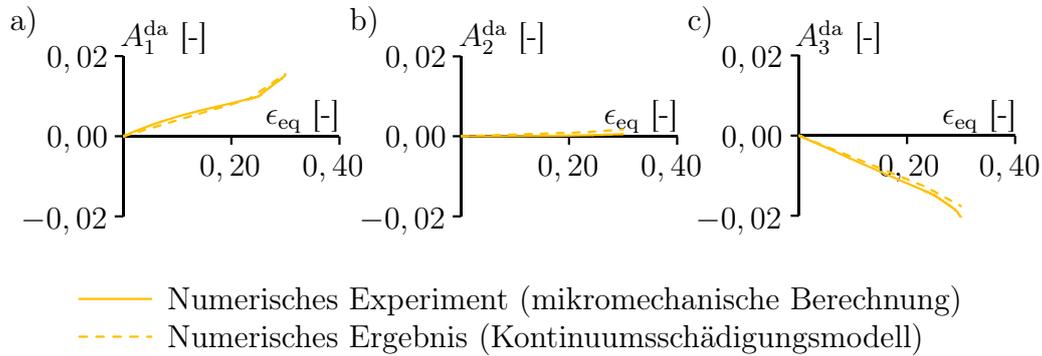
(Abb. 5.20-5.23). Dabei werden die Schädigungsverzerrungen  $A_{(i)}^{\text{da}}$  der mikromechanischen Berechnungen (durchgezogene Linie) mit denen des Kontinuumsschädigungsmodells (gestrichelte Linie) verglichen [42]. Um möglichst unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten aus Lodeparameter und Spannungstriaxialität zu betrachten, werden die folgenden Lastfälle bei der Validierung im Detail betrachtet:

- $\eta = -1/3, \omega = 0$  (rot),
- $\eta = 0, \omega = 0$  (gelb),
- $\eta = 1/3, \omega = -1$  (blau) und
- $\eta = 2/3, \omega = 1$  (lila).

Diese Lastfälle berücksichtigen sowohl markante Spannungszustände (Schub- und Zugbelastung) als auch die Randbereiche der untersuchten Wertebereiche der Triaxialität  $\eta$  und des Lodeparameters  $\omega$ .

Für die Triaxialität  $\eta = -1/3$  und den Lodeparameter  $\omega = 0$  zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse der Schädigungsverzerrungen (Abb. 5.20). Das Kontinuumsschädigungsmodell bildet die Schädigungsentwicklung hervorragend ab.

Eine ähnliche Tendenz zeigt sich bei dem Vergleich der Ergebnisse des Schubversuchs ( $\eta = \omega = 0$ ) (Abb. 5.21). Auch bei diesem Lastfall stimmen die Ergebnisse des Kontinuumsschädigungsmodells nahezu mit denen der mikromechanischen

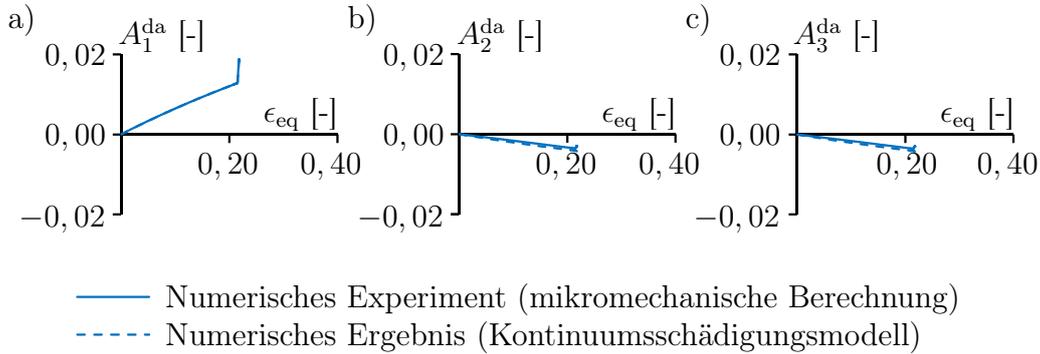


**Abb. 5.21:** Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells für die Triaxialität  $\eta = 0$  und den Lodeparameter  $\omega = 0$

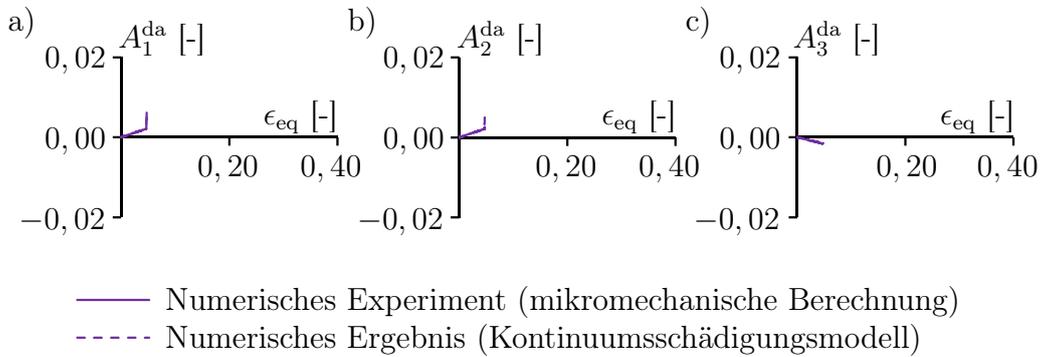
Berechnungen überein. Die Abweichungen sind sowohl zu Beginn der Schädigung als auch ab dem Beginn des Zusammenwachsens der Mikrodefekte sehr gering.

Zusätzlich werden die Ergebnisse der Schädigungsverzerrungen der Simulation mit der Triaxialität  $\eta = 1/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = -1$ , welche einem Zugversuch entspricht, verglichen (Abb. 5.22). Dabei zeigt sich eine gute Übereinstimmung für die Schädigungsverzerrung in 1-Richtung (Abb. 5.22a)). Die Ergebnisse des Kontinuumsschädigungsmodells stimmen nahezu mit denen der mikromechanischen Berechnungen überein. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei der Betrachtung der Schädigungsverzerrungen in 2- (Abb. 5.22b)) und 3-Richtung (Abb. 5.22c)). Es treten in beiden Fällen vernachlässigbar kleine Abweichungen zwischen den Ergebnissen des Modells (gestrichelte Linie) und denen der Berechnungen (durchgezogene Linie) auf.

Um auch Gültigkeit des Kontinuumsschädigungsmodells für einen zugdominierten Lastfall zu beweisen, werden zusätzlich die Ergebnisse der Simulation mit der Triaxialität  $\eta = 2/3$  und dem Lodeparameter  $\omega = 1$  dargestellt (Abb. 5.23). Bei diesen Ergebnissen wird zunächst deutlich, dass die Berechnungen numerisch wesentlich instabiler sind als die anderen Simulationen. Dies ist auf den mit steigender Triaxialität verbundenen Anstieg des Einflusses der ersten Invarianten  $I_1$  des Spannungstensors zurückzuführen. Dieser Einfluss wird in dem verwendeten plastischen Materialgesetz nicht berücksichtigt, da das Materialgesetz NLISO mit der zweiten Invarianten  $J_2$  des Spannungsdeviators formuliert wird. Die plastischen Verzerrungen und auch die Gesamtverzerrungen bleiben dadurch verhältnismäßig



**Abb. 5.22:** Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells für die Triaxialität  $\eta = 1/3$  und den Lodeparameter  $\omega = -1$



**Abb. 5.23:** Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells für die Triaxialität  $\eta = 2/3$  und den Lodeparameter  $\omega = 1$

klein. Trotz der geringen Größenordnung der Verzerrungen liefern die Ergebnisse des Kontinuumsschädigungsmodells auch in diesem Fall eine gute Approximation der Resultate der mikromechanischen Berechnungen. Es zeigt sich für die Schädigungsverzerrungen eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse sowohl in 1- (Abb. 5.23a)), 2- (Abb. 5.23b)) als auch in 3-Richtung (Abb. 5.23c)).

Abschließend kann festgehalten werden, dass die vorgeschlagenen Parameter des Schädigungsgesetzes, der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte und des Risskriteriums die Entstehung eines Makrorisses sehr gut modellieren. Die Ergebnisse der mikromechanischen Berechnungen und des Kontinuumsschädigungsmodells stimmen nahezu überein. Es treten lediglich geringe Abweichungen bei der Validierung des Kontinuumsschädigungsmodells auf. Des Weiteren zeigen die Ergebnisse, dass geometrische Unregelmäßigkei-

ten auf der Mikroebene nicht in Form von zusätzlichen Parametern berücksichtigt werden müssen. Das Ein-Poren-Modell mit der kugelförmigen Pore und der Anfangsporosität  $f_0 = 3\%$  ist für die Ermittlung der Schädigungsparameter sehr gut geeignet, da diese Ergebnisse im Mittel nahezu alle Ergebnisse von Simulationen mit unterschiedlichen geometrischen Eigenschaften approximieren.

Allerdings ist zu beachten, dass es sich an dieser Stelle um rein numerische Ergebnisse handelt. Ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen realer Probekörper muss zusätzlich durchgeführt werden. Dadurch können die ermittelten Parameter auch auf dieser Ebene validiert werden. Eine erste Überprüfung der numerischen Ergebnisse wurde im Rahmen der Dissertation von Brenner [21] und weiteren Veröffentlichungen von Brünig et al. [33, 34, 36] vorgenommen. Im Rahmen dieser Arbeit zeigt sich, dass bereits die Schädigungsparameter der Schädigungsbedingung und des Schädigungsgesetzes, die ohne die Element-Erosionstechnik ermittelt wurden, eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen realer Versuche liefern. Zusätzlich wurden von Brünig et al. [44, 45] erste Vereinfachungen der vorgestellten Funktionen vorgenommen, die ebenfalls zufriedenstellende Ergebnisse bei der Modellierung der Schädigungsentwicklung liefern. Somit ist in weiteren Versuchen zu überprüfen, ob die Parameter zur Modellierung eines Makrorisses (Gl. (5.4)-(5.7)) eventuell nur eine untergeordnete Bedeutung bei der Modellierung der Schädigungsentwicklung haben. Experimentelle Ergebnisse und numerische Simulationen [21, 44, 45] weisen darauf hin, dass dies der Fall sein könnte. Zusätzliche Gleichungen könnten die Materialgleichungen somit nur verkomplizieren, liefern im Gegensatz aber keinen wesentlichen Zugewinn bei der Genauigkeit der Ergebnisse des Kontinuumsschädigungsmodells.

## 6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Kontinuumsschädigungsmodell nach Brüinig [23] vorgestellt, dessen spannungsabhängige Parameter mit Hilfe von mikromechanischen numerischen Simulationen bestimmt werden. Das phänomenologische Modell wurde vorgestellt [23] und anschließend für das Deformations- und Versagensverhalten duktiler Metalle weiter ausgearbeitet [23, 25, 27, 40, 42].

In der Kinematik wird sowohl eine geschädigte als auch eine fiktiv ungeschädigte Konfiguration eingeführt. Unter Verwendung thermodynamischer Grundgleichungen kann je ein Spannungstensor in diesen Konfigurationen formuliert werden. Zur Ermittlung der Materialgleichungen wird auf die phänomenologische Theorie zurückgegriffen. Dabei wird mit einer Drucker-Prager-Fließbedingung der Beginn des plastischen Fließens charakterisiert, sodass auch hydrostatische Spannungszustände berücksichtigt werden können. Das elastisch-plastische Materialverhalten wird dann mit einem nicht assoziiertem Fließgesetz und einem Verfestigungsgesetz modelliert.

Im Anschluss an das elastisch-plastische Verhalten duktiler Metalle schließt sich die Schädigung des Materials an. Diese ist unabhängig von der Plastizierung. Allerdings ist eine starke Abhängigkeit des Schädigungs- und Versagensverhaltens vom Spannungszustand in mikromechanischen Untersuchungen zu beobachten. Aus diesem Grund wird die Schädigungsbedingung unter Berücksichtigung hydrostatischer und deviatorischer Spannungen formuliert. Zur Berücksichtigung des Spannungszustandes werden die Parameter der Schädigungsbedingung in Abhängigkeit der Spannungstriaxialität und des Lodeparameters ermittelt. Auch das nicht assoziierte Schädigungsgesetz berücksichtigt sowohl hydrostatische als auch deviatorische Spannungen. Zur Charakterisierung des Spannungszustandes wird auch in diesem Fall die Triaxialität und der Lodeparameter verwendet. Im Verlauf der Schädigung kommt es zum Porenwachstum und der Ausbreitung von Mikro-

scherrissen. Der Beginn dieses Phänomens wird anhand der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte charakterisiert. Bei weiterer Ausbreitung der Schädigung tritt letztendlich das komplette Versagen des Materials auf der Makroebene auf, was mit einem Risskriterium beschrieben wird. Anhand mikromechanischer Berechnungen können die kritischen Parameter dieser Kriterien in Abhängigkeit des Spannungszustandes ermittelt werden.

Zur Untersuchung der gesamten Bandbreite unterschiedlicher Spannungszustände während der Schädigung werden in dieser Arbeit mikromechanische numerische Simulationen von mehraxial beanspruchten repräsentativen Volumenelementen mit einer oder mehreren Poren durchgeführt. Dabei werden neben geometrischen Eigenschaften der Pore zusätzlich die Randbedingungen variiert. Es werden unterschiedliche Porengrößen, Porenformen, Porenanordnungen und periodische Randbedingungen und deren Einfluss auf die Ergebnisse des erweiterten Kontinuumsschädigungsmodells auf der Makroebene betrachtet. Die Ergebnisse der Ein-Poren-Modelle werden zur Bestimmung der spannungsabhängigen Schädigungsparameter der charakteristischen Materialgleichungen der Schädigung genutzt. Dabei wird deutlich, dass sich für unterschiedliche Spannungstriaxialitäten unterschiedliche Schädigungsmechanismen einstellen. Im Bereich kleiner Triaxialitäten wird der Schädigungsprozess von Mikroscherrissen dominiert. Im Gegensatz dazu dominiert für große positive Triaxialitäten das Porenwachstum. Im Übergang zwischen den Bereichen tritt eine Mischung aus beiden Mechanismen auf.

Die Analyse der geometrischen Variationen und der unterschiedlichen Randbedingungen auf der Mikroebene zeigt, dass die vorgeschlagenen spannungsabhängigen Funktionen für die Schädigungsparameter des Schädigungsgesetzes, der Schädigungsbedingung, der Bedingung zur Erfassung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte und des Risskriteriums einen sehr guten Mittelwert der Daten der untersuchten mikromechanischen Variationen darstellen. Es besteht somit ein direkter Zusammenhang zwischen den mikromechanischen Untersuchungen und dem Schädigungs- und Versagensmodell auf der Makroebene. Zwar treten geringe Abweichungen auf, diese sind jedoch damit zu erklären, dass auch in realen Materialien eine Mischung aus den untersuchten Variationen auftritt. Eine reale Anordnung besteht sowohl aus unterschiedlichen Porengrößen, Porenformen und auch Porenanordnungen. Der mit den vorgeschlagenen Funktionen

erreichte Mittelwert stellt somit ein gutes Ergebnis für die Abbildung des realen Schädigungs- und Versagensverhaltens duktiler Metalle dar. Auch der Vergleich der Ergebnisse des im Rahmen dieser Arbeit erweiterten makroskopischen Kontinuumschädigungsmodells mit denen der mikromechanischen Simulationen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung.

Eine weitere Erkenntnis der durchgeführten Untersuchungen ist, dass das Ein-Poren-Modell mit einer kugelförmigen Pore zur Bestimmung der spannungsabhängigen Parameter für die hier verwendete Erweiterung des Kontinuumschädigungsmodells sehr gut geeignet ist. Aufwändige Untersuchungen von z. B. unterschiedlichen Porenformen und -größen liefern keine weiteren Erkenntnisse, die zu einer Erhöhung der Vorhersagegenauigkeit des Modells führen. Auch die Untersuchung periodischer Randbedingungen führt zu nahezu keiner Veränderung der Ergebnisse der Schädigungsparameter des in dieser Arbeit erweiterten Schädigungsmodells, sodass die gewählten Symmetrierandbedingungen zur Analyse der Spannungszustände ausreichend sind.

Abschließend ist festzuhalten, dass die erbrachten Ergebnisse zeigen, dass eine unabhängige Betrachtung des Schädigungs- und Versagensverhaltens duktiler Metalle zu einer guten Approximation des realen Verhaltens führen. Die vorgestellte Erweiterung des Kontinuumschädigungsmodells führt zu einer sehr guten Übereinstimmung mit den mikromechanischen numerischen Untersuchungen der Schädigung. Aufgrund der in dieser Arbeit untersuchten großen Bandbreite der Spannungszustände kann eine Vielzahl unterschiedlicher Schädigungsmechanismen mit dem erweiterten Modell abgebildet werden.



## 7 Ausblick

Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, dass die vorgeschlagenen spannungsabhängigen Funktionen der Schädigungsparameter hervorragende Ergebnisse bei der Anwendung des hier erweiterten Kontinuumsschädigungsmodells liefern. Die Resultate der mikromechanischen Simulationen und des Kontinuumsschädigungsmodells bis zum Beginn (anfängliche Schädigung) und ab dem Beginn des Zusammenwachsens (fortgeschrittene Schädigung) der Mikrodefekte stimmen sehr gut überein.

Um diese Ergebnisse mit dem realen Schädigungs- und Versagensverhalten duktiler Metalle abzugleichen, sind zusätzliche experimentelle Untersuchungen zur Verifizierung des Modells notwendig. Dabei liegt eine Schwierigkeit in dem Design der Probekörper, da diese jeweils nur einen begrenzten Bereich der großen Bandbreite der Spannungszustände abdecken können. Brünig et al. [33, 34, 36] untersuchten bereits verschiedene Probekörper. Diese Betrachtungen müssen jedoch weiter vertieft werden, sodass die gesamte Bandbreite der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Spannungszustände auch mit experimentellen Analysen untersucht werden kann.

Ein zusätzlicher Ansatzpunkt für weitere Arbeiten ist die Komplexität der vorgeschlagenen Funktionen für die Parameter der Schädigungsbedingung, des Schädigungsgesetzes, der Bedingung zur Charakterisierung des Beginns des Zusammenwachsens der Mikrodefekte und des Risskriteriums. Es sollte in weiteren numerischen Betrachtungen untersucht werden, ob eine Vereinfachung der jeweiligen Funktionen zu einem Genauigkeitsverlust bei der Modellierung des Schädigungs- und Versagensverhaltens duktiler Metalle mit dem in dieser Arbeit erweiterten Kontinuumsschädigungsmodell führt. Anhand erster Betrachtungen [43, 44, 45] kann die Vermutung aufgestellt werden, dass bereits weniger komplexe Funktionen für die Schädigungsparameter der Materialgleichungen zu einem guten

Ergebnis des Modells führen. Eine Reduzierung der Komplexität hätte eine übersichtlichere und einfachere Handhabung des Kontinuumsschädigungsmodells in der praktischen Anwendung zur Folge.

Neben der Validierung und der Vereinfachung des Modells ist auch eine Erweiterung der Gültigkeit für andere Materialien von großer Bedeutung. Um Aussagen über diesen Aspekt treffen zu können, sind weitere numerische Simulationen mit anderen Materialparametern unumgänglich. Dabei sollte untersucht werden, ob das Kontinuumsschädigungsmodell mit den hier entwickelten Funktionen für die gesamte Klasse duktiler Metalle gültig ist oder, ob eventuell eine Einteilung in verschiedene Gruppen notwendig ist. Eine Einteilung dieser Art wäre anhand physikalischer oder chemischer Werkstoffeigenschaften, aber auch fertigungstechnischer Eigenschaften möglich. Des Weiteren sollte das Modell für spröde Materialien, wie z. B. Beton, erweitert werden.

In der industriellen Anwendung treten neben statischen auch dynamische Belastungen auf. Da im Rahmen dieser Arbeit das Schädigungs- und Versagensverhalten duktiler Metalle unter dem Einfluss einer statischen Belastung analysiert worden ist, sollten zusätzliche Untersuchungen dieser Aspekte durchgeführt werden. Dabei empfiehlt sich eine Vorgehensweise in Anlehnung an diese Arbeit mit einer anschließenden experimentellen Validierung des Modells.

## Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik - Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2012
- [2] ANSYS INC. (Hrsg.): *ANSYS 13.0 Help System*. Canonsburg: ANSYS Inc., 2010
- [3] ASARO, R. J.: Micromechanics of crystals and polycrystals. In: *Advances in Applied Mechanics* 23 (1983), S. 2–115
- [4] BAI, Y.; WIERZBICKI, T.: A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence. In: *International Journal of Plasticity* 24 (2008), S. 1071–1096
- [5] BAO, Y.; WIERZBICKI, T.: On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 46 (2004), S. 81–98
- [6] BAO, Y.; WIERZBICKI, T.: On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), S. 1049–1069
- [7] BARSOUM, I.; FALESKOG, J.: Micromechanics of rupture in combined tension and shear. In: *Key Engineering Materials* 345-346 (2007), S. 681–684
- [8] BARSOUM, I.; FALESKOG, J.: Rupture mechanisms in combined tension and shear experiments. In: *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007), S. 1768–1786
- [9] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002

- 
- [10] BECKER, E.; BÜRGER, W.: *Kontinuumsmechanik: Eine Einführung in die Grundlagen und einfache Anwendungen*. Wiesbaden: Springer+Teubner, 1975
- [11] BECKER, R.; NEEDLEMAN, A.; RICHMOND, O.; TVERGAARD, V.: Void growth and failure in notched bars. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 36 (1988), S. 317–351
- [12] BECKER, R.; SMELSER, R.: Simulation of strain localization and fracture between holes in an aluminum sheet. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42 (1994), S. 773–796
- [13] BECKER, R.; SMELSER, R.; RICHMOND, O.: The effect of void shape on the development of damage and fracture in plane-strain tension. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 37 (1989), S. 111–129
- [14] BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Chichester: John Wiley & Sons, 2000
- [15] BETTEN, J.: Net-stress analyses in creep mechanics. In: *Ingenieur* 52 (1982), S. 405–419
- [16] BETTEN, J.: Damage tensors in continuum mechanics. In: *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* 2 (1983), S. 13–32
- [17] BOER, R. de: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1982
- [18] BONORA, N.; GENTILE, D.; PIRONDI, A.; NEWAZ, G.: Ductile damage evolution under triaxial state of stress: theory and experiments. In: *International Journal of Plasticity* 21 (2005), S. 981–1007
- [19] BONORA, N.: A nonlinear CDM model for ductile failure. In: *Engineering Fracture Mechanics* 58 (1997), S. 11–28
- [20] BOURCIER, R.; KOSS, D.; SMELSER, R.; RICHMOND, O.: The influence of porosity on the deformation and fracture of alloys. In: *Acta Metallurgica* 34 (1986), S. 2443–2453

- 
- [21] BRENNER, D.: *Ein vom Spannungszustand abhängiges makroskopisches Schädigungs- und Versagensmodell basierend auf Experimenten und numerischen Simulationen*, Universität der Bundeswehr München, Diss., 2014
- [22] BRÜNIG, M.: Large strain elastic-plastic theory and nonlinear finite element analysis based on metric transformation tensors. In: *Computational Mechanics* 24 (1999), S. 187–196
- [23] BRÜNIG, M.: A framework for large strain elastic-plastic damage mechanics based on metric transformations. In: *International Journal of Engineering Science* 39 (2001), S. 1033–1056
- [24] BRÜNIG, M.: Numerical analysis and elastic-plastic deformation behavior of anisotropically damaged solids. In: *International Journal of Plasticity* 18 (2002), S. 1237–1270
- [25] BRÜNIG, M.: An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics. In: *International Journal of Plasticity* 19 (2003), S. 1679–1713
- [26] BRÜNIG, M.: Numerical analysis of anisotropic ductile continuum damage. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 2949–2976
- [27] BRÜNIG, M.: An anisotropic continuum damage model: Theory and numerical analyses. In: *Latin American Journal of Solids and Structures* 1 (2004), S. 185–218
- [28] BRÜNIG, M.: Formulation and numerical treatment of incompressibility constraints in large strain elastic-plastic analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), S. 1047–1068
- [29] BRÜNIG, M.: Numerical simulation of the large elastic-plastic deformation behavior of hydrostatic stress-sensitive solids. In: *International Journal of Plasticity* 15 (1999), S. 1237–1264
- [30] BRÜNIG, M.: Numerical analysis and large strain elastic-viscoplastic behavior of hydrostatic stress-sensitive metals. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), S. 635–656

- [31] BRÜNIG, M.; ALBRECHT, D.; GERKE, S.: Modeling of ductile damage and fracture behavior based on different micromechanisms. In: *International Journal of Damage Mechanics* 20 (2011), S. 558–577
- [32] BRÜNIG, M.; ALBRECHT, D.; GERKE, S.: Numerical analyses of stress-triaxiality-dependent inelastic deformation behavior of aluminum alloys. In: *International Journal of Damage Mechanics* 20 (2011), S. 299–317
- [33] BRÜNIG, M.; BRENNER, D.; GERKE, S.: Modeling of stress-state-dependent damage and failure of ductile metals. In: *Applied Mechanics and Materials* 784 (2015), S. 35–42
- [34] BRÜNIG, M.; BRENNER, D.; GERKE, S.: Stress state dependence of ductile damage and fracture behavior: experiments and numerical simulations. In: *Engineering Fracture Mechanics* 141 (2015), S. 152–169
- [35] BRÜNIG, M.; CHYRA, O.; ALBRECHT, D.; DRIEMEIER, L.; ALVES, M.: A ductile damage criterion at various stress triaxialities. In: *International Journal of Plasticity* 24 (2008), S. 1731–1755
- [36] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; BRENNER, D.: Experiments and numerical simulations on stress-state-dependence of ductile damage criteria. In: *Altenbach, H., Brünig, M. (Hrsg.): Inelastic Behavior of Materials and Structures Under Monotonic and Cyclic Loading, Advanced Structured Materials 57, Schweiz: Springer International* (2015), S. 17–33
- [37] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; HAGENBROCK, V.: A continuum damage and failure model based on stress-state-dependent criteria. In: *Proceedings of the ASME 2012 11th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Nantes* (2012), S. 573–582
- [38] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; HAGENBROCK, V.: Studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode parameter on ductile damage conditions. In: *Chow, C. L., Ju, J. W., Sumarac, D. M. (Hrsg.): Proceedings of the First International Conference on Damage Mechanics, Belgrad* (2012), S. 77–80
- [39] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; HAGENBROCK, V.: Micro-mechanical numerical studies on the stress state dependence of ductile damage. In: *Altenbach, H.,*

- Kruch, S. (Hrsg.): Advanced Materials Modelling for Structures, Advanced Structured Materials 19, Berlin, Heidelberg: Springer (2013), S. 87–96*
- [40] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; HAGENBROCK, V.: Micro-mechanical studies on the effect of the stress triaxiality and the Lode parameter on ductile damage. In: *International Journal of Plasticity* 50 (2013), S. 49–65
- [41] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; HAGENBROCK, V.: Modelling of ductile damage using numerical analyses on the micro-scale. In: *Onate, E., Owen, D. R. J., Suarez, B. (Hrsg.): Proceedings of the XII International Conference on Computational Plasticity - Fundamentals and Applications, Barcelona (2013)*
- [42] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; HAGENBROCK, V.: Stress-state-dependence of damage strain rate tensors caused by growth and coalescence of micro-defects. In: *International Journal of Plasticity* 63 (2014), S. 49–63
- [43] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; SCHMIDT, M.: Biaxial experiments and numerical simulations on damage and fracture mechanisms in ductile metals at different loading conditions. In: *Procedia Structural Integrity* 2 (2016), S. 3109–3116
- [44] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; SCHMIDT, M.: Biaxial experiments and phenomenological modeling of stress-state-dependent ductile damage and fracture. In: *International Journal of Fracture* 200 (2016), S. 63–76
- [45] BRÜNIG, M.; GERKE, S.; SCHMIDT, M.: Experiments on damage and failure mechanisms in ductile metals at different loading conditions. In: *Naumenko, K., Aßmus, M. (Hrsg.): Advanced Methods of Continuum Mechanics for Materials and Structures, Advanced Structured Materials 60, Singapur: Springer (2016), S. 279–293*
- [46] CHABOCHE, J.-L.: Continuous damage mechanics-a tool to describe phenomena before crack initiation. In: *Nuclear Engineering and Design* 64 (1981), S. 233–247
- [47] CHABOCHE, J.-L.: Continuum damage mechanics: Part I - General concepts. In: *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988), S. 59–64

- 
- [48] CHABOCHE, J.-L.: Continuum damage mechanics: Part II - Damage growth, crack initiation, and crack growth. In: *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988), S. 65–72
- [49] CHOW, C.; WANG, J.: An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. In: *Engineering Fracture Mechanics* 27 (1987), S. 547–558
- [50] CHU, C.; NEEDLEMAN, A.: Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 102 (1980), S. 249–256
- [51] COPPOLA, T.; CORTESE, L.; FOLGARAIT, P.: The effect of stress invariants on ductile fracture limit in steels. In: *Engineering Fracture Mechanics* 76 (2009), S. 1288–1302
- [52] DANAS, K.; CASTANEDA, P. P.: Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), S. 1325–1342
- [53] DUBENSKY, E.; KOSS, D.: Void/ pore distributions and ductile fracture. In: *Metallurgical Transactions A* 18 (1987), S. 1887–1895
- [54] DUNAND, M.; MOHR, D.: On the predictive capabilities of the shear modified Gurson and the modified Mohr–Coulomb fracture models over a wide range of stress triaxialities and Lode angles. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59 (2011), S. 1374–1394
- [55] FABREGUE, D.; PARDOEN, T.: A constitutive model for elastoplastic solids containing primary and secondary voids. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56 (2008), S. 719–741
- [56] FALESKOG, J.; GAO, X.; SHIH, C.: Cell model for nonlinear fracture analysis I. Micromechanics calibration. In: *International Journal of Fracture* 89 (1998), S. 355–373
- [57] FONSEKA, G.; KRAJCINOVIC, D.: The continuous damage theory of brittle materials, part 2: uniaxial and plane response modes. In: *Journal of Applied Mechanics* 48 (1981), S. 816–824

- [58] GAO, X.; KIM, J.: Modeling of ductile fracture: Significance of void coalescence. In: *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), S. 6277–6293
- [59] GAO, X.; WANG, T.; KIM, J.: On ductile fracture initiation toughness: Effects of void volume fraction, void shape and void distribution. In: *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), S. 5097–5117
- [60] GAO, X.; ZHANG, G.; ROE, C.: A study on the effect of the stress state on ductile fracture. In: *International Journal of Damage Mechanics* 19 (2010), S. 75–94
- [61] GARRISON, W.; MOODY, N.: Ductile fracture. In: *Journal of Physics and Chemistry of Solids* 48 (1987), S. 1035–1074
- [62] GOLOGANU, M.; LEBLOND, J.-B.; DEVAUX, J.: Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids in case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41 (1993), S. 1723–1754
- [63] GOLOGANU, M.; LEBLOND, J.-B.; DEVAUX, J.: Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 116 (1994), S. 290–297
- [64] GURSON, A. L.: Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 99 (1977), S. 2–15
- [65] HAGENBROCK, V.; GERKE, S.; BRÜNIG, M.: Micro-mechanical modelling of ductile damage and failure taking into account various stress-states. In: *Oñate, E., Oliver, J., Huerta, A. (Hrsg.): Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics, Barcelona: CIMNE* (2014), S. 1175–1186
- [66] HAYAKAWA, K.; MURAKAMI, S.; LIU, Y.: An irreversible thermodynamics theory for elastic-plastic-damage materials. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 17 (1998), S. 13–32

- 
- [67] HENRY, J.: On the mode of testing building materials, and an account of the marble used in the extension of the United States capitol. In: *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science* 9 (1855), S. 102–116
- [68] HOSOKAWA, A.; WILKINSON, D. S.; KANG, J.; MAIRE, E.: Effect of triaxiality on void growth and coalescence in model materials investigated by X-ray tomography. In: *Acta Materialia* 60 (2012), S. 2829–2839
- [69] HOSOKAWA, A.; WILKINSON, D. S.; KANG, J.; MAIRE, E.: Onset of void coalescence in uniaxial tension studied by continuous X-ray tomography. In: *Acta Materialia* 61 (2013), S. 1021–1036
- [70] HOSOKAWA, A.; WILKINSON, D.; KANG, J.; KOBAYASHI, M.; TODA, H.: Void growth and coalescence in model materials investigated by high-resolution X-ray microtomography. In: *International Journal of Fracture* 181 (2013), S. 51–66
- [71] HUGHES, T. J.: Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 15 (1980), S. 1413–1418
- [72] KACHANOV, L. M.: On rupture time under condition of creep. In: *Izvestia Akademi Nauk USSR, Otd. Techn. Nauk, Moskva* 8 (1958), S. 26–31
- [73] KACHANOV, L. M.: Continuum model of medium with cracks. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 106 (1980), S. 1039–1051
- [74] KACHANOV, L. M.: Rupture time under creep conditions. In: *International Journal of Fracture* 97 (1999), S. 11–18
- [75] KHAN, A. S.; LIU, H.: A new approach for ductile fracture prediction on Al 2024-T351 alloy. In: *International Journal of Plasticity* 35 (2012), S. 1–12
- [76] KIM, J.; GAO, X.; SRIVATSAN, T.: Modeling of crack growth in ductile solids: a three-dimensional analysis. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), S. 7357–7374
- [77] KRAJČINOVIC, D.: Constitutive equations for damaging materials. In: *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983), S. 355–360

- 
- [78] KRAJČINOVIC, D.: Continuum damage mechanics. In: *Applied Mathematics Reviews* 37 (1984), S. 1–6
- [79] KRAJČINOVIC, D.; FONSEKA, G.: The continuous damage theory of brittle materials, part 1: general theory. In: *Journal of Applied Mechanics* 48 (1981), S. 809–815
- [80] KUNA, M.; SUN, D. Z.: Three-dimensional cell model analyses of void growth in ductile materials. In: *International Journal of Fracture* 81 (1996), S. 235–258
- [81] KWEON, S.: Damage at negative triaxiality. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 31 (2012), S. 203–212
- [82] LEBLOND, J.-B.; PERRIN, G.: A self-consistent approach to coalescence of cavities in inhomogeneously voided ductile solids. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47 (1999), S. 1823–1841
- [83] LECARME, L.; MAIRE, E.; KUMAR K.C., A.; VLEESCHOUWER, C. D.; JACQUES, L.; SIMAR, A.; PARDOEN, T.: Heterogenous void growth revealed by in situ 3-D X-ray microtomography using automatic cavity tracking. In: *Acta Materialia* 63 (2013), S. 130–139
- [84] LEHMANN, T.: On the concept of stress-strain relations in plasticity. In: *Acta Mechanica* 42 (1982), S. 263–275
- [85] LEHMANN, T.: Some remarks on the decomposition of deformations and mechanical work. In: *International Journal of Engineering Science* 20 (1982), S. 281–288
- [86] LEHMANN, T.: Some theoretical considerations and experimental results concerning elastic-plastic stress-strain relations. In: *Ingenieur-Archiv* 52 (1982), S. 391–403
- [87] LEHMANN, T.: Some thermodynamical considerations on inelastic deformations including damage processes. In: *Acta Mechanica* 79 (1989), S. 1–24
- [88] LEMAITRE, J.: Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51 (1985), S. 31–49

- 
- [89] LEMAITRE, J.: *A Course on Damage Mechanics*. Berlin: Springer, 1996
- [90] LEMAITRE, J.: A continuous damage mechanics model for ductile fracture. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 107 (1985), S. 83–89
- [91] LEMAITRE, J.; DESMORAT, R.; SAUZAY, M.: Anisotropic damage law of evolution. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 19 (2000), S. 187–208
- [92] LOU, Y.; YOON, J. W.; HUH, H.: Modeling of shear ductile fracture considering a changeable cut-off value for stress triaxiality. In: *International Journal of Plasticity* 54 (2014), S. 56–80
- [93] LU, T.; CHOW, C.: On constitutive equations of inelastic solids with anisotropic damage. In: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 14 (1990), S. 187–218
- [94] LUBARDA, V.; KRAJČINOVIC, D.: Some fundamental issues in rate theory of damage-elastoplasticity. In: *International Journal of Plasticity* 11 (1995), S. 763–797
- [95] LUDWIK, P.: Die Bedeutung des Gleit- und Reißwiderstandes für die Werkstoffprüfung. In: *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* 71 (1927), S. 1532–1538
- [96] MAGNUSEN, P.; DUBENSKY, E.; KOSS, D.: The effect of void arrays on void linking during ductile fracture. In: *Acta Metallurgica* 36 (1988), S. 1503–1509
- [97] MALVERN, L. E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Incorporated, 1969
- [98] MCCLINTOCK, F. A.: A criterion for ductile fracture by the growth of holes. In: *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), S. 363–371
- [99] MELANDER, A.: Computer simulation of ductile fracture in a random distribution of voids. In: *Materials Science and Engineering* 39 (1979), S. 57–63

- 
- [100] MONCHIET, V.; BONNET, G.: A Gurson-type model accounting for void size effects. In: *International Journal of Solids and Structures* 50 (2013), S. 320–327
- [101] MONCHIET, V.; CAZACU, O.; CHARKALUK, E.; KONDO, D.: Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids. In: *International Journal of Plasticity* 24 (2008), S. 1158–1189
- [102] MURAKAMI, S.: *Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012
- [103] MURAKAMI, S.: Mechanical modelling of material damage. In: *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988), S. 280–286
- [104] NAGTEGAAL, J. C.; PARKS, D. M.; RICE, J.: On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 4 (1974), S. 153–177
- [105] NAHSHON, K.; HUTCHINSON, J.: Modification of the Gurson model for shear failure. In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 27 (2008), S. 1–17
- [106] NEEDLEMAN, A.: Void growth in an elastic-plastic medium. In: *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972), S. 964–970
- [107] NEEDLEMAN, A.; KUSHNER, A. S.: An analysis of void distribution effects on plastic flow in porous solids. In: *European Journal of Mechanics* 9 (1990), S. 193–206
- [108] NEEDLEMAN, A.; RICE, J.: Limits to ductility set by plastic flow localization. In: *Mechanics of Sheet Metal Forming* (1978), S. 237–267
- [109] NEEDLEMAN, A.; TVERGAARD, V.: An analysis of ductile rupture in notched bars. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 32 (1984), S. 461–490
- [110] NIELSEN, K.; TVERGAARD, V.: Ductile shear failure or plug failure of spot welds modelled by modified Gurson model. In: *Engineering Fracture Mechanics* 77 (2010), S. 1031–1047

- [111] NIELSEN, K.; DAHL, J.; TVERGAARD, V.: Collapse and coalescence of spherical voids subject to intense shearing: studied in full 3D. In: *International Journal of Fracture* 177 (2012), S. 97–108
- [112] RABOTNOV, Y. N.: On the equations of state for creep. In: *Progress in Applied Mechanics* 12 (1963), S. 307–315
- [113] RAHMAN, M.; BUTCHER, C.; CHEN, Z.: Void evolution and coalescence in porous ductile materials in simple shear. In: *International Journal of Fracture* 177 (2012), S. 129–139
- [114] RICE, J.; TRACEY, D.: On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17 (1969), S. 201–217
- [115] RICHARD, H. A.; SANDER, M.: *Technische Mechanik. Festigkeitslehre: Lehrbuch mit Praxisbeispielen, Klausuraufgaben und Lösungen*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015
- [116] SIMO, J.; TAYLOR, R.; PISTER, K.: Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51 (1985), S. 177–208
- [117] SPITZIG, W.; RICHMOND, O.: The effect of pressure on the flow stress of metals. In: *Acta Metallurgica* 32 (1984), S. 457–463
- [118] SPITZIG, W.; SMELSER, R.; RICHMOND, O.: The evolution of damage and fracture in iron compacts with various initial porosities. In: *Acta Metallurgica* 36 (1988), S. 1201–1211
- [119] SPITZIG, W.; SOBER, R.; RICHMOND, O.: Pressure dependence of yielding and associated volume expansion in tempered martensite. In: *Acta Metallurgica* 23 (1975), S. 885–893
- [120] SPITZIG, W. A.; SOBER, R. J.; RICHMOND, O.: The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory. In: *Metallurgical Transactions A* 7 (1976), S. 1703–1710

- [121] TEKOGU, C.: Representative volume element calculations under constant stress triaxiality, Lode parameter, and shear ratio. In: *International Journal of Solids and Structures* 51 (2014), S. 4544–4553
- [122] TVERGAARD, V.; NEEDLEMAN, A.: Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. In: *Acta Metallurgica* 32 (1984), S. 157–169
- [123] TVERGAARD, V.: Material failure by void coalescence in localized shear bands. In: *International Journal of Solids and Structures* 18 (1982), S. 659–672
- [124] TVERGAARD, V.: Material failure by void growth to coalescence. In: *Advances in Applied Mechanics* 27 (1990), S. 83–151
- [125] TVERGAARD, V.: Shear deformation of voids with contact modelled by internal pressure. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 50 (2008), S. 1459–1465
- [126] TVERGAARD, V.: Behaviour of voids in a shear field. In: *International Journal of Fracture* 158 (2009), S. 41–49
- [127] TVERGAARD, V.: Effect of stress-state and spacing on voids in a shear-field. In: *International Journal of Solids and Structures* 49 (2012), S. 3047–3054
- [128] TVERGAARD, V.; NIELSEN, K. L.: Relations between a micro-mechanical model and a damage model for ductile failure in shear. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 58 (2010), S. 1243–1252
- [129] VOYIADJIS, G. Z.; PARK, T.: The kinematics of damage for finite-strain elasto-plastic solids. In: *International Journal of Engineering Science* 37 (1999), S. 803–830
- [130] VOYIADJIS, G. Z.; KATTAN, P. I.: A plasticity-damage theory for large deformation of solids - I. Theoretical formulation. In: *International Journal of Engineering Science* 30 (1992), S. 1089–1108
- [131] WIERZBICKI, T.; BAO, Y.; LEE, Y.-W.; BAI, Y.: Calibration and evaluation of seven fracture models. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005), S. 719–743

- [132] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Elemente-Methoden*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2001
- [133] XUE, L.: Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), S. 3343–3366
- [134] ZHANG, K.; BAI, J.; FRANCOIS, D.: Numerical analysis of the influence of the Lode parameter on void growth. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), S. 5847–5856