

Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Institut für Thermodynamik

Zur hyperbolischen Wärmetransportgleichung
Theorie, Numerik und Anwendungen

Marvin Clifford Feike, M.Sc.

Vollständiger Abdruck der von der
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
der Universität der Bundeswehr München
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

angenommenen Dissertation

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion
1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Christian Mundt
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Bauer

Die Dissertation wurde am 21.05.2024 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 07.10.2024 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 08.11.2024 statt.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Thermodynamik der Universität der Bundeswehr München.

Mein erster Dank geht an meinen Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Christian Mundt, der mir die Möglichkeit zur Durchführung meines Promotionsvorhabens gab und für die Zeit, in der er die Arbeit betreut hat. Zudem danke ich ihm für seine Hilfsbereitschaft bei fachlichen Fragen, sowie für die Dienstreisen und netten Gespräche mit ihm, die mir in guter Erinnerung bleiben werden. Weiterhin bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Bauer für die Übernahme des Koreferats und bei Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Zudem gilt mein Dank Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG, die mich finanziell durch das Projekt „LuFO Project 20T1701 MakTurb“ unterstützt haben, und Frau Dr.-Ing. Susanne Schrüfer für die Projektleitung und erfolgreiche Zusammenarbeit.

Den Mitarbeitern des Thermodynamik Instituts möchte ich für die Unterstützung danken. Ein besonderer Dank geht zunächst an Dominik James, mit dem ich das Bürozimmer teilen durfte und mit dem ich großartige konstruktive Gespräche hatte. Auch möchte ich sehr Dr.-Ing. Axel Buck, Dr.-Ing. Christoph Traxinger, Dr.-Ing. Fabian Teschner und Prof. Dr.-Ing. habil. Tobias Sander bedanken, die mich durch ihr umfangreiches fachliches Wissen und ihren hohen Anspruch in meiner wissenschaftlichen Arbeitsweise bedeutend geprägt haben.

Mein größter Dank gilt meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die mir immer Rückhalt gaben, mich tatkräftig unterstützten, mir keine Möglichkeit verwehrten, stets ein offenes Ohr hatten und immer sehr an meiner Arbeit interessiert waren. Danke, Mama und Papa, dass ihr mir diesen Weg ermöglicht habt.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Freunden bedanken, besonders jedoch bei meiner Partnerin Marlene. Du warst an schweren Tagen für mich da, während unserer Urlaube hast du für meine Erdung gesorgt, warst immer interessiert und bist rücksichtsvoll mit mir umgegangen. Ich freue mich auf die vielen weiteren gemeinsamen Jahre und Lebensabschnitte mit dir.

München, 16.11.2024

Marvin C. Feike

Kurzfassung

Einlaufsysteme in Flugturbinen bieten ein großes Optimierungspotenzial, um die Spaltströmung zwischen Schaufelspitzen und Gehäuse zu minimieren und einen effizienten und nachhaltigen Luftfahrtantrieb zu ermöglichen. Insbesondere soll dieses System beim Einlaufvorgang bzw. Reibkontakt einen zuverlässigen abrasiven Schnittvorgang bei langen Standzeiten sicherstellen. Hierzu übernimmt das Institut für Thermodynamik an der Universität der Bundeswehr München die Modellierung des Reibwärmehtransportprozesses im Einlaufsystem auf Grundlage der Nichtgleichgewichtsthermodynamik. Die Modellierung wird durch die erweiterte Wärmetransporttheorie und die Finite-Elemente-Methode umgesetzt, um eine Analyse des Einlaufsystems zu ermöglichen. Dadurch wird das Verständnis für den instationären Wärmetransport verbessert und thermodynamische Problemzonen können frühzeitig erkannt werden.

Auf Basis der erweiterten Wärmetransporttheorie werden die hyperbolischen Wärmetransportgleichungen nach Cattaneo und Christov unter Berücksichtigung von Relativbewegungen vorgestellt. Dabei werden auch ihre Unterschiede zur parabolischen Fourier-Gleichung erläutert und ihre Bedeutung sowohl in mikroskopischer als auch in makroskopischer Hinsicht aufgezeigt. Die hyperbolische Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo wird durch Anwendung der Finite-Elemente-Methode nach Galerkin diskretisiert und es werden verschiedene numerische Zeitintegrationsverfahren vorgestellt. Mithilfe des entwickelten HypHeat2D-Programms ist es möglich, parabolische und hyperbolische ebene 2-D-Wärmetransportprobleme mit großen Relativ- oder Systemgeschwindigkeiten bzw. thermischen Mach-Zahlen $Ma_{th} = [0; 1]$ im Nichtgleichgewicht in einem einzigen Gleichungssystem zu lösen.

In den durchgeführten Untersuchungen wurde nachgewiesen, dass die hyperbolische Wärmetransportgleichung gegenüber der parabolischen Gleichung ein physikalischeres Verhalten aufweist, größere Temperaturgradienten zeigt, sowie ein thermischer Stoß bei einer thermischen Mach-Zahl $Ma_{th} = 1$ vorliegt. Bei Problemen mit Relativgeschwindigkeiten $v > 0$ stellen sich asymmetrische Temperaturprofile mit großen Gradienten an der Wärmequellenfront, die maximale Temperatur an der Wärmequellenhinterseite sowie ein asymptotischer Auslauf in das Fernfeld ein. Innerhalb der Anwendungsfälle ergibt sich dadurch beim Einlaufsystem ein erhöhtes Risiko von Temperaturspitzen und folglich sind hohe thermische Spannungen an der Schaufelhinterkante und zwischen der Haftvermittlerschicht sowie den eingebetteten Schnittpartikeln zu erwarten. Des Weiteren verdeutlichen Untersuchungen an einer Brennkammer-Ringwand einer RDE (engl. rotating detonation engine) die Unterschiede zwischen dem hyperbolischen und parabolischen Wärmetransport über instationäre Temperaturgradienten, wobei die hyperbolische Gleichung einen größeren Gradienten vorhersagt.

Abstract

Sealing systems in aircraft turbines offer significant optimization potential to minimize the clearance flow between blade tips and casing, enabling efficient and sustainable propulsion. Specifically, the sealing system is intended to ensure reliable abrasive cutting during inlet operation or friction contact, even during long service life. The Institute of Thermodynamics at the Universität der Bundeswehr München is responsible for modeling the heat transfer process in the sealing system based on non-equilibrium thermodynamics. The modeling is implemented through the extended heat transfer theory and the finite element method to enable an analysis of the system. This enhances the understanding of unsteady heat transfer and allowing early detection of hot spots.

Based on the extended heat transfer theory, the hyperbolic heat transfer equations by Cattaneo and Christov are presented, taking into account relative movements. Their differences from the parabolic Fourier equation are explained and highlighting their significance in both microscopic and macroscopic frame. The hyperbolic heat transport equation according to Christov-Cattaneo is discretised using the finite element method by Galerkin and is integrated over time with various numerical schemes. With the developed HypHeat2D program, it is possible to solve parabolic and hyperbolic planar 2-D heat transfer problems with large relative movements and systems with thermal Mach numbers $Ma_{th} = [0; 1]$ in non-equilibrium within a single equation system.

In the conducted studies, it has been demonstrated that the hyperbolic heat transfer equation exhibits a more physical behavior compared to the parabolic equation, while showing larger temperature gradients and a thermal shock for $Ma_{th} = 1$. In cases with relative velocities $v > 0$, antisymmetric temperature profiles with large gradients at the heat source front and the maximum temperature at the heat source backside emerge. Within the application cases, this results in an increased risk of temperature peaks in the sealing system and consequently high thermal stresses at the blade trailing edge and between the adhesive layer and the embedded particles. Furthermore, investigations on an RDE (rotating detonation engine) combustion chamber illustrate the differences between hyperbolic and parabolic heat conduction over unsteady temperature gradients, with the hyperbolic equation predicting a larger gradient.

Publikationen

Während meiner Zeit am Institut konnte ich Beiträge in wissenschaftlichen Fachzeitschriften veröffentlichen und auf Konferenzen präsentieren. Teile der Dissertation basieren auf diesen Beiträgen und sind im Folgenden chronologisch aufgeführt:

Feike, M. C. und Mundt, Ch., Space-time stabilized FEM applied on the hyperbolic heat conduction equation for high speed frictional contact, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 21, 2021.

Feike, M. C. und Mundt, Ch., Numerical simulation of the thermal wave induced by a moving interfacial heat source with respect to Christov–Cattaneo’s equation, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 23, 2023.

Feike, M. C. und Mundt, Ch., Finite Element Simulation of the Second Sound Wave in a Chamber Annulus Wall of a Rotating Detonation Engine, *International Symposium on Shock Waves*, 34, 2024.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	xi
Abbildungsverzeichnis	xv
Tabellenverzeichnis	xix
Nomenklatur	xxi
I Grundlagen	1
1 Einleitung	3
1.1 Hintergrund und Aufgabenstellung	3
1.2 Stand der Wissenschaft	4
1.3 Zielsetzung und Vorgehen	6
2 Erweiterte Wärmetransporttheorie	9
2.1 Energiebilanz- und Wärmetransportgleichungen	9
2.1.1 Energiebilanzgleichung in materieller Form	10
2.1.2 Wärmetransportgleichung nach Fourier	10
2.1.3 Wärmetransportgleichung nach Cattaneo-Vernotte	11
2.1.4 Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo	12
2.1.5 Gültigkeit der Wärmetransportgleichungen	13
2.2 Thermische Welle und Relaxationszeit	15
2.2.1 Makroskopische Betrachtung	15
2.2.2 Mikroskopische Betrachtung	16
2.2.3 Berechnung der Relaxationszeit und Größen aus der Literatur	18
2.3 Erweiterte irreversible Thermodynamik	19
2.3.1 Erweiterte Entropie	19
2.3.2 Nichtgleichgewichtstemperatur	21
3 Physikalische Kennzahlen	23
3.1 Thermische Mach-Zahl	23
3.2 Fourier-Zahl	23
3.3 Péclet-Zahl	24

II	Numerik	25
4	Finite-Elemente-Methode	27
4.1	Näherungslösung der Temperatur	27
4.2	Isoparametrische Transformation	29
4.3	Ansatz- und Formfunktionen des Rechteckelements	30
4.3.1	Lineares Lagrange-Element	31
4.3.2	Quadratisches Serendipity-Element	33
4.4	Diskretisierung der Transportgleichungen	34
4.4.1	Methode der gewichteten Residuen	35
4.4.2	Randbedingungen	36
4.4.3	Galerkin-Methode	37
4.5	Numerische Diffusion	39
4.5.1	Konzentrierte Wärmekapazitätsmatrix	39
4.5.2	Stream-Line-Upwind-Petrov-Galerkin-Methode	40
4.5.3	Orientierte Relaxationszeit	43
5	Zeitintegration	47
5.1	Θ -Methode	48
5.2	Houbolt-Methode	50
5.3	Lineare-Beschleunigungs- und Wilson- Θ -Methode	51
5.4	Newmark-Methode	52
6	Programme	55
6.1	Netzerstellung mit Netzgen	56
6.2	Berechnung mit HypHeat2D	56
6.3	Validierung	57
III	Ergebnisse	61
7	Generische Geometrie	63
7.1	Geometrie und Randbedingungen	63
7.2	Gegenüberstellung der Gleichungen	64
7.2.1	Unterkritische Diffusion	65
7.2.2	Subkritische Diffusion	65
7.2.3	Transkritische Diffusion	66
7.3	Studie bei transkritischer Diffusion	67
7.3.1	Instationäre und stationäre Lösung	67
7.3.2	Erweiterte Entropie	68
7.3.3	Nichtgleichgewichtstemperatur	69
7.3.4	Orientierte Relaxationszeit	70
7.3.5	Vergleich der Zeitintegrationen	71

7.3.6	Lineare und quadratische Elemente	72
7.3.7	Netzkonvergenzstudie	73
7.4	Zusammenfassung	75
8	Anwendungsfälle	77
8.1	Einlaufvorgang in der Flugturbinen	77
8.1.1	Geometrien und Randbedingungen	78
8.1.2	Auswertung und Ergebnisse	84
8.1.3	Zusammenfassung	87
8.1.4	Ausblick	88
8.2	Thermische Belastung der RDE-Brennkammer-Ringwand	89
8.2.1	Geometrie und Randbedingungen	90
8.2.2	Auswertung und Ergebnisse	91
8.2.3	Zusammenfassung	93
IV	Zusammenfassung und Ausblick	95
9	Zusammenfassung	97
10	Ausblick	99
	Literaturverzeichnis	101
	Anhang	107
A	Netzgen	109
A.1	startSkript.m	109
A.2	Netzgen.m	110
A.3	logFile.txt	114
B	HypHeat2D	117
B.1	startSkript.m	117
B.2	HypHeat2D.m	119
B.3	logFile.txt	122

Abbildungsverzeichnis

2.1	Normierte Temperaturverteilung T_n zu Mittelpunktswinkel Φ einer thermischen Wellenfront einer Quelle mit $Ma_{th} < 1$ im Zentrum [75, 76].	14
2.2	Wärmequelle im Zentrum und thermische Wellenfront im lagrangeschen Bezugssystem: a) $0 < Ma_{th} < 1$, b) $Ma_{th} = 1$ und c) $Ma_{th} > 1$	16
2.3	Momentaufnahme der thermischen Wellenfront im mikroskopischen Modellsystem für verschiedene Mach-Zahlen Ma_{th} [25].	17
4.1	Pascal-Dreieck für ein 2-D-System [86, Kap. 8.4].	30
4.2	Lineares Lagrange-Elemente: a) im globalen System, b) im isoparametrischen System.	31
4.3	Quadratisches Rechteckelement: a) im globalen System, b) im isoparametrischen System.	33
4.4	Berechnung der Stabilitätsparameter; Box: Initiale Berechnungen und Beispiel für die Aktivierung $sign_{\nabla_x} \neq 0$ für gegebene räumliche Gradienten, links: Vorzeichen der normierten räumlichen Gradienten für μ_s und rechts: zeitliche μ_t Parameter [25].	45
5.1	Annahme der Houbolt-Methode [67].	50
5.2	Annahme der linearen Beschleunigung [4, S. 319].	51
5.3	Annahme der konstanten Beschleunigung nach Newmark $\delta = 0,5$ [4, S. 323].	53
6.1	Netzgen-Programm.	56
6.2	HypHeat2D-Programm.	56
6.3	Vergleich der analytischen Lösungen nach Carslaw & Jaeger [8] mit den numerischen Lösungen aus HypHeat2D. Temperaturverteilungen über eine unendliche Streifenquelle der Breite $b = 2$ nach der Wärmetransportgleichung von Fourier F und Christov-Cattaneo CC zu $Pe_Q = [1, 5, 10]$ und $Ma_{th} = 0,8$ sowie unter Verwendung der Θ -Integrationsmethode ($\Theta = 0,5$).	58
7.1	Generische Geometrie mit Randbedingungen.	64
7.2	Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 0,0$ im stationären Zustand.	65
7.3	Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 0,1$ im stationären Zustand.	65
7.4	Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 0,3$ im stationären Zustand.	66
7.5	Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 0,5$ im stationären Zustand.	66
7.6	Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 0,8$ im stationären Zustand.	66
7.7	Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 1,0$ im stationären Zustand.	66
7.8	Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 1,0$: a) im instationären Zustand $t = \tau$ und b) im stationären Zustand $t = 10\tau$	67

7.9	Entwicklung der erweiterten Entropie bei $Ma_{th} = 1,0$ für Lösungen der CC_{ORT} : a) normierte spezifische Entropie $s_{EIT,n}$ und b) Änderung der Entropie $\Delta s_{EIT,n}$	68
7.10	Instationäre normierte Entropieänderung $\Delta s_{EIT,n}$ bei $Ma_{th} = 1,0$ für CC_{ORT} zu $t = 4\tau$	69
7.11	Temperaturverläufe T_n und θ_n über Zeitschritte s bei $Ma_{th} = 1,0$ im instationären Detailbereich und zur stationären Lösung hin.	70
7.12	Einfluss der ORT-Methode auf die Lösung der Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 1,0$ im stationären Zustand $t = 10\tau$	71
7.13	Vergleich der Zeitintegrationen zu $Ma_{th} = 1,0$ mittels der Temperaturen T_n im Monitoring Punkt MP2 zu CC_{ORT}	72
7.14	Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 1,0$ mit linearen Lagrange- und quadratischen Serendipity-Element zu CC_{ORT} mit konzentrierter Massenmatrix: a) im instationären Zustand $t = \tau$ und b) im stationären Zustand $t = 10\tau$	73
7.15	Konvergenzverhalten der Netzfeinheiten zu $Ma_{th} = 1,0$: a) Stationäre Temperaturverteilung T_n über den thermischen Stoß und b) instationäre Verläufe der Monitoring Punkte MP1 und MP2.	74
7.16	Konvergenzverhalten der Temperatur T_n über die Netzfeinheit $1/z$ zu $Ma_{th} = 1,0$ im stationären Zustand: a) Monitoring Punkt MP1 vor und b) Monitoring Punkt MP2 hinter dem Stoß.	74
8.1	Schaufel-Gehäuse-Reibkontakt [15].	78
8.2	Vereinfachtes Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem für die numerischen Simulationen.	79
8.3	Schliffbild vom Fraunhofer-IWS® [54].	79
8.4	Geometrie zum Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem mit Randbedingungen.	80
8.5	Intrinsischer Aufteilungskoeffizient β und Wärmeflussdichten \dot{q} über Reibgeschwindigkeit v zu cBN (Schaufel) und Mg-Spinell (Gehäuse).	82
8.6	Diskretisiertes Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem mit Verfeinerung an Hinterkante und Elementwachstum von $g = 1,5\%$ (blauer Pfeil) in $x_{1,n}$ - und $x_{2,n}$ -Richtung.	84
8.7	Temperaturfeld T_n bei LTSL®-Prüfstandbedingungen.	85
8.8	Temperaturfeld T_n bei Oerlikon-Metco®-Prüfstandbedingungen.	85
8.9	Temperaturfeld T_n nach Fraunhofer-IWS®-Turbinenbedingungen.	86
8.10	Antisymmetrische normierte Temperaturverläufe $T_n = T/T_{max}$ zu Bedingungen nach Tabelle 8.2 im Kontaktsegment, mit maximalen Temperaturen T_{max} an der Schaufelhinterkante $x_{1,n} = 0,167$	87
8.11	Transformation der zylindrischen Brennkammer auf eine 2-D-Ringwand.	90
8.12	Randbedingungen der Ringwand [24].	90
8.13	Diskretisierte Ringwand und Monitoring Punkten MP1 und MP2 [24].	91

8.14	Temperaturfeld ΔT_n im Nahfeld des höchsten Wärmeeintrags \dot{q} bei $\text{Ma}_{\text{th}} = 0,9$ und zu $t = 0,5\tau$ nach Fourier [24].	92
8.15	Temperaturfeld ΔT_n im Nahfeld des höchsten Wärmeeintrags \dot{q} bei $\text{Ma}_{\text{th}} = 0,9$ und zu $t = 0,5\tau$ nach Christov-Cattaneo [24].	92
8.16	Temperaturverläufe ΔT_n nach Fourier (F) und Christov-Cattaneo (CC): a) Kurven bei $x_{1,n} = 2,34$ über $x_{2,n}$ und b) bei Monitoring Punkten MP1 und MP2 [24].	93

Tabellenverzeichnis

2.1	Beispiele zu Bereichen der Relaxationszeit τ [56, 3].	19
5.1	Lösungsalgorithmus zur Θ -Methode.	49
5.2	Lösungsalgorithmus zur Houbolt-Methode.	51
5.3	Lösungsalgorithmus zur linearen Beschleunigung und Wilson- Θ -Methode.	52
5.4	Lösungsalgorithmus zur Newmark-Methode.	53
6.1	Relaxationszeiten τ zu Pe_Q bei $Ma_{th} = 0,8$	58
8.1	Materialparameter zum Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem.	79
8.2	Bedingungen zu numerischen Untersuchungen.	80
8.3	Berechnete Reibwärmeflussdichte.	81
8.4	Mechanische und thermische Eigenschaften der Inconel-Legierung 625 [13].	90

Nomenklatur

Lateinische Formelzeichen

$a_1, a_2, a_3, a_4,$ a_5, a_6, a_7, a_8	Integrationskonstanten
a	axiale Koordinate
a_n	normierte axiale Koordinate
A	effektive Steifigkeitsmatrix
b	Breite
b	Schaufeldicke
b_n	normierte Breite
b	effektiver Kraftvektor
B, B_i, B_j	Ableitung der Formfunktion
B	normierte Quellenbreite
B	Matrix zu den Ableitungen der Formfunktionen
c	spezifische Wärmekapazität
c	zylindrische Koordinate
c_n	normierte zylindrische Koordinate
$c_{k1,2}$	relative Wellengeschwindigkeit in 2-D
C	thermische Wellengeschwindigkeit
C*	Steifigkeitsmatrix
E	Elastizitätsmodul
f	Kraftvektor
$f_{\dot{q}_h}$	Wärmeübergangsvektor
$f_{\dot{q}_w}$	Wärmeflussvektor
$g_{x1,n}, g_{x2,n}$	normiertes Gitterwachstum in 2-D
h	Wärmeübergangskoeffizient
h_∞	Wärmeübergangskoeffizient zur Umgebung
H	Wärmeübergangsmatrix
J	Jacobi-Konstante
J_{ii}	Jacobi-Matrixeintrag
J	Jacobi-Matrix
k_D	Advektionsdiffusionsvektor
K	Integrationskonstante
K*	Dämpfungsmatrix
K_D	Wärmeadvektionsdiffusionsmatrix
K_h	Wärmeübergangsmatrix

\mathbf{K}_v	Wärmeadvektionsmatrix
\mathbf{K}_α	Wärmediffusionsmatrix
$\mathbf{K}_{\alpha,h}$	Summe der Wärmediffusions- und Wärmeübergangsmatrix
L	Länge
\mathbf{L}	obere Dreiecksmatrix
L_c	charakteristische Länge
L_{Rand}	Elementrandlänge
L_Q	Quellenlänge
\mathbf{M}	Wärmekapazitätsmatrix
\tilde{M}_{ii}, M_{ij}	Einträge der konzentrierten Massenmatrix
\mathbf{M}^*	Massenmatrix
\mathbf{n}	Normalenvektor
N, N_i, N_j	Formfunktion und Interpolationsfunktion
\mathbf{N}	Zeilenvektor der Formfunktionen
p	Druck
p_n	Druck zur Flächennormalen
P	Störterm
\dot{q}	Wärmeflussdichte
\dot{q}_G	Wärmeflussdichte in das Gehäuse
\dot{q}_h	konvektive Wärmeflussdichte
\bar{q}_R	Reibwärmeflussdichte
\dot{q}_S	Wärmeflussdichte in die Schaufel
\dot{q}_{tot}	totale Wärmeflussdichte
\dot{q}_W	Wandwärmeflussdichte
\dot{q}_V	volumetrische Wärmeflussdichte
$\dot{\mathbf{q}}$	Wärmeflussdichtevektor
\dot{Q}	Wärmefluss
R	Radius
R	Residuum
\mathbf{R}^*	Kraftvektor
s	spezifische Entropie
s	Zeitschritt
S	Einlauftiefe
t	Zeit
t_f, t_{Ende}	finale Zeit
T	Temperatur
\mathbf{T}	Temperaturvektor
T_0	Anfangstemperatur
T_{max}	maximale Temperatur
T_n	normierte Temperatur
T_W	Wandtemperatur

T_∞	Umgebungstemperatur
u	spezifische innere Energie
u	Feldgröße
\hat{u}	genäherte Feldgröße
\mathbf{U}	untere Dreiecksmatrix
v	Geschwindigkeit der Wärmequelle
v, v_1, v_2	Systemgeschwindigkeit
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
v_l	longitudinale Schallgeschwindigkeit
v_S	Schallgeschwindigkeit
v_t	transversale Schallgeschwindigkeit
w	Gewichtungsfunktion
x_k, x_1, x_2	kartesische Koordinaten
$x_{k,n}, x_{1,n}, x_{2,n}$	normierte kartesische Koordinaten
\mathbf{x}	kartesischer Koordinatenvektor
X	normierte Koordinaten
y	Integrationskoordinate
Z	Zellenanzahl

Griechische Formelzeichen

α	Newmark-Parameter
α	Temperaturleitfähigkeit
$\bar{\alpha}$	künstliche Temperaturleitfähigkeit
α_{therm}	thermischer Wärmeausdehnungskoeffizient
β	intrinsischer Wärmeverteilungskoeffizient
γ	Steramline-Upwind-Petrov-Galerkin Regelgröße
Γ	Rand
δ	Newmark-Parameter
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4,$ $\epsilon_5, \epsilon_6, \epsilon_7$	Koeffizienten
θ	Nichtgleichgewichtstemperatur
Θ	Zeitintegrationskonstante
λ	Wärmeleitfähigkeit
λ_D	intrinsische Längenskala der Diffusion
λ_G	Wärmeleitfähigkeit des Gehäuses
λ_S	Wärmeleitfähigkeit der Schaufel
λ_W	intrinsische Längenskala der Welle
μ	Reibungskoeffizient
μ_s	räumlicher Stabilitätsparameter

μ_t	zeitlicher Stabilitätsparameter
ν	Poisson-Zahl
ξ_1, ξ_2	isoparametrische Koordinaten
ξ	isoparametrischer Koordinatenvektor
ρ	Dichte
σ	Spannung
σ_{therm}	thermische Spannung
τ	Relaxationszeit
τ_{ORT}	orientierte Relaxationszeit
Φ	Mittelpunktswinkel
Ω	Gebiet

Kennzahlen

CFL	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl
d	Diffusions-Zahl
Fo	Fourier-Zahl
Ma _{th}	thermische Mach-Zahl
Pe	Péclet-Zahl
Pe _Q	quellenlängenspezifische Péclet-Zahl

Indizes

0	Anfangszeitpunkt
e	Element
i, j	Elementknoten
k, l	Koordinatenrichtung
m	Zeitschritt
n	Anzahl der Elementknoten
n	Anzahl der Nachbarelemente
n	Dimension
∞	Umgebung

Abkürzungen

anal	analytisch
c	charakteristisch
cBN	kubisches Bornitrid
CC	Christov-Cattaneo
CMSX4	Nickel-Legierung

CV	Cattaneo-Vernotte
D	Diffusion
DGL	Differentialgleichung
EIT	erweiterte irreversible Thermodynamik
F	Fourier
f	final
FEA	Finite-Elemente-Analyse
FEM	Finite-Elemente-Methode
G	Gehäuse
GLS	Galerkin-Least-Squares
.inp	Eingabedatei (engl. input)
KIT	klassische irreversible Thermodynamik
l	longitudinal
LTSL	Leonardo Testing Services Limited, Universität von Sheffield
Mg-Spinell, MgS	Magnesium-Spinell
MP	Monitoring Punkt
n	normiert
num	numerisch
NiAlTa	Nickel-Aluminium-Tantal
ODE	Gewöhnliche Differentialgleichung
ORT	Methode der orientierten Relaxationszeit
PDGL	Partielle Differentialgleichung
Q	Quelle
rel	relativ
RB	Randbedingung
s	räumlich
S	Schall
S	Schaufel
SU	Streamline-Upwind
SUPG	Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin
t	transversal
t	Zeit
tot	total
th, therm	thermisch
s	Ort
W	Wand
W	Welle
V	Volumen

Konventionen

Elementspezifische Größen	werden durch ein hochgestelltes e dargestellt, zum Beispiel Elementtemperatur = T^e .
Flächenspezifische Größen	werden durch Kleinschreibung der entsprechenden Größe dargestellt, zum Beispiel Wärmeflussdichte = \dot{q} .
Volumenspezifische Größen	werden durch Kleinschreibung der entsprechenden Größe dargestellt, zum Beispiel volumetrische Wärmeflussdichte = q_V .
Einheiten	werden, soweit nicht anders angegeben, im SI-System ausgedrückt.

Teil I

GRUNDLAGEN

1 Einleitung

1.1 Hintergrund und Aufgabenstellung

Effiziente Luftfahrtantriebe sind das Ergebnis intensiver Forschung und Weiterentwicklung für zivile und militärische Anwendungen. Getrieben durch politische, wirtschaftliche und wissenschaftliche Anforderungen wurden in den vergangenen Jahrzehnten bedeutende Meilensteine erreicht und es werden stetig weitere Innovationen hervorgebracht. Diese umfassen den Einsatz moderner Materialien und Simulationstechniken, um die physikalischen Eigenschaften und die strukturelle Integrität der Luftfahrtantriebe zu verbessern. Moderne Materialien spielen eine zentrale Rolle bei der Optimierung und ihre Erforschung sowie Weiterentwicklung sind somit kontinuierliche Prozesse. Fortschrittliche Legierungen und Verbundwerkstoffe reduzieren nicht nur das Gewicht, sondern erhöhen auch die Leistungsfähigkeit und steigern die Langlebigkeit. Folglich zielt eine Verbesserung der Antriebe darauf ab, den Gesamtwirkungsgrad zu steigern. Mithilfe von Simulationen können Parameterstudien und Modellanalysen kostengünstig und effizient durchgeführt werden, bevor ein Bauteil in der Realität getestet wird. Besonders die Luft- und Raumfahrt ist ein Vorreiter der numerischen Berechnung, in der durch strukturmechanische und thermodynamische Simulationen gezielt Optimierungen im frühen Entwicklungsprozess vorgenommen werden können. Dadurch wird die Leistungsfähigkeit und Zuverlässigkeit der Antriebe verbessert. Die Umsetzung erfolgt durch thermische Analyse von Materialien mithilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM). Die FEM ermöglicht detaillierte Simulationen von Wärmetransportprozessen, Temperaturverteilungen sowie thermischen Spannungen in und zwischen Bauteilen. Folglich trägt die FEM auch dazu bei, die Sicherheit, Effizienz und Umweltfreundlichkeit der Luftfahrtantriebe zu verbessern.

Hinsichtlich der Turbinenschaufeln in Strahltriebwerken wächst die Anforderung an das Material, höheren Heißgastemperaturen und größeren Schaufelspitzen-geschwindigkeiten bei gleichzeitig längerer Betriebsdauer standzuhalten. Die hohen Heißgastemperaturen resultieren aus der heutigen Möglichkeit von höheren Verbrennungstemperaturen, um das Energiepotenzial nach der Brennkammer und folglich den Wirkungsgrad des Triebwerks zu maximieren. Diese Energie der Heißgasströmung wird genutzt, um die Turbinenschaufeln auf dem Rotor in eine Drehbewegung zu versetzen und damit den Verdichter anzutreiben. Dabei ist die Optimierung der Schaufelspitze ein interessanter Forschungsbereich, da bereits tangential Geschwindigkeiten von bis zu 500 m s^{-1} erreicht werden mit entsprechend steigenden Kräften [72, S. 130]. Des Weiteren ist die Spaltströmung bzw. Leckage zwischen Schaufel und Gehäuse ein merklicher Verlustbereich und soll durch moderne Schaufel-Gehäuse-Einlaufsysteme minimiert werden.

Eine neuere und fortschrittlichere Technologie sind RDEs (engl. rotating detonation en-

gines), welche Detonationen für eine effiziente Energieumwandlung nutzen [49, Kap. 1]. Jedoch befinden sie sich aufgrund ihrer komplexen Dynamik und der Anforderung einer hohen Zuverlässigkeit noch in der Entwicklungsphase. Die Zuverlässigkeit schließt die ausreichende Kühlung und ein belastbares Brennkammermaterial mit ein. Die Gemeinsamkeit des Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystems und der RDEs ist die Relativbewegung der Wärmequelle sowie ihr mehrdimensionaler Wärmetransportprozess im Nichtgleichgewicht. Er hat einen bedeutenden Einfluss auf die thermodynamische und mechanische Zuverlässigkeit des Systems und kann mithilfe der FEM analysiert werden. Die FEM-Analyse unterstützt hierbei die Untersuchung des Wärmetransportprozesses im mikroskopischen Maßstab und kann aufwendige experimentelle Messungen ersetzen. Ziel ist es beispielsweise, Problemzonen für Temperatursprünge zwischen ungleichen Materialien oder asymmetrische Temperaturprofile frühzeitig zu erkennen und somit kritische thermische Spannungen zu vermeiden. Dadurch sind erste Optimierungen bereits frühzeitig im Entwicklungsprozess möglich.

Die Aufgabe dieser Arbeit ist die Modellierung des Wärmetransportprozesses im Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystems. Dies soll auf Basis der Theorie der Nichtgleichgewichtsthermodynamik erfolgen. Dabei wird ein instationäres System betrachtet, welches sich, von außen kommend, aus den Schichten des Gehäuses und der Schaufelspitze zusammensetzt und eine Relativgeschwindigkeit zwischen beiden zulässt. Aufgrund dieses Reibkontakts bildet sich ein mehrdimensionales Temperaturprofil aus, da eine Wärmequelle mit Relativbewegung vorliegt. Ein vergleichbarer thermodynamischer Vorgang findet zwischen der Brennkammer-Ringwand und der Detonationsfront von RDEs statt und bietet einen ergänzenden anwendungsorientierten Fall.

1.2 **Stand der Wissenschaft**

Im Rahmen der gestellten Aufgabe orientiert sich die Recherche am aktuellen Stand der Wissenschaft für Einlaufsysteme. Dabei kristallisieren sich die Arbeiten von Pychinski [61] und McGregor [52] als besonders wertvoll heraus. Pychinski [61, Kap. 4.1] entwickelte auf Basis experimenteller Anstreifvorgänge einen Modellierungsansatz, in dem er das System unterteilt und makroskopische Ersatzmodelle sowie analytische Gleichungen verwendet. Dadurch stellt sich der Wärmetransportprozess über analytische Kopplungsbedingungen ein und die Temperaturprofile in Schaufel und Gehäuse werden separat berechnet. Die Arbeit von McGregor [52] untersucht das Einlaufsystem gezielt an der Schaufelspitze, an der abrasive kubische Bornitrid-Partikel (cBN) in eine NiCoCrAlY-Haftvermittlerschicht eingebettet sind. Jedoch zeigt die Praxis unter Turbinenbedingungen, dass sich die Partikel aus der Haftvermittlerschicht lösen. Dieses Herauslösen führt McGregor durch experimentelle und numerische Diffusionsuntersuchungen auf die zeitliche parabolische Oxidationszunahme der NiCoCrAlY-Schicht bei Temperaturerhöhung in der Schaufelspitze zurück. McGregor weist nach, dass sich bei Verwendung einer NiAlTa-Haftvermittlerschicht die cBN-Partikel nicht mehr lösen. Mit Blick auf die Aufgabenstellung und in Anlehnung an die Arbeiten von Pychinski und McGregor, wird die weitere Recherche auf die numerische

Kontaktmodellierung für thermodynamische Analysen in einem Einzelsystem zu Reibvorgängen fortgesetzt. Das soll die Vorteile von

1. einem sich selbstständig adaptiven Wärmetransportprozesses und
2. der Modellierung eines realitätsnahen Schichtaufbaus des Einlaufsystems bringen.

Daher positioniert sich diese Arbeit zwischen der Modellierung von Pychinski und den Untersuchungen von McGregor.

Die ersten Ansätze zur analytischen Berechnung von 2-D-Temperaturprofilen eines Reibkontakts gehen auf Carslaw & Jaeger [8] zurück. Sie lösten die partielle Fourier-Gleichung mit den Anfangsrandbedingungen für eine Wärmequelle mit Relativbewegung v . Kennedy leistete große Pionierarbeit in zahlreichen Beiträgen zur analytischen und numerischen Reibkontaktmodellierung. Dabei verknüpfte er beispielsweise den Ansatz von Carslaw & Jaeger mit Bloks [50, Kap. 2.13] Wärmeverteilungstheorie [5, Kap. 6] oder nutzte diese Theorie für die numerische FEM-Berechnung [42]. Zudem gibt er einen Überblick über Finite-Elemente-Analysen (FEA) von Reibkontakten [40] und führt weitere thermische Untersuchungen von Kontaktproblemen durch [43, 41, 73]. Besonders hervorzuheben ist die Arbeit von Glovysk [29] unter der Leitung von Kennedy. In dieser wurde das FEM-Programm THERMAP zur Berechnung der Temperaturprofile in einem Reibkontakt entwickelt und konnte mit den analytischen Lösungen von Carslaw & Jaeger [8] validiert werden. Leider wurde das vielversprechende THERMAP-Programm auf Anfrage nicht zur Verfügung gestellt.

Durch die Analyse und Festlegung der Randbedingungen bezüglich der Relativgeschwindigkeit v der Wärmequelle im Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem sowie der RDEs wird die Besonderheit des vorliegenden Wärmetransportprozesses aufgedeckt. Hinsichtlich des Einlaufsystems ist die Relativgeschwindigkeit gleich der tangentialen Schaufelspitzen Geschwindigkeit und beträgt unter Prüfstandbedingungen 200 m s^{-1} [21]. Sie erreicht unter realen Betriebsbedingungen bis zu 500 m s^{-1} [72, S. 130]. Daraus stellt sich die Frage, wie sich die Temperatur in der mikroskopischen Zeitskala verhält und führt auf die erweiterte Wärmetransportgleichung nach Vernotte [79] und Cattaneo [9]. Diese sind hyperbolische partielle Differentialgleichungen und prägen der Temperaturentstehung eine Wellencharakteristik auf, wodurch der Wärmetransportprozess physikalischer bzw. träger und natürlicher gestaltet sowie das Paradoxon der unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit aus der Fourier-Gleichung korrigiert wird. Daraus ergibt sich eine thermische Mach-Zahl Ma_{th} , die über das Verhältnis der Relativgeschwindigkeit v der Wärmequelle zur thermischen Wellengeschwindigkeit C definiert ist. Die Relativgeschwindigkeit v ist eine von außen einwirkende Systemgröße und die thermische Wellengeschwindigkeit C eine Materialeigenschaft. Zu den hier betrachteten Anwendungsfällen liegen thermische Mach-Zahlen Ma_{th} von 0,21 und 0,44 für das Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem vor sowie für die Detonationsfront in der RDE mit 0,9 [80, 24]. Die Größe der thermischen Mach-Zahl Ma_{th} ergibt einen ersten Anhaltspunkt, wie groß der Temperaturgradient an der bewegten Wärmequellenfront ist

und daraus kann abgeleitet werden, wie groß die thermischen Spannungen sind. Vor diesen Bedingungen drängt einschlägige Literatur nach Tzou [75, 76] auf die Anwendung der hyperbolischen Wärmetransportgleichung für das vorliegende Wärmetransportproblem. Zudem beschreibt Tzou mit Eingleichungs- und Zweigleichungsmodellen sowie zugehöriger Theorie das natürliche träge Verhalten der Temperaturlausbreitung [77]. Christov [11] korrigiert die Cattaneo-Vernotte-Gleichung unter dem Vorbehalt, dass die relative thermische Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c im lagrangeschen Betrachtungssystem linear sein muss und entwickelt die Christov-Cattaneo-Gleichung.

Bezüglich FEM-Software kommen zunächst eine Vielzahl an Programmen infrage, wie Code_Aster® [12], CalculiX© [16], COMSOL® [14], LS-DYNA® [28] und Abaqus® [1]. Durch ihre Verwendung könnten bereits implementierte Routinen genutzt werden, die beim Lösen von Gleichungssystemen zuverlässig funktionieren oder den Umfang der Untersuchung im Hinblick auf Multiphysik-Simulationen eine erweiterte Analyse bieten. Abaqus® [1] ist am vielversprechendsten und kann explizit einen thermischen Reibkontakt berechnen. Jedoch zeigt sich bei den Programmübersichten, dass die hyperbolische Gleichung nach Christov nicht integriert ist und in den kommerziellen Softwares der Code nicht eingesehen werden kann oder verändert werden darf. Zudem sind die Reibmodelle oftmals nur gezielt auf strukturmechanische Analysen ausgelegt oder die thermischen Randbedingungen müssen im Kontaktsegment richtig übergeben bzw. analytisch bestimmt werden.

1.3 Zielsetzung und Vorgehen

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den erweiterten Wärmetransport im Nichtgleichgewicht in einem wärmeleitenden Festkörper mit Relativbewegung mithilfe der hyperbolischen Wärmetransportgleichung zu berechnen und dafür die Simulationsmethode der Finite-Elemente zu nutzen. Das setzt das grundlegende Verständnis des Transportmechanismus zur erweiterten Wärmetransporttheorie voraus und erfordert ihre nachweislich zweckmäßige Anwendung auf das Wärmetransportproblem des Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystems und der RDE-Brennkammer-Ringwand. Aufgrund fehlender analytischer Lösungsansätze und einer anwendungsorientierten Nutzung der hyperbolischen Wärmetransportgleichung für Systeme mit Relativbewegung wird ihre Diskretisierung in die FEM umgesetzt. Die Unterschiede zwischen den parabolischen und hyperbolischen Wärmetransportgleichungen sind durch numerische Untersuchungen in einer Studie aufzuzeigen, sowie die hyperbolische Gleichung auf das Einlaufsystem und die RDE für eine numerische thermische Analyse anzuwenden.

Um die numerischen Untersuchungen durchzuführen, wird das FEM-Programm HyphHeat2D in MATLAB® entwickelt, das den erweiterten Wärmetransportprozess mit Relativbewegung in einem stationären und instationären System berechnet. Dafür werden in Kapitel I die Grundlagen der erweiterten Wärmetransporttheorie erläutert. In Kapitel 2 werden die Ansätze und die partiellen Differentialgleichungen (PDGL) zum Wärmetransport gezeigt, der Transportprozess in Form einer thermischen Welle beschrieben sowie

Ergänzungen der erweiterten irreversiblen Thermodynamik aufgeführt. Zudem werden in Kapitel 3 die physikalischen Kennzahlen des Wärmetransportprozesses behandelt.

Im Kapitel II wird die Numerik beschrieben. Zunächst werden im Unterkapitel 4 die Grundzüge der Finite-Elemente-Methode präsentiert. Die hyperbolische Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo wird in eine gewöhnliche Differentialgleichung, die Bewegungsgleichung mechanischer Systeme, diskretisiert, und es werden numerische Diffusionsmechanismen eingeführt. Um die diskretisierte Gleichung im Nichtgleichgewicht zu lösen, werden verschiedene Möglichkeiten zur Zeitintegration in Kapitel 5 betrachtet. Abschließend werden die Strukturen des in dieser Arbeit entwickelten FEM-Programms HypHeat2D mit zugehöriger Netzgenerierung sowie einer Validierung in Kapitel 6 gezeigt. Mit HypHeat2D ist die instationäre Berechnung parabolischer und hyperbolischer ebener 2-D-Wärmetransportprobleme mit Relativbewegung im kartesischen Koordinatensystem möglich.

In Kapitel III beginnen die numerischen Untersuchungen in Form einer Studie mit Kapitel 7 an einer generischen Geometrie, um in einem einfachen Fall die Wärmetransportgleichungen hinsichtlich physikalischer Unterschiede gegenüberzustellen und das numerische Verhalten zu analysieren. Daran schließen sich in Kapitel 8 die Anwendungsfälle an, in denen die Simulationsergebnisse und thermischen Analysen zum Einlaufvorgang des Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystems des Rolls-Royce®-Hauptprojekts und zur Brennkammer-Ringwand in einer RDE veranschaulicht werden.

Im letzten Kapitel IV werden die wichtigsten Erkenntnisse aus dieser Arbeit über die Theorie, Diskretisierung und Anwendungen der hyperbolischen Wärmetransportgleichung zusammengefasst sowie ein Ausblick auf weitere mögliche Arbeiten gegeben.

2 Erweiterte Wärmetransporttheorie

Der Transport von thermischer Energie in oder zwischen wärmeleitenden Medien eines thermodynamischen Systems mit Relativbewegung, wird in der Kontinuumsmechanik durch die Wärmetransportgleichung beschrieben. Diese Transportgleichung ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung und die Formulierung nach Fourier, aus der klassischen irreversiblen Thermodynamik, ist die geläufigste Form [47, Kap. 2.1]. Gegenwärtige Rahmenbedingungen verlangen weiterentwickelte Wärmetransportformulierungen nach den Theorien von Cattaneo und Christov, wodurch sich die Sicht von der klassischen irreversiblen Thermodynamik auf die erweiterte Thermodynamik irreversibler Prozesse ändert [47, Kap. 7.1]. Neben dem Aufzeigen der Transportgleichungen aus der hier betrachteten erweiterten irreversiblen Thermodynamik können diese auch über die Theorien der internen Variablen oder der rationalen Thermodynamik erhalten werden [44, 47, 24]. Die Ansätze zu den Weiterentwicklungen werden in diesem Kapitel gezeigt, die Wärmetransportgleichungen in Form der lagrangeschen Betrachtungsweise aufgeführt und die Unterschiede herausgestellt. Damit einhergehend ist die Vorstellung der analytischen Berechnung der Relaxationszeit τ als skalare isotrope Größe und die möglichen Ansätze zur Berechnung der erweiterten Entropie sowie Nichtgleichgewichtstemperatur.

2.1 Energiebilanz- und Wärmetransportgleichungen

Zu Beginn wird die Energiebilanzgleichung in materieller Form aufgeführt, welche das Fundament zur Herleitung der thermodynamischen Zustandsgleichung, die Wärmetransportgleichung in der lagrangeschen Betrachtungsweise, ist. Die Bilanzgleichung koppelt konvektiven-advectifsiven Fluss, Diffusion und Quelle, womit auch Konvektions-Diffusions-[35, S. 390 ff.] oder Advectifsiven-Diffusions-Gleichung [34, S. 105 ff.] geläufige Bezeichnungen sind. In dieser Arbeit wird der allgemeinere Begriff der Wärmetransportgleichung verwendet, jedoch wird zur Vervollständigung die Nennung der anderen Begriffe als nötig erachtet, um in einschlägiger Literatur eine einheitliche Themenrecherche zu ermöglichen. Die gesteckten Rahmenparameter von kleinen Zeitskalen [47, S. 182], einer intensiven Energiequelle und eines irreversiblen Prozesses [76] führen zu insgesamt drei Wärmetransportgleichungen von:

1. Fourier [35, S. 391] in Kapitel 2.1.2 über
2. Cattaneo-Vernotte [9] in Kapitel 2.1.3 zu
3. Christov-Cattaneo [11] in Kapitel 2.1.4.

Die Gleichungen unterscheiden sich in ihren konstitutiven Formeln zur Wärmeleitung, in welcher der Fourier-Ansatz rein empirischer Natur ist und die Theorien von Cattaneo und Christov auf einer phänomenologischen Modellvorstellung beruhen. Letztere zwei Glei-

chungen sollen das Paradoxon der fourierschen Wärmeleitung beheben, die eine unendlich schnelle thermische Ausbreitungsgeschwindigkeit unterstellt. Vernotte [79] erweitert diese Gleichung um eine zeitliche partielle Ableitung der Wärmeflussdichte, um das Phänomen des Wärmetransports natürlicher darzustellen. Dadurch ist eine endliche thermische Ausbreitungsgeschwindigkeit mit Wellencharakteristik nach Cattaneo [9] bestimmt. Jedoch widerspricht diese Erweiterung der Betrachtung eines bewegten Kontinuums und daher führten Christov & Jordan [11] die materielle Ableitung der Wärmeflussdichte ein.

2.1.1 Energiebilanzgleichung in materieller Form

Die Energieerhaltung in einem thermodynamischen System wird mit der Energiebilanzgleichung, dem ersten Hauptsatzes der Thermodynamik, sichergestellt. Diese Gleichung ist damit der grundlegende Ansatz zur Beschreibung eines thermischen Systemzustandes und wird hier anwendungsbezogen angepasst. Die Energiebilanzgleichung in materieller Form ist mit der Dichte ρ , der Formulierung der inneren Energie bei konstanter spezifischen Wärmekapazität $u = cT$, dem Vektor der Wärmeflussdichte $\dot{\mathbf{q}}$, der volumetrischen Wärmequellendichte \dot{q}_V und unter Ausschluss von mechanischen Spannungen nach Lai, Kreml & Ruben [46, Kap. 4.15]:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} - \dot{q}_V = 0. \quad (2.1)$$

Sie wird nun verwendet, um die nachfolgenden Ausdrücke der Wärmeleitung für die Wärmeflussdichte einzusetzen und die Temperatur T räumlich und zeitlich genau zu bestimmen. Die materielle Ableitung führt die Abhängigkeit der Temperaturentwicklung von einer Relativgeschwindigkeit sowie die lagrangesche Betrachtungsweise mit ein. Damit wird das Wärmetransportproblem aus der Sicht des mitbewegten Beobachters gelöst. Die materielle Ableitung der Feldgröße T ist [46, Kap. 3.3]:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T. \quad (2.2)$$

2.1.2 Wärmetransportgleichung nach Fourier

Die bekannteste Form ist die Wärmetransportgleichung nach Fourier. Gemäß Polifke & Kopitz [58, S. 45 ff.] lautet das fouriersche Gesetz des Wärmetransports mit der Wärmeleitfähigkeit λ und der räumlichen Temperaturableitung ∇T :

$$\dot{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla T. \quad (2.3)$$

Unter Annahme isotroper und temperaturunabhängiger Wärmeleitung λ wird die vektorielle Wärmeflussdichte $\dot{\mathbf{q}}$ aus Gleichung (2.3) in Gleichung (2.1) eingesetzt. Die fouriersche

Wärmetransportgleichung ist

$$T_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T - \frac{1}{\rho c} \dot{q}_V = \alpha \nabla^2 T \quad (2.4)$$

mit der zeitlichen Temperaturableitung T_t , dem Vektor der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} eines Systems und der Temperaturleitfähigkeit $\alpha = \lambda/\rho c$. Gleichung (2.4) ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom parabolischen Typ. Durch ihre Form liegt das Paradoxon einer unendlichen schnellen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperatur vor, welche unnatürlich für reale Systeme ist. Der Beweis kann über die Betrachtung der Fundamentallösung gezeigt werden ohne Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} , ohne Quellterm \dot{q}_V und in 1-D ($k = 1$). Sie hat die Form [19, Kap. 2.3.1]

$$T(x_1, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|x_1 - y|^2}{4\alpha t}\right) T_0(y) dy \quad (2.5)$$

für die x_1 -Koordinate zur Zeit t . Gleichung (2.5) beschreibt, dass es immer positive Lösungen an allen Orten x_1 für Zeiten $t > 0$ gibt. Mit anderen Worten führt eine anfänglich positive Temperatur zu einer plötzlichen positiven Temperaturänderung an jedem Ort x_1 für beliebig kleine Zeiten t . Somit kann die Ausbreitung der Temperatur mit unendlicher thermischer Geschwindigkeit betrachtet werden. Einen Unterschied der Fundamentallösung und Einfluss auf das Temperaturfeld, unter Berücksichtigung einer Systemgeschwindigkeit v , ist durch das Paradoxon der unendlichen Geschwindigkeit nicht zu erwarten.

2.1.3 Wärmetransportgleichung nach Cattaneo-Vernotte

Um das Paradoxon der Fourier-Wärmetransportgleichung zu korrigieren, erweiterten Vernotte [79] und Cattaneo [9] Gleichung (2.3) um eine zeitliche Ableitung ∂_t der Wärmeflussdichte \dot{q} . Begründet wird die Korrektur durch Ungenauigkeiten der fourierschen Gleichung bei kleinskaligen räumlichen und zeitlichen Problemen. Dadurch wird der Parameter der Relaxationszeit τ eingeführt und die erweiterte Darstellung der Wärmeflussdichte durch ein Kontinuum ist [47, Kap. 7.1.1]:

$$\tau \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \dot{q} = -\lambda \nabla T. \quad (2.6)$$

Bei langem Zeitverhalten $t \rightarrow \infty$ und kleinen Relaxationszeiten $\tau \rightarrow 0$ ergibt sich wieder die Fourier-Gleichung (2.3). Das Umstellen nach und das Einsetzen der vektoriellen Wärmeflussdichte \dot{q} aus Gleichung (2.6) in die Energiegleichung (2.1) ergibt die Wärmetransportgleichung nach der Theorie von Cattaneo-Vernotte [22]:

$$\tau T_{tt} + T_t + \tau(\mathbf{v} \cdot \nabla T)_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T - \frac{1}{\rho c} \dot{q}_V = \alpha \nabla^2 T. \quad (2.7)$$

Gleichung (2.7) ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typ und auch als Maxwell-Cattaneo-Gleichung [37] bekannt. Die Tempera-

turausbreitung ist nun durch eine endliche materialabhängige thermische Wellengeschwindigkeit $C = \sqrt{\alpha/\tau}$ bestimmt und sagt aus, wie ein Material wärmeleiten kann. Die hierfür charakteristischen und neuen Terme sind zur Unterscheidung gegenüber Gleichung (2.4) unterstrichen. Diese sind eine zweifache partielle Ableitung der Temperatur nach der Zeit in Form von τT_{tt} , welche dem System eine Trägheit aufprägt, und eine gemischte Ableitung $\tau(\mathbf{v} \cdot \nabla T)_t$, die eine erzwungene konvektive bzw. advektive Transporteigenschaft einführt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperatur in einem bewegten Kontinuum wird nun als relative Wellengeschwindigkeit c_k gesehen und kann mit Hilfe der Koeffizienten der zweiten Ableitungen aus Gleichung (2.7) berechnet werden. Dafür wird sie ohne Quellterm und auf 1-D ($k = 1$) zu [11]

$$T_{tt} + v_1 T_{x_1 t} + \tau^{-1} T_t + v_1 \tau^{-1} T_{x_1} = \alpha \tau^{-1} T_{x_1 x_1} \quad (2.8)$$

reduziert und die relative Wellengeschwindigkeit ergibt sich zu

$$c_{1,2} = \frac{1}{2} \left(v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 4 \frac{\alpha}{\tau}} \right), \quad \text{mit } c_{1_1} > \max[v_1, 0] \quad \text{und} \quad c_{1_2} < \min[v_1, 0]. \quad (2.9)$$

In Gleichung (2.9) repräsentiert $c_{1,2}$ die relative Wellengeschwindigkeit, die aus der Systemgeschwindigkeit v_1 und der absoluten Wellengeschwindigkeit mit $C = \sqrt{\alpha/\tau}$ besteht. Jedoch zeigt diese Gleichung, dass $c_{1,2}$ eine nichtlineare Funktion von v_1 ist und dass bei $v_1 = C$ immer eine relative Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c_{1_2} bzw. Informationsfluss entgegen der Bewegungsrichtung existiert, was unphysikalisch ist.

2.1.4 Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo

In einem Kontinuum mit Relativgeschwindigkeit v ist auch die materielle Ableitung der Wärmeflussdichte $\dot{\mathbf{q}}$ bei der Beschreibung des Wärmetransports mit der Wärmeleitung zu berücksichtigen, welche Gleichungen (2.3) nicht und (2.6) nur teilweise erfüllen. Daher führte Christov [11] die Korrektur ein, die partielle Ableitung ∂_t in Gleichung (2.6) durch die materielle Ableitung D_t zu ersetzen (vgl. Gleichung (2.2)). Die Substitution wird zusätzlich damit begründet, dass die nichtlineare Geschwindigkeitseigenschaft in Gleichung (2.9) unnatürlich ist und erst durch diese Änderung richtiges physikalisches Verhalten gezeigt wird. Nach Christov ist der Wärmetransport mit der materiellen Ableitung

$$\tau \frac{D\dot{\mathbf{q}}}{Dt} + \dot{\mathbf{q}} = \tau \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{q}} \right) + \dot{\mathbf{q}} = -\lambda \nabla T. \quad (2.10)$$

Durch das Umstellen von Gleichung (2.10) nach der Wärmeflussdichte $\dot{\mathbf{q}}$ in vektorielle Form und das Einsetzen in die Bilanzgleichung (2.1) erhält man die Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo [23, 25]:

$$\tau T_{tt} + \underline{2\tau(\mathbf{v} \cdot \nabla T)_t} + T_t + \underline{\tau(\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 T} + \mathbf{v} \cdot \nabla T - \frac{1}{\rho c} \dot{q}_V = \alpha \nabla^2 T. \quad (2.11)$$

Gleichung (2.11) ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typ, worin die neuen Terme für einen Vergleich mit Gleichung (2.7) unterstrichen sind. Gegenüber Gleichung (2.7) wurde ein Faktor zur gemischten Ableitung ergänzt, welcher den advektiven Anteil der Transporteigenschaft durch $2\tau(\mathbf{v} \cdot \nabla T)_t$ verdoppelt. Außerdem wird der Term $\tau(\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 T$ ergänzt, der die relative thermische Wellengeschwindigkeit beeinflusst, in dem er sie linearisiert und damit eine Ausgleichsdiffusion einführt. Die thermische Geschwindigkeit wird durch das Reduzieren der Gleichung auf 1-D ($k = 1$) und ohne Quellterm hergeleitet [11]:

$$T_{tt} + 2v_1 T_{tx_1} + \tau^{-1} T_t + v_1 \tau^{-1} T_{x_1} = (\alpha \tau^{-1} - v_1^2) T_{x_1 x_1} \quad (2.12)$$

mit

$$c_{1,2} = v_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}}. \quad (2.13)$$

Gleichung (2.13) ist die Summe aus der Systemgeschwindigkeit v_1 und der absoluten thermischen Geschwindigkeit $C = \sqrt{\alpha/\tau}$. Damit bewegt sich die thermische Welle zusätzlich mit dem Anteil der positiven relativen Systemgeschwindigkeit v , während für die entgegengesetzte Richtung die thermische Welle um den Anteil der Systemgeschwindigkeit reduziert wird. Somit ist die Geschwindigkeitseigenschaft linear, was mit Blick auf das natürliche reale Verhalten als korrekt angenommen wird. Hinsichtlich des Falls, dass eine identische oder größere Geschwindigkeit v als die thermische Geschwindigkeit C vorliegt, geht die Informationsausbreitung der Temperatur vom natürlichen Verhalten in ein erzwungenes Verhalten über, und an der Wärmequellenfront ist ein Temperatursprung zu erwarten. Durch Einführung einer thermischen Mach-Zahl $\text{Ma}_{\text{th}} = v/C$ und Berücksichtigung des Sonderfalls $\text{Ma}_{\text{th}} = 1$, liegt dann nach der Definition von Tzou [76] ein thermischer Stoß vor.

2.1.5 Gültigkeit der Wärmetransportgleichungen

Die Gültigkeit der Wärmetransportgleichungen wird von Tzou in [75] und [76] anhand der Temperaturverteilung $T_n = \frac{\dot{q}}{\rho \alpha c} \times 10^{-1}$ in einem Festkörper in Abhängigkeit von der thermischen Mach-Zahl Ma_{th} über den Mittelpunktswinkel Φ der bewegten Quelle dargestellt. Hier werden die analytischen Lösungen der Diffusionsgleichung (2.4) nach Fourier und der Wellengleichung (2.7) nach Cattaneo-Vernotte verglichen. Eine analytische Lösung zur Gleichung von Christov-Cattaneo existiert nicht, dennoch bietet der Vergleich von Fourier und Cattaneo-Vernotte einen guten ersten Anhaltspunkt über die Gültigkeit der Wärmetransportgleichungen. Das zeigt Abbildung 2.1, in welcher sich eine Wärmequelle von $x_{1,n}(t_1)$ nach $x_{1,n}(t_2)$ im Temperaturfeld $T_n = 0$ mit einer thermischen Mach-Zahl von $\text{Ma}_{\text{th}} < 1$ bewegt. Bei $x_{1,n}(t_1)$ und unter Annahme von $v = 0$, ist die Temperaturentbreitung ausschließlich von den Materialeigenschaften (α, τ) abhängig und erfolgt gleichmäßig. Bei $x_{1,n}(t_2)$ beeinflusst die Geschwindigkeit v der bewegten Wärmequelle das Nahfeld, und die Temperatur nimmt von der Quellenvorderkante ($\Phi = 0^\circ$) zur Quellen-

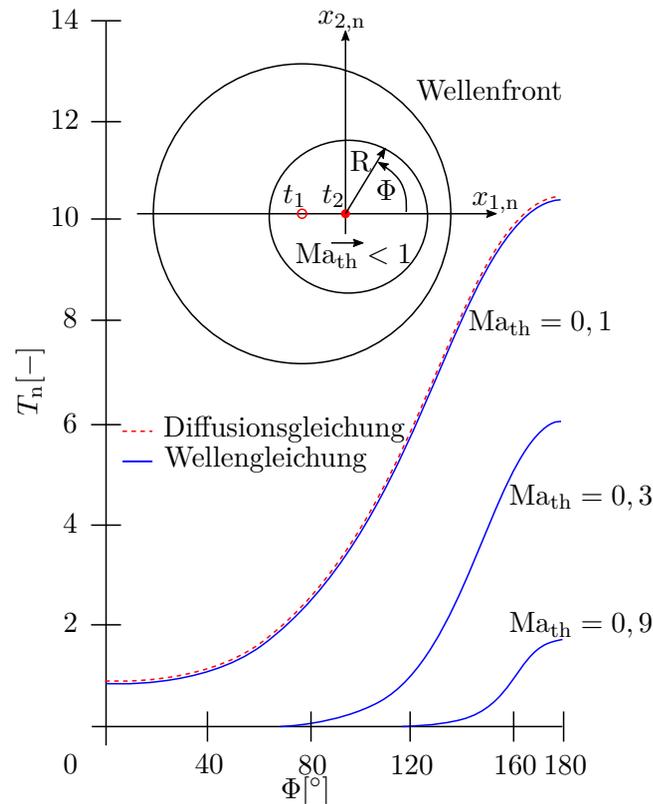


Abbildung 2.1: Normierte Temperaturverteilung T_n zu Mittelpunktswinkel Φ einer thermischen Wellenfront einer Quelle mit $\text{Ma}_{\text{th}} < 1$ im Zentrum [75, 76].

hinterkante ($\Phi = 180^\circ$) zu. Zu diesem Zeitpunkt, ist der Wärmetransport abhängig von den Materialeigenschaften (α, τ) und der äußeren Randbedingung (v). Für eine thermische Mach-Zahl von $\text{Ma}_{\text{th}} = 0,1$ sind die Lösungen der Gleichungen identisch, ändern sich aber ab $\text{Ma}_{\text{th}} > 0,1$. Während die Diffusionsgleichung eine von der Mach-Zahl Ma_{th} unveränderte Temperaturverteilung angibt, zeigen sich für die Wellengleichung mit zunehmenden Mach-Zahlen Ma_{th} geringere Temperaturen und später ansteigende Profile. Dies resultiert aus der Trägheit der Wellengleichung, die eine endliche Zeit benötigt, um das Material zu erwärmen und damit ein physikalisches Ergebnis ermittelt. Damit ist gezeigt, dass die hyperbolischen Wärmetransportgleichungen bei Systemen mit Relativbewegung bereits bei geringen Mach-Zahlen ab $\text{Ma}_{\text{th}} > 0,1$ berücksichtigt werden müssen.

Ergänzend zeigt Tzou zur Cattaneo-Vernotte-Gleichung in [75, 76] einen senkrechten thermischen Stoß bei $\text{Ma}_{\text{th}} = 1$, mit der maximalen Temperatur an der Quellenvorderkante ($\Phi = 0^\circ$). Des Weiteren sei erwähnt, dass er einen thermischen machschen Öffnungswinkel für $\text{Ma}_{\text{th}} > 1$ einführt, was jedoch für die weiteren Untersuchungen hier nicht relevant ist, da Systeme mit $\text{Ma}_{\text{th}} \leq 1$ behandelt werden. Zudem sind diese Ergebnisse fragwürdig, da, wie am Ende von Kapitel 2.1.3 und am Beginn von Kapitel 2.1.4 angegeben, die Cattaneo-Vernotte-Gleichung nach Christov korrigiert werden muss.

2.2 Thermische Welle und Relaxationszeit

Die thermische Wellentheorie und Relaxationszeit τ , aus den Kapiteln 2.1.3 und 2.1.4, beruhen nachfolgend auf Modellvorstellungen nach Tzou [77], welche sowohl im makroskopischen als auch im mikroskopischen Rahmen erklärt werden können. Im Makroraum wird das physikalische Verhalten des hyperbolischen Wärmetransportmodells behandelt und im Mikroraum der kinetische Standpunkt beleuchtet. Beide Sichtweisen sind miteinander gekoppelt und ihre Theorien stützen sich gegenseitig, wodurch makroskopisches Verhalten von mikroskopischen Phänomenen abgeleitet werden kann. Des Weiteren steuert die Relaxationszeit τ das Wellenphänomen. Die Relaxationszeit τ wird analytisch isotrop bestimmt sowie Größenordnungen angegeben.

2.2.1 Makroskopische Betrachtung

Die makroskopische Betrachtung betrifft die physikalische Bedeutung der zeitlichen und materiellen Ableitungen der Wärmeflussdichte \dot{q} in Gleichung (2.6) und Gleichung (2.10). Tzou [77, Kap. 1.5 & 2] interpretiert die Relaxationszeit τ und die Zeitableitung der Wärmeflussdichte \dot{q} auf zwei Arten:

- als intrinsische Längenskala, bei der die Diffusion in eine Welle übergeht,
- und als Zeitverzögerung zwischen Wärmefluss \dot{q} und Temperaturgradient ∇T .

Die intrinsischen Längenskalen der parabolischen Diffusions- und hyperbolischen Wärmewellengleichung werden durch ihre geschwindigkeitsfreie Darstellungsformen mit $\mathbf{v} = 0$ von Gleichungen (2.4), (2.7) oder (2.11) abgeleitet. Zudem dominieren die Ableitungen höherer Ordnung das charakteristische Verhalten und daher werden nur diese betrachtet [77, Kap. 1.5.1]. Die intrinsische Längenskala der Diffusion ist

$$\lambda_D = \sqrt{\alpha t} \quad (2.14)$$

und der Wärmewelle

$$\lambda_W = Ct. \quad (2.15)$$

Durch Festlegen von $t = \tau$ und Gleichsetzen dieser Ausdrücke ergibt sich die Relaxationszeit τ :

$$\tau = \frac{\alpha}{C^2}. \quad (2.16)$$

Daraus folgt, dass die Relaxationszeit τ in Systemen mit $\mathbf{v} = 0$ der Schwellenwert für den Übergang zwischen den Wärmtransportarten Welle ($t = [0; \tau]$) und Diffusion ($t = [\tau; \infty]$) ist. Wird nun eine Wärmequelle mit $\mathbf{v} \neq 0$ betrachtet und die Abbildung 2.1 und ihre Erklärung im vorangegangenen Kapitel 2.1.5 berücksichtigt, gilt dieser Grenzwert nicht mehr, und die thermische Mach-Zahl $\text{Ma}_{\text{th}} = v/C$ ist der Orientierungspunkt für die Wärmetransportart.

Ergänzend zeigt Abbildung 2.2 die makroskopische Ausbildung der thermischen Wel-

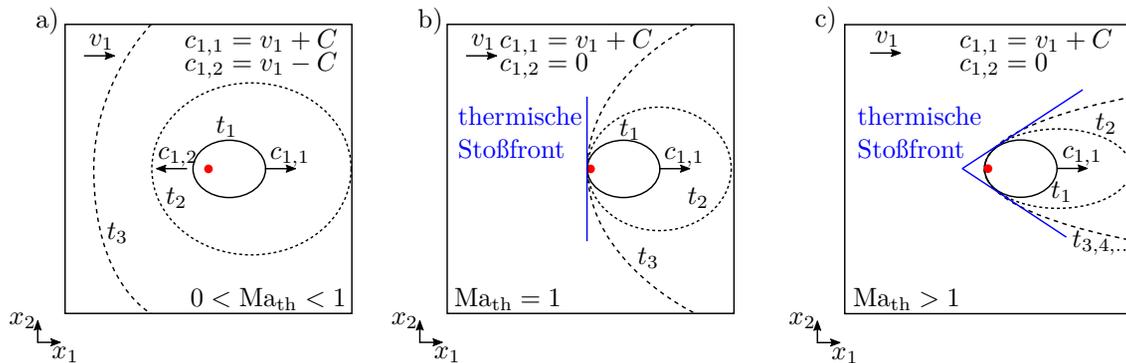


Abbildung 2.2: Wärmequelle im Zentrum und thermische Wellenfront im lagrangeschen Bezugssystem: a) $0 < Ma_{th} < 1$, b) $Ma_{th} = 1$ und c) $Ma_{th} > 1$.

le von einer Punktwärmequelle für verschiedene thermische Mach-Zahlen zu Zeitpunkten t_1, t_2, t_3 . Die gezeigten grafischen Darstellungen wurden durch Überlegungen im Kontext der thermischen Welle nach Christov-Cattaneo und in Kombination mit aerodynamischen Verhalten erstellt. Die Ansichten sind im lagrangeschen Bezugssystem dargestellt, welches die Perspektive des mitbewegten Beobachters mit der Wärmequelle einnimmt. Aus dieser Betrachtung beträgt die Umgebungsgeschwindigkeit v_1 bzw. aus aerodynamischer Sicht, wird die Wärmequelle vom Feld mit v_1 umströmt. Für $0 < Ma_{th} < 1$ in Abbildung 2.2a) liegt eine sich ausbreitende Welle in das Umgebungsfeld vor und die relative horizontale Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c in x_1 bzw. c_1 wird durch v_1 beeinflusst. Dadurch werden die Temperaturwellen und -profile in x_1 verzerrt. Der Zustand in Abbildung 2.2b) zeigt eine thermische Stoßfront, abgeleitet aus der Aerodynamik, eine Ebene darstellt, und es existiert keine thermische Wellenausbreitung entgegen der Geschwindigkeit v_1 . Für Mach-Zahlen $Ma_{th} > 1$ in Abbildung 2.2c) liegt auch keine Wellenausbreitung stromaufwärts vor, jedoch ein Mach'scher thermischer Kegel mit einem Stoßwinkel. Abhängig von der Größe der thermischen Mach-Zahl Ma_{th} ist zu erwarten, dass der Stoßwinkel indirekt proportional abnimmt und damit die Wellenfront sowie die sich einstellende stationäre Temperaturverteilung die hyperbolische Form einnimmt.

Weiterführend ist eine Kopplung der makroskopischen Betrachtung mit mikroskopischen Effekten als physikalische Interpretation der Relaxationszeit τ in Form der Verzögerung zwischen dem Wärmeflussvektor \dot{q} und dem Temperaturgradienten ∇T vorstellbar [77, Kap. 1.5.1 & 2.1]. Diese Verzögerung ist temporär und kann einem Nichtgleichgewichtszustand zugeordnet werden, denn sie beschreibt die Dauer von Phononenkollisionen [78], deren Ursache im vorherrschenden Temperaturgradienten ∇T liegt, in das Gleichgewicht hin und bis zum Beginn des Wärmetransportes \dot{q} .

2.2.2 Mikroskopische Betrachtung

Mikroskopisch kann die thermische Welle durch Wechselwirkungen von Elektronen mit Phononen erklärt werden [77, Kap. 2.2]. Abbildung 2.3 veranschaulicht ein mikroskopisches Modellsystem im Nichtgleichgewichtszustand für verschiedene thermische Mach-

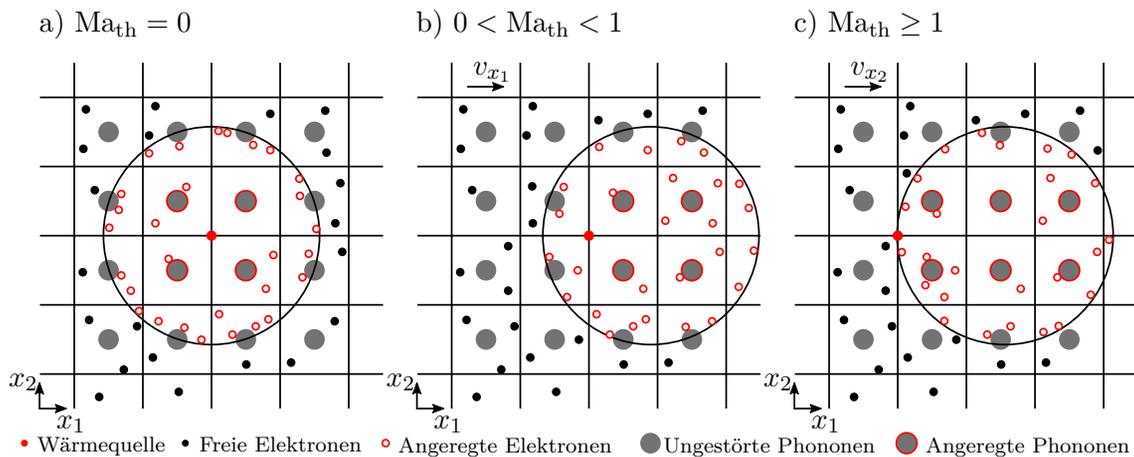


Abbildung 2.3: Momentaufnahme der thermischen Wellenfront im mikroskopischen Modellsystem für verschiedene Mach-Zahlen Ma_{th} [25].

Zahlen Ma_{th} . Das System ist auf ein starres Kontinuum ohne Dichte-, Druck- oder Konzentrationsänderungen reduziert und im Zentrum des Festkörpergitters befindet sich eine Wärmequelle. Den Energiezustand in den Gitterzellen beschreiben Phononen, welche fest im Gitterzentrum sitzen, und der Energietransport geht durch freie Elektronen vorstatten, angeregt durch die Wärmequelle. Nach der Theorie von Chester [10] existiert nun die thermische Welle bei Kollisionen von freien Elektronen mit Phononen. Die Relaxationszeit τ kann dann mit der Zeit der mittleren freien Weglänge eines Elektrons verglichen werden [77, Kap. 1.1 & 2.9] und ist damit die Dauer der Wechselwirkungen von Elektronen mit den Phononen. Abbildung 2.3a) zeigt für eine Mach-Zahl von $Ma_{th} = 0$ eine vom Quellenzentrum \dot{q} radialsymmetrische 2-D-Ausbreitung einer thermischen Wellenfront, messbar durch die Änderung des Phononenzustandes und damit der inneren Energie in den Zellen. Für Mach-Zahlen $0 < Ma_{th} < 1$ und $Ma_{th} \geq 1$ erfahren die Elektronen in Abbildung 2.3b) und c) entgegen der Relativbewegung v eine Verzögerung und mit der Bewegungsrichtung einen zusätzlichen Geschwindigkeitseintrag. Für Mach-Zahlen $Ma_{th} < 1$ ist es den Elektronen noch möglich, sich in negative x_1 -Richtung auszubreiten, während bei $Ma_{th} \geq 1$ eine Stoßfront an der Wärmequelle vorliegt und die Hauptbewegungsrichtung c der Teilchen mit der Relativgeschwindigkeit v_x weitestgehend übereinstimmt. Hinsichtlich des Makrozustands ist die Darstellung in Abbildung 2.3 idealisiert und besonders für thermische Mach-Zahlen von $Ma_{th} \geq 1$ ist ein verzerrtes achsensymmetrisches Temperaturfeld erwartbar (vgl. Abbildung 2.2b und c). Die zeitlichen Verzögerungen des Temperaturgradienten ∇T und Wärmeflusses \dot{q} , wie sie in den Gleichungen (2.6) und (2.10) gegeben sind, kann man aufgrund der Latenz der Elektronenwanderung und der Phononenanregung begründen. Zusätzliche passive mikroskopische Wechselwirkungen sind hier vernachlässigt und werden nicht näher erörtert. Weitere Theorien und Modelle werden in Tzou [77] behandelt und stellen ergänzende Möglichkeiten zur Beschreibung des Wärmeflusstransports dar.

2.2.3 Berechnung der Relaxationszeit und Größen aus der Literatur

Die Relaxationszeit τ wird durch ihre Beziehung mit der thermischen Wellengeschwindigkeit C und der Temperaturleitfähigkeit α bestimmt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der thermischen Welle C kann nach der Annahme von Chester [10] und Tzou [77] berechnet werden. Ihre Annahme ist, dass in einem isotropen Festkörper die thermische Wellengeschwindigkeit C in allen kartesischen Richtungen identisch und mit der Schallgeschwindigkeit v_S gekoppelt ist. In einem kartesischen System gilt:

$$\sum_{k=1}^3 C_{x_k}^2 = C^2 + C^2 + C^2 = 3C^2 = v_S^2, \quad C = \frac{v_S}{\sqrt{3}}. \quad (2.17)$$

Die Schallgeschwindigkeit v_S in einem Festkörper setzt sich aus den Anteilen der longitudinalen v_l und transversalen v_t Wellen zusammen. Die Wellenanteile bringen mechanische Eigenschaften ein und sind mit Hilfe von Hunklinger [36] und Mavko, Mukerji & Dvorkin [51] bestimmbar. Mit dem Elastizitätsmodul E und der Poisson-Zahl ν ist die akustische longitudinale Schallwellengeschwindigkeit

$$v_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (2.18)$$

und die transversale Schallwellengeschwindigkeit

$$v_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}. \quad (2.19)$$

Die Schallgeschwindigkeit v_S wird nun über das quadratische Mittel ihrer Wellenanteile nach Feike & Mundt [24] berechnet, da vor dem Hintergrund der kinetischen Energie die Teilchen mit größeren Geschwindigkeiten stärker berücksichtigt werden:

$$v_S = \sqrt{\frac{v_l^2 + v_t^2}{2}}. \quad (2.20)$$

Um die Relaxationszeit τ bezüglich der Temperaturleitfähigkeit α und Schallgeschwindigkeit v_S zu beschreiben, muss Gleichung (2.17) in (2.16) eingesetzt werden. Das führt auf den Ausdruck [24, 78]:

$$\tau = \frac{3\alpha}{v_S^2}. \quad (2.21)$$

Gleichung (2.21) zeigt die Beziehung zwischen den thermischen (α) und den mechanischen (v_S) Materialeigenschaften in der Relaxationszeit τ . Damit hängt der Wärmetransport explizit auch von mechanischen Parametern ab und es wird ein physikalisches Wärmetransportverhalten erwartet. Ergänzend werden Größenordnungen für Relaxationszeiten τ in Tabelle 2.1 von Nosko [56] und Al-Khairy & AL-Ofey [3, Kap. 5] aufgeführt. Die Tabelle 2.1 hilft bei der Einschätzung der Relaxationszeit τ , jedoch gibt sie keine allgemeingültigen Werte an oder eine spezifische materialabhängige quantitative Aussage preis. Daher

Tabelle 2.1: Beispiele zu Bereichen der Relaxationszeit τ [56, 3].

	τ [s]
Metalle und Legierungen	$10^{-11} - 10^{-13}$
Verbundwerkstoffe	$10^{-9} - 10^{-7}$
Poröse Materialien und Kunststoffe	$10^{-1} - 10$

ist die analytische Berechnung nach Gleichung (2.21) unabdingbar und ein anschließender Größenvergleich mit Tabelle 2.1 eine ingenieurtechnische sinnvolle Methode. Für sichere Angaben ist eine experimentelle Validierung unumgänglich, jedoch nicht im Rahmen dieser Arbeit vorgesehen.

2.3 **Erweiterte irreversible Thermodynamik**

Die erweiterte irreversible Thermodynamik bringt die erweiterte Entropie und die Nichtgleichgewichtstemperatur mit sich, welche als interessante Konzepte befunden sind und im Rahmen dieser Arbeit mitbetrachtet werden. Beide Größen sind hierbei, neben der inneren Energie u , auch vom Wärmefluss \dot{q} abhängig. Die Ansätze sind nach Lebon, Jou & Casas-Vázquez [47, Kap. 7.1.2] gegeben. Jedoch zeigen die Ansätze, dass das räumliche und zeitliche Verhalten von \dot{q} unbekannt ist und iterativ oder über eine Entropiegleichung aufwendig bestimmt werden muss, um eine positiv definite Entropie sicherzustellen [48]. Um trotzdem erste Erkenntnisse über das Verhalten der erweiterten Entropie und der Nichtgleichgewichtstemperatur zu erhalten, werden die Ansätze über vereinfachte Annahmen weiterentwickelt.

2.3.1 **Erweiterte Entropie**

Die Entropie ist nun neben der spezifischen inneren Energie u auch von der Wärmeflussdichte \dot{q} abhängig. Nach Lebon, Jou & Casas-Vázquez [47, Kap. 7.1.2] ist sie damit eine Funktion von

$$s = s(u, \dot{q}). \quad (2.22)$$

Um die spezifische Entropie s in Gleichung (2.22) zu berechnen, wird sie differenziert und die partiellen Ableitungen werden ersetzt. Lebon, Jou & Casas-Vázquez [47, Kap. 7.1.2] geben sie an, als:

$$ds = \frac{\partial s}{\partial u} du + \frac{\partial s}{\partial \dot{q}} d\dot{q} = \frac{1}{T} du - \frac{\tau}{\rho \lambda T^2} \dot{\mathbf{q}} \cdot d\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.23)$$

Die Änderung der inneren Energie du ist über die spezifische Wärmekapazität c und die Temperaturänderung dT definiert. Der Wärmeflussdichtevektor $\dot{\mathbf{q}}$ wird reduziert und ist dann $\dot{q} = mc\dot{T}/A = L_c \rho c \dot{T}$ mit der charakteristischen Länge $L_c = V/A$. Substitution der inneren Energie du und des Ausdrucks \dot{q} in Gleichung (2.23) führt unter der Annahme konstanter und temperaturunabhängiger Dichte ρ , spezifischer Wärmekapazität c , Rela-

xationszeit τ , Länge L_c und der Wellengeschwindigkeit $C^2 = \alpha/\tau = \lambda/\rho c\tau$ zu:

$$\begin{aligned}
ds &= \frac{c}{T} dT - \frac{\tau}{\rho\lambda T^2} L_c \rho c \dot{T} d(\rho L_c c \dot{T}), \\
&= \frac{c}{T} dT - \frac{\tau}{\rho\lambda T^2} L_c^2 \rho^2 c^2 \dot{T} d\dot{T}, \\
&= \frac{c}{T} dT - \frac{\tau L_c^2 \rho c^2}{\lambda T^2} \dot{T} d\dot{T}, \\
&= \frac{c}{T} dT - \frac{L_c^2 c \tau}{T^2 \alpha} \dot{T} d\dot{T}, \\
ds &= \underbrace{\frac{c}{T} dT}_{ds_{\text{KIT}}} - \underbrace{\frac{L_c^2 c}{T^2 C^2} \dot{T} d\dot{T}}_{ds_{\text{EIT}}}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Entropieänderung im Nichtgleichgewicht ds ist damit die Summe aus dem Term der klassischen Entropie ds_{KIT} und der Formulierung aus der erweiterten irreversiblen Thermodynamik ds_{EIT} . Eine Überprüfung zeigt, dass bei kleiner werdenden Differenzen von dT und $d\dot{T}$ die Gleichgewichtsbedingung $ds = 0$ erreicht wird und im Nichtgleichgewichtszustand der Term ds_{EIT} diesen Zustand deutlich durch die Temperaturgrößen bestimmt. Im erweiterten Term ds_{EIT} wird die thermische Wellengeschwindigkeit eingebracht und führt zur Erkenntnis, dass der erweiterte Anteil ds_{EIT} sich indirekt proportional zur Geschwindigkeit verhält. Daraus ist ableitbar, dass bei Materialien mit hohen thermischen Wellengeschwindigkeiten C bzw. aus der Beziehung $C = \sqrt{\alpha/\tau}$, mit hervorragenden Temperaturleitfähigkeiten α und kleinen Relaxationszeiten τ , der ds_{EIT} -Anteil schwindet und die Entropie ds_{KIT} aus der klassischen Thermodynamik dominiert. Für Untersuchungen soll die Integration von Gleichung (2.24) Aufschluss über die Entropieentwicklung im System geben. Die schrittweise Integration führt auf die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 ds &= c \int_1^2 \frac{1}{T} dT - \frac{L_c^2 c}{T^2 C^2} \int_1^2 \dot{T} d\dot{T} \quad \text{und} \\
[s]_1^2 + K_1 &= c[\ln(T)]_1^2 + K_2 - \frac{L_c^2 c}{T^2 C^2} \frac{1}{2} [\dot{T}]_1^2 + K_3.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Mit der Definition, dass zum Anfangszeitpunkt die Entropie im System konstant ist und $K = K_1 + K_2 + K_3 = 0$, wird Gleichung (2.25) zu

$$\Delta s = c \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{L_c^2 c}{2 T^2 C^2} (\dot{T}_2^2 - \dot{T}_1^2). \tag{2.26}$$

Aus dem mathematischen Gesichtspunkt ist Gleichung (2.26) eine Reihenentwicklung, welche eine zweite Ordnung Approximation in der Zeit mitführt.

2.3.2 Nichtgleichgewichtstemperatur

Die Nichtgleichgewichtstemperatur θ ist nach Lebon, Jou & Casas-Vázquez [47, Box 7.3] eine Funktion der inneren Energie u und der Wärmeflussdichte \dot{q}

$$\theta^{-1} = \theta^{-1}(u, \dot{q}) \quad (2.27)$$

und ist durch Integration gegeben mit

$$\theta^{-1} = T^{-1} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\tau}{\rho \lambda T^2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.28)$$

Gleichung (2.28) besteht aus der Gleichgewichtstemperatur T und einem Korrekturterm für die Temperatur im Nichtgleichgewicht. Wie zur Entropiegleichung (2.24) wird der Wärmeflussvektor durch $\dot{q} = L_c \rho c \dot{T}$ ersetzt und die Dichte ρ , Wärmeleitfähigkeit λ , spezifische Wärmekapazität c , Relaxationszeit τ und charakteristische Länge L_c konstant gehalten. Zudem wird die thermische Wellengeschwindigkeit durch $C^2 = \lambda / \rho c \tau$ mit eingeführt. Abschließend wird die partielle innere Energie $\partial u = c \partial T$ gesetzt und damit beschränkt sich die Ableitung der Form $\partial / \partial T$ lediglich auf die Temperatur. Die zeitlichen Ableitungen \dot{T} bleiben unberührt und damit ist die Nichtgleichgewichtstemperatur

$$\theta = \frac{1}{\frac{1}{T} + \frac{L_c^2 \dot{T}^2}{C^2 T^3}}. \quad (2.29)$$

Im lokalen Gleichgewicht muss die Nichtgleichgewichtstemperatur θ die lokale Gleichgewichtstemperatur T sein bzw. $\theta = T$, was durch eine Analyse des zweiten Terms gezeigt werden kann. Zum einen schwindet der zweite Term durch kleiner werdende Gradienten der zeitlichen Ableitungen \dot{T} bei der instationären Entwicklung zum Gleichgewichtszustand hin. Zum anderen wird dieser Term wesentlich kleiner bei großer thermische Wellenausbreitungsgeschwindigkeit C . Die Darstellungsform von Gleichung (2.29) verdeutlicht auch das natürliche Verhalten und ihre Folge, dass die Temperatur θ im Nichtgleichgewicht immer kleiner ist als die lokale Gleichgewichtstemperatur T .

3 Physikalische Kennzahlen

Kennzahlen helfen bei der Beschreibung von physikalischen Vorgängen und ermöglichen den Vergleich ähnlicher Zustände, um Systeme zu analysieren und identische physikalische Bedingungen festzustellen. Kennzahlen zu partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Typ sind bekannt [33, Kap. III] und werden für die aufgeführten Wärmetransportgleichungen herangezogen. Das beruht auf identischen Termen in den PDGLs der Wärmetransportgleichungen nach Fourier (2.4), Cattaneo-Vernotte (2.7) und Christov-Cattaneo (2.11), wie sie auch in den bekannten Differentialgleichungen der Diffusionsgleichung, Konvektions-Diffusions- und Wellengleichung aufgeführt sind [33, Kap. 10.10. & 11.9.]. Die wichtigsten Größen dieser Arbeit sind die thermische Mach-Zahl Ma_{th} , die Péclet-Zahl Pe und die Fourier-Zahl Fo .

3.1 Thermische Mach-Zahl

Die thermische Mach-Zahl Ma_{th} wird durch die hyperbolischen Wärmetransportgleichungen eingeführt und ist der wichtigste Parameter, um das Wärmetransportphänomen einzuordnen. Sie gibt das Verhältnis aus der Geschwindigkeit v des Bezugssystems eines Kontinuums oder der Wärmequelle zur thermischen Wellengeschwindigkeit C an:

$$Ma_{th} = \frac{v}{C}. \quad (3.1)$$

Gemäß Gómez, Colominas & Navarrina [30] sowie Feike & Mundt [23] lassen sich die Bereiche der Mach-Zahl festlegen. Zudem wird mit Abbildung 2.1 das unterkritische Regime festgelegt. Die Bereiche ergeben sich aus der aerodynamischen Betrachtung [32, Kap. 4.3] und sind [25]:

$$\begin{aligned} Ma_{th} \leq 0,1 &\rightarrow \text{unterkritische,} \\ 0,1 < Ma_{th} < 1,0 &\rightarrow \text{subkritische,} \\ Ma_{th} \approx 1,0 &\rightarrow \text{transkritische und} \\ Ma_{th} > 1,0 &\rightarrow \text{überkritische Diffusion.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2 Fourier-Zahl

Die Fourier-Zahl Fo gibt den thermodynamischen Zustand nach der endlichen finalen Zeitdauer t_f für eine charakteristische Länge L_c wieder. Sie ist nach Kuneš [45, Kap. 5.1.4]:

$$Fo = \frac{\lambda \Delta t_f}{c \rho \Delta L_c^2}. \quad (3.3)$$

Gleichung (3.3) beschreibt damit das Verhältnis aus der Wärmeleitung in ein System (Transportrate) zu der aufgenommenen Wärme eines volumetrischen Systems (Speicherungsrate) nach einer endlichen Dauer von t_f . Davon kann der thermodynamische Zustand abgeleitet werden, denn für $Fo \leq 1$ liegt ein instationärer Zustand vor und für Werte $Fo > 1$ ist ein stationärer Gleichgewichtszustand erreicht.

Für die Simulationen des Wärmetransportproblems ist die Diffusions-Zahl d ein numerischer Indikator für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärmeleitung nach Fourier und eng mit der Fourier-Zahl Fo verbunden. Die Diffusions-Zahl ist in der Fundamentallösung (2.5) in der Potenz der Exponentialfunktion aufgeführt als

$$d = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x_k^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.4)$$

mit der Temperaturleitfähigkeit α , dem diskreten Zeitschritt Δt und dem diskreten Ortschritt Δx_k und kann mit der Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl (CFL) aus der numerischen Strömungssimulation verglichen werden. Die Stabilitätsbedingung von $d = 1/2$ beruht auf der Analyse nach von Neumann [33, Kap. 10.5.2]. Für die Simulationen wird die Zellengröße Δx_k vorgegeben und mit Gleichung (3.4) Δt berechnet.

3.3 Péclet-Zahl

Die Péclet-Zahl Pe gibt das Verhältnis vom Advektions- zum Diffusionsprozess an und führt auf die Aussage, welcher der dominierende Transportprozess ist. Diesbezüglich ist die Péclet-Zahl Pe bei advektiv dominanten Problemen in den numerischen Methoden eine hilfreiche Größe, um Oszillationen zwischen Nachbarpunkten auf ein Minimum zu reduzieren. Nach Donea & Huerta [17, Kap. 2.2.2] ist die Ursache dieser Oszillationen auf den überwiegenden unsymmetrischen Advektionstensor zurückzuführen. Die Péclet-Zahl ist [17, S. 40] mit der Systemgeschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$, dem diskreten Ortsschritt Δx_k und der Temperaturleitfähigkeit α

$$Pe_k = \frac{v_k \Delta x_k}{2\alpha}, \quad (3.5)$$

wobei $Pe \leq 1$ numerische Lösungen ohne unphysikalische Oszillationen vorhersagt. Nahelegend ist, dass die Péclet-Zahl Pe eine mögliche Steuergröße ist, um in einem instabilen numerischen System adaptiv die Lösungsmethoden anzupassen. Unter anderem wird sie in den finiten Elementen bei den Methoden zur inkonsistenten Streamline-Upwind (SU), der Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Methode (SUPG) und den Galerkin-Least-Squares (GLS) als Hilfsgröße für künstliche numerische Diffusion verwendet [34, 17, 35].

Teil II

NUMERIK

4 Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode ist ein Diskretisierungsverfahren, um numerische Näherungslösungen von partiellen Differentialgleichungen (PDGL) zu berechnen. Besonders für anwendungsorientierte Probleme ist es einfacher, eine Näherung zu bestimmen als die exakte analytische Lösung herzuleiten. Zudem liegen keine universellen Lösungen zu den Wärmetransportgleichungen in Kapitel 2.1 vor. Mit der FEM kann ein lineares Gleichungssystem aufgestellt und damit in die Lösungsfindung eingestiegen werden. Für die fourierschen Transportgleichung sind Systeme in Form von Matrizen und Vektoren gegeben [35, Kap. 8.4], aber für die erweiterten Wärmetransportgleichungen existieren nur Darstellungen für ein bewegungsfreies System $v_k = 0$ [84, 53]. Im Zuge eines Kontinuums mit der Systemgeschwindigkeit $|v_k| > 0$ wird die finite Elementediskretisierung der christovschen Wärmetransportgleichung (2.11) in ein lineares Gleichungssystem überführt und die zur FEM gehörenden Grundlagen gezeigt. Diese sind die Näherung der Feldgröße T in Kapitel 4.1, die Schritte zur isoparametrischen Koordinatentransformation in Kapitel 4.2, das finite Rechteckelement in Kapitel 4.3 und die Umformung der PDGL mithilfe der Methode der gewichteten Residuen in eine gewöhnliche Differentialgleichung in Kapitel 4.4. Zudem werden Stabilitätsmechanismen in Form von künstlicher numerischer Diffusion in Kapitel 4.5 aufgeführt und entwickelt.

4.1 Näherungslösung der Temperatur

Die FEM setzt bei der Findung der Näherungslösung mit der Interpolation der skalaren Feldgröße u im finiten Element an. Die Interpolation der Feldgröße u in einem finiten Element wird über die Summe der Formfunktionen N_i und der Größe a_i beschrieben. Nach Zienkiewicz & Taylor [86, S. 165] ist die allgemeine Näherung einer skalaren Feldgröße u :

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (4.1)$$

mit der Anzahl n Summen. Es wird $a_i = u_i$ festgelegt und damit ist die Unbekannte a_i einer Feldgröße u_i an jedem Elementknoten i expliziten Werten zuschreibbar. Diese Näherungsbedingung wird weiter in die Formfunktionen N_i für jeden Knoten getragen. Das bedeutet, dass im Fall $a_i = u_0$ am Knoten gilt:

$$\hat{u} = \left(\sum_{i=1}^n N_i \right) u_0 = u_0 \quad (4.2)$$

und damit ist die Kontinuität im Element sichergestellt durch

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1. \quad (4.3)$$

Diese Eigenschaft ist im englischen Sprachraum als *partition of unity* bekannt, welche für die Bildung von Standardformfunktionen N essentiell ist und sicherstellt, dass an den Knoten die Näherungsbedingung erfüllt wird [81, S. 91]. Weiterführend treten die Formfunktionen N in Ansatzfunktionen auf, welche von der Geometrie des finiten Elements abhängig sind und den Funktionsverlauf der Feldgröße T bestimmen. Diese Ansatzfunktionen sind stetig, erfüllen mathematisch die C_0 -Bedingung (Knicke im Funktionsverlauf zwischen den Elementen sind erlaubt, aber keine Singularitäten) und jedem Elementknoten wird eine solche Funktion und damit auch eine Formfunktion N zugeordnet [81, Kap. 4.3]. Da es sich um eine Näherung handelt, haben die Funktionen Auswirkungen auf die numerische Lösung. Es sind nämlich nur Temperaturverläufe im finiten Element möglich, die durch die Funktionen beschrieben werden. Diese Funktionen versteifen das System und bilden nicht den tatsächlichen sondern einen genäherten Temperaturverlauf im diskretisierten Körper ab. Damit können gegenüber dem realen Körper die Temperaturen betragsmäßig kleiner sein. Um die Formfunktionen N in die Wärmetransportgleichungen zu implementieren und das damit einhergehende Umsetzen der Näherungslösung nach dem Vorbild von Gleichung (4.1) einfach zu halten, sind nach Huebner, Dewhirst & Smith [35, S. 352] die Elementtemperatur und Gradienten angenommen mit:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)', \quad (4.4)$$

$$T^e(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n N_i^e T_i^e, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial T^e}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n N_i^e \frac{\partial T_i^e}{\partial t}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 T^e}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n N_i^e \frac{\partial^2 T_i^e}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial T^e}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i^e}{\partial \mathbf{x}} T_i^e. \quad (4.8)$$

In Gleichungen (4.5) wird die Elementtemperatur $T^e(\mathbf{x}, t)$ über die Summe der Formfunktionen N_i^e und Temperaturen T_i^e zum Knoten i sowie ihre zeitlichen und räumlichen Ableitungen in (4.6) bis (4.8) gebildet. Zwischen den Knoten i kann die Elementtemperatur $T^e(\mathbf{x}, t)$ mit existierenden [4, 34, 35, 86] oder mit individuellen [64, 69] Interpolationsfunktionen N beschrieben werden. Das Lösen der Wärmetransportgleichungen geht in Matrizen- und Vektorform von statten. Hierfür werden die Knotentemperaturen T_i^e in

den Elementtemperaturvektor \mathbf{T}^e

$$\mathbf{T}^e(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} T_1^e \\ T_2^e \\ \dots \\ T_n^e \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

für n Knoten geschrieben. Die zugehörigen Formfunktionen eines Elements mit n -Knoten sind im Zeilenvektor \mathbf{N}^e aufgeführt:

$$\mathbf{N}^e(\mathbf{x}) = \left(N_1^e \quad N_2^e \quad \dots \quad N_n^e \right). \quad (4.10)$$

Zuzüglich sind die Ableitungen der Formfunktionen für die räumlichen Gradienten in den \mathbf{B}^e Vektor geschrieben, welcher bei k -dimensionalen Problemen die Matrizenform \mathbf{B}^e annimmt:

$$\mathbf{B}^e(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial x_k} & \dots & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial x_k} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Die zeitlichen Ableitungen werden aus dem Skalarprodukt der Vektoren der Formfunktion \mathbf{N}^e in (4.10) und Temperatur \mathbf{T}^e in (4.9) gebildet und sind:

$$T^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{T}^e(t), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial T^e}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\dot{\mathbf{T}}^e(t), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 T^e}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{T}}^e(t). \quad (4.14)$$

Die räumlichen Ableitungen der Elementtemperaturen \mathbf{T}^e (4.9) sind mit \mathbf{B}^e aus (4.11):

$$\left[\frac{\partial T^e}{\partial \mathbf{x}} \right] = \mathbf{B}^e(\mathbf{x})\mathbf{T}^e(t). \quad (4.15)$$

4.2 Isoparametrische Transformation

Für standardisierte Berechnungen, wie bei der numerischen Integration [4, Kap. 4.1], werden in der FEM die Elemente aus einer globalen Domäne in das zeitliche isoparametrische System transformiert. Die Transformation zwischen dem globalen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ und isoparametrischen $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_l)$ System wird über die Funktionalmatrix der Jacobischen \mathbf{J}^e und den Interpolationsfunktionen N ermöglicht. Nach dem Vorbild von Bathe & Wilson [4, Gl. 4.18] ist die Koordinatentransformation:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n N_i(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}_i \quad (4.16)$$

mit der Knotenanzahl n und der isoparametrischen Formfunktion $N_i(\boldsymbol{\xi})$ zum Knoten i . Die Jacobi-Matrix \mathbf{J}^e wird aus den partiellen Ableitungen von Gleichung (4.16) und damit in der Matrix \mathbf{B}^e entwickelt. Die Kopplung der Systeme kann so über ihre Ableitungen beschrieben werden, welche das Verhältnis aus der räumlichen Differenz zweier Punkte, die zur selben Elementseite gehören, zu ihrer normierten isoparametrischen Elementseitenlänge ist. Die Jacobi-Matrix \mathbf{J}^e ist abhängig von der räumlichen Dimension und ist eine $k \times l$ -Matrix [39, Kap. 47.3]:

$$\mathbf{J}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Ergänzend ist die Determinante der jacobischen Matrix eine weitere Skalierung zwischen den Koordinatensystemen. So ist bspw. in 2-D das Vierfache der isoparametrischen Jacobi-Determinante die tatsächliche Elementfläche. Hierfür wird die Inverse gebildet, welche die Form hat [83, Kap. 3]:

$$\mathbf{J}^{e^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{e^{-1}} & J_{12}^{e^{-1}} \\ J_{21}^{e^{-1}} & J_{22}^{e^{-1}} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}^e|} \begin{bmatrix} -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

mit der Determinante

$$|\mathbf{J}^e| = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}. \tag{4.19}$$

4.3 Ansatz- und Formfunktionen des Rechteckelements

Die Näherungslösungen der skalaren Feldgröße in Gleichung (4.1) sind durch individuelle Formfunktionen aus Kapitel 4.1 darstellbar. Die Basis meistgenutzter FEM-Programme sind jedoch die Standardformfunktionen [86, Kap. 8] und werden über die Ansatzfunktionen hergeleitet. Die Ansatzfunktionen können linear, quadratisch und mit höherer Ordnung über das pascalsche Dreieck in Abbildung 4.1 entwickelt werden. Vor dem Hintergrund, dass der Wellencharakter der PDGLs die FEM-Lösung stört, werden steife lineare Elemente bevorzugt, aber auch quadratische Elemente herangezogen, um bezüglich der

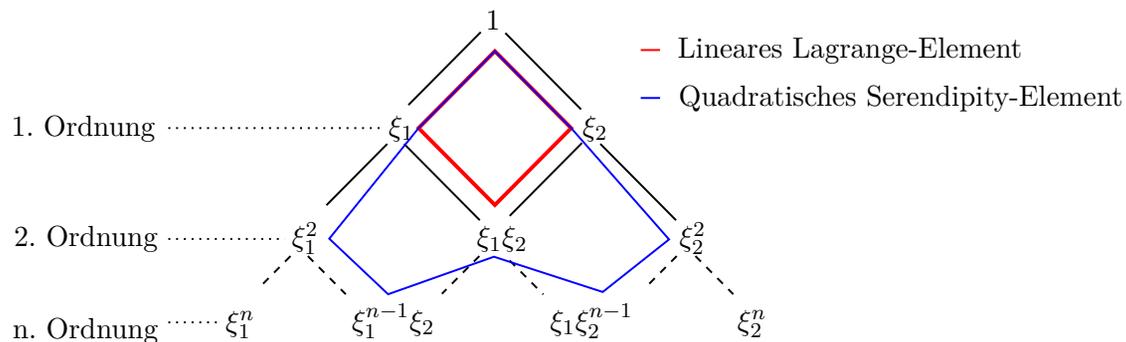


Abbildung 4.1: Pascal-Dreieck für ein 2-D-System [86, Kap. 8.4].

numerischen Untersuchungen in Kapitel 7 einen Vergleich zu ermöglichen. Zudem werden Rechteckelemente verwendet, um ein strukturiertes und qualitativ hochwertiges Netz zu erstellen und damit erste Diskretisierungsfehler zu vermeiden. Diesbezüglich werden die Funktionen des linearen Lagrange- und des quadratischen Serendipity-Elements vorgestellt. Das Herleitungsschema der Ansatzfunktionen zur Elementtemperatur T^e und die anschließende Ableitung auf die Formfunktionen N^e ist für jede Elementart identisch. Das Vorgehen wird nun stichpunktartig erklärt und anschließend für das lineare und das quadratische Rechteckelement gezeigt:

1. Ansatzfunktion T^e durch die Näherung mit dem pascalschen Dreieck aufstellen,
2. Einsetzen der Koordinaten für jeden Eckknotenpunkt und umstellen nach den Unbekannten ϵ_i und
3. Substitution der Unbekannten ϵ_i in die Ansatzfunktion T^e aus 1. sowie Sortieren nach den Elementknotentemperaturen.

4.3.1 Lineares Lagrange-Element

Das lineare 2-D-Lagrange-Rechteckelement wird in den FEM am häufigsten verwendet und die Ansatzfunktion T^e sowie die Formfunktionen N^e im isoparametrischen Koordinatensystem nachfolgend gezeigt. Hierzu ist es in Abbildung 4.2a) im globalen kartesischen x_1x_2 -System dargestellt. Das Elementgebiet Ω^e ist über den Rand Γ^e und den Eckknotenpunkten eingeschlossen, an denen die Knotentemperaturen T_i^e eingezeichnet sind. In b) ist das zugehörige isoparametrische Element gezeigt, welches im $\xi_1\xi_2$ -System zwischen den Intervallen $\xi_1 = [-1; 1]$ und $\xi_2 = [-1; 1]$ aufgespannt ist. Die Intervallbereiche liegen bewusst bei $[-1; 1]$ und sind eine Art der Normierung, welche bspw. die numerische räumliche Integration erleichtert. Die Ansatzfunktion des linearen Lagrange-Elements wird über das pascalsche Dreieck in Abbildung 4.1 hergeleitet. Dabei werden die Terme 1, ξ_1 , ξ_2 und

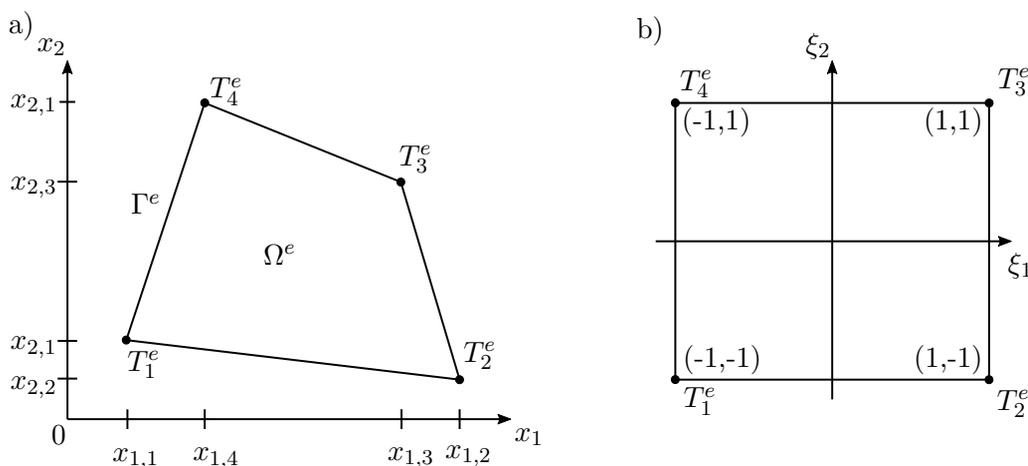


Abbildung 4.2: Lineares Lagrange-Elemente: a) im globalen System, b) im isoparametrischen System.

$\xi_1\xi_2$ mit der Unbekannten ϵ_i multipliziert:

$$T^e(\xi_1, \xi_2) = 1\epsilon_0^e + \epsilon_1^e\xi_1 + \epsilon_2^e\xi_2 + \epsilon_3^e\xi_1\xi_2. \quad (4.20)$$

Die Koeffizienten ϵ^e in Gleichung (4.20) sind bestimmbar durch das Aufstellen eines Gleichungssystems aus den Knotentemperaturen T^e . Die Knotentemperaturen T^e sind die Eckrandwerte der Elementtemperatur und werden deswegen mit der Ansatzfunktion in Gleichung (4.20) ausgedrückt. Hierfür werden die Koordinaten zu den Grenzen in den Intervallen des $\xi_1\xi_2$ -Systems eingesetzt. Die Knotentemperaturen T_i^e zu Abbildung 4.2b) sind:

$$T_1^e(-1, -1) = \epsilon_0^e - \epsilon_1^e - \epsilon_2^e + \epsilon_3^e, \quad (4.21)$$

$$T_2^e(1, -1) = \epsilon_0^e + \epsilon_1^e - \epsilon_2^e - \epsilon_3^e, \quad (4.22)$$

$$T_3^e(1, 1) = \epsilon_0^e + \epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e, \quad (4.23)$$

$$T_4^e(-1, 1) = \epsilon_0^e - \epsilon_1^e + \epsilon_2^e - \epsilon_3^e. \quad (4.24)$$

Mit der Annahme bekannter Knotentemperaturen sind die Koeffizienten ϵ^e durch das vorliegende Gleichungssystem (4.21) bis (4.24) lösbar:

$$\epsilon_0^e = \frac{T_1^e + T_2^e + T_3^e + T_4^e}{4}, \quad (4.25)$$

$$\epsilon_1^e = \frac{T_2^e - T_1^e + T_3^e - T_4^e}{4}, \quad (4.26)$$

$$\epsilon_2^e = \frac{T_4^e - T_1^e + T_3^e - T_2^e}{4}, \quad (4.27)$$

$$\epsilon_3^e = \frac{T_1^e - T_2^e + T_3^e - T_4^e}{4}. \quad (4.28)$$

Substitution dieser Koeffizienten in die Ansatzfunktionsgleichung (4.20) und Ordnen nach den Temperaturen, führt auf die Darstellung der Elementtemperatur $T^e(\xi_1, \xi_2)$ mittels den Formfunktionen:

$$T^e(\xi_1, \xi_2) = N_1^e T_1^e + N_2^e T_2^e + N_3^e T_3^e + N_4^e T_4^e \quad (4.29)$$

und

$$N_1^e = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2), \quad (4.30)$$

$$N_2^e = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2), \quad (4.31)$$

$$N_3^e = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2), \quad (4.32)$$

$$N_4^e = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2). \quad (4.33)$$

4.3.2 Quadratisches Serendipity-Element

Das quadratische 2-D-Serendipity-Rechteckelement führt im Gegensatz zum linearen Element einen Mittelknoten auf dem Rand Γ^e auf. Dadurch ist es weniger steif und bietet sich für eine bessere numerische Näherung für das Wellenverhalten der hyperbolischen Wärmetransportgleichungen an. Es ist in Abbildung 4.3a) im x_1x_2 -System dargestellt und das Gebiet Ω^e wird über acht Knoten mit dem Rand Γ^e aufgespannt. Das zugehörige isoparametrische Element ist in b) ergänzt und im $\xi_1\xi_2$ -System über die Intervalle von $\xi_1 = [-1; 1]$ und $\xi_2 = [-1; 1]$ definiert. Die Ansatzfunktion zur Elementtemperatur $T^e(\xi_1, \xi_2)$ setzt sich über die Terme 1, $\xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2$, die quadratischen Koordinaten ξ_1^2 und ξ_2^2 sowie die kubischen Erweiterung $\xi_1^2\xi_2, \xi_1\xi_2^2$ aus dem pascalschen Dreieck zusammen:

$$T^e(\xi_1, \xi_2) = 1\epsilon_0^e + \epsilon_1^e\xi_1 + \epsilon_2^e\xi_2 + \epsilon_3^e\xi_1\xi_2 + \epsilon_4^e\xi_1^2 + \epsilon_5^e\xi_2^2 + \epsilon_6^e\xi_1^2\xi_2 + \epsilon_7^e\xi_1\xi_2^2. \quad (4.34)$$

Die Bestimmung der Koeffizient ϵ_i^e gestaltet sich über ein Gleichungssystem aus der Ansatzfunktion (4.34) zu jedem Knotenpunkt. Die Knotentemperaturen sind zu den isoparametrischen Koordinaten und Abbildung 4.3b):

$$T_1^e(-1, -1) = \epsilon_0^e - \epsilon_1^e - \epsilon_2^e + \epsilon_3^e + \epsilon_4^e + \epsilon_5^e - \epsilon_6^e - \epsilon_7^e, \quad (4.35)$$

$$T_2^e(0, -1) = \epsilon_0^e - \epsilon_2^e + \epsilon_5^e, \quad (4.36)$$

$$T_3^e(1, -1) = \epsilon_0^e + \epsilon_1^e - \epsilon_2^e - \epsilon_3^e + \epsilon_4^e + \epsilon_5^e - \epsilon_6^e + \epsilon_7^e, \quad (4.37)$$

$$T_4^e(1, 0) = \epsilon_0^e + \epsilon_1^e + \epsilon_4^e, \quad (4.38)$$

$$T_5^e(1, 1) = \epsilon_0^e + \epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e + \epsilon_4^e + \epsilon_5^e + \epsilon_6^e + \epsilon_7^e, \quad (4.39)$$

$$T_6^e(0, 1) = \epsilon_0^e + \epsilon_2^e + \epsilon_5^e, \quad (4.40)$$

$$T_7^e(-1, 1) = \epsilon_0^e - \epsilon_1^e + \epsilon_2^e - \epsilon_3^e + \epsilon_4^e + \epsilon_5^e + \epsilon_6^e - \epsilon_7^e, \quad (4.41)$$

$$T_8^e(-1, 0) = \epsilon_0^e - \epsilon_1^e + \epsilon_4^e. \quad (4.42)$$

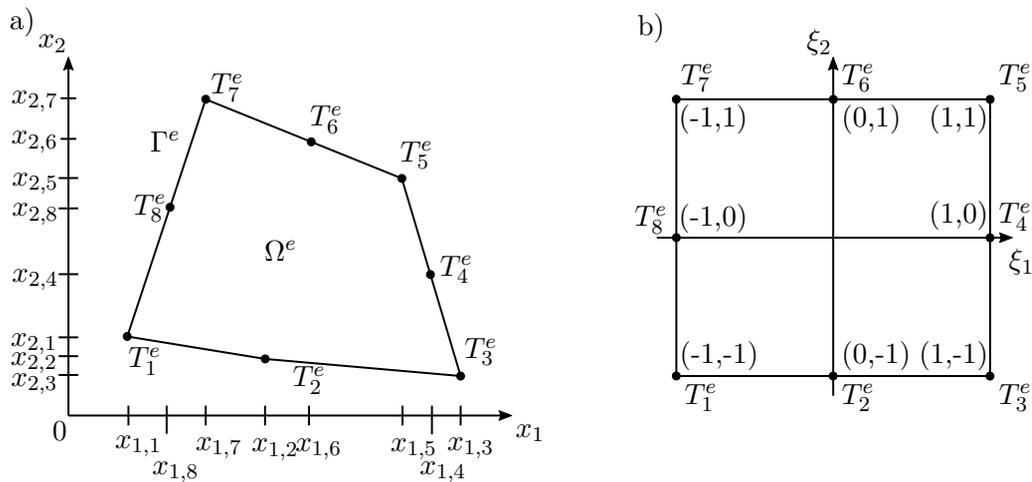


Abbildung 4.3: Quadratisches Rechteckelement: a) im globalen System, b) im isoparametrischen System.

Durch Umstellen und Substitution sind die Koeffizienten ϵ^e bestimmbar:

$$\epsilon_0^e = \frac{T_2^e + T_4^e + T_6^e + T_8^e}{2} \frac{-T_1^e - T_3^e - T_5^e - T_7^e}{4}, \quad (4.43)$$

$$\epsilon_1^e = \frac{T_4^e - T_8^e}{2}, \quad (4.44)$$

$$\epsilon_2^e = \frac{T_6^e - T_2^e}{2}, \quad (4.45)$$

$$\epsilon_3^e = \frac{T_1^e - T_3^e + T_5^e - T_7^e}{4}, \quad (4.46)$$

$$\epsilon_4^e = \frac{-T_2^e - T_6^e}{2} \frac{T_1^e + T_3^e + T_5^e + T_7^e}{4}, \quad (4.47)$$

$$\epsilon_5^e = \frac{-T_8^e - T_4^e}{2} \frac{T_1^e + T_3^e + T_5^e + T_7^e}{4}, \quad (4.48)$$

$$\epsilon_6^e = \frac{T_2^e - T_6^e}{2} \frac{T_5^e - T_3^e - T_1^e + T_7^e}{4}, \quad (4.49)$$

$$\epsilon_7^e = \frac{T_8^e - T_4^e}{2} \frac{T_3^e - T_1^e + T_5^e - T_7^e}{4}. \quad (4.50)$$

Die Elementansatzfunktion $T^e(\xi_1, \xi_2)$ mit den Formfunktionen aus den Koeffizienten ergibt sich zu:

$$T^e(\xi_1, \xi_2) = N_1^e T_1^e + N_2^e T_2^e + N_3^e T_3^e + N_4^e T_4^e + N_5^e T_5^e + N_6^e T_6^e + N_7^e T_7^e + N_8^e T_8^e. \quad (4.51)$$

Die zugehörigen Formfunktionen sind im isoparametrischen System:

$$N_1^e = -\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_1 + \xi_2), \quad (4.52)$$

$$N_2^e = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2), \quad (4.53)$$

$$N_3^e = -\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_1 + \xi_2), \quad (4.54)$$

$$N_4^e = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2), \quad (4.55)$$

$$N_5^e = -\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_1 - \xi_2), \quad (4.56)$$

$$N_6^e = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2), \quad (4.57)$$

$$N_7^e = -\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_1 - \xi_2), \quad (4.58)$$

$$N_8^e = \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2^2). \quad (4.59)$$

4.4 Diskretisierung der Transportgleichungen

Der Wärmetransport nach den Gleichungen von Fourier (2.4), Cattaneo-Vernotte (2.7) und Christov-Cattaneo (2.11) sind partielle Differentialgleichungen und werden als starke Form bezeichnet, da sie die exakte Lösung in jedem Punkt eines Problemgebiets erfüllen. Für in-

dividuelle Anfangsrandwertprobleme müssen die Lösungen der Gleichungen immer erneut angepasst werden und da keine allgemeingültigen analytischen Lösungen existieren, wird die schwache Form der PDGLs durch die Methode der gewichteten Residuen entwickelt [35, Kaptiel 4]. Die Methode der gewichteten Residuen (engl. the method of weighted residuals) ist ein Weg, um numerische Näherungslösungen für partielle Differentialgleichungen zu finden. Hierzu geben Finlayson & Scriven [26] einen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten und behandeln den am weitest verbreiteten Ansatz nach Galerkin. Der Ansatz nach Galerkin wird nur auf die Wärmetransportgleichung nach Christov angewendet, da von ihr auf die anderen Gleichungen nach Fourier und Cattaneo geschlossen werden kann.

4.4.1 Methode der gewichteten Residuen

Das Ziel der Methode der gewichteten Residuen ist es, das Residuum der numerischen Lösung in allen Punkten des Problemgebietes kleinstmöglich werden und damit gegen Null gehen zu lassen. Das wird mathematisch nach dem Vorgehen von Wagner [81, Kap. 4.3] mit zwei Schritten an der Wärmetransportgleichung (2.7) nach Christov umgesetzt. Zunächst werden alle Terme auf eine Seite umgestellt und diese dann als Residuum R definiert [23]:

$$R = (\tau T_{tt} + 2\tau(\mathbf{v} \cdot \nabla T)_t + T_t + \tau(\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 T + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T) - \alpha \nabla^2 T. \quad (4.60)$$

Im weiteren Schritt wird für die numerische Näherungslösung dieses Residuum über das Gebiet Ω mit einer Testfunktion w als Gewichtung multipliziert und anschließend integriert. Wird dieses Integral dann zu Null, ist die Differentialgleichung erfüllt:

$$\int_{\Omega} w R d\Omega = 0. \quad (4.61)$$

Ein Vorteil dieser Methode ist es, dass sie einen Mittelwert durch die Integration bildet und damit die Anforderung reduziert wird, die Lösung punktweise exakt zu bestimmen. Weiterführend schränkt aber in Gleichung (4.60) der Diffusionsterm mit seiner Ortsableitung zweiter Ordnung zu mathematischen festen Vorgaben für die Näherungslösung ein. Nach Wagner [81, S. 52] bedeutet das, dass die Ansatzfunktion der Temperatur T einmal stetig ableitbar sein muss. Folglich ist gefordert, dass die erste Ableitung der Funktion maximal einen Knick und ihre zweite Ableitung einen Sprung aufweisen darf, mathematisch liegt damit die C_1 -Stetigkeit vor. Eine solche Forderung ist durch Ansatzfunktionen höherer Ordnung erfüllbar, jedoch werden sie durch ihre höhere Differenzierbarkeitsanforderung und Nichtlinearität, vor allem für ihre zunehmende Komplexität in 2-D und 3-D, nicht bevorzugt. Daher wird die C_0 -Stetigkeit herangezogen, in der lediglich die Bedingung gestellt wird, dass die Lösung des Temperaturfeldes über die Elemente und an ihren Kopplungsknoten stetig sein muss. Das erfüllt die aufgeführte C_0 -Bedingung aus Kapitel 4.1 und damit können die vorangegangenen Herleitungen zu den Ansatz- und Formfunk-

tionen der Elemente sicher angewendet werden. Infolge der Stetigkeitsbedingung werden die Terme mit räumlichen Ableitungen zweiter Ordnung mittels partieller Integration auf eine erste Ordnung reduziert. Gleichung (4.60) führt zwei räumliche Ableitungen zweiter Ordnung mit, welche im Advektions-Diffusionsterm $\tau(\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 T$ und im Diffusionsterm $\alpha \nabla^2 T$ vorliegen. Es soll hier die Annahme einer isotropen Wärmeleitfähigkeit sowie isotropen Relaxationszeit genügen und damit haben die Diffusionsterme, durch Überlegung und in Anlehnung an die Rechenoperationen mit dem Gauss-Green-Theorem nach Donea & Huerta [17, S.24, S.109], folgende Formen:

$$\int_{\Omega} w \tau (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 T d\Omega = - \int_{\Omega} \tau (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \mathbf{v} \cdot \nabla T) d\Omega + \int_{\Gamma} \tau ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) w, \mathbf{v} \cdot \nabla T) d\Gamma \quad (4.62)$$

und

$$- \int_{\Omega} w \alpha \nabla^2 T d\Omega = \int_{\Omega} \alpha \nabla w \cdot \nabla T d\Omega - \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} w \lambda (\mathbf{n} \cdot \nabla T) d\Gamma. \quad (4.63)$$

Die Gewichtungsfunktion w wurde um eine räumliche Ableitungsordnung erhöht und die Integrationsterme erhalten Normalenvektoren \mathbf{n} auf den Rand Γ . Substitution der partiellen Integrationen in Gleichung (4.61) führt auf:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w (\tau T_{tt} + 2\tau (\mathbf{v} \cdot \nabla T)_t + T_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T) d\Omega - \int_{\Omega} \tau (\mathbf{v} \cdot \nabla w, \mathbf{v} \cdot \nabla T) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \alpha \nabla w \cdot \nabla T d\Omega = - \int_{\Gamma} \tau ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) w, \mathbf{v} \cdot \nabla T) d\Gamma + \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} w \underbrace{\lambda (\mathbf{n} \cdot \nabla T)}_{\text{RB}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Gleichung (4.64) ist die schwache Form der Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo, da ihre Differenzierbarkeitsanforderung geringer ist als die der ursprünglichen partiellen Gleichung. Die Gleichung führt zwei Randintegrationen auf, worin der erste Term Flüsse über die Elementränder beschreibt und der zweite Term die Randbedingungen RB der globalen Domäne festlegt.

4.4.2 Randbedingungen

Eine Besonderheit der Methode der gewichteten Residuen ist die Einführung des Zusatzterms für die Randbedingungen. Er muss eindeutig definiert sein, um das Wärmetransportproblem zu schließen. Hierzu besteht umfassende Literatur und es werden die drei bekanntesten Randbedingungen nach Polifke [58, Kap. 2.3] aufgeführt:

1. Art: Dirichlet

Die Randbedingung der ersten Art wird durch die Vorgabe der Wandtemperatur T_W an den Knoten der Rändern Γ als Bedingung nach Dirichlet bezeichnet:

$$T|_{\Gamma} = T_W. \quad (4.65)$$

Hier ist die Temperatur T_W am Knoten bekannt, wodurch sich die Anzahl der zu berechnenden Elementknotentemperaturen um jeweils die Anzahl der vorgegebenen

Dirichlet-Randbedingungen reduziert.

2. Art: von Neumann

Die Randbedingung zweiter Art ist die Bedingung nach von Neumann. Sie wird durch einen Wandwärmeflussvektor \dot{q}_W an den Rändern Γ in das Gebiet Ω festgelegt und damit ist auch der Gradient nach Fourier gegeben:

$$\lambda(\mathbf{n} \cdot \nabla T)|_{\Gamma} = \mathbf{n} \dot{q}_W. \quad (4.66)$$

Für das numerische Integral über den Rand bedeutet das mit der Jacobischen J_{ii} :

$$\int_{\Gamma} w \lambda(\mathbf{n} \cdot \nabla T) d\Gamma = \mathbf{n} \int_{\Gamma} w \dot{q}_W J_{ii} d\Gamma. \quad (4.67)$$

3. Art: Robinson

Die Randbedingung dritter Art ist die Bedingung nach Robinson. Hierin wird eine gemischte Randbedingung beschrieben, worin der Wärmeflussvektor \dot{q}_W in die Wand durch konvektive Bedingungen \dot{q}_h ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \dot{q}_W - \dot{q}_h &= 0 \rightarrow \dot{q}_W = \dot{q}_h, \\ \lambda(\mathbf{n} \cdot \nabla T)|_{\Gamma} &= h(T_{\infty} - T_W). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Eine weitere Darstellungsform ist:

$$h(T_{\infty} - T_W) = -hT_W + hT_{\infty}. \quad (4.69)$$

Wird die Robinson-Randbedingung in die Integration eingearbeitet, so ergibt sich:

$$\int_{\Gamma} w \lambda(\mathbf{n} \cdot \nabla T) d\Gamma = \int_{\Gamma} w h(T_{\infty}^e - T_W) J_{ii} d\Gamma. \quad (4.70)$$

4.4.3 Galerkin-Methode

Das Lösen von Gleichung (4.64) wird durch die FEM nach Galerkin umgesetzt. Zunächst wird die Gewichtungsfunktion w durch die Formfunktion N ersetzt, da diese gemäß Gleichung (4.3) die Kontinuität gewährleistet und somit auch die Gewichtungen im System richtig verteilt werden. Nach Huebner, Dewhirst & Smith [35, Kap. 4.2] ist

$$w_j = N_j \quad (4.71)$$

und im System wird die Gewichtung erfüllt durch:

$$\sum_{j=1}^n w_j = \sum_{j=1}^n N_j = 1. \quad (4.72)$$

Die Matrizen und Vektoren werden über das Einsetzen der Temperaturen aus Gleichungen (4.12) bis (4.15) erhalten. Die geordnete Galerkin-Form der Wärmetransportgleichung (4.64) nach der Temperatur T ist:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega}_{\mathbf{M}} (\tau \ddot{T} + \dot{T}) + \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{J}^{e-1} \mathbf{B}^T)_{\alpha} (\mathbf{J}^{e-1} \mathbf{B}) d\Omega}_{\mathbf{K}_{\alpha}} T \\
& + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{e-1} \mathbf{B}) d\Omega}_{\mathbf{K}_v} (2\tau \dot{T} + T) - \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{e-1} \mathbf{B}^T), \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{e-1} \mathbf{B})) d\Omega}_{\mathbf{K}_D} \tau T \\
& + \underbrace{\int_{\Gamma} ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{N}^T, \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{e-1} \mathbf{B})) d\Gamma}_{k_D} \tau T = \underbrace{\frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T (\text{RB}) d\Gamma}_{\mathbf{f}}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

In Gleichung (4.73) sind \mathbf{M} die Wärmekapazitätsmatrix, \mathbf{K}_{α} die Wärmediffusionsmatrix, \mathbf{K}_v die Wärmeadvektionsmatrix, \mathbf{K}_D die Matrix und k_D der Vektor zur Advektionsdiffusion. RB steht im allgemeinen für die Randbedingung und wird durch den Kraftvektor \mathbf{f} ersetzt. Der Kraftvektor ist im Einzelnen:

Der Wärmeflussvektor in das Gebiet mit

$$\mathbf{f}_{\dot{q}_W} = \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \dot{q}_W d\Gamma. \tag{4.74}$$

Der Wärmeübergang ist

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T h (T_{\infty} - T_W) d\Gamma \tag{4.75}$$

und kann in den Wärmeübergangsvektor

$$\mathbf{f}_{\dot{q}_h} = \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T h T_{\infty} d\Gamma \tag{4.76}$$

sowie durch das Nutzen des ersten Ausdrucks in Gleichung (4.8) und anschließendem Ausklammern der Wandtemperatur T_W als die Wärmeübergangsmatrix definiert werden:

$$\mathbf{K}_h = \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T h \mathbf{N} J d\Gamma. \tag{4.77}$$

In einem weiteren Schritt werden die Matrizen und Vektoren gleicher Art durch die nachfolgenden Kombinationen zusammengestellt. Die Steifigkeitsmatrix ist:

$$\mathbf{K}_{\alpha,h} = \mathbf{K}_{\alpha} + \mathbf{K}_h. \tag{4.78}$$

Für den Kraftvektor folgt:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\dot{q}_W} + \mathbf{f}_{\dot{q}_h}. \tag{4.79}$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) der hyperbolischen Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo aus Kapitel 2.1.4 ist:

$$\mathbf{M}(\tau\ddot{T} + \dot{T}) + \mathbf{K}_v(2\tau\dot{T} + T) + \mathbf{K}_{\alpha,h}T - (\mathbf{K}_D - \mathbf{k}_D)\tau T = \mathbf{f}. \quad (4.80)$$

Ergänzend führt die Reduktion von Gleichung (4.80) in die ODE-Form für die Transportgleichung nach Fourier in Kapitel 2.1.2 zu

$$\mathbf{M}\dot{T} + \mathbf{K}_vT + \mathbf{K}_{\alpha,h}T = \mathbf{f} \quad (4.81)$$

und nach Cattaneo-Vernotte in Kapitel 2.1.3 zu

$$\mathbf{M}(\tau\ddot{T} + \dot{T}) + \mathbf{K}_v(\tau\dot{T} + T) + \mathbf{K}_{\alpha,h}T = \mathbf{f}. \quad (4.82)$$

4.5 Numerische Diffusion

Räumliche und zeitliche Oszillationen sind im Nahfeld großer Gradienten häufig stark ausgeprägt und führen zu unphysikalischen Ergebnissen. Besonders bei numerischen Näherungslösungen von advektiven-konvektiven Problemen entstehen störende Oszillationen und betreffen damit die Wärmetransportgleichungen aus Kapitel 2.1. Um diesen Störungen entgegenzuwirken behilft man sich mit künstlicher Stabilisierung in Form von numerischer Diffusion. Die Diffusionsmechanismen der konzentrierten Wärmekapazitätsmatrix und der Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Methode (SUPG) sind weit verbreitet und für die parabolische Gleichung nach Fourier ausreichend. Für die hyperbolischen Gleichungen mit Hinblick auf große thermische Mach-Zahlen Ma_{th} sind die genannten Methoden ungenügend. Aus diesem Grund sind komplexere Vorgehen notwendig, die sich adaptiv auf örtliche Störungen einstellen können. Diese Bedingung erfüllt die entwickelte orientierte Relaxationszeit nach Feike & Mundt [25].

4.5.1 Konzentrierte Wärmekapazitätsmatrix

Die konzentrierte Wärmekapazitätsmatrix bewirkt eine zusätzliche numerische Diffusion und stabilisiert die Berechnung. Die Matrix wird mithilfe der Summenmethode oder einer diagonalen Skalierung nach ihrer Spur auf Hauptdiagonaleinträge reduziert. Die Methoden sind in Zienkiewicz & Taylor [86, Kap. 17.2.4] vorgestellt und setzen voraus, dass die Erhaltung der thermischen Masse in der Domäne in Form der diagonalen Einträge \tilde{M}_{ii} erfüllt sein muss:

$$\sum_i \tilde{M}_{ii} = \int_{\Gamma} \rho c d\Omega. \quad (4.83)$$

Bei der Summenmethode werden alle Werte der j -ten Spalte in der i -ten Zeile summiert und auf die Hauptdiagonale ii geschrieben:

$$\tilde{M}_{ii} = \sum_j M_{ij}. \quad (4.84)$$

Diese Methode ist nur für lineare Elemente empfohlen und führt bei höherer Ordnung zu negativen Masseneinträgen und damit zu unphysikalischen Werten. Für lineare und quadratische Elemente ist die diagonale Skalierung mit dem Faktor a der korrekte Ansatz, sodass Gleichung (4.83) erfüllt wird:

$$\tilde{M}_{ii} = aM_{ii}. \quad (4.85)$$

Eine Möglichkeit, den Skalierungsfaktor a zu berechnen, besteht darin, das Verhältnis der Summe aller Matrixelemente zur Spur der Matrix zu verwenden:

$$a = \frac{\sum_j M_{ij}}{\text{Spur}(\mathbf{M})}. \quad (4.86)$$

Gültig für beide Methoden ist, dass alle Nebeneinträge ij der Matrix zu Null gesetzt werden müssen, um die Massenerhaltung sicherzustellen.

4.5.2 Stream-Line-Upwind-Petrov-Galerkin-Methode

Numerisch stabilisierende Methoden für advective-konvektive Probleme sind in Donea & Huerta [17, Kap. 2.4] gegeben. Hier wird unter anderem die gängigste Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Methode aufgeführt, die einen Stabilitätsterm einführt

$$\int_{\Omega} P(w)\gamma R d\Omega \quad (4.87)$$

und der zu Gleichung (4.64) addiert wird. P ist ein Störterm und abhängig von der Gewichtungsfunktion w . Der γ -Parameter ist eine Regelgröße und hat einen steuerbaren Einfluss. Der Stabilitätsterm fügt sich in Gleichung (4.88) durch Addition ein [23]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w(\tau T_{tt} + 2\tau(\mathbf{v} \cdot \nabla T)_t + T_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T) d\Omega - \int_{\Omega} \tau(\mathbf{v} \cdot \nabla w, \mathbf{v} \cdot \nabla T) d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \nabla w \cdot \nabla T d\Omega \\ + \underbrace{\int_{\Omega} P(w)\gamma R d\Omega}_{\text{Stabilitätsterm}} = - \int_{\Gamma} \tau((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})w, \mathbf{v} \cdot \nabla T) d\Gamma + \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} w \lambda(\mathbf{n} \cdot \nabla T) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Der Störterm $P(w)$ ist nach Bochev, Gunzburger & Shadid [6] mit $w = N_j$ gegeben. Da die Formfunktionen N_j unabhängig von den zeitlichen Änderungen sind, reduziert sich der Störterm $P(N_j)$ um die partielle Ableitung ∂_t auf die räumliche Ableitung:

$$P(N_j) = \frac{DN_j}{Dt} = \frac{\partial N_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla N_j = \mathbf{v} B_j. \quad (4.89)$$

Bei advektiven dominanten Problemen kann nach Huang & Usmani [34, Kap. 7.2.1] der Diffusionsterm vernachlässigt werden, da dieser unbedeutend klein wird. Mit diesen Vereinfachungen nimmt der Stabilitätsterm folgende Form an, mit dem Residuum aus Gleichung (4.60):

$$\int_{\Omega} P(N_j) \gamma R d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla N_j) \gamma (\tau T_{tt} + 2\tau (\mathbf{v} \cdot \nabla T)_t + T_t + \tau (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 T + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T) d\Omega. \quad (4.90)$$

Der Stabilisierungsparameter γ sollte so gewählt werden, dass die numerische Näherung die Lösung am Knoten exakt abbildet. Um den bestmöglichen γ -Parameter zu finden, werden in der Praxis die Lösungen einfacher 1-D-Probleme analytisch hergeleitet und mit den numerischen Lösungen verglichen. Mit anschließender Fehleranalyse wird der γ -Wert iterativ bestimmt. Für die stationäre Lösung einer Advektions-Diffusions-Gleichung geben Donea & Huerta [17, S. 263], mit der künstliche Diffusion $\bar{\alpha}$,

$$\gamma = \frac{\bar{\alpha}}{|\mathbf{v}|^2} \quad (4.91)$$

an und für die instationäre Lösung:

$$\gamma = \frac{\bar{\alpha}}{2|\mathbf{v}|^2} \frac{1}{\Theta}. \quad (4.92)$$

Bei $\Theta = 1/2$ reduziert sich die Gleichung auf (4.91). Die künstliche Diffusion $\bar{\alpha}$ ist:

$$\bar{\alpha} = \beta \frac{v L^e}{2} = \beta \alpha \text{Pe}, \quad \text{mit } \beta = \coth\left(\text{Pe} - \frac{1}{\text{Pe}}\right) \quad \text{und} \quad \text{Pe} = \frac{v L^e}{2\alpha}. \quad (4.93)$$

Zusätzlich wird die künstliche Diffusion $\bar{\alpha}$ über die Geschwindigkeit v anisotrop gestaltet, was auch als inkonsistente Methode bezeichnet wird. Das soll eine nicht notwendige künstliche Diffusion in unproblematische Richtungen vermeiden und die Lösung dadurch nicht beeinflussen [66, Kap. 6.8 & 6.9]. Weitere γ -Parameter sind von Bouchev [6] zur Advektions-Diffusions-Gleichung, von Shakib [68] für instationäre Lösungen der Advektions-Diffusions-Reaktions-Gleichung und nach Soulaïmani & Fortin [70] für die Navier-Stokes-Gleichung gegeben.

Für das weitere Vorgehen wird der Stabilitätsterm in Gleichung (4.87) durch die partielle Integration wie in Kapitel 4.4.3 ausformuliert. Zudem werden die Gewichtungen w in Gleichung (4.88) nach der Methode von Galerkin mit $w = N_j$ ersetzt. Die Wärmetrans-

portgleichung nach Christov-Cattaneo in der SUPG-Darstellung ist:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{N}^T + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B})^T \gamma) \mathbf{N} d\Omega}_{\mathbf{M}_{\text{SUPG}}} (\tau \ddot{T} + \dot{T}) \\
& + \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B})^T \alpha (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B}) d\Omega}_{\mathbf{K}_{\alpha}} T \\
& + \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{N}^T + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B})^T \gamma) \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B}) d\Omega}_{\mathbf{K}_{\mathbf{v}, \text{SUPG}}} (2\tau \dot{T} + T) \\
& - \underbrace{\int_{\Omega} (1 + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B})^T \gamma) (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B})^T, \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B})) d\Omega}_{\mathbf{K}_{\text{D}, \text{SUPG}}} \tau T \\
& + \underbrace{\int_{\Gamma} ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{N}^T + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B})^T \gamma), \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B})) d\Gamma}_{\mathbf{k}_{\text{D}, \text{SUPG}}} \tau T = \underbrace{\frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T (\text{RB}) d\Gamma}_{\mathbf{f}}.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Wie zur Galerkin-FEM müssen die Randbedingungen beschrieben werden. Der Wärmeflussvektor der SUPG ergibt sich zu:

$$\mathbf{f}_{\dot{q}_{\text{W}, \text{SUPG}}} = \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} (\mathbf{N}^T + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J}^{\text{e-1}} \mathbf{B})^T \gamma) \dot{q}_{\text{W}} d\Gamma. \tag{4.95}$$

Der Wärmeübergang ist der FEM nach Galerkin gleich, da eine partielle Integration aufgrund des vernachlässigten Diffusionsterms ausbleibt:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T h (T_{\infty} - T_{\text{W}}) d\Gamma. \tag{4.96}$$

Der Ausdruck zum Wärmeübergang kann in den Wärmeübergangsvektor

$$\mathbf{f}_{\dot{q}_{\text{h}, \text{SUPG}}} = \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T h T_{\infty} d\Gamma \tag{4.97}$$

und in die Wärmeübergangsmatrix

$$\mathbf{K}_{\text{h}, \text{SUPG}} = \frac{1}{\rho c} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T h \mathbf{N} J d\Gamma \tag{4.98}$$

aufgeteilt werden. Die Kombination identischer Matrizenarten überführen das Vorgegangene in eine einfachere Darstellungsform, wie die Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_{\lambda, \text{h}, \text{SUPG}}^{\text{e}} = \mathbf{K}_{\lambda, \text{SUPG}}^{\text{e}} + \mathbf{K}_{\text{h}, \text{SUPG}}^{\text{e}}. \tag{4.99}$$

Die Kraftvektoren an den Rändern der Domäne werden zu:

$$\mathbf{f}_{\text{SUPG}}^{\text{e}} = \mathbf{f}_{\dot{q}_{\text{W}, \text{SUPG}}}^{\text{e}} + \mathbf{f}_{\dot{q}_{\text{h}, \text{SUPG}}}^{\text{e}}. \tag{4.100}$$

Die Matrixdarstellung nach der SUPG-Formulierung ist für die hyperbolische Wärmetransportgleichung (2.11) nach Christov:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{SUPG}}(\tau\ddot{T} + \dot{T}) + \mathbf{K}_{v,\text{SUPG}}(2\tau\dot{T} + T) + \mathbf{K}_{\alpha,h,\text{SUPG}}T \\ - (\mathbf{K}_{D,\text{SUPG}} - \mathbf{k}_{D,\text{SUPG}})\tau T = \mathbf{f}_{\text{SUPG}}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Dieses System gleicht der verallgemeinerten Galerkin-FEM-Formulierung in Gleichung (4.80). Damit ist es ein leichtes und identisches Vorgehen, die Gleichungssysteme nach Fourier und Cattaneo-Vernotte in die SUPG-Methode umzuwandeln. Die parabolische Wärmetransportgleichung (2.4) ist mit den Stabilisierungsparametern:

$$\mathbf{M}_{\text{SUPG}}\dot{T} + \mathbf{K}_{v,\text{SUPG}}T + \mathbf{K}_{\alpha,h,\text{SUPG}}T = \mathbf{f}_{\text{SUPG}}. \quad (4.102)$$

Für die Cattaneo-Vernotte-Gleichung (2.7) folgt:

$$\mathbf{M}_{\text{SUPG}}(\tau\ddot{T} + \dot{T}) + \mathbf{K}_{v,\text{SUPG}}(\tau\dot{T} + T) + \mathbf{K}_{\alpha,h,\text{SUPG}}T = \mathbf{f}_{\text{SUPG}}. \quad (4.103)$$

Die Stream-Line-Upwind-Petrov-Galerkin-Methode hat durch die Abhängigkeit der Péclet-Zahl die Eigenschaft, dass bei höherwertiger räumlicher Auflösung und damit bei kleiner werdenden Elementen ihr Einfluss schwindet. Im Verlauf der Untersuchungen war das nur teilweise für die Wellengleichungen zielführend bei allgegenwärtigen großen Gradienten an der Wellenfront. Daher wurde ein adaptiver Stabilitätsmechanismen nach der orientieren Relaxationszeit entwickelt.

4.5.3 Orientierte Relaxationszeit

Die numerischen Rahmenbedingungen, die thermische Stoßfront ordentlich aufzulösen, fordern die Entwicklung einer adaptiven numerischen Stabilisierung. Aufgerollt in numerischen Untersuchungen nach Feike & Mundt [25], führt Gleichung (4.73) Temperaturschwinger auf, welche numerisch und mathematisch aufgrund des Wellencharakters korrekt sein mögen, aber physikalisch fragwürdig sind. Da der Wellencharakter durch die hyperbolische Form und über die Relaxationszeit τ bestimmt ist, ist sie eine mögliche Stellschraube, um eine genügende Stabilität der numerischen Berechnung zu bewirken. Der gewählte Ansatz ist, an Stellen großer räumlicher und zeitlicher Gradienten die Lösung zu glätten. Die Umsetzung erfolgt durch die Oriented-Relaxation-Time (ORT) mit einer orientierten Relaxationszeit τ_{ORT} zur Stabilisierung nach Feike & Mundt [25]. Diese numerische orientierte Relaxationszeit τ_{ORT} ist über die materialabhängige Relaxationszeit τ und dann zur Potenz mit dem Maximum des orientierten Stabilitätsparameters nach dem Ort μ_s oder der Zeit μ_t definiert:

$$\tau_{\text{ORT}} = \tau^{\max(\mu_s, \mu_t)}. \quad (4.104)$$

Die orientierten Stabilitätsparameter stellen dabei eine adaptive Größe zu den räumlichen Gradienten im Nahfeld und zeitlichen Gradienten im Element dar. Der räumliche Para-

meter μ_s ist ein normierter Mittelwert, der durch die zeitlichen Nachbarelementwerte T^e , der Anzahl n und dem Hauptelement $T^{e=1}$ gebildet wird:

$$\mu_s = \left| \frac{\sum_{e=2}^n T^e - nT^1}{\sum_{e=2}^n T^e + nT^1} \right| + 1. \quad (4.105)$$

Bezüglich des zeitlichen Parameters μ_t ist nur das Hauptelement von Interesse. Hier wird die Elementtemperatur zum aktuellen Zeitpunkt $T_{t=3}$ gegenüber den letzten $T_{t=2}$ und vorletzten $T_{t=1}$ Berechnungspunkt gemittelt:

$$\mu_t = \left| \frac{T_1 + T_2 - 2T_3}{T_1 + T_2 + 2T_3} \right| + 1. \quad (4.106)$$

Die Vorteile dieser Definitionen der Parameter μ und Schreibweise von τ_{ORT} in Gleichung (4.104) stellen sich wie folgt dar [25]:

1. Sie sind lokal,
2. sie haben bei kleinen räumlichen und zeitlichen Änderungen einen geringen Einfluss auf die materialabhängige Relaxationszeit τ
3. und bei großen Instabilitäten, wie sie an der thermischen Stoßfront vorliegen, wird τ nichtlinear angepasst.

Darüber hinaus ist ein numerisch räumlich abhängiger Schalter integriert, der die orientierte Relaxationszeit τ_{ORT} für eine vordefinierte Fallunterscheidung aktiviert. Es wird unterschieden, ob ein Temperaturgradient ∇T^e im Hauptelement vorliegt und ob er im Vergleich zu den benachbarten Elementen das entgegengesetzte Vorzeichen mit sign_{∇_x} aufweist. Das Vorzeichen wird durch Normierung des Gradienten jedes Elements und auf das Hauptelement ausgewertet:

$$\text{sign}_{\nabla_x} = \left(\sum_{e=2}^n \frac{\nabla_x T^e}{|\nabla_x T^e|} \right) - n \frac{\nabla_x T^1}{|\nabla_x T^1|}. \quad (4.107)$$

Trifft das zu, dann wird im zeitlichen Hauptelement die numerische Diffusion durch die ORT-Methode verwendet, ansonsten die natürliche materialabhängige Relaxationszeit τ belassen:

$$\tau_{\text{ORT}} = \begin{cases} \tau^{\max(\mu_s, \mu_t)}, & \text{sign}_{\nabla_x} \neq 0 \\ \tau, & \text{sign}_{\nabla_x} = 0 \end{cases}. \quad (4.108)$$

Abbildung 4.4 veranschaulicht die zeitliche Berechnung der Parameter μ_s und μ_t für das Hauptelement $e = 1$. Das Element befindet sich in einem globalen diskretisierten Bereich, wird von vier Nachbarelementen umgeben und von einer thermischen Welle beeinflusst, die sich in der x_1 -Richtung ausbreitet. Am gemeinsamen Elementrand von $e = 1$ mit T^1 und $e = 3$ mit T^3 liegt ein Temperaturunterschwinger vor. Die Initialberechnung für die ORT-Methode ist im rechten oberen Rand gegeben, in der zunächst die Elementtemperatur T^e nach Gleichung (4.5) und Gradienten ∇T^e nach Gleichung (4.8) ermittelt werden müssen.

Um die ORT über den numerischen Schalter zu aktivieren, muss das normierte Vorzeichen der Gradienten in den Elementen $e = [1, \dots, 5]$ bestimmt werden. Beispielsweise ergibt sich für Element 3 ein negatives Vorzeichen in x_1 durch $\nabla_{x_1} T^3 / |\nabla_{x_1} T^3| = \nabla_{x_1}^n T^3 = -1$. Weiterführend ist die Summe aller Nachbarelemente und Hauptelement $sign \nabla_{x_1} = -6 \neq 0$ und damit wird auf Element 1 die ORT-Methode angewendet. Abhängig vom Maximalwert der Stabilitätsparameter wird μ_s oder μ_t für die Berechnung der elementspezifischen Relaxationszeit τ_{ORT} genutzt. Dieser Vorgang wird für jedes Element einzeln im gesamten diskretisierten Bereich zu jedem Zeitschritt durchgeführt und damit lokale τ_{ORT} ermittelt. Einhergehend ist mit diese Methode ein zeitintensiver Berechnungsaufwand, der durch eine parallelisierte Berechnung deutlich reduziert werden kann.

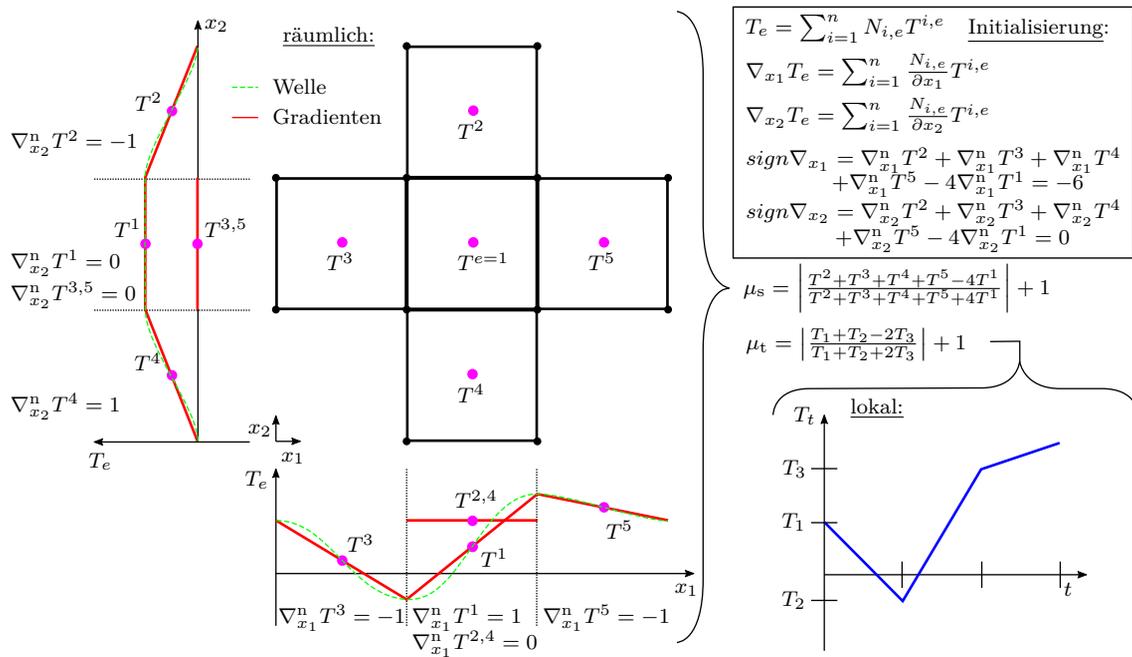


Abbildung 4.4: Berechnung der Stabilitätsparameter; **Box:** Initiale Berechnungen und Beispiel für die Aktivierung $sign \nabla_x \neq 0$ für gegebene räumliche Gradienten, **links:** Vorzeichen der normierten räumlichen Gradienten für μ_s und **rechts:** zeitliche μ_t Parameter [25].

5 Zeitintegration

Die stationären und instationären Zustände eines Wärmetransportproblems sind über das Gleichungssystem $\mathbf{A}T = \mathbf{b}$ berechenbar. Für stationäre Lösungen von T genügt die effektive Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} , bestehend aus den Matrizen $\mathbf{K}_{\alpha,h,D,v}$ und \mathbf{k}_D und dem effektiven Kraftvektor \mathbf{b} , der sich aus den Randbedingungen in \mathbf{f} ergibt, bzw. unter der Vernachlässigung von \mathbf{M} . Für instationäre Ergebnisse ist eine direkte Zeitintegration nötig, wodurch die Komplexität von und die Anforderung an die Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} steigt, die Kapazitätsmatrix \mathbf{M} und zeitliche Ableitungen \dot{T} sowie \ddot{T} zu berücksichtigen. Im Kontext der thermischen Welle ist die instationäre Lösungsfindung unausweichlich und kann durch eine Umformung der ODE in Gleichung (4.80) nach der Temperatur wie folgt umgestellt werden [23]:

$$\tau\mathbf{M}\ddot{T} + (\mathbf{M} + 2\tau\mathbf{K}_v)\dot{T} + (\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{\alpha,h} - \tau\mathbf{K}_D + \tau\mathbf{k}_D)T = \mathbf{f}. \quad (5.1)$$

Aus dieser Umformung ergeben sich die bekannten Strukturen einer Bewegungsgleichung eines Festkörpers aus der Kontinuumsmechanik. Die Kombination neuer Terme, wie \mathbf{M}^* , \mathbf{C}^* , \mathbf{K}^* und \mathbf{R}^* als Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen sowie als Kraftvektor, gestalten das ODE-Gleichungssystem kompakter und nützlicher [23]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^*\ddot{T} + \mathbf{C}^*\dot{T} + \mathbf{K}^*T &= \mathbf{R}^* \quad \text{mit} \\ \mathbf{M}^* &:= \tau\mathbf{M}, \quad \mathbf{C}^* := \mathbf{M} + 2\tau\mathbf{K}_v, \quad \mathbf{K}^* := \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{\alpha,h} - \tau\mathbf{K}_D + \tau\mathbf{k}_D, \quad \text{and } \mathbf{R}^* := \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Unter Zuhilfenahme von Bathe & Wilson [4, Kap. 8] und Zhou, Wen & Cai [85, Kap. 7] wird Gleichung (5.2) mit der Θ -, Houbolt-, Linearen-Beschleunigungs-, Wilson- Θ - und Newmark-Methode gelöst. Dafür wird die Ausgangsgleichung (5.2) in die vorgegebenen Formen nach den Integrationsmethoden vorbereitet und für das spätere Einsetzen in das Gleichungssystem $\mathbf{A}T = \mathbf{b}$ umgeschrieben. Hinsichtlich der numerischen Berechnung werden die Lösungsverfahren tabellarisch zu den Zeitintegrationen ergänzt.

5.1 Θ -Methode

Die Θ -Methode ermöglicht explizite und implizite Berechnungsschemata mit stabilisierenden Eigenschaften. Hierzu nennen Taler & Oclon [71] die Θ -Werte und die Eigenschaften der sich ergebenden Zeitintegrationen:

- $\Theta = 0$: Euler explizit,
- $\Theta = \frac{1}{2}$: Crank-Nicolson, semi-implizit,
- $\Theta = \frac{2}{3}$: Galerkin, semi-implizit,
- $\Theta = 1$: Euler implizit.

Um die Θ -Methode auf die ODE (5.1) anzuwenden, können die ersten Schritte mit Taler & Oclon [71] und angelehnt an Huebner, Dewhirst & Smith [35, Kap. 7.5.3] gezeigt werden. Denn sie führen die Näherung zur Berechnung der Temperaturableitung über die Zeit der ersten Ordnung auf. Diese sind

$$T_{m+1} = T_m + [(1 - \theta)\dot{T}_m + \theta\dot{T}_{m+1}]\Delta t \quad (5.3)$$

bzw.

$$T_m = T_{m-1} + [(1 - \theta)\dot{T}_{m-1} + \theta\dot{T}_m]\Delta t. \quad (5.4)$$

Hinsichtlich der zweiten Ableitung \ddot{T} in der Bewegungsgleichung (5.2) wird einfachheitshalber (5.3) um eine Ordnung erhöht:

$$\dot{T}_{m+1} = \dot{T}_m + [(1 - \theta)\ddot{T}_m + \theta\ddot{T}_{m+1}]\Delta t. \quad (5.5)$$

Dann wird Gleichung (5.2) zu den Zeitpunkten m und $m + 1$ ausgedrückt:

$$\mathbf{M}^*\ddot{T}_m + \mathbf{C}^*\dot{T}_m + \mathbf{K}^*T_m = \mathbf{R}^*_m, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{M}^*\ddot{T}_{m+1} + \mathbf{C}^*\dot{T}_{m+1} + \mathbf{K}^*T_{m+1} = \mathbf{R}^*_{m+1}. \quad (5.7)$$

Die Erweiterung von (5.6) mit $(1 - \Theta)$ und von (5.7) mit Θ , führt auf:

$$(1 - \Theta)(\mathbf{M}^*\ddot{T}_m + \mathbf{C}^*\dot{T}_m + \mathbf{K}^*T_m) = (1 - \Theta)\mathbf{R}^*_m, \quad (5.8)$$

$$\Theta(\mathbf{M}^*\ddot{T}_{m+1} + \mathbf{C}^*\dot{T}_{m+1} + \mathbf{K}^*T_{m+1}) = \Theta\mathbf{R}^*_{m+1}. \quad (5.9)$$

Diese Gleichungen werden addiert und ergeben:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^*((1 - \Theta)\ddot{T}_m + \Theta\ddot{T}_{m+1}) + \mathbf{C}^*((1 - \Theta)\dot{T}_m + \Theta\dot{T}_{m+1}) \\ & + \mathbf{K}^*((1 - \Theta)T_m + \Theta T_{m+1}) = (1 - \Theta)\mathbf{R}^*_m + \Theta\mathbf{R}^*_{m+1}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Tabelle 5.1: Lösungsalgorithmus zur Θ -Methode.**A. Initialisiere Berechnung**

1. Generiere Steifigkeitsmatrix: $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{\alpha,h} - \tau\mathbf{K}_D + \tau\mathbf{k}_D$, Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}^* = \mathbf{M} + 2\tau\mathbf{K}_v$ und Massenmatrix $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}\tau$,
2. initialisiere T_0, \dot{T}_0 und \ddot{T}_0 ,
3. berechne Integrationskonstanten $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{1}{\Delta t}$ und $a_2 = 2a_0$,
4. bestimme $T_{-1} = T_0 - \Delta t\dot{T}_0 + a_3\ddot{T}_0$,
5. generiere effektive Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A} = a_0\mathbf{M}^* + a_1\mathbf{C}^* + \Theta\mathbf{K}^*$,
6. konditioniere $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ vor.

B. Löse Gleichungssystem für $t + \Delta t$

1. Erstelle effektiven Kraftvektor
 $\mathbf{b} = \Theta\mathbf{R}_{m+1}^* + (1 - \Theta)\mathbf{R}_m^* + \mathbf{M}^*(-a_0T_{m-1} + a_2T_m) + \mathbf{C}^*a_1T_m - (1 - \Theta)\mathbf{K}^*T_m$,
2. löse Gleichung $\mathbf{L}\mathbf{U}T_{m+1} = \mathbf{b}$,
3. berechne ggf. numerische Stabilitätsgrößen und wdh. A.1., A.5. und A.6..

Einsetzen der Gleichungen (5.3) bis (5.5) ist dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* \left(\frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta t^2} \right) + \mathbf{C}^* \left(\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta t} \right) \\ + \mathbf{K}^* ((1 - \Theta)T_m + \Theta T_{m+1}) = \Theta\mathbf{R}_{m+1}^* + (1 - \Theta)\mathbf{R}_m^*. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Darstellungsform eines linearen Gleichungssystem kann über das Umstellen erreicht werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}^* + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}^* + \Theta\mathbf{K}^* \right) T_{m+1} = \left(\frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}^* + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}^* - (1 - \Theta)\mathbf{K}^* \right) T_m \\ - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}^*T_{m-1} + \Theta\mathbf{R}_{m+1}^* + (1 - \Theta)\mathbf{R}_m^* \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die Definition der Terme links- und rechtsseitig vom Gleichheitszeichen, ergibt die effektive Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} und den effektiven Kraftvektor \mathbf{b} , welche das lineare Gleichungssystem bilden und das dann anschließend numerisch gelöst wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = a_0\mathbf{M}^* + a_1\mathbf{C}^* + \Theta\mathbf{K}^* \quad \text{und} \\ \mathbf{b} = \Theta\mathbf{R}_{m+1}^* + (1 - \Theta)\mathbf{R}_m^* + \mathbf{M}^*(-a_0T_{m-1} + a_2T_m + \mathbf{C}^*a_1T_m) - (1 - \Theta)\mathbf{K}^*T_m \quad (5.13) \\ \text{mit } a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}, a_1 = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{und } a_2 = 2a_0. \end{aligned}$$

Hier muss T_{m-1} für die Startbedingung bekannt sein und kann über Gleichung (5.4) berechnet werden. Voraussetzung ist jedoch, dass auch \dot{T}_m und \dot{T}_{m-1} vorliegen. Bei der Initialisierung ist das nicht der Fall und daher wird $T_{m-1} = T_0$ gewählt. Der numerische Lösungsalgorithmus lehnt sich an Bathe [4, Kap. 8.2.1] an und ist in Tabelle 5.1 veranschaulicht.

5.2 Houbolt-Methode

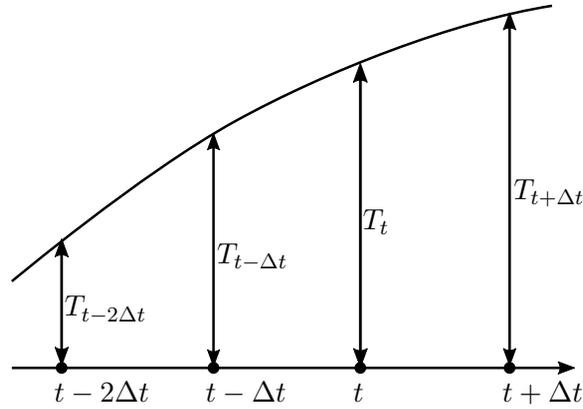


Abbildung 5.1: Annahme der Houbolt-Methode [67].

Die Houbolt-Methode basiert auf der zentralen Differenzen-Methode und die Feldgröße T wird über vier Stützstellen genähert (siehe Abbildung 5.1). Die Methode ist implizit, da die Steifigkeit \mathbf{K}^* des Systems im Zeitschritt $t + \Delta t$ berücksichtigt wird. Folglich wird das Gleichgewicht in $t + \Delta t$ angenommen und widerspricht der vorliegenden Annahme des Nichtgleichgewichts zum instationären Anfangszeitraum. Die Methode ist unabhängig vom Zeitschritt und gibt bedingungslose Stabilität vor. Die Houbolt-Methode nach Bathe [4, Kap. 8.2.2] ist:

$$\mathbf{A} = a_0 \mathbf{M}^* + a_1 \mathbf{C}^* + \mathbf{K}^* \quad \text{und}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_{m+1}^* + \mathbf{M}^*(a_2 T_m + a_4 T_{m-1} + a_6 T_{m-2}) + \mathbf{C}^*(a_3 T_m + a_5 T_{m-1} + a_7 T_{m-2}) \quad (5.14)$$

mit $a_0 = \frac{2}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{11}{6\Delta t}$, $a_2 = \frac{5}{\Delta t^2}$, $a_3 = \frac{3}{\Delta t}$, $a_4 = -2a_0$, $a_5 = \frac{-a_3}{2}$, $a_6 = \frac{a_0}{2}$
 und $a_7 = \frac{a_3}{9}$.

Für den ersten Berechnungsschritt müssen die Anfangsbedingungen T_{m-1} und T_{m-2} bekannt sein und werden einfachheitshalber gleich dem mit $T_{m-1} = T_{m-2} = T_0$ gesetzt. Der angepasste Lösungsalgorithmus ist in Tabelle 5.2 vorgestellt.

Tabelle 5.2: Lösungsalgorithmus zur Houbolt-Methode.

A. Initialisiere Berechnung

1. Generiere Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{\alpha,h} - \tau\mathbf{K}_D + \tau\mathbf{k}_D$, Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}^* = \mathbf{M} + 2\tau\mathbf{K}_v$ und Massenmatrix $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}\tau$,
2. initialisiere T_0, \dot{T}_0 und \ddot{T}_0 ,
3. berechne Integrationskonstanten $a_0 = \frac{2}{\Delta t^2}, a_1 = \frac{11}{6\Delta t}, a_2 = \frac{5}{\Delta t^2}, a_3 = \frac{3}{\Delta t},$
 $a_4 = -2a_0, a_5 = \frac{-a_3}{2}, a_6 = \frac{a_0}{2}$ und $a_7 = \frac{a_3}{9}$,
4. bestimme $T_{-1} = T_{-2} = T_0$,
5. generiere effektive Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A} = a_0\mathbf{M}^* + a_1\mathbf{C}^* + \mathbf{K}^*$,
6. konditioniere $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ vor.

B. Löse Gleichungssystem für $t + \Delta t$

1. Erstelle effektiven Kraftvektor
 $\mathbf{b} = \mathbf{R}_{m+1}^* + \mathbf{M}^*(a_2T_m + a_4T_{m-1} + a_6T_{m-2}) + \mathbf{C}^*(a_3T_m + a_5T_{m-1} + a_7T_{m-2})$,
2. löse Gleichung $\mathbf{LU}T_{m+1} = \mathbf{b}$,
3. berechne ggf. numerische Stabilitätsgrößen und wdh. A.1., A.5. und A.6..

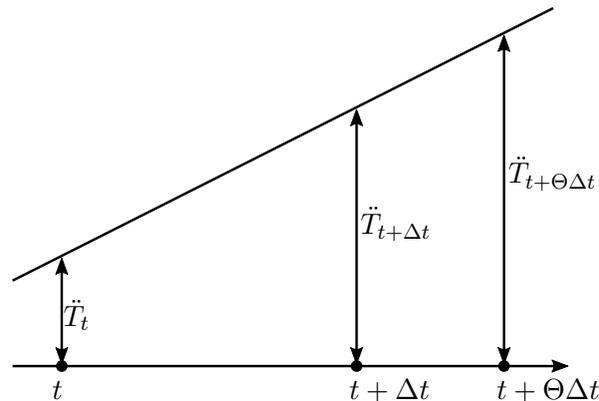
5.3 Lineare-Beschleunigungs- und Wilson- Θ -Methode

Abbildung 5.2: Annahme der linearen Beschleunigung [4, S. 319].

Die Lineare-Beschleunigungs- und Wilson- Θ -Methode teilen die selbe Grundannahme der linearen Variation von \ddot{T} zwischen den Zeitschritten, siehe Abbildung 5.2 und unterscheiden sich über die Wahl des Parameterwert Θ . Die Lineare-Beschleunigungs-Methode setzt $\Theta = 1$ und ist dadurch explizit sowie bedingt stabil [85, Kap. 7.3]. Ihre Erweiterung ist die Wilson- Θ -Methode mit $\Theta \geq 1,37$, wobei üblicherweise $\Theta = 1,4$ gewählt wird und sie somit implizit und als bedingungslos stabil gilt [4, Kap. 8.2.3]. Die Methoden sind in

Zhou, Wen & Zen [85, Kap. 7.3] aufgeführt mit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= a_0 \mathbf{M}^* + a_1 \mathbf{C}^* + \mathbf{K}^* \quad \text{und} \\
 b &= \mathbf{R}_m^* + \Theta(\mathbf{R}_{m+1}^* - \mathbf{R}_m^*) + \mathbf{M}^*(a_0 T_m + a_2 \dot{T}_m + 2\ddot{T}_m) + \mathbf{C}^*(a_1 T_m + 2\dot{T}_m + a_3 \ddot{T}_m) \\
 \text{mit } a_0 &= \frac{6}{(\Theta \Delta t)^2}, a_1 = \frac{3}{\Theta \Delta t}, a_2 = 2a_1, a_3 = \frac{\Theta \Delta t}{2}, a_4 = \frac{a_0}{\Theta}, a_5 = \frac{-a_2}{\Theta}, \\
 a_6 &= 1 - \frac{3}{\Theta}, a_7 = \frac{\Delta t}{2} \quad \text{und} \quad a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}.
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Die numerische Berechnungsfolge ist für beide Schemen in Tabelle 5.3 gezeigt und kann durch die Wahl von $\Theta = 1$ auf die Lineare-Beschleunigungs-Methode und durch $\Theta = 1,4$ auf die Wilson-Methode angepasst werden.

Tabelle 5.3: Lösungsalgorithmus zur linearen Beschleunigung und Wilson- Θ -Methode.

A. Initialisiere Berechnung

1. Generiere Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{\alpha,h} - \tau \mathbf{K}_D + \tau \mathbf{k}_D$, Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}^* = \mathbf{M} + 2\tau \mathbf{K}_v$ und Massenmatrix $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}\tau$,
2. initialisiere T_0, \dot{T}_0 und \ddot{T}_0 ,
3. wähle Θ und berechne Integrationskonstanten $a_0 = \frac{6}{(\Theta \Delta t)^2}, a_1 = \frac{3}{\Theta \Delta t},$
 $a_2 = 2a_1, a_3 = \frac{\Theta \Delta t}{2}, a_4 = \frac{a_0}{\Theta}, a_5 = \frac{-a_2}{\Theta}, a_6 = 1 - \frac{3}{\Theta}, a_7 = \frac{\Delta t}{6}$ und $a_8 = \frac{\Delta t^2}{6},$
4. bestimme $T_{-1} = T_{-2} = T_0,$
5. generiere effektive Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A} = a_0 \mathbf{M}^* + a_1 \mathbf{C}^* + \mathbf{K}^*,$
6. konditioniere $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ vor.

B. Löse Gleichungssystem für $t + \Delta t$

1. Erstelle effektiven Kraftvektor
 $b = \mathbf{R}_m^* + \Theta(\mathbf{R}_{m+1}^* - \mathbf{R}_m^*) + \mathbf{M}^*(a_0 T_m + a_2 \dot{T}_m + 2\ddot{T}_m) + \mathbf{C}^*(a_1 T_m + 2\dot{T}_m + a_3 \ddot{T}_m),$
2. löse Gleichung $\mathbf{L}\mathbf{U}T_{\Theta m+1} = \mathbf{b},$
- 2.1. berechne tatsächliche Größen, wenn $\Theta \neq 1$ (\rightarrow Wilson- Θ -Methode)
 $\ddot{T}_{m+1} = a_4(T_{\Theta m+1} - T_m) - a_5 \dot{T}_m + a_6 \ddot{T}_m,$
 $\dot{T}_{m+1} = \dot{T}_m + a_7(\ddot{T}_{m+1} + \ddot{T}_m),$
 $T_{m+1} = T_m + \Delta t \dot{T}_m + a_8(\ddot{T}_{m+1} + 2\ddot{T}_m),$
3. berechne ggf. numerische Stabilitätsgrößen und wdh. A.1., A.5. und A.6..

5.4 Newmark-Methode

Die Newmark-Methode basiert auf der linearen Beschleunigung, aber die Variation von \ddot{T} lässt sich über neue Stabilitätsparameter δ und $\alpha = 0,25(0,5 + \delta)^2$ anpassen. Beispielsweise ist eine konstante Beschleunigung mit $\delta = 0,5$ möglich (siehe Abbildung 5.3). Die korrekte Parameterwahl indiziert eine stabile numerische Berechnung und erhöht die Genauigkeit

der Lösung. Das Gleichungssystem ist nach Zhou, Wen & Cai [85, Kap. 7.4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a_0 \mathbf{M}^* + a_1 \mathbf{C}^* + \mathbf{K}^* \quad \text{und} \\ b &= \mathbf{R}_{m+1}^* + \mathbf{M}^*(a_0 T_m + a_2 \dot{T}_m + a_3 \ddot{T}_m) + \mathbf{C}^*(a_1 T_m + a_4 \dot{T}_m + a_5 \ddot{T}_m) \quad \text{mit} \\ a_0 &= \frac{1}{\alpha t^2}, a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right), \\ a_6 &= \Delta t(1 - \delta) \quad \text{und} \quad a_7 = \delta \Delta t. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Der Berechnungsalgorithmus zur Newmark-Methode ist in Tabelle 5.4 aufgeführt.

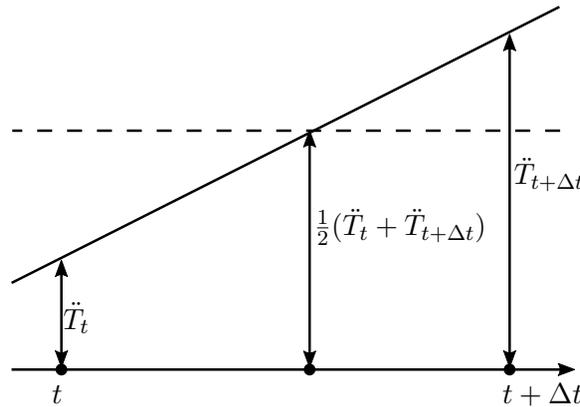


Abbildung 5.3: Annahme der konstanten Beschleunigung nach Newmark $\delta = 0,5$ [4, S. 323].

Tabelle 5.4: Lösungsalgorithmus zur Newmark-Methode.

A. Initialisiere Berechnung

1. Generiere Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{\alpha,h} - \tau \mathbf{K}_D + \tau \mathbf{k}_D$, Dämpfungsmatrix $\mathbf{C}^* = \mathbf{M} + 2\tau \mathbf{K}_v$ und Massenmatrix $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}\tau$,
2. initialisiere T_0, \dot{T}_0 und \ddot{T}_0 ,
3. berechne Integrationskonstanten $\delta \geq 0,5$ und $\alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2$ sowie $a_0 = \frac{1}{\alpha t^2}, a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right), a_6 = \Delta t(1 - \delta), a_7 = \delta \Delta t$,
4. bestimme $T_{-1} = T_{-2} = T_0$,
5. generiere effektive Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A} = a_0 \mathbf{M}^* + a_1 \mathbf{C}^* + \mathbf{K}^*$,
6. konditioniere $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ vor.

B. Löse Gleichungssystem für $t + \Delta t$

1. Erstelle effektiven Kraftvektor $b = \mathbf{R}_{m+1}^* + \mathbf{M}^*(a_0 T_m + a_2 \dot{T}_m + a_3 \ddot{T}_m) + \mathbf{C}^*(a_1 T_m + a_4 \dot{T}_m + a_5 \ddot{T}_m)$,
2. löse Gleichung $\mathbf{L}\mathbf{U}T_{m+1} = \mathbf{b}$,
3. berechne ggf. numerische Stabilitätsgrößen und wdh. A.1., A.5. und A.6..

6 Programme

Das Finite-Elemente-Programm HypHeat2D wurde für die thermischen Analysen in der MATLAB®-Umgebung entwickelt. HypHeat2D basiert auf Sert [66] und wurde mit der Wärmetransporttheorie aus Kapitel 2 sowie der Numerik aus Kapitel 4 und 5 umfangreich weiterentwickelt. Das Programm ermöglicht die Berechnung des Schaufel-Gehäuse-Wärmetransports in einem einzelnen Gleichungssystem $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$. Dadurch weist HypHeat2D im Vergleich zu FEM-Programmen wie Code_Aster® [12], CalculiX® [16], COMSOL® [14], LS-DYNA® [28] und Abaqus® [1] folgende Vorteile auf:

1. Die Randbedingungen im Kontaktsegment müssen nicht über Kopplungsbedingungen ausgetauscht werden, wie bspw. in [2, 61].
2. Eine sequenzielle Berechnung ist aufgrund der direkten Kopplung über die gemeinsame Schaufel-Gehäuse-Matrix \mathbf{A} nicht nötig.
3. Zudem erfolgt die Wärmeaufteilung adaptiv zum vorliegenden thermodynamischen Zustand, wodurch der Transportprozess physikalisch abgebildet werden kann.

Weiteres Entwicklungspotenzial bietet HypHeat2D durch Ergänzungen von strukturellen Gleichungen, wodurch thermomechanische Vorgänge untersucht werden können, wie die der plastischen und elastischen Verformung oder Rissbildung aufgrund von Temperaturänderungen. Auch sind nach dem aktuellen Programmstand nur ebene Berechnungen in 2-D von einfachen Geometrien möglich, da zunächst ein grundlegendes Verständnis über den Wärmetransport aus Kapitel 2 und seine Näherung mittels der FEM in HypHeat2D geschaffen werden soll. Die Geometrien wurden über das zusätzlich geschriebene Netzgen-Programm aufgebaut. Das Netzgen-Programm ist an das Abaqus®-Dateiformat angelehnt, wodurch die Grundzüge der Einleseroutine von Abaqus®-Dateien in HypHeat2D vorliegen. Mit weiteren Änderungen wird es dann möglich sein, komplexe 3-D-Netzgeometrien aus Abaqus® zu berechnen. Zudem ist durch die Anpassung der Matrizen \mathbf{M}^* , \mathbf{C}^* und \mathbf{K}^* sowie der Randbedingung R^* in Gleichung (5.1) das Lösen von anderen Differentialgleichungen möglich. Diese sind bspw.

- die 2-D-Wellengleichung: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$,
- die 2-D-Laplace-Gleichung: $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ und
- die 2-D-Poisson-Gleichung: $\nabla^2 u = f(x_1, x_2)$.

Die Programmstruktur von Netzgen ist in Kapitel 6.1 und die von HypHeat2D in Kapitel 6.2 beschrieben. Zur Vollständigkeit sind gekürzte Auszüge zu den jeweiligen Hauptprogrammen dem Anhang beigelegt. Hierin werden das Startskript, das Programm und die Logdatei zur Simulation der generischen Geometrie des nachfolgenden Kapitels 7 bei $\text{Ma}_{\text{th}} = 1$ mit der Christov-Cattaneo-Gleichung gezeigt.

6.1 Netzerstellung mit Netzgen

Die Netzgen-Struktur ist in Abbildung 6.1 gezeigt. Die Parametereingaben (Anhang A.2) umfassen die globalen Bedingungen zur Simulation, wobei neben den Materialdaten auch numerische Größen angegeben werden. Hierunter fällt bspw. der berechnete Zeitschritt Δt zur Stabilitätsbedingung der Diffusions-Zahl aus Kapitel 3.2 oder die Zelengröße Δx nach der Péclet-Zahl aus Kapitel 3.3. Die Netzerstellung wird mit einem Skript (Anhang A.1) ausgeführt und die wichtigsten Informationen in eine Logdatei (Anhang A.3) geschrieben und schließlich eine .inp-Datei erstellt.

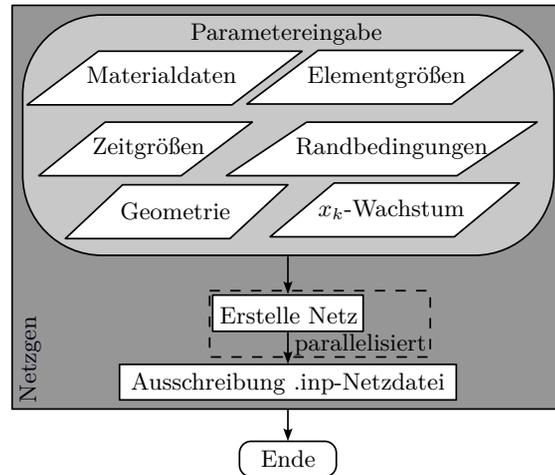


Abbildung 6.1: Netzgen-Programm.

6.2 Berechnung mit HypHeat2D

Die Struktur von HypHeat2D ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Die Eingabe umfasst in einem Startskript (Anhang B.1) die Parameter zur Auswahl der Wärmetransportgleichung, Zeitintegration und verwendeten Stabilitätsmethoden sowie die Netzdatei. In einem ersten Schritt werden physikalische Kennzahlen und globale Größen berechnet. Dann wird die Löschleife betreten, in der die Matrizen und Vektoren erstellt werden (siehe Anhang B.2). Zu Beginn werden das Temperaturfeld und die Integrationskonstanten aus Kapitel 5 initialisiert. Nachdem die effektive Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} und der effektive Kraftvektor \mathbf{b} aufgebaut wurden, wird mit einer internen MATLAB®-Funktion das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{b}$ gelöst. Die Löser-Routine wiederholt sich bei aktivierter ORT-Methode vollständig, bis die finale Zeit t_{Ende} erreicht ist. Die Datenausschreibung erfolgt in eine Logdatei (Anhang B.3) und das Ergebnis wird im VTU-Format abgespeichert.

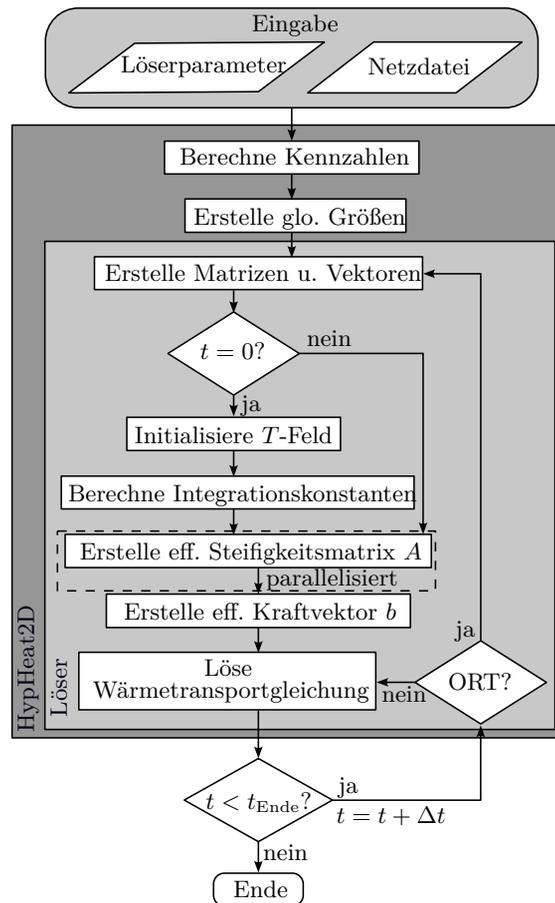


Abbildung 6.2: HypHeat2D-Programm.

6.3 Validierung

Eine Validierung der Programme ist durch einen Vergleich von numerischen Ergebnissen mit analytischen Lösungen möglich. Hierzu wird eine halbunendliche Streifenquelle mit den Dimensionen $b < x_1 < b$ und $-\infty < x_2 < \infty$ in einer horizontalen Ebene x_3 betrachtet. In dieser Ebene initiiert eine Quelle eine konstante Wärmeflussdichte und das Kontinuum bewegt sich mit einer Systemgeschwindigkeit v in positive x_1 -Richtung. Die analytische Lösung für die Temperaturverteilung gemäß der Fourier-Gleichung (2.4) ist in diesem Fall nach Carslaw & Jaeger [8, Kap. 10.7] gegeben:

$$T = \frac{\alpha \dot{q}}{\pi \lambda v} \int_{X-B}^{X+B} \exp(u) K_0(u) du. \quad (6.1)$$

In Gleichung (6.1) ist K_0 die modifizierte Bessel-Funktion zweiter Art und nullter Ordnung. Diese und die Exponentialfunktion werden über ein dimensionsloses Intervall integriert, in welchem die Integrationsgrenzen über die Koordinate

$$X = \frac{vx_1}{2\alpha} \quad (6.2)$$

und die Breite der Quelle bzw. die quellenlängenspezifischen Péclet-Zahl

$$B = \frac{vb}{2\alpha} = Pe_Q = \frac{vL_Q}{4\alpha}, \quad (6.3)$$

definiert sind. Die stationären Lösungen der analytischen Gleichung (6.1) und der numerischen Berechnung der fourierschen Wärmetransportgleichung (2.4) mit HypHeat2D sind für die Péclet-Zahlen $Pe_Q = 1, 5$ und 10 in Abbildung 6.3 gegenübergestellt. Beispielhaft ist zur thermischen Mach-Zahl $Ma_{th} = 0,8$ die numerische Lösung zur Gleichung (2.11) nach Christov-Cattaneo gezeigt. Die Kurven der exakten analytischen Lösungen und die ungeglätteten Daten der approximierten numerischen Lösungen zeigen eine gute Übereinstimmung und die Programmfunktion ist damit nachgewiesen. Hinsichtlich der asymmetrischen Lösungsverläufe der Fourier-Gleichung sind drei bedeutende physikalische Effekte zu erkennen:

1. Vor der Quelle nähern sich die Kurven für $x_1/b < -1$ asymptotisch an und mit zunehmender Péclet-Zahl wird der Gradient steiler. Gleichzeitig verschiebt sich der Temperaturanstieg in Richtung der Quellenvorderkante ($x_1/b = -1$).
2. Der Verlauf der normierten Temperatur wird mit größerer Péclet-Zahl sichelförmig und die Temperatur wird an der Quellenhinterkante ($x_1/b = 1$) gestaucht, an der dadurch die maximale Temperatur vorliegt.
3. Der Temperaturunterschied zwischen den Kurven nimmt indirekt proportional zur Péclet-Zahl ab. Das zeigt sich dadurch, dass die Verläufe und maximalen Temperaturspitzen ($x_1/b = 1$) von $Pe_Q = 5$ und $Pe_Q = 10$ näher beieinander liegen, als die Kurven von $Pe_Q = 1$ und $Pe_Q = 5$.

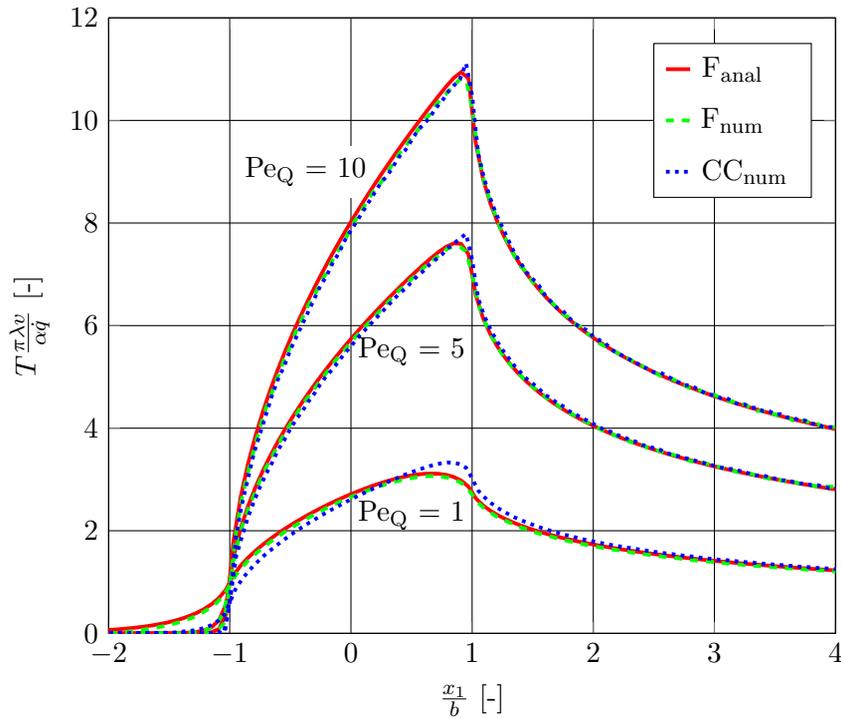


Abbildung 6.3: Vergleich der analytischen Lösungen nach Carslaw & Jaeger [8] mit den numerischen Lösungen aus HypHeat2D. Temperaturverteilungen über eine unendliche Streifenquelle der Breite $b = 2$ nach der Wärmetransportgleichung von Fourier F und Christov-Cattaneo CC zu $Pe_Q = [1, 5, 10]$ und $Ma_{th} = 0,8$ sowie unter Verwendung der Θ -Integrationsmethode ($\Theta = 0, 5$).

Analytische Lösungen der Wärmetransportgleichungen nach Cattaneo-Vernotte in Kapitel 2.1.3 und Christov-Cattaneo in Kapitel 2.1.4 für die halbusendliche Streifenquelle existieren nicht. Dennoch sind numerische Lösungen zur Christov-Cattaneo-Gleichung bei $Pe_Q = 1, 5$ und 10 mit dargestellt, welche unter Berücksichtigung einer thermischen Mach-Zahl von $Ma_{th} = 0,8$ und Temperaturleitfähigkeit $\alpha = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, folgende Relaxationszeiten τ über Gleichung (2.16) ergeben:

Tabelle 6.1: Relaxationszeiten τ zu Pe_Q bei $Ma_{th} = 0,8$.

Ma_{th}	Pe_Q	τ [s]
	1	0,16
0,8	5	0,0064
	10	0,0016

Die Kurven der CC -Gleichung zeigen in Abbildung 6.3 bei $x_1/b < -1$ an der Quellenfront, dass die Temperaturprofile gestaucht werden. Die Informationsausbreitung entgegen der Bewegungsrichtung ist gehemmt und somit physikalisch, wodurch eine Erwartung an die hyperbolische Gleichung erfüllt ist. Zudem werden im vorderen Quellenbereich geringere und an der Quellenhinterkante $x_1/b = -1$ höhere Temperaturen erreicht, was bei $Pe_Q = 1$

am deutlichsten ist und mit zunehmender Péclet schwindet. Die Darstellung einer Lösung von Cattaneo-Vernotte ist nicht möglich, da diese der Fourier-Gleichung im stationären Zustand identisch ist und wird im nachfolgenden Kapitel 7 gezeigt. Abschließend kann festgehalten werden, dass die Funktion von HypHeat2D und Netzgen nachgewiesen ist.

Teil III

ERGEBNISSE

7 Generische Geometrie

Die Untersuchungen in Form einer Studie an einer generischen Geometrie sollen Aufschluss über die Unterschiede der Wärmetransportgleichungen in ihrem physikalischen Verhalten und über ihre numerischen diskretisierten Verfahren geben. Die generische Geometrie ist eine 2-D-Domäne in einem unendlichen großen Festkörper mit einer Punktquelle in ihrem geometrischen Zentrum und über Randbedingungen in Kapitel 7.1 bestimmt. Das Verhalten der diskretisierten Wärmetransportgleichungen nach Fourier, Cattaneo-Vernotte und Christov-Cattaneo wird in Kapitel 7.2 mit unter-, sub- und transkritischen Diffusionsbedingungen verglichen. Zur transkritischen Diffusion werden an der Christov-Cattaneo-Gleichung erweiterte Studien in Kapitel 7.2.3 durchgeführt, ihre physikalischen Eigenschaften analysiert sowie die numerischen Auswirkungen auf ihre Lösung wie folgt gezeigt:

- Die physikalischen Eigenschaften in instationären und stationären Zuständen in Kapitel 7.3.1, die erweiterte Entropie s_{EIT} aus Kapitel 2.3.1 in 7.3.2 und die Nichtgleichgewichtstemperatur θ aus Kapitel 2.3.2 in 7.3.3.
- Die numerischen Auswirkungen der stabilisierenden ORT-Methode aus Kapitel 4.5.3 in 7.3.4, der Zeitintegrationen aus Kapitel 5 in 7.3.5, der linearen und quadratischen Elementen aus Kapitel 4.3 in 7.3.6 und der Netzfeinheiten in Kapitel 7.3.7.

7.1 Geometrie und Randbedingungen

Die generische Geometrie und ihre Materialeigenschaften sind in Abbildung 7.1 dargestellt. Die Geometrie ist von den Randbedingungen nach Dirichlet $T = 1 \text{ K}$ bzw. $T_n = 0$ und von Neumann $\partial T_n / \partial x = 0$ umgeben. Die Dirichlet-Bedingung soll für ein homogenes Temperaturfeld vor der Quelle sorgen und mögliche Wellenreflexionen unterdrücken. Die Temperaturverteilung zum Anfangszeitpunkt ist homogen $T_0(\mathbf{x}, 0) = 1 \text{ K}$ bzw. $T_{n,0}(\mathbf{x}, 0) = 0$ und die Materialeigenschaften sind isotrop und zeitlich konstant. Im Zentrum sitzt eine Wärmequelle \dot{q} mit 20 W m^{-2} , die zugleich der Fixpunkt für die lagrangesche Betrachtungsweise ist. Das Kontinuum bewegt sich mit konstanten Geschwindigkeiten im unter-, sub- und transkritischen Diffusionsbereich und ist durch finite Viereckelemente diskretisiert. Die Systeme der Wärmetransportgleichungen werden jeweils mit einer konzentrierten Wärmekapazitätsmatrix \mathbf{M} aus Kapitel 4.5.1 beschrieben und die Christov-Cattaneo-Gleichung gegebenenfalls mit der ORT-Methode aus Kapitel 4.5.3 stabilisiert.

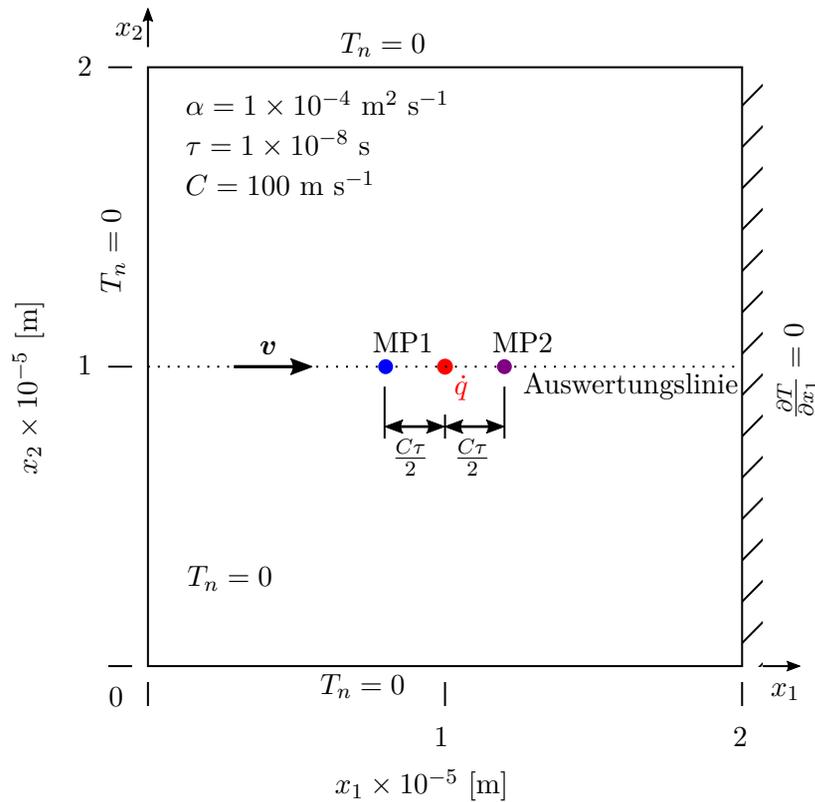


Abbildung 7.1: Generische Geometrie mit Randbedingungen.

7.2 Gegenüberstellung der Gleichungen

In der Gegenüberstellung werden die Lösungen der drei Wärmetransportgleichungen im stationären Zustand zu $t = 10\tau$ verglichen und der Gültigkeitsbereich aus Kapitel 2.1.5 überprüft. Der Vergleich wird in den Diffusionsbedingungen zu sechs unterschiedlichen thermischen Mach-Zahlen Ma_{th} durchgeführt:

- Für die unterkritische Diffusion sind $Ma_{th} = 0,0$ und $0,1$ festgelegt.
- Die subkritische Bedingung wird zu drei Stützstellen mit $Ma_{th} = 0,3, 0,5$ und $0,8$ erschlossen, da hier der größte Bereich vorliegt.
- Im transkritischen Zustand liegt die Bedingung mit $Ma_{th} = 1,0$ vor.

Die Geometrie in Abbildung 7.1 wird für die Untersuchungen mit einer homogenen Netzfeinheit aus linearen Viereckelementen diskretisiert. Die Viereckelemente sind jene aus Kapitel 4.3.1 und haben eine Randlänge von $L_{Rand} = 1,25 \times 10^{-7}$ m. Über sie wird der Zeitschritt mit dem Grenzwert $d = 0,5$ aus der Stabilitätsbedingung zur Diffusions-Zahl in Kapitel 3.2 bestimmt und führt auf die Formel $\Delta t = dL_c^2/\alpha$. Aus der charakteristischen 2-D-Viereckelementlänge $L_c = \sqrt{2L_{Rand}^2}$ und Temperaturleitfähigkeit $\alpha = 1 \times 10^{-4}$ m² s⁻¹ aus Abbildung 7.1 ergibt sich der numerische Zeitschritt $\Delta t = 1,5625 \times 10^{-10}$ s. Die Zeitintegrationen werden über die Θ -Methode nach Crank-Nicolson mit $\Theta = 0,5$ durchgeführt.

7.2.1 Unterkritische Diffusion

Die normierten Temperaturprofile $T_n = T^{-1K/2K}$ über die Auswertungslinie aus Abbildung 7.1 zu den stationären Lösungen im unterkritischen Diffusionsbereich sind in den Abbildungen 7.2 und 7.3 gezeigt. Die höchste Temperatur liegt im Zentrum $x_1 = 1 \times 10^{-5}$ m der symmetrischen Profile aufgrund der Wärmequelle \dot{q} . Unterschiede zu den thermischen Mach-Zahlen von $Ma_{th} = 0,0$ und $0,1$ liegen in den Lösungen der Gleichungen nach Fourier F, Cattaneo-Vernotte CV und Christov-Cattaneo CC nicht vor. Dadurch ist die Gültigkeit in Kapitel 2.1.5 bestätigt, dass die Gleichungen für $Ma_{th} \leq 0,1$ identisch sind.

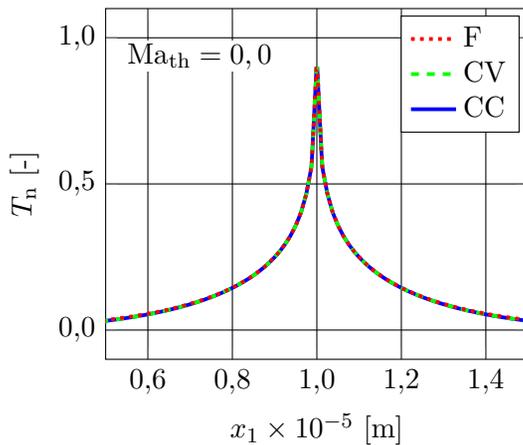


Abbildung 7.2: Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 0,0$ im stationären Zustand.

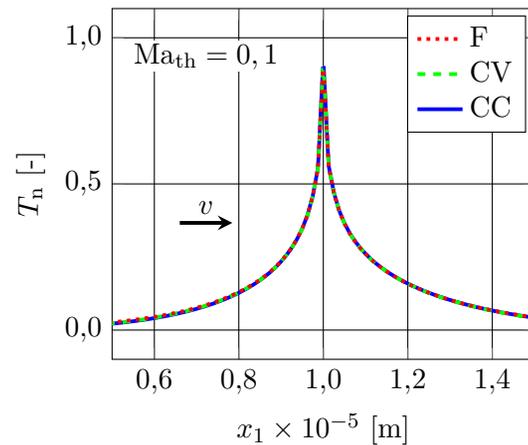


Abbildung 7.3: Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 0,1$ im stationären Zustand.

7.2.2 Subkritische Diffusion

Die Abbildungen 7.4, 7.5 und 7.6 geben die Lösungen zur stationären Temperaturverteilung T_n im subkritischen Diffusionszustand für $Ma_{th} = 0,3$, $0,5$ und $0,8$ wieder. Die Gemeinsamkeiten der Ergebnisse sind zum einen die asymmetrischen Profile aufgrund des Einflusses der Relativgeschwindigkeit v und zum anderen die ähnlichen Krümmungsverläufe hinter der Wärmequelle \dot{q} bzw. für $x_1 > 1 \times 10^{-5}$ m. Die Unterschiede beginnen vor der Quelle und mit zunehmender thermischer Mach-Zahl Ma_{th} . In Abbildung 7.4 zu $Ma_{th} = 0,3$ ist ein geringer Unterschied der Christov-Cattaneo-Gleichung gegenüber den anderen Gleichungen erkennbar. Dieser wird in 7.5 zu $Ma_{th} = 0,5$ deutlicher und die Temperatur in $x_1 = 1 \times 10^{-5}$ m ist mit $T_n = 0,9$ erhöht. Die prägnanteste Differenz ist in Abbildung 7.6 zu $Ma_{th} = 0,8$ zu erkennen, in der die Christov-Cattaneo-Gleichung eine spätere Temperaturerhöhung und einen größeren Gradienten vorhersagt. Ergänzend ist sie die einzige Gleichung, welche mithilfe der ORT-Methode stabilisiert werden muss. Die Gültigkeit aus Kapitel 2.1.5 ist teilweise belegt, in der für $Ma_{th} > 0,1$ die Wellengleichungen verwendet werden sollten, jedoch ist sie im vorliegenden stationären Fall nur für die Christov-Cattaneo-Gleichung gültig und nicht auch für die Cattaneo-Vernotte-Gleichung. Auch ist zu Kapitel 2.2.1 die Vermutung bestätigt, dass die hyperbolische Gleichung im

gesamten Intervall $t = [0; \infty]$ und ab einer thermischen Mach-Zahl $\text{Ma}_{\text{th}} > 0,1$ verwendet werden sollte (siehe dazu Kapitel 2.1.5).

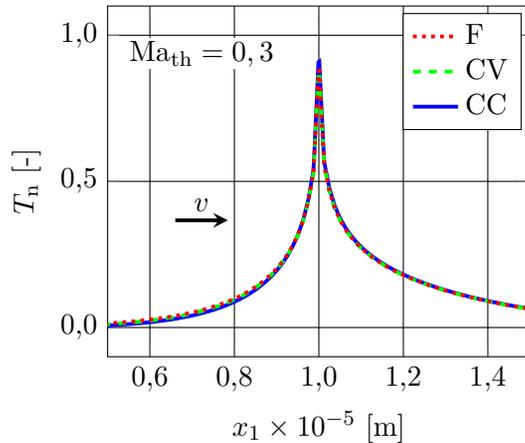


Abbildung 7.4: Temperaturverteilung T_n zu $\text{Ma}_{\text{th}} = 0,3$ im stationären Zustand.

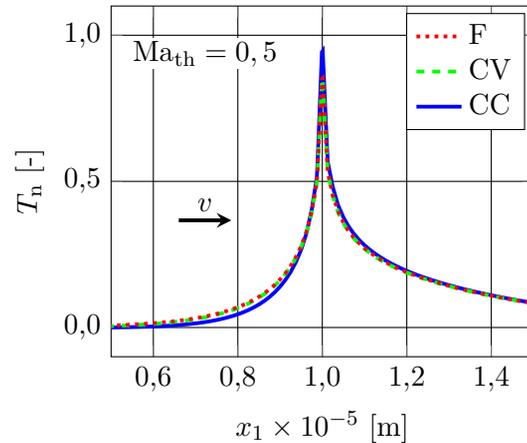


Abbildung 7.5: Temperaturverteilung T_n zu $\text{Ma}_{\text{th}} = 0,5$ im stationären Zustand.

7.2.3 Transkritische Diffusion

Der transkritische Diffusionszustand mit $\text{Ma}_{\text{th}} = 1,0$ ist in Abbildung 7.7 gezeigt. Die Profile sind asymmetrisch und die der Fourier und Cattaneo-Vernotte deckungsgleich. Die Lösung nach Christov-Cattaneo zeigt den steilsten Anstieg hinsichtlich eines thermischen Stoßes vor der Wärmequelle \dot{q} . Der erhöhte Temperaturschlag ist auf die PDGL zurückzuführen, da auch dieses Phänomen bei niedrigen thermischen Mach-Zahlen in den Abbildungen 7.4 bis 7.6 vorliegt. Weiterführend ist der Temperaturschlag und die erhöhte Abweichung hinter dem Stoß der Christov-Cattaneo-Gleichung gegenüber den anderen Funktionen als physikalisch richtig zu bewerten und begründbar durch die Energieerhaltung in Form der identischen Flächengößen unter den Gleichungskurven.

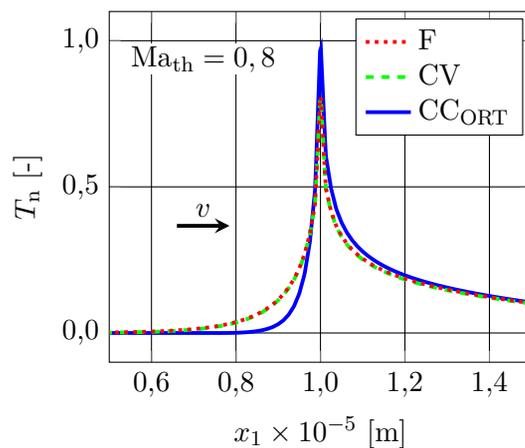


Abbildung 7.6: Temperaturverteilung T_n zu $\text{Ma}_{\text{th}} = 0,8$ im stationären Zustand.

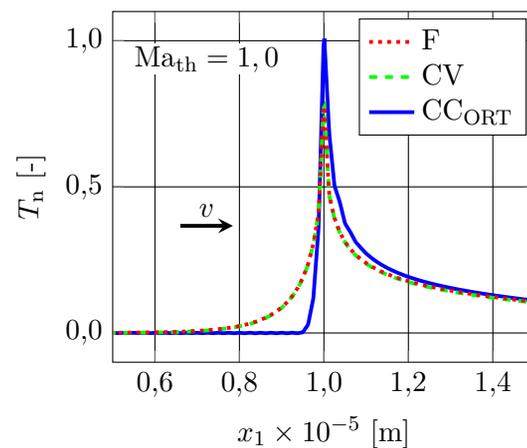


Abbildung 7.7: Temperaturverteilung T_n zu $\text{Ma}_{\text{th}} = 1,0$ im stationären Zustand.

7.3 Studie bei transkritischer Diffusion

Zur transkritischen Diffusionsbedingung wird die Studie fortgesetzt. Die transkritische Bedingung wird herangezogen, da sie der komplexeste Zustand aufgrund des thermischen Stoßes ist und den größten Unterschied zwischen den Lösungen der Wärmetransportgleichungen bringt. Hierzu wird die Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo zunächst hinsichtlich ihres physikalischen Verhaltens in den Kapiteln 7.3.1 bis 7.3.3 analysiert und dann die numerischen Auswirkungen der Diskretisierungen auf ihre Lösung in den Kapiteln 7.3.4 bis 7.3.7 gezeigt.

7.3.1 Instationäre und stationäre Lösung

Abbildung 7.8 stellt die Lösungen im instationären und stationären Zustand zu den Wärmetransportgleichungen bei einer thermischen Mach-Zahl von $Ma_{th} = 1,0$ gegenüber, welche mit der Zeitintegration nach Crank-Nicolson mit $\Theta = 0,5$ bestimmt wurden. Für beide Abbildungen liegen asymmetrische Temperaturverläufe T_n vor und die Christov-Cattaneo-Gleichung führt den größten Gradienten sowie höchsten Wert von $T_n = 1,0$ im stationären Zustand im Ort der Quelle \dot{q} auf. Im instationären Fall bei $t = \tau$ ähneln sich die Cattaneo-Vernotte- und Christov-Cattaneo-Gleichung durch einen plötzlichen Anstieg an der Stoßfront, wobei die Lösung nach Christov numerisch instabil ist. Die Fourier-Gleichung bestimmt zum instationären und stationären Zustand immer eine unnatürliche Temperaturerhöhung im Nah- und Fernfeld, welche sich besonders vor dem thermischen Stoß als parabelförmige und stetige Funktion gegenüber den hyperbolischen Gleichungen unterscheidet. Diese Beobachtung stützt das Paradoxon aus Kapitel 2.1.2 über die unendliche thermische Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperatur und damit eine messbare Temperaturänderung zu jedem Zeitpunkt t an allen Orten \boldsymbol{x} . Hinter dem Stoß zeigt die

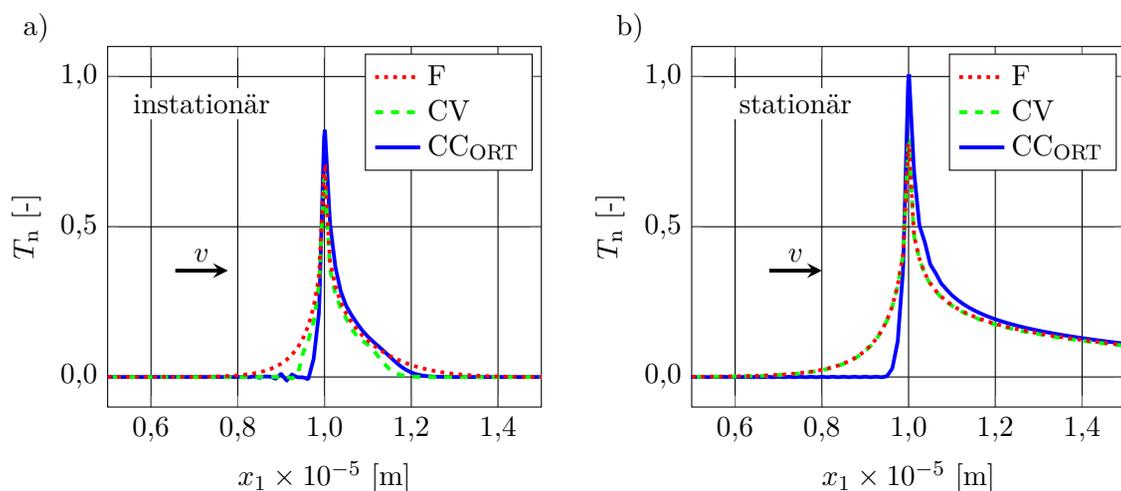


Abbildung 7.8: Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 1, 0$: a) im instationären Zustand $t = \tau$ und b) im stationären Zustand $t = 10\tau$.

Christov-Cattaneo-Lösung zunächst erhöhte Temperaturen T_n , dann laufen die Ergebnisse aller Gleichungen asymptotisch zusammen. Der stationäre Fall b) in Abbildung 7.8 wurde in Kapitel 7.2.3 bereits gezeigt, zeigt aber in Verbindung mit den neu erlangten Erkenntnissen, dass die Cattaneo-Vernotte-Gleichung über die Zeit t hinweg die identische Lösung wie Fourier berechnet und nicht für stationäre Untersuchungen anwendbar ist.

7.3.2 Erweiterte Entropie

Aus Kapitel 2.3.1 ist die Berechnung zur erweiterten Entropie aufgeführt und ihre Änderung wird unter transkritischen Diffusionsbedingung ermittelt. Da sie von der Temperatur T abhängig ist und auf Ergebnisse aus vorangegangenem Kapitel 7.3.1 basiert, wurde ihre zeitliche Entwicklung über die Θ -Methode nach Crank-Nicolson mit $\Theta = 0,5$ bestimmt. Diese zeitliche Entwicklung über $t = [0; 10\tau]$ der normierten erweiterten Entropie $s_{\text{EIT},n}$ und ihre Änderung $\Delta s_{\text{EIT},n}$ ist in Abbildung 7.9 dargestellt. Darin berechnet die Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo einen thermischen Stoß, der in Abbildung 7.9a) einen über die Zeit t unveränderten Gradienten zu $s_{\text{EIT},n}$ mit sich bringt. Zwischen den Zeitschritten steigt der maximale Entropiewert auf $s_{\text{EIT},n} = 0,9$ in der Quelle \dot{q} und die Entropieproduktion nimmt zu, was über das Flächenwachstum unter den Kurven erklärbar ist. Die größte Änderung der Entropie $\Delta s_{\text{EIT},n}$ wird an der thermischen Wellenfront im Nichtgleichgewicht gemessen und ist in Abbildung 7.9b) ersichtlich. Während im Nichtgleichgewichtszustand die Entropie durch die großen zeitlichen Änderungen der Terme T_2/T_1 und $\dot{T}_2 - \dot{T}_1$ dominiert wird, geht im Gleichgewichtszustand $t \rightarrow \infty$ die Änderung $\Delta s_{\text{EIT},n}$ gegen Null. Der Gleichgewichtszustand ist mit $\Delta s_{\text{EIT},n} = 0$ durch $T_2/T_1 = 1$ und $\dot{T}_2 - \dot{T}_1 = 0$ erreicht.

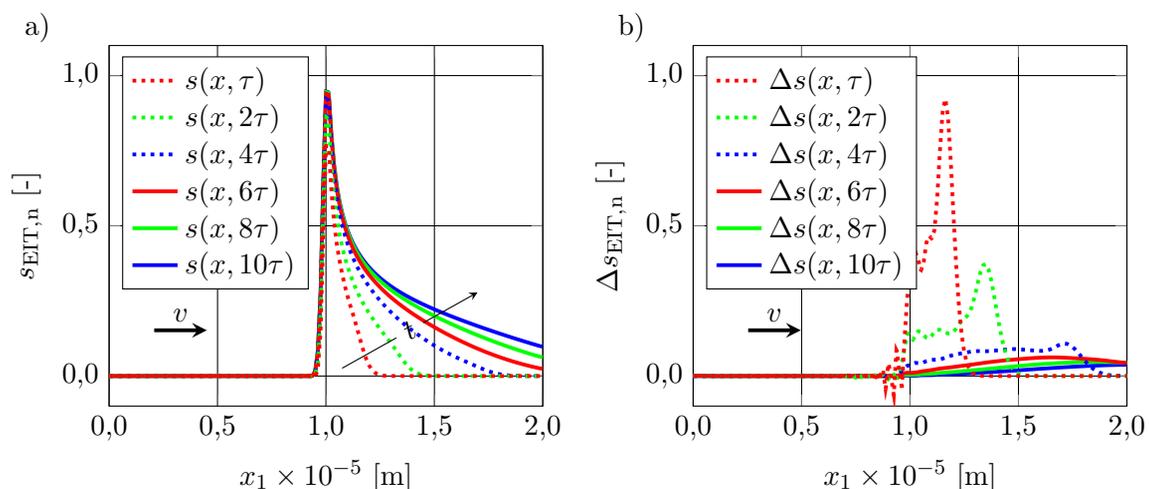


Abbildung 7.9: Entwicklung der erweiterten Entropie bei $\text{Ma}_{\text{th}} = 1,0$ für Lösungen der CC_{ORT} : a) normierte spezifische Entropie $s_{\text{EIT},n}$ und b) Änderung der Entropie $\Delta s_{\text{EIT},n}$.

Ergänzend zu den Verläufen in Abbildung 7.9b), zeigt Abbildung 7.10 eine sichelförmige Kontur der normierten Entropieänderung $\Delta s_{\text{EIT},n}$ zum instationären Zustand $t = 4\tau$.

Die Änderung $\Delta s_{\text{EIT},n}$ ist nahe Null an der thermischen Stoßfront, daher im Gleichgewicht, und erreicht ihre höchsten Werte an der sich radial ausbreitenden Wellenfront, somit im Nichtgleichgewicht. Die größten Gradienten werden zu diesem Zeitpunkt $t = 4\tau$ in $x_1 = 1,3 \times 10^{-5}$ zu $x_2 = 0,6 \times 10^{-5}$ und $x_2 = 1,4 \times 10^{-5}$ ermittelt. Die Gradienten in x_1 -Richtung werden kleiner und auch die Wellenfrontdicke nimmt ab, da aufgrund der Relativgeschwindigkeit c in Gleichung (2.13) das Feld in positiver x_1 -Richtung gestreckt und verwaschen wird. Mit zunehmender Dauer t wächst der elliptische Konturbereich an, wie in 2.2b) auf Seite 16 dargestellt ist.

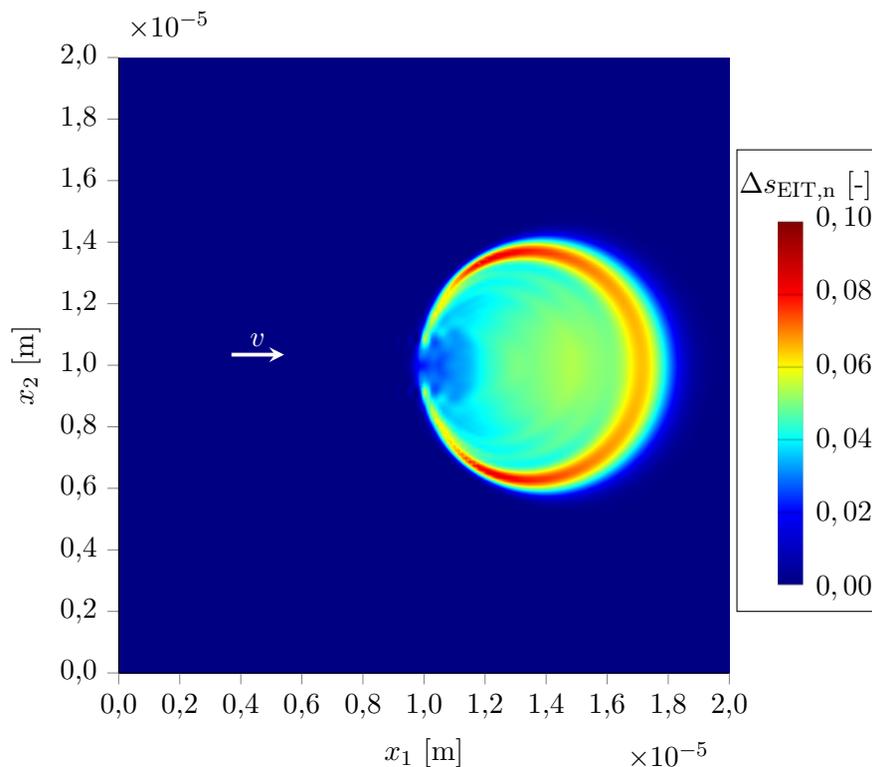


Abbildung 7.10: Instationäre normierte Entropieänderung $\Delta s_{\text{EIT},n}$ bei $\text{Ma}_{\text{th}} = 1,0$ für CC_{ORT} zu $t = 4\tau$.

7.3.3 Nichtgleichgewichtstemperatur

Die erweiterte irreversible Thermodynamik bildet den Ansatz zur Nichtgleichgewichtstemperatur θ in Gleichung (2.27). Aufgrund ihrer Gleichungsform wird die Elementtemperatur verwendet, die sich als Mittelwert aus den zugehörigen Knotentemperaturen zusammensetzt. Die Ergebnisse wurden über die Integration von T mit der Θ -Methode nach Crank-Nicolson ermittelt. Der θ_n -Verlauf gegenüber der Temperatur T_n zum Element von Monitoring Punkt 2 aus Abbildung 7.1 ist in Abbildung 7.11 über den Zeitschritt s aufgeführt. Es werden der instationäre Bereich im Detail und die Entwicklung zum stationären Zustand ergänzend gezeigt. Der Unterschied liegt im instationären vergrößerten Detailbereich und verdeutlicht, dass die Nichtgleichgewichtstemperatur θ_n der zeitlichen Gleichgewichtstemperatur T_n nacheilt. Das ist durch eine Analyse von Gleichung (2.28) begründbar, denn die

zeitliche Ableitung \dot{T} dominiert durch ihre Änderung den instationären Zustand und fügt eine Trägheit hinzu. Des Weiteren nimmt der Unterschied zwischen den Temperaturen proportional mit den zusätzlichen Erweiterungstermen der Wärmetransportgleichung zu, da bspw. die Fourier-Gleichung zu $\theta_n = T_n$ führt und die Christov-Cattaneo-Gleichung das Ergebnis durch zusätzliche zeitliche Temperaturableitungen bedeutend beeinflusst. Geht die Änderung der zeitlichen Ableitung gegen Null, nähert sich θ_n der Kurve von T_n an und der Nichtgleichgewichtszustand ist überwunden. Die Verläufe der Temperaturen sind kongruent und streben dem stationären Zustand entgegen.

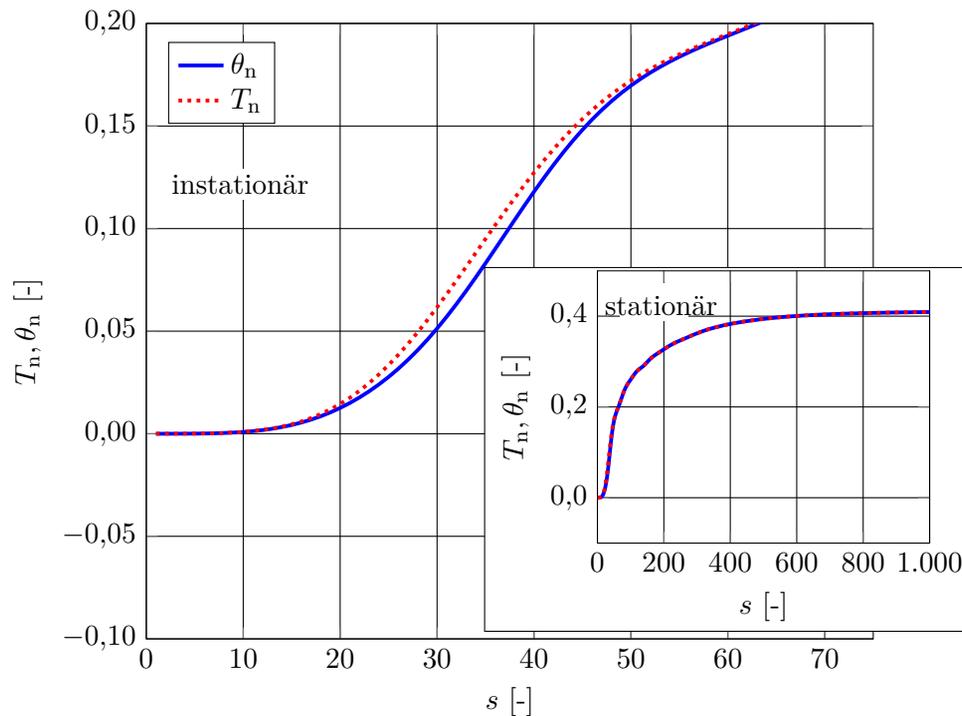


Abbildung 7.11: Temperaturverläufe T_n und θ_n über Zeitschritte s bei $\text{Ma}_{\text{th}} = 1,0$ im instationären Detailbereich und zur stationären Lösung hin.

7.3.4 Orientierte Relaxationszeit

Der numerische stabilisierende Einfluss der orientierten Relaxationszeit τ_{ORT} auf die diskretisierte Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo ist in Abbildung 7.12 gezeigt. Hier wird die Lösung der ungedämpften CC gegenüber der gedämpften CC_{ORT} zum stationären Zeitpunkt über die Auswertungslinie verglichen, welche mit dem Zeitintegrationschema nach Crank-Nicolson berechnet wurden. Die ungedämpfte Version zeigt deutliche Oszillationen vor dem thermischen Stoß und entgegen der Richtung der Systemgeschwindigkeit \boldsymbol{v} , was gängig bei advektiven dominanten Problemen ist (siehe Kapitel 4.5). Die Frage stellt sich, ob die negativen Temperaturschläge T_n physikalisch zu erwarten sind. Dieses Verhalten liegt nicht im thermodynamischen Rahmen dieser Arbeit und wird aufgrund der Existenz der Ausschläge an jedem Knoten als ein räumliches Diskretisierungsproblem beurteilt. Hinsichtlich der Symmetrie der instabilen Funktion zur

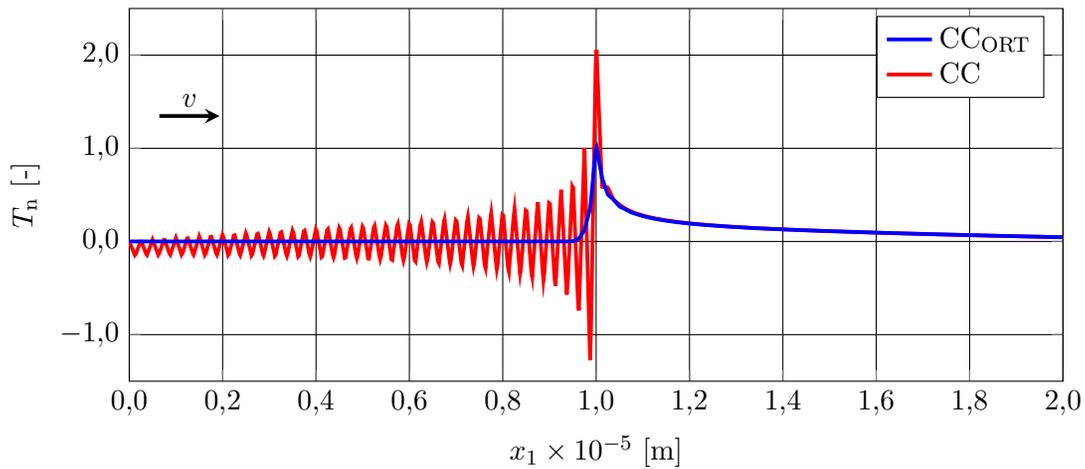


Abbildung 7.12: Einfluss der ORT-Methode auf die Lösung der Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 1,0$ im stationären Zustand $t = 10\tau$.

x_1 -Achse wird an die ORT-Methode die Bedingung gestellt, dass die numerische stabilisierte Berechnung eine Lösung in Form von Mittelwerten zwischen den Ausschlägen ausgibt. Nachweislich ist durch die blaue stabile Kurve in Abbildung 7.12 bewiesen, dass die ORT-Methode aus Kapitel 4.5.3 die Bedingung erfüllt.

7.3.5 Vergleich der Zeitintegrationen

Die zeitliche Diskretisierung der Wärmetransportgleichungen in eine ODE ist in Kapitel 5 gezeigt. Die darin aufgeführten Zeitintegrationen sind für die stabilisierte ODE nach Christov-Cattaneo mittels der ORT-Methode in Abbildung 7.13 gegenübergestellt. Betrachtet wird die Entwicklung des normierten Temperaturverlaufs T_n von Monitoring Punkt MP2 aus Abbildung 7.1 zum stationären Zustand $t = 10\tau$. Monitoring Punkt MP1 vor dem thermischen Stoß ist Null und damit ein Vergleich nicht aussagefähig. Die Berechnungen in 7.13 unterscheiden sich im instationären Bereich, erzielen aber die gleiche stationäre Lösung. Die Houbolt-Methode sticht dabei durch anhaltende Oszillationen im instationären Bereich bzw. im Nichtgleichgewichtszustand heraus, was damit begründet werden kann, dass sie auf der zentralen Differenzenmethode basiert und ein Gleichgewicht in $t + \Delta t$ annimmt (siehe Kapitel 5.2). Diese Oszillationen sind auch bei der Linearen-Beschleunigungs- und Wilson- Θ -Methode im Anfangszeitbereich $s = [0; 200]$ zu sehen, dessen Verläufe sich durch den identischen Ansatz verschwindend gering unterscheiden. Ihr Ansatz ist die Annahme der numerischen linearen Beschleunigung von \ddot{T} zwischen $t + \Delta t$ aus Kapitel 5.3 und die Oszillationen deuten darauf hin, dass physikalisch keine lineare Beschleunigung der thermischen Welle im Anfangszeitbereich vorliegt und die lineare Näherung somit falsch ist. Das bestätigt der Funktionsverlauf T_n der Newmark-Methode mit den Parametern nach Rostami & Kamgar [63]. Denn auch sie basiert auf der Linearen-Beschleunigungs-Methode (siehe Kapitel 5.4), jedoch erhält man durch korrekte Wahl der Stabilitätsparameter eine konstante Beschleunigung der Feldgröße T und damit

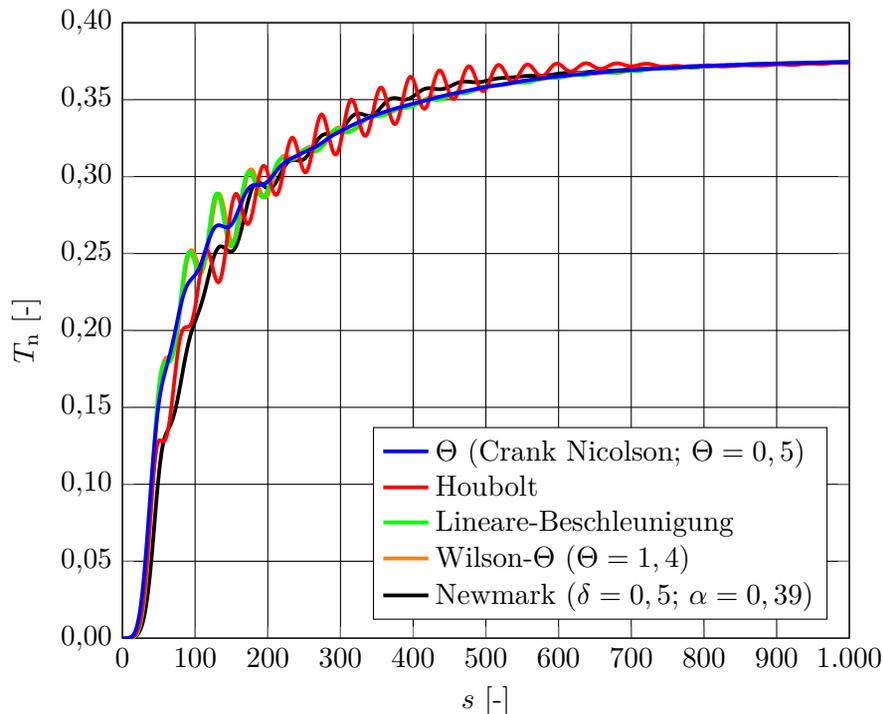


Abbildung 7.13: Vergleich der Zeitintegrationen zu $Ma_{th} = 1,0$ mittels der Temperaturen T_n im Monitoring Punkt MP2 zu CC_{ORF} .

wird die physikalische konstante Wellenausbreitung numerisch richtig genähert. Den aufgeführten Zeitintegrationen steht die Θ -Methode nach Crank-Nicolson ($\Theta = 0,5$) mit dem besten Lösungsverlauf von T_n gegenüber. Die Θ -Methode zeigt sowohl im instationären Nichtgleichgewichtszustand als auch zum stationären Gleichgewichtszustand hin ein stabiles Berechnungsverhalten. Weiterführend sind auch zufriedenstellende Lösungen durch die Θ -Familie für Werte $\Theta \geq 0,5$ erwartbar.

7.3.6 Lineare und quadratische Elemente

Vor dem Hintergrund der hyperbolischen PDGL der Christov-Cattaneo-Gleichung ist es das Ziel, mit dem quadratischen Element den Wellencharakter physikalischer darzustellen, als das mit dem steifen linearen Element möglich ist. Das lineare Lagrange-Element aus Kapitel 4.3.1 und das quadratische Serendipity-Element aus Kapitel 4.3.2 werden in Abbildung 7.14 verglichen, worin die Temperaturverläufe T_n nach Crank-Nicolson mit $\Theta = 0,5$ ermittelt wurden. In Abbildung 7.14a) ist die instationäre Lösung der linearen und quadratischen Elemente über den thermischen Stoß gegenübergestellt. Das quadratische Element führt zu Oszillationen linksseitig vom Stoß bzw. entgegen der Systemgeschwindigkeit v und damit liegen numerische Instabilitäten vor wie bei gängigen advektiven dominieren Problemen (siehe Kapitel 4.5). An der Stoßfront existiert durch den senkrechten Temperaturverlauf T_n bei $x_1 = 0,98 \times 10^{-5}$ m ein Temperatursprung. Hier und über den Sprung hinweg ist der weitere Temperaturverlauf von quadratischen und linearen Elementen identisch.

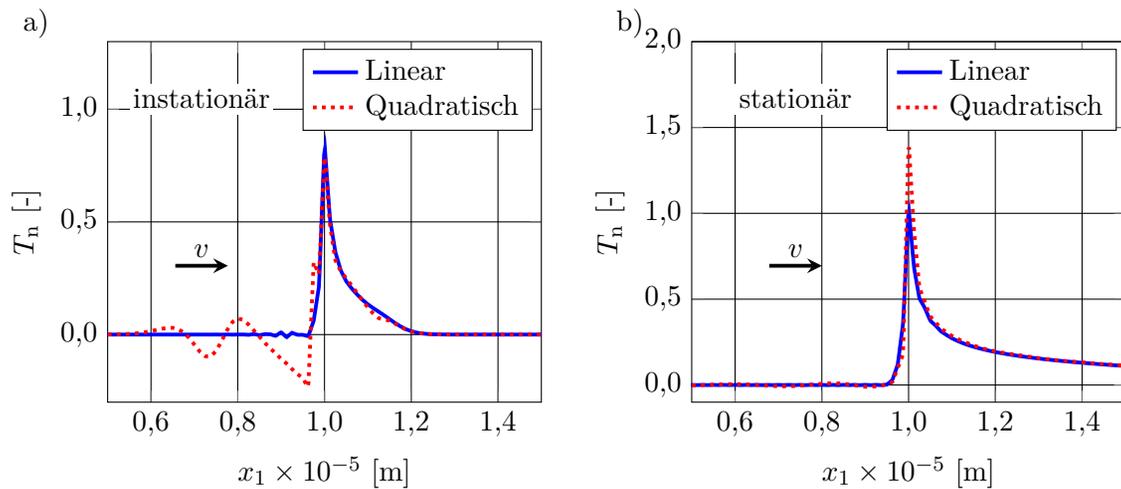


Abbildung 7.14: Temperaturverteilung T_n zu $Ma_{th} = 1,0$ mit linearen Lagrange- und quadratischen Serendipity-Element zu CC_{ORT} mit konzentrierter Massenmatrix: a) im instationären Zustand $t = \tau$ und b) im stationären Zustand $t = 10\tau$.

7.3.7 Netzkonvergenzstudie

Der Einfluss der Netzfeinheit auf die FEM-Lösung bei $Ma_{th} = 1,0$ nach Christov-Cattaneo ist in den Abbildungen 7.15 und 7.16 gezeigt. Das Ausgangsnetz ist als die mittlere Netzfeinheit bezeichnet, welches aus identisch großen linearen Viereckelementen der Randlänge $L_{Rand} = 1,25 \times 10^{-7}$ m besteht, wie es auch für die vorangegangenen Untersuchungen verwendet wurde. Für die Konvergenzstudie ist die generische Geometrie in Abbildung 7.1 durch das grobe Netz mit doppelter Elementrandlänge $L_{Rand} = 2,50 \times 10^{-7}$ m und das feine Netz mit halbiertes Randlänge $L_{Rand} = 0,625 \times 10^{-7}$ m diskretisiert. Die Zeitschritte Δt werden individuell für jede Netzaufösung über die Stabilitätsbedingung zur Diffusionszahl mit $d = 0,5$ berechnet (siehe Kapitel 3.2) und betragen $\Delta t_{grob} = 6,25 \times 10^{-10}$ s, $\Delta t_{mittel} = 1,56 \times 10^{-10}$ s und $\Delta t_{fein} = 3,91 \times 10^{-11}$ s. Abbildung 7.15a) stellt die Netze zur normierten Temperaturverteilung T_n im thermischen Stoß gegenüber und zeigt auf, dass der kleinste Gradient und die niedrigsten Werte mit der groben Verfeinerung erreicht werden. Dem gegenüber steht das feine Netz, welches den größten Gradienten und die beste Näherungslösung zum erwarteten Temperatursprung an der thermischen Stoßfront mit den höchsten Werten erzielt. Hinter der Stoßfront und in positive x_1 -Richtung sind die Temperaturausläufe T_n aller Netze identisch. Zusätzlich ist in 7.15b) der transiente Verlauf der Temperatur T_n in den Monitoring Punkten MP1 und MP2 aus Abbildung 7.1 über s zum stationären Zustand ergänzt. Vom Ort der Quelle $x_1 = 1 \times 10^{-5}$ m ist MP1 um $-C\tau/2$ entgegen und MP2 um $+C\tau/2$ in Richtung der Systemgeschwindigkeit positioniert. Daher sind die ermittelten Temperaturen T_n für MP1 vor dem Stoß kleiner als für MP2 nach dem Stoß. Hier zeigt sich, dass das grobe Netz deutliche Über- und Unterschwingen zu Beginn der numerischen Berechnung aufweist. Das mittlere und feine Netz im instationären Zustand bis $s = 200$ haben hier kleine Oszillationen, jedoch ein annähernd

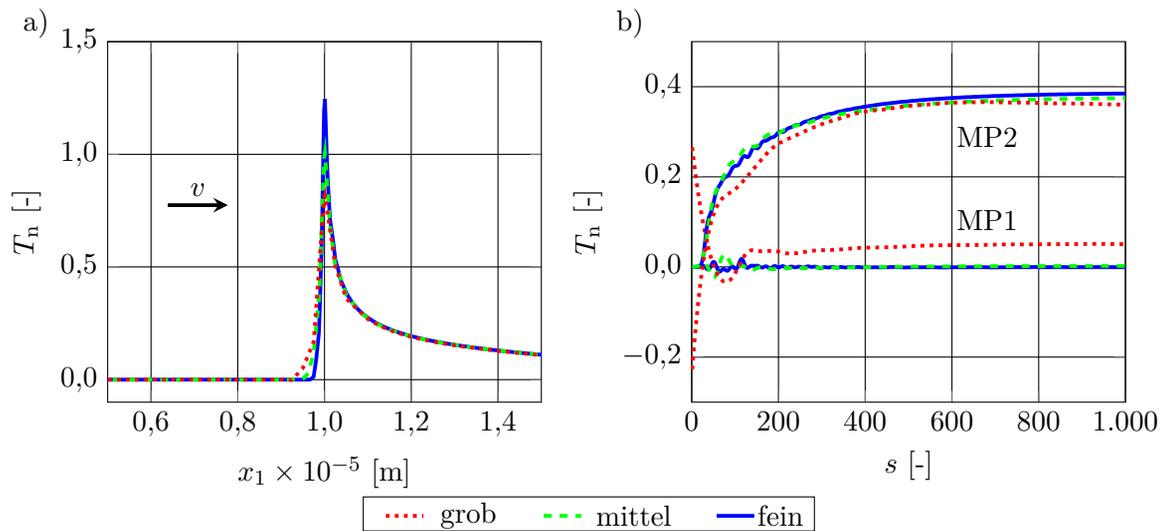


Abbildung 7.15: Konvergenzverhalten der Netzfeinheiten zu $Ma_{th} = 1,0$: a) Stationäre Temperaturverteilung T_n über den thermischen Stoß und b) instationäre Verläufe der Monitoring Punkte MP1 und MP2.

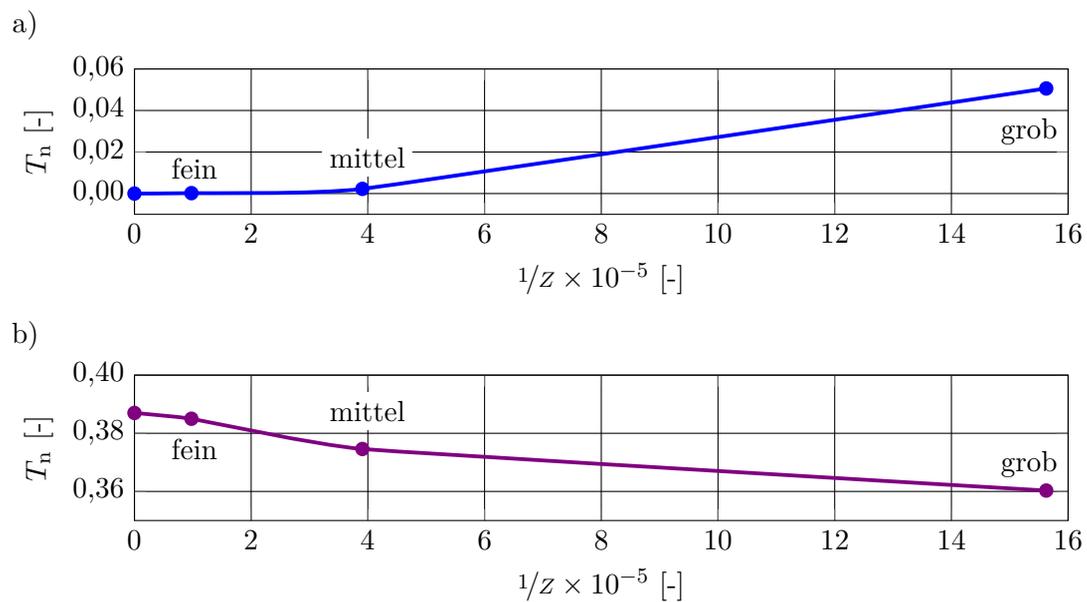


Abbildung 7.16: Konvergenzverhalten der Temperatur T_n über die Netzfeinheit $1/z$ zu $Ma_{th} = 1,0$ im stationären Zustand: a) Monitoring Punkt MP1 vor und b) Monitoring Punkt MP2 hinter dem Stoß.

physikalisch korrektes Verhalten. Alle Netzfeinheiten konvergieren mit zunehmenden Berechnungsschritten in den Monitoring Punkten zur identischen Lösung, wobei das grobe Netz aufgrund der Position von MP1 in der Stoßfront stets erhöhte Werte zeigt.

Ergänzend führt Abbildung 7.16 das Konvergenzverhalten der normierten Temperatur T_n über die Inverse der Netzfeinheit $1/z$ auf. Die Stützstellen der Netzgrößen sind beschrif-

tet und der prognostizierte Trend über eine fiktive Verfeinerung bei $1/z > 0$ eingetragen. Abbildung 7.16a) zu MP1 unterstreicht das Verhalten in Abbildung 7.15, dass die thermische Stoßfront bei feinerem Netz besser aufgelöst wird, der Gradient größer ist sowie näher an der Quelle liegt, wodurch vor der Wellenfront bei $x_1 = 1 \times 10^{-5} - c\tau/2$ die Temperatur erwartungsgemäß $T_n = 0$ ist. Abbildung 7.16b) führt die Entwicklung der Temperatur hinter dem Stoß über die Netzgröße auf und deutet auf höhere Temperaturen T_n bei feinerem Netz hin. Die Netzstudie zeigt, dass das grobe Netz dämpfende Eigenschaften auf die transiente Lösung hat, führt aber zu unphysikalischen Ergebnissen und Abweichungen im stationären Zustand. Das feine Netz löst die Stoßwelle am besten auf, aber zuungunsten von geringen Oszillationen im instationären Zustand. Das mittlere Netz vereint die Vorteile beider Netze und ist für die Untersuchungen der beste Kompromiss.

7.4 Zusammenfassung

Die Studie an der generischen Geometrie zeigt Unterschiede in den Lösungen der Wärmetransportgleichungen ab einer thermischen Mach-Zahl von $Ma_{th} > 0,1$ und damit ist dieser Wert die untere Grenze für die notwendige Anwendung der hyperbolischen Gleichung (vgl. Kapitel 2.1.5). Während im instationären Zustand das Paradoxon einer infiniten Temperaturausbreitung der Fourier-Gleichung über die erweiterten Formen nach Cattaneo-Vernotte und Christov-Cattaneo aufgehoben wird, ist im stationären Zustand $t \rightarrow \infty$ nur noch die Christov-Cattaneo-Gleichung sinnvoll anwendbar (vgl. Kapitel 2.2.1). Unter transkritischen Bedingungen für $Ma_{th} = 1,0$ zeigen die berechneten Temperaturprofile T sowie θ und die erweiterte Entropie s_{EIT} durch die Christov-Cattaneo-Gleichung einen thermischen Stoß. Zudem gibt die erweiterte Entropie s_{EIT} und die Änderung Δs_{EIT} aus Kapitel 2.3.1 Auskunft über den Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtszustand in der diskretisierten Domäne. Der Nichtgleichgewichtszustand wird über die Nichtgleichgewichtstemperatur θ aus Kapitel 2.3.2 im instationären Anfangszeitbereich deutlich gezeigt und unterstreicht die einhergehende Trägheit der Temperatur über die hyperbolischen Wärmetransportgleichungen. Mit Blick auf die numerische Diffusion ist die ORT-Methode aus Kapitel 4.5.3 hilfreich, denn sie unterbindet die unphysikalischen Oszillationen vor dem thermischen Stoß. Des Weiteren sind die numerischen Einflüsse der Zeitintegrationen aus Kapitel 5 beachtlich, wobei mit der Θ -Methode nach Crank-Nicolson die besten Ergebnisse erzielt werden. Zudem sind lineare Elemente stabiler als quadratische, jedoch tendieren die quadratischen Elemente zu einem genaueren physikalischen Temperatursprung in der thermischen Stoßfront (vgl. Kapitel 4.3). Diese Genauigkeit kann aber über ein feineres Netz in der Konvergenzstudie noch verbessert werden, allerdings zulasten von Instabilitäten.

8 Anwendungsfälle

8.1 Einlaufvorgang in der Flugturbine

Nach Bunker [7] sind in modernen Flugturbinen bis zu einem Drittel der aerodynamischen Verluste auf den Bereich der Schaufelspitze zurückzuführen. Diese Verluste entstehen hauptsächlich durch die Spaltströmung bzw. Leakage zwischen Schaufelspitze und Gehäuse. Folglich ist die Minimierung der Spaltgröße das Ziel für eine effizientere Turbine. Die Spaltenstehung ist eine Kopplung thermischer und mechanischer Ursachen, die auf transiente Belastungen der Turbine während des Kaltstarts, Lastwechsels und Abschaltvorgangs zurückgehen [7]. In diesen Zuständen kann es zum Reibkontakt zwischen den Turbinenschaufelspitzen und dem Gehäuse aufgrund unterschiedlicher Ausdehnung kommen. Hinsichtlich des Kaltstarts dehnen sich die Schaufeln durch die Zentrifugalkraft radial aus, während das Gehäuse nur langsam thermisch wächst, was zu einem zunehmenden Kontakt führen kann. Ebenfalls möglich ist ein kurzzeitiger Reibkontakt während des Lastwechsels, bei einer abrupten Drehzahlerhöhung oder unzureichender Schaufelkühlung. Während des Abschaltvorgangs ist die thermische Schrumpfung des Gehäuses größer als die des Rotors, was zu intensivem Kontakt führen kann. Dieser Reibkontakt ist mit Materialverlusten verbunden und führt zur Zerstörung der Bauteile, wie in Abbildung 8.1 dargestellt. Um die Zerstörung im instationären und Leckagen im stationären Zustand zu vermeiden, ist das Angleichen von Schaufelspitzen und Gehäuse über ein dynamisches Einlaufsystem möglich [61, Kap. 2]. Ein solches System besteht aus einer Einlaufschicht auf dem Gehäuse und einem Schnittmaterial auf der Schaufelspitze. Beim ersten Einlaufvorgang kommt es gewollt zum Reibkontakt, das Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem gleicht sich an, um dann die Reib- und Spaltverluste gegen Null gehen zu lassen. Aus thermodynamischer Sicht wird durch die Relativbewegung im Reibkontakt ein Teil der Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt [23]. Diese Wärmequelle und Relativbewegung verursachen asymmetrische Temperaturprofile im Kontaktsegment der Schaufel sowie im Gehäuse und können zu thermischen Spannungen σ_{therm} und folglich zur Rissbildung führen. Die direkte proportionale Abhängigkeit der thermischen Spannungen σ_{therm} zur Temperaturänderung ΔT zeigt [62, Kap. 3.6]:

$$\sigma_{\text{therm}} = -E\alpha_{\text{therm}}\Delta T. \quad (8.1)$$

Aus Gleichung (8.1) ist ersichtlich, dass Zugspannungen für $\Delta T < 0$ und Druckspannungen für $\Delta T > 0$ vorliegen.

Vor dem Hintergrund eines thermisch robusten und in der Praxis zuverlässigen Einlaufsystems werden die Temperaturfelder eines Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystems simuliert und ausgewertet. Die Simulationen werden mit Geometrien zu Prüfstand- und Turbinenbedingungen von Rolls-Royce® durchgeführt [21] und sind in Kapitel 8.1.1 beschrieben. Darin

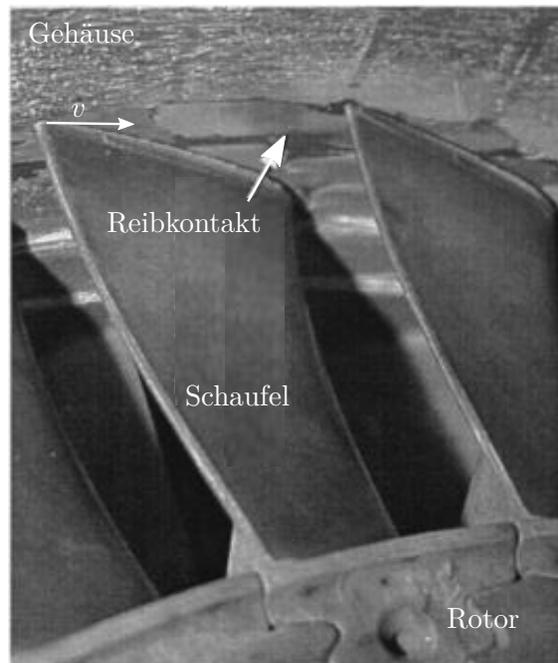


Abbildung 8.1: Schaufel-Gehäuse-Reibkontakt [15].

werden die Materialparameter, der Aufbau und die Berechnung zur Wärmeflussdichte zum Reibkontakt detailliert aufgeführt. Anschließend werden in Kapitel 8.1.2 die Auswertungen der berechneten Temperaturprofile T_n aus den Simulationen gezeigt und abschließend die wichtigsten Erkenntnisse aus dieser Untersuchung in Kapitel 8.1.3 zusammengefasst.

8.1.1 Geometrien und Randbedingungen

Um Aufschluss über das 2-D-Temperaturfeld T_n während des Einlaufvorgangs zu erhalten, wird ein vereinfachtes und ein reales Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem betrachtet. Das vereinfachte Modellsystem ist in Abbildung 8.2 dargestellt und besteht aus einzelnen Materialschichten. Um ein möglichst genaues Temperaturfeld zu berechnen, ist ein realitätsgetreuer Aufbau notwendig und wird daher aus dem Schliffbild in Abbildung 8.3 für die Simulationen entnommen. Der Unterschied zwischen beiden Systemen liegt im Aufbau der Schaufelspitze. Im vereinfachten Modell wird eine homogene Schicht aus dem Schnittmaterial aus kubischem Bornitrid (cBN) angenommen, während im realen Aufbau eine heterogene Mischzone aus der Haftvermittlerschicht Nickel-Aluminium-Tantal (NiAlTa) und den eingebetteten cBN-Schnittpartikeln vorliegt. Die Gemeinsamkeit der Modellsysteme ist das Schaufelgrundmaterial aus CMSX4 und die Einlaufschicht am Gehäuse aus Magnesium-Spinell (Mg-Spinell). Die zugehörigen Materialparameter sind in Tabelle 8.1 angegeben. Während die Temperaturleitfähigkeiten α aus Materialdatenblättern bezogen wurden, werden die Größen der Relaxationszeiten τ und thermischen Wellengeschwindigkeiten C gemäß den Formeln in Kapitel 2.2.3 berechnet. Eine Analyse der Tabelle ergibt, dass eine erste Aussage über die Wärmetransporteigenschaft eines Materials über die Temperaturleitfähigkeit α getroffen werden kann und weiter durch die Wellengeschwindigkeit C

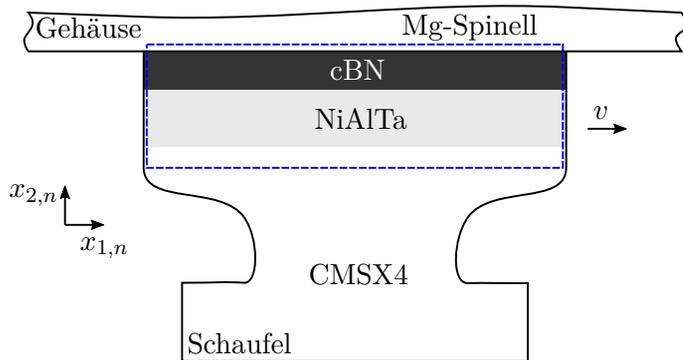


Abbildung 8.2: Vereinfachtes Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem für die numerischen Simulationen.

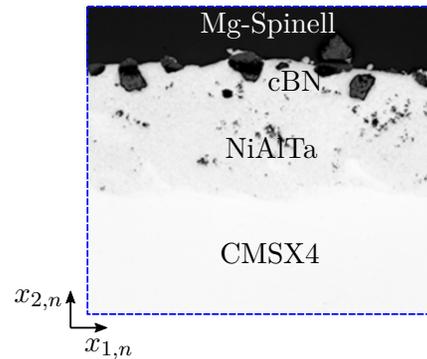


Abbildung 8.3: Schlibbild vom Fraunhofer-IWS® [54].

Tabelle 8.1: Materialparameter zum Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem.

Material	CMSX4 ^[82]	NiAlTa ^[27]	cBN ^[65, 20]	Mg-Spinell ^[65, 31]
α [m ² s ⁻¹]	$4,8 \times 10^{-6}$	$2,0 \times 10^{-5}$	$2,7 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-7}$
τ [s]	$1,1 \times 10^{-12}$	$2,2 \times 10^{-12}$	$4,2 \times 10^{-12}$	$8,6 \times 10^{-13}$
C [m s ⁻¹]	2089	3015	8018	934

bestätigt werden kann. Es ist der Wärmetransport proportional zur Temperaturleitfähigkeit α und da α der dominierende Parameter in der Berechnung der Wellengeschwindigkeit C nach Gleichung (2.16) ist, stellt sie die richtungsweisende Eigenschaft für einen guten oder schlechten Wärmetransport dar. Wird hierzu cBN als Beispiel herangezogen, spricht die vergleichsweise hohe Temperaturleitfähigkeit α für eine gute Diffusionseigenschaft bzw. für einen guten Wärmetransport. Dies wird durch die thermische Geschwindigkeit C von cBN unterstrichen. Allerdings steht dem eine große Relaxationszeit τ gegenüber, welche auf ein träges Wärmetransportverhalten hindeutet, aber unwesentlich ins Gewicht fällt. Mg-Spinell hingegen zeigt schlechtere Wärmetransporteigenschaften mit einer moderaten Temperaturleitfähigkeit α von $\alpha_{\text{Mg-Spinell}}/\alpha_{\text{cBN}} = 0,3\%$ und einer kleinen Relaxationszeit τ von $\tau_{\text{Mg-Spinell}}/\tau_{\text{cBN}} = 21\%$. Dies spiegelt sich auch in der geringen Wellengeschwindigkeit C von Mg-Spinell wider.

Die Geometrie des Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystems für die numerischen Untersuchungen ist in Abbildung 8.4 gezeigt und angelehnt an die vereinfachte Modellvorstellung aus Abbildung 8.2. Die schraffierten Ränder stellen adiabate von-Neumann-Randbedingungen dar, die übrigen Ränder erhalten eine konvektive Randbedingung nach Robin. Die Umgebungstemperatur T_∞ , die Wärmeübergangskoeffizienten h_∞ und die Initialtemperatur $T_0 = T_\infty$ der Domäne sind in Tabelle 8.2 aufgeführt und über $T_n = T/T_{\text{max}}$ normiert, um später die Ergebnisse der Geometrien vergleichen zu können. Die Initialisierung geschieht unter der Annahme, dass zur Anfangszeit ein thermisches Gleichgewicht im Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem und zwischen diesem System und der Heißgasströmung vorliegt. Die konvektive Heißgasströmung zur Robin-Randbedingung kann unter Prüfstandbedin-

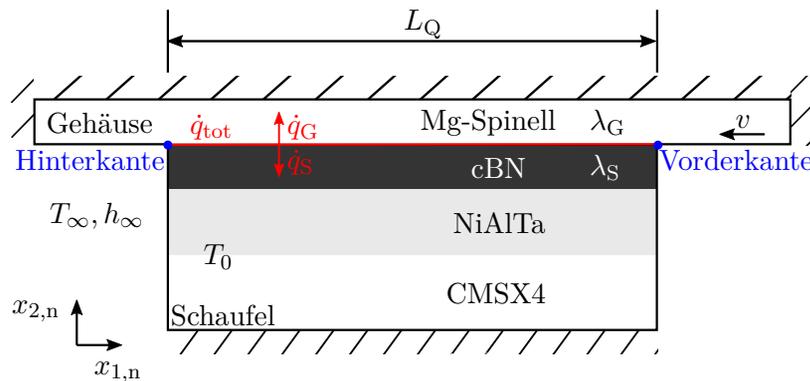


Abbildung 8.4: Geometrie zum Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem mit Randbedingungen.

Tabelle 8.2: Bedingungen zu numerischen Untersuchungen.

Bedingungen	Bezeichnung	v [m s ⁻¹]	$Ma_{th,MgS}$	t_f [μs]	T_{max} [K]	$T_{0,\infty,n}$	$T_{W,n}$	h_∞ [W m ⁻² K ⁻¹]
Prüfstand	LTSL®	200	0,21	250	2250	0,61	0,89	1380
	Oerlikon-Metco®	410	0,44	500				2123
Turbine	Fraunhofer-IWS®	200	0,21	250	2035	0,67	0,98	1380

gungen mit einem Flammenerzeuger simuliert werden [52, Kap. 1.3.4] und ist mit den Turbinenbedingungen in diesen Simulationen identisch [21]. Unter Prüfstandbedingungen wird das vereinfachte System aus Abbildung 8.2 herangezogen und mit den Schaufelspitzen-geschwindigkeiten v für den Testfall bei Leonardo Testing Services Limited ® (LTSL) an der Universität Sheffield mit $v = 200$ m s⁻¹ und bei Oerlikon-Metco® mit $v = 410$ m s⁻¹ berechnet. Zu den Untersuchungen in Turbinenbedingungen wird die Schaufel nach Abbildung 8.3 angepasst und eine Geschwindigkeit von $v = 200$ m s⁻¹ festgelegt. Ergänzend ist in Abbildung 8.4 der Schaufelspitzenbereich aus Abbildung 8.1 in das kartesische genäherte 2-D-Koordinatensystem projiziert, wodurch die Schaufelspitzen-geschwindigkeiten über diesen reduzierten Bereich als konstant angenommen werden. Da bei den numerischen Untersuchungen die langrangesche Betrachtungsweise herangezogen wird und damit die Schaufel der Bezugspunkt der mitbewegten Beobachtung ist, wird in den Simulationen dem Gehäuse die Geschwindigkeit v aufgeprägt (siehe Abbildung 8.4). Daraus folgt, dass eine thermische Mach-Zahl bezüglich des Gehäuses und dahingehend der Mg-Spinell-Einlaufschicht berechnet werden muss. Die thermischen Mach-Zahlen $Ma_{th,MgS}$ sind in Tabelle 8.2 ergänzt und unterstreichen die Notwendigkeit der Anwendung der Wellengleichung aufgrund der Gültigkeitstheorie aus Kapitel 2.1.5, da $Ma_{th,Mg-Spinell} > 0,1$ ist. Des Weiteren ist in Abbildung 8.4 die Randbedingung der totalen Wärmeflussdichte \dot{q}_{tot} im Kontaktsegment definiert und über Versuchsdaten nach [57] in Tabelle 8.3 berechnet. Eine direkte Messung in der Kontaktebene ist mit der aktuellen Prüfstandtechnik im Versuch nicht möglich. Die Wärmeflussdichte des Reibeintrags resultiert jedoch aus der irreversiblen Umwandlung der kinetischen Energie in mechanische Verformungsenergie und thermische Energie. Hierzu liegen die TBT-Messdaten aus einer Versuchsdurchführung

Tabelle 8.3: Berechnete Reibwärmeflussdichte.

μ	p_n [MPa]	v [m s ⁻¹]	\dot{q}_{tot} [MW m ⁻²]	β [%]	\dot{q}_S [MW m ⁻²]	\dot{q}_G [MW m ⁻²]
0,47	9,38	200	875	44	384	491
		410	1794	35	634	1160

nach Paradoy [57] vor. Mit dem gemessenen Reibungskoeffizienten $F_t/F_n = \mu$ und dem Normaldruck p_n auf die Schaufelspitze bzw. Kontaktfläche sowie durch die Schaufelspitzen- und Schaufelwurzengeschwindigkeiten v ist eine analytische Berechnung der zeitlich und örtlich gemittelten Reibwärmeflussdichte \dot{q}_{tot} möglich:

$$\dot{q}_{\text{tot}} = \mu p_n v. \quad (8.2)$$

Die analytische Wärmeverteilung in Abbildung 8.4 zwischen Schaufel \dot{q}_S und Gehäuse \dot{q}_G ist nach Blok [50, Kap. 2.13] gegeben. Er bilanziert die totale Reibwärmeflussdichte \dot{q}_{tot} zu den Wärmeflussdichten über:

$$\dot{q} = \dot{q}_S + \dot{q}_G. \quad (8.3)$$

Zudem wird der intrinsische Wärmeverteilungskoeffizient β eingeführt

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_G}{\lambda_S} \sqrt{1 + Pe_Q}}, \quad (8.4)$$

welcher über das Wärmeleitungsverhältnis λ_G/λ_S und der quellenlängenspezifischen Péclet-Zahl aus Gleichung (6.3) bestimmt wird:

$$Pe_Q = \frac{vL_Q}{4\alpha_G}. \quad (8.5)$$

Damit ist der Wärmefluss \dot{q}_S in die Schaufel

$$\dot{q}_S = \beta \mu p_n v \quad (8.6)$$

und \dot{q}_G in das Gehäuse

$$\dot{q}_G = (1 - \beta) \mu p_n v. \quad (8.7)$$

Die berechneten Werte sind in Tabelle 8.3 aufgeführt. Des Weiteren sind der intrinsische Aufteilungskoeffizient β und die Wärmeflussdichten über die Geschwindigkeit v in Abbildung 8.5 aufgetragen. Eine Analyse von Abbildung 8.5 zeigt die Abhängigkeit der Wärmeverteilung von der Reibgeschwindigkeit v . Während bei geringen Geschwindigkeiten v der Wärmeeintrag primär in die Schaufel fließt, liegt mit zunehmender Geschwindigkeit v und nach einem Umschlagspunkt bei $v = 125 \text{ m s}^{-1}$ mit $\beta_{125} = 50\%$ der primäre Eintrag in das Gehäuse vor. Thermodynamisch belegt werden kann das durch eine Überlegung: In gleicher Zeit steht bei höherer Geschwindigkeit v mehr kühles Gehäusematerial zur Verfü-

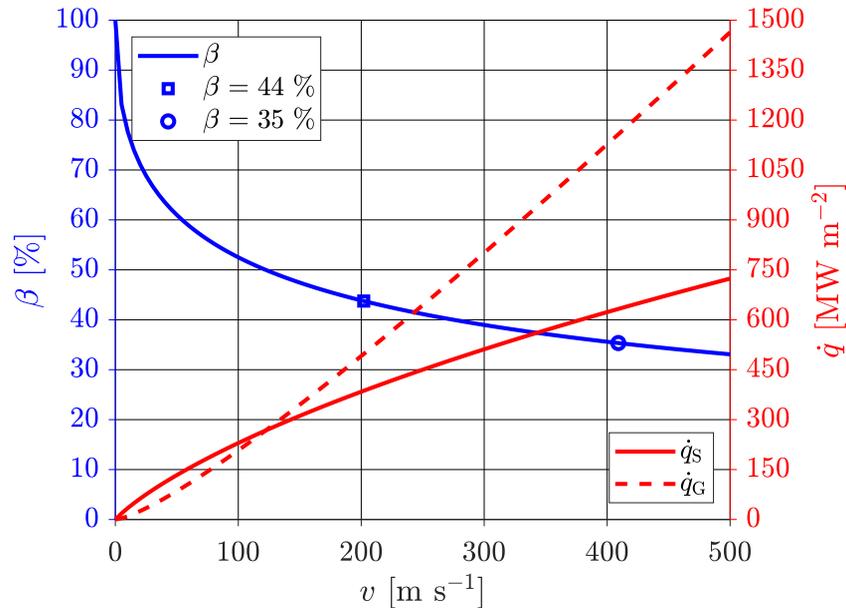


Abbildung 8.5: Intrinsischer Aufteilungskoeffizient β und Wärmeflussdichten \dot{q} über Reibgeschwindigkeit v zu cBN (Schaufel) und Mg-Spinell (Gehäuse).

gung, wodurch mehr Wärme in das Gehäuse transferiert werden kann [5, Kap. 6.2.1.2.2]. Bei Untersuchungen mit $v = 200 \text{ m s}^{-1}$ und $v = 410 \text{ m s}^{-1}$ ergeben sich Aufteilungskoeffizienten von $\beta_{200} = 44\%$ und von $\beta_{410} = 35\%$. Damit erfährt das Gehäuse eine deutlich höhere Wärmeflussdichte, was den Vorteil eines erzwungenen Abtransports der Wärme von der Schaufelspitze mit sich bringt und damit die thermische Belastung weniger stark zunimmt. Abschließend gelten die Kurven in Abbildung 8.5 nur für die Schaufel-Gehäuse-Reibpaarung aus cBN und Mg-Spinell und unterscheiden sich daher von anderen Materialpaarungen. Dennoch ist bei einer ähnlichen Reibpaarung das exponentielle Abfallen von β , die progressive Zunahme von \dot{q}_G und die degressive Abnahme von \dot{q}_S allgemeingültig. Die Wärmeflussaufteilung wird in den Ergebnissen an dem Vorgehen von Puls, Klocke & Veselovac [60] angelehnt und in Tecplot® durchgeführt:

1. Die Werte von dT werden im Kontrollvolumen der ersten Elementreihen zum Kontaktsegment von Schaufel und Gehäuse integriert, wobei das Integral K m^{-2} ergibt und mit der Integrationsfläche A multipliziert werden muss.
2. Dann wird $\dot{q} = \rho c dT / (t_t - t_0)$ in W m^{-2} berechnet und mit der Quellenlänge L_Q bzw. der Kontaktsegmentlänge multipliziert.

Eine Prüfung der berechneten Wärmeflussdichte \dot{q}_{tot} in Tabelle 8.3 ist wichtig, um ihre Größenordnung zu bestätigen und die Temperaturfelder verlässlich auswerten zu können. Zur Prüfung liegen keine Messdaten zum aktuellen Problemfall vor, daher ist weitere Literatur heranzuziehen, wie bspw. von Munz [55] und Pychinski [61]. Letzte Referenz wird hier verwendet, in welcher experimentell ein numerisches Modell zum Anstreifenverhalten von Labyrinthdichtungen mit Honigwabeneinlaufbelägen für Turbinen entwickelt wurde.

Darin wurde ein Schaufelblech aus V2A mit einer Rotorscheibe aus 42CrMo4 in einem Anstreifvorgang zum Reibkontakt gebracht. Mithilfe eines 3-D-Kraftsensors wurden die Radial- und Querdrücke während des Versuchs gemessen und die Reibungskoeffizienten μ sowie Reibwärmeflussdichten \bar{q}_R berechnet. Der Vergleich mit Pychinski [61, S. 47, Abb. 13a)] zeigt, dass die Größenordnung in Megapascal mit dem hier verwendeten Druck übereinstimmt. Weiterhin sind die Reibungskoeffizienten nach [61, S. 48, Abb. 14a)] ähnlich, aber mit Vorsicht zu beurteilen, da eine unterschiedliche Materialpaarung vorliegt. Als letzte Gegenüberstellung dienen die Wärmeflussdichten im Kontaktsegment. Die Abhängigkeit der Wärmeflussdichte von der Kontaktfläche und der Relativgeschwindigkeit v erschwert einen direkten Vergleich. Pychinski führt Werte von 15 MW m^{-2} bis 70 MW m^{-2} für Geschwindigkeiten von $v = 55 \text{ m s}^{-1}$ bis $v = 165 \text{ m s}^{-1}$ bei unterschiedlichen Einlauftiefen S in [61, S. 48, Abb. 14c)] auf. Diese sind im Vergleich zu den berechneten Werten aus Tabelle 8.3 um ein Vielfaches geringer, da im Versuch vermutlich mehr Reibarbeit in Verformungsarbeit umgesetzt wurde. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass im Versuch metallisches Material verwendet wurde, während es sich in den numerischen Untersuchungen um hartes keramikähnliches Material handelt. Zudem erfolgte die analytische Näherungsrechnung von \dot{q}_{tot} unter Ausschluss elastischer und plastischer Verformung oder Bruchmechanik. Dennoch sind die Ergebnisse für die Wärmeflussdichten \dot{q} durch Gleichung (8.2) und die bekannten Randbedingungen als gut befunden. Trotzdem sollten die analytischen Werte durch eine experimentelle Untersuchung mit identischen Randparametern überprüft werden.

Zusammengefasst werden drei Simulationen mit den Materialparametern aus Tabelle 8.1 aufgesetzt und nach den Randbedingungen aus Abbildung 8.4 sowie aus den Tabellen 8.2 und 8.3 durchgeführt:

1. Untersuchungen nach den Prüfstandbedingungen bei LTSL® mit $v = 200 \text{ m s}^{-1}$,
2. Untersuchung nach den Bedingungen im Oerlikon-Metco® Prüfstand mit $v = 410 \text{ m s}^{-1}$, worin das vereinfachte Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem aus Materialschichten in Abbildung 8.2 verwendet wird.
3. Realitätsnähere Untersuchungen unter Turbinenbedingungen bei $v = 200 \text{ m s}^{-1}$, wobei die Geometrie auf das Schliffbild nach Fraunhofer-IWS® in Abbildung 8.3 angepasst wird.

Für alle Geometrien gilt eine Reibkontaktlänge bzw. Einlauflänge von 100 mm. Mit Blick auf den Versuch und einen tatsächlichen Kontakt in einer realen Turbine sind die Einlaufängen vermutlich kleiner. Daher sind die nachfolgenden Ergebnisse konservativ einzuschätzen.

Abschließend werden die numerischen Domänen, wie in Abbildung 8.6 dargestellt, mit einem verfeinerten Netz an der Schaufelhinterkante und einem Wachstum von $g = 1,5\%$ (engl. grading) diskretisiert. Damit ergibt sich für LTSL und Oerlikon-Metco jeweils ein Netz mit einer Elementanzahl von 41.401 und 41.664 Knoten. Für die realitätsnähere Si-

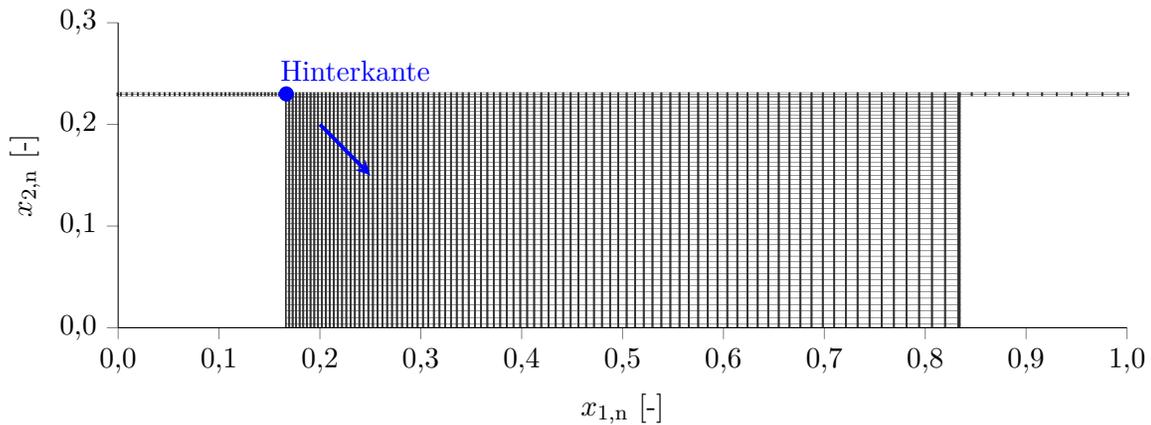


Abbildung 8.6: Diskretisiertes Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem mit Verfeinerung an Hinterkante und Elementwachstum von $g = 1, 5\%$ (blauer Pfeil) in $x_{1,n}$ - und $x_{2,n}$ -Richtung.

mulation ist das Fraunhofer-IWS®-Netz feiner aufgelöst und umfasst 115.158 Elemente mit 115.986 Knoten. Abschließend wird die Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo in Kombination mit der Crank-Nicolson-Zeitintegration ($\Theta = 0,5$) verwendet und die Simulationen mithilfe der SUPG aus Kapitel 4.5.2 stabilisiert.

8.1.2 Auswertung und Ergebnisse

Abbildung 8.7 zeigt das Temperaturfeld des Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystems nach einer Einlaufänge von 100 mm bzw. zum Zeitpunkt von 500 μs , wie es sich in der Simulation unter den Prüfstandbedingungen bei LTSL® mit $v = 200 \text{ m s}^{-1}$ entwickelt hat. Der Temperaturverlauf T_n ist in Abbildung 8.10 auf Seite 87 über das Kontaktsegment aufgetragen. Das Temperaturfeld ist asymmetrisch und es bildet sich ein sichelförmiges Profil mit einem Temperaturanstieg von der Schaufelvorderkante zur Hinterkante aus. An dieser Stelle wird die maximale Systemtemperatur mit $T_n = 0,82$ erreicht und ist gegenüber der Initialtemperatur $T_{0,n}$ um $\Delta T_n = 0,24$ erhöht. Für die hier angenommene Modellvorstellung einer Streifenquelle im Kontaktsegment der Bauteiloberflächen von Schaufel und Gehäuse ist das Ergebnis als physikalisch korrekt zu bewerten, da der advective Transporteinfluss der Relativgeschwindigkeit v das Temperaturprofil in die negative $x_{1,n}$ -Richtung verzerrt. Zudem unterstützt die Erkenntnis aus dem vorangegangenen Kapitel 8.1.1 diese Ausbildung des Temperaturfeldes, indem an der Schaufelvorderkante kühles Gehäusematerial mehr Wärme abtransportiert als an der Hinterkante, wo sich die Temperatur gleichmäßiger zwischen Schaufel und Gehäuse verteilt. Die Wärmeverteilung ergibt sich zu $\beta = 14\%$ und damit ist sie deutlich geringer, als in Tabelle 8.3 mit $\beta = 44\%$ angegeben. Der Unterschied ergibt sich dadurch, dass diese Ergebnisse im Nichtgleichgewicht erschlossen wurden und sich der Wärmetransport über die erweiterten Transportgleichungen noch einstellen muss. Ein Temperatursprung liegt beim Übergang von der Schaufelspitze aus cBN auf die Haftvermittlerschicht aus NiAlTa vor und ist über den Konturverlauf sowie der Grenz-

linie auf Höhe von $x_{2,n} = 0,18$ erkennbar. Dieser Sprung ist die Konsequenz aus der geringeren Temperaturleitfähigkeit α von NiAlTa im Vergleich zu cBN. Die Haftvermittlerschicht aus NiAlTa wirkt damit als eine Isolation und vermeidet einen gleichmäßigen Wärmeabtransport. Der sich einstellende Temperatursprung liegt mit einem Gradienten von $\Delta T_n / \Delta x_{2,n} = 3,67$ zwischen $x_{2,n} = 0,12$ bis $x_{2,n} = 0,18$ und $\Delta T_n = 0,22$ vor. Er führt zur Ausbildung hoher thermischer Spannungen zwischen der NiAlTa-Haftvermittlerschicht und der cBN-Schicht.

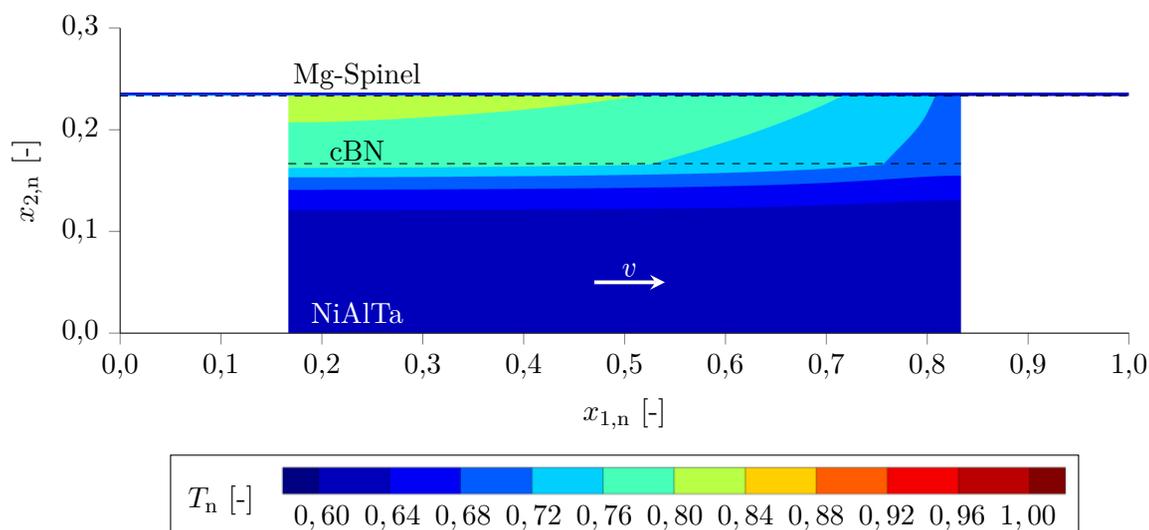


Abbildung 8.7: Temperaturfeld T_n bei LTSL®-Prüfstandbedingungen.

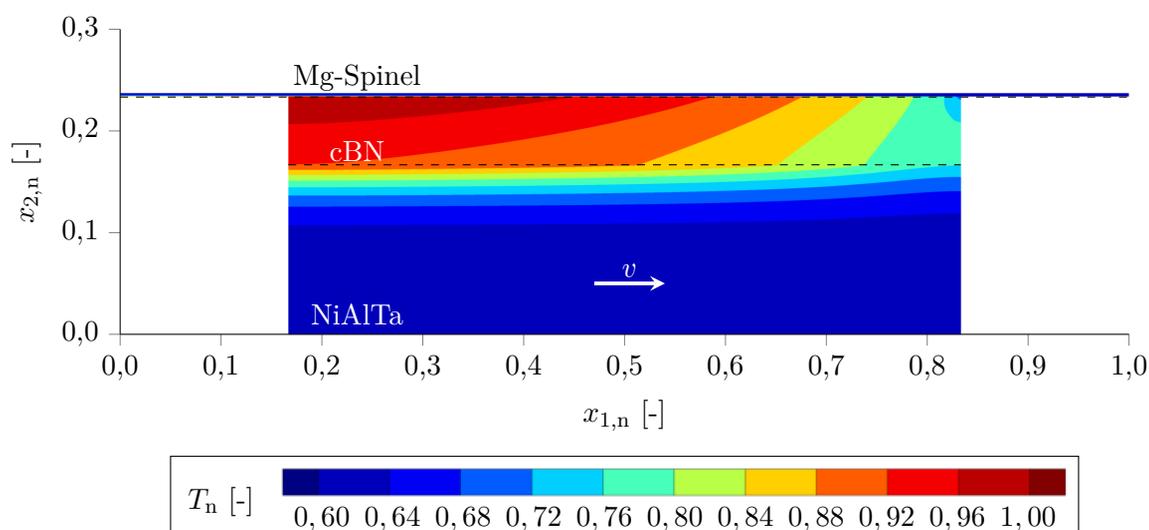


Abbildung 8.8: Temperaturfeld T_n bei Oerlikon-Metco®-Prüfstandbedingungen.

In Abbildung 8.8 ist das Temperaturfeld T_n nach einer Einlauflänge von 100 mm bzw. 250 μs unter den Prüfbedingungen bei Oerlikon-Metco® mit $v = 410$ m/s dargestellt und in Abbildung 8.10 auf Seite 87 das Temperaturprofil T_n im Kontaktsegment gezeigt.

Das physikalische Verhalten des asymmetrischen Temperaturfeldes ist qualitativ identisch zum LTSL®-Ergebnis in Abbildung 8.7 sowie ist $\beta = 15\%$ und damit auch ähnlich. Der Unterschied liegt im etwa doppelt so hohen Temperaturniveau im Oerlikon-Metco®-Simulationsfall, was mit der etwa doppelt so hohen Reibwärmeflussdichte \dot{q}_{tot} begründbar ist (siehe Tabelle 8.3). Damit liegen an der Schaufelhinterkante Temperaturdifferenzen gegenüber $T_{0,n}$ mit $\Delta T_n = 0,44$ vor und die maximale Temperatur beträgt an der Hinterkante $T_n = 1,00$. Der Gradient des Temperatursprungs liegt im Übergangsbereich von cBN und NiAlTa bei $\Delta T_n / \Delta x_{2,n} = 5,67$ zwischen $x_{2,n} = 0,12$ bis $x_{2,n} = 0,18$ mit $\Delta T_n = 0,34$. Folglich sind deutlich höhere thermische Spannungen zu erwarten.

Eine realitätsnahe Schaufelspitzengeometrie ist durch das Schnittbild vom Fraunhofer-IWS® in Abbildung 8.3 auf Seite 79 möglich. Das numerische Ergebnis zum Temperaturfeld T_n nach einer Einlauflänge von 100 mm bzw. 500 μs mit einer Geschwindigkeit von $v = 200$ m/s ist in Abbildung 8.9 aufgeführt und die Temperaturkurve im Kontaktsegment in Abbildung 8.10 dargestellt. Es zeigt sich, dass das Temperaturfeld zur Schaufelhinterkante gestaucht wird und hier die höchsten Temperaturen erreicht werden. Bei der globalen Betrachtung der gesamten Domäne werden maximale Temperaturen von $T_n = 0,82$ ermittelt. Jedoch deckt eine detaillierte Betrachtung des Kontaktsegments einige Temperaturspitzen (engl. hot spots) von bis zu $T_n = 1,00$ auf, welche mit den cBN-Partikelpositionen übereinstimmen (vgl. Abbildung 8.10). Das deutet darauf hin, dass die Wärme in der Kontaktebene verbleibt und erst durch die Partikel abgeleitet wird. Der intrinsische Wärmetaufteilungskoeffizient β stellt sich mit 56 % ein und damit liegt die Haupttransportrichtung in die Schaufel vor. Das ist damit begründbar, dass in der

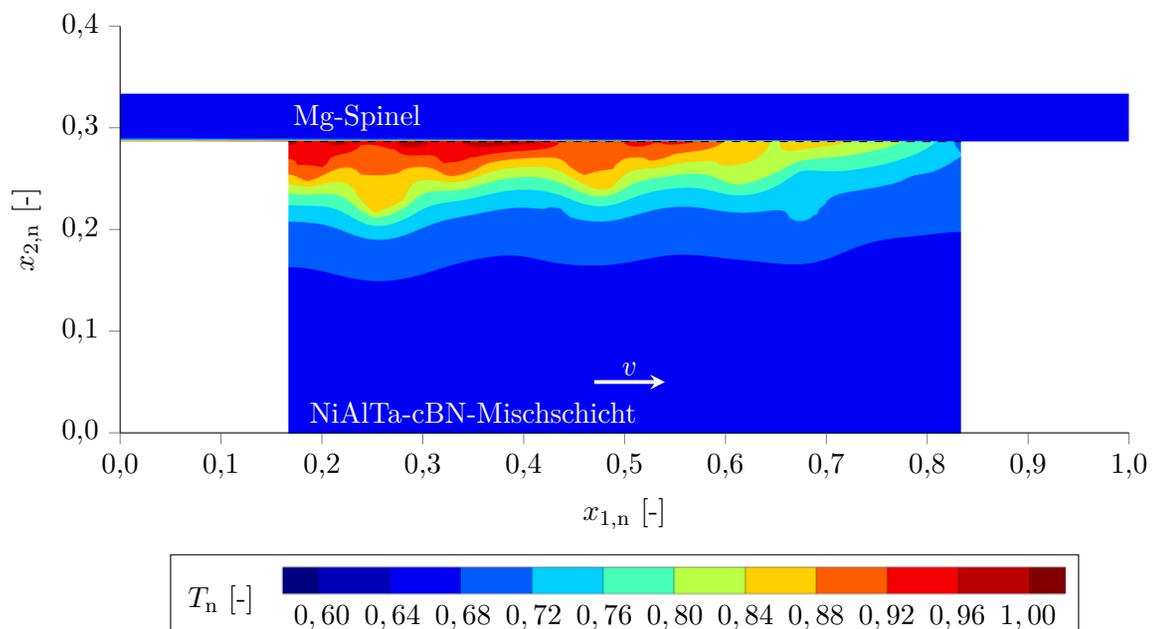


Abbildung 8.9: Temperaturfeld T_n nach Fraunhofer-IWS®-Turbinenbedingungen.

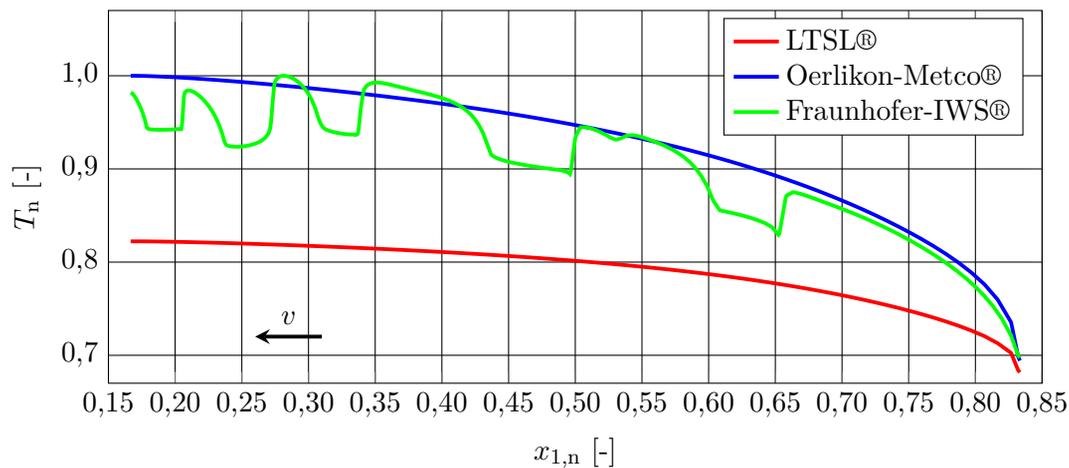


Abbildung 8.10: Antisymmetrische normierte Temperaturverläufe $T_n = T/T_{\max}$ zu Bedingungen nach Tabelle 8.2 im Kontaktsegment, mit maximalen Temperaturen T_{\max} an der Schaufelhinterkante $x_{1,n} = 0,167$.

Simulation die cBN-NiAlTa-Mischzone berücksichtigt wird und in der analytischen Berechnung nur cBN angenommen wurde. Zudem wird das Temperaturfeld T_n durch die NiAlTa-cBN-Mischschicht verzerrt. Der Grund ist der begünstigte Wärmetransport durch die bessere Temperaturleitfähigkeit a_{cBN} im Vergleich zu a_{NiAlTa} . Die Partikel erreichen höhere Temperaturen als die Haftvermittlerschicht, der kontinuierliche Wärmeabtransport wird unterbunden und ein Temperatursprung zwischen den Materialien, wie in den vorangegangenen Simulationen, liegt vor. Es wird erwartet, dass sich eine plastische Verformung der NiAlTa-Schicht ergibt und die cBN-Partikel sich lösen. Auch besteht durch den Temperatursprung das erhöhte Risiko großer thermischer Spannungen und in Kombination mit mechanischen Spannungen kann eine Rissbildung sowie das Ausbrechen der Partikel nicht ausgeschlossen werden.

8.1.3 Zusammenfassung

Die Simulationsergebnisse veranschaulichen, dass sich ein asymmetrisches Temperaturprofil ausbildet und die maximale Temperatur an der Schaufelhinterkante erreicht wird. Die Gründe für diese Effekte sind:

- An der Schaufelvorderkante liegt eine Wärmesenke aufgrund des frischen Gehäusematerials während des Reibkontakts vor. Folglich wird die Reibwärme \dot{q}_{tot} an der Vorderkante gleichmäßig in die Schaufel und das Gehäuse übertragen.
- Die Materialschichten und das Kontaktsegment erwärmen sich hinter der Vorderkante und über die Länge der Schaufeldicke während des Reibkontakts weiter. Durch das vorgewärmte Material im Kontaktsegment werden entsprechend höhere Temperaturen in der Schaufelspitze und Gehäuseabschichtung bis zur Hinterkante erreicht.
- Aufgrund der deutlich geringeren Temperaturleitfähigkeit α und thermischen Wellengeschwindigkeit C der Mg-Spinell-Einlaufschicht ist die Wärmeflussdichte \dot{q}_s in

das Schaufel-System größer. Deshalb sind die Temperaturen in der Schaufel höher und das Temperaturfeld ist dementsprechend ausgeprägter.

- Zudem erfährt die Mg-Spinell-Einlaufschicht auf dem Gehäuse den Mechanismus des advektiven Wärmetransports. Das Ergebnis ist der Abtransport der Wärme aus dem Kontaktsegment zur Schaufelhinterkante und darüber hinaus in die Umgebung sowie eine reduzierte Eindringtiefe der Temperatur in das Gehäuse im Vergleich zur Schaufel. Der primäre Wärmetransport in der Schaufel erfolgt orthogonal zum Kontaktsegment, wird jedoch weiterhin von der Relativgeschwindigkeit über die Dauer des Reibkontakts beeinflusst.
- Die analytischen und numerischen berechneten intrinsischen Aufteilungskoeffizienten β unterscheiden sich deutlich. Das ist dadurch begründet, dass die numerische Berechnung geometrische Randbedingungen in den Schichten und an den Systemgrenzen berücksichtigt sowie die Bilanzierung im Nichtgleichgewicht durchgeführt wurde.

Während die Simulationen mit den Randbedingungen bei LTSL® und Oerlikon-Metco® gleichmäßige Temperaturkonturen vorhersagen, zeigt sich für die realitätsnähere Fraunhofer-IWS®-Geometrie unter Turbinenbedingungen eine ungleichmäßige Temperaturverteilung mit vereinzelt Temperaturspitzen. Diese Temperaturspitzen sind auf die cBN-Schnittpartikel und deren gute Temperaturleitfähigkeit α sowie hohe thermische Geschwindigkeit C zurückzuführen. Dies steht im Kontrast zur vergleichsweise isolierenden Eigenschaft der NiAlTa-Haftvermittlerschicht. Die Kombination beider Materialien in Form der NiAlTa-cBN-Mischschicht an der Schaufelspitze lässt hohe thermische Spannungen und gegebenenfalls ein vorzeitiges Ausbrechen der Partikel erwarten. Infolgedessen besteht die Gefahr eines ineffizienten Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystems. Ergänzend zeigen Turbinenschaufeln, die den realen Bedingungen ausgesetzt waren, dass die Keramikbeschichtungen an der Hinterkante beschädigt oder abgebrochen sind. Aus den Simulationen kann man die Theorie ableiten, dass die ermittelte maximale Temperatur an der Schaufelhinterkante eine weitere Ursache für diese Materialverluste ist.

8.1.4 Ausblick

Die hier behandelte Problematik wurde bisher nur in 2-D gelöst, daher liegen keine Ergebnisse für den 3-D-Fall vor. Eine 3-D-Lösung ermöglicht eine weitaus realistischere Darstellung der Wärmeverteilung sowie des Temperaturfelds und stellt somit einen nächsten Schritt dar. Dadurch können beispielsweise auch reale Schaufelgeometrien im zylindrischen Koordinatensystem für einen deutlich anwendungsbezogeneren Fall berechnet werden.

Das vorliegende numerische Schaufel-Gehäuse-Einlaufmodell berücksichtigt nicht die Thermomechanik, insbesondere nicht bei der instationären Berechnung der Temperaturverteilung. Die ermittelten Reibwärmeflussdichten wurden hier als erste Annäherung über Mittelwerte aus Kraftmessungen nach Versuchen von LTSL® an der Universität Sheffield

bestimmt. Die Messungen umfassen indirekt plastische Verformungen und Abrasionen in der Kontaktfläche, sollten jedoch weiterhin während der Simulation berücksichtigt werden, da die Reibung proportional mit der Temperatur zunimmt [59, Kap. 10.10]. Zudem ist es sinnvoll, die Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo mit dem Taler-Quinney-Koeffizienten, wie beispielsweise von Espinosa, Zavattieri & Emore [18], zu erweitern. Dadurch können die thermodynamischen Effekte von Temperaturerhöhungen auf die Materialien abgebildet werden, was im vorliegenden Fall für den Materialübergang und die thermischen Spannungen zwischen den cBN-Partikeln und der NiAlTa-Haftvermittlerschicht bedeutend ist.

Zudem wären zusätzliche mikroskopische Untersuchungen zwischen den cBN-Partikeln und der NiAlTa-Haftvermittlerschicht nützlich, um den genauen Wärmetransportprozess zu verstehen sowie einen Vergleich zwischen der Fourier- und Christov-Gleichung herauszustellen. Erste Simulationen hierzu zeigen, dass im transienten Bereich die Welle im Materialübergangs- bzw. Grenzbereich einen Sprung zeigt und es hier zu Instabilitäten kommt bzw. eine Wellenreflexion vorliegt. Die Simulationen und Ergebnisse müssen aber weiter optimiert und angepasst werden, um eine zuverlässige Aussage treffen zu können.

8.2 Thermische Belastung der RDE-Brennkammer-Ringwand

RDEs (engl. rotating detonation engines) sind Triebwerke mit zylindrischer Brennkammer, in welcher eine oder mehrere Detonationswellen umlaufen [49, Kap. 1], wodurch die Ringwand einem periodischen inhomogenen Wärmeeintrag ausgesetzt ist. Das führt zu hohen thermischen Spannungen und resultierender Rissbildung, wobei die Kombination beider Vorgänge eine überproportionale Schädigung [74] und mögliche Zerstörung der RDEs zur Folge haben können. Daher ist ein belastbares Material und ausreichende Kühlung der Brennkammer notwendig, um ein zuverlässiges und effizientes Triebwerk zu betreiben. Die Ermittlung der Anforderungsbedingungen an das Material und die Kühlung sind über eine thermische Spannungsanalyse in der Ringwand möglich. Nachfolgend wird jedoch die Untersuchung auf die Temperaturprofile in der Brennkammer-Ringwand gerichtet, da die thermische Spannung σ_{therm} proportional zur Temperaturänderung ΔT ist (siehe Gleichung (8.1)). Die weitere Umsetzung erfolgt durch die Betrachtung der instationären Temperaturentwicklung ΔT_n zur Fourier- und Christov-Cattaneo-Gleichung. Der zeitliche Rahmen wird auf die Größenordnung der Relaxationszeit τ zum Material festgelegt. In Kapitel 8.2.1 werden die Materialparameter bestimmt, dann die Brennkammer auf die Dicke der 2-D-Ringwand reduziert, mit linearen Viereckelementen aus Kapitel 4.3.1 diskretisiert und die Randbedingung eines Wärmeflussdichteprofiles \dot{q} aufgeprägt. Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt in Kapitel 8.2.2. Abschließend wird in Kapitel 8.2.3 eine Zusammenfassung gegeben und eine Diskussion über die Zweckmäßigkeit des gewählten Ansatzes in Form des erweiterten Wärmetransports nach Christov-Cattaneo auf die Brennkammer der RDEs und deren Bedeutung für die thermischen Spannungen geführt.

Tabelle 8.4: Mechanische und thermische Eigenschaften der Inconel-Legierung 625 [13].

E [GPa]	ν	v_S [m s ⁻¹]	α [m ² s]	τ [s]	C [m s ⁻¹]
208	0,278	4528	$2,83 \times 10^{-6}$	$4,15 \times 10^{-13}$	2614

8.2.1 Geometrie und Randbedingungen

Abbildung 8.11 transformiert die zylindrische Brennkammer aus der Umfangskoordinate c_n und Axialkoordinate a_n in eine ebene abgerollte 2-D-Darstellung. Anschließend wird die Ringwanddicke b_n in das normierte $x_{1,n}x_{2,n}$ -System übertragen, um die Temperaturanalyse in die $x_{2,n}$ -Richtung durchzuführen. Das erfordert die Festlegung von Randbedingungen und beginnt bei den Materialeigenschaften. Die Brennkammer besteht aus einer Inconel-Legierung vom Typ 625 und ihre mechanischen sowie thermischen Eigenschaften sind in Tabelle 8.4 aufgelistet. Sie führt neben dem Elastizitätsmodul E und der Poisson-Zahl ν die berechneten Werte zur Relaxationszeit τ aus Kapitel 2.2.3 auf. Des Weiteren sind numerische Randbedingungen in Abbildung 8.12 dargestellt. Diese Abbildung zeigt das

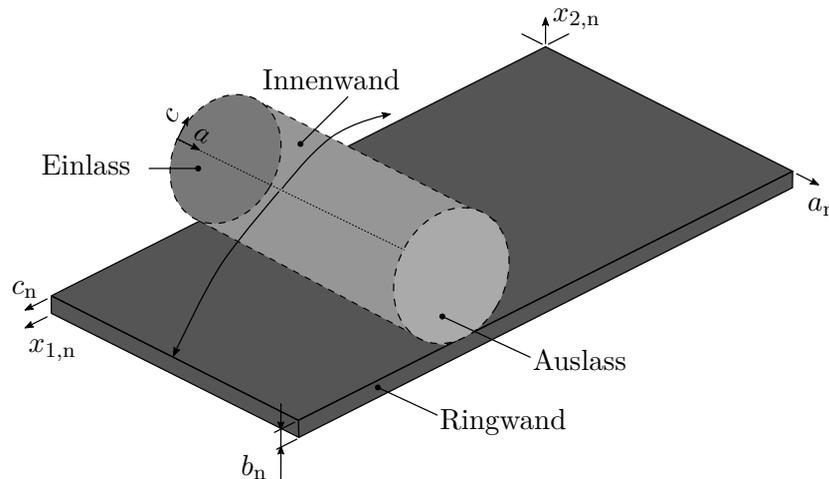


Abbildung 8.11: Transformation der zylindrischen Brennkammer auf eine 2-D-Ringwand.

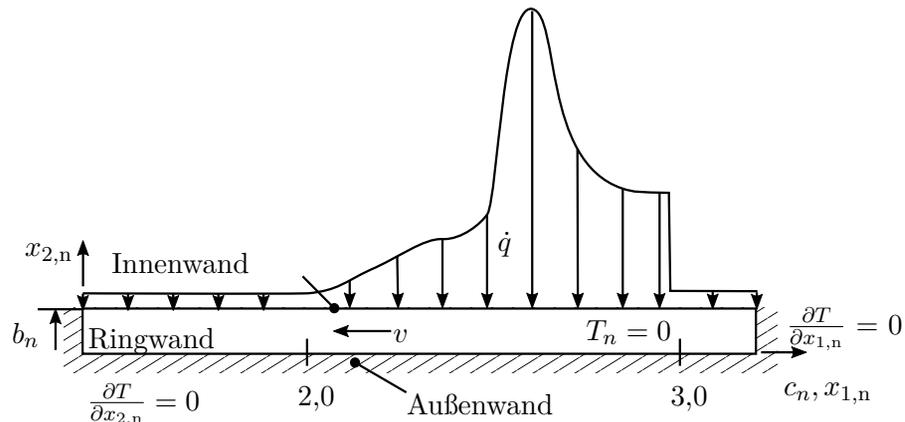


Abbildung 8.12: Randbedingungen der Ringwand [24].

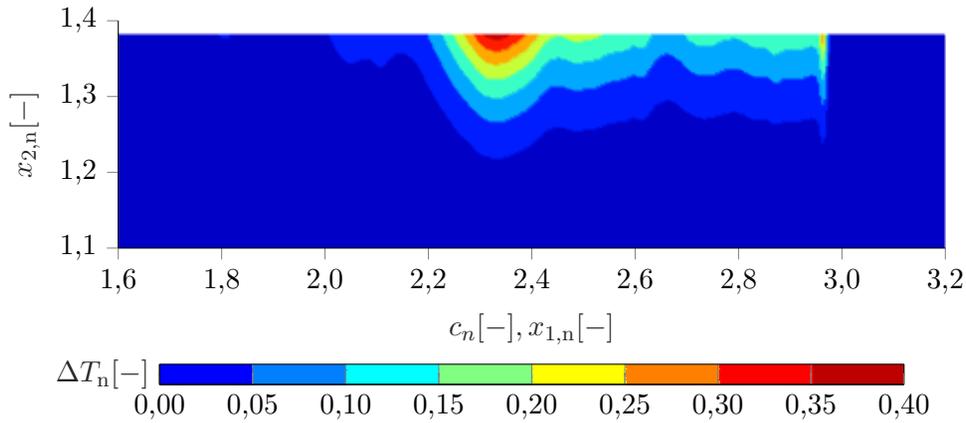


Abbildung 8.14: Temperaturfeld ΔT_n im Nahfeld des höchsten Wärmeeintrags \dot{q} bei $Ma_{th} = 0,9$ und zu $t = 0,5\tau$ nach Fourier [24].

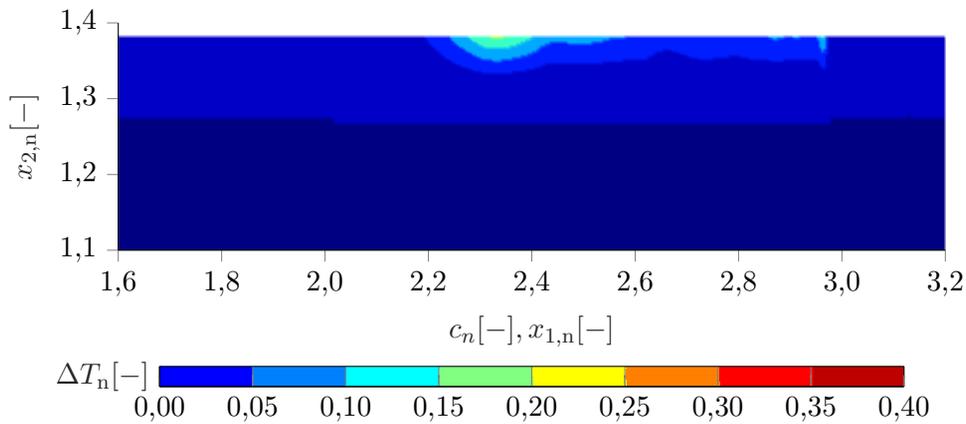


Abbildung 8.15: Temperaturfeld ΔT_n im Nahfeld des höchsten Wärmeeintrags \dot{q} bei $Ma_{th} = 0,9$ und zu $t = 0,5\tau$ nach Christov-Cattaneo [24].

der Fourier-Gleichung sichtbar ab der Oberflächenringwand bzw. an der Stelle der Innenwand bei etwa $x_{2,n} = 1,38$ zur $x_{2,n}$ -Achse hin. Zudem wird durch sie nahe der $x_{2,n}$ -Achse zu allen Zeiten t eine Temperaturänderung ΔT_n gemessen, was unphysikalisch ist und durch die Christov-Cattaneo-Gleichung natürlicher vorhergesagt wird. Ergänzend ergibt eine Extrapolation der Funktionsverläufe, dass die tangentialen Steigungen der Fourier-Kurven an den meisten Positionen flacher sind als die der Christov-Cattaneo-Kurven und nun hinsichtlich der ersten Ableitung der hyperbolischen Wärmtransportgleichung größere Gradienten $\Delta T_n / \Delta x_{2,n}$ vorliegen. Weiterführend sind diese großen Temperaturgradienten die Ursache von erhöhten thermischen Spannungen in der Ringwand nahe der Oberfläche und über die Christov-Cattaneo-Gleichung physikalischer dargestellt. Die instationären Zustände sind in 8.16b) zu den Monitoring Punkten MP1 und MP2 gezeigt. MP1 sitzt in der Oberfläche der Ringwand und die zugehörigen Temperaturverläufe ΔT_n der Gleichungen zeigen einen parallelen Anstieg, wobei zur Lösung nach Christov-Cattaneo die Temperaturen niedriger sind. Das und die weitere Analyse von MP2 im Fernfeld führen auf das Ergebnis, dass ein Nichtgleichgewicht zum instationären Anfangszeitraum vor-

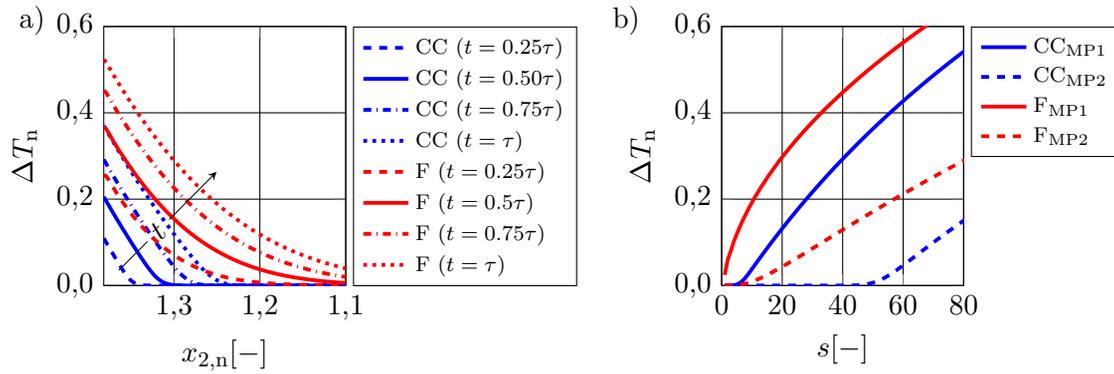


Abbildung 8.16: Temperaturverläufe ΔT_n nach Fourier (F) und Christov-Cattaneo (CC): a) Kurven bei $x_{1,n} = 2, 34$ über $x_{2,n}$ und b) bei Monitoring Punkten MP1 und MP2 [24].

liegt und der hyperbolische Wärmetransport über die Phonon-Elektron-Wechselwirkung aus Kapitel 2.2.2 zeitlich träger ist. Dieses träge Verhalten ist als das physikalischere zu bewerten und konträr zur Fourier-Lösung, welche zu allen Zeiten s in beiden Monitoring Punkten einen sofortige Temperaturanstieg ΔT_n aufgrund ihres Paradoxon einer infiniten Temperaturausbreitung hat.

8.2.3 Zusammenfassung

Die Untersuchung der Temperaturprofile in der Ringwand der RDEs zeigen, dass die hyperbolische Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo ein natürlicheres Temperaturverhalten ermittelt. Dadurch sind die Gradienten $\Delta T/\Delta x_2$ nahe der Innenwand bzw. der Ringwandoberfläche deutlich größer als sie durch die Fourier-Gleichung vorausgesagt werden. Gleiches folgt hieraus für die thermischen Spannungen σ_{therm} , da diese nach Gleichung (8.1) direkt proportional zur Temperaturänderung ΔT sind. Zudem koppelt die hyperbolische Wärmetransportgleichung die mechanischen mit den thermischen Eigenschaften über die Relaxationszeit τ , wodurch diese Untersuchung realitätsnähere Vorhersagen über die zu erfüllenden Bedingung an das Material und die Kühlung geben.

Teil IV

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

9 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den hyperbolischen Wärmetransport im Nichtgleichgewicht zu simulieren. Das ergibt sich aus der Aufgabe, den Wärmetransportprozesses im Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem von Flugturbinen vor dem Hintergrund der Nichtgleichgewichtsthermodynamik (klassischen irreversiblen Thermodynamik) zu modellieren. Aufgrund von Randbedingungen muss die erweiterte Wärmetransporttheorie, welche unter anderem aus der erweiterten irreversiblen Thermodynamik hergeleitet werden kann, herangezogen werden, bei der die Temperatursausbreitung durch eine endliche thermische Wellengeschwindigkeit C erfolgt. Über die Transformation der Wärmetransportgleichung in eine Finite-Elemente-Bewegungsgleichung wird das FEM-Programm HypHeat2D entwickelt. Dieses Programm berechnet instationäre ebene 2-D-Wärmetransportprobleme mit Relativbewegung, wie bspw. im Einlaufsystem. HypHeat2D konnte erfolgreich in Untersuchungen eingesetzt werden, um den adaptiven Wärmetransportprozess und die sich einstellenden asymmetrischen Temperaturfelder infolge der Relativgeschwindigkeit v zu analysieren. Die Anwendung des Programms erfolgte für eine generische Geometrie, einen Schaufel-Gehäuse-Einlaufvorgang in einer Flugturbinen- und einer Brennkammer-Ringwand von einer RDE (engl. rotating detonation engine).

Die Theorie des erweiterten Wärmetransports wird behandelt. Zu Beginn werden die partiellen Differentialgleichung in der Lagrange-Betrachtung nach Fourier (F), Cattaneo-Vernotte (CV) und Christov-Cattaneo (CC) aufgeführt und miteinander verglichen. Die CV-Gleichung korrigiert das Paradoxon einer unendlichen thermischen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperatur in der Wärmeleitungsgleichung nach Fourier. Dies geschieht, indem sie über die Relaxationszeit τ dem Wärmetransport ein physikalischeres Verhalten aufprägt, das auf einer endlichen thermischen Wellenausbreitungsgeschwindigkeit C basiert. In Bezug auf die Lagrange-Betrachtung korrigiert wiederum die Christov-Cattaneo-Gleichung die Cattaneo-Vernotte-Gleichung durch eine Änderung von der totalen auf eine materielle Ableitung in der Wärmeleitungsgleichung. Über das Verhältnis der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit C zu der Relativgeschwindigkeit v eines Systems ist die thermische Mach-Zahl Ma_{th} definiert. Mithilfe der thermischen Mach-Zahl wird der Umschlagpunkt zwischen der Diffusions- und Wellengleichung bestimmt und sie gibt an, dass ab $Ma_{th} > 0,1$ die hyperbolischen CV- und CC-Gleichungen verwendet werden müssen. Zusätzlich wird das Wellenphänomen in der makroskopischen und mikroskopischen Betrachtung erklärt, die zur Annahme führt, dass bei $Ma_{th} = 1,0$ ein thermischer Stoß vorliegt. Die analytischen Gleichungen für die Berechnung der Relaxationszeit in einem Festkörper werden angegeben. Im Rahmen der erweiterten irreversiblen Thermodynamik werden die Gleichungen für die erweiterte Entropie s_{EIT} sowie die Nichtgleichgewichtstemperatur θ dargelegt und für die FEM-Simulationen angepasst.

Es wird die Diskretisierung der hyperbolischen Wärmetransportgleichung nach Christov-Cattaneo mittels der Finite-Elemente-Methode und für diverse numerische Zeitintegrationen gezeigt. Unter Anwendung der Galerkin-FEM wird die räumliche Transformation von der partiellen Gleichungsform auf eine gewöhnliche Differentialgleichung durchgeführt und ist dadurch für verschiedene numerische Zeitintegrationen verwendbar. Aufgrund von numerischen Instabilitäten durch die Diskretisierung und Wellengleichungsform treten bei höheren Relativgeschwindigkeiten v räumliche Instabilitäten auf, welche mit der hier gezeigten Methode der orientierten Relaxationszeit gedämpft werden können. Das FEM-Programm HypHeat2D wird in der MATLAB®-Umgebung entwickelt, in welchem instationäre ebene 2-D-Wärmetransportprobleme mit Relativbewegung gelöst werden können. Im Kontext des Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystems ermöglicht es die Berechnung einer Geometrie, die aus einer bewegungsfreien und einer bewegten Domäne besteht, über ein einziges Gleichungssystem, ohne dass Kopplungsbedingungen übergeben oder die Domänen sequenziell berechnet werden müssen und es stellt sich eine natürliche Wärmeverteilung im Kontaktsegment ein. Eine Validierung zeigt, dass HypHeat2D übereinstimmende Ergebnisse mit analytischen Lösungen für eine Streifenquelle in einem System mit einer Relativgeschwindigkeit v hat.

Die Anwendungen von HypHeat2D beziehen sich auf eine generische Geometrie, den Einlaufvorgang in einer Flugturbine und eine RDE-Brennkammer-Ringwand. Bei den numerischen Untersuchungen zur generischen Geometrie werden die Fourier-, Cattaneo-Vernotte- und die Christov-Cattaneo-Gleichungen in den stationären unterkritischen, subkritischen und transkritischen Diffusionszuständen für eine Punktquelle verglichen. Dabei zeigen die Lösungen in den Mach-Zahl-Regimen mit $Ma_{th} > 0$ asymmetrische Temperaturprofile. Diese sind vor der Wärmequelle bzw. entgegen der Systemgeschwindigkeit v gestaucht, weisen in der Punktquelle die maximale Temperatur auf und haben einen asymptotischen Auslauf hinter der Quelle bzw. parallel zur Ausbreitungsrichtung von v . Für die unterkritische Diffusion wird die Theorie bestätigt, dass bis $Ma_{th} = 0,1$ die Wärmetransportgleichungen keine Unterschiede aufweisen. Erst im subkritischen Zustand und ab $Ma_{th} = 0,3$ zeigen die CC-Gleichungen erkennbare Abweichungen, die an der Wellenfront mit der Zunahme der Mach-Zahl größer werden. Besonders im transkritischen Zustand zu $Ma_{th} = 1,0$ ist durch die CC-Gleichung ein eindeutiges gestauchtes Temperaturprofil mit großem Gradienten an der Wellenfront ersichtlich, was auf einen thermischen Stoß schließen lässt. Dagegen zeigen die Temperaturprofile zur F- und CV-Wärmetransportgleichung unnatürliche Temperaturausbreitung entgegen der Systemgeschwindigkeit v . Mit diesen Simulationsergebnissen ist bewiesen, dass die Christov-Cattaneo-Gleichung ein natürlicheres bzw. physikalisches Lösungsverhalten für einen Wärmetransportprozess mit Relativbewegung ergibt und somit für Systeme mit Relativgeschwindigkeit v verwendet werden muss. Hinsichtlich der Simulationen zum Schaufel-Gehäuse-Einlaufsystem werden drei Zustände simuliert. Die Zustände entsprechen den Prüfstandbedingungen nach LTSL® und Oerlikon-Metco® sowie angenommenen Randbedingungen zur Turbinenumgebung. Die Geometrien für die Prüfstand-

bedingungen werden über homogene Schichten (Gehäuse-/Einlaufbeschichtung aus Mg-Spinell, Schaufelspitze aus cBN-Partikeln und Haftvermittlerschicht aus NiAlTa) aufgebaut. Die Geometrie zur Turbinenbedingung wird nach einem Schliffbild vom Fraunhofer-IWS® (Gehäuse-/Einlaufbeschichtung aus Mg-Spinell, Schaufelspitze aus cBN-NiAlTa-Mischschicht) erstellt. Die Schaufelspitzengeschwindigkeiten werden mit 200 m s^{-1} und 400 m s^{-1} über eine Reibkontaktlänge von $0,1 \text{ m}$ angenommen. Die Ergebnisse zeigen ein asymmetrisches mehrdimensionales Temperaturprofil mit den maximalen Temperaturen an der Schaufelhinterkante. Dadurch wird das Temperaturprofil gestaucht, ein inhomogener Wärmetransport liegt vor und es sind erhöhte thermische Spannungen zu erwarten, welche die Schaufelhinterkante schädigen können. Ein besonders mehrdimensionales inhomogenes Temperaturfeld zeigt die diskretisierte Geometrie nach dem Schliffbild Fraunhofer-IWS® worin große Gradienten und Temperaturspitzen im Kontaktsegment und zwischen den cBN-Partikeln sowie der NiAlTa-Haftvermittlerschicht aufgedeckt werden. Ein weiterer Anwendungsfall wird mit einer RDE-Brennkammer-Ringwand erschlossen, in welcher das transiente Temperaturprofil nach Fourier und Christov-Cattaneo orthogonal zur Innenwand bzw. über die Brennkammerwanddicke untersucht wird. Die Ergebnisse zeigen, dass die CC-Gleichung ein natürlicheres Temperaturverhalten ermittelt und die Gradienten größer sind als die der Fourier-Gleichung. Aufgrund der direkten proportionalen Abhängigkeit der thermischen Spannung sind höhere Spannungsberechnungen mit der CC-Gleichung zu erwarten.

10 Ausblick

Zukünftige Arbeiten können numerisch und experimentell ausgerichtet sein. Die Weiterentwicklung von HypHeat2D auf komplexe 3-D-Geometrien und die Integration struktur- oder strömungsmechanischer Modelle würden zu einer realitätsnäheren Finite-Elemente-Analyse von Bauteilen oder Wärmetransportproblemen aller Art im Nichtgleichgewicht beitragen. Außerdem sind neben dem hier verwendeten Eingleichungsmodell auch Zweigleichungsmodelle möglich, die beispielsweise je eine Relaxationszeit für den Wärmefluss und der Temperatur nutzen [77]. Hinsichtlich der Wärmeaufteilung sind andere Verfahren zur Berechnung zu prüfen, welche instationäre Aufteilungen mit Relativbewegungen und die Relaxationszeit τ berücksichtigen [56]. Des Weiteren sollte die Möglichkeit nicht außer Acht gelassen werden, kommerzielle Software wie Abaqus® zu verwenden, um zeitaufwändiges Programmieren zu vermeiden. Außerdem ist eine experimentelle Validierung von HypHeat2D erforderlich und die Messung von materialabhängigen Relaxationszeiten τ nötig. Hierfür kann ein bereits existierender Thermodiffusion-Versuchsaufbau am Institut für Thermodynamik der Universität der Bundeswehr verwendet werden, der aber zusätzlich mit Temperatursensoren ausgerüstet werden muss, um den Zeitbereich der thermischen Welle aufzulösen [38].

Literaturverzeichnis

- [1] Abaqus 6.11: Abaqus/CAE User's Manual, http://130.149.89.49:2080/v6.11/pdf_books/CAE.pdf.
- [2] Agrapart, Q., Nyssen, F., Lavazec, D., Dufrénoy, P. & Batailly, A., Multi-physics numerical simulation of an experimentally predicted rubbing event in aircraft engines, *Journal of Sound and Vibration*, 460, 2019.
- [3] Al-Khairy, R. T. & AL-Ofey, Z. M., Analytical Solution of the Hyperbolic Heat Conduction Equation for Moving Semi-Infinite Medium under the Effect of Time-Dependent Laser Heat Source, *Journal of Applied Mathematics*, 2009, 2009.
- [4] Bathe, K. J. & Wilson, E. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis: Klaus-Jürgen Bathe, Edward L. Wilson*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [5] Bhushan, B., *Modern Tribology Handbook*, Mechanics and Materials Science Series, CRC Press, Boca Raton, USA, 2001.
- [6] Bochev, P. B., Gunzburger, M. D. & Shadid, J. N., Stability of the SUPG finite element method for transient advection diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 2004.
- [7] Bunker, R. S., Axial Turbine Blade Tips: Function, Design, and Durability, *Journal of Propulsion and Power*, 22, 2006.
- [8] Carslaw, H. S. & Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford, 1959.
- [9] Cattaneo, C., A Form of Heat-Conduction Equations Which Eliminates the Paradox of Instantaneous Propagation, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 246, 1958.
- [10] Chester, M., Second Sound in Solids, *American Physical Society*, 131, 1963.
- [11] Christov, C. I. & Jordan, P. M., Heat conduction paradox involving second-sound propagation in moving media, *American Physical Society*, 94, 2005.
- [12] Code_Aster: Mechanische und Thermomechanische Strukturanalyse für Berechnung und Forschung, https://code-aster.org/V2/UPLOAD/DOC/Presentation/plaquette_aster_de.pdf.
- [13] Company, S. M. P., *INCONEL Alloy 625: Datasheet*, 2013.
- [14] COMSOL Multiphysics: Reference Manual, https://doc.comsol.com/5.5/doc/com.comsol.help.comsol/COMSOL_ReferenceManual.pdf, 2019.

- [15] Corman, G. S., Dean, A. J., Brabetz, S., Brun, M. K., Luthra, K. L., Tognarelli, L. & Pecchioli, M., Rig and Engine Testing of Melt Infiltrated Ceramic Composites for Combustor and Shroud Applications, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124, 2002.
- [16] Dhondt, G., *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications*, Wiley, Chichester, 2004.
- [17] Donea, J. & Huerta, A., *Finite Element Methods for Flow Problems*, Wiley, Chichester, 2003.
- [18] Espinosa, H. D., Zavattieri, P. D. & Emore, G. L., Adaptive FEM computation of geometric and material nonlinearities with application to brittle failure, *Mechanics of materials*, 29, 1998.
- [19] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 2010.
- [20] Falin, A., Cai, Q., Santos, E. J. G., Scullion, D., Qian, D., Zhang, R., Yang, Z., Huang, S., Watanabe, K., Taniguchi, T., Barnett, M. R., Chen, Y., Ruoff, R. S. & Li, L. H., Mechanical properties of atomically thin boron nitride and the role of interlayer interactions, *Nature Communications*, 8, 2017.
- [21] Feike, M. C., Abschlussbericht zum Projekt: Mak Turb - Sealing System, UniBw München, München, 2023.
- [22] Feike, M. C. & Mundt, Ch., Space-time stabilized FEM applied on the hyperbolic heat conduction equation for high speed frictional contact, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 21, 2021.
- [23] Feike, M. C. & Mundt, Ch., Numerical simulation of the thermal wave induced by a moving interfacial heat source with respect to Christov–Cattaneo’s equation, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 23, 2023.
- [24] Feike, M. C. & Mundt, Ch., Finite Element Simulation of the Second Sound Wave in a Chamber Annulus Wall of a Rotating Detonation Engine, *International Symposium on Shock Waves*, 34, 2024.
- [25] Feike, M. C. & Mundt, Ch., Thermal wave study in hyperbolic heat transport and finite element Θ discretisation with Oriented-Relaxation-Time (ORT) stability method, *Journal of Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2024. (im Review)
- [26] Finlayson, B. & Scriven, L. E., The method of weighted residuals - A review, *Applied Mechanics Review*, 19, 1966.
- [27] Frommeyer, G. & Rablbauer, R., *Neue Hochtemperaturwerkstoffe auf der Basis intermetallischer NiAl-(Cr,Mo,Re)-Legierungen für zukünftige Energiewandlungssysteme*, Max-Planck-Institut für Eisenforschung GmbH, Düsseldorf, DE, 2005.

- [28] Gladman, B., LS-DYNA: Theory-Manual, <https://www.dynasupport.com/manuals/ls-dyna-manuals>, 2022.
- [29] Glovsky, R. & Kennedy, F. E., *DEVELOPMENT AND APPLICATION OF THERMAP: A Finite Element Method (FEM) Computer Program for Predictin Temperature Distributions in Sliding Systems*, Hanover, 1982.
- [30] Gómez, H., Colominas, I., Navarrina, F. & Casteleiro, M., A hyperbolic model for convection-diffusion transport problems in CFD: Numerical analysis and applications., *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 102, 2008.
- [31] Heyl, H., Präsentation zum Projekt: MakTurb Kick-off Meeting - Material Coating Properties, FZ-Jülich, Berlin, 2019.
- [32] Hirschel, E. H., *Basics of Aerothermodynamics*, Springer, Cham, 2015.
- [33] Hoffman, J. D., *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York, 2001.
- [34] Huang, H.-C. & Usmani, A. S., *Finite Element Analysis for Heat Transfer: Theory and Software*, Springer, London, GBR, 1994.
- [35] Huebner, K. H., Dewhurst, D. L., Smith, D. E. & Byrom, T. G., *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley, New York, 2001.
- [36] Hunklinger, S., *Festkörperphysik*, De Gruyter Oldenbourg, München, 2014.
- [37] Joseph, D. D. & Preziosi, L., Heat waves, *Reviews of Modern Physics*, 61, 1989.
- [38] Kaminski, W., Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials With a Nonhomogeneous Inner Structure, *Journal of Heat Transfer*, 112, 1990.
- [39] Karpfinger, C., *Höhere Mathematik in Rezepten: Begriffe, Sätze und zahlreiche Beispiele in kurzen Lerneinheiten*, Springer Spektrum, Berlin, 2017.
- [40] Kennedy, F., Colin, F., Floquet, A. & Glovsky, R., Improved techniques for finite element analysis of sliding surface temperatures, *Developments in Numerical and Experimental Methods Applied to Tribology*, Elsevier, 1984.
- [41] Kennedy, F. E., Surface Temperatures in Sliding Systems—A Finite Element Analysis, *Journal of Lubrication Technology*, 103, 1981.
- [42] Kennedy, F. E., Thermal and thermomechanical effects in dry sliding, *Wear*, 100, 1984.
- [43] Kennedy, F. E., Contact Temperatures on Coated or Rough Solid Surfaces, *Encyclopedia of Tribology*, Springer, Boston, 2013.
- [44] Kovács, R., Heat equations beyond Fourier: From heat waves to thermal metamaterials, *Physics Reports*, 1048, 2024.

-
- [45] Kuneš, J., *Dimensionless Physical Quantities in Science and Engineering*, Elsevier, Heidelberg, 2012.
- [46] Lai, W. M., *Introduction to Continuum Mechanics*, Butterworth-Heinemann, Boston, 2009.
- [47] Lebon, G., Jou, D. & Casas-Vázquez, J., *Understanding Non-Equilibrium Thermodynamics: Foundations, Applications, Frontiers*, Springer, Berlin, 2008.
- [48] Lebon, G., Machrafi, H., Grmela, M. & Dubois, Ch., An extended thermodynamic model of transient heat conduction at sub-continuum scales, *Proceeding of the Royal Society A* 467, 2011.
- [49] Li, J.-M., Teo, C. J., Khoo, B. C., Wang, J.-P. & Wang, C., *Detonation Control for Propulsion*, Springer, Cham, 2018.
- [50] Ling, F. F., Lai, W. M. & Lucca, D. A., *Fundamentals of Surface Mechanics: With Applications*, Mechanical Engineering Series, Springer, New York, 2002.
- [51] Mavko, G., *The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis of Porous Media*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [52] McGregor, M., *Ni-Al-Ta Alloys for High Temperature Abrasive Coatings*, Dissertation, Cambridge, 2020.
- [53] Miller, S. T. & Haber, R. B., A spacetime discontinuous Galerkin method for hyperbolic heat conduction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 2008.
- [54] Müller, M., Unterlage zum Projekt: MakTurb - Schnittbilder vom Schichtaufbau auf der Schaufel, Fraunhofer-IWS Dresden, Berlin, 2022.
- [55] Munz, O., Schwitzke, C., Bauer, H.-J., Welzenbach, S., Fischer, T. und Ulankyzy, S., Modelling the Rubbing Process in Labyrinth Seals, *Proceedings of GPPS Forum*, 18, Karlsruhe, 2018.
- [56] Nosko, O., Perfect thermal contact of hyperbolic conduction semispaces with an interfacial heat source, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 164, 2021.
- [57] Paradoy, A., Delta Blade Set Repeatability Evaluation - LuFo MakTurb Projekt, Präsentation, Sheffield, 2020.
- [58] Polifke, W. & Kopitz, J., *Wärmeübertragung: Grundlagen, analytische und numerische Methoden*, Pearson Studium, München, 2009.
- [59] Popov, V. L., *Kontaktmechanik und Reibung: Von der Nanotribologie bis zur Erdbebedynamik*, Springer, Berlin, 2015.
- [60] Puls, H., Klocke, F. & Veselovac, D., FEM-based prediction of heat partition in dry metal cutting of AISI 1045., *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 86, 2016.

- [61] Pychynski, T., *Entwicklung und experimentelle Validierung eines Ansatzes für die Modellierung des Anstreifverhaltens von Labyrinthdichtungen mit Honigwabeneinlaufbelägen*, Lagos, Berlin, 2016.
- [62] Richard, H. A. & Sander, M., *Technische Mechanik - Festigkeitslehre: Lehrbuch Mit Praxisbeispielen, Klausuraufgaben und Lösungen*, Vieweg, Wiesbaden, 2006.
- [63] Rostami, S. & Kamgar, R., Insight to the Newmark Implicit Time Integration Method for Solving the Wave Propagation Problems, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 46, 2022.
- [64] Schmicker, D., Duczek, S., Liefold, S. & Gabbert, U., Wave Propagation Analysis using High-Order Finite Element Methods: Spurious Oscillations excited by Internal Element Eigenfrequencies, *Technische Mechanik*, 34, 2014.
- [65] Schrüfer, S., Unterlagen zum Projekt: MakTurb - Materialdatenblatt, Rolls-Royce Deutschland Ltd. & Co KG, Blankenfelde-Mahlow, 2019.
- [66] Sert, C., *Finite Element Analysis in Thermofluids*, Lehrskript, METU, Ankara, 2012.
- [67] Shahraki, M., Shahabian, F. & Maghami, A., A unified scheme for nonlinear dynamic direct time integration methods: A comparative study on the application of multi-point methods, *Engineering with Computers*, 39, 2023.
- [68] Shakib, F., Hughes, T. J. & Johan, Z., A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: X. The Compressible Euler and Navier-Stokes Equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89, 1991.
- [69] Smith, B. S., *Modeling Shock Waves Using Exponential Interpolation Functions with the Least-Squares Finite Element Method*, Masterarbeit, ODU, Norvflk, 2016.
- [70] Soulaïmani, A. & Fortin, M., Finite Element Solution of Compressible Viscous Flows Using Conservative Variables, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118, 1994.
- [71] Taler, J. & Ocloń, P., Finite Element Method in Steady-State and Transient Heat Conduction, *Encyclopedia of Thermal Stresses*, 2016.
- [72] *The Jet Engine*, John Wiley & Sons Ltd on behalf of Rolls-Royce plc, Chichester, West Sussex, 2015.
- [73] Tian, X. & Kennedy, F. E., Temperature Rise at the Sliding Contact Interface for a Coated Semi-Infinite Body, *Journal of Tribology*, 115, 1993.
- [74] Tzou, D. Y., The effects of thermal shock waves on the crack initiation around a moving heat source, *Engineering Fracture Mechanics*, 34, 1989.
- [75] Tzou, D. Y., On the Thermal Shock Wave Induced by a Moving Heat Source, *Journal of Heat Transfer*, 2, 1989.

- [76] Tzou, D. Y., Shock wave formation around a moving heat source in a solid with finite speed of heat propagation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 10, 1989.
- [77] Tzou, D. Y., *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior*, Wiley, Hoboken, 2015.
- [78] Vedavarz, A., Kumar, S. & Moallemi, M. K., *Significance of Non-Fourier Heat Waves in Conduction*, *Journal of Heat Transfer*, 116, 1994.
- [79] Vernotte, P., The paradoxes of the continuous theory of the heat equation (Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur), *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 246, 1958.
- [80] Vimercati, D., Mundt, Ch. & Pudsey, A., Numerical study of impinging injectors patterns for a methane-oxygen rotating detonation engine, *International Workshop on Detonation Propulsion and International Constant Volume and Detonation Combustion Workshop*, Berlin, 2022.
- [81] Wagner, M., *Lineare und nichtlineare FEM: Eine Einführung mit Anwendungen in der Umformsimulation mit LS-DYNA®*, Springer, Wiesbaden, 2017.
- [82] Wahl, J. B. & Harris, K., CMSX-4® PLUS SINGLE CRYSTAL ALLOY DEVELOPMENT, CHARACTERIZATION AND APPLICATION DEVELOPMENT, *International Symposium on Superalloys*, 13, 2016.
- [83] Wandinger, J., *Grundlagen der FEM*, Lehrskript, HAW, Landshut, 2013.
- [84] Wang, B. & Han, J., A finite element method for non-Fourier heat conduction in strong thermal shock environments, *Frontiers of Materials Science in China*, 4, 2010.
- [85] Zhou, Z., Wen, Y., Cai, C., Zeng, Q., *Fundamentals of Structural Dynamics*, Elsevier, Oxford, 2021.
- [86] Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., *The Finite Element Method: Volume 1: The Basis*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

ANHANG

A Netzgen

A.1 startSkript.m

Inhalte

- Parallel Computing
- Programmaufruf zur Netzgenerierung

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% startSkript.m %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Netzgen          : Funktion                                     %
% Netzgen_Kontakt : Hauptprogramm                               %
% p                : Parallel Pool Aufruf "parpool", mit MATLAB Profil %
%                  "local"                                     %
% anzahlVerfuegbarerCPU      : Anzahl paralleler Threads      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
delete('logfile.txt')
diary('logfile.txt')

close all; clear; clc;

ver;
fprintf('-----\n')
delete(gcf('nocreate'));

Parallel Computing

% anzahlVerfuegbarerCPU = maxNumCompThreads; % Verfuegbare CPUs
anzahlVerfuegbarerCPU = 1; % zeitlich
% anzahlVerfuegbarerCPU = str2num(getenv('SLURM_NTASKS')); % aus slurm.sh

if anzahlVerfuegbarerCPU > 1
    p = parpool('local',anzahlVerfuegbarerCPU);
end

Programmaufruf zur Netzgenerierung

Netzgen = {@Netzgen};
input    = {'Beispiel_Netz',anzahlVerfuegbarerCPU};
Netzgen{1}(input{1,:});
```

A.2 Netzgen.m

Inhalt

- Materialparameter
- Ort-/Elementparameter
- Zeitparameter
- Randbedingungen
- Koordinaten der Randpunkte zur Domaene und Randbedingungen
- Ab hier Netzerstellung - keine Aenderungen vornehmen!
- Netzerstellungsprogramm
- Quadratische Elemente
- Polygonplot
- Randbedingungen werden hier zugewiesen
- Materialbereiche

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Netzgen.m %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Author:                Marvin C. Feike, M.Sc.                                %
%                        Institut fuer Thermodynamik                        %
%                        http://www.unibw.de/thermodynamik                    %
%                        %                                                    %
%                        Universitaet der Bundeswehr Muenchen                %
%                        Werner-Heisenberg-Weg 39                            %
%                        85579 Neubiberg                                       %
%                        %                                                    %
% Letzte Bearbeitung: 29.11.2023                                             %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% In der Netzgen.m wird ein 2D Netz als .inp-Datei generiert.                %
% Hierfuer werden die Materialdaten, Eckknotenkoordinaten und                %
% Materialknotenpunkte eingegeben. Es ist nur ein strukturiertes Netz      %
% moeglich, aus quadratische und lineare Rechteckelementen.                  %
% Die Zeitingreation und Zeitparameter sowie auch numerische                 %
% stabilisierende Mechanismen koennen festgelegt werden.                    %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% - Einheiten sind, wenn nicht anders angegeben, im SI System                %
% RB_Anzahl                                                       %
% elementSeitenVerhaeltins : Aspect Ratio, Seitenverhaeltnis                %
% SPEZIFISCHE_WAERMEKAPAZITAET_C : Spezifische Waermekapazitaet            %
% dc                        : Discontinuity-capturing, ein := 1 oder 2, aus := 0, %
%                        1: Pojezierte Geschwindigkeit, 2: Orientierte Relax. %
% ZEIT_DT                   : Zeitinkrement                                  %
% ELEMENT_TYP               : Elementtyp 1 = Viereck (standart, keine anderen) %
% ...                                                                %
% xVektor : x Vektor fuer Polygondomaene                                    %
% yVektor : y Vektor fuer Polygondomaene                                    %

```

```

%                                                                    %
% [] = grading() : Funktion fuer Wachstum                                                                    %
% [] = LzuGZerl() : Funktion fuer zeitliche/globale Element/Knoten Zuordnung %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function Netzgen(prName,ANZAHL_VERFUEGBARER_CPU)

disp('*****');
disp('**          Universitaet der Bundeswehr Muenchen          **');
disp('**          Fakultaet fuer Luft- und Raumfahrttechnik    **');
disp('**          Institut fuer Thermodynamik                   **');
disp('**                                                                    **');
disp('**          M. C. Feike                                     **');
disp('**          Stand: 29.11.2023                               **');
disp('**                                                                    **');
disp('**          Netzgen2D - FEM                                 **');
disp('*****');

tic
Name = (prName);

fprintf('1) Lese Materialdaten, Randbedingungen und Geometriedaten ein.\n');

Materialparameter

MATERIAL_ANZAHL          = 1; % Anzahl verschiedener Materialien

% Generisches Material
TAU(1)                   = 1E-8; % Relaxationszeit in s
LAMBDA(1)                 = 10; % Leitfaehigkeit in W/m-K
RHO(1)                    = 1000; % Dicht in kg/m^3
SPEZIFISCHE_WAERMEKAPAZITAET_C(1) = 100; % Kapazitaet in J/kg-K
V_X(1)                   = 100; % Relativgeschwindigkeit x in m/s
V_Y(1)                   = 0; % Relativgeschwindigkeit y in m/s

Ort-/Elementparameter

ELEMENT_TYP              = 1; % Rechteckelemente
ELEMENT_KNOTEN_ANZAHL   = 4; % Lin. Elemente := 4, quad. Element := 8
ELEMENT_SEITENLAENGE_X = 2.5E-7/2;
ELEMENT_SEITENLAENGE_Y = 2.5E-7/2;
elementSeitenVerhaeltins = ELEMENT_SEITENLAENGE_X/ELEMENT_SEITENLAENGE_Y;

ZUFUELLIGE_NETZSEITENLAENGEN = 0; % Ungleichmaessiges Netz, aktiv := 1

QUELLE_INFINITE_STREIFENLAENGE = 0; % Reibkontaktlaenge

```

Zeitparameter

```
% Zwischenschritt adaptive Zeitrstriberechnung nach Diffusions-Zahl
Lc = sqrt((ELEMENT_SEITENLAENGE_X)^2 + (ELEMENT_SEITENLAENGE_Y)^2);
alpha = max(LAMBDA)/(min(RHO)*min(SPEZIFISCHE_WAERMEKAPAZITAET_C));
% globales alpha konservative Annahme -> gr. alpha, reduziert Zeitschritt.

diffZahl = 0.5; % =< 1/2, Hoffmann Num. Method for Eng. and Sc. Kap. 10.5.2

ZEIT_DT          = diffZahl*Lc^2/alpha;% Diffusions-Zahl =
ZEIT_START       = 0; % alpha*dt/dLc^2 -> dt = d * dx^2/alpha; 1E-9/2;
ZEIT_FINAL       = 1E-7;
```

Randbedingungen

```
TEMPERATUR_INITIAL = 1;
fFunk              = 0; % wird nicht gebraucht, nur zur Verfolstaendigung
```

```
% Bewegte Randbedingung, einlesen externe Datei
RB_BEWEGT_EIN     = 0; % aktiv := 1, einlesen von RB bei HypHeat Programm
RB_BEWEGT_LAENGE = 0; % Laenge in m ueber die RB gilt
RB_BEWEGT_V       = 0; % Geschwindigkeit in m/s
```

```
% Randbedingung an Raendern, im Kontaktbereich usw..
RB_Anzahl = 3;
RB_ART    = [1 2 2]; % 1:=Dirichlet, 2:=Neumann, 3:=Robin, 4:=Kontakt
RB_STRING = {'1.0' '0.0';
             '20.0' '0.0'; % Punktquelle
             '0.0' '0.0'};
```

Koordinaten der Randpunkte zur Domaene und Randbedingungen

```
PUNKT(1,:) = [0 0];
PUNKT(2,:) = [2.0000E-05      0.0000E+00];
PUNKT(3,:) = [2.0000E-05      2.0000E-05];
PUNKT(4,:) = [0.0000E+00      2.0000E-05];
PUNKT(5,:) = [1.0000E-05      1.0000E-05];
```

```
% Raender
RAND_ANZAHL = 4;
RAND(1,:) = [1 2]; % Rand zwischen zwei Punkten
RAND(2,:) = [2 3];
RAND(3,:) = [3 4];
RAND(4,:) = [4 1];
```

```
RAND_RB(1) = 1; % Randbedingung zu Rand
```

```
RAND_RB(2) = 3;
RAND_RB(3) = 1;
RAND_RB(4) = 1;

% Punktquellen
PUNKTQUELLEN_ANZAHL = 1;
PUNKT_RB(1,:) = [5 2]; % 2 Strings: 1. Punkt-Nr, 2. RB-Nr
% PUNKT_RB(2,:) = [];

% Materialbereiche
MATERIAL_ANZAHL_BEREICHE = 1;
MATERIAL_PUNKT(1,:) = [1 1 PUNKT(1,:)];
MATERIAL_PUNKT(2,:) = [1 1 PUNKT(2,:)];
MATERIAL_PUNKT(3,:) = [1 1 PUNKT(3,:)];
MATERIAL_PUNKT(4,:) = [1 1 PUNKT(4,:)];

% Polygonfunktion
xVektor = [PUNKT(1:4,1)' PUNKT(1,1)];
yVektor = [PUNKT(1:4,2)' PUNKT(1,2)];

% Knotenkoordinaten
xMin = min(PUNKT(:,1));
xMax = max(PUNKT(:,1));
yMin = min(PUNKT(:,2));
yMax = max(PUNKT(:,2));

% Wachstum / Grading festlegen
% Es sind mehrere Punkte moeglich, wohin das Netz verfeinert werden soll.
% Fixpunkte duerfen nicht exakt auf Domaeneneckpunkten liegen.
WACHSTUM_FIXPUNKT_X(1) = 0; % Fixpunkt in x
WACHSTUM_FIXPUNKT_Y(1) = 0; % Fixpunkt in y

WachstumFixpunktAnzahlX = length(WACHSTUM_FIXPUNKT_X); % Anzahl der Fixpunkte
WachstumFixpunktAnzahlY = length(WACHSTUM_FIXPUNKT_Y);

WACHSTUM_FAKTOR_X = 1.0; % Wachstumsfaktor in x von WACHSTUM_FIXPUNKT_X
                        % (Wachstum ab WACHSTUM_FAKTOR_X>1)
WACHSTUM_FAKTOR_Y = 1.0; % Wachstumsfaktor in y von WACHSTUM_FIXPUNKT_Y
                        % (Wachstum ab WACHSTUM_FAKTOR_Y>1)

fprintf('2) Erstelle Netzmetrik mit Koordinaten und pruefe Gitter.\n');
cd Subprogramme
...
```

Netzerstellungsprogramm

```
% Pruefe Koordinaten und Positionen der Randbedingunge auf Doppelbesetzung
% und Existenz
% x-Koordinaten
for i = 1 : size(PUNKT,1)
    j = 1;
    ...
    j = j + 1;
end
end

% y-Koordinaten
for i = 1 : size(PUNKT,1)
    j = 1;
    ...
    j = j + 1;
end
end

...
```

Quadratische Elemente

...

Polygonplot

...

Randbedingungen

...

Materialbereiche

...

A.3 logFile.txt

logFile.txt

```
-----
MATLAB Version: 9.12.0.1884302 (R2022a)
MATLAB License Number: 342076
Operating System: Microsoft Windows 11 Pro for Workstations Version 10.0
(Build 22631)
Java Version: Java 1.8.0_202-b08 with Oracle Corporation Java HotSpot(TM)
```

64-Bit Server VM mixed mode

```

-----
MATLAB                               Version 9.12 (R2022a)
MATLAB Coder                         Version 5.4 (R2022a)
MATLAB Compiler                     Version 8.4 (R2022a)
MATLAB Compiler SDK                 Version 7.0 (R2022a)
Optimization Toolbox                Version 9.3 (R2022a)
Parallel Computing Toolbox          Version 7.6 (R2022a)
Partial Differential Equation Toolbox Version 3.8 (R2022a)
Symbolic Math Toolbox               Version 9.1 (R2022a)
-----

```

```

**          Universitaet der Bundeswehr Muenchen          **
**          Fakultaet fuer Luft- und Raumfahrttechnik    **
**              Institut fuer Thermodynamik              **
**                                                      **
**              M. C. Feike                              **
**              Stand: 29.11.2023                        **
**                                                      **
**              Netzgen2D - FEM                          **

```

- 1) Lese Materialdaten, Randbedingungen und Geometriedaten ein.
- 2) Erstelle Netzmetrik mit Koordinaten und pruefe Gitter.
 - a) Gesamteknotenanzahl fuer temporaeres Polygon (in/out) sind 25921.
 - b) Knotenvektor mit Punktkoordinaten wird erstellt.
 - c) Pruefe, welche Knoten im Netzgebiet liegen.
 - d) Knoten werden Elementen zugeordnet, 1-fache Parallelisierung.
 - e) Es werden 25600 Elemente mit 25921 Knoten erstellt.
- 3) Erstelle Plot zu Knoten in der Domaene.
- 4) Erstelle Plot zu Netz mit Knoten und Elementen.
- 5) Weise Randbedingungen den Knoten und Elementen zu.
 - a) Definiere thermodynamische Randbedingungen.
 - b) Definieren Stoffrandbedingungen.
- 6) Eine Netzdatei .inp wird erstellt. (Abbrechen mit Strg+c).
- 7) Netzdatei "Beispiel_Netz.inp" erfolgreich erstellt.
(Gesamte Netzerstellungsdauer: 14.394278 s)

B HypHeat2D

B.1 startSkript.m

Contents

- Waermetransportgleichungen
- Loeser nach Zeitintegrationsschema
- Programmaufruf zur 2D Waermetransportberechnung

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% startSkript.m %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% GLEICHUNG      : Geichung des Waermetransporttyps:                %
%                - 1 := Fourier                                    %
%                - 2 := Cattaneo-Vernotte (Tzou, 1989)            %
%                - 3 := Christov-Cattaneo (Christov, 2005)       %
% HypHeat2D      : Hauptprogramm                                     %
% HypHeatPar     : Funktion fuer die Parallelisierung              %
% input          : Input fuer die HypHeatPar Funktion            %
% kM             : konzentrierte Massenmatrix                     %
% LOESER         : Zeitintegrationsschema                          %
%                - 1 := Houbolt (Bathe, 1976)                     %
%                - 2 := linear acceleration (Zhou, 2021)          %
%                - 3 := Newmark (Zhou, 2021)                      %
%                - 4 := Theta (Huebner, 2001)                     %
%                - 5 := Wilson-Theta (Bathe, 1976)                %
% anzahlVerfuegbarerCPU : Anzahl paralleler CPUs                  %
% p              : parallel pool MATLAB                           %
% SUPG_GAMMA     : Theta Wert fuer transiente Simulation SUPG (=0.5) %
% ZEITINGTEGRATION_THETA: Theat Wert fuer Theta Zeitintegration  %
%                - 0 := Euler explizit                            %
%                - 0.5 := Crank-Nicolson                          %
%                - 0.75 := Galerin                                 %
%                - 1 := Euler implizit                             %
% KONZENTRIERTE_MASSENMATRIX : Konzentrierte Massenamtrix        %
% GALERKIN_LEAST_SQUARE : Galerkin LS nur fuer qadr. Elemente    %
% STREAMLINE_UPWIND_PETROV_GALERKIN : SUPG Methode               %
% DISCONTINUITY_CAPTURING : Diskontinuitaestaufloser            %
%                - 1 := projezierte Geschwindigkeit              %
%                - 2 := Orientierte Relaxationszeit              %
% DATENAUSCHREIBUNG : Vorschrift zur Datenausschreibung und speicherung %
%                .SCHRITT: Schrittweite der Datenausschreibung   %
%                - 1 := jeden Zeitschritt                         %
```

```

%           - 2 := jeden zweite Zeitschritt           %
%           - n := jeden nte Zeitschritt             %
%           .SPEICHERUNG:                             %
%           - 0 := speichert alle Ausschreibungsschritte %
%           - 1 := speichert nur letzten Schritt      %
%           - 2 := speichert letzten und vorletzten Schritt %
%           - 3 := speichert letzte 3 Schritte        %
%           - n := speichert letzte n Schritte        %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
close all; clear; clc;
cd Subprogramme; deleteOldFiles;
delete(gcp('nocreate'));

diary('logFile.txt')
ver;
fprintf('-----\n')

% anzahlVerfuegbarerCPU = maxNumCompThreads; % Verfuegbare CPUs
anzahlVerfuegbarerCPU = 4; % manuell
% anzahlVerfuegbarerCPU = str2num(getenv('SLURM_NTASKS')); % aus slurm.sh

if anzahlVerfuegbarerCPU > 1
    p = parpool('local',anzahlVerfuegbarerCPU);
end

Waermetransportgleichungen

% GLEICHUNG = 1; % Fourier
% GLEICHUNG = 2; % Cattaneo-Vernotte
GLEICHUNG = 3; % Christov-Cattaneo

Loeser nach Zeitintegrationsschema

% LOESER = 1; Houbolt
% LOESER = 2; lineare Beschleunigung
% LOESER = 3; Newmark
LOESER = 4; % Theta
% LOESER = 5; % Wilson
% LOESER = 6; % Runge-Kutta

% Zeitparameter
DATENAUSSCHREIBUNG.SCHRITT = 5; % 1 := Schrittweite 1
DATENAUSSCHREIBUNG.SPEICHER = 3; % 0 := behalte alle Daten

SUPG_GAMMA = 0.5;
ZEITINTEGRATION_THETA = 0.5;

```

```

% Konzentrierte Massenmatrix: (Spur-Methode)
KONZENTRIERTE_MASSENMATRIX = 1; % aktiv := 1

% Galerkin Least-Square: (nur quadratische Elemente)
GALERKIN_LEAST_SQUARE = 0; % aktiv := 1

% Stream-Line-Upwind-Petrov-Galerkin:
STREAMLINE_UPWIND_PETROV_GALERKIN = 0; % aktiv := 1

% Discontinuity Capturing:
% Projizierte Geschwindigkeit auf Temperaturfeld: aktiv := 1 - Donea S. 184
% Orientierte Relaxationszeit: aktiv := 2
DISCONTINUITY_CAPTURING = 2;

Programmaufruf zur 2D Waermetransportberechnung

HypHeatPar = {@HypHeat2D};

input      = {'Beispiel_Netz',anzahlVerfuegbarerCPU, ...
             GLEICHUNG,LOESER,KONZENTRIERTE_MASSENMATRIX,GALERKIN_LEAST_SQUARE, ...
             STREAMLINE_UPWIND_PETROV_GALERKIN,DISCONTINUITY_CAPTURING, ...
             SUPG_GAMMA,ZEITINTEGRATION_THETA,DATENAUSCHREIBUNG};

HypHeatPar{1}(input{1,:});

```

B.2 HypHeat2D.m

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% HypHeat2D.m %%%%%%%%%
% Author:          Marvin C. Feike, M.Sc.          %
%                 Institut fuer Thermodynamik   %
%                 http://www.unibw.de/thermodynamik %
%                 %                               %
%                 Universitaet der Bundeswehr Muenchen %
%                 Werner-Heisenberg-Weg 39      %
%                 85579 Neubiberg              %
%                 %                               %
% Letzte Bearbeitung: 02.01.2024                %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                 Programm-Info                 %
% Gleichungen:                                     %
% - Fourier:                                       %
%  $\rho * c * (dT/dt + (V * nab.)T) = k * nab.dT$  %
% %                                               %
% - Cattaneo-Vernotte:                           %
%  $\rho * c * (\tau * d^2T/dt^2 + dT/dt + \tau * d(V * nab.T)/dt + (V * nab.)T) = k * nabl.dT$  %
% %                                               %

```

```

% - Christov-Cattaneo: %
%  $\rho * c * (\tau * d^2 T / dt^2 + 2 * \tau * (v * nabla \cdot T) / dt + dT / dt + \tau * d(V * nab)^2 T$  %
%  $+ (V * nab \cdot T) = k * nabla \cdot dT$  %
% %
% Numerik: %
% - Raumlige Diskretisierung nach GFEM und Stabilisierung nach SUPG %
% Methode %
% - Zeitliche Diskretisierung nach Houbolt, Newmark, Theta, lin. %
% Beschleunigung und Wilson-Theta Methode %
% - Randbedingungen: Dirichlet, Robin and Newmark. + Kontakt und %
% eine bewegte Bedingung mit Vektor F %
% - Strukturiertes Netz mit Rechtecken %
% %
% - Wichtigste Lektuere: %
% : Sert // EP 508: FEA in Thermofluids, METU, 2018 %
% : Bathe, Wilson // Numerical Methods in FEA, Wilson, 1976 %
% : Huebner, Dewhirst // The FEM for Engineers, Wiley, 2001 %
% : Donea, Huerta // FEM for Flow Problems, Wiley, 2003 %
% : Huang, Usmani // FEA for Heat Transfer, Springer, 1994 %
% : Lebon, Jou, Casas-Vazques // Under. NoEq. Thd, Springer, 2008 %
% : Tzou // Macro- to microscale heat transfer, Wiley, 2015 %
% %%%%%%%%%%%
% Nomenklatur %
% Einheiten im SI-System %
% Konstanten in GROSS_BUCH_STABEN %
% Variablen im camelCasing %
% %
% a0, a1, a2, ..., a7 : Zeitintegrationskonstanten %
% ... %
% ZEIT, .t, .s, FINAL, START: Zeitparameter %
% %%%%%%%%%%%
% Subprogramme %
% Ber*: Berechne; Set*: Setze %
% ... %
% SetRB : Randbedingungen %
% %%%%%%%%%%%

function [] = HypHeat2D(inpfile,anzahlVerfuegbarerCPU,GLEICHUNG,LOESER, ...
    KONZENTRIERTE_MASSENMATRIX,GALERKIN_LEAST_SQUARE, ...
    STREAMLINE_UPWIND_PETROV_GALERKIN,DISCONTINUITY_CAPTURING, ...
    SUPG_GAMMA,ZEITINTEGRATION_THETA,DATENAUSSCHREIBUNG)

disp('*****');
disp('** Universitaet der Bundeswehr Muenchen **');
disp('** Fakultae fuer Luft- und Raumfahrttechnik **');

```

```
disp('**          Institut fuer Thermodynamik          **');
disp('**                                          **');
disp('**          M. C. Feike          **');
disp('**          Stand: 02.01.2024          **');
disp('**                                          **');
disp('**          HypHeat2D - FEM          **');
disp('*****');

tic

cd Subprogramme

% Waermtransportgleichung
fprintf('1) Waermtransportgleichung nach: ')
if GLEICHUNG == 1
    fprintf('Fourier.\n')
elseif GLEICHUNG == 2
    fprintf('Cattaneo-Vernotte.\n')
elseif GLEICHUNG == 3
    fprintf('Christov-Cattaneo.\n')
end

...

% Loeser
fprintf('5) Zeitintegration nach ')
if LOESER == 1 % Houbolt
    fprintf('Houbolt.\n')
    LoeserHoubolt(ZEIT,KNOTEN_ANZAHL,GEOMETRIE,RB_BEWEGT, ...
        randbedingungen,ELEMENT_TYP,zeitlichZuGlobal,KOORTINATEN, ...
        ELEMENT_ANZAHL,ELEMENT_KNOTEN_ANZAHL, GLEICHUNG, ...
        gaussIntegrationsPunkteAnzahl,formFunktionen,MATERIAL_ANZAHL, ...
        gaussIntegrationsGewichtung,element,anzahlVerfuegbarerCPU, ...
        DISCONTINUITY_CAPTURING,STREAMLINE_UPWIND_PETROV_GALERKIN, ...
        GALERKIN_LEAST_SQUARE,KONZENTRIERTE_MASSENMATRIX,DATENAUSCHREIBUNG);
    ...
end

fprintf('\n Berechnung nach %f s beendet.\n',toc);
cd ..

diary off
```

B.3 logFile.txt

logFile.txt

```

-----
MATLAB Version: 9.12.0.1884302 (R2022a)
MATLAB License Number: 342076
Operating System: Microsoft Windows 11 Pro for Workstations Version 10.0
  (Build 22631)
Java Version: Java 1.8.0_202-b08 with Oracle Corporation Java HotSpot(TM)
  64-Bit Server VM mixed mode
-----

MATLAB                               Version 9.12   (R2022a)
MATLAB Coder                         Version 5.4   (R2022a)
MATLAB Compiler                      Version 8.4   (R2022a)
MATLAB Compiler SDK                 Version 7.0   (R2022a)
Optimization Toolbox                Version 9.3   (R2022a)
Parallel Computing Toolbox           Version 7.6   (R2022a)
Partial Differential Equation Toolbox Version 3.8   (R2022a)
Symbolic Math Toolbox               Version 9.1   (R2022a)
-----

Starting parallel pool (parpool) using the 'local' profile ...
Connected to the parallel pool (number of workers: 4).
*****
**          Universitaet der Bundeswehr Muenchen          **
**          Fakultaet fuer Luft- und Raumfahrttechnik     **
**          Institut fuer Thermodynamik                   **
**                                                         **
**          M. C. Feike                                    **
**          Stand: 02.01.2024                             **
**                                                         **
**          HypHeat2D - FEM                                **
*****

1) Waermetransportgleichung nach: Christov-Cattaneo.
2) Aktivierte Stabilitaetsmechanismen sind:
-Konzentrierte Massenmatrix.
-Diskontinuitaetsaufloesung: Orientierte Relaxation.
3) Enlesen der Netzdatei.
-Netzdatei Beispiel_Netz.inp-File.
+Einlesen von globalen Parametern.
+Einlesen von Stoffdaten.
+Einlesen von Knotenkoordinaten und Elementen.
+Einlesen von Randbedingungen.
-Netzdatei eingelesen.
4) Ausgabe der Materialdaten und dimensionlosen Kennzahlen:

```

```

Material Nr. 1
-----
-LAMBDA    = 10 [W/m-K]
-RHO       = 1000 [kg/m^3]
-c         = 100 [J/kg-K]
-alpha    = 1.0000e-04 [m^2/s]
-TAU       = 1.0000e-08 [s]
-C         = 100 [m/s]
-V_X      = 100.0000 [m/s]
-V_Y      = 0.0000 [m/s]

Dimensionslose Kennzahlen:
-Ma_th    = 1.0 [-] (v = 100 [m/s])

-PecletZahl = 0.1 [-] (Lc = 1.7678e-07 [m], vMax = 100 [m/s])
-PecletElementMin = 0.1 [-] (ElementGroesseMin = 1.2500e-07 [m],
v = 100 [m/s])
-PecletElementMax = 0.1 [-] (ElementGroesseMax = 1.2500e-07 [m],
v = 100 [m/s])
-PecletQuelle = 0.0 [-] (QUELLE_INFINITE_STREIFENLAENGE = 0.0000e+00 [m],
v = 100 [m/s])

-d = 0.500 [-] (Lc = 1.7678e-07 [m])
-Fo = 320.000 [-] (Lc = 1.7678e-07 [m])

-CFLlc = 0.09 [-] (Lc = 1.7678e-07 [m], vx = 100 [m/s], vy = 0 [m/s],
DT = 1.5625e-10 [s])
-CFLMax = 0.12 [-] (ELEMENT_GROESSE = 1.2500e-07 [m],
v = 100 [m/s], DT = 1.5625e-10 [s])
-CFLMin = 0.12 [-] (ELEMENT_GROESSE = 1.2500e-07 [m],
v = 100 [m/s], DT = 1.5625e-10 [s])

-Cou = 0.02 [-] (Lc = 1.7678e-07 [m], C = 100 [m/s],
DT = 1.5625e-10 [s])
-CouX = 0.02 [-] (ELEMENT_GROESSE = 1.2500e-07 [m], C = 100 [m/s],
DT = 1.5625e-10 [s])
-CouY = 0.02 [-] (ELEMENT_GROESSE = 1.2500e-07 [m], C = 100 [m/s],
DT = 1.5625e-10 [s])

5) Zeitintegration nach Theta.
7) Erstelle VTU Datei mit Punktkoordinaten und Elementen.
8) Beginne mit den Loesungsschritten ("Theta" = 0.5).
a) Initialisiere Berechnung.
b) Matrizen und Vektoren werden erstellt.

```

```

-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau) Nr. 1 von insgesamt 4 wird erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau) Nr. 2 von insgesamt 4 wird erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau) Nr. 3 von insgesamt 4 wird erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau) Nr. 4 von insgesamt 4 wird erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau,cVek) Nr. 1 von insgesamt 4 wurde
  erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau,cVek) Nr. 2 von insgesamt 4 wurde
  erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau,cVek) Nr. 3 von insgesamt 4 wurde
  erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau,cVek) Nr. 4 von insgesamt 4 wurde
  erstellt!
-Zusammenbau der globalen Matrizen!
-Globale Matrizen erstellt und abgespeichert.
-Ordne Monitoring Punkte zu.
c) Matrizen und Vektoren wurden erstellt.
d) Erstelle effektive Steifigkeitsmatrix A.
e) Vorkonditionierung der Steifigkeitsmatrix A.
f) lu - Zerlegung der Steifigkeitsmatrix A.
g) Matrix A abgespeichert und Triangularisierung abgeschlossen.
h) Beginne mit dem Loesen des Gleichungssystems.

-----
h.1) Berechne Zeitschritt = 1
-Matrizen fuer die Diskontinuitaetsaufloesung werden erstellt.
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau) Nr. 1 von insgesamt 4 wird erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau) Nr. 2 von insgesamt 4 wird erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau) Nr. 3 von insgesamt 4 wird erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau) Nr. 4 von insgesamt 4 wird erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau,cVek) Nr. 1 von insgesamt 4 wurde
  erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau,cVek) Nr. 2 von insgesamt 4 wurde
  erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau,cVek) Nr. 3 von insgesamt 4 wurde
  erstellt!
-Teilmatrizengruppe (M,K,Kv,F,Mtau,Kvtau,cVek) Nr. 4 von insgesamt 4 wurde
  erstellt!
-Zusammenbau der globalen Matrizen!
-Globale Matrizen erstellt und abgespeichert.
-Matrizen fuer die Diskontinuitaetsaufloesung abgespeichert.

-----
h.1) Berechne Zeitschritt = 2
-Matrizen fuer die Diskontinuitaetsaufloesung werden erstellt.
...

```

Berechnung nach 16431.737618 s beendet.

