

# **Zur numerischen Simulation von Stahlbeton- und Faserbetonstrukturen unter Detonationsbeanspruchung**

**Stefan Greulich**

Von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität  
der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktoringenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation

**Universität der Bundeswehr München**

**Februar 2004**



## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Fragestellung, die Auswirkungen von Detonations- einwirkungen auf betonartige Strukturen zu untersuchen. Die mit geeigneten und zuverlässigen Werkstoffmodellen für den Stahlbeton und für den Stahlfaserbeton durchgeführten numerischen Simulationen sollen aufwendige und teure Versuche ergänzen und/oder ersetzen. Diese Modelle müssen in der Lage sein, die charakteristischen Merkmale der Wellenfortpflanzung im Werkstoff abbilden zu können. Die Werkstoffmodelle für den Stahlfaserbeton und für den Stahlbetonver- bund wurden in dieser Arbeit neu entwickelt und in eine Hydrocode-Umgebung eingebettet. Stoffgesetze werden in der klassischen Theorie der Thermodynamik additiv in eine hydrostati- sche und eine deviatorische Komponente zerlegt. In dieser entkoppelten Darstellung lässt sich mit einer Zustandsgleichung das Kompressionsverhalten und mit einem Festigkeitsmodell das de- viatorischen Materialverhalten beschreiben. Die Materialgleichungen wurden auf der Grundlage einer vollständig dreidimensionalen kontinuumsbasierten elasto-plastischen Schädigungstheorie hergeleitet. Die Stoffgesetze sind modular aufgebaut und berücksichtigen die Zunahme der Fe- stigkeit in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate, eine Beschreibung der Schädigung auf Basis des Materialplastifizierens und eine daraus resultierende Degradation der Steifigkeit und Festig- keit. Ergänzend wurden zur vollständigen Beschreibung des Stahlbetons die Materialparameter eines bestehenden Materialmodells für Metalle denen des Betonstahls nach DIN 488 angepasst.

## Abstract

In this work, the effects of detonation loadings on concrete based structures are analysed. For accurate modelling, appropriate and reliable material models for reinforced concrete and fibre reinforced concrete are required for the numerical simulations which should complement and/or substitute experiments. These material models must have the ability to characterise the effects of wave propagations in heterogeneous materials. The material models for steel fibre reinforced concrete and reinforced concrete bond have been developed and implemented in a hydrocode. Due to the classical theory of thermodynamics, material laws are additively disparted into a hydrostatic component and a deviatoric component. In doing so, the material dependent consti- tutive equations are splitted in an equation of state for the compressive material behaviour, and, a strength model for the deviatoric material behaviour. The constitutive equations are affiliated on the basis of a fully three dimensional continuum based elastic-plastic damage theory. The new constitute equations are modularly formulated and consider the effects of strength increa- se due to strain-rates, a damage evolution due to material plasticising, and, consequentially a degradation of stiffness and strength. Additionally, the material parameters of the reinforcing steel according to the German code regulations DIN 488 have been evaluated and implemented in a known material law of metals.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2000 bis 2004 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Statik der Universität der Bundeswehr München und wurde von der dortigen Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen als Dissertation anerkannt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Norbert Gebbeken für die Anregung zu dieser Arbeit, für die hervorragende Förderung sowie für die Übernahme des Erstreferats. Er gab mir in all den Jahren den Freiraum, mich wissenschaftlich und persönlich zu entfalten. Die Bedingungen an seinem Institut sind ideal, um erfolgreich zu arbeiten.

Für die Übernahme des Koreferats und für die wertvollen kritischen Anmerkungen danke ich Herrn Professor Carsten Könke von der Bauhaus-Universität Weimar.

Bei Professor Manfred Keuser bedanke ich mich für die Übernahme des Vorsitzes des Prüfungsausschusses.

Diese Arbeit wäre ohne die Hilfe aller Kollegen des Instituts für Mechanik und Statik nicht möglich. Insbesondere der technische Support und die fachlichen Diskussionen mit den Kollegen Dr.-Ing. Max Ruppert, Dipl.-Ing. Achim Pietzsch und Dipl.-Ing. Andreas Baumhauer tragen zum Gelingen der Arbeit bei.

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsauftrages "Verhalten von Baustrukturen aus Stahlbeton und Faserbeton unter Kontakt- und Nahdetonation" des Bundesministeriums der Verteidigung und der Wehrtechnischen Dienststelle 52 in Oberjettenberg (Nr. E/E520/Y0298/X5216). Allen, die mit Ihren Anstrengungen die Arbeit möglich gemacht haben, gilt mein Dank, insbesondere Herrn OTL Dipl.-Ing. Andreas Heckersbruch vom Streitkräfteamt und Herrn Dipl.-Ing. Frank Landmann von der WTD 52 für die Durchführung der Versuche und für die gute Zusammenarbeit.

Schließlich bedanke ich mich herzlich bei meiner Frau Julia und bei meiner Familie, die mir während der gesamten Zeit aufmunternd zur Seite gestanden haben.

Neubiberg, im November 2004

Stefan Greulich

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. Manfred Keuser
1. Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. Norbert Gebbeken
2. Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr.-Ing. Carsten Könke (Bauhaus-Universität Weimar)

Tag der Einreichung: 24. Februar 2004

Tag der Prüfung: 28. Mai 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Stand der Forschung . . . . .	4
1.2.1	Detonationsvorgänge . . . . .	6
1.2.2	Numerische Methoden . . . . .	7
1.2.3	Experimentelle Methoden und Untersuchungen zum Materialverhalten . .	10
1.2.4	Mechanische Werkstoffmodelle . . . . .	14
1.3	Zielsetzung . . . . .	18
1.4	Aufbau der Arbeit . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>23</b>
2.1	Allgemeines . . . . .	23
2.2	Kinematik . . . . .	24
2.2.1	Konfiguration und Lage des materiellen Körpers . . . . .	24
2.2.2	Materielle (LAGRANGESche) und räumliche (EULERSche) Betrachtungsweise	26
2.2.3	Deformations- und Verzerrungstensor . . . . .	27
2.2.4	Verzerrungsraten . . . . .	28
2.3	Beschreibung von Spannungen . . . . .	29
2.3.1	Schnittspannungsvektor . . . . .	29
2.3.2	Spannungstensor . . . . .	29
2.3.3	Objektive Spannungsraten . . . . .	30
2.4	Additive Aufspaltung des Spannungs- und Verzerrungstensors, Invarianten und Eigenwerte, Oktaederspannungen . . . . .	31
2.4.1	Sphärische und deviatorische Spannungs- und Verzerrungstensoren . . . .	31
2.4.2	Hauptspannungen, Hauptverzerrungen . . . . .	32
2.5	Bilanzsätze der Mechanik und der Thermodynamik . . . . .	34
2.5.1	Massenbilanz . . . . .	35
2.5.2	Impulsbilanz . . . . .	35
2.5.3	Energiebilanz . . . . .	35

2.5.4	Dissipationspostulat . . . . .	36
2.6	Stationäre Schockfront – Diskontinuitätsfläche . . . . .	37
2.7	Konstitutive Beziehungen des Kontinuums . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Wellenausbreitung und Entstehung von Schockwellen durch Detonationen</b>	<b>41</b>
3.1	Charakteristische Phänomene der Wellenausbreitung . . . . .	41
3.1.1	Allgemeines . . . . .	41
3.1.2	Wellen im linear-elastischen Bereich . . . . .	43
3.1.3	Wellen im nichtlinear-plastischen Bereich . . . . .	50
3.1.4	Schockwellen . . . . .	52
3.2	Detonation: Vorgang, Theorie und Zustandsgleichung . . . . .	53
3.2.1	Detonationsvorgang . . . . .	53
3.2.2	Detonationstheorie . . . . .	55
3.2.3	Zustandsgleichung und Reaktionsrate . . . . .	57
3.2.4	Zur Abbildung des Detonationsvorgangs in numerischen Simulationen . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Ausgewählte Aspekte zu den Grundlagen von Hydrocodes</b>	<b>61</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	61
4.2	Mathematische Formulierung . . . . .	62
4.3	Räumliche Diskretisierung: Finite-Differenzen-Verfahren . . . . .	65
4.4	Zeitliche Diskretisierung: Inkrementelle Methoden zur Zeitintegration der System- und Materialgleichungen . . . . .	66
4.5	Zur Konvergenz, Konsistenz und Stabilität der numerischen Simulation von Schockwellen . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Mechanisches Werkstoffverhalten</b>	<b>79</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	79
5.2	Stahlfaserbeton . . . . .	80
5.2.1	Einführung . . . . .	80
5.2.2	Statische Stoffphänomene . . . . .	82
5.2.3	Dynamische Werkstoffeigenschaften . . . . .	89
5.2.4	Zusammenfassung und Bewertung . . . . .	93
5.3	Bewehrungsstahl . . . . .	95
5.3.1	Einführung . . . . .	95
5.3.2	Statisches Materialverhalten . . . . .	96
5.3.3	Dynamisches Materialverhalten . . . . .	98
5.4	Verbundverhalten von Stahlbeton . . . . .	100

5.4.1	Einführung . . . . .	100
5.4.2	Verbundmechanismus und statisches Verbundtragverhalten . . . . .	102
5.4.3	Dynamisches Verbundtragverhalten . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Klassische Materialtheorien</b>	<b>111</b>
6.1	Allgemeines . . . . .	111
6.2	Zustandsgleichung . . . . .	112
6.3	Festigkeitsmodell . . . . .	118
6.3.1	Elastizitätstheorie . . . . .	118
6.3.2	Plastizitätstheorie . . . . .	119
6.3.3	Theorie zur Kontinuumschädigungsmechanik – Modell der Degradation .	124
6.3.4	Bewertung der Theorien und Umsetzung in AUTODYN . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Materialmodelle – Umsetzung der Theorie</b>	<b>133</b>
7.1	Verhalten von schockartig beanspruchten Werkstoffen – Anforderungen und bekannte Modelle . . . . .	133
7.1.1	Allgemeines . . . . .	133
7.1.2	Anforderungen an die Modellbildung . . . . .	134
7.1.3	Bekannte Modelle für hochdynamische Simulationen . . . . .	136
7.2	Stoffgesetz des Stahlfaserbetons . . . . .	140
7.2.1	Überblick . . . . .	140
7.2.2	Zustandsgleichung – poröse HUGONIOT EoS . . . . .	142
7.2.3	Hypoelastisches Materialgesetz . . . . .	146
7.2.4	Versagensfläche im Spannungsraum . . . . .	146
7.2.5	Verzerrungsratenabhängigkeit . . . . .	151
7.2.6	Schädigungsevolution aus Gestaltänderung und aus Kompaktion . . . . .	154
7.2.7	Degradation der Materialeigenschaften durch Schädigung . . . . .	160
7.3	Modellierung des Bewehrungsstahls . . . . .	162
7.3.1	Einführung . . . . .	162
7.3.2	Fließfläche . . . . .	162
7.3.3	Ermittlung der Modellparameter für DIN-Stähle . . . . .	162
7.3.4	Schädigungsfunktion und Bruchmodell . . . . .	167
7.3.5	Zustandsgleichung . . . . .	168
7.4	Diskretes Verbundmodell mit Kontinuumelementen . . . . .	169
7.4.1	Überblick . . . . .	169
7.4.2	Ermittlung der örtlichen Verbundspannungen . . . . .	172
7.4.3	Zustandsgleichung des Verbundelementes . . . . .	177

7.4.4	Verzerrungsratenabhängigkeit . . . . .	177
7.4.5	Umschalten der Materialmodelle bei Rissöffnung oder -schließung . . . . .	179
7.4.6	Prgrammtechnische Umsetzung – Algorithmus . . . . .	180
<b>8</b>	<b>Numerische Verifikation und durchgeführte Untersuchungen</b>	<b>183</b>
8.1	Zum Stahlfaserbeton . . . . .	183
8.1.1	Numerische Verifikation des Stahlfaserbetonmodells . . . . .	183
8.1.2	Verifikation des Stoffgesetzes . . . . .	183
8.1.3	Verifikation am Modell des Flyer–Plate–Impact Tests . . . . .	186
8.1.4	Vergleichsberechnungen von Bauteilen aus Versuchen . . . . .	189
8.1.5	Bewertung der Ergebnisse zum Stahlfaserbetonmodell . . . . .	213
8.2	Zum Stahlbetonverbund . . . . .	214
8.2.1	Numerische Verifikation des Stahlbetonverbundmodells . . . . .	214
8.2.2	Bewertung der Ergebnisse zum Stahlbetonverbundmodell . . . . .	222
<b>9</b>	<b>Zusammenfassende Bewertung</b>	<b>225</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	225
9.2	Bewertung . . . . .	227
9.3	Ausblick . . . . .	227
<b>A</b>	<b>Ermittlung von EoS–Daten für reinen Beton</b>	<b>1</b>
A.1	Einführung . . . . .	1
A.2	Materialbeschreibung . . . . .	2
A.3	Zur Ermittlung von EoS–Daten für Beton . . . . .	2
A.4	Experimentelle Vorgehensweise . . . . .	3
A.4.1	Full–Scale–Test: Anspregung von Betonplatten . . . . .	3
A.4.2	Flyer–Plate–Impact Tests . . . . .	5
A.5	Auswertung und Beurteilung . . . . .	9
A.6	Zustandsgleichungen für poröse Medien . . . . .	12
A.6.1	Betonparameter für eine poröse Druck–Dichte Zustandsgleichung . . . . .	12
A.6.2	Betonparameter für eine $p - \alpha$ Zustandsgleichung . . . . .	13

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Räumliche Druckwellenausbreitung im kompositen Werkstoff Stahlbeton . . . . .	5
1.2	Entstehung einer Schockwelle durch Dispersion . . . . .	6
1.3	Entwicklungsstufen zum Aufbau eines mechanisch–mathematischen Modells zur Abbildung einer realen Struktur . . . . .	8
1.4	Versuchsmethoden zur Bestimmung der Werkstoffeigenschaften für Be- ton/Stahlfaserbeton und für Stahlbeton/Verbund (aus: LEONHARDT 1980 [136]) .	11
1.5	Inverser Planarplatten–Impakt–Test: Sabot (Träger) mit einer Betonprobe (links), schematischer Versuchsaufbau (rechts) (aus: RIEDEL 2000 [177]) . . . . .	12
1.6	Zerlegung des Betons in homogene Komponenten nach RIEDEL 2000 [177] . . . . .	12
1.7	Sprengversuche an Beton-, Stahlbeton und Stahlfaserbetonplatten: Versuchsauf- bau und Ergebnis (aus: LANDMANN 2001 [130]) . . . . .	14
1.8	Ausgewählte Fließflächen, dargestellt in der Meridian- und in der Deviatorebene (aus: RUPPERT 2000 [184]) . . . . .	16
1.9	Schematische Darstellung des einaxialen elasto–plastischen und elasto– schädigenden Materialverhaltens . . . . .	17
2.1	Modellierung des <i>materiellen Körpers</i> $\mathcal{B}$ als Punktkontinuum (aus: STEIN & BAR- THOLD 1995 [199]) . . . . .	24
2.2	Kinematik des materiellen Punktkontinuums . . . . .	25
2.3	Darstellung der CAUCHYschen Spannungskomponenten . . . . .	30
2.4	Darstellung der Spannungen in der Oktaederebene . . . . .	34
2.5	Idealisierte Darstellung der Schockfront mit Zustandsgrößen an der Diskonti- nuitätsfläche . . . . .	38
2.6	Aufbau und Abhängigkeiten von Werkstoffgesetzen . . . . .	40
3.1	Wellenanteile bei einem Impakt auf Festkörper (aus: MEYERS 1994 [151]) . . . . .	42
3.2	HUGONIOT–Kurve und Wellenausbreitung: elastische und plastische Welle, Schockwelle . . . . .	42
3.3	Schräg auf eine Grenzfläche treffende Longitudinalwelle zweier Medien unter- schiedlicher Impedanz . . . . .	44

3.4	Spannungs- und Geschwindigkeitsverlauf: Reflektion einer Festkörperwelle an freier Oberfläche (aus: RINEHART 1975 [178]) . . . . .	46
3.5	Reflektions-Koeffizient $R$ aufgetragen für variierende Einfallswinkel der Initialwelle und unterschiedlicher Querkontraktionszahlen (aus: RINEHART 1975 [178]) .	47
3.6	Aufteilung des Spannungsimpulses an einer Grenzfläche bei unterschiedlichen Impedanzverhältnissen . . . . .	48
3.7	Verschiebung aufgrund reibungsfreier Verbundgrenze (aus: RINEHART 1975 [178])	49
3.8	Wellenbezeichnung für die Verhältnisse der Gleichungen (3.10) bis (3.12) (aus: RINEHART 1975 [178]) . . . . .	50
3.9	Nichtlineares Materialverhalten am Beispiel einer einaxialen Spannungs-Verzerrungs-Beziehung von Metall . . . . .	51
3.10	a) Idealisiertes und b) wahres Profil einer Schockwelle (GRADY 1991 [85]) . . . .	52
3.11	Modellvorstellung einer eindimensionalen, stationären Detonationswelle nach CHAPMAN 1899 [34] und JOUGUET 1906 [114] zur Beschreibung eines Detonationsvorgangs . . . . .	54
3.12	HUGONIOU-Kurve für einen Verdichtungsstoß, Deflagration und Detonation (aus: BARTLMÄ 1975 [15]) . . . . .	56
3.13	ZDN-Modell einer eindimensionalen, stationären Detonationswelle . . . . .	58
3.14	Simulation eines Detonationsvorgangs mit AUTODYN in der stationären EULERSchen-Betrachtungsweise . . . . .	59
3.15	Simulation des Detonationsprozesses mit einer EULER- und mit einer LAGRANGE-Diskretisierung: Vergleich der Impulsverläufe im Festkörper . . . . .	60
4.1	Diskretisiertes Gebiet eines räumlichen Körpers $\mathcal{B}$ . . . . .	63
4.2	Berechnungszyklus von Hydrocode-Simulationsverfahren . . . . .	64
4.3	Auswertung von Variablen an den Elementknoten und im Elementmittelpunkt .	65
4.4	Integrale-Differenzen-Methode: Integrationspfade der Randintegrale bei zweidimensionaler Betrachtung . . . . .	67
4.5	Oszillierender Verlauf der Schockwelle <b>ohne</b> künstliches Eingreifen in die numerische Lösung (aus: RICHTMYER & MORTON 1967 [176]) . . . . .	69
4.6	Geglätterer (realer) Verlauf der Schockwelle <b>mit</b> künstlicher Viskosität in der numerischen Lösung (aus: RICHTMYER & MORTON 1967 [176]) . . . . .	70
4.7	"Hourglass"-Eigenformen in 2D: Elementverzerrung, die <b>keine</b> Spannungen erzeugt	73
4.8	"Hourglass"-Eigenformen in 3D (sanduhrenartig): Elementverzerrung, die <b>keine</b> Spannungen erzeugt . . . . .	73

4.9	Kontaktbereich von zwei LAGRANGE-Diskretisierungen: Eindringen von sich ausbreitenden Sprengstoffknoten aufgrund des Detonationsvorgangs in die Kontaktzone des Festkörpers, Ermittlung der Rückstellkraft (Normal und Tangential) aus Kontaktberechnung . . . . .	74
4.10	Simulation eines Detonationsvorgangs mit AUTODYN in der beweglichen LAGRANGESCHEN Betrachtungsweise . . . . .	75
4.11	Schematische Darstellung von Durchschlagsproblemen: Auftreten von "Bumerang"- oder "Schleifen"-Formen in der Elementdeformation . . . . .	76
4.12	ALE-Netzadaption . . . . .	77
5.1	Definition der kritischen Faserlänge $l_{krit}$ nach MAIDL 1991 [142] . . . . .	83
5.2	Typische Druckspannungs-Stauchungs-Kurven von Stahlfaserbeton im verformungsgeregelten Versuch unter zentrischer Druckbeanspruchung (aus: SCHNÜTGEN 1981 [188]) . . . . .	84
5.3	Wirkung der Stahlfasern im Beton (aus: SCHNÜTGEN 1992 [189]) . . . . .	85
5.4	Stahlfaserbeton im Biegezugversuch (qualitativ) (aus: MAIDL 1991 [142]) . . . . .	86
5.5	Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei Zugbelastung für unterschiedliche Fasergehalte (aus: MAIDL 1991 [142]) . . . . .	87
5.6	Anzahl der Schläge mit einem Fallgewicht bis zum Bruch als Maß für die Schlagfestigkeit für Stahlfaserbeton mit variierenden Stahlfasergehalten (aus: BONZEL & DAHMS 1981 [27]) . . . . .	89
5.7	Biaxiale Druckfestigkeit von Stahlfaserbeton und Beton (aus: YIN et al. 1989 [224]) . . . . .	90
5.8	Relative Biegezugfestigkeit in Abhängigkeit der Verzerrungsgeschwindigkeit bei unterschiedlichem a) Fasergehalt und b) l/d-Verhältnis (aus: GOPALARATNAM 1985 [84]) . . . . .	90
5.9	Relative Festigkeit bei verschiedenen Verzerrungsgeschwindigkeiten und unterschiedlicher Belastungsart (aus: SUARIS & SHAH 1982 [204] und LOK et al. 2002 [139]) . . . . .	91
5.10	Steigerung der a) Zugfestigkeit und der b) Druckfestigkeit bei unterschiedlichen Verzerrungsgeschwindigkeiten (aus: LOHRMANN 1998 [137]) . . . . .	91
5.11	Anfangs-Elastizitätsmodul $E_{t,i}$ bei unterschiedlichen Verzerrungsgeschwindigkeiten (aus: BONZEL & DAHMS 1981 [27]) . . . . .	93
5.12	Spannungs-Dehnungs-Linien von Stählen (aus: EIBL 1995 [56]) . . . . .	96
5.13	Auftreten des <i>Bauschinger-Effekts</i> bei zyklischer Belastung (aus: PETERSEN 1997 [166]) . . . . .	97
5.14	Einfluss der Stahlgüte auf die verzerrungsratenabhängige Erhöhung der Streckgrenze (aus: MÜLLER et al. 1983 [154]) . . . . .	98

5.15	Spannungs–Dehnungs–Linien für Zugversuche bei unterschiedlichen Verzerrungsraten (aus: BRANDES & LIMBERGER 1985 [28]) . . . . .	99
5.16	Einfluss der Verzerrungsraten auf die Bewehrungsstähle BSt 500 RU und BSt 500 RK (aus: BRANDES & LIMBERGER 1985 [28]) . . . . .	100
5.17	Kraft–Verschiebungs–Diagramm für Stahlbeton (aus: CHEN 1982 [35] und PÖLLING 2000 [168]) . . . . .	101
5.18	Oberflächengestaltung des BSt 420 S und BSt 500 S (aus: LEONHARDT 1980 [136])	102
5.19	Vergleich der Hauptspannungsverläufe und Bruchflächen für Bewehrungsstäbe mit großem (l.) und kleinem (r.) Rippenabstand (aus: LEONHARDT 1980 [136]) .	103
5.20	Überhöhte Darstellung kleiner (sekundärer) Verbundrisse zwischen den Haupttrissen bei zentrisch gezogener Bewehrung (aus: HOFSTETTER & MANG 1995 [103])	103
5.21	Verbundspannungs–Verschiebungs–Beziehungen (aus: RUSSWURM 1993 [185]) . .	104
5.22	Verbundmechanismus (aus: ELIGEHAUSEN et. al 1983 [57]) . . . . .	105
5.23	Verlauf der Stahl- und Betonspannungen sowie der Verbundspannungen im gerissenen Stahlbetonkörper (aus: LEONHARDT 1980 [136]) . . . . .	106
5.24	Spannungs–Verzerrungs–Beziehungen für Beton (a) und Stahl (b) unter statischer und dynamischer Belastung (aus: HJORTH 1976 [102]) . . . . .	107
5.25	Zunahme der bezogenen Verbundfestigkeit in Abhängigkeit von der Spannungsrate (aus: HJORTH 1976 [102]) . . . . .	108
6.1	Zustandsfläche eines Festkörpers im Druck–Volumenänderung–Energie Raum . .	113
6.2	Kompressions- und Entlastungsverhalten von kompaktierfähigen, porösen Werkstoffen . . . . .	116
6.3	Elasto–Plastizität: a) Plastisches Materialverhalten mit Ent- und Wiederbelastung, b) Spannungsbasierte Plastizitätstheorie mit additiver Aufspaltung der Verzerrungen . . . . .	119
6.4	Assoziierte und nichtassoziierte Fließregel . . . . .	121
6.5	Ansätze zur spannungsbasierten und verzerrungsbasierten Kontinuumsschädigungstheorie: Änderung der Steifigkeit bzw. der Nachgiebigkeit . . . . .	124
6.6	Fließflächenbeschreibung von homogenen, isochoren Materialien nach VON MISES	130
6.7	a) Querschnitt des VON MISES Zylinders im Hauptspannungsraum, b) Vorgehensweise der inkrementellen Spannungsänderung von $n$ nach $n + 1$ durch Rückskalierung der deviatorischen Spannungskomponenten auf die Fließfläche (aus: WILKINS 1999 [222]) . . . . .	131
7.1	Als Kontinuum modellierter Bewehrungsknoten mit sich durchdringenden und übereinander liegenden Stäben . . . . .	138

7.2	Schematische Verbundbeschreibung bei Balkenelementen . . . . .	138
7.3	Aus einem Planarplattenaufschlag resultierende Wellenfortpflanzung beim Balkenmodell (oben) und beim Kontinuumsmodell (unten) . . . . .	139
7.4	Als Kontinuum modellierter Bewehrungsknoten mit sich durchdringenden Stäben und Verbundelementen . . . . .	140
7.5	Räumliche Darstellung der Versagensfläche im Hauptspannungsraum und deren Projektion in den Meridianschnitt . . . . .	141
7.6	Ausgleichsfunktion zur Ermittlung der elastischen Wellengeschwindigkeit $c_{por}$ . .	143
7.7	Beton–Zustandsgleichung und daraus entwickelte Verschiebung einer porösen Zustandsgleichung für eine Stahlfaserbetonmischung . . . . .	145
7.8	Modifizierte Bruchfläche nach GUO et al. [90] . . . . .	147
7.9	Stahlfaserbeton, Funktion zur Bestimmung des Verhältniswertes $f_{cc}/f_c$ . . . . .	149
7.10	Bruchflächenaufweitung aufgrund variierender Stahlfasergehalte, illustriert an den Druckmeridianen in der normierten $\sigma_{oct} - \tau_{oct}$ Ebene . . . . .	151
7.11	Überproportionale Festigkeitssteigerung bei Verzerrungsraten $\dot{\epsilon} > 10^{1\frac{1}{s}}$ , die bei Detonationslasten auftreten können, durch Extrapolation der Funktionen aus den Versuchen von SUARIS und LOK [204, 139] . . . . .	152
7.12	Implementierte Funktion zur Beschreibung der Druck- und Zugfestigkeitsteigerung in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate . . . . .	154
7.13	Aufbau des Schädigungsmodells für poröse Werkstoffe nach RUPPERT 2000 [184]	155
7.14	Modifizierte Bruchverzerrungsgrenze für beliebigen Stahlfasergehalt . . . . .	156
7.15	Entfestigungsbeschreibung nach HOLMQUIST, JOHNSON & COOK 1993 [105] basierend auf zyklischen einaxialen Drucktests nach SINHA1964 [194] . . . . .	157
7.16	Ableitung der minimalen plastischen Verzerrung bis zum Bruch (aus: OTTER & NAAMAN 1988 [164]) . . . . .	157
7.17	Ausgleichsfunktion zur Ermittlung der minimalen Bruchverzerrungsgrenze $\epsilon_{min}^f$ .	158
7.18	Entwicklungsgesetz für den Schädigungsparameter $D_2$ nach RUPPERT 2000 [184]	159
7.19	Zyklische Belastung (einaxial) und Bewegung der Bruchfläche (triaxial) . . . . .	160
7.20	Spannungs–Verzerrungs–Beziehungen für BSt 420/500 RK, Verschiebung des Koordinatenursprungs um die elastische Verzerrung $\epsilon_{el}$ . . . . .	163
7.21	Kurvenverlauf der JC–Funktion mit den per NEWTON’scher Näherungsmethode ermittelten Parametern $A, B, n, C$ für BSt 420/500 RK . . . . .	165
7.22	Durch Parametervariation ermittelte Funktionen im Bereich der steigenden Gradienten . . . . .	165
7.23	Durch Parametervariation ermittelte Funktionen, endgültige Parameter für das JC–Modell für BSt 420/500 RK . . . . .	166

7.24	Gemessene Zustände von Schockwellengeschwindigkeits- ( $U_s$ ) und Partikelgeschwindigkeits- ( $U_p$ ) Daten für Aluminium 2024 und Stahl 304 (aus: MARSH 1980 [146]) . . . . .	168
7.25	Gegenüberstellung von Verbundmechanismus mit den verwendeten Materialmodellen für den Beton (RGGP-Modell), für den Verbund (GRECON-Verbundmodell <b>oder</b> Luftmodell) und für den Betonstahl (BSt 500 S Modell) bei sich lösendem Verbund . . . . .	171
7.26	Lokale Koordinaten ( $x', y', z'$ ) und Ansatz einer gegenseitigen Verschiebung der Beton- zu den Stahlknoten im räumlichen Kontinuumselement . . . . .	173
7.27	Schlupf in Stablängsrichtung zwischen Beton- und Stahlknoten: a) Ausgangszustand, b) Verschiebungszustand . . . . .	174
7.28	Verschiebung zum rotatorischen Schlupf und zur Rissöffnung zwischen Beton- und Stahlknoten: a) Ausgangszustand, b) Verschiebungszustand . . . . .	174
7.29	Verbundschubspannungsbeziehung nach IDDA [109]: Funktionaler Zusammenhang	176
7.30	Verbundnormalspannungsbeziehung nach IDDA [109]: Funktionaler Zusammenhang	176
7.31	Steigerung der Verbundfestigkeit in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate . . . .	178
7.32	Algorithmus der Routine für das Verbundelement GRECON . . . . .	180
8.1	Diskretisierung des einachsigen Zylinderdruckfestigkeitsversuchs in AUTODYN . .	184
8.2	Zylinderprobe, Vergleich von Druckspannung und Schädigung über die Zeitachse	185
8.3	Zylinderdruckversuch, a) Druckspannungs-Stauchungs-Beziehungen aus AUTODYN, b) Maximale Druckspannung mit zugehöriger Stauchung eingetragen in statische Versuchsergebnisse . . . . .	186
8.4	Diskretisierung des inversen Flyer-Plate-Impact Tests in AUTODYN . . . . .	187
8.5	Vergleich von den Druck-Dichte Verläufen mit linearen Entlastungspfaden mit der versuchstechnisch bestimmten potentiellen Ausgleichsfunktion der Zustandsgleichung . . . . .	189
8.6	Schädigungsbild aus der numerischen Berechnung einer Kontaktdetonation auf eine Stahlfaserbetonplatte mit AUTODYN . . . . .	190
8.7	Diskretisierung des zylinderförmigen Sprengstoffs und des bewehrten Stahlfaserbetons mit AUTODYN3D . . . . .	191
8.8	Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S2/P7, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0 . . . . .	192
8.9	Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S2/P8, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0 . . . . .	193
8.10	Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S2/P9, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0 . . . . .	193

8.11 Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S3/P1, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0 . . . . .	193
8.12 Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S3/P2, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0 . . . . .	193
8.13 Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S3/P3, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0 . . . . .	194
8.14 Überlagerung eines numerisch erzeugten Schädigungsbildes mit dem Schnitt einer angesprengten Betonplatte . . . . .	194
8.15 Schädigung im Kraterbereich; Schädigungsintensität 0.4 bis 1.0 . . . . .	196
8.16 Schädigung im Abplatzungsbereich; Schädigungsintensität 0.4 bis 1.0 . . . . .	199
8.17 Schnittbild einer angesprengten Stahlfaserbetonplatte . . . . .	201
8.18 Schnittbild einer Stahlbetonplatte mit der Bauteildicke $h_{rc} = 30\text{cm}$ . . . . .	202
8.19 Abplatzungstiefe-Normierungsfaktor NAT in Abhängigkeit vom Stababstand $s$ . . . . .	203
8.20 Festlegung der Ableseparameter für den Bereich des Abplatzungsdurchmessers $D_a$ . . . . .	204
8.21 Platte S2/P9: Schädigung im Durchbruchbereich; Schädigungsintensität 0.4 bis 1.0 . . . . .	206
8.22 Gegenüberstellung der Durchbruchbereiche bei einer Beton- und einer Stahlbetonplatte mit einer Bauteildicke von $h_{rc}=20\text{cm}$ ; Schädigungsintensität 0.4 bis 1.0 . . . . .	206
8.23 Verlauf der Schädigungstiefen $T_k$ und $T_a$ bei Variation des Stahlfasergehaltes $V_f$ . . . . .	208
8.24 Anordnung und Nummerierung der in die Betonplatte S2P8 eingelegten Targets . . . . .	209
8.25 Verlauf der Abplatzungsgeschwindigkeit der Targets 1 bis 7 . . . . .	209
8.26 Verlauf der Abplatzungsgeschwindigkeit der Targets 8 bis 14 . . . . .	210
8.27 Parameter zur Ermittlung der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ mittels der Wurfparabel . . . . .	211
8.28 Versuchsaufbau zur Ermittlung der statischen Grenzlast an einer Stahlbetonplatte (aus: BEHRING 2004 [19]) . . . . .	213
8.29 Versuchsaufbau und Prüfkörper in der Ansicht, im Längs- und im Querschnitt (aus: IDDA 1999 [109]) . . . . .	215
8.30 Diskretisierung des statischen Ausziehversuchs in AUTODYN . . . . .	216
8.31 Vergleich Ausziehungskraft–Schlupf–Beziehung aus der numerischen Simulation mit den Versuchsergebnissen der von IDDA durchgeführten Versuchsreihe BA11 unter Berücksichtigung der Konvergenzstudie zur Verbundelementdicke . . . . .	217
8.32 Qualitative Darstellung a) des Druckkegels infolge Verbundwirkung, b) der Ringzugspannungen in Stabnähe infolge der Verbundwirkung . . . . .	217
8.33 Versuchsaufbau zum dynamischen Ausziehversuch (aus: HJORTH 1976 [102]) . . . . .	218
8.34 Diskretisierung des dynamischen Ausziehversuchs in AUTODYN . . . . .	219
8.35 Verbundschubspannung–Schlupf–Beziehungen bei variierenden Belastungsgeschwindigkeiten . . . . .	220

8.36	Vergleich der dynamischen Verbundfestigkeitssteigerungen aus den Versuchsergebnissen von HJORTH und aus den AUTODYN-Simulationen . . . . .	221
8.37	Fortschreitende Rissöffnung und "Umschalten" der Materialmodelle von Verbund auf Luft bei $\frac{w}{h_s} = 2.60$ . . . . .	222
8.38	Bezug zwischen der Materialdichte zur Rissöffnung im Verbundmodell . . . . .	223
A.1	Full-scale test: Versuchsaufbau (links), Rückseite der Betonplatte mit eingebauten KMW-Aufnehmern (mitte) und deren Lage und Tiefe (rechts) (aus: LANDMANN 2000 [129]) . . . . .	4
A.2	Full-Scale-Tests: Messprotokoll der zeitlichen Spannungsmessung für zwei Sensoren mit gleichem Abstand zur Sprengladung (aus: LANDMANN 2000 [129]) . . . . .	5
A.3	Inverser Planarplatten-Impakt-Test: a) Geschwindigkeitsamplituden, Ankunftszeiten der elastischen und plastischen Wellen, b) Messprotokoll des VISAR's der zwölf Geschwindigkeitsverläufe (aus: NAHME 2000 [159]) . . . . .	7
A.4	Inverser Planarplatten-Impakt-Test: Schockwellengeschwindigkeits-Partikelgeschwindigkeits-Beziehung (aus: NAHME 2000 [159]) . . . . .	9
A.5	Druck-Dichte Wertepaare für Beton, Teil 1 . . . . .	10
A.6	Druck-Dichte Wertepaare für Beton, Teil 2 . . . . .	12
A.7	Poröse HUGONIOT-Zustandsgleichung in der Druck-Dichte-Ebene . . . . .	13

# Tabellenverzeichnis

1.1	Einordnung des Materialverhaltens von Festkörpern nach der Belastungsdauer . . .	2
2.1	Invarianten der Hauptspannungen . . . . .	33
2.2	Invarianten der Hauptverzerrungen . . . . .	33
3.1	Zusammenhang zwischen Wellentyp, Ausbreitungsgeschwindigkeit und elastischen Moduli . . . . .	44
3.2	$\sigma_T/\sigma_I$ - und $\sigma_R/\sigma_I$ -Verhältnisse für variierende Impedanzverhältnisse . . . . .	47
3.3	Grenzflächenphänomene bei der Wellenfortpflanzung und Konsequenzen auf die Modellierung . . . . .	50
5.1	Verwendete Fasermaterialien für Faserbeton (aus: GEBBEKEN & GREULICH 2003 [77]) . . . . .	81
5.2	Stahlfaserbeton, Einfluss der Stahlfasern auf die Festigkeit im Vergleich zur faserlosen Referenzmischung . . . . .	94
5.3	Gegenüberstellung der statischen und dynamischen Eigenschaften von Stahlfaserbeton . . . . .	94
5.4	Auszug der Sorteneinteilung der Bewehrungsstähle (nach DIN 488 Teil 1 und DIN 1045) . . . . .	96
5.5	Maximale Steigerung der Materialeigenschaften von Bewehrungsstählen durch erhöhte Verzerrungsgeschwindigkeiten (aus: STEMPNIEWSKI & EIBL 1993 [203]) .	100
5.6	Geometrische Abmessungen für Betonstähle mit verschiedenen Stabstahldurchmessern nach DIN 488 (Auszug) . . . . .	102
7.1	Parameter der Zustandsgleichung für Stahlfaserbeton mit $V_f = 1.0 \text{ Vol} - \%$ . . .	146
7.2	Elastische Werkstoffkonstanten für Stahlfaserbeton mit $V_f = 1.0 \text{ Vol} - \%$ . . . .	146
7.3	Ausgangswerte zur Ermittlung der Bruchflächenparameter für (Stahlfaser-)Beton mit Stahlfasergehalten von 0.0, 1.0 und 2.0 Vol-% . . . . .	151
7.4	Modellparameter der GUO-Bruchfläche für variierende Stahlfasergehalte . . . . .	152
7.5	Konstanten der hyperbolischen Funktion zur Festigkeitssteigerung in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate . . . . .	153

7.6	Modellparameter zur Schädigungsevolution für Stahlfaserbeton mit $V_f = 1.0 \text{ Vol} - \%$ . . . . .	159
7.7	Modellparameter zur Materialdegradation für Stahlfaserbeton mit beliebigem Stahlfasergehalt bei $D = 1$ . . . . .	162
7.8	Bestandteile des JOHNSON & COOK Materialmodells . . . . .	163
7.9	Materialkonstanten für das JOHNSON & COOK–Festigkeitsmodell . . . . .	167
7.10	Ausgewählte Materialkonstanten für das Schädigungs–Bruch–Modell nach JOHN- SON & COOK 1985 [113] angewandt auf Betonstähle nach DIN 488 . . . . .	167
7.11	Materialparameter der Zustandsgleichung für Betonstähle nach DIN 488 . . . . .	169
7.12	Konstanten der hyperbolischen Funktion zur Verbundfestigkeitssteigerung in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}$ . . . . .	179
8.1	Gegenüberstellung von der maximalen Druckspannung mit den zugehörigen Stau- chungen aus der numerischen Simulation und den Versuchsdaten für verschiedene Stahlfasergehalte . . . . .	186
8.2	Gegenüberstellung von den hydrostatischen Drücken und den zugehörigen Be- tondichten aus der numerischen Simulation (Nr. 2) mit den Versuchsdaten für verschiedene Auftreffgeschwindigkeiten . . . . .	188
8.3	Charakteristische Parameter der Beton- (S2/S7), der Stahlbeton- (S5) und der Stahlfaserbeton-Serien (FS2) . . . . .	195
8.4	Schädigungsabmessungen der Beton-, der Stahlbeton und der Stahlfaserbeton- platten aus den WTD Versuchen . . . . .	196
8.5	Vergleich AUTODYN3D mit Versuchsergebnissen der WTD für die Tiefe $T_k$ und den Durchmesser $D_k$ im Kraterbereich . . . . .	197
8.6	Vergleich AUTODYN3D mit Versuchsergebnissen der WTD für die Tiefe $T_a$ und den Durchmesser $D_a$ im Abplatzungsbereich . . . . .	200
8.7	Winkel $W_{a,i}$ für die Anpassung an den realen Abplatzungsdurchmesser $D_a$ . . . . .	205
8.8	Abplatzungsgeschwindigkeiten $v_0$ der Elemente mit Targets im Abplatzungsbereich	210
8.9	Gegenüberstellung der dynamische Verbundfestigkeitssteigerung aus der numeri- schen Simulation mit den Versuchsdaten von HJORTH 1976 [102] . . . . .	220
A.1	Full–Scale–Tests: Ergebnisse der drei angesprengten Betonplatten (Spalten 1 bis 5 sind aus LANDMANN 2000 [129] entnommen) . . . . .	6
A.2	Inverser Planarplatten–Impakt–Test: Ergebnisse der zwölf belasteten Betonpro- ben (aus: NAHME 2000 [159]) . . . . .	8
A.3	Materialdaten zur Bestimmung der Referenzdichte $\rho_{ref}$ unter Anwendung der massenbasierten HUGONIOT–Mischregel . . . . .	11

---

A.4	Betonparameter der porösen Druck-Dichte Zustandsgleichung . . . . .	14
A.5	Betonparameter der $p - \alpha$ Zustandsgleichung . . . . .	15



## Symbolverzeichnis

### Sonderzeichen

$\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^{-T}$	Transponierter, inverser und inverser transponierter Tensor
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	Doppelte Überschiebung zweier Tensoren
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Dyadisches Produkt zweier Tensoren
$\nabla$	Nabla-Operator
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}$	Partielle Ableitung nach den Weggrößen
$\frac{\partial}{\partial t}$	Partielle Ableitung nach der Zeit

### Arabische Buchstaben

$a, b, c_t, c_t, d$	Parameter der GUO-Bruchfläche
$a_1, a_2$	Parameter zur Berechnung der künstlichen Viskosität
$A, B, R_1, R_2$	Parameter der JWL-EoS
$\mathbf{A}$	Beliebiger Tensor
$\mathbf{A}^K$	Kugeltensor (sphärischer Anteil)
$\mathbf{A}^D$	Deviatortensor (deviatorischer Anteil)
$\mathbf{b}$	Massenbezogene Beschleunigung (Vektor der Flächenkräfte)
$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_t, \mathcal{B}_{t+\Delta t}$	Materieller Körper in der Referenz-, Momentan- und Nachbarkonfiguration
$\partial \mathcal{B}$	Rand des materiellen Körpers
$c, c_i$	Elastische Wellengeschwindigkeit (für $i=1,2$ )
$c_{el}, c_{pl}$	Elastische und plastische Wellengeschwindigkeit
$c_L$	Geschwindigkeit einer Longitudinalwelle
$c_T$	Geschwindigkeit einer Transversalwelle
$c_R$	Geschwindigkeit einer Rayleighwelle
$c_B$	Kompressionswellengeschwindigkeit
$c_{por}$	Poröse Schallgeschwindigkeit
$c_{gran}$	Wellengeschwindigkeit des vollständig kompaktierten Materials
$C_V$	Spezifische Wärmekapazität
$c_s$	Rippenabstand des Betonstahls
$\mathbf{C}$	Steifigkeitstensor
$\mathbf{C}^0$	Steifigkeitstensor im Ausgangszustand
$\mathbf{C}^{ed}$	Steifigkeitstensor im Schädigungszustand
$d\mathbf{S}, ds$	Wegelement der Anfangslänge und der momentanen Länge
$d_s$	Durchmesser des Betonstahls
$div$	Materielle Divergenzbildung

$D$	Schädigungsvariable
$D_1$	Schädigungsvariable für Gestaltänderung
$D_2$	Schädigungsvariable für Kompaktion
$\mathbf{D}$	Symmetrischer Deformationsratentensor
$\frac{D}{Dt}$	Materielle Zeitableitung
$e$	Spezifische innere Energie
$\bar{e}, \bar{e}^+$	Innere Energie vor und hinter der Diskontinuitätsfläche
$\mathbf{e}_i$	Kartesische Basisvektoren (für $i=1,2,3$ )
$E, E^{pl}$	Elastizitätsmodul, tangentialer plastischer Modul
$E_i$	Hauptverzerrungen des Verzerrungstensors (für $i=1,2,3$ )
$E_i^D$	Hauptverzerrungen des Verzerrungsdeviators (für $i=1,2,3$ )
$E_{ij}$	Komponenten des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors
$\mathbf{E}$	GREEN-LAGRANGEScher Verzerrungstensor
$\mathbf{E}^K$	Sphärischer Anteil des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors
$\mathbf{E}^D$	Deviatorischer Anteil des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors
$\mathbf{E}_{el}$	Elastischer Anteil des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors
$\mathbf{E}_{pl}$	Plastischer Anteil des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors
$\dot{\mathbf{E}}$	Verzerrungsrate des Verzerrungstensors
$f_c$	Einachsige Druckfestigkeit des Betons
$f_{c,0}$	Einachsige Druckfestigkeit einer stahlfaserlosen Referenzmischung
$f_{cc}$	Zweiachsige Druckfestigkeit des Betons
$f_{ccc}$	Dreiachsige Druckfestigkeit des Betons
$f_t$	Einachsige Zugfestigkeit des Betons
$f_{t,0}$	Einachsige Zugfestigkeit einer stahlfaserlosen Referenzmischung
$f_{ttt}$	Dreiachsige Zugfestigkeit des Betons
$f_R$	Bezogene Rippenfläche des Betonstahls
$F_x, F_y, F_z$	Kräfte in x-, y- und z-Richtung
$\mathbf{F} := \text{grad } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$	Materieller Deformationsgradient
$grad$	Materielle Gradientenbildung
$h_s$	Rippenhöhe des Betonstahls
$G, G^{pl}$	Schubmodul, plastischer Schubmodul
$G_{ft,u}$	Bruchenergie
$\mathbf{H} := \text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$	Materieller Verschiebungsgradient

$i$	Massenspezifische Energiedichtefunktion
$\mathbf{I}$	Einheitstensor zweiter Stufe (Einheitsmatrix)
$\mathcal{I}, \bar{\mathcal{I}}$	Einheitstensoren vierter Stufe
$I_A, II_A, III_A$	Hauptinvarianten eines Tensors $\mathbf{A}$
$I_i$	Invarianten des Spannungstensors $\mathbf{T}$ (für $i=1,2,3$ )
$I'_i$	Invarianten des Verzerrungstensors $\mathbf{E}$ (für $i=1,2,3$ )
$I_m := c \cdot \rho$	Impedanz eines Materials
$J_i$	Invarianten des Spannungsdeviators $\mathbf{T}^D$ (für $i=1,2,3$ )
$J'_i$	Invarianten des Verzerrungsdeviators $\mathbf{E}^D$ (für $i=1,2,3$ )
$k$	Materialspezifische einachsige Fließspannung $Y^0 = k$
$K$	Kompressionsmodul
$l_{krit}$	Kritische Faserlänge
$l_v$	Verbundlänge
$L$	Longitudinalwellenmodul
$\mathbf{L} := \text{grad } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}$	Materieller Geschwindigkeitsgradient
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$M := \frac{U_s}{c}$	Machzahl
$\mathcal{O}$	Punkt im EUKLIDischen Vektorraum
$p$	Hydrostatischer Druck
$p_0$	Ausgangsdruck
$\bar{p}, \overset{+}{p}$	Hydrostatischer Druck vor und hinter der Diskontinuitätsfläche
$p_{HEL}$	HUGONIOT Elastic Limit des hydrostatischen Drucks
$p_{CJ}$	CHAPMAN–JOUQUET–Druck
$\mathcal{P}$	Materieller Punkt eines Körpers
$q$	Künstliche Viskosität
$q_R$	Reaktionswärme
$q_p$	Spezifische Wärme
$\mathbf{q}$	Wärmefluss
$Q$	Wärmetransport
$r$	innere Wärmequelle
$R$	Reaktionsrate des Sprengstoffs
$s$	Massenspezifische Entropiedichte
$s_{pl}$	Plastische Bogenlänge
$S$	Entropie

$t, \Delta t$	Zeit, Zeitschritt
$tr$	Spur eines Tensors
$\mathbf{t}$	Schnittspannungsvektor
$T_i$	Hauptspannungen des Spannungstensors, $T_i = \sigma_i$ (für $i=1,2,3$ )
$T_i^D$	Hauptspannungen des Spannungsdeviators (für $i=1,2,3$ )
$T_{ij}$	Komponenten des CAUCHY Spannungstensors
$\mathbf{T}$	CAUCHY Spannungstensor
$\mathbf{T}^K$	Sphärischer Anteil des CAUCHY Spannungstensors
$\mathbf{T}^D$	Deviatorischer Anteil des CAUCHY Spannungstensors
$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}$	Zeitliche Ableitung des CAUCHY Spannungstensor
$\hat{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T}$	JAUMANNsche Spannungsrate
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\mathbf{u}_t$	Verschiebungsvektor von der Momentan- in die Nachbarkonfiguration
$U$	Innere Energie
$U_s$	Schockwellengeschwindigkeit
$U_p$	Partikelgeschwindigkeit
$U_{p,I}, U_{p,R}, U_{p,T}$	Partikelgeschwindigkeiten der einfallenden, reflektierten und transmittierten Welle
$\bar{U}_p^-, \bar{U}_p^+$	Partikelgeschwindigkeit vor und hinter der Diskontinuitätsfläche
$v$	Geschwindigkeit
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$V$	Volumen
$V_0$	Ausgangsvolumen
$V_f$	Stahlfasergehalt in Volumenprozent
$V_{krit}$	Kritischer Fasergehalt
$w$	Rißöffnung zwischen Beton und Stabstahl
$W_{ges}$	Gesamte Energie
$W_{kin}$	Kinetische Energie
$W_{pot}$	Potentielle Energie
$W_p$	Plastische Arbeit
$\mathbf{W}$	Schiefsymmetrischer Rotationsratentensor
$x', y', z'$	Lokale Ortskoordinaten im Verbundelement am Bewehrungsstab
$X^i, x_t^i, x_{t+\Delta t}^i$	Ortskoordinaten der Referenz-, Momentan- und Nachbarkonfiguration
$\mathbf{X}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+\Delta t}$	Ortsvektor der Referenz-, Momentan- und Nachbarkonfiguration
$Y, Y^0$	Materialspezifische einachsige Fließspannung $k = Y^0$
$\mathbf{Z}$	Beliebige Funktion

## Griechische Buchstaben

$\alpha_V$	Thermischer Volumenausdehnungskoeffizient
$\gamma$	Schubverzerrung
$\Gamma$	GRÜNEISEN-Koeffizient
$\delta$	Relativverschiebung zwischen Beton und Stabstahl (Schlupf)
$\delta_{lang}$	Relativverschiebung in Stablängsrichtung im Verbundmodell
$\delta_{rot}$	Rotatorische Relativverschiebung um Stablängsachse im Verbundmodell
$\varepsilon$	Einaxiale Gesamtverzerrung
$\varepsilon_i$	Einaxiale Verzerrung (für $i=1,2,3$ )
$\varepsilon_V$	Volumenverzerrung
$\dot{\varepsilon}$	Verzerrungsrate der einaxialen Verzerrung $\dot{\varepsilon} = \dot{E}$
$\varepsilon_{el}, \varepsilon_{pl}$	Einaxiale elastische und plastische Verzerrung
$\varepsilon_{pl}^f$	Einaxiale Bruchverzerrung des Betons
$\varepsilon_{HEL}$	HUGONIOT Elastic Limit der einaxialen Verzerrung
$\eta$	Gaskonstante
$\lambda$	Proportionalitätsfaktor
$\mu = \frac{\Delta V}{V}$	Kompression eines Werkstoffs
$\mu_{gran}$	Kompaktionsvermögen eines Werkstoffs
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\Pi$	Innere Spannungsleistung
$\rho$	Materialdichte
$\rho_0$	Anfangsdichte
$\rho_{ref}$	Referenzdichte, Dichte des vollständig kompaktierten Materials nach Entlastung
$\bar{\rho}, \rho^+$	Materialdichte vor und hinter der Diskontinuitätsfläche
$\sigma$	Einaxiale Spannung
$\sigma_i$	Hauptspannungen, $\sigma_i = T_i$ (für $i=1,2,3$ )
$\sigma_I, \sigma_R, \sigma_T$	Spannungen der einfallenden, reflektierten und transmittierten Welle
$\sigma_{HEL}$	HUGONIOT Elastic Limit der einaxialen Spannung
$\sigma_{oct}$	Oktaedernormalspannung
$\sigma_0$	Normierte Oktaedernormalspannung
$\sigma_{eq}$	Äquivalente VON MISES Spannung
$\tau$	Schubspannung
$\tau_{oct}$	Oktaederschubspannung
$\tau_0$	Normierte Oktaederschubspannung

$\theta$	Lodge-Winkel
$\Theta$	Absolute Temperatur
$\varphi_i$	Einfalls-/Ausfallswinkel beim Auftreffen einer elastischen Welle auf die Grenzfläche unterschiedlicher Materialien
$\chi$	Eigenvektoren eines Tensors $\mathbf{A}$
$\psi$	Beliebige Eigenwerte eines Tensors $\mathbf{A}$ (für $i=1,2,3$ )
$\psi_i$	Eigenwerte eines Tensors $\mathbf{A}$ (für $i=1,2,3$ )
$\omega$	Sprengstoffparameter für die charakteristischen Anteile der Reaktionsprodukte

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Werkstoffe werden bereits seit dem Altertum als Baustoffe eingesetzt. Sogar die Verbesserung der mechanischen Eigenschaften, beispielsweise das Hinzufügen verschiedener Faserformen und Fasermaterialien bei Lehm, war bekannt und wurde genutzt, um eine höhere Zug- und Schlagfestigkeit oder größere Dauerhaftigkeit zu erzielen. Über die Jahrhunderte konnten die aus den Fortschritten in Wissenschaft und Technik gewonnenen Erkenntnisse die Eigenschaften stets verbessern. Weitere Anwendungsmöglichkeiten durch den Einsatz verschiedenartiger Materialien wurden erschlossen. Künstlich hergestellte Werkstoffe lösen weitestgehend die aus der Natur bezogenen Materialien ab.

Der Beton ist heutzutage mengenmäßig der am meisten verwendete, künstlich hergestellte Werkstoff aus Naturprodukten. Allerdings wird der Beton in den seltensten Fällen **ohne** Bewehrung ausgeführt. Das Einbetonieren von Stahlstäben nach einer "Erfindung" im Jahre 1848 durch J. MONIER (armierter Beton nach dem französischen "béton armé") ändert die Tragfähigkeit dieses Verbundbaustoffs hinsichtlich seines Tragverhaltens auf Biegung und Zug. Ende des 19. Jahrhunderts begann man in Kalifornien, und wenig später auch in Frankreich, Beton mit kleinen Stahlstückchen und Stahlfasern zu verstärken. Faserbetone, wie sie heute üblicherweise eingesetzt werden, gehen auf ein Patent von A. BERAND aus dem Jahre 1874 zurück. Eine spürbare Intensivierung der praktischen Stahlfaserbeton-Anwendungen setzte jedoch in den USA erst Ende der 60er, in Deutschland Ende der 70er Jahre ein. Intensive Entwicklungsarbeiten führten seither zu erheblichen Verbesserungen der Fasertechnologie, sowohl bei den Fasermaterialien, als auch bei deren Anwendungen.

Bauten und Bauteile bestehen in den häufigsten Fällen aus Stahlbeton – zunehmend auch stahlfaserverstärkt. Sie können durch verschiedenste Ursachen hochdynamischen Beanspruchungen ausgesetzt sein. Derartige Belastungen haben eine Einwirkungsdauer in der Größenordnung von Milli- und Mikrosekunden und werden daher der Kurzzeitdynamik zugeordnet.

Ein Maß, mit der die Belastungsgeschwindigkeiten und die mechanischen Verformungen im Bauteil angegeben werden, ist die Verzerrungsrate, eine dimensionslose Längenänderung über die Zeit. Mit dieser Kenngröße lassen sich dynamische Beanspruchungen zuordnen und in Relation zueinander setzen. Zur allgemeinen Übersicht ordnet Tabelle 1.1 dynamische Belastungen sortiert nach ihrer Dauer ein und klassifiziert das Materialverhalten von Festkörpern. Die dort enthaltenen Daten entstammen aus verschiedenen Publikationen, u.a. BISCHOFF & PERRY 1991 [24], ZUKAS et al. 1982 [230].

**Tabelle 1.1:** Einordnung des Materialverhaltens von Festkörpern nach der Belastungsdauer

Beanspruchung	Belastungs- dauer [s]	Belastungs- geschwindigkeit [m/s]	Verzerrungs- rate [1/s]	Materialverhalten von Festkörpern
<b>Statische Last</b> z.B. Verkehrslast	$> 10^1$	–	$< 10^{-6}$	weitestgehend elastisch
<b>Windlast</b>	$> 10^1$	$< 60$	$< 10^{-4}$	elastisch–viskoelastisch
<b>Erdbeben</b>	$10^1$	–	$10^{-3} - 10^0$	elastisch–plastisch
<b>Flugzeugabsturz</b>	$10^{-1}$	$< 90$	$< 10^2$	elastisch–plastisch, schädigend
<b>Bombenpenetration</b>	$> 10^{-3}$	$< 500$	$< 10^4$	elastisch–plastisch, schädigend
<b>Kontakt detonation</b>	$> 10^{-4}$	$< 9000$	$< 10^7$	fluidähnlich, hydrodynamisch
<b>Kometeneinschlag</b>	$> 10^{-5}$	$> 10000$	$< 10^8$	Phasenübergänge

Speziell in der Kurzzeitdynamik sind im wesentlichen folgende Einwirkungsarten und Anwendungsgebiete zu nennen (GEBBEKEN 1999 [79]):

- Impakt und Penetration:
  - Flugzeugabsturz → Schutz von Kraftwerken und Hochsicherheitsbereichen,
  - Fahrzeuganprall → Auslegung von Brückenpfeilern; "crash-tests" in der Automobilindustrie,
  - Beschuss mit konventionellen Waffen → militärischer Schutzraumbau, Materialprüfung,
  - Einschlag von Mikrometeoriten in Raumfahrzeugen,
  - alle Stöße mit Einwirkungsauern im Mikro- oder Millisekundenbereich.

- Explosion:
  - Luftstoßwelle infolge Explosion → Bauteilwiderstand gegen Explosion (z.B. in der chemischen Industrie, Anlagentechnik),
  - Nahdetonation auf Baustrukturen → Innenraumdetonation,
  - Kontaktdetonation auf Bauteile → Bauwerksabbruch; Bemessung von Schutzbauwerken.

Für die Abtragung von extremen Stoßbelastungen wird Stahlbeton bzw. stahlfaserverstärkter Stahlbeton vorwiegend eingesetzt. Konstruktionen des Schutzraumbaus und des kerntechnischen Ingenieurbaus sind bereits ausgeführte Beispiele. Die Vorzüge von stahlfaserverstärktem Stahlbeton sind immer dann besonders interessant, wenn für Schutzkonstruktionen gegen Anpralllasten nur wenig Raum zur Verfügung steht, wenn also bereits wegen räumlicher Enge schlank konstruiert werden muss bzw. Verformungswege und Beschädigungsgrade zuverlässiger begrenzt werden müssen. Konstruktionen gegen Steinschlag, Lawinen usw., Bauteile unter Erdbebenbelastung, Maschinenfundamente und Eisenbahnschwellen, oder Kaimauern und Bohrplattformen unter Wellenschlag in der Wasserwechselzone stellen weitere Einsatzmöglichkeiten von Stahlbeton und von stahlfaserverstärktem Stahlbeton bei dynamischer Belastung dar.

Bei Bauwerken mit speziellen Sicherheitsanforderungen wäre der Stahlfaserbeton ebenfalls als ein Material für entsprechende Schutzkonstruktionen in Betracht zu ziehen, führt man sich die terroristischen Anschläge gegen die amerikanischen Botschaften in Tansania und Kenia 1998 und den Anschlag auf das World Trade Center 2001 vor Augen. Nichtsdestotrotz sind die meisten bestehenden Bauwerke in Stahlbetonbauweise ausgeführt. Demnach ist das stetig wachsende Interesse an einer möglichst genauen Beschreibung der betonartigen Bauteile unter extremen Belastungen in der heutigen Zeit noch immer eine Herausforderung für Praxis und Forschung. Unter extremen Belastungen versteht sich insbesondere die kurzzeitige Beanspruchung eines Bauteils durch Schockwellen, die durch Sprengungen oder durch harten Anprall ausgelöst werden können.

In diesem Zusammenhang steht verstärkt das physikalisch nichtlineare Materialverhalten der beteiligten Werkstoffe aus Beton, Stahlbeton, Stahlfaserbeton und bewehrtem Stahlfaserbeton im Vordergrund. Hierbei sind neben den extrem hohen Verzerrungsraten und hohen Drücken im Werkstoff die Wellenfortpflanzungsphänomene an den Kontaktflächen unterschiedlicher Materialien, beispielsweise zwischen Beton und Bewehrungsstahl, von enormer Bedeutung. Insbesondere erschwert die Frage nach den Versagensvorgängen, beispielsweise die Entstehung von Mikrodefekten und das Wachstum von Mikrorissen auf der Mikroebene, die Beschreibung der Materialinstabilität im Druck- und Zugbereich, die entscheidend sowohl für das lokale als auch das globale Tragverhalten der Struktur ist. Deren geeignete kontinuumsmechanische und mate-

rialphänomenologische Erfassung ist fundamental und gibt Aufschluss über die Entwicklung der Resttragfähigkeit.

Zur Bestimmung der Auswirkungen von Explosionslasten auf Konstruktionen aus Stahlbeton und stahlfaserverstärktem Stahlbeton werden neben der Durchführung von aufwendigen und teuren Versuchen immer öfter numerische Simulationen angewendet. Die Entwicklung moderner Computertechnologien ermöglicht, mit neuen komplexen Materialmodellen, die eben genannten Effekte zu berücksichtigen. Gerade Hydrocodes sind ein geeignetes Werkzeug zur Berechnung von durch Detonationen ausgelösten Schockwellen in Festkörpern, da sie in der Lage, sowohl den Detonationsvorgang als auch die Wellenfortpflanzung zu simulieren.

Die Motivation zur vorliegenden Arbeit ergibt sich aus der Vielzahl offener Fragen aus Forschungsarbeiten zum Thema "Hochdynamische Beanspruchungen von Bauteilen aus Beton und Stahlbeton", wie im folgenden Abschnitt zum Stand der Forschung zu berichten sein wird. Dabei zeigt sich, dass detaillierte Kenntnisse sowohl hinsichtlich der theoretischen Werkstoffmodellierung als auch für die experimentellen Methoden zur Bestimmung von konstitutiven Materialgleichungen zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht vorliegen. Insbesondere für die praktische Anwendung, beispielsweise zur Dimensionierung oder Bemessung von Bauteilen in der Praxis, ist die weiterführende Behandlung dieser Thematik von besonderem Interesse. So wird in dieser Arbeit gezeigt, dass mit Hilfe der hier entwickelten Materialmodelle Aussagen über die lokale Strukturantwort von Bauteilen aus Stahlbeton und aus stahlfaserverstärktem Stahlbeton unter Detonationsbeanspruchungen gemacht werden können.

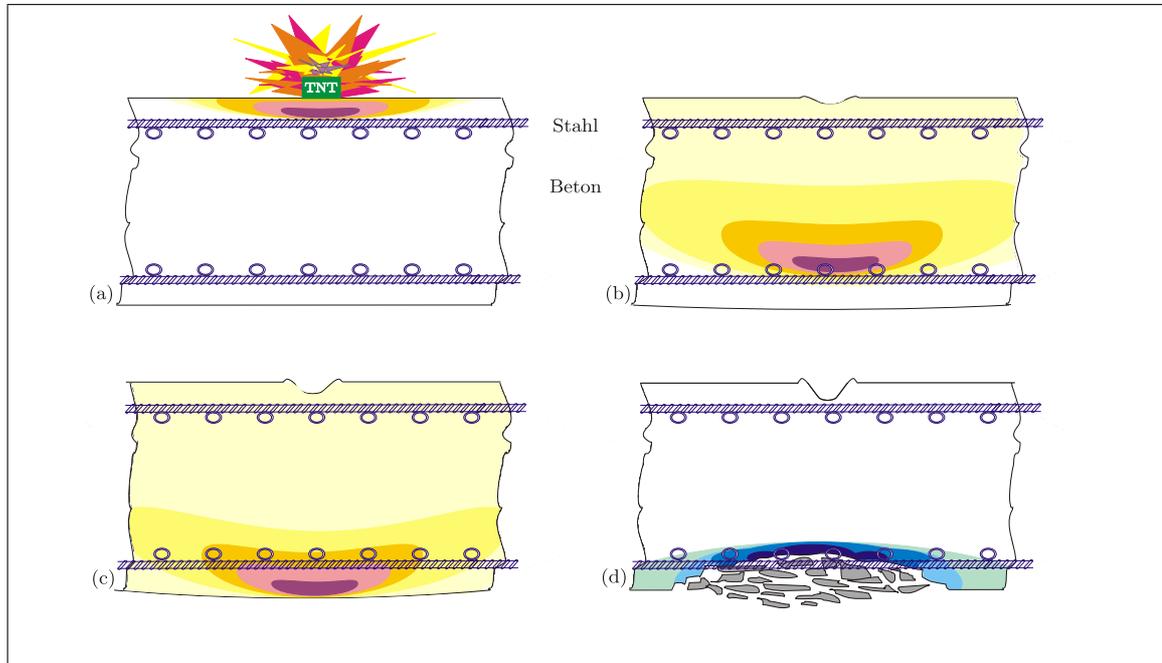
## 1.2 Stand der Forschung

Zur Einordnung der eigenen Problemstellung in die Gesamthematik und zum aktuellen Stand bisheriger wissenschaftlicher Forschungsarbeiten hilft eine Beschreibung der einzelnen Phänomene und Aufgaben in

- Detonationsvorgänge,
- numerische Methodenentwicklungen,
- experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Werkstoffverhalten und
- mechanische Werkstoffmodelle,

in Anlehnung an die Dissertationen von EIBL 1995 [56] und RUPPERT 2000 [184]. Eine umfangreiche Anzahl nationaler und internationaler Veröffentlichungen beschäftigte sich in den letzten Jahren zunehmend mit dem Materialverhalten unter außergewöhnlichen Belastungen. Daher gibt die in den folgenden Abschnitten chronologisch sortierte Übersicht einige wichtige Arbeiten und Tendenzen wieder.

Einleitend dient die in den Abbildungen 1.1 (a-d) im Stahlbetonquerschnitt schematisch dargestellte Druckwellenausbreitung zur näheren Erläuterung der im Festkörper auftretenden physikalischen Phänomene und der resultierenden lokalen Materialschädigung:



**Abbildung 1.1:** Räumliche Druckwellenausbreitung im kompositen Werkstoff Stahlbeton

Eine durch Kontaktdetonation initiierte Druckwelle beginnt sich von der angesprengten Oberfläche her durch den Stahlbetonkörper auszubreiten (Abbildung 1.1(a)). Dies geschieht in Form einer Schockwelle, deren Druck schlagartig ansteigt und nach ihrem Maximum nur allmählich abfällt. Hierbei erfährt der Beton Drücke, die bis zum 180-fachen seiner einaxialen statischen Druckfestigkeit betragen.

Nach Durchlaufen der Betonüberdeckung trifft die Druckwelle auf die Bewehrung. Ein Teil der Druckwelle wird am Stahl aufgrund unterschiedlicher Impedanzen reflektiert, ein anderer wird transmittiert. Die Wellenfront wird gebrochen. Im Bewehrungsstahl betragen die erreichten Drücke das 12 bis 15-fache seiner einaxialen statischen Festigkeit. Aufgrund der hohen Drücke ist es möglich, dass der Beton und/oder der Bewehrungsstahl geschädigt bis vollständig zerstört werden. Im Beton entstehen Risse oder er wird aufgrund der hohen hydrostatischen Drücke zum granularen Medium. Der Bewehrungsstahl kann aufreißen. Die Schädigung führt zu einer Degradation der Festigkeiten und der Steifigkeiten.

Die räumliche Ausbreitung der Druckwelle, wie in Abbildung 1.1 (b) angedeutet, wird aufgrund der Effekte der Reflektion und der Transmission an Materialgrenzen im Beton zwischen Zuschlagskorn und Zementmatrix, und an der Kontaktfläche zwischen Beton und Bewehrungsstahl konfus gebrochen. Die Detonationsenergie wird beim Ausbreiten zum Teil in Deformationsenergie

gie, zum Teil über Reibung in thermische Energie umgewandelt. Die Drücke schwächen sich ab. Daraus folgt, dass an der unteren Bewehrungslage die gleichen Wellenfortpflanzungseffekte, allerdings mit geringerer Intensität auftreten, wie an der oberen.

Die Druckwelle im Stahlbetonkörper wird an seiner, der angesprengten gegenüberliegenden Seite, freien Oberfläche (Abbildung 1.1 (c)) reflektiert. Dort findet eine Beanspruchungsumkehr statt; anstatt einer Druck- läuft nun eine Zugwelle durch den Körper. Die Zugspannung überschreitet die Betonzugfestigkeit; der Beton platzt ab (Abbildung 1.1 (d)). Der Stahl wird ebenfalls der veränderten Beanspruchung ausgesetzt. Falls der Bewehrungsstahl der Beanspruchung standhält, wirkt er wie ein Membrannetz. Der zerstörte Beton wird von diesem Bewehrungsnetz festgehalten.

Um mit Hilfe einer numerischen Simulation eine gezielte und realitätsnahe Vorhersage über eine Verformung oder ein Versagen eines Bauteils abgeben zu können, ist die Kenntnis der in diesem Abschnitt eingangs aufgezählten theoretischen Grundlagen zum Materialverhalten unter hochdynamischen Belastungen zwingend erforderlich. Für die erfolgreiche Entwicklung geeigneter, prognosefähiger Materialmodelle in der Kurzzeitdynamik sind daher das Wissen und die Ergebnisse aus folgenden Forschungsgebieten entscheidend.

### 1.2.1 Detonationsvorgänge

Detonationen von Sprengstoffen erfolgen durch eine rasante chemische Umsetzung des Explosivstoffes in gasförmige Detonationsprodukte. Ist eine Zündung eingeleitet, verläuft sie von der reagierenden Schicht durch mechanischen Impuls durch den gesamten Sprengstoffkörper fort. Dies geschieht durch eine sich ausbreitende Druckwelle mit extremen Druckamplituden, die zu Dispersionseffekten führt. Dispersion entsteht, wenn sich eine Welle in einen elastischen und in einen plastischen Wellenbereich aufteilt, die sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreitet. Ab einem bestimmten Punkt wird eine zeitlich vorher ausgelöste langsamere Welle  $v_1$  von einer schnelleren Welle  $v_2$  ein- und überholt, wie in Abbildung 1.2 dargestellt. Es entsteht eine Wellenfront; die Entstehung einer Schockwelle.

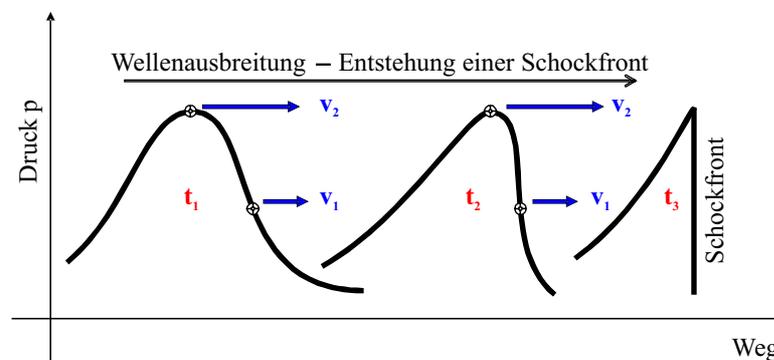


Abbildung 1.2: Entstehung einer Schockwelle durch Dispersion

Erste Veröffentlichungen zur Detonationsvorgängen reichen bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts zurück. CHAPMAN 1899 [34] und JOUGUET 1906 [114] entwickelten eine klassische Detonationstheorie, die als Basis für eine Vielzahl weiterer Theorien dient. So führten die zeitgleichen, aber voneinander unabhängigen Untersuchungen von ZEL'DOVICH 1940 [225] in Rußland, DÖRING 1943 [51] in Deutschland und VON NEUMANN 1942 [214] in den USA zum sogenannten ZDN-Modell, einer Weiterentwicklung der CHAPMAN & JOUGUET-Theorie. Auf diesem ZDN-Modell beruht die häufig verwendete Zustandsgleichung von JONES-WILKINS-LEE (JWL-EoS). Eine Verifikation der empirisch aufgestellten JWL-Zustandsgleichung wurde u.a. durch LEE & TARTVER 1980 [132] durchgeführt. DOBRATZ 1981 [50] stellte die wichtigsten Sprengstoffkennwerte aus einer Vielzahl von Versuchsergebnissen übersichtlich zusammen.

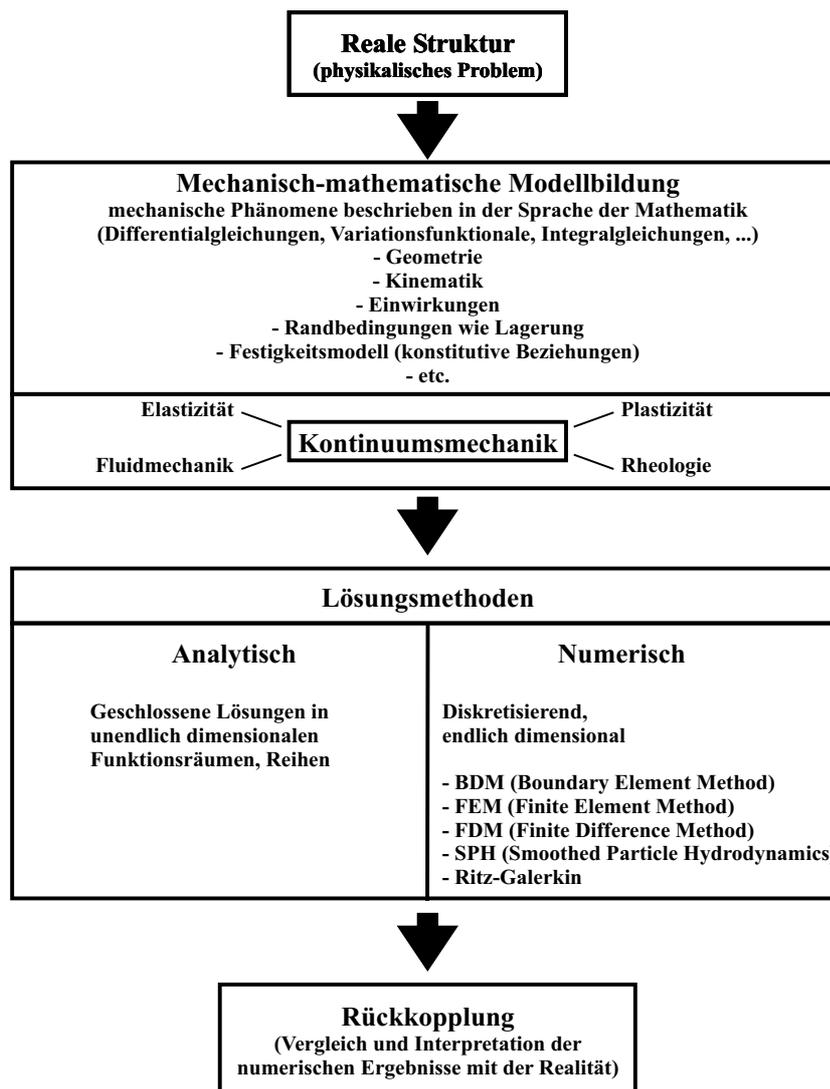
Wesentliche Grundlagen zur Ausbreitung und Reflexion von Schockwellen in der Gasdynamik finden sich in GRUSCHKA & WECKEN 1971 [89], LEE 1972 [133] und BARTLMÄ 1975 [15]. Weitere Darstellungen von Detonationsvorgängen zu verschiedenen Detonationstheorien enthalten u.a. die Arbeiten von ZEL'DOVICH & KOMPANEETS 1970 [226], FICKETT & DAVIS 1979 [65], MADER 1979 [140], FICKETT 1987 [64], BANGASH 1993 [11] und WETZEL 1993 [219]. Ein Beitrag aus der russischen Literatur liefert u.a. HENRYCH 1979 [95]. Die Auswirkungen von Sprengstoffen u.a. auf die Druckwellenausbreitung und auf die Temperatur sind in KINNEY 1985 [119] und DAVIS 1987 [44] näher erläutert.

Übersichtliche Publikationen zu den Anwendungsgebieten und zu den Verfahren der Sprengtechnik im deutschsprachigen Raum sind von FRIEDRICH & WEICHELT 1949 [68], HEINZE et al. 1987 [60], ROSCHLAU 1993 [180] veröffentlicht worden. Sie fassen Grundlagen zur Sprengtechnik, Arbeitsmittel, Vorbereiten, Durchführen und Sprengverfahren aber auch gesetzliche Grundlagen für die Verwendung von Sprengmitteln für die Praxisnutzung zusammen.

Für eine nähere Erläuterung zur Detonationstheorie und zur Herleitung der verwendeten Detonationszustandsgleichung wird auf den Abschnitt 3.2 verwiesen.

### 1.2.2 Numerische Methoden

Um das Verhalten einer realen Struktur unter gegebenen Randbedingungen prognostizieren zu können, bedarf es der Kenntnis technischer Modellvorstellungen auf der Basis physikalischer und mathematischer Grundlagen. *Technisches Modellieren, d.h. der Aufbau von prognosefähigen Ingenieurmodellen, bildet ein komplexes Kenntnisse und Erfahrungen voraussetzenden Abstraktionsprozeß, weil jede Modellierungsebene die Wirklichkeit im Hinblick auf bestimmte Zielaspekte idealisiert.* Dieser Satz aus dem Lehrbuch von KRÄTZIG & BAŞAR 1997 [125] spiegelt sich im Aufbau eines mechanisch-mathematischen Modells auf der Ebene eines ingenieurmäßigen Denkprozesses wider und ist schematisch in der Abbildung 1.3 übersichtlich in Entwicklungsstufen skizziert.



**Abbildung 1.3:** Entwicklungsstufen zum Aufbau eines mechanisch-mathematischen Modells zur Abbildung einer realen Struktur

Abbildung 1.3 zeigt deutlich, dass die *Umsetzung* der mechanischen Phänomene eines physikalischen Problems in der Sprache der Mathematik (Differentialgleichungen, Variationsfunktionale, Integralgleichungen, ...) erfolgt. Deren Lösungsmethoden waren bis in die 50er Jahre des 20. Jahrhunderts ausschließlich analytisch. Mit der Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung in den letzten Jahrzehnten erfährt auch die numerische Behandlung grundlegender Theorien aus der klassischen Kontinuumsmechanik eine besondere Bedeutung. Dabei werden Kontinua aus der Festkörpermechanik den modernen, räumlich und zeitlich diskretisierenden Verfahrenstechniken gegenübergestellt. Diese Verfahren lösen als Näherung beispielsweise die als partielle Differentialgleichungen formulierten Erhaltungsgleichungen, die die mathematische Beschreibung des Problems wiedergeben. Unter diesen als *finite Methoden* bekannten Verfah-

ren versteht man die gedachte Zerlegung des Modellraums einer fast beliebigen physikalischen Problemstellung in eine endliche Anzahl begrenzter Einheiten, den finiten Elementen. In diesen finiten Elementen lassen sich die Lösung der mechanischen Gleichungen mit Hilfe verschiedener numerischer Näherungsverfahren in Raum und Zeit ermitteln. Fügt man alle einzelnen Elementlösungen zusammen, so erhält man eine Näherungslösung des Problems pro Zeitschritt. Mit Hilfe des inkrementellen Vorgehens in der Zeit setzt sich additiv die Gesamtlösung beispielsweise die Gesamtverformung der Problemstellung zusammen. Zu den bekannten Näherungsverfahren zählen

- die BEM (Randelementmethode),
- die FEM (Finite Element Methode),
- die FDM (Finite Differenzen Methode),
- die netzfreien Methoden (z.B. SPH = Smoothed Particle Hydrodynamics) oder
- das Ritz–Galerkin Verfahren.

Für die in Abbildung 1.1 dargestellte Aufgabenstellung der Detonationsbelastung auf betonartige Strukturen erweist sich die numerische Behandlung mit sogenannten Hydrocode–Simulationsverfahren als äußerst effektiv, welche auf der *Finite Differenzen Methode* basieren. Der Begriff *Hydrocode* stammt ursprünglich aus der Hydrodynamik und beschreibt Verfahren, die sich hauptsächlich mit fluidartigen Strömungsvorgängen zur Beschreibung von großen Bewegungen unter Vernachlässigung der Materialfestigkeit befassen. Vorteilhaft für die Abbildung hydrodynamischer Problemstellungen ist die EULERSche Betrachtungsweise (Abschnitt 2.2.2). Die später eingeführte LAGRANGESche Betrachtungsweise in Hydrocodes, bei der die Formulierung der Erhaltungsgleichungen im körperfesten Koordinatensystem erfolgt, führt zu einer geeigneten Abbildung des Festkörperverhaltens.

Umfangreiche Zusammenfassungen von Grundlagen von Hydrocode–Simulationsverfahren finden sich, aufgezählt in chronologischer Reihenfolge, in den Arbeiten von ANDERSON 1987 [5], ZUKAS 1990 [231], BENSON 1992 [21], WILKINS 1999 [222], GEBBEKEN & RUPPERT 1999 [73], RIEDEL 2000 [177], SAUER 2000 [186], AUTODYN 2002 [32] und HIERMAIER 2002 [98]. Da alle Autoren selbst Code–Entwickler sind, spiegeln die Referenzen gut die Theorie und mathematische Formulierung von Hydrocodes wider. MEYERS fasste 1994 übersichtlich eine Vielzahl geläufiger Hydrocodes und deren Entwickler zusammen (in [151], Tabelle 6.1).

Neben den erstmals von WILKINS 1964 [220] vorgestellten und im Rahmen seiner Arbeit von 1999 modifizierten Algorithmen in der LAGRANGESchen Betrachtungsweise [222], sind weitere Berechnungsverfahren für die numerische Lösung der Differentialgleichungen beispielsweise von

GODUNOV 1959 [82], LAX & WENDROFF 1960 [131] oder RUNGE & KUTTA (vorgestellt von TRUILIO & TRIGGER 1961 [212]) entwickelt worden.

Insbesondere werden zur Stabilisierung der räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsverfahren in Hydrocodes eine Vielzahl von methodenabhängigen Anstrengungen unternommen, die erst eine physikalisch interpretierbare numerische Simulation von Schockwellen ermöglichen. Wichtige Arbeiten zur Entwicklung stabiler Lösungsalgorithmen liefern u.a. die Arbeiten von VON NEUMANN & RICHTMYER 1950 [215], RICHTMYER & MORTON 1967 [176], COURANT & FRIEDRICHS 1976 [40], SOD 1978 [196], WILKINS 1980 [221] und HUGHES 1999 [107], auf die im Einzelnen im Kapitel 4.5 näher eingegangen wird.

### 1.2.3 Experimentelle Methoden und Untersuchungen zum Materialverhalten

Die Ermittlung werkstoffspezifischer Parameter, die einem mathematischen Modell zur Verfügung gestellt werden, erfolgt neben den klassischen statischen Verfahren wie einaxiale Zug- oder Drucktests auf unterschiedliche Arten komplexer dynamischer Methoden. Diese im Folgenden kurz angesprochenen Methoden lassen sich grundlegend nach den modernsten Erkenntnissen der Technik einteilen

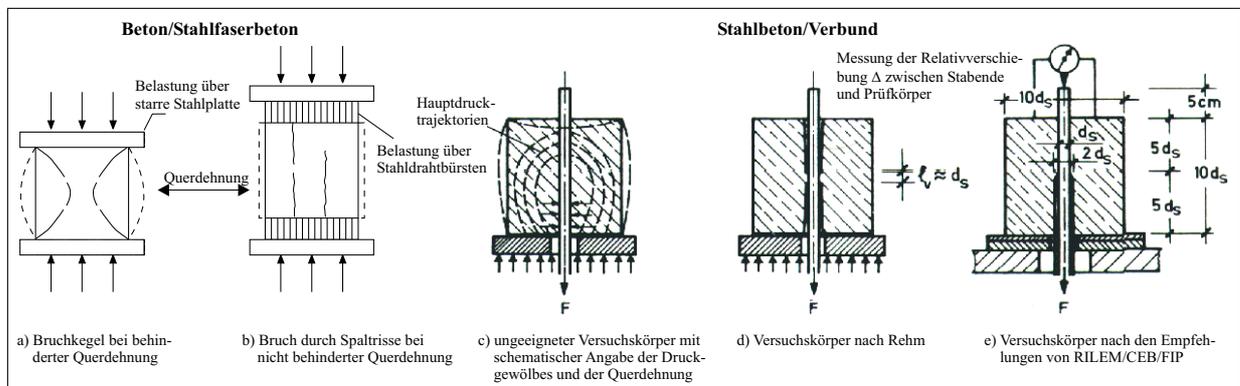
1. in die Verfahren der Werkstoffprüfung und
2. in die Methoden der Werkstoffsimulation.

#### **Zur Werkstoffprüfung:**

Zu den klassischen *Verfahren der Werkstoffprüfung* zählen insbesondere die quasistatischen oder dynamischen Experimente mit servohydraulischen Prüfmaschinen (HIERMAIER 2002 [98]). Die mit ihnen zu erzielenden Ergebnisse der ein- oder mehraxialen Materialfestigkeit oder der örtlichen Schubspannungs-Schlupf-Beziehungen bilden die Basis zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens. Diese Maschinen erreichen Hubgeschwindigkeiten von etwa 1-5 m/s, möglich sind bei hydraulischen Schnellreißmaschinen auch 20 m/s.

Im Bericht von GEBBEKEN & GREULICH 1999 [79] werden einige Prüfmethode sowie deren Einfluss auf das Materialverhalten näher beschrieben. Versuchsergebnisse sind stark abhängig vom Versuchsaufbau, von der Versuchsdurchführung und vom Probekörper. In der Praxis existieren nie die gleichen Rahmenbedingungen, da beispielsweise unterschiedliche Interaktionen zwischen dem Probekörper, beispielsweise Zylinder ( $d=15\text{cm}$ ,  $h=30\text{cm}$ ) oder Würfel (Kantenlänge 20cm) und dem Versuchsgerät auftreten. Dabei ist es wichtig, die ungewollten Abweichungen zu kontrollieren und gegebenenfalls zu reduzieren. Die Prinzipskizzen in Abbildung 1.4 für den einaxialen Druckversuch und für den Ausziehversuch eines Bewehrungsstahls aus einem Betonzyylinder illustrieren unterschiedliche Verfahren zur Bestimmung des Werkstoffverhaltens unter statischen Belastung. Im Hinblick auf vergleichbare Versuchsdurchführungen wird an dieser Stelle auf die

Normung von Experimenten hingewiesen, die beispielsweise für den Beton in der DIN 1048 und im Heft 447 des Deutschen Ausschusses für Stahlbetonbau 1995 [190] beschrieben sind.



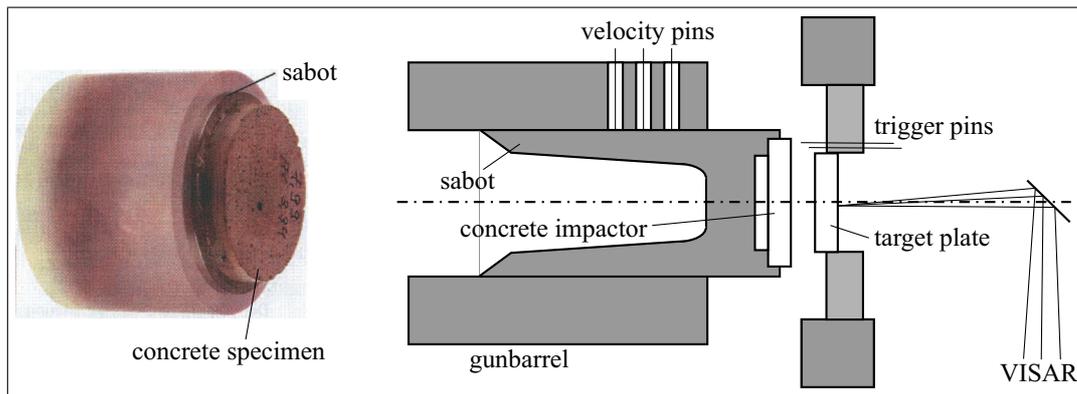
**Abbildung 1.4:** Versuchsmethoden zur Bestimmung der Werkstoffeigenschaften für Beton/Stahlfaserbeton und für Stahlbeton/Verbund (aus: LEONHARDT 1980 [136])

Eine derzeit häufig angewandte Methode zur Bestimmung des Materialverhaltens unter dynamischen Lasten mit Verzerrungsraten von  $10^2$  bis  $10^4 \frac{1}{s}$  ist der Versuchsaufbau des Split-Hopkinson-Pressure-Bar, der ursprünglich von HOPKINSON 1914 [106], DAVIES 1948 [42] und KOLSKY 1953 [121] entwickelt wurde. Hierbei wird eine Materialprobe mittig zwischen zwei dünnen Stäben angeordnet, wobei am einen Ende des Stabes eine von aussen aufgebrachte Impulswelle eingeleitet wird. Das Prinzip basiert auf der Theorie der Reflektion und Transmission von Wellen an Oberflächen zweier Werkstoffe, die aufgrund deren unterschiedlicher Impedanzen auf die Materialeigenschaften der unbekanntenen Probe schließen lassen.

Für die Erzeugung weitaus höherer Drücke eignet sich die in Abbildung 1.5 dargestellte experimentelle Anordnung des Planar-Platten-Impakt Tests. Mit dieser Versuchsmethode werden Verzerrungsraten von  $10^4$  bis  $10^6 \frac{1}{s}$  und geschwindigkeits- und materialabhängige Drücke in der Probe von bis zu 1TPa bei chemischen und bis zu 10TPa bei nuklearen Sprengsätzen erzielt (HIERMAIER 2002 [98]). Hierbei wird ein Projektilmaterial, welches auf einem Träger (Sabot) montiert ist, mit Hilfe einer Gaskanone beschleunigt. Das Sabot trifft auf ein Zielmaterial und leitet eine ebene Schockwelle in den Probekörper ein. Ein VISAR<sup>1</sup>-Laserinterferometer mißt die Geschwindigkeit der belasteten Probe auf der Rückseite (BARKER & HOLLENBACH 1972 [14]), woraus sich Rückschlüsse auf die Drücke ziehen lassen. Das Prinzip der Wellenfortpflanzung in den Materialien durch Vielfachreflektionen ist anschaulich in den Arbeiten von NAHME 1991 [158] und RIEDEL 2000 [177] erläutert.

Eine weitere Versuchsanordnung, die OCKERT 1997 in seiner Arbeit [162] angewendet hat, ist der Einsatz eines Plane-Wave Generators, bei dem eine planare Schockwelle durch gezielt durchgeführte Detonation in das Material eingeleitet wird. Mit Hilfe einer Flash-Gap Technik können

<sup>1</sup>VISAR=Velocity Interferometer System for Any Reflector



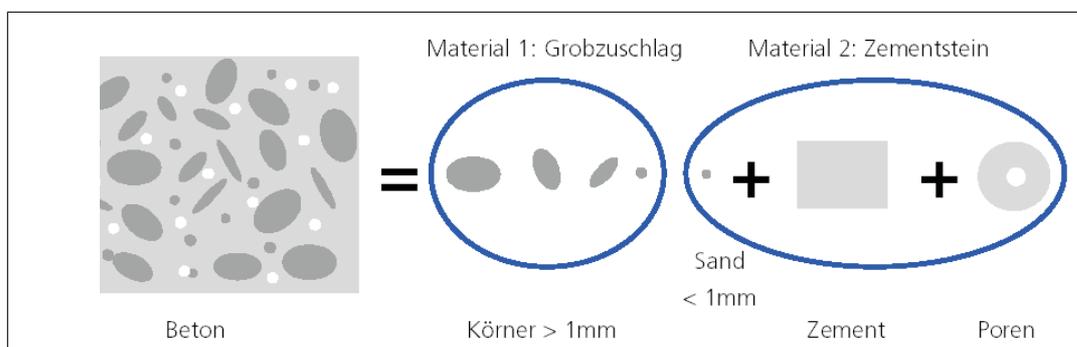
**Abbildung 1.5:** Inverser Planarplatten-Impakt-Test: Sabot (Träger) mit einer Betonprobe (links), schematischer Versuchsaufbau (rechts) (aus: RIEDEL 2000 [177])

die Schockwellengeschwindigkeit und die Partikelgeschwindigkeit des Versuchskörpers ermittelt werden.

Auf den Gebieten der dynamischen Versuchsmethoden leisteten RICE et al. 1958 [175] und MCQUEEN et al. 1970 [148] wesentliche Pionierarbeit. Ihre Berichte beinhalten zusätzlich Darstellungen weiterer Versuchsmethoden zur Bestimmung von Materialdaten.

#### Zu den Werkstoffsimulationen:

Zur Ermittlung des hochdynamischen Materialverhaltens werden neben den speziellen *Verfahren der Werkstoffprüfung* auch gezielt durchgeführte neue *Methoden der Werkstoffsimulation* angewendet. Hierzu leistete RIEDEL 2000 [177] einen geeigneten Ansatz zur Parametercharakterisierung des heterogenen Werkstoffs Beton. Er zerlegte den Beton in seine homogenen Untermaterialien Zementstein und Zuschlag (Abbildung 1.6), und bestimmte an ihnen mit den oben genannten Standardmethoden deren statische und dynamische Materialeigenschaften. Diese mesomechanischen Abbildungen der Einzelkomponenten füllte er gemäß einer realen Betonmischung in ein repräsentatives Volumenelement und führte eine Planarplattenimpaktstudie mit einer Hydrocode-Simulation durch. Daraus lassen sich die hochdynamischen Werkstoffeigenschaften ableiten, in-



**Abbildung 1.6:** Zerlegung des Betons in homogene Komponenten nach RIEDEL 2000 [177]

dem beispielsweise das Verhältnis der Schockwellengeschwindigkeit zur Partikelgeschwindigkeit aus der numerischen Simulation abgelesen und die Zustandsgleichung für den homogenisierten Beton durch Umformung in eine Druck–Dichte–Beziehung auf der makromechanischen Ebene angegeben wird.

Auf einzelne statische und dynamische Versuchsergebnisse zum Materialverhalten von Stahlfaserbeton und zum Verbundverhalten von Stahlbeton, die die Entwicklung der werkstoffspezifischen Modellparameter entscheidend prägen, wird im Kapitel 5 (*Mechanisches Werkstoffverhalten*) und im Kapitel 7 (*Materialmodelle – Umsetzung der Theorie*) separat eingegangen.

Schließlich erfolgen experimentelle Untersuchungen anhand einer direkten Versuchsdurchführung am Bauteil, wobei gezielt am aufgestellten Problem das lokale und/oder globale Verhalten der Struktur, beispielsweise das Verformungs- oder das Versagensverhalten unter bestimmten Belastungsszenarien, beobachtet wird. Diese Vorgehensweise ist ein entscheidendes Kriterium zur qualitativen Beurteilung einer Materialgesetzmäßigkeit.

Die folgenden ausgewählten Publikationen zeigen die kontinuierliche Entwicklung zahlreicher Experimente, bei denen vorwiegend unbewehrte und bewehrte Betonplatten angesprengt wurden.

In der Arbeit von FINSTERWALDER 1963 [66] wurden 240cm breite, quadratische und 50cm Dicke Stahlbetonplatten mit Sprengladungsmengen von bis zu 8.0kg TNT angesprengt. Ohne nähere Untersuchungen der Druckspannungswelle, wertete FINSTERWALDER primär die Zerstörung der Ober- und Unterseite der Platten aus. Insbesondere stand hierbei der Einfluss der Bewehrung auf das Schädigungsverhalten unter Beobachtung.

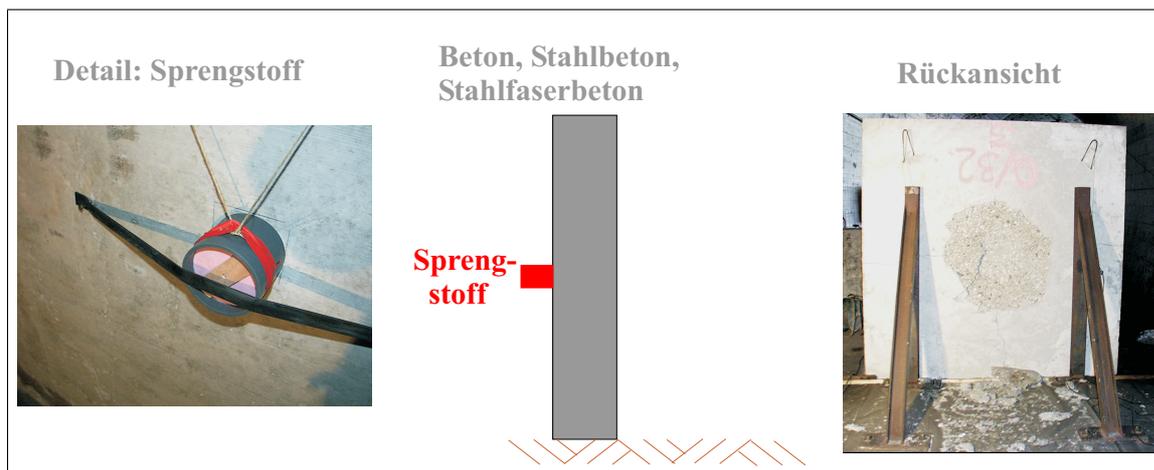
SHERIDAN veröffentlichte 1987 die Ergebnisse von Kontaktdetonationen auf Beton [191]. Ziel war es, den Verlauf der Schockwelle näher zu ergründen und daraus resultierend eine geeignete HUGONIOT–Kurve für eigene FE–Simulationen aufzustellen. Mit Hilfe von Manganin–Sonden, Verzerrungsmeßstreifen an der Ober- und Unterkante der Platte, Kraftmeßdosen und Beschleunigungsaufnehmern versuchte SHERIDAN erfolglos die Partikelgeschwindigkeit und die globale Beschleunigung des Probekörpers aufzunehmen.

MCVAY [149] studierte 1988 das Verhalten von Betonwänden und Hohlkästen unter Detonationsbelastung. Während der Versuche wurden Spannungen, Verzerrungen, Beschleunigungen, Verschiebungen und Geschwindigkeiten gemessen. Von besonderem Interesse waren die Auswertungen der Schädigung der Probekörper nach den Versuchen, weshalb die Druckmessungen nur von sekundärer Bedeutung waren und nicht weiter ausgewertet wurden.

Neben der oben angesprochenen Zielsetzung von OCKERT [162], der Bestimmung einer HUGONIOT–Kurve, erfasste er gleichzeitig die lokalen und globalen Schäden am unbewehrten Versuchskörper, beispielsweise die Abplatzungen an der Vorder- und Rückseite. Das Versagensverhalten der Betonplatten wurde von OCKERT anhand von FE–Berechnungen mit geeigneten Materialmodellen für den Beton nachvollzogen. Die Sprengladungsmengen lagen im Bereich zwi-

schen 630g und 670g TNT. Die Abmessungen der quadratischen Versuchskörper betragen 100cm x 100cm bei variierenden Plattendicken von 25cm bis 50cm.

Die derzeit umfangreichsten und aktuellsten Untersuchungsergebnisse liefert LANDMANN 2001 von der WTD 52 [130]. Die insbesondere für die eigene Problemstellung durchgeführten Ansprengeversuche an ausgewählten Beton-, Stahlbeton- und Stahlfaserbetonplatten (200cm x 200cm) sind ausführlichst vom Herstellungsverfahren mit den Mischungsverhältnissen der verwendeten Materialien über den Versuchsaufbau bis hin zu den Ergebnissen des Schädigungsverhaltens dokumentiert (Abbildung 1.7). Bei den Untersuchungen wurden die Sprengladungsmengen (350g bis 850g PETN1.5), der Beton (Größtkorn: 0-8mm, 0-16mm, 0-32mm), die Bauteildicken (20cm bis 45cm), die Bewehrungsführung (Stababstand: 7.5cm bis 24.5cm, Stabdurchmesser: 8mm bis 16mm, Betondeckung: 3.0cm bis 5.0cm) und der Stahlfasergehalt (0.25 Vol-% bis 1.0 Vol-%) variiert. In einigen Betonplatten wurden Kohle-Masse-Widerstände in festgelegten Tiefen eingebaut, die indirekt über den elektrischen Spannungswiderstand den Druck innerhalb der Platte gemessen haben (s.a. Anhang A).



**Abbildung 1.7:** Sprengversuche an Beton-, Stahlbeton und Stahlfaserbetonplatten: Versuchsaufbau und Ergebnis (aus: LANDMANN 2001 [130])

#### 1.2.4 Mechanische Werkstoffmodelle

Bei der Beschreibung des mehraxialen Festigkeitsverhaltens, das eine wesentliche Grundlage für die Bestimmung der Tragfähigkeit eines Werkstoffs ist, lässt sich eine Zunahme in der Komplexität von Materialmodellen bei gleichzeitiger Steigerung der Leistungsfähigkeit von numerischen Berechnungsverfahren seit dem Ende der sechziger Jahren feststellen. Die Komplexität eines Materialmodells liegt im Grad der möglichst realitätsnächsten Abbildung des wahren Werkstoffverhaltens.

Liegt eine Belastung vor die den Werkstoff plastifiziert und/oder schädigt, so ist ein elasti-

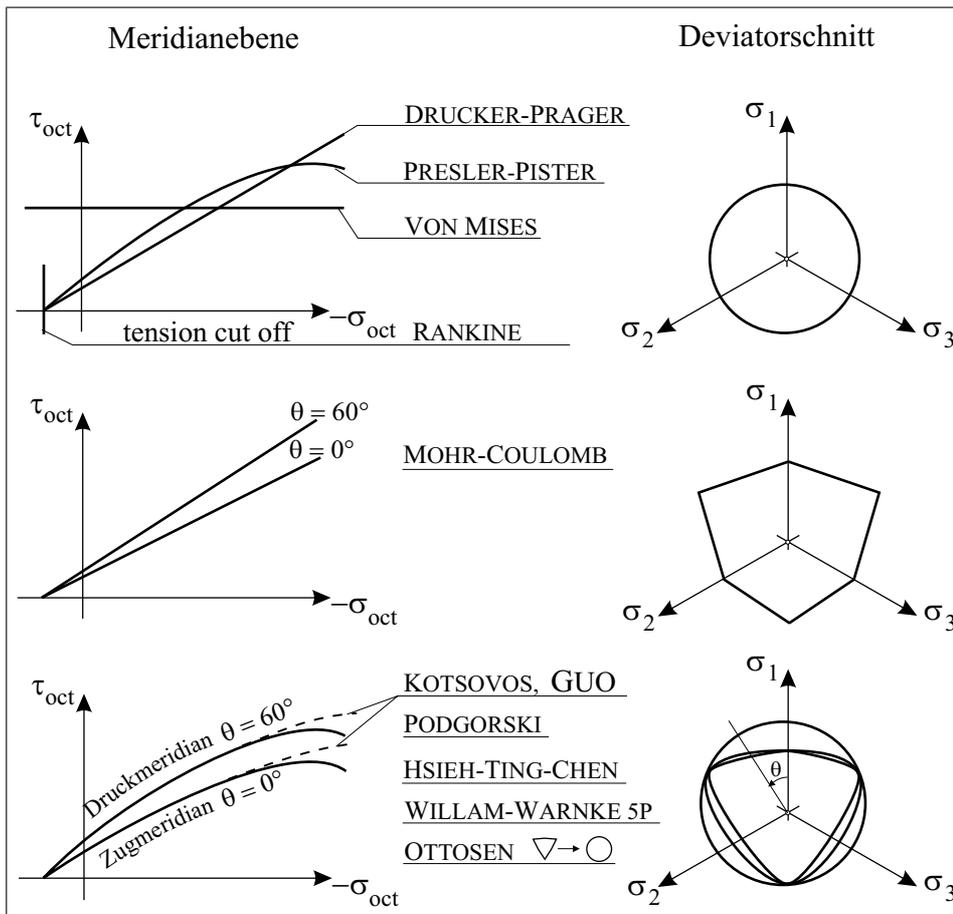
ches Werkstoffmodell um ein plastisches Werkstoffmodell und/oder ein Schädigungsmodell zu erweitern. Mit jedem Modell sind die werkstoffabhängigen Parameter in aufwendigen Versuchen experimentell zu ermitteln. Als wichtige Beispiele seien hier zum einen die Bestimmung der Werkstoffkonstanten des Materialensors, die im allgemeinen Fall  $3^4 = 81$  Parametern und im isotropen Fall lediglich 2 Parametern (Lamé-Konstanten) entsprechen, und zum anderen die Beschreibung der elastischen Grenzfläche und/oder der Fließfläche genannt, deren Anzahl der Materialparameter umso größer ist je heterogener der Werkstoff ist (vgl. u.a. GEBBEKEN 1996 [71]). Sowohl die Beschreibung der Materialverfestigung (isotrop, kinematisch oder gemischt) als auch die Ratenabhängigkeit und die Materialschädigung tragen zum *vollständigen* und *idealen* Werkstoffmodell bei, das in die numerische Methode zur Berechnung des aufnehmbaren mehraxialen Spannungszustandes umgesetzt werden muss. Über das Werkstoffmodell sind die Spannungen eines Körpers mit den auftretenden Verzerrungen gekoppelt.

Wesentliche Züge in der Entwicklungsgeschichte zur Beschreibung mechanischer Werkstoffmodelle, insbesondere zur Plastizitätstheorie und zur Theorie der Hypoelastizität, sind eng mit den Namen COULOMB, TRESCA, VON MISES, HUBER, HENCKY, PRAGER, DRUCKER, HILL oder TRUESDELL verbunden, vergleiche HILL 1950 [100] oder TRUESDELL & TOUPIN 1960 [211], sowie modernere Zusammenstellungen von LEMAÎTRE & CHABOCHE 1998 [135] oder SIMO & HUGHES 1998 [192].

Erstmalig stellten COULOMB 1873 für Böden und TRESCA 1864 für Metalle eine *nicht reversible, plastische* Verzerrung des Materials fest, falls eine maximale Schubbeanspruchung des Probekörpers überschritten wird. Das Material beginnt zu *fließen*. Bis zum Erreichen dieser Beanspruchungsgrenze, die durch die Fließfläche gekennzeichnet ist, liegt ein elastisches Materialverhalten vor. Diese Aussage ist eng mit der entkoppelten Darstellung der einaxialen Gesamtverzerrung  $\varepsilon$  in einen elastischen  $\varepsilon_{el}$  und in einen plastischen Verzerrungsanteil  $\varepsilon_{pl}$  nach der spannungsbasierten Formulierung verbunden, auf die auch heute noch die häufigsten Materialmodelle auf Basis der Plastizitätstheorie zurückgreifen.

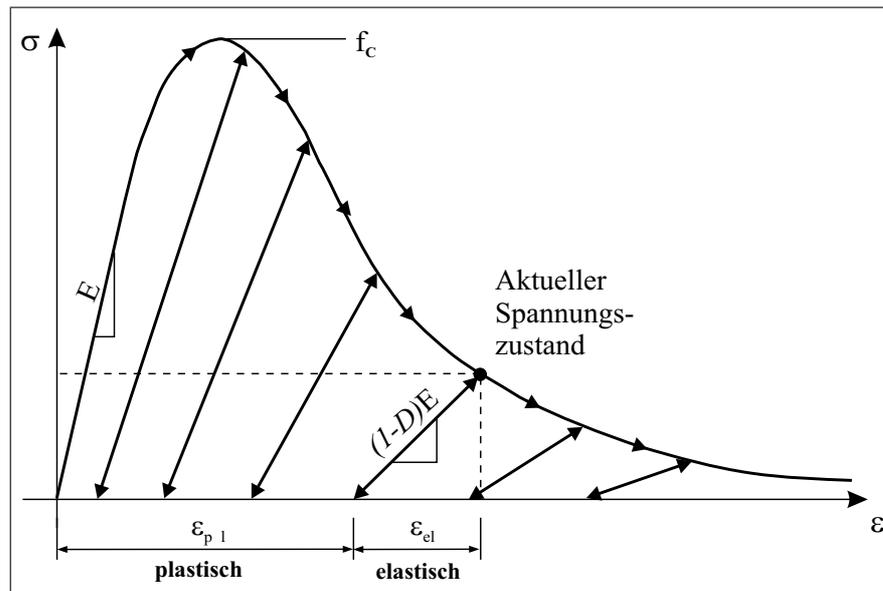
ZHOU stellte in seiner Arbeit 1995 [229] eine Vielzahl verschiedener Fließflächen zusammen. RUPPERT 2000 [184] ordnete diese übersichtlich nach der Art des Materials und deren Anzahl der Modellparameter. Einige Formen ausgewählter ein- bis mehrparametrischer Fließflächen, dargestellt in der Meridian- und in der Deviatorebene, sind in Abbildung 1.8 skizziert.

Die isochore, also vom hydrostatischen Druck unabhängige Form der Plastizität findet Anwendung in der Werkstoffbeschreibung für homogene Materialien wie Metalle, z.B. VON MISES, während für heterogene, insbesondere poröse Werkstoffe wie Beton/Stahlfaserbeton anspruchsvollere Materialmodelle anzusetzen sind, deren Fließfläche sowohl vom hydrostatischen Druck, als auch vom Schub und von der Belastungsrichtung in der Deviatorebene abhängig formuliert sind, z.B. WILLAM & WARNKE 1975 [223], OTTOSEN 1978 [165] oder GUO 1995 [90].



**Abbildung 1.8:** Ausgewählte Fließflächen, dargestellt in der Meridian- und in der Deviatorenebene (aus: RUPPERT 2000 [184])

In den achtziger Jahren entstehen Arbeiten, die sich hauptsächlich mit dem charakteristischen Verhalten des Stahlbetons auf der Mikroebene wie beispielsweise der Rissevolution und dessen phänomenologische Abbildung in der makromechanischen Modellebene beschäftigen (vgl. RASHID 1968 [172], WALRAVEN & REINHARDT 1981 [218], DE BORST & NAUTA 1985 [47], ROTS 1988 [182], ROTS & BLAUWENDRAAD 1989 [183], CERVENKA 1994 [33]). Damit verbunden ist die Beschreibung von lokalisierten Deformations- und Versagenszuständen, die zur Deterioration des Materials, insbesondere der Steifigkeit  $\mathbf{C}$  und der Festigkeit  $f_c$ , führen. Das Konzept der isotropen Kontinuumschädigungsmechanik im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse wurde u.a. von KACHANOV 1986 [115], KRAJCINOVIC 1996 [124] und LEMAÎTRE & CHABOCHE 1998 [135] anschaulich aufbereitet, wobei mit Hilfe einer skalaren Schädigungsgröße  $D$  eine interne Variable eingeführt wurde, mit der die Schädigung des Materials von  $D = 0$  *ungeschädigt* bis  $D = 1$  *voll geschädigt* quantifizierbar und interpretierbar ist. Das in Abbildung 1.9 dargestellte elasto-plastische und elasto-schädigende Antwortverhalten lässt sich anschaulich durch eine Kombination aus der Plastizitätstheorie und der Kontinuumschädigungstheorie modellieren.



**Abbildung 1.9:** Schematische Darstellung des einaxialen elasto-plastischen und elasto-schädigenden Materialverhaltens

In Abhängigkeit von der Modellierungsstufe der FE-Diskretisierung wurden verschiedene Formulierungen zur Beschreibung des Verbundtragverhaltens entwickelt. Bei einer groben Diskretisierung lässt sich der Stahlbetonverbund lediglich indirekt durch eine Berücksichtigung des Einflusses in der Gesamtsteifigkeit bestimmen. Die durch den Verbund ausgelöste Versteifung wird als *tension stiffening* bezeichnet und lässt sich im Modell entweder durch eine Modifikation des Materialgesetzes der Bewehrung (FLÖGL & MANG 1982 [67]) oder durch eine Änderung der Materialformulierung im Nachbruchbereich des Betons (FEENSTRA & DE BORST 1995 [63]) abbilden. Bei einer entsprechend feinen Diskretisierung im Millimeterbereich wird in dem Modell von IDDA 1999 [109] das Verbundtragverhalten zwischen Beton und Bewehrung mit anliegenden Verbundelementen diskret abgebildet.

Weitere umfassende Darstellungen zur Werkstoffmodellierung von Beton, Stahlbeton und Stahlfaserbeton liegen u.a. in den Monographien von CHEN 1982 [35], HOFSTETTER & MANG 1995 [103] und MAEKAWA, PIMANMAS & OKAMURA 2003 [141], sowie dem CEB-Report No. 210 von 1991 [39] und im Bericht von BEKAERT 2002 [20] vor.

Die bisher genannten Modelle decken lediglich das Verhalten des Betons, des Stahlbetons und des Stahlfaserbetons unter quasi-statischen Lasten ab. In jüngster Zeit beschäftigen sich einige Autoren mit der Berücksichtigung des Materialverhaltens unter dynamischen Lasten. Aufbauend auf den Versuchsergebnissen zum Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit auf das Werkstoffverhalten (vgl. u.a. SUARIS & SHAH 1982 [204], VOS & REINHARDT 1982 [216], BRANDES & LIMBERGER 1985 [28], BISCHOFF & PERRY 1991 [24], BACHMANN 1993 [9]) wurden häufig modular die Fließfläche, das Plastifizieren, die Verfestigung, die Schädigung und die Ratenabhängigkeit in

den konstitutiven Beziehungen miteinander gekoppelt formuliert (s.a. JOHNSON & COOK 1983 [111], HOLMQUIST, JOHNSON & COOK 1993 [105], EIBL 1995 [56], OCKERT 1997 [162], RIEDEL 2000 [177], RUPPERT 2000 [184]).

Zusätzlich stellt sich neben der vollständigen Beschreibung von Spannungs–Verzerrungs–Beziehungen für Festkörper ein paralleler Entwicklungszweig heraus, der sich vornehmlich mit der Modellierung des hydrodynamischen Werkstoffverhaltens beschäftigt. Letzterer ist von enormer Bedeutung bei der Belastung von Materialien unter extrem hohen hydrostatischen Drücken, wie dies auch bei Kontaktdetonationen auf betonartige Strukturen im vorliegenden Problem der Fall ist, da hierbei das deviatorische Materialverhalten gegenüber dem hydrostatischen Verhalten stark an Bedeutung verliert.

Ausgehend von den Erhaltungsgleichungen ist eine weitere Beziehung nötig, um das Werkstoffverhalten zu beschreiben. In der hydrodynamischen Materialmodellierung von Gasen und von Fluiden, also unter der Vernachlässigung viskoser Effekte und der Scherfestigkeit, lässt sich auf den Überlegungen von MIE 1912 [152] und von GRÜNEISEN 1926 [88] das Materialverhalten als Zustandsgleichung mit einer Beziehung zwischen dem hydrostatischen Druck  $p$  zum Volumen  $V$  und zur inneren Energie  $e$  mit  $p = f(V, e)$  darstellen. Davon lassen sich weitere Formen von Zustandsgleichungen ableiten, die sowohl von der Messtechnik der Versuche zur Bestimmung der Materialparameter als auch von den Materialien selber abhängen. Insbesondere sei hier auf die Ansätze von SLATER 1939 [195], DUGDALE & McDONALD 1953 [53], TILLOTSON 1962 [206], AL'TSCHULER 1965 [4] verwiesen. Des weiteren entwickelte HERRMANN 1969 [96] ein hydrodynamisches Modell zur Beschreibung von porösen, duktilen Materialien, bei dem sowohl das Verhalten im porösen als auch im komprimierten Zustand abgebildet wird.

Dennoch reicht letztgenannter Entwicklungszweig, das thermodynamische Werkstoffverhalten über eine Zustandsgleichung zu beschreiben, allein nicht aus, um die charakteristischen Phänomene betonartiger Strukturen vollständig, also sowohl im quasi–statischen als auch im dynamischen Bereich, und realitätsnah zu modellieren (deviatorische Spannungsanteile dominieren bei niedrigen Spannungszuständen das Tragverhalten). Erst die Ansätze der Werkstoffmodelle aus dem letzten Jahrzehnt, beispielsweise von OCKERT 1997 [162], RIEDEL 2000 [177], RUPPERT 2000 [184], geben die Richtung zur Entwicklung geeigneter makromechanischer Werkstoffmodelle vor, in denen sowohl die Erkenntnisse der statischen, also vollständigen Beschreibung von Spannungs–Verzerrungs–Beziehungen, mit der Kopplung der thermodynamischen Werkstoffbeschreibung in ein modernes Festkörpermodell einfließen.

### 1.3 Zielsetzung

Aus den vorangegangenen Ausführungen wird die Forderung nach geeigneten und zuverlässigen Werkstoffmodellen für den Stahlfaserbeton und für den Verbund von Stahlbeton deutlich,

die in der Lage sind, die beschriebenen charakteristischen Merkmale betonartiger Materialien unter Explosionseinwirkung wirklichkeitsnah abzubilden. Die vorliegende Arbeit zielt darauf ab, die Werkstoffeigenschaften, wie Druck- und Zugfestigkeit, Verzerrungsratenabhängigkeit oder Schädigungsverhalten, modular zu koppeln und in eine elasto-plastische Kontinuumschädigungstheorie unter Berücksichtigung von hohen Verzerrungen und hohen Drücken einzugliedern. Hierbei beschränkt sich die Einbettung der neuen Modelle in einen Hydrocode aus Effizienzgründen auf die Ebene der Makromechanik. Dies legt die Definition des Begriffs der Schädigung nach LEMAÎTRE 1992 [134] fest, wonach die Schädigung durch Lösen der Bindung (Riss) zwischen zwei Materialien (Zementmatrix und Zuschlagskorn) oder innerhalb eines dieser Materialien auf der Mikroebene entsteht und zu einer Degradation der Festigkeit und/oder Steifigkeit auf der Makroebene eines Materials führt.

Den Kern der Arbeit bilden daher

- die Recherche und die Dokumentation der für die Modelle nötigen Grundlagen zur Beschreibung von Wellenausbreitungen, zu den Hydrocode-Simulationsverfahren und zu den Werkstoffeigenschaften,
- die Umsetzung bekannter Theorien in neue Werkstoffmodelle
  - für den Stahlfaserbeton und
  - für den Stahlbetonverbund.

Ein besonderer Wert wird bei der Entwicklung geeigneter konstitutiver Beziehungen für den Stahlfaserbeton auf die Beschreibung der Gleichungen für beliebig baupraktische Stahlfasergehalte bis 2.0 Vol.-%. Des weiteren besteht ein wesentlicher Vorteil in der Entwicklung der Materialmodelle in der anschaulichen physikalischen Interpretation aller Materialparameter. Somit sind die Modelle in der Lage, auf variierende Eigenschaften wie Druck- und Zugfestigkeit, Bruchflächenparameter, Bruchverzerrung oder Parameter der Zustandsgleichung einzugehen und beispielsweise auch Hochleistungsbetone durch Anpassen der Materialparameter beschreiben zu können.

Im numerischen Teil der Arbeit wird sowohl die Netzabhängigkeit der Lösung untersucht und kritisch diskutiert, als auch die Notwendigkeit der zwingend erforderlichen Elementierung im Millimeterbereich in der Computersimulation aufgrund der hohen Schockwellengeschwindigkeit aufgezeigt. Letztere Aussage unterstützt die Forderung nach einem geeigneten, diskret abgebildeten Kontinuumsmodell des Stahlbetonverbundes. Des weiteren verdeutlichen Gegenüberstellungen numerischer Berechnungsergebnisse mit an der WTD 52 durchgeführten Freifeldversuchen, bei denen Beton-, Stahlbeton-, Stahlfaserbeton- und bewehrte Stahlfaserbeton-Platten mit aufgelegten Sprengladungen belastet wurden, die Handhabung und Anwendungsmöglichkeiten der Materialmodelle mit Hydrocodes.

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt. Zunächst werden in *Kapitel 2* wesentliche Grundgleichungen aus der Kontinuumsmechanik zur Beschreibung des mechanischen Werkstoffverhaltens bereitgestellt. Hierzu gehören im Einzelnen die kinematischen Beziehungen, die Darstellungen von Spannungen und die stoffunabhängigen Bilanzgleichungen von Masse, Impuls und Energie. Deren mathematische Beziehungen werden als Sprungbedingung an einer diskontinuierlichen Schockfront erläutert. Den Abschluss bilden einige fundamentale konstitutive Beziehungen des Kontinuums für die Beschreibung der Zustandsgleichung und der Materialfestigkeit.

In *Kapitel 3* werden zum Verständnis der Entstehung und Ausbreitung von Schockwellen die Grundlagen der Wellenphänomene sowie die Zusammenhänge zwischen Materialsteifigkeiten und Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeiten beschrieben. Des Weiteren sind die fundamentalen Grundgleichungen und Eigenschaften der Reflektionen, Transmissionen und Refraktionen angegeben, die beim Auftreffen der Wellen an Kontaktflächen unterschiedlicher Medien entscheidenden Einfluss auf die Spannungszustände der beteiligten Materialien haben. Aus dem Detonationsvorgang einer Sprengladung entsteht eine Schockwelle, die anhand eines idealisierten Modells erläutert wird. Zustandsgleichung und Reaktionsgesetz des Sprengstoffs schließen das Kapitel ab.

Inhalt des *4. Kapitels* sind die numerischen Grundlagen eines Hydrocodes, in den die konstitutiven Beziehungen eingebettet werden. Zur Lösung der in partiellen Differentialgleichungen formulierten Erhaltungsgleichungen werden die verwendeten Methoden der räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsverfahren in Form des Finiten–Differenzen–Verfahrens und der expliziten Zeitintegration erläutert. Abschließend werden ausgewählte Aspekte zur Konvergenz, zur Konsistenz und zur Stabilität der Lösungsalgorithmen erörtert, die einen erheblichen Beitrag zur Genauigkeit des numerischen Simulationsverfahrens leisten.

Die für die Materialmodellierung wichtigen makromechanischen Werkstoffeigenschaften sind Bestandteil von *Kapitel 5*. Hierzu werden die aus der Literatur bekannten experimentellen Ergebnisse für den Stahlfaserbeton, für den Bewehrungsstahl und für den Stahlbetonverbund zusammengefasst. Neben den Eigenschaften, wie ein- und mehraxiales Materialverhalten oder Festigkeit, spielen die aus dynamischen Beanspruchungen resultierenden Verzerrungsratenabhängigkeiten in der Modellbildung eine erhebliche Rolle.

Im *Kapitel 6* werden die stoffabhängigen konstitutiven Beziehungen des Kontinuums eingeführt. Die für Hydrocodes typische entkoppelte Darstellung von Zustandsgleichung für das Kompressionsverhalten und vom Festigkeitsmodell für die Beschreibung des deviatorischen Materialverhaltens steht im Vordergrund der Herleitung. Es wird gezeigt, wie die aus den klassischen Materialtheorien bekannte Anwendung der spannungsbasierten Plastizitätstheorie in Verbindung mit einer isotropen Kontinuumsschädigungstheorie in die Hydrocode–Umgebung eingebettet ist.

Die konkrete Umsetzung der Theorien in geeignete Werkstoffmodelle für den Stahlfaserbeton und für den Stahlbetonverbund im *Kapitel 7* sind Kern dieser Arbeit. Das Ziel bei der Entwicklung geeigneter Werkstoffmodelle ist, die kontinuierliche Abbildung vom statischen bis zum hochdynamischen, vom elastischen bis zum plastisch-schädigenden Werkstoffverhalten zu gewährleisten. Insbesondere steht die Herleitung von wesentlichen Stoffparametern im Vordergrund, die zum einen das Materialverhalten so wirklichkeitsnah wie möglich und zum anderen so effizient in der Handhabung wie nötig charakterisieren. Zusätzlich erfolgt zur vollständigen Beschreibung des Stahlbetons eine Bestimmung der Materialparameter für Betonstahl nach DIN 488, die für ein bestehendes dynamisches Materialmodell für Metalle geeignet sind.

Anhand von ausgewählten Experimenten erfolgt eine Verifikation der zuvor hergeleiteten Materialmodelle, die im *Kapitel 8* vorgestellt werden. Die Anwendbarkeit wird durch eine Gegenüberstellung von numerischen Ergebnissen mit speziell durchgeführten Versuchen von angespannten unbewehrten und bewehrten (Stahlfaser-)Betonplatten verdeutlicht. Eine weitere Untersuchung zeigt, dass bei variierendem Stahlfasergehalt der Einsatz von stahlfaserverstärkten Betonkonstruktionen im Schutzbau optimiert werden kann.

Mit *Kapitel 9* schließt die Arbeit mit einer Diskussion der gewonnenen Ergebnisse ab und gibt einen Ausblick auf weitere interessante Aspekte zur Simulation von hochdynamischen Belastungen auf Konstruktionen aus betonartigen Werkstoffen.



## Kapitel 2

# Grundlagen der Kontinuumsmechanik

---

*Zur Einführung in die Thematik werden in diesem Kapitel wesentliche Gleichungen aus der Kontinuumsmechanik skizziert, mit denen die mechanische Beschreibung der Werkstoffe erfolgt. Zunächst werden die kinematischen Beziehungen erläutert, die die Bewegungen und Deformationen eines materiellen Körpers im Raum beschreiben. Anschließend werden der Spannungsvektor und der CAUCHYSche Spannungstensor definiert. Des Weiteren werden Invarianten und Eigenwerte vom Spannungstensor angegeben, die für eine Formulierung von Materialgesetzen notwendig sind. Ausgehend von den Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie, die stoffunabhängig sind und von jedem Material grundsätzlich erfüllt sein müssen, wird die an einer Schockfront auftretende Diskontinuität erläutert. Den Abschluss des Kapitels bilden die konstitutiven Beziehungen des Kontinuums für die Beschreibung der mathematisch notwendigen Zustandsgleichung und für die Beschreibung der Materialfestigkeit.*

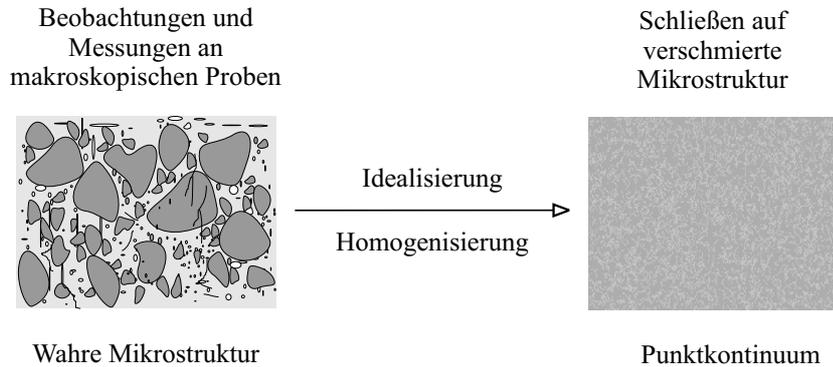
---

### 2.1 Allgemeines

Zur Beschreibung materieller Körper in der Kontinuumsmechanik ist die Idealisierung der real vorkommenden Struktur als materielles Punktkontinuum maßgebend (aus: STEIN & BARTHOLD 1995 [199]). Hierbei wird die *wahre Mikrostruktur* des Werkstoffs auf die Ebene einer *verschmierten (homogenisierten) Mikrostruktur* abgebildet (Abbildung 2.1). Somit bildet das als *materieller Körper*  $\mathcal{B}$  bezeichnete Kontinuum den Ausgangspunkt der Untersuchungen, an dem die klassischen Materialtheorien deformierbarer Körper wie beispielsweise

- die Elastizitätstheorie,
- die Plastizitätstheorie,
- die Viskoelastizitätstheorie oder
- die Viskoplastizitätstheorie

angewendet werden können. Der Rand dieses materiellen Punktkontinuums wird  $\partial\mathcal{B}$  genannt.



**Abbildung 2.1:** Modellierung des *materiellen Körpers*  $\mathcal{B}$  als Punktkontinuum (aus: STEIN & BARTHOLD 1995 [199])

Die mathematische Darstellung der Größen, die den dreidimensionalen Körper als Kontinuum beschreibt, erfolgt in tensorieller Absolutschreibweise. Die erforderlichen Grundlagen der Tensorrechnung können beispielsweise DE BOER 1978 [46], BETTEN 1987 [23] oder KLINGBEIL 1989 [120] entnommen werden. Für die Beschreibung der kontinuumsmechanischen Grundlagen wird auf die Lehrbücher von TRUESDELL & NOLL 1965 [210], ERINGEN 1967 [59], GREEN & ZERNA 1968 [87], BECKER & BÜRGER 1975 [18], STEIN & BARTHOLD 1995 [199], BASAR & WELCHERT 2000 [10] und HAUPT 2000 [94] sowie auf das Vorlesungsskript von EMMERLING 2002 [58] verwiesen.

Die Modellierung des Stahlfaserbetons und des Stahlbetonverbunds erfolgt im Rahmen dieser Arbeit möglichst allgemeingültig, wird aber aufgrund der numerischen Umsetzung in Hydrocodes entsprechend "angepasst". Beispielsweise wird die in der klassischen Kontinuumsmechanik übliche Art und Weise der Deformations- und der Spannungsbeschreibung, die sich auf eine Referenzkonfiguration zum Ausgangszeitpunkt  $t_0$  beziehen, in expliziten Zeitintegrationsverfahren (s.a. Kapitel 4.4) **nicht** verwendet.

## 2.2 Kinematik

### 2.2.1 Konfiguration und Lage des materiellen Körpers

Als Konfiguration eines Körpers  $\mathcal{B}$  versteht man eine stetige und ein-eindeutige Zuordnung materieller Punkte  $\mathcal{P}$  eines Körpers zu einer bestimmten Zeit  $t$  im Punkt  $\mathcal{O}$  des *EUKLIDischen Vektorraums*  $E^3$ :

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{P}, t). \quad (2.1)$$

Zur Beschreibung der Lage und der Bewegung jedes materiellen Punktes  $\mathcal{P}$  eines Körpers im Raum wird ein *kartesisches Koordinatensystem* als Bezugssystem eingeführt. Dadurch wird jeder

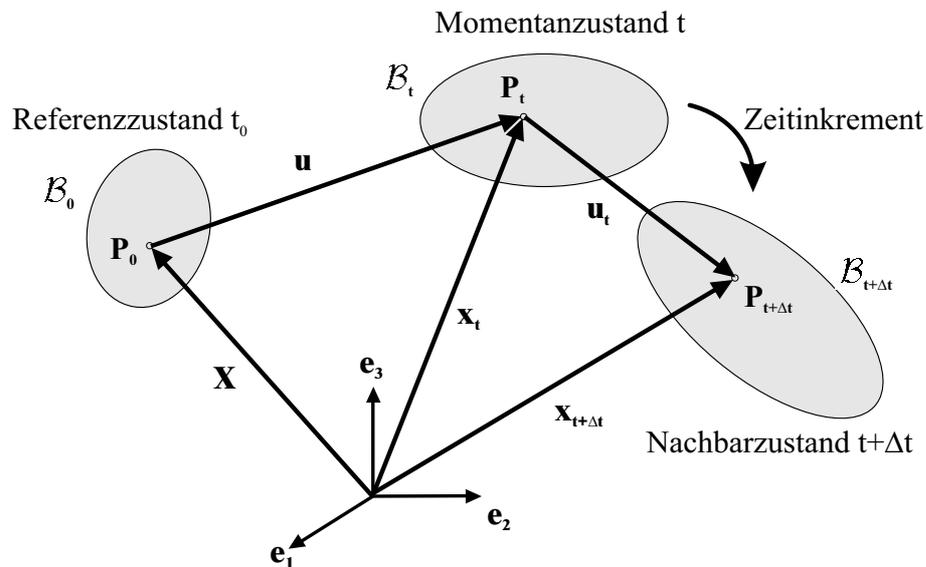
materielle Punkt im Raum durch einen Ortsvektor  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  beschrieben, wobei  $x^i$  die drei Koordinaten des Vektors bezüglich des rechtwinkligen kartesischen Basissystems  $\mathbf{e}_i$  mit den Basisvektoren  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sind.

Mit der Abbildung  $\mathcal{X}$  wird der materielle Punkt  $\mathcal{P}$  eines Körpers zum Zeitpunkt  $t$  auf den Ort  $\mathbf{x}$  mit

$$\mathbf{x} = \mathcal{X}(\mathcal{P}, t) \quad (2.2)$$

beschrieben. Damit kann für einen materiellen Punkt  $\mathcal{P}$  die zeitliche Bewegung im Raum dargestellt werden.

Abbildung 2.2 veranschaulicht die in der Kontinuumsmechanik verwendeten Konfigurationen zu verschiedenen Zeitpunkten, an denen die Abbildungsvorschriften  $\mathcal{X}$  zwischen der *Referenz-* und der *Momentankonfiguration* definiert werden. Mit  $\mathbf{u}$  wird die Verschiebung eines Punktes festgelegt.



**Abbildung 2.2:** Kinematik des materiellen Punktkontinuums

Bei den in Hydrocodes verwendeten expliziten Zeitintegrationsverfahren wird mit dem Zeitschritt  $\Delta t$  die Konfiguration im Nachbarzustand bestimmt. Damit lässt sich inkrementell die Verschiebung von der *Momentan-* in die *Nachbarkonfiguration* mit  $\mathbf{u}_t$  beschreiben. In weiteren Zeitschritten wird bei der Berechnung der Deformationen stets vom vorherigen Momentanzustand zum Zeitpunkt  $t$  in den neuen Nachbarzustand  $t + \Delta t$  geschlossen.

### 2.2.2 Materielle (LAGRANGESche) und räumliche (EULERSche) Betrachtungsweise

Die Bewegung eines Körpers lässt sich durch die Zuordnung von körperfesten und raumfesten Punkten beschreiben. Um die Eigenschaften  $\mathbf{A}$  einzelner materieller Punkte  $\mathcal{P}$  wie deren Verschiebungen oder deren Spannungen zu beliebigen Zeiten  $t$  auszudrücken, liegen zwei Betrachtungsweisen vor.

- LAGRANGESche Betrachtungsweise: Die materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  legen die Lage eines Punktes im Referenzzustand zur Zeit  $t = 0$  bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems fest (s. Abbildung 2.2). Zu jeder beliebigen Zeit  $t$  lassen sich einem materiellen Punkt mit den Koordinaten  $\mathbf{X}$  die Eigenschaften  $\mathbf{A}$  zuordnen

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t). \quad (2.3)$$

Entsprechend gilt für die materielle Zeitableitung

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t), \quad (2.4)$$

die bei der Ermittlung der Verzerrungsraten und der Spannungsraten benötigt wird. Bei der LAGRANGESchen Betrachtungsweise entspricht die materielle Ableitung der lokalen Ableitung, wobei die lokale Ableitung die zeitliche Änderung der Eigenschaft  $\mathbf{A}$  an einem bestimmten Ort  $\mathbf{x}$  angibt.

Das LAGRANGESche Bezugssystem ist ein mit einem materiellen Punkt gekoppelter Kontrollraum. Damit lässt sich seine pfadabhängige Last- und Deformationsgeschichte mit der Zeit verfolgen, was von Interesse bei der Beschreibung von Materialgesetzen ist.

- EULERSche Betrachtungsweise: Die räumliche Lage eines materiellen Punktes wird durch die raumfesten Koordinaten  $\mathbf{x}$  beschrieben. Die Bewegung eines Punktes wird aus dessen momentaner Lage abgebildet, die zu einem Zeitpunkt  $t$  eingenommen wird. Zu jeder beliebigen Zeit  $t$  lassen sich einem räumlichen Punkt mit den Koordinaten  $\mathbf{x}$  die Eigenschaften  $\mathbf{A}$  zuordnen

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

Bei der materiellen Zeitableitung für raumfeste Eigenschaften  $\mathbf{A}$  muss die Relativbewegung eines materiellen Punktes mit berücksichtigt werden. Daher erhält die lokale Ableitung einen zusätzlichen konvektiven Anteil. Es ergibt sich die Beziehung

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \nabla \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (2.6)$$

wobei  $\mathbf{v}$  einem Geschwindigkeitsfeld entspricht. Mit Hilfe dieser Beziehung lässt sich die EULERSche in die LAGRANGESche Betrachtungsweise überführen und umgekehrt.

Das EULERSche Bezugssystem ist ein Kontrollraum, durch den materielle Punkte strömen. Folglich sind die Materialgrenzen nicht mit der Berandung des Kontrollraums deckungsgleich. Die Eigenschaften der Materialien müssen im Kontrollraum über die Knoten interpoliert werden, was bei komplex aufgebauten Materialien zum einen zu einem erhöhten Rechenaufwand und zum anderen zu signifikanten Ungenauigkeiten führt, die lediglich mit Hilfe feinerer Elementdiskretisierungen verbessert werden können.

Für die Beschreibung von Festkörpern wird in dieser Arbeit ausschließlich die LAGRANGESche Betrachtungsweise verwendet. Materielle Größen, die sich während der Zeit verändern, müssen nicht durch feste Kontrollräume bewegt werden. Die Trennung der Materialien bleibt mit jedem Kontrollraum in der LAGRANGESchen Betrachtungsweise gewährleistet, was außerordentlich hilfreich bei der Modellierung von inhomogenen Festkörpern wie Stahlfaserbeton oder Stahlbetonverbund ist.

### 2.2.3 Deformations- und Verzerrungstensor

In der Beschreibung endlicher Deformationen eines Materialteilchens wurde in der Kontinuumsmechanik der materielle Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  eingeführt, der die lineare Abbildung des differentiellen Wegelements  $d\mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration auf das zugehörige differentielle Wegelement  $d\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration definiert:

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.7)$$

Für die Darstellung eines Verzerrungsmaßes wird das Wegelement der Anfangslänge  $d\mathbf{S}$  und das Wegelement der momentanen Länge  $d\mathbf{s}$  benötigt. Die Differenz der Quadrate der infinitesimalen Wegelemente bildet definitionsgemäß den GREEN–LAGRANGESchen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ :

$$ds^2 - dS^2 = 2 d\mathbf{X} \mathbf{E} d\mathbf{X}. \quad (2.8)$$

Werden die Wegelemente in Gleichung (2.8) durch die Deformationsgradienten ersetzt, so ergibt sich für den GREEN–LAGRANGESchen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (2.9)$$

wobei  $\mathbf{I}$  der Einheitsmatrix entspricht. Unter Verwendung des materiellen Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H} := \text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$  lässt sich der GREEN–LAGRANGESche Verzerrungstensor umformen in

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}). \quad (2.10)$$

Bei Annahme infinitesimal kleiner Deformationen kann der nichtlineare Anteil  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  vernachlässigt werden. In der geometrisch linearen Elastizitätstheorie ergibt sich für den Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( (\text{grad } \mathbf{u}) + (\text{grad } \mathbf{u})^T \right) \quad \text{bzw.} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad (2.11)$$

mit dem die Materialverformung angegeben wird.

Da in dieser Arbeit Problemstellungen behandelt werden, bei denen das Material wegen der sehr hohen Drücke fluidartiges Verhalten aufweist, sind klassische Deformationsbeschreibungen, die sich auf eine Referenzkonfiguration beziehen, nicht geeignet. Wie allgemein auch in Hydrocodes verwendet, erfolgt die Beschreibung der Deformationen mit Hilfe der Änderungsraten pro Zeitschritt. Die mit einem expliziten Verfahren bestimmte zeitliche Diskretisierung (vergleiche Kapitel 4) führt aufgrund von numerischen Stabilitätsforderungen zu infinitesimal kleinen Deformationen pro Zeitschritt. Die Summe der inkrementellen Deformationen über die Zeit ergibt die Gesamtdeformation der Struktur.

#### 2.2.4 Verzerrungsraten

Unter Verwendung der materiellen Zeitableitung  $\frac{D}{Dt}$  lassen sich die Verzerrungsraten  $\dot{\mathbf{R}}$  ermitteln. Dies erfolgt in den klassischen Materialtheorien über die Ableitung des Verschiebungsfeldes nach der Definition aus der 1. Stufe des RIVLIN-ERICKSEN Tensors (BECKER & BÜRGER 1975 [18]) mit

$$\frac{D}{Dt} [ds^2] = 2 \, d\mathbf{x} \, \dot{\mathbf{R}} \, d\mathbf{x}. \quad (2.12)$$

Daraus folgt der Zusammenhang zwischen der Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{R}}$  und dem GREENSchen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  aus den Gleichungen (2.8) und (2.9) zu

$$\dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{F}^{-1})^T \frac{D}{Dt} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.13)$$

Diese Formulierung der Verzerrungsraten geht von der Ableitung des Verschiebungsfeldes aus. Hydrocodes nutzen im Rahmen ihrer expliziten Zeitintegration über infinitesimal kleine Zeitelemente die direkte Berechnung über das Geschwindigkeitsfeld mit dem Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$

$$\text{grad } \mathbf{v} = \mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.14)$$

Hierin ist  $\mathbf{D}$  der symmetrische Deformationsratentensor und  $\mathbf{W}$  der schiefssymmetrische Rotationsraten- oder "spin"-Tensor des Geschwindigkeitsgradienten.

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad \text{und} \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)} \quad (2.15)$$

In Komponentenschreibweise werden die Tensoren  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{W}$  bezüglich ihrer kartesischen Koordinaten angegeben mit

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{bzw.} \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.16)$$

Die Deformationsrate  $\mathbf{D}$  wird oftmals als Verzerrungsratentensor  $\dot{\mathbf{E}}$  bezeichnet, da er zum CAUCHYSchen Spannungstensor  $\mathbf{T}$  konjugiert ist.

## 2.3 Beschreibung von Spannungen

Um die im folgenden Abschnitt 2.5 eingeführten Bilanzsätze der Mechanik und der Thermodynamik in der lokalen und somit in der starken Form angeben zu können, müssen zunächst die Spannungen als lokale mechanische Beanspruchung definiert werden.

### 2.3.1 Schnittspannungsvektor

Die inneren Kräfte im mechanisch beanspruchten kontinuierlich festen Körper  $\mathcal{B}$  werden nach dem EULERSchen Schnittprinzip durch fiktive Schnitte durch den Körper ermittelt. An einem infinitesimal kleinen Flächenelement  $\Delta A$  dieser Schnittfläche greift die Kraft  $\Delta \mathbf{p}$  an. Die Spannung (bzw. die Schnittkraftdichte)  $\mathbf{t}$  wirkt in einem Punkt  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$  mit dem endlichen Grenzwert

$$\mathbf{t} := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta A}. \quad (2.17)$$

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  hängt von der Lage der Tangentialebene, d.h. von dem äußeren Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Schnittfläche in  $\mathbf{x}$  ab. Er ist somit unabhängig von anderen Eigenschaften der Schnittfläche, wie beispielsweise der Krümmung. Es gilt der funktionale Zusammenhang

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \quad (2.18)$$

Die Spannungsvektoren sind an beiden Schnittufern betragsmäßig gleich, wirken aber in die entgegengesetzte Richtung.

### 2.3.2 Spannungstensor

Ohne nähere Herleitung wird mit Hilfe des CAUCHY-Theorems der CAUCHY-Spannungstensor  $\mathbf{T}$  als lineare Abbildung zwischen dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Schnittfläche und dem Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  in der Momentankonfiguration zum Zeitpunkt  $t$  eingeführt mit

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}. \quad (2.19)$$

Abbildung 2.3 zeigt den CAUCHY-Spannungstensor in seiner Komponentendarstellung in der Form

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j. \quad (2.20)$$

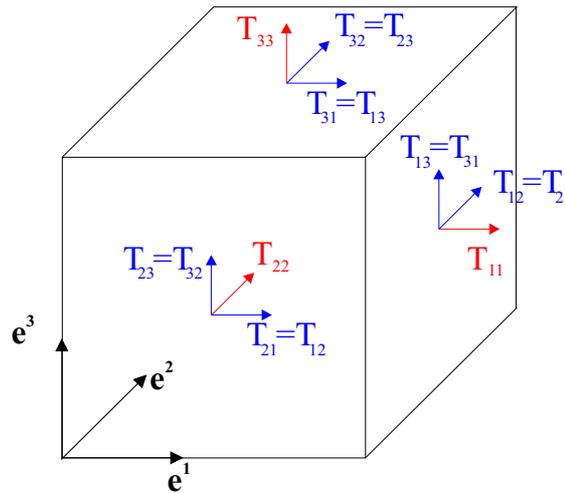


Abbildung 2.3: Darstellung der CAUCHYSchen Spannungskomponenten

bezüglich einer kartesischen Basis  $\mathbf{e}^j$ .

Im Vorgriff auf die Erhaltungsgleichungen (Ausschluss des Dralls in der starken Form der Erhaltungsgleichungen) sei an dieser Stelle angemerkt, dass der CAUCHY–Spannungstensor stets symmetrisch ist:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (2.21)$$

Weitere Spannungstensoren aus der Kontinuumsmechanik sind der erste PIOLA–KIRCHHOFFSche Spannungstensor und der zweite PIOLA–KIRCHHOFFSche Spannungstensor. Beide Tensoren bilden die Spannungen in der verformten Momentankonfiguration mit Bezug auf ihre unverformte Referenzkonfiguration ab. Wie schon bei der Beschreibung der Deformationen gezeigt, erfolgt die Berechnung der Spannungen in Hydrocodes **nicht** wie im klassischen Sinn mit Bezug auf die Referenzkonfiguration im Ausgangszustand zum Zeitpunkt  $t_0$ , sondern lediglich von einem Momentanzustand  $t$  auf einen Nachbarzustand  $t + \Delta t$ . Somit werden in dieser Arbeit die CAUCHY–Spannungen verwendet.

### 2.3.3 Objektive Spannungsraten

Um die Objektivität physikalischer Größen zu gewährleisten, wird in der klassischen Kontinuumsmechanik die Spannungsrates als die materielle Zeitableitung des zweiten PIOLA–KIRCHHOFFSchen Spannungstensors vereinbart, da dieser keine Beeinflussung durch Starrkörperrotationen und damit keine Beeinflussung seiner materiellen Zeitableitung erfährt.

Die Forderung der materiellen Objektivität wird wegen des fehlenden Bezuges der Momentanzur Referenzkonfiguration in Hydrocodes anders gelöst. Hier werden die Spannungen  $\mathbf{T}$  durch die Integration über die Zeit aus Spannungsraten  $\dot{\mathbf{T}}$  ermittelt:

$$\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \dot{\mathbf{T}}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2}. \quad (2.22)$$

Um die Invarianz der Materialgleichungen bei einer inkrementellen Vorgehensweise beizubehalten, dürfen Starrkörperrotationen keine Spannungszuwächse zulassen. Der Spannungstensor  $\mathbf{T}$  muss daher "mitrotieren", um die Objektivität zu bewahren. Ein möglicher invarianter (objektiver) Spannungstensor ist die JAUMANNsche Spannungsrate  $\hat{\mathbf{T}}$ , die diese Anpassung an die Objektivität gewährleistet:

$$\hat{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T}. \quad (2.23)$$

$\mathbf{W}$  ist der schiefsymmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$  aus Gleichung (2.15). In dieser Form können die Spannungen über die Zeit integriert werden.

Wie in Gleichung (2.22) angegeben, erfolgt die korrekte Form zur Berechnung der CAUCHYSchen Spannungsrate über die Ermittlung der Spannungsinkremente zum Zeitpunkt  $t^{n+1/2}$ . Es kann vorkommen, dass die mittels der Halb-Schritt-Rotation ( $\frac{1}{2} \Delta t$ ) berechnete Spannung nicht eindeutig auf der Fließfläche liegt, nachdem der zweite Halb-Schritt ausgeführt wurde (BENSON 1992 [21]). Eine einfache Form zur Bereinigung erfolgt über die von BENSON genannte unsaubere Zentrierung ("sloppy centering"), in dem der Zeitschritt der Rotation auf ein volles Zeitinkrement erhöht wird ( $\Delta t$  anstelle von  $\frac{1}{2} \Delta t$ ). Somit ergibt sich die Spannung zu

$$\boxed{\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \left( \dot{\mathbf{T}}^{n+1/2} + \mathbf{T}^n \mathbf{W}^{n+1/2} - \mathbf{W}^{n+1/2} \mathbf{T}^n \right) \Delta t.} \quad (2.24)$$

Die JAUMANNsche Spannungsrate ist die gängigste Form für Spannungsmaße in Hydrocodes. Sie ist einfach und effizient, hat aber den Nachteil, dass die Lösung bei der kinematischen Verfestigung in der  $J_2$ -Plastizität oszilliert (BENSON 1992 [21]). Da die kinematische Verfestigung in dieser Arbeit keine Berücksichtigung findet (s.a. Abschnitt 6.3.4), wird die JAUMANNsche Spannungsrate im folgenden verwendet.

## 2.4 Additive Aufspaltung des Spannungs- und Verzerrungstensors, Invarianten und Eigenwerte, Oktaederspannungen

### 2.4.1 Sphärische und deviatorische Spannungs- und Verzerrungstensoren

Jeder Tensor 2. Stufe kann durch additive Aufspaltung in einen sphärischen und in einen deviatorischen Anteil zerlegt werden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^K + \mathbf{A}^D. \quad (2.25)$$

Der als Kugeltensor  $\mathbf{A}^K$  bezeichnete sphärische Anteil ist definiert durch

$$\mathbf{A}^K := \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} \quad \text{mit} \quad \text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{I} \quad (2.26)$$

und besitzt nur Elemente auf der Hauptdiagonalen. Der deviatorische Anteil  $\mathbf{A}^D$  ergibt sich aus den Gleichungen (2.25) und (2.26) zu

$$\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \mathbf{A}^K. \quad (2.27)$$

Der Kugeltensor eines Spannungstensors wird auch als hydrostatischer Spannungstensor bezeichnet. Der Zusammenhang des hydrostatischen Spannungstensors zum hydrostatischen Druck  $p$  ergibt sich zu

$$p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{T}). \quad (2.28)$$

Daraus folgt für den Spannungsdeviator

$$\mathbf{T}^D = \mathbf{T} + p\mathbf{I} = \mathbf{T} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I}. \quad (2.29)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I} + \mathbf{T}^D = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}^D. \quad (2.30)$$

Der Kugeltensor eines Verzerrungstensors  $\mathbf{E}^K$  beschreibt eine reine Volumenverzerrung, während der Deviator  $\mathbf{E}^D$  eine reine Gestaltänderung repräsentiert. Die additive Zusammensetzung der Verzerrungstensoren ist analog zu den Spannungstensoren.

## 2.4.2 Hauptspannungen, Hauptverzerrungen

”Jeder symmetrische und reellwertige Tensor 2. Stufe im dreidimensionalen Raum hat drei orthogonale Hauptachsenrichtungen und drei reelle Eigenwerte” (aus: STEIN & BARTHOLD 1995 [199]). Die Hauptspannungen und die Hauptverzerrungen sind die Eigenwerte des jeweiligen Spannungs- bzw. Verzerrungstensors. Sie sind invariant gegenüber dem Bezugssystem.

Das Eigenwertproblem für einen Tensor 2. Stufe  $\mathbf{A}$  ist bekanntlich

$$(\mathbf{A} - \psi \mathbf{I}) \chi = 0. \quad (2.31)$$

$\psi$  ist Eigenwert und  $\chi$  ist Eigenvektor von  $\mathbf{A}$ . Gleichung (2.31) hat genau dann eine nichttriviale Lösung  $\chi \neq 0$ , wenn

$$\det(\mathbf{A} - \psi \mathbf{I}) = 0. \quad (2.32)$$

Das zugehörige charakteristische Polynom 3. Grades ergibt sich aus Gleichung (2.32) zu

$$\psi^3 - I_A \psi^2 + II_A \psi - III_A = 0 \quad (2.33)$$

mit den drei Hauptinvarianten

$$I_A = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \quad (2.34)$$

$$II_A = \frac{1}{2} \left( \operatorname{tr}^2(\mathbf{A}) - \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2) \right) = \psi_1 \cdot \psi_2 + \psi_2 \cdot \psi_3 + \psi_3 \cdot \psi_1 \quad (2.35)$$

$$III_A = \det(\mathbf{A}) = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3 \quad (2.36)$$

Die Eigenwerte  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$  sind die Lösungen des homogenen Gleichungssystems und charakterisieren die Nullstellen.

Im Speziellen lassen sich die Invarianten für verschiedene Tensoren darstellen. In den Tabellen 2.1 und 2.2 werden die Invarianten für die Hauptspannungen  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  und die Hauptverzerrungen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  ohne nähere Herleitung angegeben.

**Tabelle 2.1:** Invarianten der Hauptspannungen

Spannungstensor $\mathbf{T}$	Spannungsdeviator $\mathbf{T}^D$
$I_1 = T_1 + T_2 + T_3$	$J_1 = T_1^D + T_2^D + T_3^D$
$I_2 = T_1 \cdot T_2 + T_2 \cdot T_3 + T_3 \cdot T_1$	$J_2 = \frac{1}{2} ((T_1^D)^2 + (T_2^D)^2 + (T_3^D)^2)$ $= \frac{1}{6} ((T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2)$
$I_3 = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$	$J_3 = T_1^D \cdot T_2^D \cdot T_3^D$ $= \frac{1}{3} ((T_1^D)^3 + (T_2^D)^3 + (T_3^D)^3)$

**Tabelle 2.2:** Invarianten der Hauptverzerrungen

Verzerrungstensor $\mathbf{E}$	Verzerrungsdeviator $\mathbf{E}^D$
$I'_1 = E_1 + E_2 + E_3$	$J'_1 = E_1^D + E_2^D + E_3^D$
$I'_2 = E_1 \cdot E_2 + E_2 \cdot E_3 + E_3 \cdot E_1$	$J'_2 = \frac{1}{2} ((E_1^D)^2 + (E_2^D)^2 + (E_3^D)^2)$ $= \frac{1}{6} ((E_1 - E_2)^2 + (E_2 - E_3)^2 + (E_3 - E_1)^2)$
$I'_3 = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$	$J'_3 = E_1^D \cdot E_2^D \cdot E_3^D$ $= \frac{1}{3} ((E_1^D)^3 + (E_2^D)^3 + (E_3^D)^3)$

Eine weitere Form der Spannungsbeschreibung erfolgt mit den Oktaederspannungen  $\sigma_{oct}$  und  $\tau_{oct}$  sowie dem Lodge–Winkel  $\theta$ . Ohne weitere Herleitung sind hier die Definitionen der Spannungen in der Oktaederebene (s.a. Abbildung 2.4) eingeführt:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1 \quad (\text{Oktaedernormalspannung}) \quad (2.37)$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (\text{Oktaederschubspannung}) \quad (2.38)$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}}, \quad 0 \leq \theta \leq 60 \quad (\text{Lodge–Winkel}) \quad (2.39)$$

Die drei Größen  $\sigma_{oct}$ ,  $\tau_{oct}$  und  $\theta$  sind somit in der Darstellungsform eine Alternative zu den Spannungsinvarianten und haben den Vorteil, dass sie neben der mechanischen auch eine geometrische Bedeutung im Hauptspannungsraum haben. In Abbildung 2.4 liegt der Punkt  $N$  auf der hydrostatischen Achse. Der Punkt  $P$  liegt im Spannungsraum und stellt einen beliebigen Spannungszustand dar, der von allen drei Größen  $\sigma_{oct}$ ,  $\tau_{oct}$  und  $\theta$  abhängig ist.

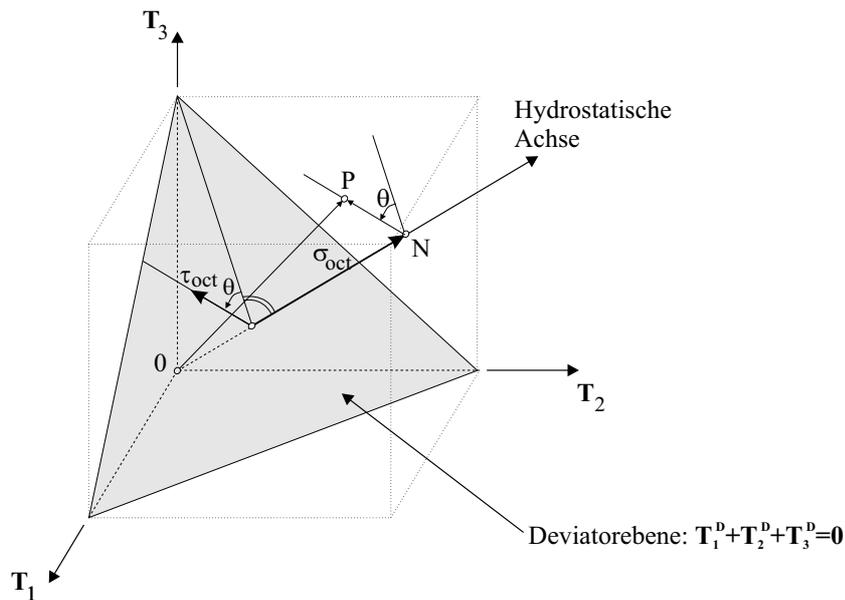


Abbildung 2.4: Darstellung der Spannungen in der Oktaederebene

## 2.5 Bilanzsätze der Mechanik und der Thermodynamik

Im folgenden Abschnitt werden die Bilanzsätze für Masse, Impuls, Energie und Entropie angegeben, die für jeden beliebigen materiellen Körper  $\mathcal{B}$  erfüllt sein müssen. Daher sind sie grundlegende Axiome der Kontinuumsmechanik, die die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe eines bestimmten Volumens mit der Zufuhr durch die Oberfläche, der Zufuhr im Inneren und der Produktion im Inneren des Volumens bilanzieren.

Während die Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie als Erhaltungsgleichungen bezeichnet werden, ist im Gegensatz dazu die Entropie eine Zustandsgröße des Systems, die keiner Erhaltungsaussage genügen muss, vergleiche u.a. TRUESDELL & NOLL 1965 [210], GREEN & ZERNA 1968 [87], STEIN & BARTHOLD 1995 [199] oder HAUPT 2000 [94].

Sämtliche Formulierungen der Erhaltungsgrößen gehen von einer globalen oder integralen Aussage über das gesamte Volumen eines beliebigen Kontinuums aus. Daraus leitet sich die lokale bzw. differentielle Form der Bilanzsätze ab, die in jedem betrachteten infinitesimal kleinen Punkt erfüllt sein muss.

Die in Hydrocodes übliche Formulierung in der differentiellen auch sogenannten "starken" Form benötigt keine Drehimpulserhaltung als zusätzliche Aussage, da aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors die Erhaltung des Drehimpulses bereits erfüllt ist. In der integralen auch sogenannten "schwachen" Form kann die Drehimpulserhaltung als zusätzliche Gleichung verwendet werden.

### 2.5.1 Massenbilanz

Die Massenbilanz nach EULER und D'ALEMBERT wird auch als Kontinuitätsbedingung bezeichnet. Kontinuität bedeutet, dass die Masse  $m$  des Körpers  $\mathcal{B}$  im Gesamtsystem sowohl in der Ausgangskonfiguration als auch zu jeder anderen Konfiguration konstant bleibt. Die Masse verändert sich zeitlich während des Deformationsprozesses nicht.

$$\boxed{\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{D\rho}{Dt} = 0} \quad (2.40)$$

Bei hochdynamischen Belastungen wie Detonationen treten Massentransporte auf, die zum einen die Simulation der Detonation selber als auch das Ablösen von Bruchstücken aus der betonartigen Struktur betreffen können. Es wird aus der Kontinuitätsbedingung deutlich, dass die Anwendung der Massenbilanz im Rahmen von Hydrocodeberechnungen nur für isolierte Systeme gültig ist.

### 2.5.2 Impulsbilanz

Der Impuls eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  mit dem Volumen  $V$  beschreibt das Geschwindigkeitsfeld in Verbindung mit der Bewegung der Masse im Raum. Deren Bewegungsgröße  $\mathbf{I}$  ist definiert durch

$$\mathbf{I} := \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{v} dV, \quad (2.41)$$

wobei  $\mathbf{I}$  eine Erhaltungsgröße darstellt, deren zeitliche Änderung gleich der Summe aller angreifenden Rand- und Volumenkräfte ist.

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \left( \mathbf{b} - \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) = 0} \quad (2.42)$$

$\mathbf{b}$  ist eine massenbezogene Beschleunigung, wie beispielsweise die Erdbeschleunigung.

Die Erhaltung der Bewegungsgröße wird auch als dynamisches Kräftegleichgewicht in räumlicher Darstellung bezeichnet.

### 2.5.3 Energiebilanz

Ein elementares Axiom in der Kontinuumsmechanik ist die Energieerhaltung, die für jedes abgeschlossene System gilt. Im allgemeinen treten bei Deformationsprozessen neben den mechanischen Energien, wie kinetischer Energie  $W_{kin}$  und potentieller Energie  $W_{pot}$ , weitere Energieformen auf. Insbesondere thermische Einflüsse, wie der Wärmefluss  $\mathbf{q}$  über die Oberfläche und die Wärmequelle  $r$  im Inneren eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  mit dem Volumen  $V$  fließen mit in die Überlegungen der Energiebetrachtung ein.

Die gesamte Energie  $W_{ges}$  eines Systems ist in der Form

$$W_{ges} := \int_{\mathcal{B}} \rho i dV \quad (2.43)$$

gegeben. Voraussetzung ist die Existenz einer massenspezifischen Energiedichtefunktion  $i$ .

Die gesamte Energie  $W_{ges}$  ist eine Erhaltungsgröße, deren zeitliche Änderung der Leistung aller angreifenden Rand- und Volumenkräfte sowie der von aussen zugeführten Wärme ist. Damit setzt sich die Änderung der gesamten Energie  $dW_{ges}$  aus der Änderung der kinetischen  $dW_{kin}$ , der potentiellen  $dW_{pot}$  und der inneren Energie  $dU$  zusammen:

$$dW_{ges} := dW_{kin} + dW_{pot} + dU. \quad (2.44)$$

Die innere Energie  $U$  ist definiert durch

$$U := \int_{\mathcal{B}} \rho e dV. \quad (2.45)$$

Hierbei wird die Existenz einer inneren Energiedichtefunktion  $e$  vorausgesetzt.

Der Bilanzsatz der inneren Energie, der auch als 1. Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnet wird, besagt, dass sich die zeitliche Änderung der inneren Energie aus der Summe der Änderung der inneren Spannungsleistung  $\Pi$  (auch: Änderung der Formänderungsarbeit) und dem Wärmetransport  $Q$  zusammensetzt. Im Falle der Annahmen, dass ein ruhendes System und eine konstante potentielle Energie vorliegt, gilt für die zeitliche Änderung der inneren Energie:

$$de = d\Pi + dQ. \quad (2.46)$$

Die differentielle Form für jeden Punkt des Kontinuums wird angegeben mit:

$$\boxed{\frac{De}{Dt} = r - \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{T} : \operatorname{div} \mathbf{v})}. \quad (2.47)$$

#### 2.5.4 Dissipationspostulat

Als Dissipation wird die Umwandlung von Spannungsenergie in nicht-mechanische Energie bezeichnet. Dabei wird ein Teil in thermische Energie, wie beispielsweise Wärme, umgewandelt. Dieses Postulat gibt die Prozessrichtung der Energie vor. Eine Umwandlung von thermischer Energie in mechanische Energie ist ausgeschlossen. Damit muss die Entropie für einen beliebigen nicht umkehrbaren Prozess stets größer als Null sein. Diese Aussage kommt in der Entropieungleichung nach CLAUSIUS–DUHEM zum Ausdruck.

Hierzu wird zunächst die Entropie  $S$  als massenspezifisch verteilte Feldgröße eines Körpers  $\mathcal{B}$  mit dem Volumen  $V$  eingeführt.

$$S := \int_{\mathcal{B}} \rho s dV. \quad (2.48)$$

Der Term  $s$  ist die massenspezifische Entropiedichte. Die zeitliche Änderung der Entropie  $S$  entspricht der Summe der Entropiezufuhr durch Wärmeproduktion im Innern und durch den Wärmeflußvektor über die Oberfläche sowie der Entropieproduktion im Innern. Die CLAUSIUS–DUHEM–Ungleichung lautet:

$$\boxed{\frac{DS}{Dt} = \frac{r}{\Theta} - \frac{1}{\rho\Theta} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{\rho\Theta^2} \mathbf{q} \operatorname{grad} \Theta \geq 0} . \quad (2.49)$$

$\Theta$  steht für die absolute Temperatur. Das Gleichheitszeichen in Gleichung (2.49) steht für den Fall des reversiblen Prozesses und tritt in der Natur nur als Grenzfall auf.

Materialgesetze müssen dem Dissipationspostulat des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik genügen. Die Entropiebilanz aus Gleichung (2.49) liefert somit eine zusätzlich zu erfüllende Gleichung, die die Umwandlung der mechanischen Energie in eine andere Energieform mathematisch beschreibt.

Der im Rahmen dieser Arbeit verwendete Hydrocode AUTODYN 2002 [32] vernachlässigt die Wärmeleitung. Die zeitliche Änderung der spezifischen Entropie  $S$  aus Gleichung (2.49) ist somit gleich Null gesetzt.

Die Energiebilanz in der Materialmodellierung kann vernachlässigt werden, wenn

1. entweder ein adiabatischer bzw. ein isentroper thermomechanischer Prozess vorliegt,
2. oder ein Wärmefluss aufgrund des Zeitraums, in dem der Deformationsprozess stattfindet, praktisch nicht vorhanden ist.

In dieser Arbeit werden hochdynamische Belastungen untersucht, die aus Detonationen oder aus Impaktvorgängen hervorgehen. Eine Berücksichtigung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik ist bei der Simulation einer Detonation von Interesse, liegt aber nicht im Fokus dieser Arbeit. Für die Simulation von Detonationen wird auf bekannte Materialmodelle des Sprengstoffs zurückgegriffen, die in Materialbibliotheken gängiger Hydrocodes vorhanden sind (s.a. Abschnitt 3.2).

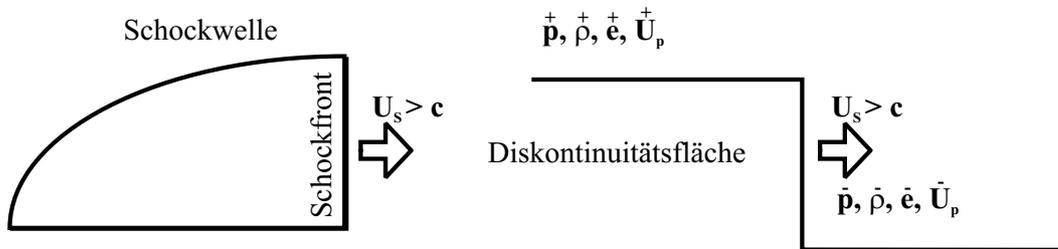
Die numerischen Simulationen der hochdynamischen Prozesse aus Detonationen oder Impaktvorgängen erfolgen in einem Zeitraum von maximal Millisekunden. Ein Wärmeaustausch in diesem Zeitfenster, der auch einen Einfluss auf die Wellenfortpflanzung oder die Materialbeschreibung hat, ist daher vernachlässigbar. Es liegt quasi eine adiabatische Zustandsänderung vor. Da außerdem Materialgleichungen verwendet werden, die keine Entropie als Zustandsgröße verwenden, muss eine explizite Berechnung der CLAUSIUS–DUHEM Ungleichung nicht erfolgen.

## 2.6 Stationäre Schockfront – Diskontinuitätsfläche

Für die im Abschnitt 2.7 nachfolgende Einführung von stoffabhängigen konstitutiven Beziehungen wird zunächst die Bedeutung der Diskontinuitätsfläche an einer stationären Schock-

front erläutert. Das besondere Merkmal jeder Schockwelle ist die Schockfront. Sie bildet den Kopf der Schockwelle, ist gekennzeichnet durch den steilen Anstieg und breitet sich mit Überschallgeschwindigkeit aus. In der Physik wird die Schockwelle auch als MACH-Welle bezeichnet. Der sprunghafte Anstieg der Schockwelle an der Schockfront kennzeichnet die Diskontinuität der Zustandsgröße vor und nach der Schockfront.

In Abbildung 2.5 ist die Idealisierung einer Schockwelle mit Schockfront gezeigt. Die Schockwelle breitet sich mit der Schockwellengeschwindigkeit  $U_s$  an der Schockfront aus. Daneben sind die grundsätzlichen Verhältnisse der Zustandsgrößen des hydrostatischen Druckes  $p$ , der Materialdichte  $\rho$ , der inneren Energie  $e$  und der Partikelgeschwindigkeit  $U_p$  an der Diskontinuitätsfläche skizziert. Die mit dem mathematischen Minuszeichen ( $-$ ) indizierten Zustandsgrößen charakterisieren den Ausgangszustand des Materials. Die veränderten Zustände nach dem Schockdurchgang werden mit dem mathematischen Pluszeichen ( $+$ ) bezeichnet.



**Abbildung 2.5:** Idealisierte Darstellung der Schockfront mit Zustandsgrößen an der Diskontinuitätsfläche

Die Formulierung der Bilanzgleichungen (2.40), (2.42) und (2.47) an der Diskontinuitätsfläche ergibt die RANKINE-HUGONIOT-Gleichungen (2.50), (2.51) und (2.52) nach RANKINE 1870 [171] und HUGONIOT 1887 [108] zur Beschreibung der Sprungbedingungen über eine Schockwelle.

Mit der vereinfachenden Annahme, dass eine eindimensionale Ausbreitung der stationären Schockfront vorliegt, ergibt sich für die Massenbilanz:

$$\bar{\rho} (U_s - \bar{U}_p) = \bar{\rho}^+ (U_s - \bar{U}_p^+) . \quad (2.50)$$

Damit gilt für die Impulsbilanz unter Vernachlässigung der deviatorischen Anteile ( $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$ ):

$$\bar{\rho} (U_s - \bar{U}_p) (U_s - \bar{U}_p) = \bar{p}^+ - \bar{p} . \quad (2.51)$$

Die lokale Form der Energieerhaltung ergibt sich unter der Bedingung, dass der Durchlaufprozess einer Schockwelle im Material adiabatisch abläuft, und unter der Berücksichtigung der kinetischen Energie zu:

$$(\bar{e}^+ - \bar{e}) = \frac{\bar{p}^+ \bar{U}_p^+ - \bar{p} \bar{U}_p}{\bar{\rho} (U_s - \bar{U}_p)} - \frac{1}{2} (\bar{U}_p^+ - \bar{U}_p) . \quad (2.52)$$

## 2.7 Konstitutive Beziehungen des Kontinuums

Nachdem die stoffunabhängigen kinematischen Beziehungen und die ebenfalls stoffunabhängigen Bilanzsätze der Kontinuumsmechanik eingeführt wurden, erfolgt in diesem Abschnitt die Beschreibung der stoffabhängigen konstitutiven Beziehungen des Kontinuums.

Bei dem anstehenden zu lösenden Problem gilt es, im Raum insgesamt 11 Unbekannte, nämlich die 3 Änderungsraten des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{v}$ , die 1 Änderungsrate der inneren Energiedichte  $e$ , die 6 Änderungsraten des symmetrischen CAUCHY–Spannungstensors sowie die 1 Änderungsrate der Dichte  $\rho$  zu bestimmen. Dem gegenüber stehen 3 Gleichgewichtsbedingungen, die aus der Impulsbilanz aus Gleichung (2.42) hervorgegangen sind, sowie jeweils 1 Gleichung aus der Massenbilanz (Gleichung (2.40)) und aus der Energiebilanz (Gleichung (2.47)).

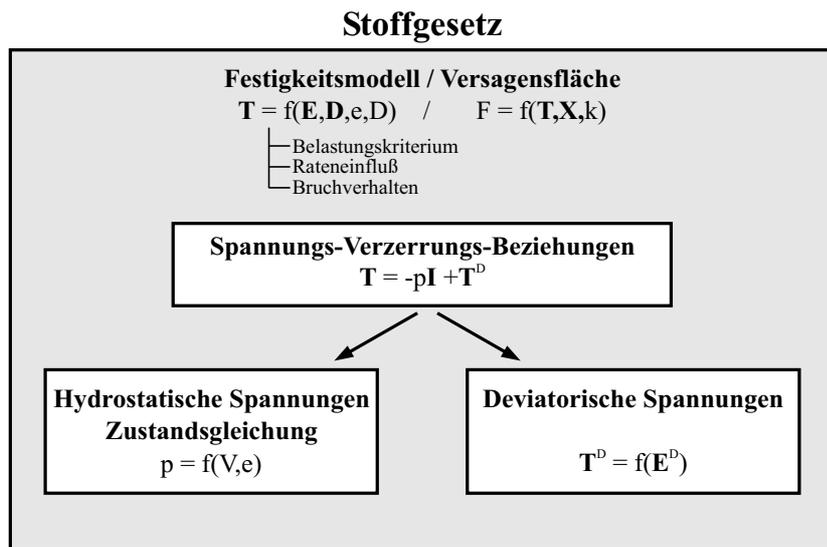
Den Kern eines Stoffgesetzes bildet eine Beziehung zwischen den Spannungen und den Verzerrungen des Werkstoffs. In Hydrocodes ist es üblich, die Spannungs–Verzerrungs–Beziehungen des Materialmodells additiv aufzuspalten in eine hydrostatische Komponente, die mittels einer *Zustandsgleichung* die Materialeigenschaften beschreibt, und in eine deviatorische Komponente, die die deviatorischen Spannungen mit den gestaltändernden Verzerrungen verbindet. Im materialabhängigen *Festigkeitsmodell* lassen sich die vom Material aufnehmbaren Schubspannungen beschreiben. Die Spannungs–Verzerrungs–Beziehung eines Werkstoffs wird durch die Versagensfläche umrahmt, die die Begrenzung der möglichen Spannungskombinationen darstellt, so dass lediglich Spannungen innerhalb bzw. genau auf der Versagensfläche auftreten können. Auf dieser Basis sind zwei weitere Ausdrücke gegeben, die die Menge der Gleichungen und die Werkstoffbeschreibung vervollständigen. Diese Gleichungen sind von dem betrachteten Material abhängig und werden daher stoffabhängige Gleichungen bzw. konstitutive Beziehungen des Materials genannt. Die aufgesplitteten Anteile des Stoffgesetzes sind:

1. die Zustandsgleichung  $p = f(V, e)$  (engl.: Equation of State = EoS),
2. das Festigkeitsmodell  $\mathbf{T} = f(\mathbf{E}, \mathbf{D}, e, D)$ .

Die Zusammenhänge der als Stoffgesetz bekannten Werkstoffbeschreibung sind übersichtlich in Abbildung 2.6 dargestellt.

Ein Werkstoff **ohne** (Scher-)Festigkeit ( $\mathbf{T}^D = 0$ ) unterliegt einem fluidartigen, hydrodynamischen Verhalten. Bei Festkörpern liegt dies in den seltensten Fällen oder nur bei extrem hohen hydrostatischen Drücken vor. Ein Werkstoff **mit** (Scher-)Festigkeit ( $\mathbf{T}^D \neq 0$ ) verhält sich bei Laststeigerung bis zum Erreichen einer materialspezifischen Fließspannung  $k$  überwiegend elastisch und verformt sich darüber hinaus plastisch.

Charakteristiken von **Zustandsgleichung** und **Festigkeitsmodell** werden im Kapitel 6 zusammen mit den klassischen Materialtheorien der isotropen Elasto–Plastizität und der isotro-



**Abbildung 2.6:** Aufbau und Abhängigkeiten von Werkstoffgesetzen

pen Elasto-Schädigung insbesondere mit der Herleitung der Gleichungen für die Umsetzung der Theorie in die Hydrocode-Formulierung von Festkörpermodellen detailliert erläutert.

---

## Kapitel 3

# Grundlagen der Wellenausbreitung und Entstehung von Schockwellen durch Detonationen

---

*Zum Verständnis der Entstehung von Schockwellen durch Detonationen werden zunächst die Grundlagen der Wellenausbreitung vorangestellt. Der Zusammenhang zwischen Materialsteifigkeiten und Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeiten ist hierbei von enormer Bedeutung für die Beschreibung des dynamischen Werkstoffverhaltens. Im Hinblick auf den Stahlbeton bzw. den bewehrten Stahlfaserbeton werden die Phänomene der Reflektion, Transmission und Refraktion bei der Wellenfortpflanzung an den Kontaktflächen unterschiedlicher Medien näher erläutert, da diese Effekte einen Einfluss auf den Spannungszustand der beteiligten Materialien haben. Ausgehend von einer linear-elastischen Welle lassen sich die Eigenschaften nichtlinearer Wellen bis zu Schockwellen erklären. Ziel dieses Kapitels ist die Beschreibung eines idealisierten Modells, das den Detonationsvorgang einer Sprengladung abbildet. In diesem Zusammenhang lassen sich die verwendete Zustandsgleichung und das Reaktionsgesetz angeben.*

---

### 3.1 Charakteristische Phänomene der Wellenausbreitung

#### 3.1.1 Allgemeines

Wird ein Körper impulsartigen Belastungen ausgesetzt, so entstehen Spannungswellen im Körper, die die kinetische und potentielle Energie transportieren. Hierbei handelt es sich um verschiedene Formen von Festkörperwellen, wie beispielsweise Kompressionswellen, Scherwellen oder Oberflächenwellen, die unterschiedliche Eigenschaften und Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten aufweisen. Die Schwingungsbewegung verläuft längs (longitudinal) oder quer (transversal) zur Ausbreitungsrichtung. Abbildung 3.1 zeigt die Longitudinalwelle, die Transversalwelle und die Rayleighwelle (Oberflächenwelle) sowie ihre Ausbreitung bei lokalem Impakt. Je nach Belastungsart, Spannungsamplitude und Materialeigenschaft liegt eine elastische Welle, eine plastische Welle oder eine Schockwelle im Medium vor (vgl. Abbildung 3.2).

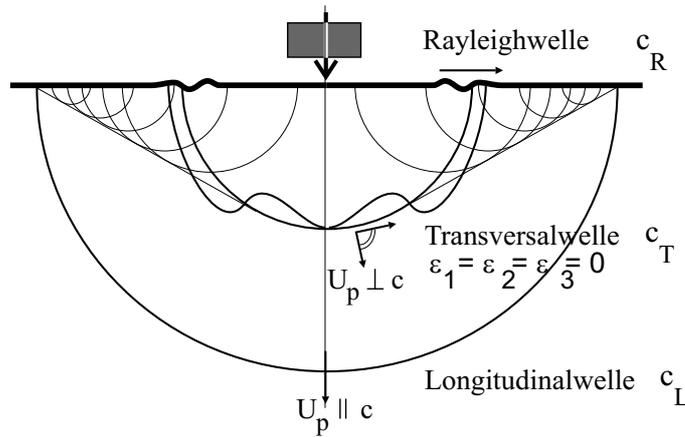


Abbildung 3.1: Wellenanteile bei einem Impakt auf Festkörper (aus: MEYERS 1994 [151])

Abbildung 3.2 zeigt auf der linken Seite das Kompressionsverhalten eines Materials in der Form einer HUGONIOT-Kurve. Die Wellengeschwindigkeit errechnet sich proportional zum Differential der Änderung der hydrostatischen Spannung  $\partial p$  zur Änderung der Volumenverzerrung  $\partial \varepsilon_V$ . Bis zum HUGONIOT-Elastic-Limit ( $p_{HEL}$ ), der elastischen Spannungsgrenze (OA), liegt elastisches Materialverhalten vor. Darüber verformt sich der Werkstoff plastisch (ABC). Die Steigung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung flacht oberhalb von  $p_{HEL}$  ab. Damit ist auch die plastische Wellengeschwindigkeit  $c_{pl}$  kleiner als die elastische Wellengeschwindigkeit  $c_{el}$ . Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass die Spannungs-Verzerrungs-Kurve die virtuelle Verlängerung des elastischen Astes im Punkt C schneidet. Liegt demnach eine Spannung oberhalb des Punktes C vor, so überholt die plastische Wellengeschwindigkeit den elastischen Vorläufer – es entwickelt sich eine Schockwelle.

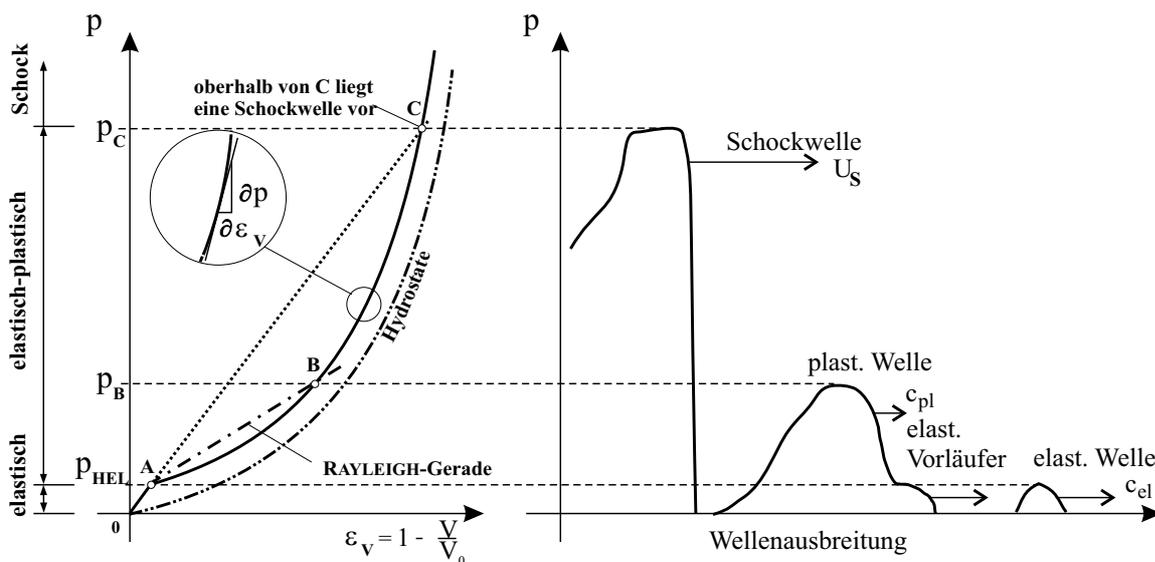


Abbildung 3.2: HUGONIOT-Kurve und Wellenausbreitung: elastische und plastische Welle, Schockwelle

An Grenzflächen unterschiedlicher Werkstoffe treten bei der Wellenfortpflanzung aufgrund der Impedanzunterschiede Phänomene der Reflektion, Transmission und Refraktion (Brechung) auf. Diese Effekte haben einen Einfluss auf den Spannungszustand der beteiligten Materialien.

Beispiele von beobachtbaren Effekten sind:

- Beim Auftreffen einer Festkörperwelle auf eine freie Oberfläche findet eine Reflektion der Welle mit einer Belastungsumkehr statt. In der Luft ist annähernd keine transmittierte Welle feststellbar.
- Trifft eine Luftdruckwelle auf einen Körper, der andere Fall eines Grenzflächenproblems an einer freien Oberfläche, so ist die reflektierte Welle ebenfalls eine Druckwelle mit gleicher Intensität.

Die Arbeit beschränkt sich auf die Beschreibung von Festkörperwellen. Bei der Betrachtung der räumlichen Wellenausbreitung im Stahlbeton bzw. im bewehrten Stahlfaserbeton nach einer Detonationsbelastung können die zu untersuchenden Effekte an Grenzflächen drei Grundtypen des Auftreffens einer Festkörperwelle zugeordnet werden:

1. auf eine freie Oberfläche,
2. auf die Grenzen zweier unterschiedlicher Materialien mit *idealem* Verbund und
3. auf die Grenzen zweier unterschiedlicher Materialien mit *gelöstem* Verbund.

Zusätzlichen Einfluss auf die Wellenfortpflanzung und die Spannungszustände in den Materialien haben die Einfallswinkel der Wellenfront auf die Grenzfläche. Ebenso hat die Art der Welle Konsequenzen auf die Randbedingungen: Während bei den beiden ersten Grundsituationen keine Unterscheidung zwischen Zug- und Druckwelle getroffen wird, ist dies bei der Beschreibung der Phänomene von Transmission und Reflektion bei gelöstem Verbund von entscheidender Bedeutung. Hierbei ist die Fallunterscheidung, ob eine Zug- oder Druckwelle vorliegt, unumgänglich. Ausführliche Beschreibungen zur Wellentheorie enthalten u.a. die Publikationen von KOLSKY 1953 [121], von RINEHART 1975 [178], von ZUKAS 1990 [231] oder von MEYERS 1994 [151].

### 3.1.2 Wellen im linear-elastischen Bereich

Unter der Annahme, dass im elastischen Bereich die einaxiale Spannung  $\sigma$  eine eindeutige Funktion der einaxialen Verzerrung  $\varepsilon$  ist (HOOKEsches Gesetz), leitet sich die grundlegende Form einer eindimensionalen elastischen Welle aus den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls ab (MEYERS 1994 [151]) und lässt sich mit der partiellen Differentialgleichung angeben zu

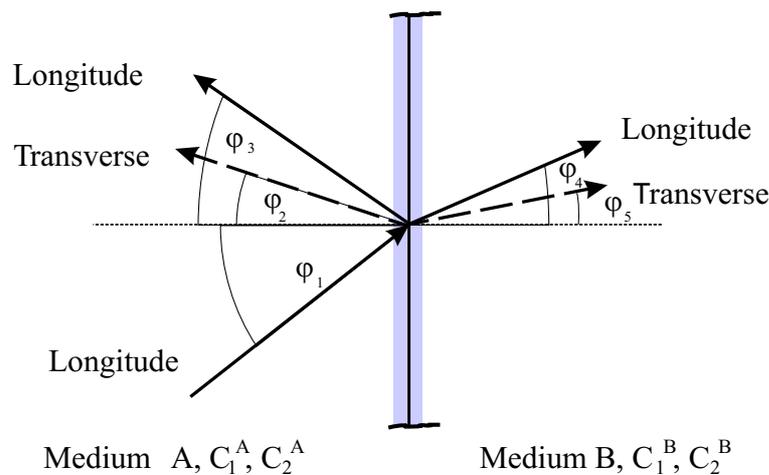
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c_{el,L}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{mit} \quad c_{el,L} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} . \quad (3.1)$$

Charakteristisch für die unterschiedlichen Wellen sind ihre im elastischen Bereich konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von den Materialparametern. Tabelle 3.1 fasst die Beziehungen zwischen Wellentyp, Materialparameter und Wellengeschwindigkeit zusammen.

**Tabelle 3.1:** Zusammenhang zwischen Wellentyp, Ausbreitungsgeschwindigkeit und elastischen Moduli

Wellentyp	Ausbreitungsgeschwindigkeit	maßgeblicher elastischer Modul
hydrodynamische Kompression eines Fluids	$c_B = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$	Kompressionsmodul $K$
Scherung eines Festkörpers	$c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	Schubmodul $G$
Longitudinalwelle im ausgedehnten Festkörper	$c_p = \sqrt{\frac{L}{\rho}}$	Longitudinalwellenmodul $L$
Longitudinalwelle im dünnen Stab	$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	Elastizitätsmodul $E$

Die unter dem Winkel  $\varphi_1$  auf die Grenzfläche zweier unterschiedlicher Medien  $A$  und  $B$  auftreffende Longitudinalwelle ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Für die nachfolgenden Beschreibungen werden die Materialeigenschaften durch hochgestellte Indizes unterschieden. Die Wellengeschwindigkeiten  $c$  für das Material  $A$  werden für die einfallende Longitudinalwelle mit  $c_1^A$ , für die reflektierte Transversalwelle mit  $c_2^A$  und für die reflektierte Longitudinalwelle wiederum mit  $c_3^A$  bezeichnet. Analog gilt dies für die transmittierten Wellen im Medium  $B$ ,  $c_1^B$  und  $c_2^B$ . In Abbildung 3.3 ist exemplarisch eine mögliche Winkelanordnung gezeigt. Der Winkel  $\varphi_1$  für die einfallende Welle ist variierbar. Die dargestellte Grenzfläche gilt sowohl für den idealen als auch den gelösten Verbund. Die nachfolgend gemachten Aussagen gelten auch, wenn die Welle auf eine freie Oberfläche trifft.



**Abbildung 3.3:** Schräg auf eine Grenzfläche treffende Longitudinalwelle zweier Medien unterschiedlicher Impedanz

Ursache für Reflektionen und Refraktionen an den Grenzflächen sind unterschiedliche Impedanzen der Materialien. Die Impedanz  $I_m$  wird als Produkt aus der Dichte  $\rho$  und der Wellengeschwindigkeit  $c$  gebildet

$$I_m = c \cdot \rho = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \rho = \sqrt{E \cdot \rho} \quad , \quad (3.2)$$

wobei die geltende Wellengeschwindigkeit mit den in Tabelle 3.1 angegebenen Gleichungen ermittelt wird. Beim Übergang einer Welle über die Materialgrenzen sind zwei Randbedingungen an der Grenzfläche einzuhalten: Die Spannungen und die Partikelgeschwindigkeiten müssen auf beiden Seiten identisch sein. Mathematisch formuliert ergibt sich für die Spannungen der einfallenden ( $\sigma_I$ ), reflektierten ( $\sigma_R$ ) und transmittierten Welle ( $\sigma_T$ ) die Beziehung

$$\sigma_I + \sigma_R = \sigma_T \quad . \quad (3.3)$$

Für die Partikelgeschwindigkeiten  $U_p$  der Wellen gilt bei einem festen, lückenlosen Verbund analog

$$U_{p,I} + U_{p,R} = U_{p,T} \quad . \quad (3.4)$$

Das Vorzeichen der reflektierten Partikelgeschwindigkeit wird invertiert, da eine rücklaufende Druckwelle (positive Spannung) eine negative Partikelgeschwindigkeit zur Folge hat. Unter Berücksichtigung des Impulserhaltungssatzes  $\sigma = \rho \cdot c \cdot U_p$  kann durch Substitution von  $U_p$  die Gleichung (3.4) somit zu

$$\frac{\sigma_I}{\rho^A c^A} - \frac{\sigma_R}{\rho^A c^A} = \frac{\sigma_T}{\rho^B c^B} \quad (3.5)$$

umgeformt werden. Mit Gleichung (3.3) und Gleichung (3.5) lassen sich folgende Beziehungen der Spannungen  $\sigma_R$  und  $\sigma_T$  zu der Spannung der einfallenden Welle  $\sigma_I$  formulieren:

$$\sigma_R = \left( \frac{\rho^B c^B - \rho^A c^A}{\rho^B c^B + \rho^A c^A} \right) \sigma_I = \left( \frac{I_m^B - I_m^A}{I_m^B + I_m^A} \right) \sigma_I \quad . \quad (3.6)$$

$$\sigma_T = \left( \frac{2 \cdot \rho^B c^B}{\rho^B c^B + \rho^A c^A} \right) \sigma_I = \left( \frac{2 \cdot I_m^B}{I_m^B + I_m^A} \right) \sigma_I \quad . \quad (3.7)$$

Trifft eine Wellenfront schräg auf die Grenzfläche zweier Medien, so entstehen die in Abbildung 3.3 gezeigten Transversalwellen. Alle Winkel der verschiedenen Wellen stehen in Beziehung zueinander. Diese Beziehung ist im Gesetz von SNELL

$$\frac{\sin \varphi_1}{c_1^A} = \frac{\sin \varphi_2}{c_2^A} = \frac{\sin \varphi_3}{c_1^A} = \frac{\sin \varphi_4}{c_1^B} = \frac{\sin \varphi_5}{c_2^B} \quad (3.8)$$

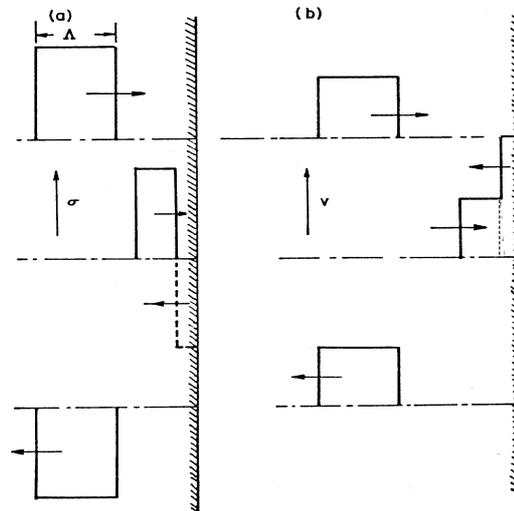
niedergelegt. Dieses Gesetz beschreibt, dass die Winkel abhängig von der Partikelgeschwindigkeit im Material sind. Zudem ist erkennbar, dass die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_3$  betragsmäßig gleich sein müssen.

Aus den Gleichungen (3.7) bis (3.8) lassen sich mit unterschiedlichen Grenzbetrachtungen die zu Beginn des Kapitels angesprochenen Fälle für freie Oberflächen und idealen Verbund herleiten.

### Auftreffen einer Welle im rechten Winkel auf eine freie Oberfläche

Beim Auftreffen einer Festkörperwelle auf eine freie Oberfläche kann für die Impedanz  $I_m^B$  des Mediums  $B$  Null angenommen werden, da das Produkt aus Dichte  $\rho^B$  und Wellengeschwindigkeit  $c^B = \sqrt{E^B/\rho^B}$  aufgrund der geringen Werte von Dichte und Elastizitätsmodul annähernd zu Null wird.

Bei der Betrachtung der Spannungsverhältnisse von transmittierter Welle zu einfallender Welle ( $\sigma_T/\sigma_I$ , Gleichung (3.7)) und reflektierter Welle zu einfallender Welle ( $\sigma_R/\sigma_I$ , Gleichung (3.6)) für den Grenzfall der freien Oberfläche ( $I_m^A \gg I_m^B$ ) ist erkennbar, dass es zu keiner Transmissionswelle kommt  $\sigma_T/\sigma_I = 0$  und die reflektierte Welle Spannungen gleicher Intensität erzeugt, wie die Initialwelle  $\sigma_R/\sigma_I = -1$ . Es findet bei der Reflexion einer Festkörperwelle an einer freien Oberfläche somit eine Belastungsumkehr statt; anstatt einer Druckwelle breitet sich nun eine Zugwelle mit gleicher Intensität aus (Abbildung 3.4).



**Abbildung 3.4:** Spannungs- und Geschwindigkeitsverlauf: Reflexion einer Festkörperwelle an freier Oberfläche (aus: RINEHART 1975 [178])

### Schräges Auftreffen einer Festkörperwelle auf eine freie Oberfläche

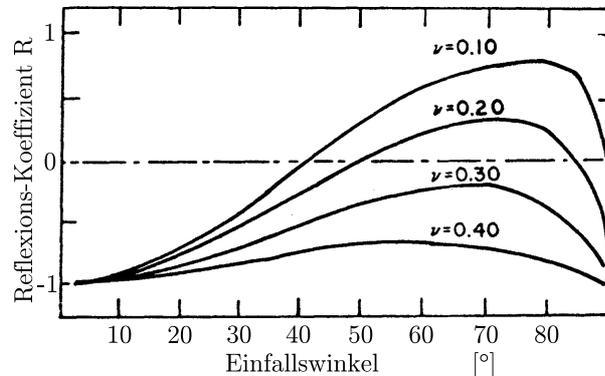
Sind die Wellenfront und die freie Oberfläche nicht parallel, so teilt sich die Initialwelle in zwei Wellen: eine reflektierte Transversalwelle und eine reflektierte Longitudinalwelle. Die Energie des Impulses wird in Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl  $\nu$  und vom Einfallswinkel  $\varphi$  der Initialwelle aufgeteilt. Die Aufteilung kann mit dem Reflektions-Koeffizienten

$$R = \frac{\tan \varphi_2 \cdot \tan^2 2\varphi_2 - \tan \varphi_1}{\tan \varphi_2 \cdot \tan^2 2\varphi_2 + \tan \varphi_1} \quad (3.9)$$

ausgedrückt werden.

In Abbildung 3.5 ist die Funktion für  $R$  graphisch dargestellt, die die Intensität und die Spannungsart der reflektierten Longitudinalwelle in Abhängigkeit von der Querkontraktionszahl zeigt.

Deutlich ist, dass für ausgewählte Einfallswinkel–Querkontraktionszahl–Verhältnisse eine reflektierte Welle nicht mehr ausgebildet wird ( $R = 0$ ), es entsteht nur die Transversalwelle.



**Abbildung 3.5:** Reflektions–Koeffizient  $R$  aufgetragen für variierende Einfallswinkel der Initialwelle und unterschiedlicher Querkontraktionszahlen (aus: RINEHART 1975 [178])

### Auftreffen einer Welle im rechten Winkel auf eine Grenzfläche bei idealem Verbund

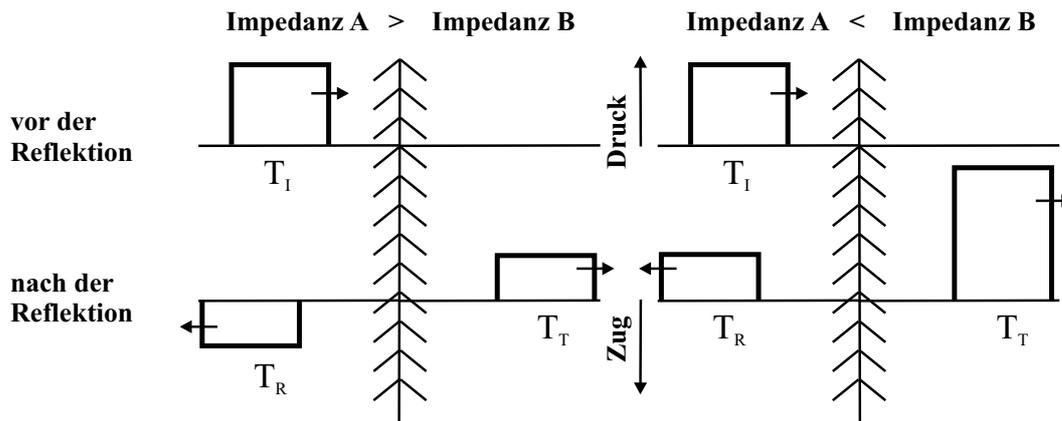
Bei einer senkrecht zur Grenzfläche fortschreitenden Wellenfront ist der Winkel  $\varphi_1 = 0$  zu setzen. Aus dem SNELL'schen Gesetz nach Gleichung (3.8) folgt, dass alle Winkel lotrecht auf der Grenzfläche stehen. Bei der Betrachtung der Spannungsverhältnisse  $\sigma_T/\sigma_I$  und  $\sigma_R/\sigma_I$  aus den Gleichungen (3.7) und (3.6) ist erkennbar, dass die Intensität der Reflektions- und Transmissionswelle von der Impedanz abhängt. Zur Spannungsbeschreibung kommt es auf das Impedanzverhältnis an.

Die Tabelle 3.2 zeigt die Ergebnisse der Spannungsverhältnisse von transmittierter Welle zu einfallender Welle ( $\sigma_T/\sigma_I$ ) und reflektierter Welle zu einfallender Welle ( $\sigma_R/\sigma_I$ ) für verschiedene Impedanzverhältnisse unter Verwendung der Gleichungen (3.7) und (3.6) an.

**Tabelle 3.2:**  $\sigma_T/\sigma_I$ - und  $\sigma_R/\sigma_I$ -Verhältnisse für variierende Impedanzverhältnisse

$\frac{I_m^A}{I_m^B} = \frac{\rho^A \cdot c^A}{\rho^B \cdot c^B}$	$I_m^A \gg I_m^B$	$I_m^A > I_m^B$	$I_m^A \approx I_m^B$	$I_m^A < I_m^B$	$I_m^A \ll I_m^B$
	$\infty$	2,0	1	0,5	0
$\frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{2}{1 + \frac{\rho^A c^A}{\rho^B c^B}}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\approx 2$
$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \frac{1 - \frac{\rho^A c^A}{\rho^B c^B}}{1 + \frac{\rho^A c^A}{\rho^B c^B}}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\approx 1$

Die in Tabelle 3.2 angegebenen  $\sigma_T/\sigma_I$ - und  $\sigma_R/\sigma_I$ -Verhältnisse zeigen, dass z.B. Spannungen aufgrund der transmittierten Welle bei  $I_m^A < I_m^B$  größer als die der einlaufenden Welle sind. Sie können maximal doppelt so groß wie die Spannungen der Ursprungswelle sein. Zudem läuft eine Welle gleicher Art (Zug bzw. Druck) zurück durch das Medium A. Ist die Impedanz des Mediums A größer, findet eine Belastungsumkehr bei der reflektierten Welle statt. Diese Spannungsverläufe vor und nach der Reflektion sind für unterschiedliche Impedanzverhältnisse in Abbildung 3.6 dargestellt.



**Abbildung 3.6:** Aufteilung des Spannungsimpulses an einer Grenzfläche bei unterschiedlichen Impedanzverhältnissen

### Auftreffen einer Welle im schrägen Winkel auf eine Grenzfläche bei idealem Verbund

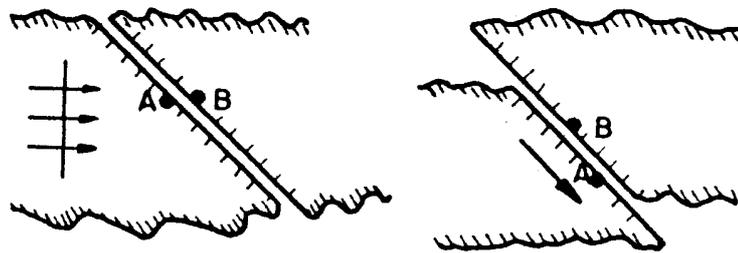
Sind die Wellenfront und die freie Oberfläche nicht parallel, so entstehen aus der Initialwelle vier Wellen: zwei Transversalwellen, im Medium A wie im Medium B, eine Reflektionslongitudinalwelle und eine Transmissionswelle (Abbildung 3.3). Für die  $\varphi$ -Winkel gilt das Gesetz von SNELL. Damit sind die Verhältnisse der Impulsaufteilung berechenbar. Die umfangreichen Beziehungen zwischen einfallender Welle, reflektierter Transversal- und reflektierter Longitudinalwelle sowie transmittierter Transversal- und transmittierter Longitudinalwelle können RINEHART 1975 [178] entnommen werden.

### Wellenfortpflanzung bei gelöstem Verbund

Liegt an der Übergangsstelle zwischen Medium A und Medium B kein Verbund vor, so führt dies zu anderen Effekten als zuvor beschrieben. Unter der Annahme, dass keine Reibung vorhanden ist, können an solchen Grenzen keine Zug- oder Schubkräfte übertragen werden. Auf die besondere Problematik nicht vollständig reibungsfreier Grenzen, wie sie z.B. durch Kornverzahnung hervorgerufen werden können, wird nicht eingegangen. RINEHART 1975 [178] schlägt in solchem

Fälle vor, die Fragestellung auf infinitesimal kleine Elemente zu übertragen, damit die nachfolgend getroffenen Aussagen gelten. Die daraus ermittelten Kräfte können anschließend wieder superponiert werden.

Zug kann im Allgemeinen nicht übertragen werden. Trifft eine Zugwelle dennoch auf eine Grenzfläche ohne Verbund, so gelten die Aussagen, die für die Reflektion an einer freien Oberfläche gemacht wurden. Im Gegensatz zu Zug, kann Druck an einer Grenzfläche ohne Verbund übertragen werden. Aufgrund der Annahme, dass die Verbundgrenze reibungsfrei ist, kann nur der Druckanteil der senkrecht zur Materialgrenze steht berücksichtigt werden. Der Anteil der durch Schub übertragen würde, führt zu einer Verschiebung (Abbildung 3.7) in der Grenzebene.



**Abbildung 3.7:** Verschiebung aufgrund reibungsfreier Verbundgrenze (aus: RINEHART 1975 [178])

Läuft eine Druckwelle über die Grenzfläche mit gelöstem Verbund zweier *gleicher* Medien, so können Aussagen über die Verhältnisse der Partikelgeschwindigkeiten gemacht werden. Dieser Fall tritt an den Rissufern im Beton auf. Die Verhältnisse von einfallender Welle (A), reflektierter Transversal- (D) und reflektierter Longitudinalwelle (C) sowie transmittierter Transversal- (F) und transmittierter Longitudinalwelle (E) sind in den Gleichungen (3.10) bis (3.12) dargestellt. Abbildung 3.8 veranschaulicht die am Grenzphänomen beteiligten Wellen.

$$\frac{C}{A} = \frac{\sin 2\varphi_1 \cdot \sin 2\varphi_2}{\left(\frac{c_1^A}{c_2^A}\right)^2 \cos^2 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2} \quad (3.10)$$

$$\frac{D}{A} = \frac{F}{A} = \frac{\frac{c_1^A}{c_2^A} \cos 2\varphi_1 \cdot \sin 2\varphi_2}{\left(\frac{c_1^A}{c_2^A}\right)^2 \cos^2 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2} \quad (3.11)$$

$$\frac{E}{A} = \frac{\left(\frac{c_1^A}{c_2^A}\right)^2 \cos^2 2\varphi_2}{\left(\frac{c_1^A}{c_2^A}\right)^2 \cos^2 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2} \quad (3.12)$$

Die anschließende Tabelle 3.3 ordnet die Wellenfortpflanzungsphänomene dem Vorkommen im Stahlbeton und im bewehrten Stahlfaserbeton zu und gibt an, ob diese in die Modellierung einfließen oder nicht.

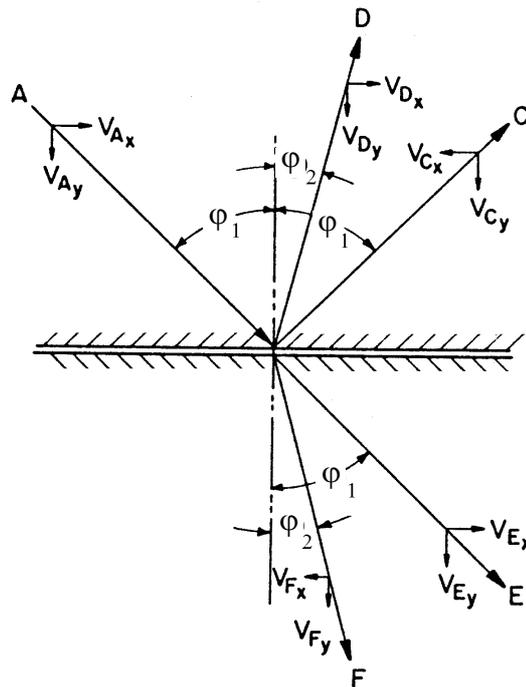


Abbildung 3.8: Wellenbezeichnung für die Verhältnisse der Gleichungen (3.10) bis (3.12) (aus: RINEHART 1975 [178])

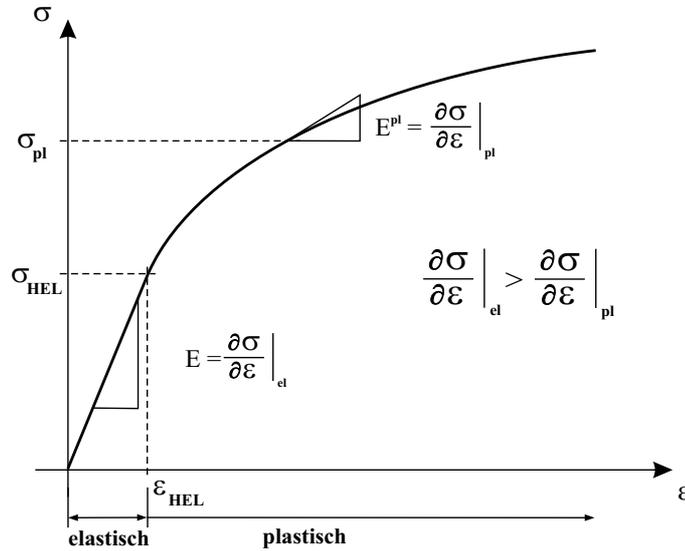
Tabelle 3.3: Grenzflächenphänomene bei der Wellenfortpflanzung und Konsequenzen auf die Modellierung

Situation	Auftreten von Grenzflächenphänomenen	Konsequenzen auf die Modellierung
freie Oberfläche	an den freien Rändern des betonartigen Bauteils, auch bei mehrfacher Reflexion der Welle	Reflektionen und Refraktionen an der freien Oberfläche werden in der Modellierung grundsätzlich berücksichtigt
	an dem gelöstem Verbund bei Auftreffen einer Zugwelle	Verbundmodellierung notwendig, → implementiert für Stahlbeton → nicht implementiert für bewehrten Stahlfaserbeton
idealer Verbund	an den Verbundgrenzen von Stahl und Beton bzw. Stahlfaserbeton, beim ersten Durchlauf einer Spannungswelle, danach abhängig von der Belastungsgeschichte	in der Modellierung berücksichtigt, Lösen des Verbunds nur beim Stahlbetonmodell implementiert
gelöster Verbund	Auftreten an Verbundgrenzen von Stahl und Beton, abhängig von der Belastungsgeschichte	Verbundmodellierung notwendig → implementiert für Stahlbeton → nicht implementiert für bewehrten Stahlfaserbeton

### 3.1.3 Wellen im nichtlinear-plastischen Bereich

Wellenausbreitungsphänomene ändern sich, sobald nichtlineares Materialverhalten in Betracht gezogen wird. Ein impulsartig beanspruchter Werkstoff, bei dem die Belastungsamplitude das

HUGONIOT–Elastic–Limit im Material überschreitet, zeigt eine in Abbildung 3.2 dargestellte Aufteilung der Wellengeschwindigkeiten in einen elastischen Vorläufer und in eine plastische Welle. Die Entkoppelung der Welle mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten heißt Dispersion.



**Abbildung 3.9:** Nichtlineares Materialverhalten am Beispiel einer einaxialen Spannungs–Verzerrungs–Beziehung von Metall

Abbildung 3.9 zeigt eine typische Spannungs–Verzerrungs–Beziehung eines Metalls mit plastischer Verformung und plastischer Verfestigung. Der konstante Elastizitätsmodul  $E$  ist größer als der plastische Modul  $E^{pl}$ . Die Verzerrungen lassen sich in einen elastischen und in einen plastischen Anteil aufteilen, die in der Summe die Gesamtverzerrung widerspiegeln  $\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}$ . Aufgrund der abschnittweisen Ermittlung der Steifigkeit, ändert sich der Wert je nach Steigung der Spannungs–Verzerrungs–Kurve zu

$$E^{pl}(\varepsilon) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \quad \text{für die Verzerrung } \varepsilon > \varepsilon_{HEL} . \quad (3.13)$$

Gemäß der linear elastischen Wellengleichung (3.1) ergibt sich die plastische Wellengeschwindigkeit durch den veränderlichen Elastizitätsmodul in Abhängigkeit zur plastischen Verzerrung ( $E^{pl}(\varepsilon)$ ) für eine Longitudinalwelle zu

$$c_{pl,L} = \sqrt{\frac{E^{pl}(\varepsilon)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}} . \quad (3.14)$$

Ein idealer Torsionsversuch an einem Material, dessen Spannungsamplitude plastisches Materialverhalten erzeugt, führt zu einer transversalen Wellenausbreitung. Die plastische Schubspannungswelle breitet sich aus mit der Wellengeschwindigkeit

$$c_{pl,T} = \sqrt{\frac{G^{pl}(\gamma)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\partial \tau}{\partial \gamma}} . \quad (3.15)$$

Die Nichtlinearität der Steifigkeiten eines Materials hat einen entscheidenden Einfluss auf die Wellenfortpflanzung im Medium. Die Verknüpfung der Bewegungsgrößen einer Welle mit den thermodynamischen Zustandsgrößen eines Materials erfolgt mit den *materialunabhängigen* Erhaltungsgleichungen (Abschnitt 2.5) und mit den *materialabhängigen* konstitutiven Beziehungen des Kontinuums (Zustandsgleichung und Festigkeitsmodell) (Abschnitt 2.7).

### 3.1.4 Schockwellen

Eine Schockwelle hat ihr charakteristisches Profil erreicht, wenn sich der elastische Vorläufer und die plastische Welle vereinen und sich mit gleicher Schockwellengeschwindigkeit  $U_s$  auf gleichem Niveau fortbewegen (s.a. Abbildung 1.2). Diese Geschwindigkeit ist deutlich größer als die Schallgeschwindigkeit des Materials, die elastische Wellengeschwindigkeit  $c_e$ . Die Anstiegszeit der Schockfront liegt im Nanosekundenbereich und wird ohne Breitenausdehnung angenommen. Unter diesen Voraussetzungen führt der sprunghafte Anstieg zur Diskontinuität von Druck, Dichte und Energie (s.a. Abschnitt 2.6). Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 3.10 die idealisierte Schockwelle dem wahren, mit einem VISAR aufgezeichneten Profil von GRADY 1991 [85] gegenübergestellt, wobei die Schockwelle in einem Planarplatten-Impakt Test erzeugt wurde.

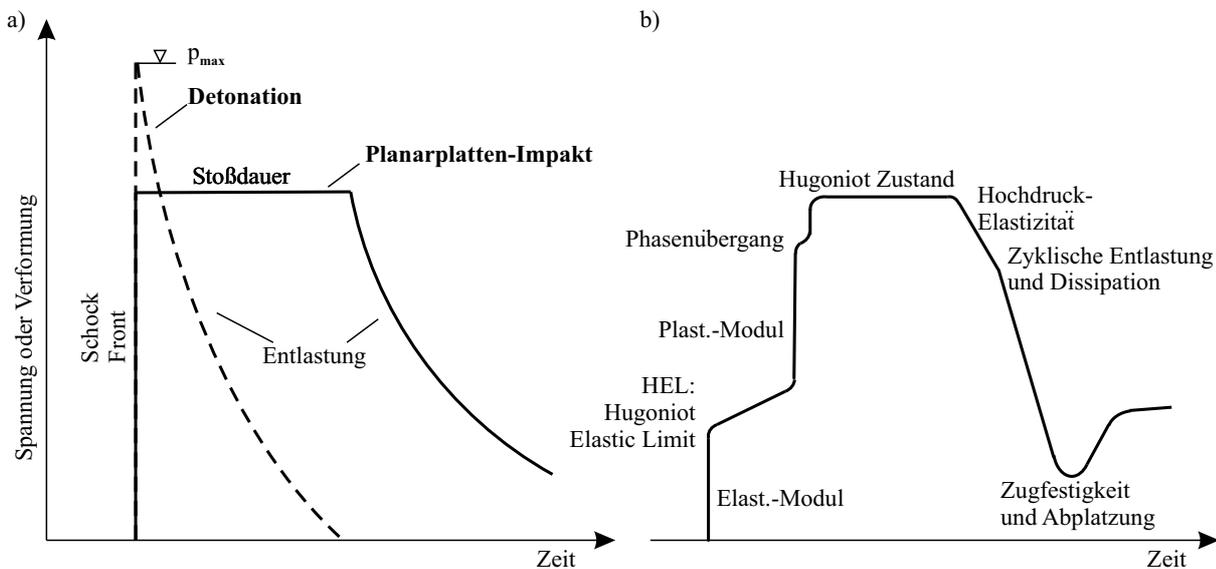


Abbildung 3.10: a) Idealisiertes und b) wahres Profil einer Schockwelle (GRADY 1991 [85])

Die durchgezogene Linie zeigt ein ausgeprägtes Spannungsplateau der Stoßdauer, was sich durch den längerfristigen Impuls des Planarplatten-Impakts begründen lässt. Wie die gestrichelte Linie veranschaulicht, fällt bei einer Detonationsbelastung die Druckspannung amplitude höher aus, allerdings liegt kein dauerhaftes Spannungsplateau vor – die Entlastung setzt direkt nach dem Spannungsmaximum ein.

Weitere grundlegende Annahmen für die Theorie von Schockwellenausbreitungen sind nach

MEYERS 1994 [151] u.a., dass sich beim Verdichtungsprozess keine Phasentransformationen einstellen. Des Weiteren wird der Schubanteil im Material vernachlässigt, so dass fluiddynamisches Materialverhalten unter extrem hohen Drücken vorliegt. Im Bereich der Schockfront treten keine Gravitationskräfte und Wärmeströmungen auf.

Entspannungs- oder Zugwellen bilden keine Schockfront, da die höheren Zugspannungsamplituden sich schneller fortbewegen als die niedrigeren Anteile.

**Anmerkung:** Die Theorie plastischer Wellen und Schockwellen ist grundlegender Bestandteil der Auswertung der gemessenen Geschwindigkeiten mit dem VISAR beim Planar-Platten-Impakt Test (s.a. Anhang A).

## 3.2 Detonation: Vorgang, Theorie und Zustandsgleichung

### 3.2.1 Detonationsvorgang

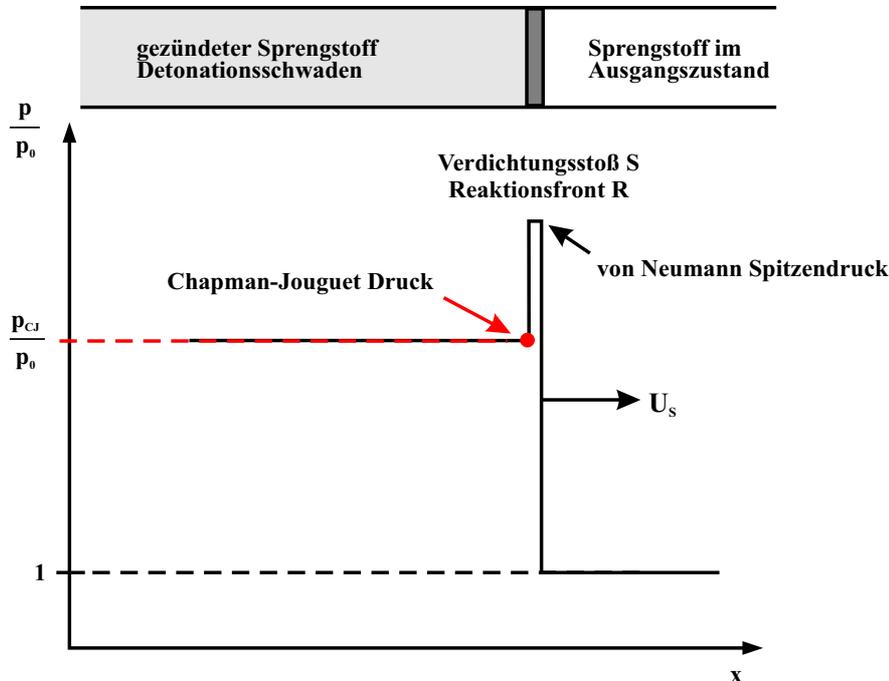
Infolge einer Detonation wird innerhalb weniger Millisekunden Energie freigesetzt. Das Endprodukt der exothermen Reaktion des Sprengstoffs sind extrem verdichtete Gase, die an die Umgebung gegeben werden. Der Ablauf dieses chemischen Prozesses wird grundlegend eingeteilt in

- die Verbrennung,
- die Explosion/Deflagration und
- die Detonation,

des Sprengstoffs, wobei die Reihenfolge sich nach der steigenden freigesetzten Energie richtet. Während beim Verbrennen eine Reaktion zwischen einem brennbaren Stoff und dem Sauerstoff vorliegt, ist die Detonation eine durch eine Schockwelle ausgelöste Flammenreaktion, die sich mit Überschallgeschwindigkeit im Sprengstoff ausbreitet. Bei der Explosion/Deflagration breitet sich die Wellenfront mit einer Unterschallgeschwindigkeit aus. Die Initiierung erfolgt durch eine geeignete Zündung, von der aus sich eine Schockfront durch mechanischen Impuls wellenförmig im Sprengstoff ausbreitet.

Der Detonationsvorgang lässt sich ideal mit den gleichen Methoden beschreiben wie die Ausbreitung von Schockwellen. Wie in Abbildung 3.11 schematisch dargestellt ist, besteht die Detonationsfront aus einem starken Verdichtungsstoß  $S$  und einer folgenden Reaktionsfront  $R$ . Äußere Umstände halten die Detonationsgeschwindigkeit konstant. Allein durch die chemische Reaktion wäre dies nur sehr schwer möglich und ein stationärer Zustand könnte sich fast gar nicht einstellen. Deshalb wird diese Detonationsart auch als erzwungene Detonation beschrieben. Die freigesetzte Energie infolge der chemischen Reaktion muss ausreichen, um den Verdichtungsstoß

voran zu treiben. Durch die hohe Geschwindigkeit in den stark komprimierten Materialpunkten entstehen die diskontinuierlichen Zustandsgrößen entlang der Schockfront, die sich mit Geschwindigkeiten von bis zu  $U_s = 8200 \text{ m/s}$  fortpflanzen kann (MEYERS 1994 [151], Tabelle 10.3).



**Abbildung 3.11:** Modellvorstellung einer eindimensionalen, stationären Detonationswelle nach CHAPMAN 1899 [34] und JOUGUET 1906 [114] zur Beschreibung eines Detonationsvorgangs

Die Gaspartikel vor dem CHAPMAN-JOUQUET-Punkt (kurz:  $CJ$ -Punkt) breiten sich mit Überschallgeschwindigkeit und die Gaspartikel hinter dem  $CJ$ -Punkt mit Unterschallgeschwindigkeit aus. Zur Überschallseite hin wird die Reaktion von der VON NEUMANN Spitze begrenzt. Sie ist es, welche in den unberührten Sprengstoff eindringt und aufgrund ihrer Geschwindigkeit und ihrer Druckamplitude die Reaktionen anschiebt (initiiert).

Die Detonationsgeschwindigkeit hängt auch von einfachen Parametern wie beispielsweise von der Form des Sprengstoffs ab (LEE 1972 [133]). Dies ist auf den verzögerten Gasaustausch bei der Verbrennung zurückzuführen, bei dem sich der Gesamtdruck reduziert und somit die Reaktionsgeschwindigkeit abnimmt. Entsprechend dieser Kenntnis wirken sich auch die Sprengstoffdichten steuernd auf den Detonationsprozess aus.

Versuche haben gezeigt (u.a. LEE & TARVER 1980 [132]), dass keine wesentlichen Unterschiede zwischen der Ausbreitung einer Schockwelle in einem idealen Gas und der in einem hochexplosiven Sprengstoff vorliegen. Vom Prinzip her lässt sich demnach die Modellvorstellung einer Wellenausbreitung in einem idealen Gasgemisch auf die stationäre Schockfront der Detonation übertragen, so dass an ihrer Diskontinuitätsfläche die Erhaltungsgleichungen gemäß der Beschreibung in Abschnitt 2.6 formuliert werden können.

### 3.2.2 Detonationstheorie

Die klassische Detonationstheorie basiert auf einer eindimensionalen Modellvorstellung nach CHAPMAN 1899 [34] und JOUGUET 1906 [114], bei der (vergleiche auch EIBL 1995 [56])

- die Ausbreitung einer Detonationswelle in einem Sprengstoff analog zur Bewegung einer Schockwelle in einem beliebigen Festkörper verläuft,
- sich die Detonationswelle im Sprengstoff mit einer konstanten Geschwindigkeit ausbreitet (CHAPMAN–JOUGUET Geschwindigkeit),
- die Wärmeentwicklung aus der Reaktion des Sprengstoffes ausreicht, um die Detonationswelle stabil zu halten (Entlastungswelle ist nicht möglich),
- die Detonationsfront sich mit Überschallgeschwindigkeit ausbreitet, so dass ein Wärmeaustausch mit der Umgebung nicht möglich ist (adiabatisches Verhalten),
- sowohl der Verdichtungsstoß als auch die Reaktionszone infinitesimal klein sind, so dass der VON NEUMANN Druck direkt an der Schockfront des Verdichtungsstoßes vernachlässigt wird und
- zwischen dem nichtreagierten und dem reagierten Sprengstoff eine Diskontinuitätsfläche besteht, an der der CHAPMAN–JOUGUET–Druck  $p_{CJ}$  vorliegt.

Der Sprengstoff geht unmittelbar nach der Zündung in eine Gasform über. Unter Verwendung der bekannten Gesetze eines idealen Gases  $p = (\eta - 1)\rho e$  lässt sich der Aufbau des Detonationsmodells nach CHAPMAN & JOUGUET ausgehend von der Formulierung der Bilanzgleichungen (2.50) bis (2.52) an einer stationären Diskontinuitätsfläche herleiten. Infolge der Reaktion ist zusätzlich eine Reaktionswärme  $q_R$  in der Aussage der Energieerhaltung zu berücksichtigen. Diese idealisierte Wärmequelle stellt die Energiezufuhr dar, die benötigt wird, um die Detonationswelle stabil zu halten. Ziel der Detonationstheorie ist, den  $CJ$ -Druck  $p_{CJ}$  des Sprengstoffes am Ende der Reaktionszone zu bestimmen (Abbildung 3.11).

Mit den festgelegten Verhältnissen der Schockwellengeschwindigkeit zur Schallwellengeschwindigkeit ist die Machzahl  $M$  definiert zu:

$$M = \frac{U_s}{c} \quad , \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{\eta \frac{p_0}{\rho_0}} \quad . \quad (3.16)$$

Damit lässt sich für ein ideales Gas aus der Massen- und der Impulserhaltung die RAYLEIGH–Gerade ableiten, die alle möglichen Drücke für eine bestimmte Schockwellengeschwindigkeit darstellt:

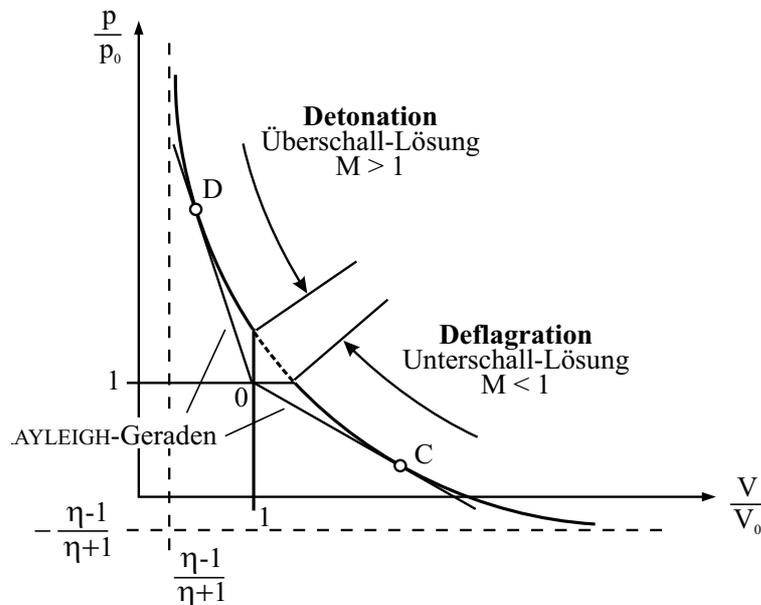
$$\frac{p}{p_0} = 1 + \eta M^2 \left( 1 - \frac{V}{V_0} \right) \quad . \quad (3.17)$$

Mit dem Ausdruck  $\eta M^2$  aus Gleichung (3.17) lässt sich die Anströmgeschwindigkeit der Schockwelle angeben.

Die ideale Gasgleichung aufgelöst nach der inneren Energie  $e$  und eingesetzt in die Energieerhaltung (2.52) ergibt die RANKINE–HUGONIOT Beziehung (Zustandsgleichung) mit

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\frac{\eta+1}{\eta-1} - \frac{V}{V_0} + \frac{2\eta}{\eta-1} \frac{q_R}{\Theta q_p}}{\frac{\eta+1}{\eta-1} \frac{V}{V_0} - 1} . \quad (3.18)$$

wobei die Parameter  $\Theta$  und  $q_p$  der Temperatur bzw. der spezifischen Wärme bei konstantem Druck entsprechen. Für einen konstanten Wert der Reaktionswärme  $q_R$  ergibt sich eine beliebige HUGONIOT–Kurve, die in Abbildung 3.12 dargestellt ist. Nach der CHAPMAN–JOUQUET–Theorie ist der Punkt, an dem die RAYLEIGH–Gerade die Tangente an die HUGONIOT–Kurve bildet, der *CJ*–Punkt. An diesem Punkt existiert genau eine stationäre Lösung. Unter Berücksichtigung der thermodynamischen und stoffgesetzlichen Bedingungen können sich zwei mögliche Lösungspunkte C und D einstellen, die in Abbildung 3.12 gekennzeichnet sind. Mit dem Punkt C bietet sich eine mögliche Unterschall–Lösung  $M < 1$ , bei der die Anströmgeschwindigkeit *geringer* als die örtliche Schallgeschwindigkeit ist. In diesem Fall liegt eine Deflagration vor und der Punkt C wird als unterer *CJ*–Punkt bezeichnet. Das Pendant ist der obere *CJ*–Punkt D, bei dem die Anströmgeschwindigkeit die *gleiche* Größe wie die Schallgeschwindigkeit hat. Diese Überschall–Lösung mit  $M > 1$  wird als Detonation bezeichnet.



**Abbildung 3.12:** HUGONIOT–Kurve für einen Verdichtungsstoß, Deflagration und Detonation (aus: BARTLMÄ 1975 [15])

Die Deflagration entwickelt sich aus einer kontinuierlichen Aufheizung der einzelnen Schichten des unverbrannten Mediums. Wird die kritische Temperatur erreicht, tritt die Zündung ein und es entsteht eine laminare bzw. turbulente Flammenausbreitung. Wird hingegen das unverbrannte Gasgemisch durch starke Komprimierung, d.h. durch einen Verdichtungsstoß zur Zündung gebracht, bildet sich die Reaktionsfront aus, die sich im Medium mit Überschallgeschwindigkeit ausbreitet. Sie setzt sich aus Druck- und Temperaturfront zusammen. Ein Wärmeaustausch ist aufgrund der Überschallgeschwindigkeit nicht möglich.

### 3.2.3 Zustandsgleichung und Reaktionsrate

Für die Umsetzung der Theorie in geeignete funktionale Zusammenhänge werden neben der Beschreibung des Detonationsprozesses in der Form einer Zustandsgleichung auch eine Reaktionsgleichung benötigt, die den Zündungsvorgang numerisch erfasst. Die Zustandsgleichung allein bildet lediglich den exothermen Reaktionsprozeß aus einer stationären Sichtweise ab, so dass für das vorliegende instationäre Problem eine spezielle Darstellung des Reaktionsvorgangs notwendig ist.

Die folgenden Darstellungen fassen wichtige Erkenntnisse aus der Vielzahl veröffentlichter Arbeiten zusammen und geben die verwendeten Gleichungen an. Für umfangreichere Beschreibungen wird auf die Literaturangaben aus dem einleitenden Abschnitt 1.2 *Stand der Forschung* verwiesen.

#### Zustandsgleichung

Das ZDN-Modell von ZEL'DOVICH 1940 [225], DÖRING 1943 [51] und VON NEUMANN 1942 [214] dient als Basis für die in Hydrocodes häufig verwendete Zustandsgleichung nach JONES, WILKINS und LEE. In diesem Berechnungsmodell ersetzen die Entwickler die von CHAPMAN & JOUGUET als unendlich dünn angenommene Reaktionszone durch eine Verzögerung der Zündung und schließen eine endliche Reaktionszone nach dem  $CJ$ -Punkt an, wie dies in Abbildung 3.13 verdeutlicht ist. Zur Beschreibung des Ablaufs der chemischen Reaktion im Sprengstoff wird der Parameter  $\omega$  eingeführt, der den Anteil der Reaktionsprodukte charakterisiert. Den Beginn der Reaktion stellt  $\omega = 0$  dar, während  $\omega = 1$  das Ende der Reaktion kennzeichnet. Die als JWL-EoS bezeichnete Gleichung lautet:

$$p = A \left(1 - \frac{\omega}{R_1 V}\right) e^{-R_1 V} + B \left(1 - \frac{\omega}{R_2 V}\right) e^{-R_2 V} + \frac{\omega e}{V} \quad (3.19)$$

Die JWL-EoS ermöglicht neben den  $CJ$ -Druck auch den Spitzendruck nach VON NEUMANN zu bestimmen. Die Parameter  $A$ ,  $B$ ,  $R_1$  und  $R_2$  sind von der entsprechenden Sprengstoffart abhängige Konstanten. Sie können aus Sammelwerken wie DOBRATZ 1981 [50] oder aus Materialbibliotheken von Hydrocodes wie AUTODYN 2002 [32] entnommen werden.

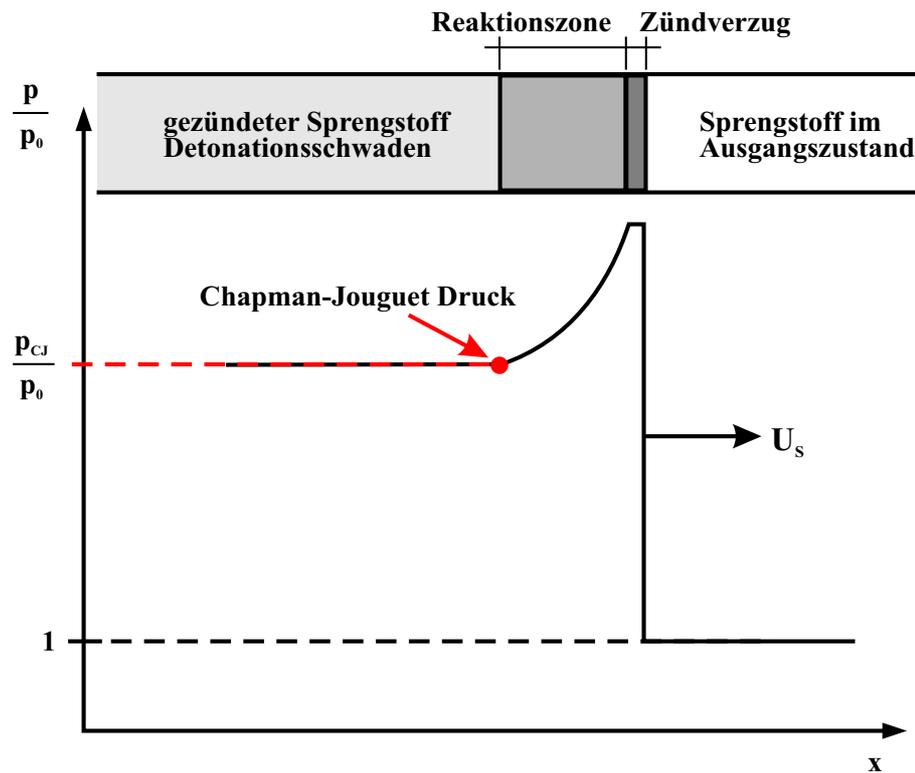


Abbildung 3.13: ZDN-Modell einer eindimensionalen, stationären Detonationswelle

Dieser empirische Ansatz lehnt sich an bekannte Zustandsgleichungen für Feststoffe an. Die gute Übereinstimmung mit der Realität konnte in diversen Versuchen nachgewiesen werden.

### Reaktionsrate

Das von LEE & TARVER 1980 [132] entwickelte Modell erfasst den Reaktionsvorgang, der sich im Einzelnen aus einer Initialisierung, also der Zündung des Sprengstoffs, und einer Fortbewegung der Detonationswelle zusammensetzt. Die eigentliche Reaktion wird durch sogenannte *Hot Spots* ausgelöst, welche sich in Abhängigkeit vom Druck verteilen. Diese *Hot Spots* sind einige wenige Punkte, in denen die Temperatur signifikant höher ist als im gesamten restlichen Sprengstoff, so dass sie zur Steuerung des Detonationsvorgangs beitragen, in dem sie die schnelle Zersetzung und den Druckaufbau veranlassen. Die Reaktionsgeschwindigkeit wird so maßgebend durch *Hot Spots* beeinflusst.

Die Reaktionsrate  $R$  bildet die additive Aufspaltung in einen Initialisierungs- und einen Wachstumsanteil, die den zeitlichen Ablauf der Schockwellenentwicklung im Sprengstoff steuert:

$$R = \frac{dF}{dt} = \underbrace{I (1 - F)^{\frac{2}{9}} \eta^4}_{\text{Initialisierung}} + \underbrace{G (1 - F)^{\frac{2}{9}} F^{\frac{2}{3}} p^{1.20}}_{\text{Wachstum}} . \quad (3.20)$$

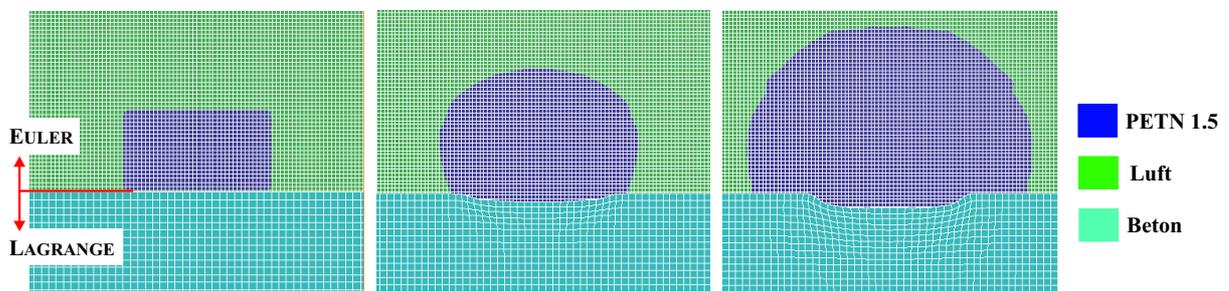
Die Parameter  $I$  und  $G$  sind von der Sprengstoffart abhängige Größen, die sich experimentell

ermitteln lassen (LEE & TARVER 1980 [132]). In die Berechnung der Reaktionsrate  $R$  geht der Druck direkt ein. Bei einer Detonationsbeanspruchung eines Bauteils kann somit die Wechselwirkung zwischen Sprengstoff und Festkörper berücksichtigt werden. Im Ausgangszustand befindet sich der Sprengstoff in einem nicht reagierten Zustand. Nach erfolgter Zündung gilt für den reagierten Sprengstoff  $F = 0$ .

### 3.2.4 Zur Abbildung des Detonationsvorgangs in numerischen Simulationen

Nach der vollständig abgeschlossenen exothermen Reaktion des Sprengstoffs verbleiben extrem verdichtete Gase, die an die Umgebung freigesetzt werden. Demnach sind Detonationsvorgänge eng mit Strömungsprozessen verbunden, deren Abbildung in der numerischen Simulation am sinnvollsten in einer stationären EULERSchen-Betrachtungsweise erfolgt.

Abbildung 3.14 verdeutlicht bei dem dargestellten Ausschnitt einer Kontaktdetonation auf eine Betonplatte wie nach der Zündung im Sprengstoff PETN1.5 sich die Sprengstoffschwaden ziemlich gleichmäßig ausbreiten. Direkt an der Kontaktzone wird die Deformation der LAGRANGE-Elemente vom Beton sichtbar, während die stationären EULER-Elemente keine Elementverzerrung aufweisen. Die numerischen Simulationen verwenden zur Interaktion zwischen Detonation und Festkörper Kontaktalgorithmen, die den Impuls der sich ausbreitenden Detonationsschwaden in die betonartige Struktur ermitteln (u.a. BENSON 1992 [21]).

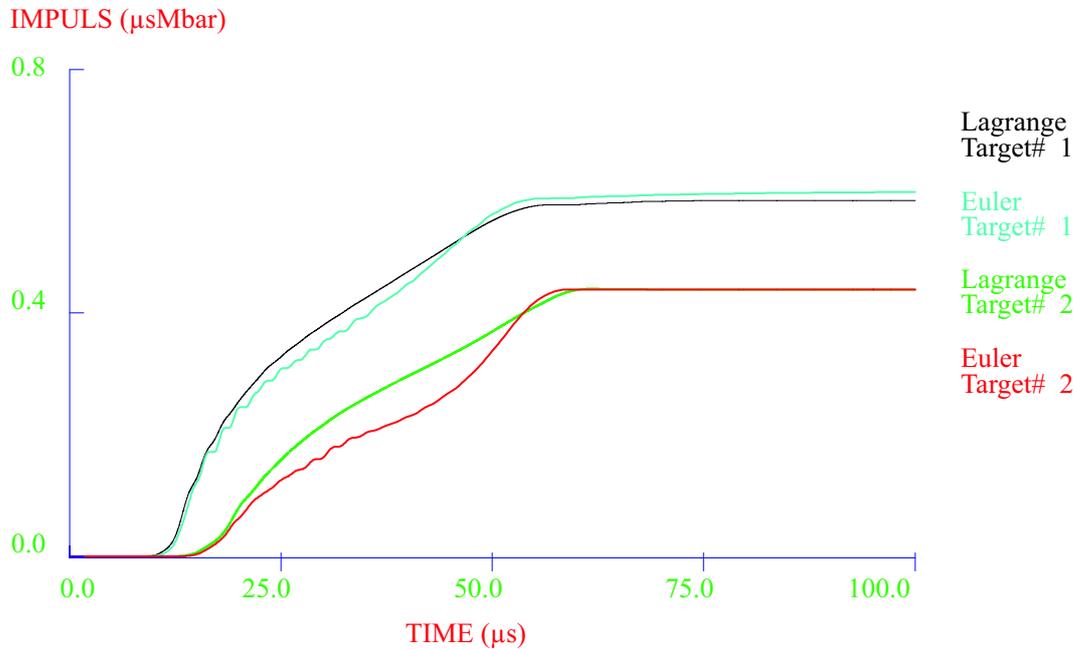


**Abbildung 3.14:** Simulation eines Detonationsvorgangs mit AUTODYN in der stationären EULERSchen-Betrachtungsweise

Der Detonationsprozess lässt sich auch in einer LAGRANGE-Diskretisierung simulieren. Dabei treten starke Deformationen der Sprengstoff-Elemente auf, was zu Eingriffen in die Simulation von Seiten des Benutzers führt, um den Simulationsprozess stabil zu halten (vgl. Abschnitt 4.5). Entscheidend ist, dass der Detonationsvorgang sowohl mit der EULER-LAGRANGE- als auch mit der LAGRANGE-LAGRANGE-Interaktion durchführbar ist, **ohne** wesentlichen Einfluss auf die frei gesetzte Energie der Detonation oder auf den Impuls im Festkörper zu haben.

In einer Vergleichsstudie wurde eine bestimmte Menge Sprengstoff PETN1.5 sowohl in einer EULER- als auch in der LAGRANGE-Diskretisierung modelliert und die Detonation simuliert. Im Festkörper wurde der Impuls in zwei verschiedenen Tiefen (Target #1: 2cm von der Oberfläche,

Target #2: 3cm von der Oberfläche) ausgewertet. Die gegenübergestellten Impulsverläufe aus beiden Diskretisierungen in Abbildung 3.15 verdeutlichen, dass beide Arten der Sprengstoffdiskretisierung den gleichen Impuls in den Festkörper einleiten.



**Abbildung 3.15:** Simulation des Detonationsprozesses mit einer EULER- und mit einer LAGRANGE-Diskretisierung: Vergleich der Impulsverläufe im Festkörper

Im Rahmen dieser Arbeit werden Detonationsvorgänge im Sprengstoff sowohl in einer EULER- als auch in einer LAGRANGE-Formulierung abgebildet (s. Abschnitt 8.1.4.1). Der verwendete Hydrocode AUTODYN lässt lediglich in zweidimensionalen Berechnungen eine EULER-LAGRANGE-Kopplung zu, die die Kontaktkräfte aus einer EULER-Diskretisierung in eine LAGRANGE-Diskretisierung übertragen. Eine derartige Kopplung steht bei dreidimensionalen Simulationen in AUTODYN derzeit nicht zur Verfügung. Wie später im Kapitel 7.1.3 gezeigt, ist bei Stahlbeton- bzw. stahlfaserverstärkten Stahlbeton-Platten aber eine dreidimensionale Simulation zwangsläufig notwendig.

Auf die Berechnung der Kontaktkräfte von zwei aufeinandertreffenden LAGRANGE-Netzen und die Behandlung stark deformierter Elemente wird im Abschnitt 4.5 näher eingegangen.

## Kapitel 4

# Ausgewählte Aspekte zu den Grundlagen von Hydrocodes

---

*Dieses Kapitel dient einer Einführung in die numerischen Grundlagen eines Hydrocodes, in den die konstitutiven Beziehungen eingebettet werden. Zunächst werden die Erhaltungsgleichungen als partielle Differentialgleichungen aufgestellt, die die mathematische Formulierung des kombinierten Anfangs-/Randwertproblems darstellen. Deren Lösung basiert auf der Methode der Finiten Differenzen mit expliziter Zeitintegration. Anschließend werden die hierfür verwendeten räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsverfahren näher beschrieben. Den Abschluss des Kapitels bilden die Angaben zur Konvergenz, zur Konsistenz und zur Stabilität der Lösungsalgorithmen, die einen erheblichen Beitrag zur Genauigkeit des numerischen Simulationsverfahrens leisten.*

---

### 4.1 Allgemeines

Die vorangestellten Kapitel 2 und 3 bilden die Basis, mit denen die in Abbildung 1.1 aus Kapitel 1.2 skizzierte Problematik der Detonationsbeanspruchung auf betonartige Strukturen beschrieben wird. Aufgrund der durch die Detonation ausgelösten Schockwelle liegen in der inhomogenen Struktur des Stahlbetons bzw. des bewehrten Stahlfaserbetons kurzzeitdynamische Wellenausbreitungen vor. Deren numerische Behandlung erfolgt mit den im Abschnitt 1.2.2 erwähnten Hydrocode-Simulationsverfahren, deren Grundlagen in diesem Kapitel vorgestellt und erläutert werden.

Die Einbettung der neuen Materialmodelle und die Durchführung der Simulationen erfolgen unter Verwendung des kommerziellen Hydrocodes AUTODYN 2002 [32]. Die Lösung der als partielle Differentialgleichungen aufgestellten Erhaltungsgleichungen (2.40), (2.42) und (2.47) in AUTODYN basiert auf der Methode der Finiten Differenzen mit expliziter Zeitintegration unter Verwendung einer nichtlinearen geometrischen Beschreibung der Verzerrungen und unter Verwendung von nichtlinearen Materialgesetzen, beispielsweise zur Beschreibung der Plastizität

oder des Schädigungsverhaltens. Der Nutzer hat die Möglichkeit, ein eigenes Materialmodell an einer bestimmten Schnittstelle zu implementieren und dem Berechnungszyklus von AUTODYN zur Verfügung zu stellen. Auf die im folgenden beschriebenen mathematischen Formulierungen und Diskretisierungsverfahren hat der Nutzer allerdings **keinen** Einfluss.

Die Nutzung kommerzieller Codes verleiten einen Entwickler von Materialmodellen dazu, sich mit den Verfahren gar nicht oder nur geringfügig auseinander zu setzen. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, dass ein Nutzer der Theorie des Programms uneingeschränkt glaubt und vertraut. Erst wenn er kritisch hinterfragt,

1. auf welche Anwendungen das Programm beschränkt ist,
2. welche Annahmen im System stecken,
3. ob die Konvergenz, Konsistenz und Stabilität gewährleistet wird bzw. mit welchen Verfahren man diese erreicht,

dann ist er in der Lage, eine Aussage zur Genauigkeit und zur Zuverlässigkeit des Programms und konsequenterweise auch auf die Qualität der Ergebnisse mit seinem *neuen Materialmodell* zu machen. Neben dieser **Verifikation** ist die **Validierung** eines Materialmodells notwendig, in dem die Ergebnisse aus der numerischen Simulation mit vorhandenen Messungen aus Experimenten verglichen werden. Dies geschieht in dieser Arbeit und wird im Rahmen der Verifikation und Validierung der neuen Materialmodelle im Abschnitt 8 gezeigt.

Die Arbeiten von Code-Entwicklern bieten die besten Übersichten zu Strukturen/Algorithmen von Codes, insofern sie die möglichen Methoden gegenüberstellen, ihre Leistungsfähigkeiten diskutieren und die Wahl ihres ausgesuchten Verfahrens begründen.

## 4.2 Mathematische Formulierung

Für die mathematische Behandlung der Erhaltungsgleichungen lassen sich die Differentialgleichungen grundlegend klassifizieren (BATHE 1996 [16]). Ausgehend von der allgemeinen partiellen Differentialgleichung

$$A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (4.1)$$

ist  $u$  die unbekannte Zustandsgröße des Systems. Eine Klassifizierung der Lösung von Gleichung (4.1) erfolgt mit der Methode der Charakteristiken, bei dem das Verhältnis der Koeffizienten  $A$ ,  $B$  und  $C$  den Charakter der gewonnenen Lösung der folgenden drei Typen von Differentialgleichungen eindeutig unterscheidet:

$$B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{elliptisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ > 0 & \text{hyperbolisch} \end{cases} \quad (4.2)$$

Damit wird das Ziel verfolgt, die Lösung der partiellen Differentialgleichung für das vorliegende Problem zu gewinnen, die die Bewegungsgleichungen, das Materialgesetz und die Randbedingungen mathematisch ausdrückt.

Für die eigene Aufgabenstellung liegt eine Kombination aus Anfangswert- und Randwertproblem vor. Die Lösungen sind zum einen abhängig vom Anfangszustand  $t = 0$  aller materiellen Punkte  $\mathcal{P}$  im räumlich betrachteten Körper  $\mathcal{B}$  ( $\rho(t = 0)$ ,  $\mathbf{v}(t = 0)$ ,  $\mathbf{T}(t = 0)$ ,  $e(t = 0)$ ), und zum anderen abhängig von den vorgegebenen Randbedingungen an der Oberfläche  $\partial\mathcal{B}$  des Körpers, der in disjunkte Untermengen  $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_\mathbf{v} \cup \partial\mathcal{B}_\mathbf{T}$  mit  $\partial\mathcal{B}_\mathbf{v} \cap \partial\mathcal{B}_\mathbf{T} = \emptyset$  unterteilt ist. Hierbei liegen entweder vorgegebene Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}^p$  vom DIRICHLET Typ oder vorgegebene Kräfte  $\mathbf{t}^p$  vom NEUMANN Typ vor (Abbildung 4.1).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^p - \mathbf{v} &= 0 & \text{auf} & \partial\mathcal{B}_\mathbf{v} \\ \mathbf{t}^p - \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{auf} & \partial\mathcal{B}_\mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.3)$$

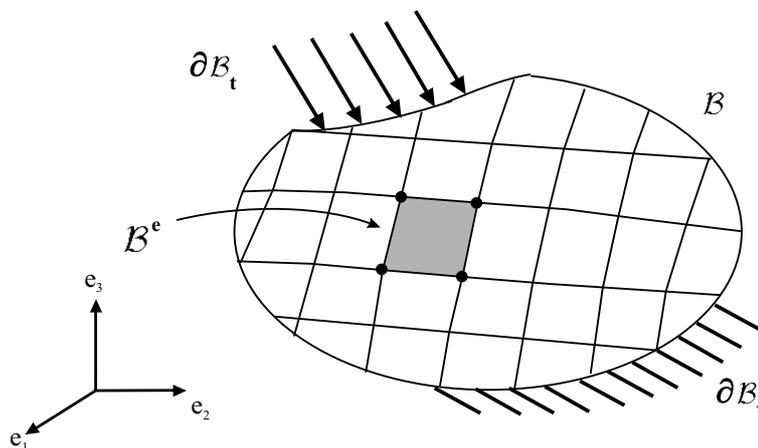


Abbildung 4.1: Diskretisiertes Gebiet eines räumlichen Körpers  $\mathcal{B}$

Die bei kurzzeitdynamischen Vorgängen zu betrachtenden Differentialgleichungen sind hyperbolisch. Die elastische Wellenbewegungsgleichung (3.1) verdeutlicht diese Zuordnung im Hinblick auf die zusätzlich vorhandene Zeitvariable  $t$ . Die Vorzeichen der Koeffizienten ergeben sich zu  $A < 0$ ,  $B = 0$  und  $C = 1$ , was zu  $B^2 - AC > 0$  führt. HIERMAIER zeigt in seiner Arbeit 2002 [98], wie wichtig eine richtige Zuordnung einer zu untersuchenden partiellen Differentialgleichung ist, da sie einen entscheidenden Einfluss auf die Wahl des Lösungsverfahrens darstellt.

Die gekoppelte mathematische Behandlung der räumlichen und der zeitlichen Diskretisierung erfordert die Anwendung besonderer Lösungsmethoden. Hierzu wird der räumliche Körper  $\mathcal{B}$  in eine endliche Anzahl von Kontinuumelementen in der LAGRANGE-Beschreibung unterteilt und auf der Elementebene  $\mathcal{B}^e$ , in Abhängigkeit von dessen Lage, das System in der Zeit berechnet (Abbildung 4.1). Zur Lösung der transienten hydrodynamischen Problemstellung wird in den meisten Hydrocode-Simulationsverfahren eine explizite Zeitintegration verwendet (BEN-

SON 1992 [21]), um inkrementell von  $t^n$  nach  $t^{n+1}$  ohne Iterationsprozess zur Gesamtlösung zu gelangen (siehe Abschnitt 4.4). Zusätzlich müssen Stabilitätskriterien erfüllt werden (siehe Abschnitt 4.5). Der Berechnungszyklus von Hydrocodes ist für ein Zeitinkrement in Abbildung 4.2 skizziert, so wie er auch in AUTODYN verwendet wird. Hierbei werden die Kräfte  $\mathbf{F}$ , die Beschleunigungen  $\dot{\mathbf{v}}$ , die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  und die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  an den Elementknoten und der hydrostatische Druck  $p$ , die innere Energie  $e$ , die Dichte  $\rho$ , die Spannungen  $\mathbf{T}$ , die Masse  $m$  und die Temperatur  $\Theta$  im Elementmittelpunkt ausgewertet (Abbildung 4.3).

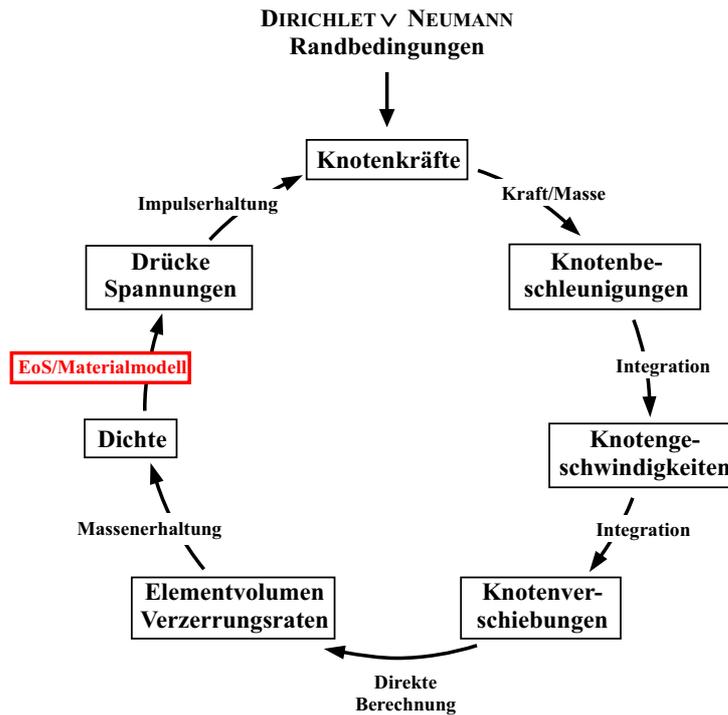
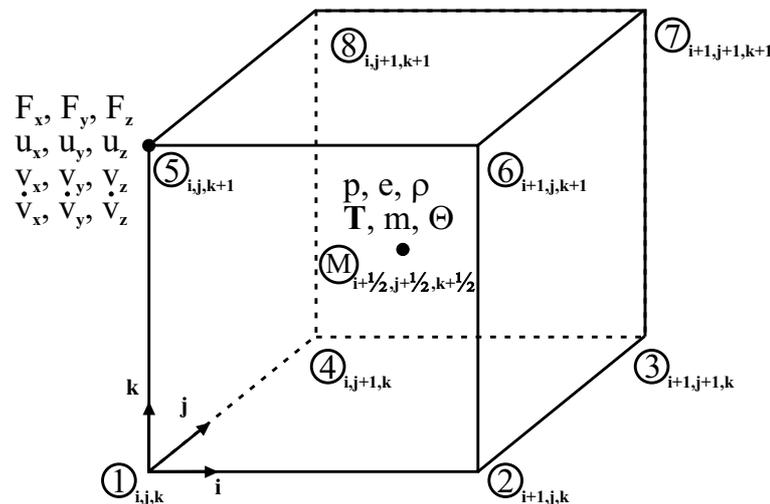


Abbildung 4.2: Berechnungszyklus von Hydrocode-Simulationsverfahren

1. Berechne die Zeitschrittgröße  $\Delta t$  aus der Wellengeschwindigkeit in den Elementen und den Elementabmessungen.
2. Berechne die Beschleunigungen  $(\partial \mathbf{v} / \partial t)$  an den Elementknoten aus dem Verhältnis der Knotenkräfte  $\mathbf{F}$  zur Masse  $m$  und aus der *Massenerhaltung*. Knotenkräfte ergeben sich aus den räumlichen Ableitungen der Spannungen ( $\text{div } \mathbf{T}$ ) mit Hilfe der *Impulserhaltung*.
3. Berechne die Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  durch Integration über die Zeit.
4. Berechne die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  durch Integration über die Zeit.
5. Berechne das Elementvolumen  $V$  aus den Knotenverschiebungen und die Bewegung (Verzerrungsraten)  $\dot{\mathbf{E}}$  des Elementes aus dem Geschwindigkeitsfluss über die Elementberandung.

6. Berechne die Dichte  $\rho$  aus dem Volumen  $V$  und der Masse  $m$  über die *Massenerhaltung*.
7. Berechne den hydrostatischen Druck  $p$  aus der Zustandsgleichung unter Berücksichtigung der im vorherigen Zyklus berechneten inneren Energie  $e$ .
8. Berechne die künstliche Viskosität  $q$  (siehe Abschnitt 4.5).
9. Berechne die neuen Spannungen  $\mathbf{T}(t^{n+1})$ , die sich aus den alten Spannungen  $\mathbf{T}(t^n)$  und der Änderung der Spannungen ergibt. Letztere lässt sich aus der JAUMANNschen Spannungsrate  $\hat{\mathbf{T}}$  und dem materialabhängigen Festigkeitsmodell ermitteln.
10. Berechne die neue innere Energie  $e(t^{n+1})$ , die sich aus der alten inneren Energie  $e(t^n)$  und aus der Änderung der Arbeit zwischen den Zeitpunkten  $t^n$  und  $t^{n+1}$  ergibt.
11. Beginne den nächsten Zyklus und gehe zu Punkt 1.



**Abbildung 4.3:** Auswertung von Variablen an den Elementknoten und im Elementmittelpunkt

Die Schnittstelle für den AUTODYN-Nutzer zur Implementierung eines eigenen Materialmodells ist der Punkt 9. In sogenannten *usersubroutines* besteht die Möglichkeit, Einfluss auf die Fließspannung, die Verzerrungsratenabhängigkeit oder das Schädigungsverhalten zu nehmen (Kapitel 7).

### 4.3 Räumliche Diskretisierung: Finite-Differenzen-Verfahren

Jedes Hydrocode-Simulationsverfahren verwendet eigene Algorithmen in der Finite-Differenzen Formulierung. Das in AUTODYN implementierte Verfahren zur räumlichen Diskretisierung basiert auf der von NOH 1964 [161] entwickelten Integralen-Differenzen-Technik. Das Finite-Differenzen-Verfahren geht von der starken Form der Differentialgleichungen aus, bei dem der

Körper  $\mathcal{B}$  durch eine bestimmte Anzahl an raumfesten Gitterpunkten abgebildet wird. In diesen Gitterpunkten werden die Ableitungen der Differentialgleichungen durch Differenzen ersetzt. Weitere Formulierungen für die Randbedingungen an den Oberflächen  $\partial\mathcal{B}$  des Körpers vervollständigen die Gleichungen zur Lösung des Systems.

Das Prinzip der Integralen–Differenzen–Methode von NOH basiert aus einer Kombination aus dem *GREENSchen Theorem* und aus dem *Mittelwertsatz der Integralrechnung*. Das *GREENSche Theorem* gibt eine Beziehung zwischen einem Volumenintegral und einem Oberflächenintegral für eine beliebige Funktion  $\mathbf{Z}$  wieder:

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}\mathbf{Z} d\mathcal{B} = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{B} . \quad (4.4)$$

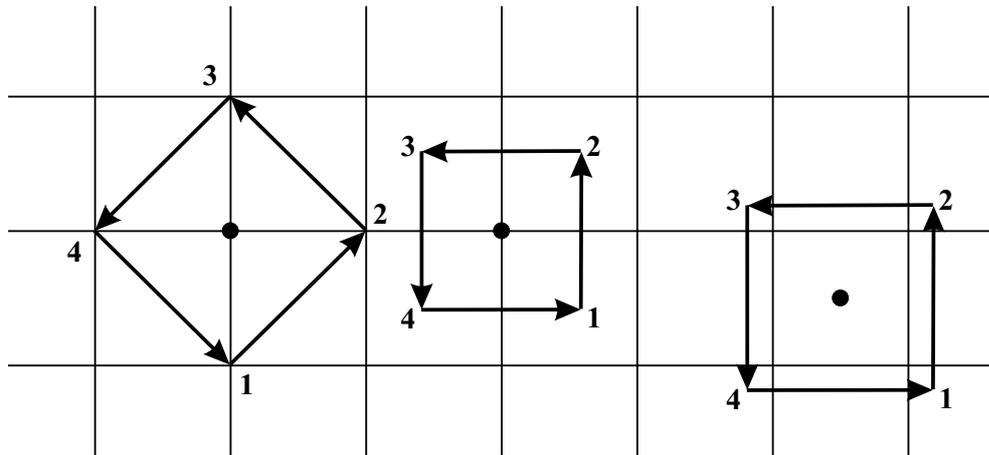
Beispielsweise lässt sich das Volumen eines Körpers mit Hilfe der Integration über die Oberfläche bestimmen. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung* nach HILDEBRAND 1962 [99] gibt den Mittelwert einer Funktion an einer beliebigen Stelle innerhalb eines Körpers an. In einem geschlossenen System, beispielsweise einem finiten Volumenelement, lassen sich die Oberflächenintegrale über die Berandung der Volumenelemente in diskrete Summen abbilden, welche durch Punkte fest definiert sind. Zwischen diesen Punkten erfolgt eine lineare Interpolation von  $\mathbf{Z}$ , welche auch durch eine Interpolationsfunktion höherer Ordnung ersetzt werden kann.  $\mathbf{Z}$  entspricht einer Zustandsgröße entweder auf einem Elementknoten 1 bis 8 oder im Elementmittelpunkt  $M$  (siehe Abbildung 4.3).

Da die Auswertung einer Zustandsgröße u.a. direkt von einer anderen Zustandsgröße abhängt, beispielsweise ergibt sich für den Schritt 2 aus dem Berechnungszyklus die Beschleunigung  $\dot{\mathbf{v}}$  am Elementknoten aus der Spannung  $\mathbf{T}$  im Elementmittelpunkt, ist einer von drei verschiedenen Integrationspfaden auszuführen. Die möglichen Integrationspfade sind exemplarisch in Abbildung 4.4 anhand einer vereinfachten zweidimensionalen Betrachtung dargestellt. Die Wahl des Integrationspfades entscheidet, ob die Ableitungen der Zustandsgröße am Elementknoten oder im Elementmittelpunkt ausgewertet werden.

Grundlegende Herleitungen von Finite–Differenzen–Algorithmen finden sich u.a. in DAVIS 1986 [43]. Eine detaillierte Beschreibung der im Hydrocode AUTODYN verwendeten Formulierung des Finite–Differenzen–Verfahrens befindet sich neben dem Theoriehandbuch [32] außerdem noch in BENSON 1992 [21] und in WILKINS 1999 [222]. Eine vereinfachte Berechnung von Zustandsgrößen für die eindimensionale Ausbreitung einer Welle ist in MEYERS 1994 [151] dargestellt.

#### 4.4 Zeitliche Diskretisierung: Inkrementelle Methoden zur Zeitintegration der System- und Materialgleichungen

Das grundlegende Prinzip der zeitlichen Diskretisierung basiert auf der Zeitintegration der Erhaltungsgleichungen in differentieller Form. Ausgehend vom Zeitpunkt  $t^n$  wird die Lösung zeitlich



**Abbildung 4.4:** Integrale–Differenzen–Methode: Integrationspfade der Randintegrale bei zweidimensionaler Betrachtung

mit dem Inkrement  $\Delta t$  erweitert, um zum Ergebnis zum nächsten Zeitpunkt  $t^{n+1}$  zu gelangen ( $t^{n+1} - t^n = \Delta t$ ).

In allgemeiner Form stellt sich die Lösung  $U$  einer Erhaltungsgleichung (2.40), (2.42) oder (2.47) in zeitlicher Ableitung dar mit

$$\frac{\partial U}{\partial t} \equiv G(U) \quad . \quad (4.5)$$

Nach dem *Mittelwert–Theorem* nach HILDEBRAND 1962 [99] ergibt sich für den Mittelwert  $\bar{G}$  für die Zeitintegration

$$\bar{G} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} G(\tau) d\tau \quad . \quad (4.6)$$

Mit bekannten Werten für  $G$  lässt sich  $\bar{G}$  auswerten zu

$$\bar{G} = \alpha \cdot G^{t+1} + (1 - \alpha) \cdot G^t \quad . \quad (4.7)$$

Die Werte für  $\alpha$  liegen zwischen 0 und 1. In der Literatur wird dies als Einschrittverfahren der  $\alpha$ -Familie bezeichnet (HUGHES 1999 [107]). Somit ergibt sich für die Integration von Gleichung (4.5) die Lösung für den nächsten Zeitschritt:

$$U^{t+1} = U^t + \Delta t (\bar{G}) = U^t + \Delta t (\alpha \cdot G^{t+1} + (1 - \alpha) \cdot G^t) \quad (4.8)$$

Für beliebige  $\alpha$ -Werte  $\neq 0$  wird Gleichung (4.8) als implizites Zeitintegrationsverfahren bezeichnet, da auf der rechten Seite Terme verbleiben, die bereits Elemente zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  beinhalten, die noch unbekannt sind. Für  $\alpha = 1$  verschwindet der Prediktor–Schritt  $\Delta t \cdot G^t$  und das Verfahren wird als EULER–Korrektor–Verfahren bezeichnet (Implizite EULER–Rückwärtsmethode). Ein spezieller Fall ist die CRANK–NICOLSON–Methode für  $\alpha = 0.5$ , die eine implizite Trapezregel für den Prediktor- und Korrektor–Schritt ansetzt (DAVIS 1986 [43]).

Eine implizite Lösung ist mit geeigneten Methoden, beispielsweise dem NEWTON–RAPHSON–Verfahren, auszuiterieren. Ein entscheidender Vorteil dieser Verfahren liegt in deren uneingeschränkten Stabilität (HUGHES 1999 [107], SAUER 2000 [186]). Der Vorteil schwindet, wenn zum einen für die stabile Lösung die Zeitschrittgröße sehr klein wird und zum anderen der Aufwand zur Lösung des Gleichungssystems bei impliziten Verfahren aufgrund der Anzahl der Freiheitsgrade extrem zunimmt.

Aufgrund der reduzierten Zeitschrittgröße nach dem CFL–Kriterium bei Wellenausbreitungsproblemstellungen sind implizite Verfahren für Hydrocodes nicht geeignet. Sie nutzen ein explizites Zeitintegrationsverfahren ohne Korrektor–Schritt  $\Delta t \cdot G^{t+1}$ , das EULER–Prediktor–Verfahren für  $\alpha = 0$  (Explizite EULER–Vorwärtsmethode). Auch die auftretenden Oszillationen lassen sich mit Hilfe numerischer Stabilitätsverfahren, wie beispielsweise der künstlichen Viskosität, in den Griff bekommen. Hydrocodes verwenden für die Auswertungen der Zustandsgrößen wie Beschleunigungen oder Spannungen eine adaptive Form der zentralen Differenzenmethode. Das CFL–Kriterium, die künstliche Viskosität und die adaptierte Form der zentralen Differenzenmethode sind näher im Abschnitt 4.5 erläutert. Das explizite Verfahren ist gegenüber den impliziten Verfahren ausreichend stabil bzw. genau und erweist sich als effizient.

## 4.5 Zur Konvergenz, Konsistenz und Stabilität der numerischen Simulation von Schockwellen

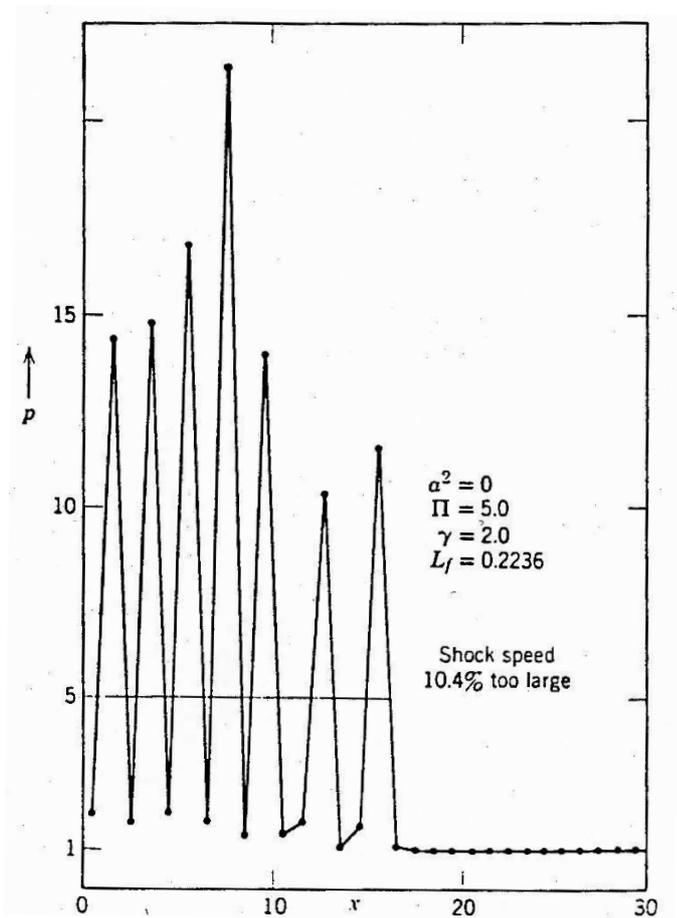
Bei der numerischen Umsetzung im Hydrocode–Simulationsverfahren liegen eine Reihe von Besonderheiten vor, die sich aus den Verfahren der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung ergeben. Dieser Abschnitt ist daher ausgewählten Aspekten gewidmet, die im direkten Zusammenhang mit der numerischen Abbildung der Schockwellenausbreitung auftreten. Es gilt, unerwünschte Nebeneffekte innerhalb der Methoden auszuschließen bzw. einzugrenzen, die die Konvergenz und Stabilität der Lösung gefährden.

Von besonderer Bedeutung sind Oszillationen im Bereich der Schockfront, die bei der Lösung der Erhaltungsgleichungen mit Hilfe des Finite Differenzen Schemas und der Verwendung der zentralen Differenzenmethode bei der expliziten Zeitintegration auftreten, falls nicht *künstlich* in die numerische Lösung eingegriffen wird. Des weiteren zeigt sich die zentrale Differenzenmethode nur als bedingt stabil, so dass eine Adaption des Verfahrens vorgenommen wird.

Infolge des Integrationsalgorithmus und der konstanten Ansätze in der Berechnung der Elementspannungen besteht die Möglichkeit, unerwünschte Spannungszuwächse aus den *Null–Energie–Moden* zu erhalten. Um dies zu vermeiden wird eine Dämpfung der sogenannten *Hourglass–Eigenformen* eingeführt. Ebenso richtet sich das Augenmerk auf die Behandlung stark deformierter Elemente, die im Kontaktbereich zwischen Detonation und Festkörper (dem Kraterbereich) auftreten.

### Hochfrequentes Verhalten – Oszillation

Bei der Ausbreitung der Schockwelle in der numerischen Simulation stellt sich das Phänomen der Oszillation im Bereich der Schockfront ein, falls keine entsprechenden Algorithmen den LAGRANGESchen Diskretisierungsverfahren hinzugefügt werden (Abbildung 4.5). Diese Verfahren können den Druckspannungssprung nicht lösen, der sich an der Schockfront einstellt. Sie gehen von einer Annahme aus, dass die zu approximierenden Funktionen kontinuierlich verlaufen. EULER-Verfahren sind daher in der Lage, das RIEMANN-Problem direkt zwischen zwei benachbarten Elementen zu lösen (siehe u.a. VON NEUMANN & RICHTMYER 1950 [215], RICHTMYER & MORTON 1967 [176], SOD 1978 [196], WILKINS 1980 [221], ANDERSON 1987 [5], BENSON 1992 [21]).



**Abbildung 4.5:** Oszillierender Verlauf der Schockwelle **ohne** künstliches Eingreifen in die numerische Lösung (aus: RICHTMYER & MORTON 1967 [176])

Eine anschauliche Interpretation der Wellenschwingung liefert POTTER 1973 [169]. Er sagt, dass die Massen sich in den Knoten der Diskretisierung konzentrieren und die Schockwelle diese Massen in Schwingung versetzt. Diese Theorie ist vergleichbar mit der Schwingungsbewegung von

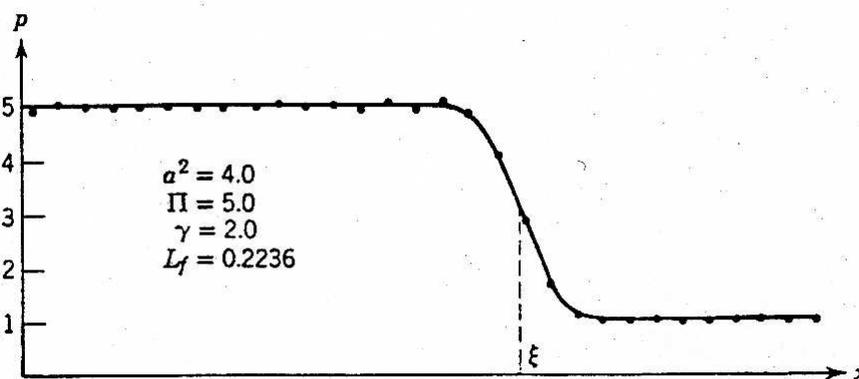
Molekülen und der damit verbundenen kinetischen Energie. In der Realität liegt allerdings eine innere Energie vor und nicht die sichtbare kinetische Energie, die aus der Massenschwingung hervorgeht. Deshalb werden künstliche Mechanismen in der Form einer Viskosität vorgeschlagen, die die kinetische in eine innere Energie rückführen. Die speziell entwickelte künstliche Viskosität geht auf die Idee von VON NEUMANN & RICHTMYER 1950 [215] zurück, die die starke Oszillation der Schockwelle unterdrückt und die Druckspitzen gleichmäßig auf eine kleine Anzahl von Elementen verteilt. In COURANT 1976 [40] und SOD 1978 [196] wird gezeigt, dass diese Vorgehensweise nicht willkürlich sondern physikalisch sinnvoll ist, da der reale Verlauf einer Schockwelle in der Tat von viskosen und wärmeleitenden Effekten begleitet wird.

Die Auswirkung der in den Gleichungen (4.9) und (4.10) eingeführten *künstlichen Viskositäten*  $q$  für die Kompression und für die Entspannung zeigt sich in der *geglätteten* Lösung der Schockwelle in Abbildung 4.6. Die Schockwelle wird lediglich gedämpft, wenn eine Kompressionswelle vorliegt. Für eine Entspannungswelle ist  $q = 0$ . Ursprünglich sahen VON NEUMANN & RICHTMYER lediglich einen quadratischen Term zur Verschmierung der Schockfront über vier bis sechs Elemente vor (BENSON 1992 [21]). Um eine verbesserte Glättung der Schockwelle nach dem Durchlaufen der Schockfront zu erzielen, wurde ein linear viskoser Anteil hinzugefügt.

$$q = \rho a_1^2 \left( \operatorname{div} \mathbf{v}^T \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \rho a_2 c \sqrt{\operatorname{div} \mathbf{v}^T \operatorname{div} \mathbf{v}} \quad \text{für Kompression} \quad (4.9)$$

$$q = 0 \quad \text{für Entspannung} \quad (4.10)$$

Die konstanten Terme  $a_1$  und  $a_2$  (häufig auch mit  $C_Q$  und  $C_L$  bezeichnet) sind Parameter in der Dimension einer Länge zur Regulierung der quadratischen und linearen Anteile der künstlichen Viskosität.  $c$  entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.



**Abbildung 4.6:** Geglätteter (realer) Verlauf der Schockwelle mit künstlicher Viskosität in der numerischen Lösung (aus: RICHTMYER & MORTON 1967 [176])

*Shock viscosities introduce errors and problems of their own.* Dieser Satz aus dem Grundlagenartikel von BENSON 1992 [21] dient als Warnung an die Benutzung der künstlichen Visko-

sität in Hydrocode-Simulationsverfahren. Insbesondere bei Schockwellen mit extremen Druckamplituden, wie sie bei Detonationen auftreten, können Fehler in der Energieerhaltung nach dem Passieren der Schockfront auftreten, die dann zu Fehlern in der Dichte und in der Schockwellengeschwindigkeit führen. Zusätzliche Instabilitäten liegen bei stark deformierten Elementen vor, die ein hohes Seitenlängenverhältnis aufweisen. Dies führt u.a. zu einer Ineffizienz der expliziten Methode, da der Zeitschritt  $\Delta t$  aus der Elementgröße berechnet wird. Dies wirkt sich auf den Elementdruck und damit auch auf die Wellengeschwindigkeit aus.

### Numerische Stabilität bei expliziter Zeitintegration

Die numerische Stabilität bei expliziter Zeitintegration ist nur bedingt gewährleistet. Daher müssen bestimmte Restriktionen erfüllt sein, damit die Stabilität mit jedem Zeitinkrement  $\Delta t$  sichergestellt werden kann. Die Lösung einer Funktion  $U$  wird zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  (kurz:  $U^{n+1}$ ) aus dem Anfangswert  $U$  zum Zeitpunkt  $t^n$  (kurz:  $U^n$ ) bestimmt. Dieses Verfahren wird ursprünglich aus einer TAYLOR-Reihenentwicklung hergeleitet und besitzt in ihrer Ausgangsform eine Genauigkeit erster Ordnung, nachdem die Anteile hinter dem ersten Glied der TAYLOR-Reihe wegfallen:

$$U^{n+1} = U^n + \dot{U} \Delta t . \quad (4.11)$$

Eine Verbesserung des Verfahrens zeigt sich, wenn lediglich in halben Zeitschritten  $\frac{1}{2}\Delta t$  vorgegangen wird und damit zunächst Zwischenwerte zum Zeitpunkt  $t^{n+1/2}$  berechnet werden. Somit erreicht das sogenannte Prediktor-Korrektor Verfahren eine Genauigkeit zweiter Ordnung:

$$U^{n+1/2} = U^n + \frac{1}{2}\dot{U}^n \Delta t , \quad U^{n+1} = U^n + \dot{U}^{n+1/2} \Delta t . \quad (4.12)$$

Wie bereits in Abschnitt 2.3.3 berichtet, wird das Prediktor-Korrektor Verfahren mit halben Zeitschritten **nicht** bei der Spannungsermittlung verwendet, da dann die berechnete Spannung nicht eindeutig auf der Fließfläche liegt.

Obwohl die Geschwindigkeiten in Hydrocode-Simulationsverfahren zu jedem vollen Zeitschritt  $t^n, t^{n+1}, usw.$  berechnet werden, wird die Verzerrungsrate zu jedem halben Zeitschritt  $t^{n+1/2}$  ausgewertet. HALLQUIST 1986 [92] zeigt, dass ansonsten bei einer reinen Starrkörperrotation trotzdem Verzerrungsraten  $\neq 0$  vorliegen.

Da die Lösung der Gleichung (4.11) unter Berücksichtigung aller Terme der TAYLOR-Reihe harmonisch oder abklingend sein muss, lässt sich aus Gründen der Stabilität die Begrenzung des Zeitschritts  $\Delta t$  herleiten (COURANT 1976 [40]). Dieses nach COURANT-FRIEDRICHS-LEVY benannte Stabilitätskriterium (CFL-Kriterium) begrenzt den Zeitschritt so, dass eine Spannungswelle mit der Geschwindigkeit  $c$  das Element mit der geringsten Ausdehnung  $\Delta x$  im diskretisierten Raum nicht überschreiten kann, ohne in diesem Element mindestens einmal die Erhaltungs-

und Materialgleichungen gelöst zu haben.

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}} \frac{1}{\rho} \quad (4.13)$$

Ein zusätzliches Kriterium zur Berechnung des Zeitschritts  $\Delta t$  ergibt sich aus der verwendeten künstlichen Viskosität. BENSON 1992 [21] schlägt eine weitere mögliche Berechnung vor mit

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{B + \sqrt{B^2 + c^2}} \quad \text{mit} \quad B = \begin{cases} a_2 c + a_1 \sqrt{\operatorname{div} \mathbf{v}^T \operatorname{div} \mathbf{v}} & \operatorname{div} \mathbf{v} < 0 \\ a_2 c & \operatorname{div} \mathbf{v} \geq 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Die Wellengeschwindigkeit  $c$  basiert auf dem elastischen Schubmodul  $G$  und einem Anteil aus der Zustandsgleichung

$$c = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{G}{\rho_0} + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_e + \frac{pV^2}{\rho_0} \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_p} \quad (4.15)$$

Eine vereinfachte Form von Gleichung (4.14), die die künstliche Viskosität beinhaltet, liegt im Hydrocode AUTODYN zur Bestimmung des Zeitschritts vor:

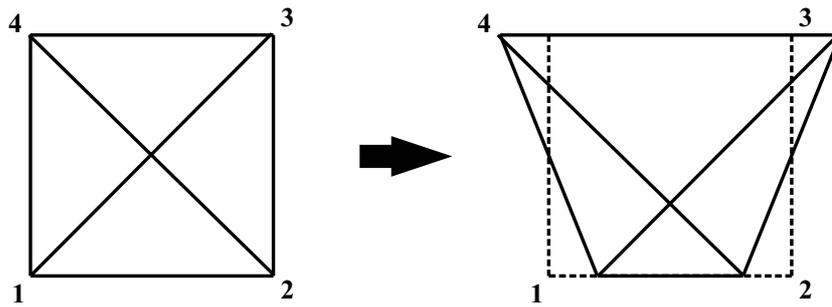
$$\Delta t \leq \frac{1}{4a_1^2(\operatorname{div} \mathbf{v}^T \operatorname{div} \mathbf{v})} \quad \text{und} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{2a_2c} \quad (4.16)$$

Die Parameter  $a_1$  und  $a_2$  in den Gleichungen (4.14) und (4.16) entsprechen den Größen aus Gleichung (4.9).

### Hourglass Eigenformen

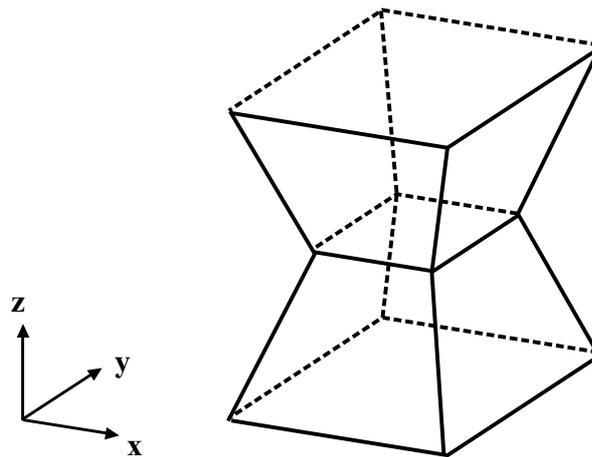
Aus den Ableitungen der Geschwindigkeiten lassen sich die Deformationsraten und somit auch die Spannungen in einem Element berechnen. Generell verwenden Hydrocodes ein Integrationsverfahren mit lediglich einem Integrationspunkt, so dass bei linearem Ansatz zur Berechnung der Geschwindigkeiten bzw. Verschiebungen in den Knoten nur konstante Geschwindigkeitsgradienten bzw. Deformationsraten ermittelt werden können. Somit liegen konstante Spannungen in einem Element vor.

Bei genauerer Betrachtung der Gleichungen zur Berechnung der Deformationsraten nach der Finite-Differenzen-Methode (vergleiche u.a. BENSON 1992 [21], WILKINS 1999 [222] oder AUTODYN 2002 [32]) zeigt sich eine direkte Abhängigkeit der Relativbewegungen der Knoten. Sollte sich ein Element derart verformen, dass die Länge der Diagonalen im Element konstant bleibt, dann liegen keine Änderungen der Deformationen und somit keine Elementspannungen vor. Dieses Beispiel der Elementverzerrung ist vereinfacht für den zweidimensionalen Fall in Abbildung 4.7 gezeigt. Demnach können mit diesen Verfahren nicht alle Spannungen berechnet werden, die aufgrund der Elementverzerrungen auftreten. Wenn durch Bewegungen der Knotenpunkte aufgrund des Integrationsschemas **keine** Spannungen ermittelt werden, dann liegen sogenannte *unechte Null-Energie-Moden* vor.



**Abbildung 4.7:** "Hourglass"-Eigenformen in 2D: Elementverzerrung, die **keine** Spannungen erzeugt

Um diese *Null-Energie-Moden* zu vermeiden, wurde das Verfahren der "Hourglass"-Dämpfung entwickelt. Hierbei werden einem Element (Rückstell-)Kräfte hinzugefügt, die der Entstehung von Elementverzerrung mit sanduhrartigem Aussehen entgegenwirken, vergleiche Abbildung 4.8. Das in AUTODYN implementierte Verfahren geht auf die Entwicklungen von HALLQUIST 1982 [91] zurück.



**Abbildung 4.8:** "Hourglass"-Eigenformen in 3D (sanduhrenartig): Elementverzerrung, die **keine** Spannungen erzeugt

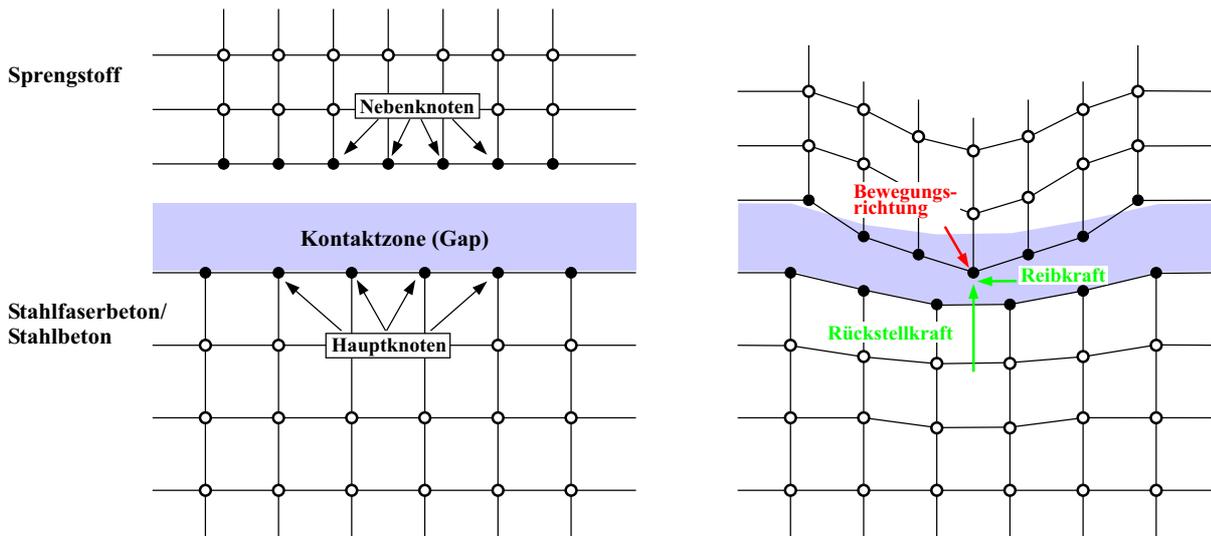
In einem kubischen Volumenelement werden an jedem der 8 Knoten 3 Kräfte  $F$  in jeweils x-, y- und z-Koordinatenrichtung eingeführt, die der "Hourglass"-Elementverzerrung entgegenwirken. Die Summe aller Kräfte je Richtung ist Null, so dass die Impulserhaltung nicht beeinträchtigt wird:

$$\sum_{i=1}^n F_{xn} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n F_{yn} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n F_{zn} = 0 \quad . \quad (4.17)$$

Die (Rückstell-)Kraft  $F$  hängt von der Knotenbewegung  $\mathbf{v}$ , der Elementdichte  $\rho$ , der momentanen Wellengeschwindigkeit  $c$  des Elementes und dem Elementvolumen  $V$  ab ( $F = F(\mathbf{v}, \rho, c, V)$ ). Das in AUTODYN implementierte Verfahren ist detailliert in [32] beschrieben.

## Kontaktreibung

Die Interaktion zwischen LAGRANGE-Netzen erfolgt mit Hilfe von Kontakt-Algorithmien. Das aktive LAGRANGE-Netz, im vorliegenden Fall die räumliche Diskretisierung der Sprengladung, dehnt sich aufgrund des Sprengvorgangs aus und trifft auf das passive LAGRANGE-Netz des Festkörpers, der betonartigen Struktur (Abbildung 4.9).



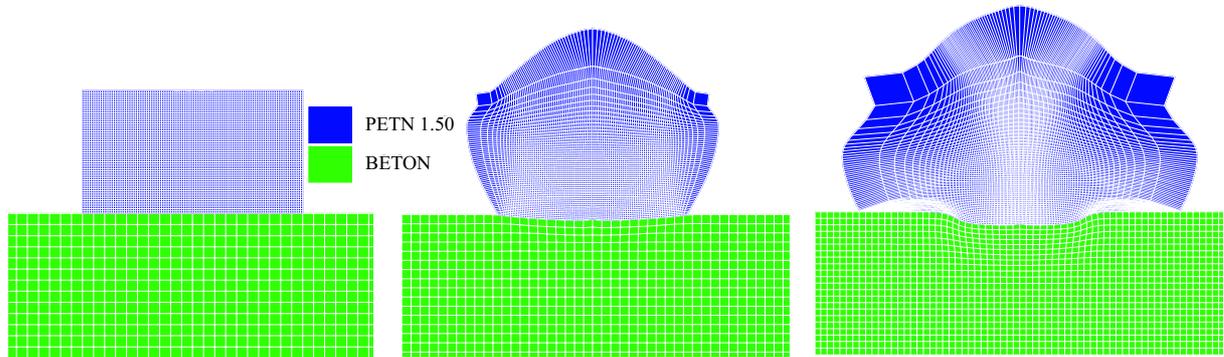
**Abbildung 4.9:** Kontaktbereich von zwei LAGRANGE-Diskretisierungen: Eindringen von sich ausbreitenden Sprengstoffknoten aufgrund des Detonationsvorgangs in die Kontaktzone des Festkörpers, Ermittlung der Rückstellkraft (Normal und Tangential) aus Kontaktberechnung

Beim Kontakt der beiden Netzoberflächen werden Druckkräfte übertragen und Reibungskräfte aktiviert. Die numerische Simulation dieses Phänomens bedarf einer festgelegten Kontaktzone zwischen den beiden Materialoberflächen, in der die Nebenknoten ('Slave') des Sprengstoffs wegen ihrer Bewegung eindringen und mit den Hauptknoten ('Master') des ruhenden Festkörpers interagieren. Hierbei wird mit Hilfe der Impulsbilanz, der Masse und der Geschwindigkeiten eine Rückstellkraft ermittelt, die den eindringenden Knoten des Sprengstoffs wieder aus der Kontaktzone treibt. Aus der Rückstellkraft lassen sich die Normal- und Tangentialkräfte berechnen, die dann auf die Hauptknoten des Festkörpers wirken. Der Vorgang wiederholt sich mit jedem Zeitschritt (vgl. BENSON 1992 [21] oder AUTODYN 2002 [32]).

Wie u.a. in den Arbeiten von WILKINS 1964 [220] oder HALLQUIST 1982 [91] gezeigt, ist in der numerischen Abbildung des Sprengstoffs eine extrem feine Elementdiskretisierung notwendig, da der Ausbreitungsprozeß des Detonationsvorgangs zu einer erheblichen Volumenvergrößerung und zu Elementverzerrungen führt. Starke Deformationen der LAGRANGE-Elemente treten auch im Bereich der Kontaktzone zwischen Sprengstoff- und Festkörper-Diskretisierung auf.

## Behandlung stark deformierter LAGRANGE-Elemente

Aus Abbildung 4.10 ist ersichtlich, dass stark deformierte LAGRANGE-Elemente sowohl im Sprengstoffnetz als auch im Festkörpernetz auftreten. Die Deformationen werden in den Netzen auf verschiedene Arten verursacht und auch auf verschiedene Arten in der Simulation behandelt.

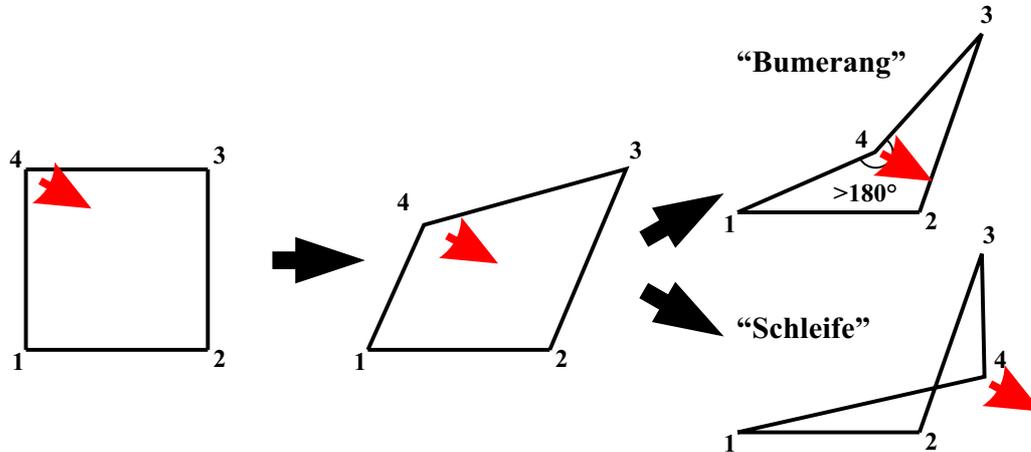


**Abbildung 4.10:** Simulation eines Detonationsvorgangs mit AUTODYN in der beweglichen LAGRANGEschen Betrachtungsweise

Die Elemente des PETN 1.50 Sprengstoffs verformen sich wegen der Ausbreitung der Detonationschwaden. Wie Abbildung 4.10 illustriert, dehnen sich die äußeren Sprengstoffelemente bis auf die obere, äußere Ecke relativ gleichmäßig aus. Dagegen treten im Sprengstoffnetz direkt an der Kontaktstelle zum Festkörpernetz extreme Deformationen auf, die dann entstehen, wenn ein Knoten des Sprengstoffnetzes aufgrund der Interaktion mit dem Festkörpernetz in dessen Kontaktzone eindringt und über die Rückstellkraft wieder aus der Kontaktzone nach draußen gesetzt wird. Die Deformation entsteht durch die sprungartige Änderung der Koordinaten des in den Kontaktbereich eindringenden Knotens des Sprengstoffnetzes. Somit wird die Deformation durch die Elementgröße des Sprengstoffnetzes und durch den Kontaktalgorithmus beeinflusst. Im Gegensatz dazu werden die Deformationen des Festkörpers klassisch aus den von aussen aufgebrauchten Kontaktkräften im Zusammenhang mit den Materialfestigkeiten und -steifigkeiten ermittelt.

Die Berechnung der Beschleunigungen, der Geschwindigkeiten und der Verschiebungen erfolgt zeitlich inkrementell in den Knotenpunkten eines LAGRANGE-Elementes, vergleiche Abbildung 4.3. Demnach kann im Grenzfall ein Durchschlagsproblem bei der Elementdeformation sowohl im Sprengstoff-Netz als auch im Festkörper-Netz auftreten, wie dies in Abbildung 4.11 schematisch angedeutet ist. In diesem Fall wird der Knoten 4 in Pfeilrichtung bewegt. Liegt eine extreme Anfangsbeschleunigung des Knotens 4 vor, dass entweder in einem Zeitinkrement die anderen Knoten aufgrund ihrer Trägheit nicht mitbeschleunigt werden oder die anderen Knoten fest gelagert sind, dann kann eine Elementverformung in der Form eines "Bumerangs" oder im Extremfall sogar einer "Schleife" vorliegen. Hierfür ist der innere Winkel  $\alpha$  am Knoten 4 größer

als  $180^\circ$ . Die Berechnung des Elementvolumens über die JAKOBI-Transformation ergibt dann eine negative Determinante, was zu einem negativen Elementvolumen führen kann. Derartige Deformationen lassen eine Simulation abbrechen.



**Abbildung 4.11:** Schematische Darstellung von Durchschlagsproblemen: Auftreten von "Bumerang"- oder "Schleifen"-Formen in der Elementdeformation

Fazit ist, dass die stark deformierten Elemente einen erheblichen Einfluss auf die Genauigkeit und auf die Stabilität der Lösung haben. Dies zeigt unter anderem die Berechnung des Zeitschritts  $\Delta t$  aus Gleichung (4.13) zur Lösung der expliziten Zeitintegration, wobei  $\Delta t$  abhängig von der Elementgröße ist, die aus der Länge der Elementdiagonalen ermittelt wird. Je größer also das *Längen zu Breiten-Verhältnis* eines Elementes ist, desto kleiner wird der Zeitschritt. Da mit Hilfe des Zeitschritts alle Änderungen der Zustandsgrößen berechnet werden, führt ein sehr kleiner Zeitschritt zu sehr kleinen Änderungsraten, die wiederum Rundungsfehler beinhalten können. Da numerische Simulationen zur Berechnung der Zustandsgrößen einheitengebunden sind, wirkt sich das Problem der Rundungsfehler deutlich auf die Größenordnung der Änderungsraten je nach Wahl des SI-Einheitensystems aus. Ein nicht unerheblicher Nachteil liegt in der verlängerten Simulationsdauer.

Das Vorgehen bei der numerischen Simulation einer Kontaktdetonation auf eine betonartige Struktur erfordert daher externe Eingriffe in den Simulationsprozeß, die zum einen zur Stabilisierung des Berechnungsablaufs führen und zum anderen die Simulationsdauer sinnvoll beschränken. Wann welcher externe Eingriff vollzogen wird, entscheidet sich nach dem Ziel, den wirklichen physikalischen Prozess so realitätsnah wie möglich in der Simulation abzubilden. Hierbei kommt es vor allem darauf an, den Impuls aus der Detonationsbelastung weitestgehend vollständig in den Festkörper einzuleiten.

So ist für einen stabilen Berechnungsablauf gesorgt, wenn sowohl das Auftreten stark deformierter Elemente als auch das Auftreten von "Bumerang"- oder "Schleifen"-Formen unterbunden wird. Hierzu werden die Elemente, die eine vorgegebene Verzerrung oder auch

eine vorgegebene Spannung überschreiten, aus dem Berechnungszyklus entfernt. Dieses Verfahren ist unphysikalisch, da somit auch die Energie und die Masse des Elementes aus der gesamt-energetischen Betrachtung eines geschlossenen Systems verschwindet. In der Anwendung ist diese Vorgehensweise dennoch sinnvoll, da sie

1. eine stabile Lösung liefert, die
2. zusätzlich ein konvergierendes Ergebnis erreicht und
3. der Eingriff zu einem Zeitpunkt geschieht, so dass er keinen nennenswerten Einfluss auf ein realitätsnahes Ergebnis hat (vgl. Abschnitt 3.2.4). Dabei wird der Energiefehler kontrolliert, damit die entnommene Energie der entfernten Elemente nicht zu stark von der Energie des Ausgangssystems abweicht.

Die im Rahmen der Arbeit untersuchten Kontaktdetonationen auf betonartige Strukturen beinhalten folgendes Vorgehen bei den externen Eingriffen in den Berechnungsablauf:

1. Da das Hauptaugenmerk auf der realitätsnahen Beschreibung des Festkörpers liegt, erfolgt das unphysikalische Entfernen von Elementen (erodieren) nur im Sprengstoff-Netz. Das Erosionskriterium wird so gewählt, dass erst bei einem inneren Winkel  $\alpha \rightarrow 180$  und  $\alpha < 180$  das Element gelöscht wird. Zusätzlich liegen die Elementabmessungen des Sprengstoff-Netzes im Millimeterbereich, so dass das Löschen von Elementen seltener eintritt als bei größeren Elementabmessungen.
2. Um die verzerrten Elemente zu degenerieren, wird die Simulation zu einem wohl überlegten Zeitpunkt unterbrochen und die LAGRANGE-Elemente des Sprengstoffs für einige wenige (maximal 5) Zeitinkremente durch eine ALE-Diskretisierung ersetzt (ALE = Arbitrary-LAGRANGE-EULERSche Betrachtung). ALE-Diskretisierungen erlauben zum Teil eine Strömung von Masse und Energie durch die Elemente. Somit dient diese Vorgehensweise zu einer Art Netzadaption, wie dies in Abbildung 4.12 veranschaulicht ist. Stark verzerrte

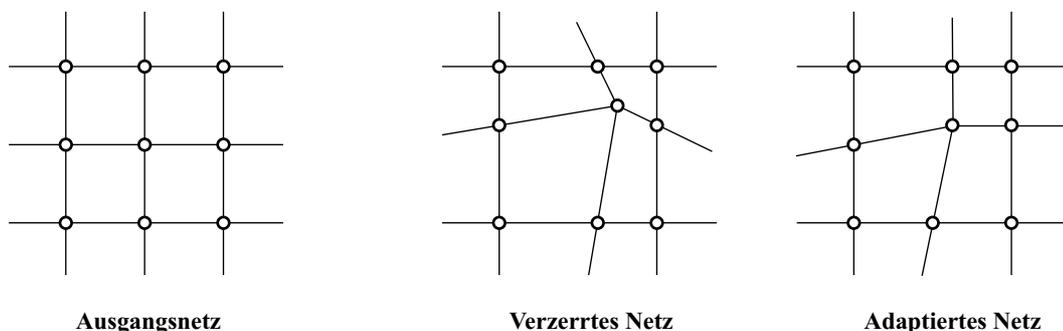


Abbildung 4.12: ALE-Netzadaption

Elementzonen werden *geglättet*. Das Prinzip der ALE–Diskretisierung ist u.a. im Theoriehandbuch von AUTODYN 2002 [32] erläutert.

3. Deaktivieren des Sprengstoff–Netzes, nachdem der Impuls aus dem Detonationsvorgang nahezu vollständig in den Festkörper eingeleitet wurde. Die Entscheidung über den Zeitpunkt der Deaktivierung bedarf einiger Vorstudien und Erfahrung.
4. Abbruch der Simulation zu einem Zeitpunkt, wenn sowohl der Belastungsprozeß als auch das Ausklingen der Spannungswellen im Festkörper abgeschlossen und keine weiteren signifikanten Änderungen der Spannungen, der Verzerrungen oder der Schädigungen zu erwarten sind.

---

## Kapitel 5

# Mechanisches Werkstoffverhalten

---

*Diese Kapitel dient zur Vorstellung der aus der Literatur bekannten Versuche zum Werkstoffverhalten Stahlfaserbeton, Bewehrungsstahl und Stahlbeton. Deren charakteristische makromechanische Materialeigenschaften, wie ein- und mehraxiales Materialverhalten, Festigkeit und Verzerrungsratenabhängigkeit, sind auf Grundlage der experimentellen Ergebnisse skizziert. Das Verbundtragverhalten wird hinsichtlich der verschiedenen Verbundtragwirkungen näher aufgezeigt, da es auf die spätere numerische Modellbildung einen wesentlichen Einfluss hat.*

---

### 5.1 Allgemeines

Es ist bekannt, dass die Beschreibung der in dieser Arbeit betrachteten Werkstoffe Stahlfaserbeton, Bewehrungsstahl und Stahlbetonverbund nicht nur hinsichtlich ihres statischen oder dynamischen Tragverhaltens sondern beispielsweise auch im Bezug auf Kriechen und Schwinden, Relaxation oder chemischer Resistenz Bücher füllt. Daher wird in diesem Abschnitt gezielt von den allgemeinen auf die speziellen dynamischen Stoffphänomene übergeleitet, die entscheidend die Umsetzung der theoretischen und experimentellen Werkstoffgrundlagen in die Materialmodellierung prägen.

Als Basis wurden ausgiebige Literaturstudien durchgeführt und die Ergebnisse in eigenen Berichten zusammenfassend dargestellt (GEBBEKEN & GREULICH 1999/2002/2003 [75, 76, 77]). Diese spiegeln einen state-of-the-art in Bezug auf wichtige Eigenschaften und Wirkungsweisen der beteiligten Werkstoffe für die Modellbildung wider. Auch auf den Beton, der **nicht** im Vordergrund dieser Arbeit steht, der aber dennoch wesentlicher Bestandteil des Stahlbetons ist, und in den numerischen Simulationen im Kapitel 8 eine wichtige Rolle spielt, wird in den Berichten näher eingegangen.

Grundlegend fällt in den folgenden Abschnitten auf, dass der Stahlfaserbeton und der Stahlbetonverbund im Einzelnen, jedoch nicht in Kombination im Sinne der Verbundbeschreibung von stahlfaserverstärktem Stahlbeton auftreten. Hierzu liegen derzeit keine experimentellen Untersuchungen vor. Die im Kapitel 7 dargestellte Entwicklung des neuen Verbundmodells beschränkt sich daher auf die Wechselwirkung zwischen dem reinen Beton und dem Betonstahl.

## 5.2 Stahlfaserbeton

### 5.2.1 Einführung

Stahlfasern haben einen wesentlichen Einfluss auf die Eigenschaften und die Wirkungsweisen von Stahlfaserbeton. Die positive Wirkung von Stahlfasern macht sich bei Biegezug- und Schubfestigkeit, beim Riss- und Verformungsverhalten sowie beim Verhalten unter stoßartiger Belastung bemerkbar. Als Bewehrung zementgebundener Verbundstoffe kommen aber auch Fasern aus anderen Materialien in Betracht, wie

- Glasfasern,
- Kunststofffasern,
- Kohlenstofffasern und
- Zellulosefasern.

Um Fasern zu beurteilen, werden folgende Eigenschaften definiert, die zur Verbesserung der Festigkeitseigenschaften, der Duktilität und der Rissbildung von zementgebundenen Matrix-Systemen herangezogen werden:

- Zugfestigkeit,
- Elastizitätsmodul,
- Verformungsfähigkeit, Duktilität und Energieabsorptionskapazität,
- Verbundeigenschaften,
- chemische Verträglichkeit und
- Dauerhaftigkeit.

In Tabelle 5.1 sind die verschiedenen Fasermaterialien im Hinblick auf deren Einsatzgebiete und die genannten Eigenschaften gegenübergestellt. Aufgrund der in dieser Tabelle aufgeführten positiven Eigenschaften der Stahlfasern und nicht zuletzt aufgrund des wirtschaftlichen Einsatzes der Stahlfasern im Vergleich mit anderen Fasermaterialien (z.B. Kohlenstofffasern), findet für die folgenden Studien der Stahlfaserbeton Verwendung. Dieses Kapitel gibt eine Übersicht über die spezifischen Eigenschaften des Stahlfaserbetons. Weitere Informationen zu den Themen *unterschiedlicher Fasermaterialien und -typen und deren charakteristische Eigenschaften* sowie zu den *Herstellungstechnologien von Faserbeton* findet sich in GEBBEKEN & GREULICH 2003 [77].

**Tabelle 5.1:** Verwendete Fasermaterialien für Faserbeton (aus: GEBBEKEN & GREULICH 2003 [77])

Material	Eigenschaften	Einsatzgebiete
Asbestfasern	hohe Festigkeit ( $3500 \text{ N/mm}^2$ ), hohe Temperaturbeständigkeit	gesundheitsschädlich - wird nicht mehr verwendet
Glasfasern	hohe Festigkeit ( $2500 \text{ N/mm}^2$ ), empfindliche Oberfläche, spröde	Fassadenbau; besonders in Erdbebengebieten
Kunststofffasern	häufig geringe Steifigkeit, hohe Dehnbarkeit, schlechtes Temperaturverhalten	Risseverteilung, Erhöhung der Grünstandfestigkeit
Kohlenstofffasern	hohe Festigkeit (bis $4000 \text{ N/mm}^2$ ), hoher E-Modul (bis $400 \text{ kN/mm}^2$ ), hohe Temperaturbeständigkeit, teuer	feuergefährdete Bauteile, mit Kunstharz als Bewehrungsstäbe
Zellulosefasern	preiswert, Rohstoffe weltweit verfügbar, geringe Beständigkeit, hohe Wasseraufnahme	Entwicklungsländer, Automobilbau
Stahlfasern	hohe Festigkeit (ca. $1000 \text{ N/mm}^2$ ), hoher E-Modul ( $210 \text{ kN/mm}^2$ ), gute Verbundeigenschaften durch „Profilierung“, preiswert, korrosionsbeständig bei vollständiger Überdeckung mit Beton	Tunnelbau, Schutzbauten, Industriefußböden

Wesentlich hängen die Stahlfaserbetoneigenschaften von der Belastungsart ab. Es ist zu unterscheiden, ob Stahlfaserbeton unter Zugbeanspruchung unter Druckbeanspruchung oder unter Scherbeanspruchung steht. Ebenso differieren die Eigenschaften von Stahlfaserbeton unter einaxialer Beanspruchung vollständig von denen unter zwei- bzw. dreiaxialer Beanspruchung. Liegt vorwiegend eine Zugbelastung vor, so ist das Versagen auf die Risse im Beton zurückzuführen. Der Stahlfaserbeton verhält sich im Vergleich zu reinem Beton spröder. Bei vorwiegend allseitiger hoher Druckbelastung versagt der Beton durch Zerdrückung. Unter hohen Drücken hat der Beton duktile Eigenschaften. In der Realität tritt weder reine Zug-, noch reine Druck-, noch reine Scherbeanspruchung auf, so dass Untersuchungen zur Beschreibung kombinierter Spannungszustände durchgeführt werden müssen.

**Definition Fasergehalt:** In der neueren Literatur setzen sich die Angaben in Volumenprozent (Vol.-%) gegenüber denen in Gewichtsprozent (Gew.-%) durch (vgl. REHM 1979 [173]). Sofern nicht ausdrücklich anders angemerkt, werden daher im folgenden stets Angaben in Vol.-% gemacht, die sich auch mit folgenden Beziehungen umrechnen lassen:

$$p_{G,F} = \frac{100 \cdot p_{V,F} \cdot \rho_F}{(p_{V,F} \cdot \rho_F + p_{V,M} \cdot \rho_M)} \quad \text{bzw.} \quad p_{V,F} = \frac{100 \cdot p_{G,F} \cdot \rho_M}{(p_{G,F} \cdot \rho_M + p_{G,M} \cdot \rho_F)} \quad (5.1)$$

mit  $p_{G,F}$  Faseranteil in Gew.-%,  $p_{V,F}$  Faseranteil in Vol.-%,  
 $p_{G,M}$  Matrixanteil in Gew.-%,  $p_{V,M}$  Matrixanteil in Vol.-%,  
 $\rho_F$  Dichte des Fasermaterials,  $\rho_M$  Dichte des Matrixmaterials.

Für Fasergehalte  $\leq 10$  Vol-% ist es ausreichend, nach der folgenden Faustformel zu rechnen:

$$p_{G,F} \sim \frac{\rho_F}{\rho_M} \cdot p_{V,F} \quad . \quad (5.2)$$

Aus der Forderung, dass nach Erreichen der Zugfestigkeit der Matrix die Fasern die Kraft übertragen sollen, ergibt sich eine untere Grenze für den Fasergehalt (kritischer Fasergehalt  $V_{krit}$ ). MEHLHORN 1996 [150] beschreibt diese Grenze mit:

$$V_{krit} = 2 \cdot \frac{\beta_{Z,M}}{\tau_m} \cdot \frac{d}{l} \quad (5.3)$$

mit  $d$  Durchmesser der Faser,  $l$  Länge der Faser,  
 $\beta_{Z,M}$  Zugfestigkeit der Matrix,  $\tau_m$  mittlere Verbundspannung.

Bei den in der Literatur beschriebenen Experimenten und Anwendungen wird hauptsächlich Beton mit einem Fasergehalt zwischen 0.5 und 3.0 Vol-% verarbeitet, vergleiche u.a. die Arbeiten von SCHNÜTGEN 1981 [188], NAAMAN 1985 [156], ACI COMMITTEE 1989 [3], MAIDL 1991 [142], BANTHIA & MINDESS 1995 [12], ASHOUR et al. 1999 [8], DBV-MERKBLATT 2001 [45], BEKAERT GROUP 2002 [20] und FALKNER & TEUTSCH 2002 [62].

## 5.2.2 Statische Stoffphänomene

### 5.2.2.1 Versagensmechanismus

Fasern verändern die Werkstoffeigenschaften von Beton. Die Fasern wirken sich dabei auf seine Betoneigenschaften sowohl im frischen als auch im festen Zustand aus. Die gewünschten Verbesserungen liegen vornehmlich im Bereich der Festbetoneigenschaften. Die Faser in der Betonmatrix kann auf zwei grundsätzlich verschiedene Arten versagen:

1. Versagen durch Faserauszug („pull-out“),
2. Versagen durch Faserreißen.

Wie sich der Versagensmechanismus einstellt, hängt nach MAIDL 1991 [142] von folgenden Faktoren ab:

- $l/d$ -Verhältnis,
- Aufbiegungen / Profilierung,
- Zugfestigkeit der Faser,
- Verbundfestigkeit.

Durch eine Gleichgewichtsbetrachtung kann eine kritische Faserlänge ermittelt werden. Sie ist so definiert, dass die über die halbe Länge eingeleiteten maximalen Verbundspannungen gerade der maximal aufnehmbaren Faserzugkraft entsprechen:

$$l_{krit} = \frac{d \cdot \beta_Z}{2 \cdot \tau_m} \quad (5.4)$$

mit  $d$  Durchmesser der Faser,  
 $\beta_Z$  Zugfestigkeit der Faser,  
 $\tau_m$  mittlere Verbundspannung.

Die in der Praxis üblichen Stahlfasern mit einem  $l/d$ -Verhältnis von 50 bis 100 (siehe Abschnitt 4.3.1.1 in GEBBEKEN & GREULICH 2003 [77]) weisen in der Regel eine unterkritische Länge auf und versagen somit hauptsächlich durch Auszug. Eine Reihe von Versuchen zum Einfluss der Faserlänge und des  $l/d$ -Verhältnisses auf die mechanischen Eigenschaften von Stahlfaserbeton sind in SCHNÜTGEN 1978 [187] beschrieben.

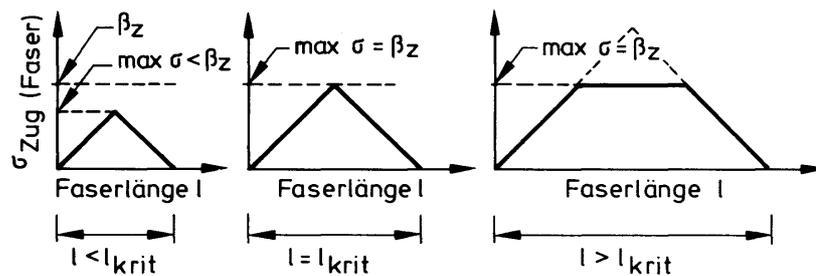


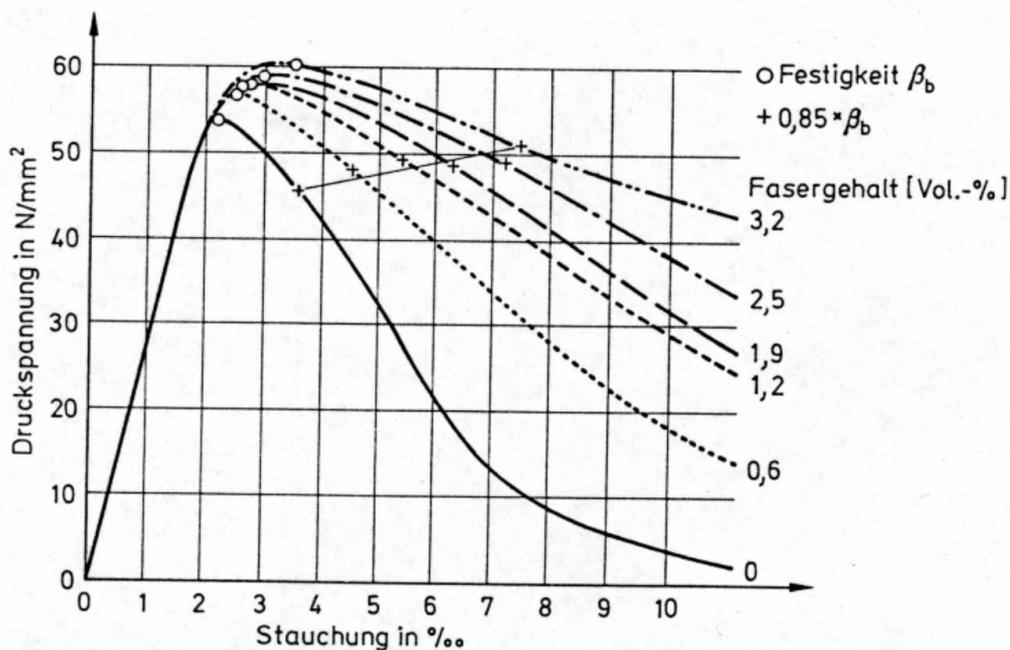
Abbildung 5.1: Definition der kritischen Faserlänge  $l_{krit}$  nach MAIDL 1991 [142]

Nähere Informationen zum Versagensmechanismus von Stahlfaserbeton finden sich u.a. in den Arbeiten von GOKOZ & NAAMAN 1981 [83], BANTHIA et al. 1989 [13], BAZANT 1988 [17].

### 5.2.2.2 Druckfestigkeit

Bei Versuchen mit Fasergehalten von 1.0 Vol-% konnte eine Steigerung der einachsigen Druckfestigkeit um rund 7 % gegenüber dem vergleichbaren Nullbeton beobachtet werden (BONZEL & DAHMS 1981 [27]). Der Hersteller von Stahlfasern VULKAN HAREX berichtete 2002 [217] von eigenen Versuchen, dass bei noch höheren Dosierungen bis 3.0 Vol-% die Werte im Mittel um etwa 22 % höher lagen. Dies lässt sich durch das veränderte Querzugverhalten erklären. Sichtbar wird der Einfluss der Stahlfasern jedoch nicht durch die geringfügig höheren Druckfestigkeiten, sondern durch die veränderten Stauchungswerte (SCHNÜTGEN 1978 [187]). Betrachtet man das Last-Verformungs-Diagramm in Abbildung 5.2, so wird deutlich, dass die Maximalwerte erst bei größeren Stauchungen erreicht werden. Weiterhin zeigt sich, dass der abfallende Ast der Kurven sichtlich flacher wird und somit bei steigendem Stahlfasergehalt die Bruchstauchung größer

wird. Selbstverständlich sind auch diese Eigenschaften nicht nur von der Fasermenge, sondern auch von den Materialeigenschaften und der Fasergeometrie abhängig. Da sich der Arbeitsaufwand zur Herstellung des Stahlfaserbetons bei hohen Dosierungen wesentlich erhöht und sich der Stahlfaserbeton bei hohen Fasergehalten nur sehr schwer ausreichend verdichten lässt, ist dies für die Praxis jedoch von untergeordneter Bedeutung.



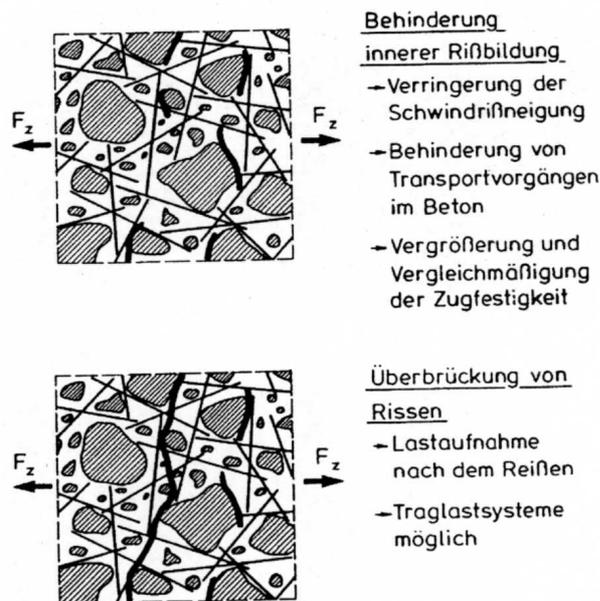
**Abbildung 5.2:** Typische Druckspannungs–Stauchungs–Kurven von Stahlfaserbeton im verformungsregulierten Versuch unter zentrischer Druckbeanspruchung (aus: SCHNÜTGEN 1981 [188])

Derzeit sind Stahlfasergehalte um 0.25 Vol-% bis 1.0 Vol-% gebräuchlich, da sie je nach Stahlfaserart die Grenze für eine problemlose Verarbeitung darstellen. Bei den in der Praxis üblichen Faserdosierungen kann davon ausgegangen werden, dass sich die Druckfestigkeit nur geringfügig gegenüber der eines vergleichbaren Betons ohne Stahlfasern erhöht. Weitere Angaben zur Druckfestigkeit von normalfestem Stahlfaserbeton finden sich u.a. in den Arbeiten von REHM 1979 [173], NAAMAN 1985 [156], DANIEL & SHAH 1990 [41], MAIDL 1991 [142], BANTHIA & MINDESS 1995 [12], ASHOUR et al. 1999 [8] oder KARIHALOO & WANG 2000 [116].

### 5.2.2.3 Biegezugfestigkeit

Bei den Festbetoneigenschaften von Stahlfaserbeton ist zwischen der Faserwirkung auf Rissentstehung und der Wirkung von Stahlfasern im gerissenen Beton (Abbildung 5.3) zu unterscheiden. Stahlfasern behindern zunächst die innere Rissbildung im Beton. Die Risse wachsen, bis die Risspitze auf eine Stahlfaser trifft. Diese stabilisiert den Riss, andere Risse erweitern sich. Insgesamt entstehen kleinere Risse bei gleicher Dehnung. Dadurch wird:

- Die Schwindrissneigung verringert,
- der Transportvorgang von Gasen und Flüssigkeiten erschwert, der Austrocknungsvorgang (und damit der Schwindvorgang) läuft langsamer ab,
- die Betonzugfestigkeit verleichmäßigt.



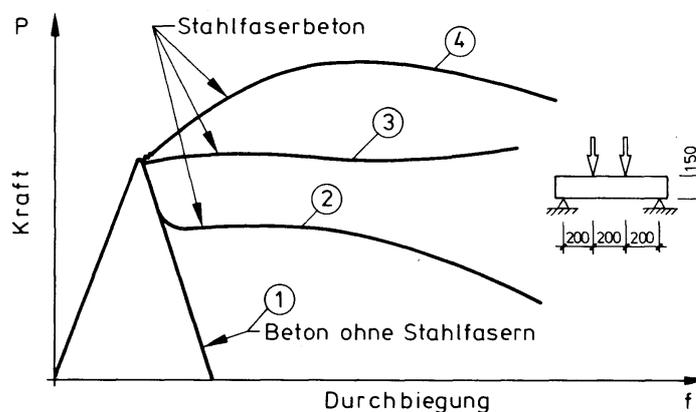
**Abbildung 5.3:** Wirkung der Stahlfasern im Beton (aus: SCHNÜTGEN 1992 [189])

Da zwischen Fasern und Beton keine Relativbewegungen stattfinden, haben geometrische Veränderungen der Stahlfasern in Faserlängsrichtung nur eine geringe Wirkung auf die Rissbildung. Eine grosse Faseroberfläche (hoher Fasergehalt) ist dagegen besonders wirksam, selbst verhältnismäßig kurze Fasern können gute Wirkungen erzielen.

Eine wesentliche Eigenschaft des Stahlfaserbetons ist das Nachrissverhalten. Stahlfaserbeton verhält sich nach Erreichen der Rissspannung, je nach Fasergehalt und Faserart, duktiler gegenüber dem reinen Beton (DANIEL & SHAH 1990 [41]). Nach Überschreiten der Maximallast können Stahlfaserbetonbauteile auch unter hohen Verzerrungen noch Kräfte aufnehmen. Es findet eine Relativbewegung zwischen den Fasern und dem Zementstein statt. Verformungen der Stahlfasern in Längsrichtung bei gleichzeitig ausreichender Eigensteifigkeit der Fasern haben durch die entstehenden Umlenkkräfte positive Auswirkungen auf die übertragbaren Kräfte. Endverankerungen sind besonders wirksam. Das Versagen tritt meist nicht mehr plötzlich ein, sondern kündigt sich durch große Verformungen an. Dieses Verhalten zeigt sich bei Biegebeanspruchungen sowohl auf der Druck-, als auch auf der Zugseite.

Die in der Literatur zahlreich beschriebenen Biegezugversuche (zum Versuchsaufbau und -ablauf siehe z.B. BANTHIA & MINDESS 1995 [12] oder DBV-MERKBLATT 2001 [45]) zeigen erst bei Fa-

sergehalten  $V_f > V_{krit}$  eine Steigerung der Biegezugfestigkeit, vergleiche u.a. SCHNÜTGEN 1978 [187] oder PFYL 2000 [167]). Nach HILSDORF 1995 [101] besteht ein (nicht näher beschriebener) linearer Zusammenhang zwischen Biegezugfestigkeit und Fasergehalt, bei der die Biegezugfestigkeit mit bis zu 20 Vol-% zunimmt. Allgemein werden in den Arbeiten von SCHNÜTGEN 1978 [187], SCHNÜTGEN 1981 [188], NAAMAN & GOPALARATNAM 1983 [157], NAAMAN 1985 [156], GOPALARATNAM & SHAH 1985 [84], MAIDL 1991 [142], HILSDORF 1995 [101], BANTHIA & MINDESS 1995 [12], ASHOUR et al. 1999 [8], KARIHALOO & WANG 2000 [116] oder im DBV-MERKBLATT 2001 [45] Maximalwerte zwischen 4 und 11  $N/mm^2$  angegeben. Abbildung 5.4 zeigt (qualitativ) das Ergebnis von Biegezugversuchen.

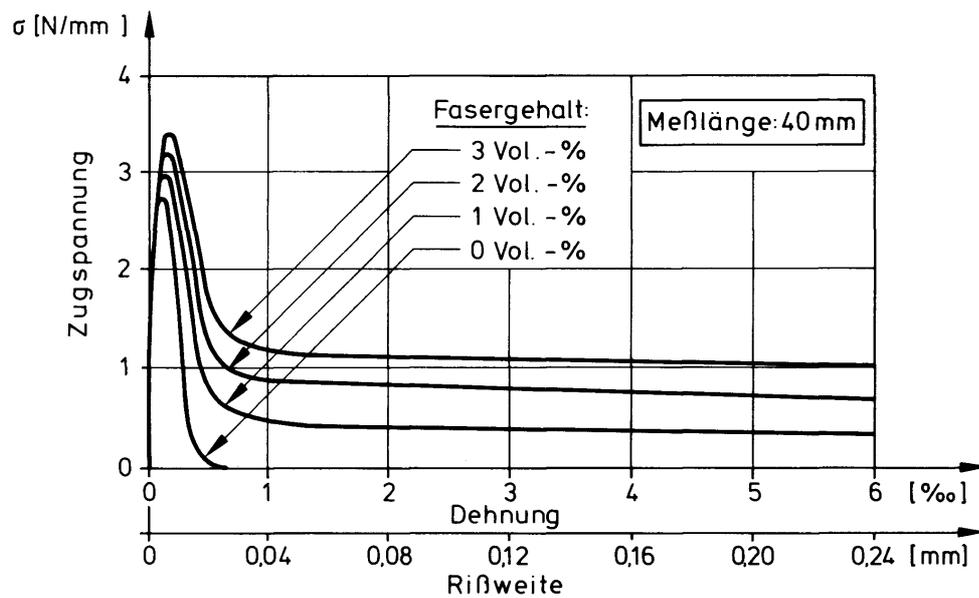


**Abbildung 5.4:** Stahlfaserbeton im Biegezugversuch (qualitativ) (aus: MAIDL 1991 [142])

- mit
- 2  $V_f < V_{krit}$ ,
  - 3  $V_f = V_{krit}$ ,
  - 4  $V_f > V_{krit}$ .

#### 5.2.2.4 Zugfestigkeit

Bei Beton unter Zugbeanspruchung machen sich die Stahlfasern durch eine bis zu etwa 30%ige Steigerung der Zugfestigkeit positiv bemerkbar (Abbildung 5.5). Um diese Festigkeiten zu erreichen, bedarf es jedoch eines verhältnismäßig hohen Faseranteils bei großer Faseroberfläche. Wenn sich Risse ausgebildet haben, reduziert sich die aufnehmbare Zugbeanspruchung. Die Werte der Zugfestigkeit des ungerissenen Betons werden nicht wieder erreicht. Dennoch können Stahlfaserbetonbauteile nach Überschreiten der Maximallast auch unter hohen Dehnungen noch Kräfte aufnehmen. Aus Abbildung 5.5 ist ersichtlich, dass der abfallende Ast der Kurven deutlich flacher wird und somit ein wesentlich duktileres Materialverhalten vorliegt, da bei steigendem Stahlfasergehalt die Bruchdehnung größer wird. Somit ist der Stahlfaserbeton in der Lage, in Abhängigkeit des Stahlfasergehaltes verbleibende Zugkräfte aufnehmen zu können (vgl. Tabelle 5.2).



**Abbildung 5.5:** Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei Zugbelastung für unterschiedliche Fasergehalte (aus: MAIDL 1991 [142])

Im Unterschied zur Biegezugfestigkeit ist der Einfluss auf die zentrische Zugfestigkeit gering. Grund hierfür ist, dass der Stahlfaserbeton unter reinem Zug keine Möglichkeiten zur Spannungsumlagerung hat. Bei Querschnitten unter Biegung kann sich die Spannungsnulllinie bei abnehmender Zugfestigkeit im Bereich der größten Dehnungen in Richtung der Druckbeanspruchung verschieben, so dass sich ein neuer Gleichgewichtszustand einstellt. Weitere Angaben zur Zugfestigkeit von Stahlfaserbeton finden sich in SCHNÜTGEN 1978 [187], BONZEL & DAHMS 1981 [27], SCHNÜTGEN 1992 [189], KOVACS 2000 [123], KARIHALOO & WANG 2000 [116], PFYL 2000 [167] oder im DBV-MERKBLATT 2001 [45].

### 5.2.2.5 Schubfestigkeit

Durch die gleichmäßig dreidimensional in der Betonmatrix verteilten Stahlfasern werden sowohl Risse überbrückt als auch deren Aufweitung behindert, so dass die Verzahnung der Rissufer gegeneinander erheblich verbessert wird. Diese Wirkung ist wesentlich abhängig vom Stahlfasertyp und der Höhe der Dosierung, so dass bei geeigneter Wahl eine Schubsicherung durch Stahlfasern möglich ist. Für höhere Schubspannungen bietet sich eine Kombination von Stahlfaserbeton mit Stabstahlbewehrung an. Die Versuche von IMAM 1995 [110] haben gezeigt, dass bei einem Fasergehalt von  $V_f > 2$  Vol.-% bei zusätzlicher Bügelbewehrung ca. 50 % der Schubkraft durch die Fasern übertragen werden. Bei Fasergehalten  $V_f < 1$  Vol.-% sind es dagegen nur noch ca. 25 % der gesamten Schubkraft. Diese Richtwerte sind jedoch nur begrenzt zuverlässig, da die Schubfestigkeit stark von der Orientierung der Fasern im Beton

abhängt. Eine Erhöhung der Schubfestigkeit durch Faserzugabe bei reinem Beton und Beton mit Bügelbewehrung kann allerdings grundsätzlich beobachtet werden. Diese Erhöhung kann nach dem Bericht des ACI COMMITTEE 1988 [1] auf folgende Punkte zurückgeführt werden:

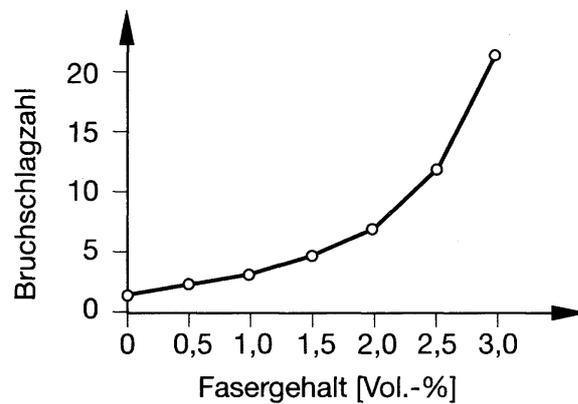
- Die Fasern sind gleichmäßig in der Betonmatrix verteilt und liegen wesentlich dichter beieinander als Stabstähle. Daher können sie die Ausbreitung auftretender Risse unmittelbar behindern.
- Stahlfasern erhöhen sowohl die Erstrissfestigkeit, als auch die Endzugfestigkeit des Betons.
- Durch die Verringerung der Rissbreiten erhöht sich die Kraftübertragung zwischen den Rissufer.

Weitere Angaben zur Schubfestigkeit von Stahlfaserbeton finden sich u.a. in NARAYANAN & DARWISH 1987 [160] oder VALLE & BÜYÜKÖZTÜRK 1993 [213].

#### 5.2.2.6 Schlagfestigkeit

Die Schlagfestigkeit von Beton lässt sich durch die Zugabe von Stahlfasern erheblich steigern (vgl. BONZEL & DAHMS 1981 [27], STANGENBERG 1986 [198] oder HILSDORF 1995 [101]). Die Schlagfestigkeit wurde dabei definiert als diejenige Schlagzahl, der ein Beton bis zum Bruch widersteht, wenn ein zylindrisches Fallgewicht aus einer bestimmten Höhe auf den Beton fallen gelassen wird. Dieser „drop-weight-test“ wird im Bericht des ACI COMMITTEE 1988 [2] vorgestellt und genau beschrieben. Das sehr günstige Verhalten von Stahlfaserbeton gegenüber stoßartigen Belastungen begründet sich in seinem ausgeprägten Arbeitsvermögen (= Duktilität) und der damit verbundenen hohen Energieabsorptionskapazität. Diese wiederum lässt sich auf die hohe innere Reibung zwischen Stahlfasern und Beton zurückführen. FALKNER & TEUTSCH stellten 1993 [61] fest, dass sich die Schlagfestigkeit auf mehr als das 10fache im Vergleich zu „Nullbeton“ steigern lässt. In Abbildung 5.6 ist exemplarisch die Bruchschlagzahl in Abhängigkeit des Fasergehaltes dargestellt. Es wird außerdem häufig berichtet, dass die Abplatzungen bei stoßartigen Belastungen mit zunehmendem Fasergehalt geringer werden (z.B. in MAIDL 1991 [142] oder KUSTERMANN 2000 [128]).

Aufgrund seiner diesbezüglich hervorragenden Eigenschaften ist der Stahlfaserbeton für die Anwendung bei Bauteilen unter stoßartiger Belastung besonders geeignet. Weitere Beschreibungen des Verhaltens von Stahlfaserbeton unter stoßartigen Belastungen finden sich u.a. in HIBBERT 1979 [97], REINHARDT 1982 [174], ROSTASY & HARTWICH 1983 [181], KÖRMELING 1984 [122], GAMBAROVA & SCHUMM 1994 [70], LOK 1994 [138].



**Abbildung 5.6:** Anzahl der Schläge mit einem Fallgewicht bis zum Bruch als Maß für die Schlagfestigkeit für Stahlfaserbeton mit variierenden Stahlfasergehalten (aus: BONZEL & DAHMS 1981 [27])

### 5.2.2.7 Mehraxiales Materialverhalten

Zum mehraxialen Materialverhalten von Stahlfaserbeton liegen in der Literatur nur wenige Daten vor. Lediglich in den Veröffentlichungen von YIN et al. 1989 [224] (biaxiale Druckbelastung), DIEDERICHS 1991 [48] (biaxiale Zug–Druck–Belastung) und CHERN et al. 1992 [36] (allgemeine triaxiale Belastung) liegen einige experimentelle Untersuchungsergebnisse verschiedener Stahlfaserbetonmixturen vor. Aus der Arbeit von YIN et al. gehen signifikante Festigkeitssteigerungen unter biaxialer Druckbelastung durch die Zugabe von Stahlfasern hervor. Abbildung 5.7 zeigt deren Ergebnisse für unterschiedliche Fasergehalte und -längen. Zum Vergleich sind die Ergebnisse für reinen Beton von KUPFER & HILSDORF 1969 [127] gegenübergestellt.

Darüber hinaus zeigten biaxiale Druckfestigkeitsuntersuchungen, dass die Fasern nicht nur die Steifigkeit in Lastrichtung erhöhen, sondern zusätzlich die Verzerrungen senkrecht zu den belasteten Achsen verringern.

### 5.2.3 Dynamische Werkstoffeigenschaften

Wie bei vielen Werkstoffen verändern sich auch bei Faserbeton die Materialeigenschaften wie *Festigkeit* oder *Bruchverzerrung* mit steigender Verzerrungsgeschwindigkeit. In stoßartig belasteten Stahlfaserbetonbauteilen wird neben der Umwandlung von Stoßenergie in Bewegungsenergie ein Teil in Form von Dissipationsenergie durch lokale Biegung der Fasern, Reibung, etc. „verzehrt“, d.h. in Verformungsenergie umgewandelt (NAAMAN 1984 [155]). Die Materialdämpfung erhöht sich infolge innerer Reibung (STANGENBERG 1986 [198]). Vorgänge bei der Veränderung der Materialfestigkeit mit steigender Verzerrungsgeschwindigkeit sind nach LOHRMANN 1998 [137] im einzelnen noch nicht vollständig geklärt, doch lassen sich die auftretenden Effekte qualitativ und quantitativ beschreiben (STANGENBERG 1986 [198]).

Von GOPALARATNAM & SHAH 1985 [84] durchgeführte Untersuchungen an biegebeanspruchten

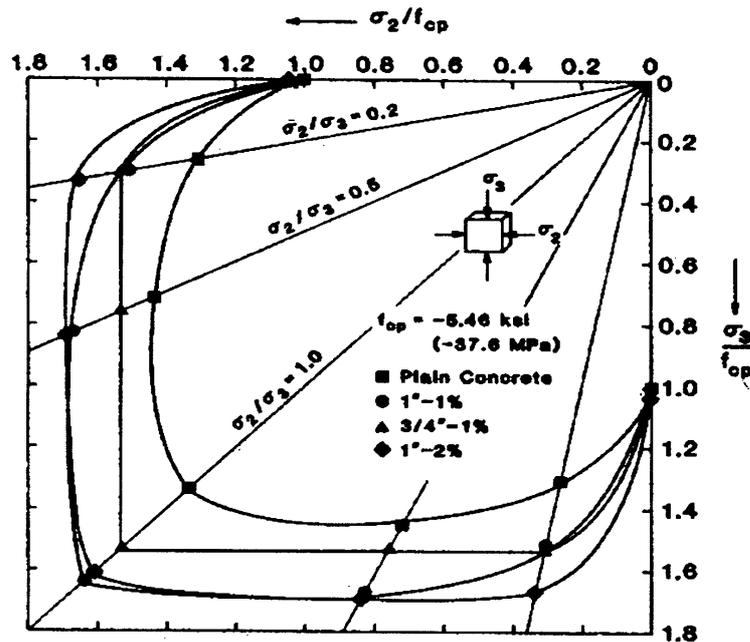


Abbildung 5.7: Biaxiale Druckfestigkeit von Stahlfaserbeton und Beton (aus: YIN et al. 1989 [224])

Mörtelproben haben gezeigt, dass sich die Festigkeitssteigerung mit wachsendem Fasergehalt und steigendem l/d-Verhältnis geringfügig erhöht (siehe Abbildung 5.8).

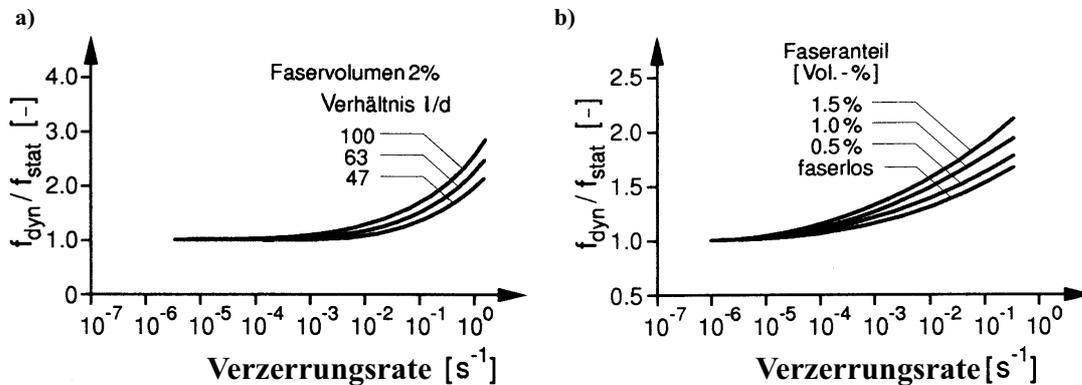


Abbildung 5.8: Relative Biegezugfestigkeit in Abhängigkeit der Verzerrungsgeschwindigkeit bei unterschiedlichem a) Fasergehalt und b) l/d-Verhältnis (aus: GOPALARATNAM 1985 [84])

Hingegen fassen SUARIS & SHAH 1982 [204] die Ergebnisse verschiedener Autoren zusammen, und stellen eine nahezu vom Stahlfasergehalt unabhängige Steigerung der Druckfestigkeit, der Biegezugfestigkeit und der zentrischen Zugfestigkeit fest (Abbildung 5.9).

Zusätzlich zeigt sich aus den Untersuchungsergebnissen eine langsame Änderung der Druckfestigkeit bei steigender Verzerrungsgeschwindigkeit, während bei der Biegezugfestigkeit und besonders bei der einaxialen Zugfestigkeit deutliche Steigerungen zu erkennen sind.

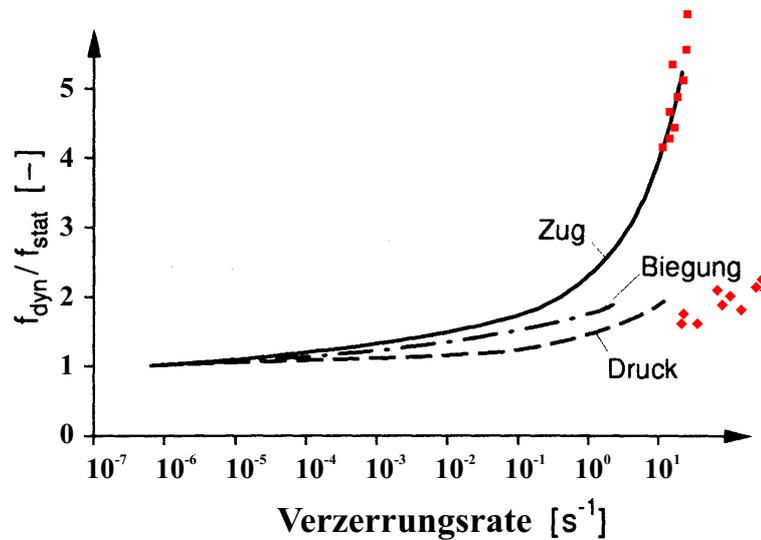


Abbildung 5.9: Relative Festigkeit bei verschiedenen Verzerrungsgeschwindigkeiten und unterschiedlicher Belastungsart (aus: SUARIS & SHAH 1982 [204] und LOK et al. 2002 [139])

Bei den in LOHRMANN 1998 [137] beschriebenen Versuchen ändert sich die Zugfestigkeit unter dem Einfluss zunehmender Verzerrungsgeschwindigkeit am deutlichsten (Abbildung 5.10 a)). Bei dynamischer Beanspruchung mit einem mittleren Wert von  $\dot{\epsilon} \approx 1.9 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  beträgt die Steigerung gegenüber der statischen Festigkeit zwischen 27 und 68 %, bei Impact-Belastung mit  $\dot{\epsilon} \approx 3.9 \text{ s}^{-1}$  zwischen 108 und 214 %. Die Faserbeton-Proben weisen dabei stets größere Steigerungen auf, als die faserlosen Referenzmischungen N8 und N16. Bei Druckversuchen

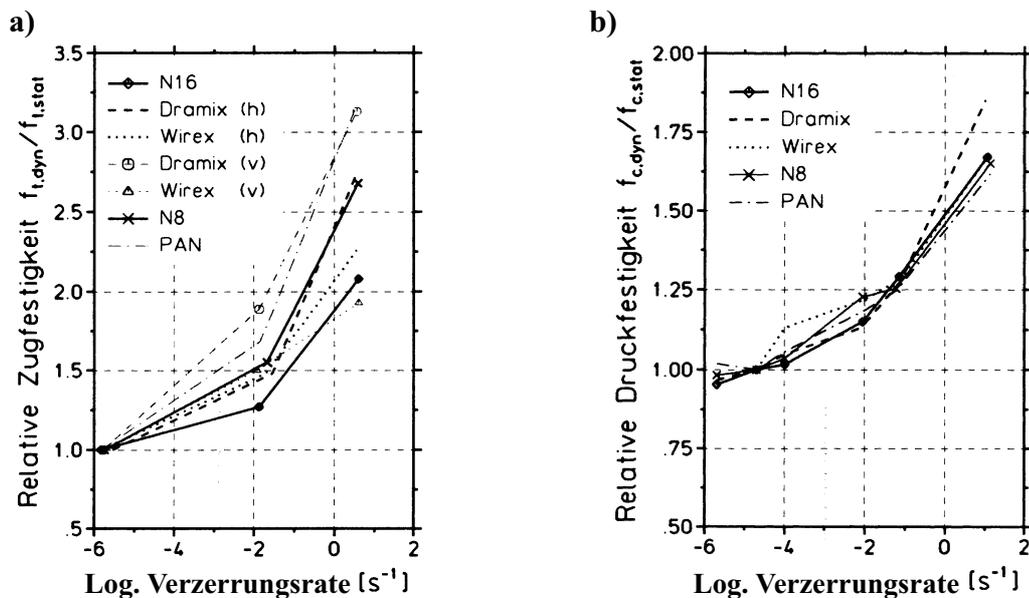


Abbildung 5.10: Steigerung der a) Zugfestigkeit und der b) Druckfestigkeit bei unterschiedlichen Verzerrungsgeschwindigkeiten (aus: LOHRMANN 1998 [137])

veränderten die Fasern die Druckfestigkeit gegenüber der jeweiligen Referenzmischung nicht. Abbildung 5.10 b) zeigt, dass sich die Steigerung der Druckfestigkeit bei Erhöhung der Verzerungsgeschwindigkeit unabhängig vom Faserzusatz vollzieht.

Die Unabhängigkeit der Druckfestigkeitssteigerung vom Faserzusatz bei Erhöhung der Verzerungsgeschwindigkeit beobachteten LOK et al. 2002 [139] zusätzlich für die Zugfestigkeitssteigerung, die derzeit zu diesem Thema die aktuellsten Ergebnisse liefert. Deren Ergebnisse sind für verschiedene Fasergehalte ergänzend in das Diagramm in Abbildung 5.9 eingetragen.

Es ist offensichtlich, dass sowohl die Druckfestigkeit als auch die Zugfestigkeit mit wachsender Verzerrungsgeschwindigkeit zunimmt. Dennoch ist es schwierig, das Materialverhalten von Stahlfaserbeton mit variierenden Stahlfasergehalten zu differenzieren. Das Ergebnis aus diesen Versuchsdaten ist, dass der Stahlfasergehalt keinen nennenswerten Einfluss auf die Festigkeitssteigerung in Folge der Ratenabhängigkeit hat. Diese Erkenntnis steht somit im Gegensatz zu den Studien, in denen Stahlfaserbeton durch statische Beanspruchung charakterisiert wird. Aufgrund der Unabhängigkeit vom Faserzusatz auf die Festigkeitssteigerungen kann daher auch auf die in der Literatur zahlreich vorhandenen Versuche mit unbewehrtem Beton zurückgegriffen werden (vgl. BISCHOFF & PERRY 1995 [25] und GEBBEKEN & RUPPERT 2000 [74]).

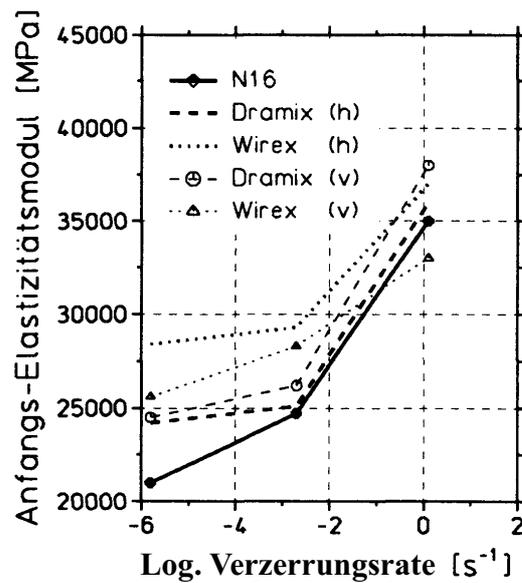
Generell zeigen höherfeste Faserbetone eine geringere Empfindlichkeit gegenüber hohen Verzerrungsgeschwindigkeiten, d.h. festere Matrizen weisen mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit eine geringere Festigkeitssteigerung auf (GOPALARATNAM & SHAH 1985 [84]).

Durch die Zugabe von Stahlfasern, deren Elastizitätsmodul (E-Modul) ungefähr dem 6fachen der Betonmatrix ( $E^{Stahl} \approx 6E^{Beton}$ ) entspricht, lässt sich die Gesamtsteifigkeit der Mischung steigern. Bei den in LOHRMANN 1998 [137] beschriebenen Versuchen zeigen alle Stahlfasermischungen einen im Mittel 20 % höheren Anfangs-Elastizitäts-Modul als die zugehörige Referenzmischung. Mit steigender Verzerrungsgeschwindigkeit liegt er nur noch durchschnittlich 10 % höher und verhält sich ab  $\dot{\epsilon} \approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  wie der Elastizitäts-Modul des reinen Betons, der z.B. im CEB REPORT 1988 [38] beschrieben ist (siehe Abbildung 5.11).

Der entscheidende Vorteil der Fasern wird, wie im Abschnitt 5.2.2.3 angesprochen, im Nachbruchverhalten nach Überschreiten der Zugfestigkeit deutlich. Die Fasern können auch bei großen Verzerrungen bzw. Verschiebungen noch Kräfte übertragen; dies wird auch als hohes Arbeitsvermögen des Faserbetons bezeichnet. Die entsprechenden Bruchenergien  $G_{Ft,u}$  nach Gleichung (5.5) liegen beim Stahlfaserbeton wesentlich höher als bei den faserlosen Referenzmischungen (etwa um eine Zehnerpotenz bei LOHRMANN 1998 [137]),

$$G_{ft,u} = \int_0^u \sigma \, du \quad (5.5)$$

mit  $u$  Probekörperverlängerung einschließlich der elastischen Anteile.



**Abbildung 5.11:** Anfangs-Elastizitätsmodul  $E_{t,i}$  bei unterschiedlichen Verzerrungsgeschwindigkeiten (aus: BONZEL & DAHMS 1981 [27])

Zusätzlich vergrößert sich das Arbeitsvermögen des Faserbetons mit steigender Verzerrungsgeschwindigkeit. Die Bruchenergie steigert sich bei dynamischer Belastung ( $\dot{\epsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ) um durchschnittlich 80 %, bei Impakt-Belastungen ( $\dot{\epsilon} \approx 4 \text{ s}^{-1}$ ) um 83 %. Dies gilt jedoch nur, wenn die Fasern nicht quer zur Beanspruchungsrichtung orientiert sind. Generell kann gesagt werden, dass das Spannungsniveau im Nachbruchbereich bei höheren Verzerrungsgeschwindigkeiten ansteigt. Das bedeutet, dass die Fasern wirkungsvoller sind, wenn die Beanspruchung nicht statisch, sondern schnell aufgebracht wird.

Da die Messtechnik zur Bestimmung der Festigkeitssteigerung unter hohen Verzerrungsgeschwindigkeiten äußerst kompliziert ist, und der Aufwand zusätzlich mit der Geschwindigkeit der Belastung steigt, sind Versuche zur Bestimmung der Festigkeitssteigerungen, Bruchenergie etc. bei Verzerrungsraten über  $\dot{\epsilon} \approx 4 \cdot 10^1 \text{ s}^{-1}$  in der Literatur praktisch nicht vorhanden.

#### 5.2.4 Zusammenfassung und Bewertung

Die Zugabe von Fasern zu Beton bringt eine Reihe positiver Veränderungen im Materialverhalten. Die wesentlichen Verbesserungen sind:

- Steigerung der Zugfestigkeit,
- Steigerung der Biegezugfestigkeit,
- Steigerung der Schubfestigkeit,

- Steigerung der Schlagfestigkeit,
- höheres Arbeitsvermögen bzw. besseres Nachbruchverhalten (höhere Duktilität),
- bessere Risseverteilung.

Tabelle 5.2 gibt einen Überblick über die Druck- und Zugfestigkeitssteigerung in Abhängigkeit des Stahlfasergehaltes.

**Tabelle 5.2:** Stahlfaserbeton, Einfluss der Stahlfasern auf die Festigkeit im Vergleich zur faserlosen Referenzzmischung

Stahlfasergehalt [Vol-%]	Steigerung der			Referenz
	Druckfestigkeit $f_c$ [%]	Zugfestigkeit $f_t$ [%]	verbleibend $\frac{f_t}{\text{maximum } f_t}$ [%]	
1.0	7.0	9.7	11.4	[188, 142, 217]
2.0	13.7	18.7	22.3	[188, 142]
3.0	22.0	27.3	29.4	[188, 142, 217]

In Tabelle 5.3 sind die wichtigsten Materialparameter von Stahlfaserbeton unter statischer und dynamischer Belastung gegenübergestellt.

**Tabelle 5.3:** Gegenüberstellung der statischen und dynamischen Eigenschaften von Stahlfaserbeton

Eigenschaften	statisch	dynamisch
Zugfestigkeit	2 - 7 N/mm <sup>2</sup>	Steigerung um bis zu 200 % bei $\dot{\epsilon} = 10^1 \text{ s}^{-1}$
Druckfestigkeit (einaxial)	maximal 10 % über der Druckfestigkeit des reinen Betons	Steigerung der Druckfestigkeit gleich der des reinen Betons
Druckfestigkeit (mehraxial)	$f_{cc}$ bis $1,6 \cdot f_c$	-
Biegezugfestigkeit	4 - 11 N/mm <sup>2</sup>	Steigerung um bis zu 100 % bei $\dot{\epsilon} = 10^1 \text{ s}^{-1}$
Schubfestigkeit	Steigerung gegenüber reinem Beton; genaue Quantifizierung derzeit nicht möglich	-
Schlagfestigkeit	Schlagfestigkeit bis zu 20 mal höher als bei reinem Beton	-
E-Modul	20 % höher als der E-Modul des reinen Betons	bei steigender Belastungsgeschwindigkeit gleich dem des reinen Betons
Bruchenergie	-	Steigerung um bis zu 83 % bei einer Dehnrate von $\dot{\epsilon} \approx 4 \text{ s}^{-1}$

Fasst man die behandelten Materialeigenschaften von Stahlfaserbeton zusammen und bezieht zusätzlich zur Stahlfaserbewehrung auch Betonstahlbewehrung in die weiteren Betrachtungen mit ein, so kommt man in Anlehnung an die Aussagen von STANGENBERG 1986 [198] zu folgenden Feststellungen.

Der bewehrte Stahlfaserbeton hat zunächst alle Vorzüge des Stahlbetons. Aufgrund des Stahlfaserzusatzes kommen folgende, im Hinblick auf dynamische Beanspruchungen interessante Verbesserungen hinzu:

- Die Festigkeitseigenschaften, insbesondere die mit der Zugfestigkeit zusammenhängenden Festigkeitseigenschaften, haben einen höheren Zuverlässigkeitsgrad und sind über größere Verformungsbereiche quantifizierbar gesichert.
- Verformungsfähigkeit, Duktilität und Energieabsorptionskapazität sind wesentlich erhöht.
- Der Widerstand gegen lokal konzentriert eingeleitete Schlagbeanspruchungen ist erheblich erhöht, sowohl im unmittelbaren Kontaktbereich als auch in dem Bereich, in dem Querbeanspruchungen maßgebend sind.
- Der Gefügezusammenhalt ist wesentlich verbessert, so dass Schädigungen in Form von Zerschellen, Penetrieren, rückseitigem Abplatzen usw. erheblich reduziert werden. Dies gilt auch für Zerstörungen aus Wellenausbreitung, insbesondere soweit dies Zugwirkungen betrifft. Von besonderer Relevanz ist dieser Punkt vor allem bei Belastungen aus dem Anprall von penetrierfähigen Hartkörpern, die selbst nur geringe Eigenverformungen beim Aufprall erleiden.
- Das Rissverhalten wird günstig beeinflusst (feinere Rissverteilung, geringere Rissbreiten, kontinuierlicher Übergang vom Zustand I in den Zustand II, Erhöhung des tensionstiffening).
- Die Materialdämpfung ist durch hohe innere Reibung deutlich gesteigert.

Alles dies sind Eigenschaften, die dieses Material als hervorragend geeignet für dynamisch beanspruchte Konstruktionen empfehlen. Von den Möglichkeiten, Stahlfaserbeton zu realisieren, empfiehlt sich insbesondere die kombinierte Variante "bewehrter Stahlfaserbeton", weil sich darin die traditionellen Vorzüge des Stahlbetons mit den spezifischen dynamischen Vorzügen und den quasi-homogen-isotropen Kontinuumseigenschaften infolge der Stahlfasern verbinden. Trotz des hohen Preises und der schwierigeren Herstellung und Verarbeitung finden aufgrund dieser Vorteile Faser- und vor allem Stahlfaserbetone heute auf vielen Gebieten, wie z.B. im Brandschutz, im Fassadenbau und bei stoßbeanspruchten Bauteilen, Anwendung.

## 5.3 Bewehrungsstahl

### 5.3.1 Einführung

Bei Bewehrungsstählen handelt es sich um Stähle, die hinsichtlich der Verwendung als Verbundbaustoff optimiert wurden. Dies erfolgt durch eine spezielle Gestaltung der Oberfläche, in der

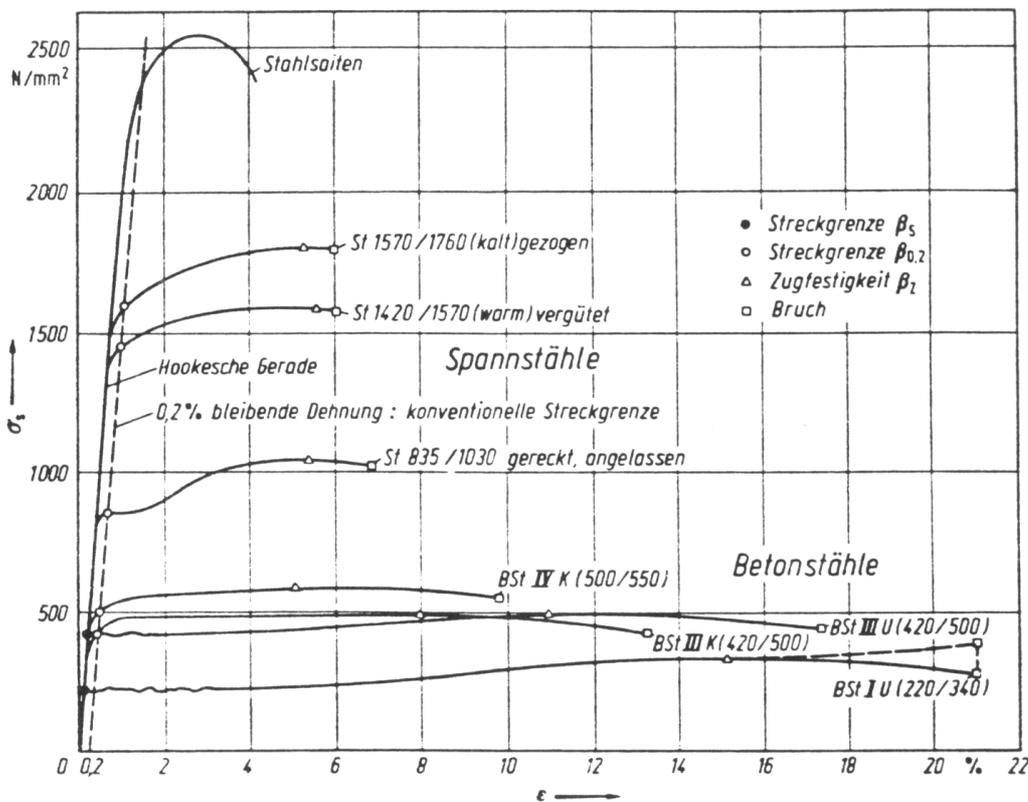
Regel durch aufgewalzte Rippen, sowie durch Steigerungen der Festigkeiten und der Verformbarkeiten. In Tabelle 5.4 wird eine Übersicht der gebräuchlichen Bewehrungsstähle gegeben.

**Tabelle 5.4:** Auszug der Sorteneinteilung der Bewehrungsstähle (nach DIN 488 Teil 1 und DIN 1045)

Kurzname	BSt 420 S	BSt 500 S	BSt 500 M
Kurzzeichen	III S	IV S	IV M
Erzeugnisform	Bewehrungsstabstahl	Bewehrungsstabstahl	Bewehrungsstahlmatte
Nenn Durchmesser	6 bis 28	6 bis 28	4 bis 12
Streckgrenze $\beta_s$ bzw. 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$	420 N/mm <sup>2</sup>	500 N/mm <sup>2</sup>	500 N/mm <sup>2</sup>
Zugfestigkeit $\beta_z$	500 N/mm <sup>2</sup>	550 N/mm <sup>2</sup>	550 N/mm <sup>2</sup>
Bruchverzerrung $A_{10}$ in %	10	10	8

### 5.3.2 Statisches Materialverhalten

Die heutzutage bevorzugt verwendeten warmgewalzten Bewehrungsstähle verhalten sich unter Zug- und Druckbelastung annähernd gleich. Im Zugversuch werden die typischen Spannungs-Dehnungs-Linien ermittelt (siehe Abbildung 5.12). Bis zum Erreichen der Streckgrenze (im

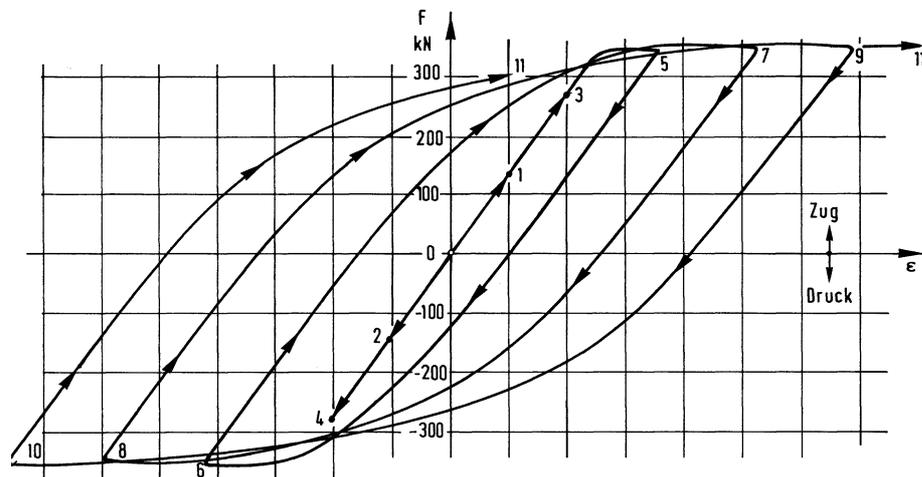


**Abbildung 5.12:** Spannungs-Dehnungs-Linien von Stählen (aus: EIBL 1995 [56])

Druckbereich: Quetschgrenze) ist ein relativ linear elastisches Materialverhalten mit einem Elastizitätsmodul von  $E^{Stahl} \approx 195000 - 210000 [MPa]$  zu erkennen. Wird diese Spannung überschritten, so beginnt der Stahl zu fließen, das heißt, dass bei gleichbleibendem Spannungsniveau die Dehnungen erheblich zunehmen. Es kommt zu Gefügeveränderungen im Stahl (GEBBEKEN & GREULICH 1999 [79]).

An den Fließbereich schließt sich ein Verfestigungsbereich an, in dem die Spannungen bis zur Zugfestigkeit  $\beta_z$  ansteigt. Der endgültige Bruch der Stahlprobe tritt, abhängig von der Stahlsorte, erst bei 6 – 20% Dehnung auf. Stahl ist also wesentlich duktiler als Beton, jedoch wird die Duktilität, genau wie beim Beton, mit zunehmender Festigkeit geringer. Dass die Spannungs–Dehnungs–Linie nach Erreichen der Zugfestigkeit eine negative Steigung hat liegt daran, dass die Spannung weiterhin mittels des Originalquerschnitts und nicht anhand des Querschnitts infolge der Einschnürung ermittelt wird. Anders als beim Stabstahl werden Bewehrungsstahlmatten meistens aus kaltgewalztem Stahl hergestellt, was eine kontinuierliche Spannungs–Dehnungs–Linie mit zum Teil äußerst geringer Verfestigung zur Folge hat. Desweiteren ist hierbei auf Unterschiede zwischen Zug- und Druckverhalten zu achten.

Stahl verhält sich in der Regel unter Zug- genauso wie unter Druckbelastung, es liegt eine Punktspiegelung der  $\sigma$ – $\varepsilon$ –Linie vor. Wird der Stahl jedoch gereckt oder die Belastung wiederholt umgekehrt und treten Spannungen größer als die Streckgrenze  $\beta_s$  auf, so tritt der sogenannte *Bauschinger-Effekt* auf (siehe Abbildung 5.13). Dies bedeutet, dass ein Gewinn an Zugfestigkeit einen Verlust der Druckfestigkeit zur Folge hat ( $\rightarrow 2 \cdot \sigma_F = const.$ ).



**Abbildung 5.13:** Auftreten des *Bauschinger-Effekts* bei zyklischer Belastung (aus: PETERSEN 1997 [166])

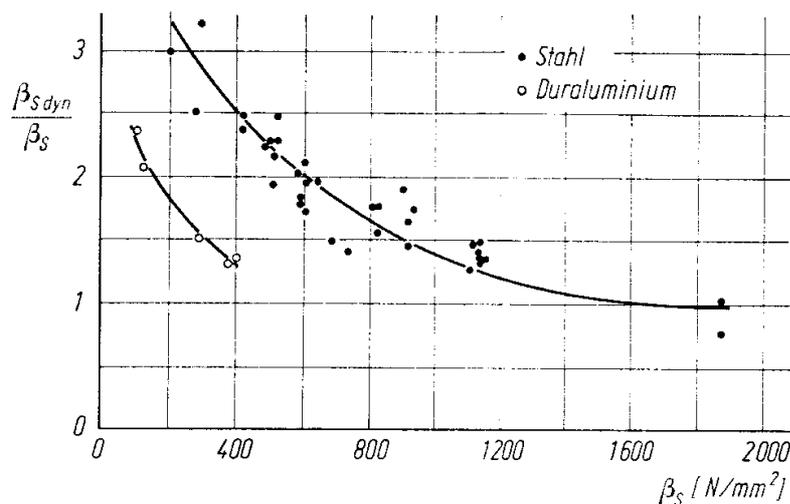
Wird der Bewehrungsstahl auf Scheren beansprucht, so kann als Scherfestigkeit 60% der Zugfestigkeit angenommen werden. Zwischen Schub- und Zugfestigkeit gilt der Zusammenhang

$$\tau = \frac{\beta_z}{\sqrt{3}}.$$

### 5.3.3 Dynamisches Materialverhalten

Die Untersuchungen der dynamischen Eigenschaften von Stahl lassen sich grundlegend in die Untersuchungen an Bewehrungsstählen und an allgemeinen Stahllegierungen gliedern. Bei den Bewehrungsstählen sind wesentliche Arbeiten an der Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM) in Berlin von BRANDES & LIMBERGER 1985 [28] und bei Stahllegierungen im wesentlichen von Wissenschaftlern in den USA am Los Alamos National Laboratory (*LASL Shock Hugoniot Data* 1980 [146]), in den Sandia National Laboratories (*Shock Waves in Condensed Matters* 1985 [6]) und im Lawrence Livermore National Laboratory (*Equation of State and Strength Properties of Selected Materials* 1991 [201]) durchgeführt worden.

Stahl verhält sich unter dynamischer Beanspruchung elastisch/viskoplastisch. Seine Eigenschaften im elastischen Bereich sind nahezu unabhängig von der Belastungsgeschwindigkeit. Im plastischen Bereich sind hingegen die Verzerrungsraten entscheidend und führen zu einer Erhöhung der Festigkeit bei zunehmenden Raten. Wie in Abbildung 5.14 gezeigt, nimmt die Zunahme der Festigkeit des Stahls infolge der Verzerrungsraten mit Erhöhung der Stahlgüte ab.

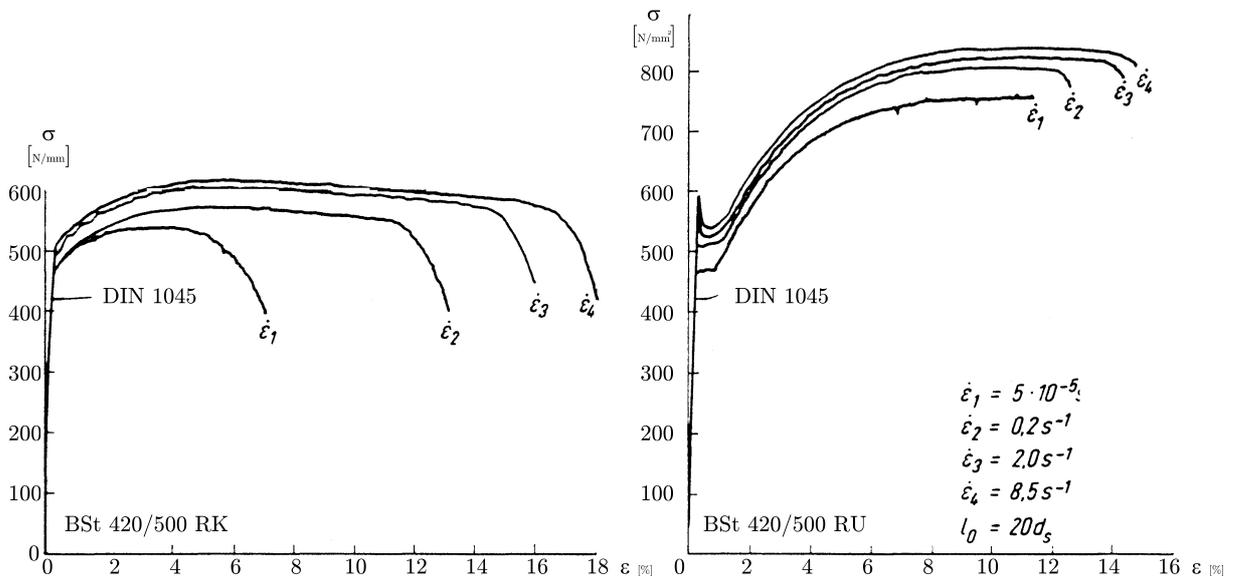


**Abbildung 5.14:** Einfluss der Stahlgüte auf die verzerrungsratenabhängige Erhöhung der Streckgrenze (aus: MÜLLER et al. 1983 [154])

Aus experimentellen Untersuchungen ist die Abhängigkeit der mechanischen Materialeigenschaften von den Verzerrungsraten  $\dot{\epsilon}$  bekannt. Dabei werden beim Bewehrungsstahl die Fließspannung, die Bruchspannung und die Gleichmaßdehnung erhöht. Der Elastizitätsmodul ist von der Verzerrungsrate nahezu unabhängig. In den Publikationen von MANJOINE 1944 [145], BERNER 1981 [22], BRANDES 1985 [28], BUCAR et al. 1986 [29] und dem CEB-Report 187 1987 [38] sind diesbezüglich Auswertungsergebnisse aus zahlreichen Versuchen für Stahl zu finden. Ebenso lassen sich dort die Beschreibungen der Versuchsaufbauten und -durchführungen nach-

lesen. Die folgenden Abbildungen und Materialgleichungen fassen die Ergebnisse aus der oben angegebenen Literatur zusammen.

Im folgenden werden Versuchsergebnisse von Untersuchungen an Bewehrungsstählen BSt 420/500 RK und BSt 420/500 RU mit vier verschiedenen Verzerrungsgeschwindigkeiten zwischen  $\dot{\epsilon}_1 = 5 \cdot 10^{-5} s^{-1}$  und  $\dot{\epsilon}_4 = 8.5 s^{-1}$  in Abbildung 5.15 dargestellt.

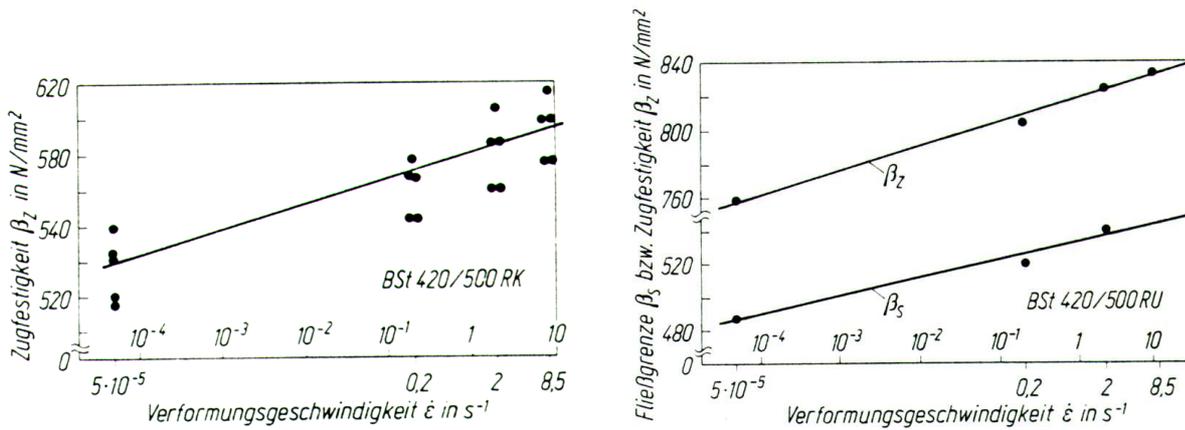


**Abbildung 5.15:** Spannungs-Dehnungs-Linien für Zugversuche bei unterschiedlichen Verzerrungsraten (aus: BRANDES & LIMBERGER 1985 [28])

Es stellt sich heraus, dass die Verformungsfähigkeit mit der Verzerrungsgeschwindigkeit zunimmt. Unter dynamischer Beanspruchung, trägt damit der Einfluss der Verzerrungsgeschwindigkeit in zweifacher Weise zum günstigen Materialverhalten bei:

1. durch die Erhöhung der Streckgrenze und der Zugfestigkeit,
2. durch den Anstieg der Verformungsfähigkeit.

Für die Bewehrungsstähle BSt 420/500 RU und BSt 420/500 RK sind die Versuchsergebnisse von BRANDES & LIMBERGER 1985 [28] für die Zunahme der Zugfestigkeit  $\beta_z$  und der Streckgrenze  $\beta_s$  in Abhängigkeit zur Verzerrungsrate in Abbildung 5.16 dargestellt, wobei die Abbildung der Verzerrungsrate im einfach logarithmischen Maßstab eine lineare Beziehung erkennen lässt.



**Abbildung 5.16:** Einfluss der Verzerrungsraten auf die Bewehrungsstähle BSt 500 RU und BSt 500 RK (aus: BRANDES & LIMBERGER 1985 [28])

In Tabelle 5.5 sind maximale Steigerungen von verschiedenen Materialeigenschaften für die Bewehrungsstähle BSt 420/500 RU und BSt 420/500 RK aufgezeigt.

**Tabelle 5.5:** Maximale Steigerung der Materialeigenschaften von Bewehrungsstählen durch erhöhte Verzerrungsgeschwindigkeiten (aus: STEMPNIEWSKI & EIBL 1993 [203])

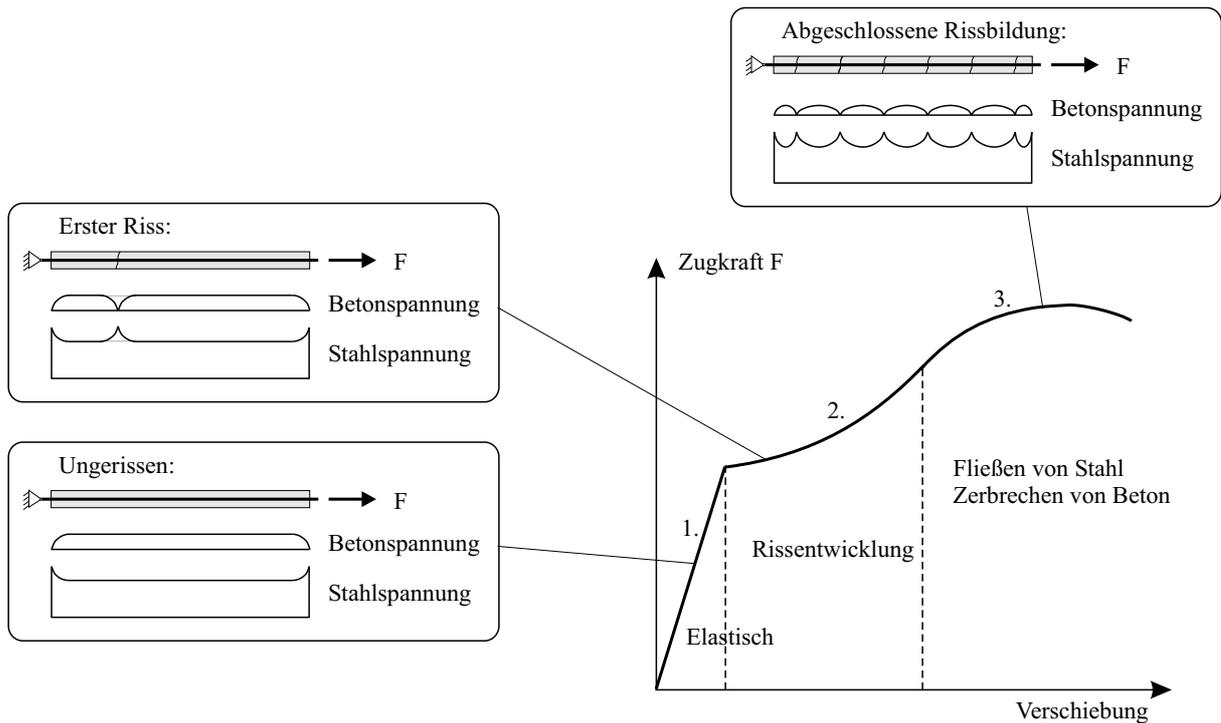
Material-Eigenschaften	kaltverformte BSt BSt 420/500 RK	warmgewalzte BSt BSt 420/500 RU
Streckgrenze $\beta_s$	+10 %	+13 %
Zugfestigkeit $\beta_z$	+14 %	+12 %
Bruchverzerrung $A_{10}$	+50 %	+7 %
Gleichmaßdehnung $A_g$	+180 % (!)	+30 %

## 5.4 Verbundverhalten von Stahlbeton

### 5.4.1 Einführung

Das Tragverhalten des Stahlbetons ist entscheidend durch das Zusammenwirken der einzelnen Bestandteile Bewehrungsstahl und Beton geprägt. Anhand des in Abbildung 5.17 dargestellten Kraft–Verschiebungs–Diagramms sei die charakteristische Tragwirkung eines Stahlbetonbauteils unter zentrischer Zugbelastung erläutert.

1. Im ersten Bereich ist der Beton noch nicht gerissen und verhält sich nahezu linear elastisch (akzeptable Näherung). Es kann von einem vollständigen Verbund ausgegangen werden. Der Stahl befindet sich ebenfalls im Bereich der HOOKE'schen Geraden. Der ideale Verbund verhält sich linear.



**Abbildung 5.17:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm für Stahlbeton (aus: CHEN 1982 [35] und PÖLLING 2000 [168])

- Bei weiterer Laststeigerung nehmen die Mikrorisse im Beton zu oder entstehen neu. Die Verformungen nehmen mit einem Versteifungseffekt nichtlinear zu. Die Lastanteile, die vom Beton nicht mehr übernommen werden können, sind nun vom Stahl allein zu tragen.
- Der Schlupf, der nötig ist, um die Verbundtragwirkung zu aktivieren ist überwunden, der Stahl übernimmt die Zugkräfte bis zu seinem Versagen. Die Verformungen nehmen mit einem Entfestigungseffekt zu.

Eine Vielzahl von Untersuchungen, über die beispielsweise zusammenfassend in MÜLLER et al. 1983 [154], EIBL et al. 1988 [54], im CEB Report Nr. 210 1991 [39], in RUSSWURM 1993 [185] und in HOFSTETTER & MANG 1995 [103] berichtet wird, haben gezeigt, dass das Verbundverhalten und -vermögen wesentlich von der Profilierung der Bewehrungsstäbe abhängt. Bei zunehmender Verformung führt dann eine Verschiebung zwischen Beton und Bewehrungsstahl zu einer Konsolenbildung beim Beton. Charakteristisch für die Größe der Verbundwirkung ist daher der Zusammenhang zwischen Verbundspannung und Verschiebung. Aufgrund des duktilen Verhaltens und der größeren Dehnbarkeit des Bewehrungsstahls im Vergleich zum Beton, entstehen in zugbeanspruchten Bauteilbereichen Risse, die zum Teil mit dem bloßen Auge erkennbar sind. Im Stahlbetonbau ist nach den Normen DIN 1045 oder EC2 eine Rissbildung im Zugbereich eingeschränkt zugelassen (Rissbreitenbeschränkung).

### 5.4.2 Verbundmechanismus und statisches Verbundtragverhalten

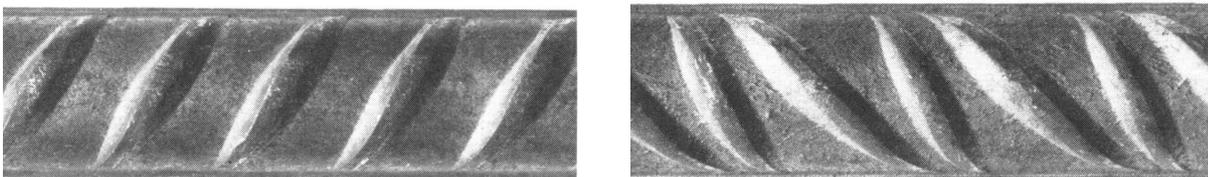
Das mechanische Verhalten des kompositen Werkstoffs Stahlbeton unterscheidet sich von seinen einzelnen Komponenten Beton und Bewehrungsstahl. Das Ausnutzen der jeweils günstigen Eigenschaften des einen und des anderen Materials hängt wesentlich vom Verbund an der Kontaktfläche ab. Mittels dieses Kontakts erfolgt eine gegenseitige Kraftübertragung. Die mechanischen Vorgänge, die das eigentliche Verbundtragverhalten von gerippten Betonstählen charakterisieren, spielen sich in Stabnähe ab. Diese Zone ist auf einen sehr kleinen Bereich, in der Größenordnung der Rippenhöhe, beschränkt. Die geometrische Anordnung der Rippen an der Oberfläche ist für Betonstähle nach DIN 488 in Tabelle 5.6 für verschiedene Stabstahldurchmesser angegeben und in Abbildung 5.18 dargestellt.

Die bezogene Rippenfläche  $f_R$  wird aus Rippenabstand, Neigung und Höhe der Rippen und Stabdurchmesser gebildet. Für den Bewehrungsstahl mit umlaufenden kreisringförmigen Rippen kann die bezogene Rippenfläche bestimmt werden über das Verhältnis von Rippenhöhe  $h_s$  zu Rippenabstand  $c_s$  (s.a. Abbildung 5.19)

$$f_R = \frac{F_R}{F_M} = \frac{h_s(d_s + h_s)}{d_s + 2h_s} = \frac{h_s}{c_s} . \quad (5.6)$$

**Tabelle 5.6:** Geometrische Abmessungen für Betonstähle mit verschiedenen Stabstahldurchmessern nach DIN 488 (Auszug)

Neendurchmesser	6 mm	10 mm	16 mm	20 mm	28 mm
Querschnitt $A_s [mm^2]$	28.27	78.45	201.06	314.16	615.75
Querschnitt $h_s [mm]$	0.39	0.65	1.04	1.30	1.82
Rippenabstand $c_s [mm]$	5.0	6.5	9.6	12.0	16.8
bezogene Rippenfläche $f_R [-]$	0.039	0.052	0.056	0.056	0.056



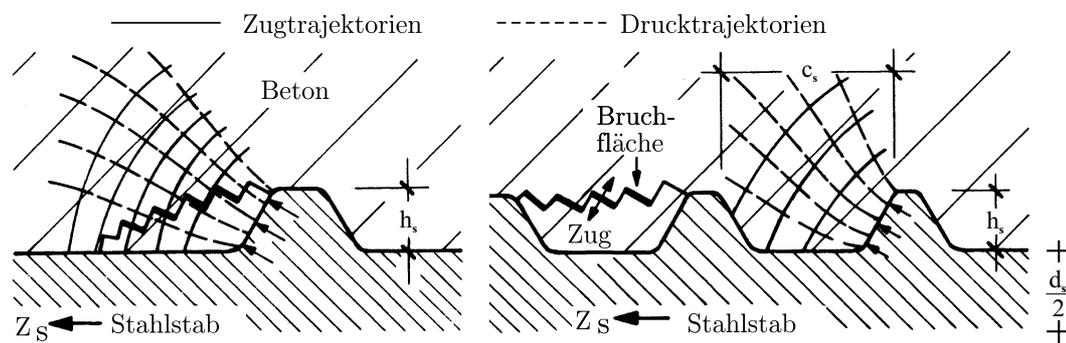
**Abbildung 5.18:** Oberflächengestaltung des BSt 420 S und BSt 500 S (aus: LEONHARDT 1980 [136])

Für die Verbundwirkung sind verschiedene Verbundarten verantwortlich, die durch unterschiedliche Merkmale charakterisiert werden. Für die Übertragung von Längskräften zeigt sich der *Verbund* zwischen Beton und Bewehrungsstahl verantwortlich, während die *Dübelwirkung* zur Übertragung von Schubkräften beiträgt.

Nach der Einteilung von MÖRSCH 1921 [153] existieren im ungerissenen Zustand drei grundlegende Verbundarten für die Verbundtragwirkung:

- Haftverbund,
- Reibungsverbund und
- Scherverbund.

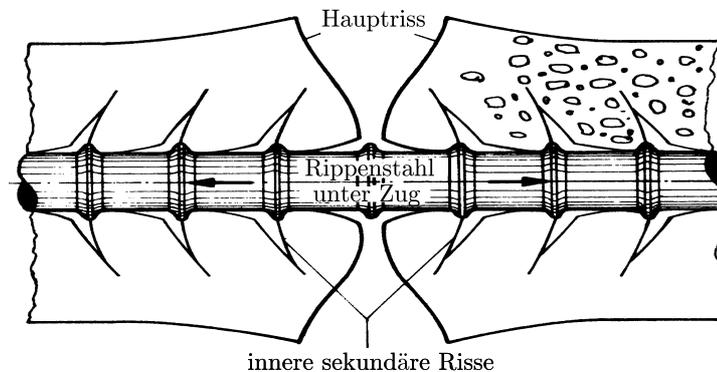
Die volle Aktivierung des Scherverbundwiderstands ist mit einem überproportionalen Anwachsen des Schlupfs verbunden, der hauptsächlich aus der Bildung von Sekundärrissen in der unmittelbaren Umgebung der Bewehrung und aus der Verformung der als Verzahnung zwischen den Rippen eingreifenden Betonkonsolen resultiert (siehe Abbildung 5.19).



**Abbildung 5.19:** Vergleich der Hauptspannungsverläufe und Bruchflächen für Bewehrungsstäbe mit großem (l.) und kleinem (r.) Rippenabstand (aus: LEONHARDT 1980 [136])

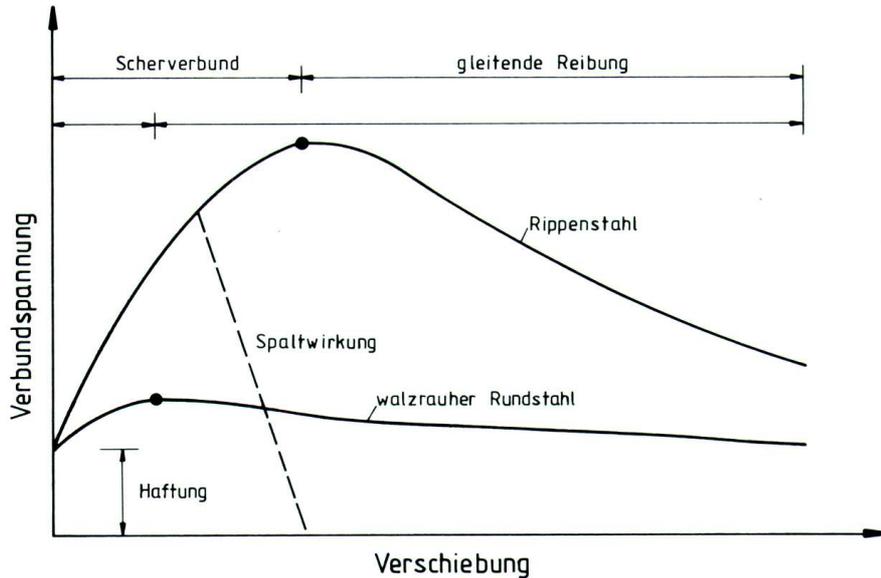
Neben den sich mit wachsender Beanspruchung bildenden sekundären Querrissen zwischen den Betonkonsolen, können die Ringzugspannungen, die infolge der Kraftübertragung zwischen Beton und Bewehrung entstehen, zu radial verlaufenden Längsrissen führen (siehe Abbildung 5.20, Hauptriss).

Sekundärrisse werden dem Zustand 1 zugeordnet. Erst vollständig entwickelte Hauptrisse, bei denen keine Verbundtragwirkung mehr erreicht wird, sind dem Zustand 2 zugewiesen.



**Abbildung 5.20:** Überhöhte Darstellung kleiner (sekundärer) Verbundrisse zwischen den Hauptrissen bei zentrisch gezogener Bewehrung (aus: HOFSTETTER & MANG 1995 [103])

Die Verbundwirkungen für walzrauh und gerippten Stahl lassen sich in einer Verbundspannungs–Verschiebungs–Beziehung darstellen (Abbildung 5.21). Mit Verschiebung ist die örtlich auftretende Relativverschiebung von Beton und Stahl  $\delta = u_s - u_b$  gemeint.



**Abbildung 5.21:** Verbundspannungs–Verschiebungs–Beziehungen (aus: RUSSWURM 1993 [185])

Der erste Anstieg der Verbundspannungs–Verschiebungs–Beziehung ( $\tau - \delta$ -Beziehung) zeigt als maßgebliche Verbundwirkung den Haftverbund. Hierbei handelt es sich um eine spröde Verbindung, deren Festigkeitsgrenze bei geringen Verschiebungen überschritten wird. Nach Überwindung des Haftverbunds, wird die Verzahnung der Bewehrungsstahloberfläche mit dem Betonmörtel maßgebend für die Verbundwirkung. Diese Verzahnung kommt bei glattem Rundstahl durch seine Oberflächenrauigkeit und bei Rippenstahl wirksamer durch die Profilierung der Oberfläche zustande. Daher ergeben sich unterschiedliche Verbundsteifigkeiten für glatte und profilierte Stähle. Der Anstieg bis zur Spaltwirkung entspricht dem Scherverbund im Beton mit sekundären Querrissen und der weitere Anstieg dem Scherverbund im Beton mit sekundären Quer- und Längsrissen (Abbildung 5.20). Bei glatten, lediglich walzrauhem Bewehrungsstählen ist schon zu Beginn der Bildung von Längsrissen mit dem Versagen des Scherverbunds zu rechnen. Der maximale Punkt entspricht dem Versagen des Scherverbunds und dem Übergang zum Reibungsverbund, der je nach Ausmaß des Aufspaltens des umgebenden Betons nach verschiedenen steilen Kurven erfolgt und gegebenenfalls bis zum vollständigen Verlust der Verbundwirkung führen kann. Die beiden ersten Mechanismen Haft- und Reibungsverbund spielen bei den heute verwendeten Betonstählen mit ausgeprägten Querrippen praktisch keine Rolle mehr. Die ELIGEHAUSEN et. al 1983 [57] entnommene Darstellung des Verbundmechanismus in Abbildung 5.22 zeigt in einer Gegenüberstellung deutlich den kontinuierlichen Abschervorgang der Betonkonsole mit dem entsprechenden Zustand auf der Verbundspannungs–Verschiebungs–Beziehung.

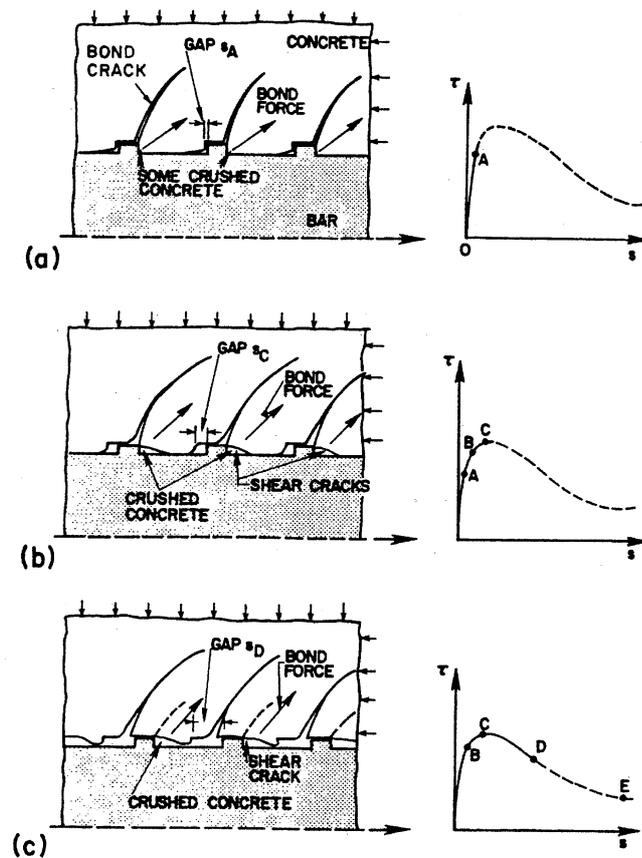
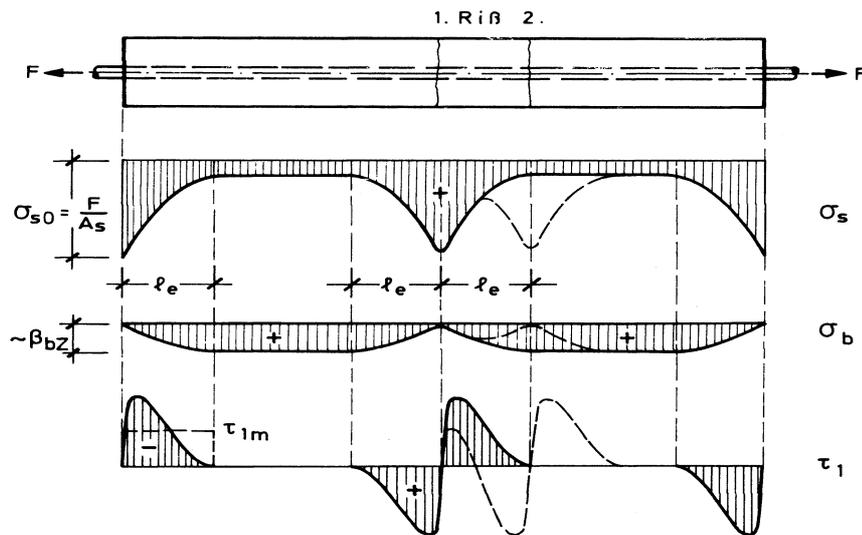


Abbildung 5.22: Verbundmechanismus (aus: ELIGEHAUSEN et. al 1983 [57])

Nur wenn eine ausreichende Umschnürung des Betonstahls vorliegt, kommen die beschriebenen Verbundmechanismen zum Tragen. Diese Umschnürung wird durch die Betondeckung und durch die Querbewehrung erzielt. Liegt keine ausreichende Umschnürung vor, dann bilden sich Längsrisse parallel zum Betonstahl und die Betondeckung platzt ab.

Wie groß die aufnehmbare Verbundspannung  $\tau$  ist, hängt von den Abständen der Haupttrisse ab. Die an einem Haupttriss zu übertragende Kraft muss allein vom Stahl aufgenommen werden. Die Stahlspannungen steigen dort sprunghaft an (Abbildung 5.23). Über die Lasteinleitungslänge  $l_e$  werden die Krätedifferenzen über Schubkräfte, die über den Umfang und die Lasteinleitungslänge integrierten Verbundspannungen  $\tau_1$ , ausgeglichen. Dies wiederholt sich an jedem Riss, bis entweder die Schubkräfte ein Maß erreichen, dass die Bewehrung aus dem Beton herausgezogen wird, oder bis der Bewehrungsstahl versagt.

Aus experimentellen Untersuchungen liegen mathematische Näherungsbeziehungen zur Beschreibung der örtlichen Verbundspannungs–Verschiebungs–Beziehungen vor, beispielsweise in MÜLLER et al. 1983 [154]. Allerdings ist deren Allgemeingültigkeit im Sinne der Kontinuumsmechanik nicht gegeben. Vielmehr existieren eine Reihe von Lösungen, die lediglich unter speziellen Rahmenbedingungen anwendbar sind (EIBL & IVÁNYI 1976 [55]).



**Abbildung 5.23:** Verlauf der Stahl- und Betonspannungen sowie der Verbundspannungen im gerissenen Stahlbetonkörper (aus: LEONHARDT 1980 [136])

Insbesondere haben Querdruckspannungen und Querzugspannungen unter Berücksichtigung der Rissöffnung einen Einfluss auf die Verbundkraftübertragung. Unter diesen Gesichtspunkten entwickelte IDDA 1999 [109] vierparametrische Ansatzfunktionen, die die Verbundspannung parallel ( $\tau$ ) und senkrecht ( $\sigma$ ) zur Stabrichtung in Abhängigkeit von der Betonfestigkeit  $f_c$ , von der Relativverschiebung  $\delta$ , von der Rissöffnung  $w$ , von der Rippenhöhe  $h_s$  und dem Rippenabstand  $c_s$  beschreibt. Hierzu erfolgten neben einer Vielzahl von IDDA selbst durchgeführter Untersuchungen auch die Gegenüberstellung mit aus der Literatur bekannter Daten. Auf die funktionalen Zusammenhänge wird in der Beschreibung des *Stahlbetonverbundmodells unter dynamischen Belastungen* im Abschnitt 7.4 näher eingegangen.

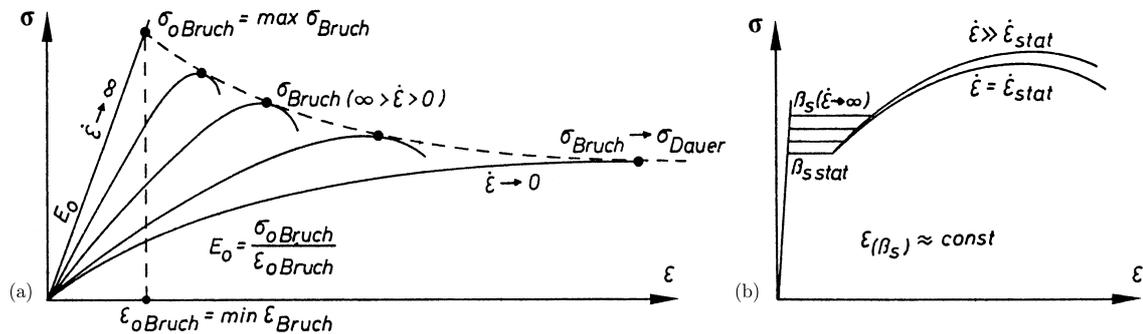
Während bei den oben genannten Verbundarten vom ungerissenen Zustand (Zustand 1) des Betons ausgegangen wird, treten im gerissenen Zustand (Zustand 2) zwei weitere Arten des Verbunds auf:

- die Kornverzahnung und
- die Dübelwirkung.

Kornverzahnungen entstehen an den Kontaktflächen von Zuschlagskörnern, sobald Risse zwischen Zuschlagskorn und Zementmatrix und geringe Verschiebungen im gelösten Gefüge auftreten. Bei der Dübelwirkung setzt sich der Bewehrungsstab der Schubverschiebung an Rissen entgegen. Der Effekt der Kornverzahnung nimmt mit zunehmender Rissöffnung ab, so dass die Stäbe von einer definierten Rissöffnung an allein verantwortlich für die Schubkraftübertragung sind.

### 5.4.3 Dynamisches Verbundtragverhalten

In den Untersuchungen von HJORTH 1976 [102] und VOS & REINHARDT 1982 [216] wurde mittels Auszieh- und Biegehaftversuchen nachgewiesen, dass eine Stahlprofilierung oder aufgebraute Rippen, im Gegensatz zu den walzrauhem Stählen, einen Einfluss auf die Verbundwirkung bei dynamischen Belastungen haben. Hierbei wurden die bezogenen Verbundspannungen  $x_s = \tau/f_c$  bei konstantem Schlupf von  $\delta = 0.2 \text{ mm}$  ermittelt, um auszuschließen, dass die nachgewiesene Zunahme der Verbundfestigkeit ausschließlich ein Klemmeffekt während des schnellen Ausziehvorgangs ist. Steigt die Belastungsgeschwindigkeit und damit die Verzerrungsrate, so steigen die Festigkeiten von Beton und Bewehrungsstahl. Da zudem bei gleichen Verbundspannungen die Verformungen geringer sind (Abbildung 5.24(a)) bedeutet dies, dass der Verbund, dessen Wirkung über den Schlupf aktiviert wird, verzögert genutzt wird. Das Ergebnis ist, dass die Verbundfestigkeitssteigerung bei höherer Belastungsgeschwindigkeit fast nur von den Materialeigenschaften des Betons geprägt wird, da die Verbundwirkung der profilierten Bewehrungsstähle hauptsächlich auf dem Verformungswiderstand unter der Profilierung beruht (für "glatte" Bewehrungsstähle ergibt sich daher nahezu keine Erhöhung der Verbundtragfähigkeit unter dynamischer Beanspruchung).



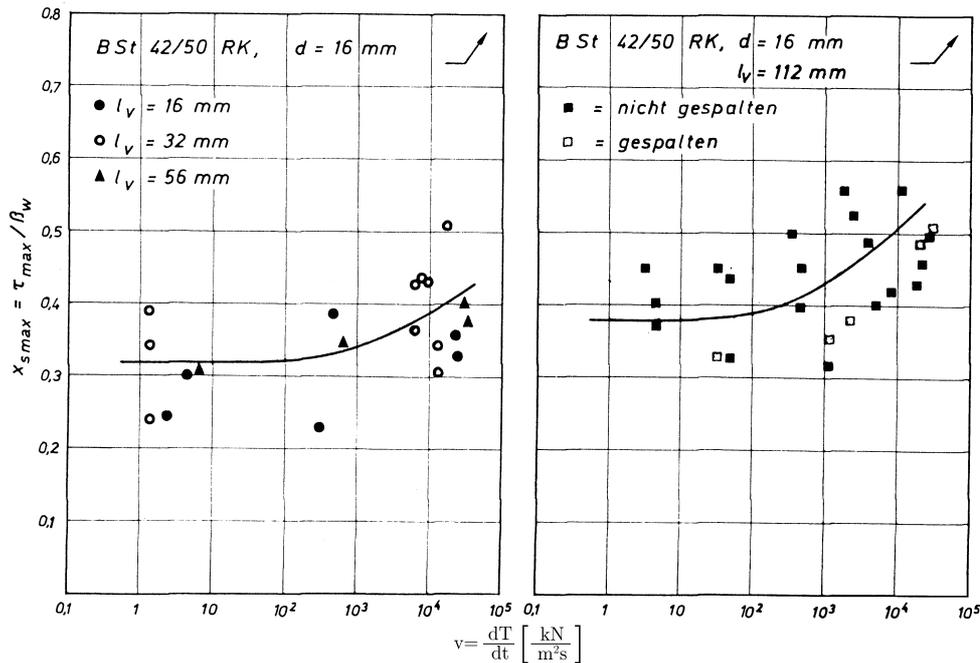
**Abbildung 5.24:** Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen für Beton (a) und Stahl (b) unter statischer und dynamischer Belastung (aus: HJORTH 1976 [102])

Abbildung 5.25 zeigt die Verbundtragfähigkeitssteigerung in Abhängigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit untersucht an Ausziehversuchen mit verschiedenen Verbundlängen  $l_v$ .

In einer Näherungsfunktion kann die Zunahme der Verbundfestigkeit in ratenabhängiger Darstellung angegeben werden mit

$$\frac{\tau^{dyn}}{\tau^{stat}} = \left( \frac{\dot{\tau}}{\dot{\tau}_0} \right)^\xi \quad \text{mit} \quad \xi = 0.7 \frac{(1 - 2.5\delta)}{(f_c^{stat})^{0.8}} \quad (5.7)$$

$\delta$  entspricht der Relativverschiebung in  $mm$ ,  $f_c^{stat}$  ist die statische Betondruckfestigkeit und die Referenzspannungsrate ist mit  $0.1 MPas^{-1}$  festgelegt. Eine Aussage über den Gültigkeitsbereich



**Abbildung 5.25:** Zunahme der bezogenen Verbundfestigkeit in Abhängigkeit von der Spannungsrate (aus: HJORTH 1976 [102])

der Spannungsrate aus Gleichung (5.7) ist nicht gemacht. Der Schlupf wird jedoch auf eine maximale Relativverschiebung von  $0.2 \text{ mm}$  beschränkt.

Aus Versuchsergebnissen von HJORTH, bei denen in einer elektrohydraulisch geregelten Versuchsanlage durch Fallkörper unterschiedliche Beanspruchungsgeschwindigkeiten erzeugt wurden, sind für das dynamische Verhalten des Verbunds folgende Aussagen belegt:

- Für die Rippenstähle BSt 420/500 RK und RU ist die Zunahme der Verbundfestigkeit bis zu einem Beanspruchungsbereich von etwa  $100 \frac{kN}{m^2s}$  nur unwesentlich. Im weiteren steigt die Verbundfestigkeit progressiv. Es existieren jedoch keine Erkenntnisse aus höheren Belastungsgeschwindigkeiten mit Spannungsraten größer als  $10^5 \frac{kN}{m^2s}$ . Somit ist keine Gesetzmäßigkeit erkennbar. In HJORTH 1976 [102] wird explizit darauf verwiesen, dass aufgrund des geringen Versuchsbereichs aber auch durch die breite Streuung der Ergebnisse, ein logarithmischer Ansatz nur angenommen werden kann.
- Für Stahlbeton mit glatter Rundstahlbewehrung ist keine signifikante Erhöhung der Verbundfestigkeit unter dynamischer Beanspruchung feststellbar.
- Die Zunahme der Verbundfestigkeit kann unmittelbar auf die Festigkeitszunahme des Betons zurückgeführt werden, da das Verbundversagen fast immer auf ein Versagen des Betons zurückzuführen ist (Versagen der Betonkonsolen, Ausbildung einer Bruchfläche (s. Abbildung 5.19)).

- Die Verformungen, die zu einem Bruch führen, bleiben auch bei höherer Belastungsgeschwindigkeit gleich.
- Ein möglicher Traglastzuwachs bis zum Versagen der Zugbewehrung, kann direkt über die Festigkeitszunahme im Stahl ermittelt werden. Die Erhöhung der Belastbarkeit ist unabhängig von der Bewehrungsführung, für gestoßene Bewehrung ist die Größe der Festigkeitssteigerung gleich.

Der Anstieg der Graphen in den Verbundspannungs–Verschiebungs–Beziehungen verändert sich mit höherer Beanspruchungsgeschwindigkeit nicht wesentlich, jedoch tritt eine Parallelverschiebung der  $\tau - \delta$ –Kurven in Richtung der  $\tau$ –Achse ein. Dies bedeutet, dass bei gleichen Verbundspannungen die Verformungen geringer sind, wodurch die zur Einleitung eines Verbundbruchs erforderliche Verformung (Schlupf) erst bei einer höheren Verbundspannung erreicht wird. Daher muss die Verbundtragfähigkeit mit zunehmender Beanspruchungsgeschwindigkeit ansteigen, sofern der Verbundbruch bei annähernd gleichen Verschiebungen eintritt.

Für die Ausnutzung der Verbundtragfähigkeitssteigerung unter dynamischer Belastung sind die Einwirkungsdauer der Höchstlast und die anschließende Dauerlast von entscheidender Bedeutung. So ist unter schneller Belastungssteigerung eine Erhöhung der Verbundtragfähigkeit, im Vergleich zu langsamer Belastung, nur bei einer Einwirkungsdauer unter 1 s zu erwarten. HJORTH erreichte anhand seiner Versuche mit Belastungsgeschwindigkeiten von circa  $100 \text{ kN}/(\text{cm}^2 \text{ s})$  und Lastanstieg bis zum schlagartigen Bruch Verbundfestigkeitssteigerungen bis zu 30% gegenüber der statischen Festigkeit.

Auch für biegebeanspruchte Bauteile kann eine Übertragbarkeit der Materialeigenschaften unter dynamischer Beanspruchung auf die Verbundtragfähigkeitssteigerung nachgewiesen werden. Im Falle eines Versagens der Zugbewehrung entspricht die Tragfähigkeitserhöhung der Erhöhung der Bewehrungsstahltragfähigkeit unter dynamischer Belastung.



## Kapitel 6

# Klassische Materialtheorien

---

Die im Kapitel 2.7 beschriebene Notwendigkeit von stoffabhängigen konstitutiven Beziehungen zur Lösung von Problemen der Hochgeschwindigkeitsdynamik fordert eine gezielte Formulierung von klassischen Materialtheorien zur Umsetzung des Werkstoffverhaltens unter hochdynamischen Belastungen. Dabei verdeutlicht insbesondere die entkoppelte Darstellung von Zustandsgleichung für das Kompressionsverhalten und vom Festigkeitsmodell für die Beschreibung des deviatorischen Materialverhaltens die Besonderheit bei der Formulierung geeigneter Werkstoffgesetze in der Hydrocode-Umgebung. In dieser Arbeit wird eine Kombination aus spannungsbasierter Plastizitätstheorie und einem isotropen Kontinuumsschädigungsmodell verwendet.

---

### 6.1 Allgemeines

Für den Aufbau und die Entwicklung von eigenen Materialmodellen verdeutlichen drei generelle Ideen und Forderungen, die HAUPT 2000 [94] zusammenfassend formulierte, die Basis zur Beschreibung von konstitutiven Gesetzen:

- Das Prinzip des *Determinismus* besagt, dass die aktuellen Spannungen  $\mathbf{T}(\mathcal{P}, t)$  (Abbildung 2.3) in einem materiellen Punkt  $\mathcal{P}$  eines Körpers  $\mathcal{B}$  (Abbildung 2.2) im Raum eindeutig durch die Verzerrungen und deren bisherige "Prozessgeschichte" festgelegt werden.
- Das Prinzip der *lokalen Wirkung* fordert, dass die Spannungen im materiellen Punkt  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$  allein durch die Verzerrungen und deren Geschichte an eben dieser Stelle bestimmt werden.
- Das Prinzip der *materiellen Objektivität* besagt, dass die mathematische Beschreibung des Materialverhaltens nicht von der Lage des Beobachters oder der Wahl des Bezugssystems abhängen darf.

Eine Klassifikation der Materialien nach der Prozessgeschichte erfolgt gemäß HAUPT in:

- *Elastische Materialien*: Dies sind Materialien ohne jedes Gedächtnis, d.h. für jeden Zeitpunkt lassen sich die Spannungen allein aus den Verzerrungen zu dem betrachteten Zeit-

punkt bestimmen. Die aufgebrachten Spannungen und Verzerrungen sind reversibel und pfadunabhängig. Elastisches Materialverhalten gilt für die meisten Materialien nur für kleine Verschiebungen und Verzerrungen.

- Materialien mit *nachlassendem Gedächtnis*: Bei diesen Materialien wird angenommen, dass die Spannungen von den vergangenen Deformationsereignissen umso weniger beeinflusst werden, je weiter diese zeitlich zurückliegen. Materialien, bei denen Phänomene wie Verformungsgeschwindigkeit einen Einfluss auf die Materialeigenschaften nehmen, sind dieser Materialklasse zuzuordnen. Dabei wird angenommen, dass das Materialgedächtnis von der Zeit abhängt (rate-dependent).
- Materialien mit *permanentem Gedächtnis*: Solche Materialien sind nicht von der Verformungsgeschwindigkeit abhängig (rate-independent). Plastische Materialien, die durch Phänomene wie bleibende Verformungen oder Materialschädigung gekennzeichnet sind, sind dieser Materialklasse zuzuordnen.

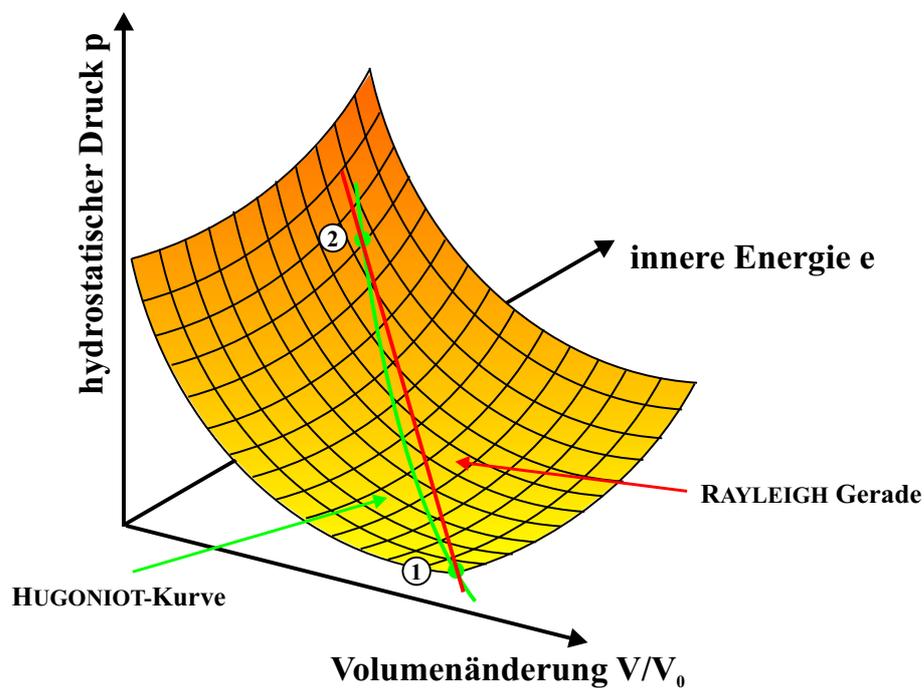
Die im Rahmen dieser Arbeit aufgestellten Materialmodelle für den Stahlfaserbeton und für den Stahlbetonverbund berücksichtigen sowohl die Einflüsse der Verformungsgeschwindigkeit auf die Materialeigenschaften als auch die permanent bleibenden Phänomene wie plastische Verformungen oder Materialschädigung. Aufbauend auf dem hypoelastischen Materialverhalten werden im Folgenden die spannungsbasierte Plastizitätstheorie und die isotrope Kontinuumschädigungstheorie unter Berücksichtigung von ver- und entfestigenden Gesichtspunkten hergeleitet und entsprechend in eine Hydrocode-Formulierung gemäß der in Abschnitt 4 beschriebenen Algorithmen umgesetzt. Im Vordergrund steht im Kapitel 7 die Herleitung möglichst allgemeiner konstitutiver Gesetzmäßigkeiten. Diese Werkstoffgesetze sollten zum einen das Materialverhalten so wirklichkeitsnah wie möglich und zum anderen so effizient in der Handhabung bezüglich aller notwendigen Materialparameter wie nötig charakterisieren. Hierbei beschränkt sich das im Kontinuum abgebildete Materialverhalten auf isotrope Werkstoffeigenschaften, so dass die Anzahl der elastischen Materialkonstanten allein durch die Lamé-Parameter abgebildet wird. Den Anfang macht die hydrocode-typische Darstellung des Werkstoffverhaltens unter hydrostatischen Spannungen in der Form der Zustandsgleichung.

## 6.2 Zustandsgleichung

Die Zustandsgleichung (EoS) ist eine mathematische Beziehung zwischen drei unbekanntenen Zustandsgrößen. Eine vollständige EoS beschreibt eine dreidimensionale Funktion im Raum, die zwei beliebige Variablen der Erhaltungsgleichungen mit der inneren Energie in Beziehung setzt. Auf dieser Zustandsfläche liegen alle möglichen Zustände eines Werkstoffs. Zustandsgrößen

sind materialspezifisch und charakterisieren einen thermodynamischen Gleichgewichtszustand des Materials.

Abbildung 6.1 zeigt beispielhaft die Zustandsfläche eines Festkörpers im Druck–Volumenänderung–Energie Raum unter der Annahme, dass *keine* Phasentransformation vorliegt. Die aus einer Vielzahl von Einzelversuchen gewonnenen Punkte beschreiben im Kollektiv die HUGONIOT–Kurve, die das hochdynamische Materialverhalten eines Materials charakterisiert. Jeder Punkt auf der HUGONIOT–Kurve stellt einen thermodynamischen Gleichgewichtszustand an einer stationären Schockfront dar und erfüllt die CLAUSIUS–DUHEM–Restriktionen gemäß Abschnitt 2.5.4.



**Abbildung 6.1:** Zustandsfläche eines Festkörpers im Druck–Volumenänderung–Energie Raum

Im Ausgangszustand 1 wird ein Material schockartig belastet. Dies führt zu einer sprunghaften Zustandsänderung in den "geschockten" Zustand 2. Alle Zustände, die durch eine unterschiedliche Intensität der Schockbelastung einen neuen Zustand im Material erzeugen, liegen auf der HUGONIOT–Kurve. Die Zustandsänderung kann mit der RAYLEIGH–Geraden beschrieben werden, und *nicht* entlang der HUGONIOT–Kurve, auf der alle anderen Zustände des Materials liegen. Die Gleichung der RAYLEIGH–Geraden leitet sich aus den beiden mechanischen Bilanzgleichungen (2.40) und (2.42) ab:

$$\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = \left( \frac{U_S}{V_1} \right)^2 . \quad (6.1)$$

### Planar–Platten–Impakt Test

Die experimentelle Ermittlung der HUGONIOT–Kurve ist äußerst komplex. Die Problematik liegt in der Erzeugung eines ausreichend hohen hydrostatischen Drucks im Material. Unterschiedliche Methoden mit denen EoS–Daten erzielt werden, sind im Kapitel 1.2 (Stand der Forschung) einleitend illustriert.

Die weltweit gängigste Methode ist der Planar–Platten–Impakt Test. Der entscheidende Vorteil liegt in der beherrschbar und kontrollierbaren Bestimmung der Belastungsgeschwindigkeit sowie der zuverlässigen Determination der Partikelgeschwindigkeiten der belasteten Probe mit Hilfe einer VISAR–Messmethode (BARKER & HOLLENBACH 1972 [14]). Jeder Versuch liefert einen Messpunkt in einer Schockwellengeschwindigkeits–Partikelgeschwindigkeits–Beziehung ( $U_s$ – $U_p$ ), die sich aus den RANKINE–HUGONIOT–Gleichungen (2.50) bis (2.52) an der Diskontinuitätsfläche ergeben:

$$U_s = c_B + S U_p . \quad (6.2)$$

Diese lineare Zustandsgleichung (6.2) ist eine vereinfachte Annahme und reduziert einen präziseren, empirischen Polynomansatz  $n$ –ter Ordnung.  $c_B$  entspricht der Kompressionswellengeschwindigkeit des Materials beim Nulldruck und  $S$  der Steigung in Bezug auf die Entropiezunahme. Diesem Ansatz fehlt die explizite Abhängigkeit von der inneren Energie. Er beschreibt lediglich eine Kurve, die HUGONIOT–Kurve, auf der vollständigen Zustandsfläche. Somit gibt die lineare EoS nur den Zusammenhang wieder, der die Zustände vor und hinter einem Stoß beliebiger Intensität bestimmt und stets von einem festgelegten Anfangszustand im Material ausgeht.

Die Vielzahl von dynamischen Untersuchungen an Werkstoffen verschiedenster Art, sowohl duktil als auch spröde, haben die lineare Zustandsgleichung (6.2) bestätigt. Hinzu kommt ein thermischer Anteil, der mit Hilfe des GRÜNEISEN–Koeffizienten beschrieben wird, und der die HUGONIOT–Kurve zu einer vollständigen Zustandsfläche erweitert.

### MIE–GRÜNEISEN Zustandsgleichung

Der theoretische Ansatz einer vollständigen Zustandsgleichung im Raum basiert auf grundlegenden Gesetzmäßigkeiten zwischen atomaren Bindungsbeziehungen. Ausgehend von der Energiedichtefunktion oder der freien HELMHOLTZ–Energie sind die Interaktionen der Atome aufgrund von außen angreifenden statischen Beanspruchungen zu beschreiben. Hinzu kommt der Energieanteil, der durch die Grundschiwingung der Atome bei 0 Kelvin erzeugt wird. Zu den beiden Anteilen, die die innere Energie infolge volumetrischer Verdichtung repräsentieren, gesellt sich der dritte Anteil, resultierend aus der Zunahme der Atomschwingungen durch eine Temperaturerhöhung.

Das Schwingungsverhalten von Atomen kann durch *statistische Methoden der Mechanik* beschrieben werden, wobei die *thermodynamische Beschreibung* einer makroskopischen Betrachtungsweise zugeordnet wird. Ein geeigneter thermodynamischer Ansatz einer Zustandsgleichung basiert auf der Modellvorstellung von MIE 1912 [152] und GRÜNEISEN 1926 [88], deren Herleitung auf der Analogie zur idealen Gasgleichung  $pV = nRT$  beruht. Die MIE-GRÜNEISEN Zustandsgleichung

$$p(V, e) = p_H(V) + \frac{\Gamma(V)}{V} (e - e_H) \quad (6.3)$$

ist eine Relation zwischen einem von der Temperatur abhängigen (thermischen) Druck und der thermischen Energie.  $p_H(V)$  entspricht dem HUGONIOT-Druck aus der RANKINE-HUGONIOT Gleichung (6.7).

Der GRÜNEISEN-Koeffizient

$$\frac{\Gamma(V)}{V} = \frac{3 \alpha_V}{C_V K} \quad (6.4)$$

ist eine Funktion vom Volumen und der inneren Energie und lässt sich mit Hilfe der Hauptsätze der Thermodynamik bei entsprechenden Umgebungsbedingungen durch den Kompressionsmodul  $K$ , durch die spezifische Wärmekapazität  $C_V$  und durch den thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten  $\alpha_V$  angeben (MEYERS 1994 [151]). Eine experimentelle Bestimmung des GRÜNEISEN-Koeffizienten erweist sich als schwierig, da die Messung des thermischen Drucks im unteren Beanspruchungsbereich sehr klein und damit fehlerbehaftet ist. DUGDALE & MACDONALD entwickelten 1953 einen praktischen Ansatz auf der Basis eines thermodynamisch konsistenten Modells [53], in dem der GRÜNEISEN-Koeffizient näherungsweise aus einer Abhängigkeit vom Steigungsfaktor  $S$  aus der  $U_S - U_p$ -Beziehung (6.2) ermittelt werden kann:

$$\Gamma \cong 2S - 1. \quad (6.5)$$

### HUGONIOT Zustandsgrößen

Unter Hinzunahme einer aus Versuchen gewonnenen linearen Zustandsgleichung (6.2) ergibt sich für die RANKINE-HUGONIOT Gleichungen (2.50) bis (2.52) ein HUGONIOT-Zustand nach dem Durchgang der Schockfront, wobei die folgenden HUGONIOT-Zustandsgrößen mit "H" indiziert sind:

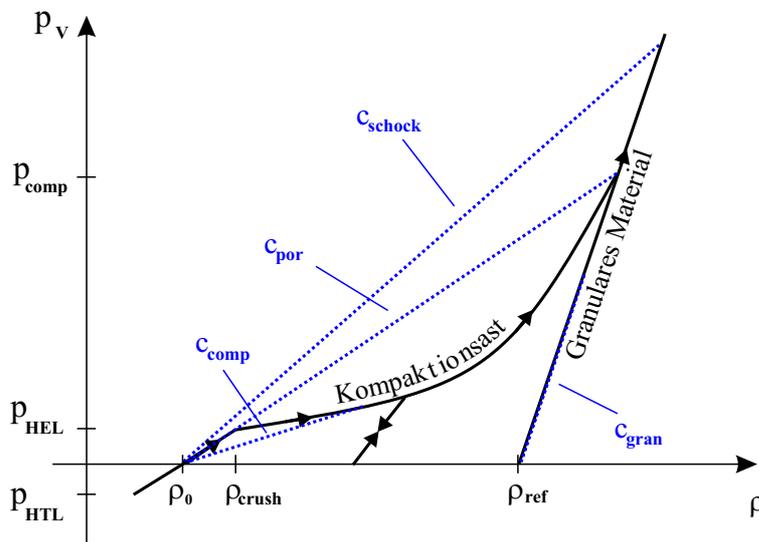
$${}^+ \rho_H = \bar{\rho} \left( 1 - \frac{\bar{U}_p - {}^+ U_p}{c_B + S {}^+ U_p - \bar{U}_p} \right)^{-1}, \quad (6.6)$$

$${}^+ p_H = \frac{\bar{\rho} c_B^2 \kappa}{(1 - S\kappa)^2} + \bar{p}, \quad (6.7)$$

$$e_H^+ = \frac{1}{2} \left[ \bar{\rho} \left[ \left( c_B + S \bar{U}_p^+ - \bar{U}_p \right) \left( \bar{U}_p^+ - \bar{U}_p \right) \right] + 2 \bar{p} \right] \frac{c_B + S \bar{U}_p^+ - \bar{U}_p}{\bar{U}_p - \bar{U}_p^+} + \bar{e} \quad (6.8)$$

mit  $\kappa = 1 - \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}^+}$ . Damit ist die MIE-GRÜNEISEN Zustandsgleichung (6.3) vollständig bekannt. Sie ist Ausgangsform weiterer Varianten von Zustandsgleichungen. Einfache Formen, wie beispielsweise die einer *linearen Kompressionskurve* ( $p = K \frac{\Delta V}{V} = K \mu$ ) oder einer *nichtlinearen Zustandsgleichung* (Erweiterung der linearen Kompressionskurve um polynomiale Koeffizienten) ( $p = K_1 \mu + K_2 \mu^2 + K_3 \mu^3$ ), können um einen energetischen Term erweitert werden.

Schwieriger gestaltet sich die Beschreibung kompaktierfähiger, poröser Werkstoffe wie Keramiken oder Beton, da kein stetiger Verlauf beispielsweise in der Druck-Dichte Beziehung vorliegt. Abbildung 6.2 illustriert das Kompressions- und Entlastungsverhalten von porösen Medien.



**Abbildung 6.2:** Kompressions- und Entlastungsverhalten von kompaktierfähigen, porösen Werkstoffen

Im einzelnen lassen sich die physikalischen Phänomene wie folgt beschreiben:

1. Vom Hydrostatic-Tensile-Limit ( $p_{HTL}$ ) bis zur hydrostatischen elastischen Spannungsgrenze, dem HUGONIOT-Elastic-Limit ( $p_{HEL}$ ) mit der Dichte  $\rho_{crush}$  liegt nahezu inkompressibles Materialverhalten vor. Auf diesem *elastischen Ast* der EoS lässt sich mit der Anfangsdichte  $\rho_0$  und der Steigung der Geraden

$$c_{por}^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \quad (6.9)$$

die Steifigkeit durch den elastischen Kompressionsmodul  $K$  ermitteln zu

$$K = \rho_0 c_{por}^2 \quad (6.10)$$

Die poröse Schallgeschwindigkeit  $c_{por}$  entspricht der in Tabelle 3.1 angegebenen Kompressionswellengeschwindigkeit  $c_B$ . Mit

$$K = \frac{2 \cdot G \cdot (1 + \nu)}{3 \cdot (1 - (2 \cdot \nu))} \quad (6.11)$$

und Gleichung (6.10) wird unter Berücksichtigung einer bekannten Querkontraktionszahl  $\nu$  der Schubmodul  $G$  bestimmt:

$$G = \frac{3 \cdot c_{por}^2 \cdot \rho_0 \cdot (1 - (2 \cdot \nu))}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (6.12)$$

2. Steigt der Druck über  $p_{HEL}$ , so stellen sich irreversible Volumenverzerrungen durch das Schließen von Poren und Hohlräumen ein. Dabei nimmt die Steifigkeit wegen  $K \sim \Delta p / \Delta \rho$  zunächst deutlich ab. Der *Kompaktionsast* geht dann kontinuierlich mit wachsender Steigung in den Teil der EoS über, in dem das Material zu einer Art Granulat verdichtet ist. Wird das Material entlastet, noch bevor eine *vollständige Kompaktion* erreicht ist, so liegen beim Erreichen des Ausgangsdrucks höhere Dichten als die Anfangsdichte  $\rho_0$  vor.
3. Nach der *vollständigen Kompaktion* aller Poren und Einschlüsse über  $p_{comp}$  liegt die "dichteste Packung" vor. Das Material ist zu diesem Zeitpunkt bereits vollständig zerstört, weshalb ab diesem Punkt keine wesentliche Steigungs- und somit Steifigkeitsänderung eintritt.
4. Wird nach einer vollständigen Kompaktion entlastet, so herrscht ein *verdichtetes Material* mit der Referenzdichte  $\rho_{ref}$  vor. Die Steifigkeit des Granulats  $K_{gran}$  korrespondiert zur Wellengeschwindigkeit des granularen Materials  $c_{gran}^2$ . Die Differenz aus Referenzdichte  $\rho_{ref}$  und Anfangsdichte  $\rho_0$  gibt das Kompaktionsvermögen eines kompaktierbaren, porösen Materials über die Gleichung (6.13) an:

$$\mu_{gran} = \frac{\rho_{ref} - \rho_0}{\rho_0} \quad (6.13)$$

Eine derzeit einzigartige Ermittlung und Gegenüberstellung von HUGONIOT-Daten für reinen Beton, die parallel zu dieser Arbeit an kooperierenden Instituten durchgeführt wurden, ist im Anhang A ausführlich dargestellt. Die dort vorgestellten Ergebnisse bilden u.a. die Basis für die im Kapitel 7 beschriebenen Zustandsgleichungen der eigenen Materialmodelle.

Eine Vielzahl weiterer, hier nicht aufgeführter Zustandsgleichungen findet sich zum einen in den gängigsten Materialdatenbanken von Hydrocode-Programmen bzw. in deren Theorie-Handbüchern, wie AUTODYN, LS-DYNA, HEMP, EPIC, NIKE, etc., sowie in den einschlägigen Publikationen ihrer Entwickler.

Umfangreiche Materialbibliotheken verschiedenster Werkstoffe entstanden im Rahmen der Arbeit von Zharkov (*Equation of State for Solids at High Pressures and Temperatures* 1971 [228])

sowie an den großen Forschungsinstituten in den USA am Los Alamos National Laboratory (*LASL Shock Hugoniot Data* 1980 [146]), in den Sandia National Laboratories (*Shock Waves in Condensed Matters* 1985 [6]) und am Lawrence Livermore National Laboratory (*Equation of State and Strength Properties of Selected Materials* 1991 [201]).

## 6.3 Festigkeitsmodell

### 6.3.1 Elastizitätstheorie

Unter der Voraussetzung kleiner Verformungen und kleiner Verzerrungen stellt sich im Material ein elastisches Verhalten ein, wobei auftretende Deformationen *reversibel* und *pfadunabhängig* sind. Es gilt das *verallgemeinerte* HOOKESche Gesetz

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{E} . \quad (6.14)$$

Eine erweiterte Formulierung des elastischen Materialverhaltens bietet die zeitlich inkrementelle, hypoelastische Beschreibung nach TRUESDELL von 1955 [209, 208] mit

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}}(t) . \quad (6.15)$$

Die Integration über die Zeit  $t$  ergibt den aktuellen Spannungszustand  $\mathbf{T}$  mit

$$\mathbf{T} = \int_t \mathbf{C}(t) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dt , \quad (6.16)$$

der gegenüber Gleichung (6.14) sowohl vom aktuellen Verzerrungszustand  $\mathbf{E}$  als auch von der Spannungsevolution (pfad-)abhängig ist. Die Zeit  $t$  bezieht sich auf den Prozess, in der das Material belastet wird. Der Materialtensor  $\mathbf{C}(t)$  kann mit Bezug auf den aktuellen Materialzustand formuliert werden und wäre somit pfadabhängig.

Aus der direkten Verbindung des zweistufigen Spannungstensors  $\mathbf{T}$  mit dem zweistufigen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  charakterisiert der Materialtensor  $\mathbf{C}$  einen Tensor 4. Stufe, der sich bekanntlich in einen sphärischen Anteil und in einen deviatorischen Anteil aufspalten lässt:

$$\mathbf{C} = K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + G \left( \mathcal{I} + \bar{\mathcal{I}} - \frac{2}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) = \left( K - \frac{2}{3} G \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + G (\mathcal{I} + \bar{\mathcal{I}}) , \quad (6.17)$$

wobei  $\mathcal{I}$  und  $\bar{\mathcal{I}}$  vierstufige Einheitstensoren darstellen. Sie bilden beliebige Tensoren 2. Stufe auf sich selbst ab, d.h. es gilt  $\mathbf{A} = \mathcal{I} : \mathbf{A}$  bzw.  $\mathbf{A}^T = \bar{\mathcal{I}} : \mathbf{A}$ .  $K$  und  $G$  entsprechen den materialspezifischen Parametern Kompressionsmodul und Schubmodul, die im direkten Zusammenhang mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  mit

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \quad (6.18)$$

stehen. Sie sind aufgrund der angenommenen Materialisotropie die charakterisierenden Materialparameter.

Mit dem elastischen Nachgiebigkeitstensor  $\mathbf{D}$  und den Eigenschaften  $\mathbf{C} : \mathbf{D} = \mathbf{D} : \mathbf{C} = \mathbf{I}$  folgt, dass sich Gleichung (6.15) in der inversen Form abbilden lässt mit

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D} : \dot{\mathbf{T}} . \quad (6.19)$$

Durch die Aufspaltung des Materialtensors aus Gleichung (6.17) ergibt sich für die Kopplung der Spannungen mit den Verzerrungen mit  $\frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\mathbf{T}}(t)) \mathbf{I} = K \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t))$  und  $\dot{\mathbf{T}}^D(t) = 2G\dot{\mathbf{E}}^D(t)$  die allgemein und ohne Einschränkung gültige konstitutive Gleichung eines isotropen, hypoelastischen Werkstoffs in inkrementeller Form:

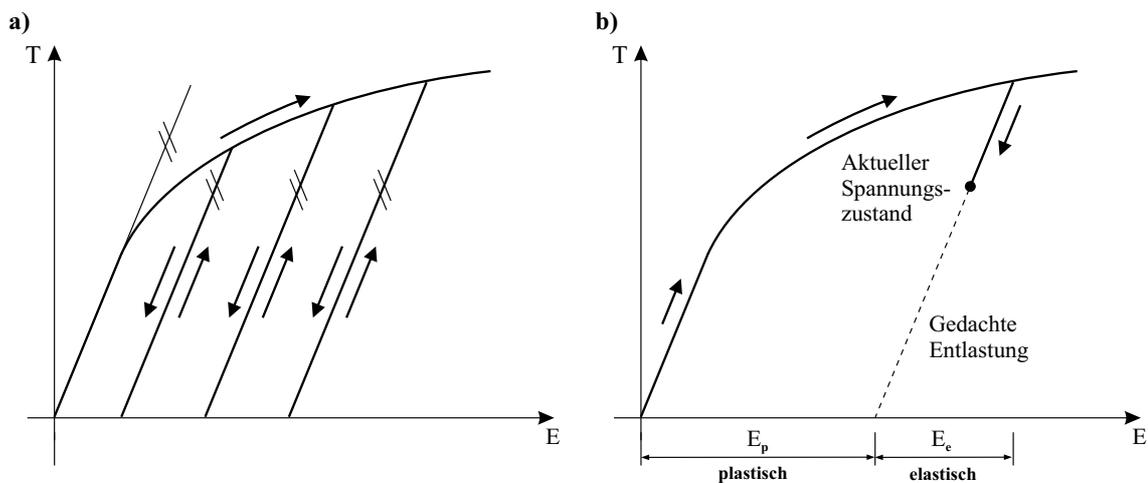
$$\dot{\mathbf{T}}(t) = K \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + 2G \dot{\mathbf{E}}^D(t) . \quad (6.20)$$

Die Substitution der deviatorischen Verzerrung in Gleichung (6.20) durch  $\dot{\mathbf{E}}^D(t) = \dot{\mathbf{E}}(t) - \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I}$  führt zu

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + 2G\dot{\mathbf{E}}(t) = 2G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) \right] . \quad (6.21)$$

### 6.3.2 Plastizitätstheorie

Plastifizieren bedeutet, dass durch Aufbringen einer Belastung im Material irreversible Verformungen auftreten. Dabei wird im Sinne der klassischen Elasto-Plastizität angenommen, dass mit bleibenden Verformungen keine Steifigkeitsänderung bei der Ent- und Wiederbelastung auftritt (Abbildung 6.3a)). Diese Änderungen der Materialeigenschaften werden erst durch eine Beschreibung im Rahmen der Kontinuumschädigungstheorie in Abschnitt 6.3.3 berücksichtigt.



**Abbildung 6.3:** Elasto-Plastizität: a) Plastisches Materialverhalten mit Ent- und Wiederbelastung, b) Spannungs-basierte Plastizitätstheorie mit additiver Aufspaltung der Verzerrungen

Ausgehend von der spannungsbasierten Plastizitätstheorie lassen sich die Fließbedingung und das Fließpotential im Spannungsraum darstellen, wobei sich der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  und seine Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{E}}$  additiv in einen *elastischen* und einen *plastischen* Anteil aufspalten:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} + \mathbf{E}_{pl} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{E}}(t) = \dot{\mathbf{E}}_{el}(t) + \dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) . \quad (6.22)$$

Für die hypoelastische Beziehung aus Gleichung (6.21) gilt hinsichtlich des elastischen Verzerrungsanteils  $\dot{\mathbf{E}}_{el}$ :

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_{el}(t)) \mathbf{I} + 2G \dot{\mathbf{E}}_{el}(t) = 2G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_{el}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}_{el}(t) \right] . \quad (6.23)$$

Da ein Material nicht in der Lage ist, unbegrenzt Spannungen aufzunehmen, existiert eine Fließfunktion  $f(\mathbf{T}, \mathbf{X}, k)$ , die den elastischen Bereich im Spannungsraum umschließt, beispielsweise die Fließfunktion nach VON MISES:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{T}, \mathbf{X}, k) &= \frac{1}{2} (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) - \frac{1}{3}k^2 \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D)^2 - \frac{1}{3}k^2 . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Der Verfestigungs- oder Back-Stress-Tensor  $\mathbf{X}$  ist ein Spannungstensor, der die Lage des Mittelpunktes der Fließfläche im Spannungsraum festlegt.  $\mathbf{X}^D = \mathbf{X} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{X}) \mathbf{I}$  ist der entsprechende deviatorische Anteil des Verfestigungstensors.  $k$  entspricht der materialspezifischen, einachsigen Fließspannung.

Mit  $B$  wird eine innere Belastungsfunktion eingeführt, die angibt, wann plastische Verzerrungen auftreten:

$$B = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} : \dot{\mathbf{T}}(t) = (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{T}}(t) . \quad (6.25)$$

Im folgenden geben die innere Belastungsbedingungen übersichtlich den aktuellen Zustand an:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} : \dot{\mathbf{T}}(t) \begin{cases} > 0 & : \text{ innere Belastung, } f(\mathbf{T}, \mathbf{X}, k) = 0, \dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) \neq 0 \\ = 0 & : \text{ neutrale innere Belastung} \\ < 0 & : \text{ innere Entlastung, } \dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

Erst wenn die innere Belastungsfunktion  $B > 0$  ist und die Fließfunktion aus Gleichung (6.24) identisch verschwindet ( $f(\mathbf{T}, \mathbf{X}, k) = 0$  (Fließbedingung)), verformt sich das Material plastisch, was mit Hilfe der Fließregel

$$\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) \begin{cases} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} & \text{wenn } f = 0 \text{ und } B > 0 \\ = 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} \quad (6.27)$$

beschrieben werden kann.

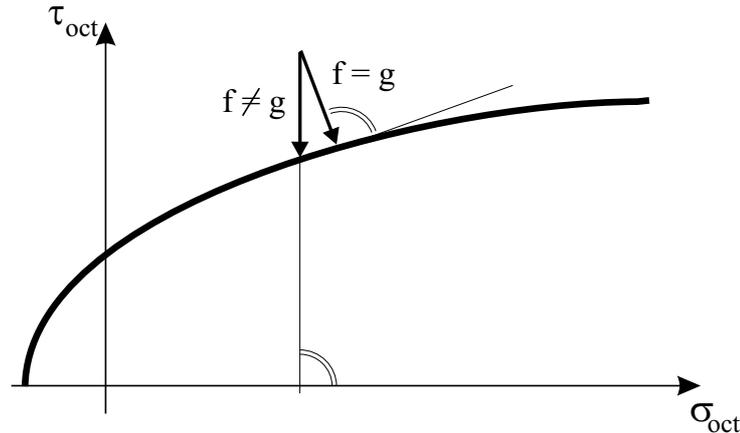


Abbildung 6.4: Assoziierte und nichtassozierte Fließregel

Die plastische Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t)$  ist proportional zur Normalen  $\partial f / \partial \mathbf{T}$  senkrecht auf die Fließfläche. Dieser Vorgang ist bekannt als Normalen- oder assoziierte Fließregel, bei der die Fließfunktion das plastische Potential mit  $f = g$  ersetzt, wie in Abbildung 6.4 illustriert.

Bei der Verwendung einer nicht-assozierten Fließregel, bei der das plastische Potential nicht proportional zur Fließfunktion  $f$  ist ( $f \neq g$ ), kann eine eindeutige und stabile Lösung nicht gewährleistet werden. Grundlegend gilt beim Auftreten irreversibler plastischer Deformationen, dass die inkrementelle plastische Arbeit  $\dot{W}_p(t)$  in einem durch äußere Arbeit aufgebracht und abgeschlossenen Lastzyklus stets positiv ist:

$$\dot{W}_p(t) = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) \geq 0 . \quad (6.28)$$

Das Stabilitätspostulat nach DRUCKER 1951 [52] fordert für Werkstoffe, die sich während des plastischen Fließens verfestigen, folgende Kriterien zur Stabilität und Eindeutigkeit der Lösung:

1. Vorausgesetzt wird die Konvexität und Kontinuität einer beliebig gekrümmten Fließfläche sowohl im Ausgangszustand als auch für alle folgenden Belastungs- und Entlastungszustände.
2. Der Vektor des plastischen Verzerrungsincrement  $\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t)$  muss senkrecht, also in Normalenrichtung zur Fließfläche liegen.
3. Das plastische Verzerrungsincrement  $\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t)$  ist linear abhängig vom Spannungsincrement  $\dot{\mathbf{T}}_{pl}(t)$ .

Das *DRUCKER'sche Stabilitätspostulat* ist eine hinreichende aber **nicht** notwendige Bedingung, so dass daher die als *schwaches Stabilitätspostulat* nach IL'YUSHIN bekannte Gleichung (6.28) ausreicht. Auf diesem Postulat beruhen einige Modellansätze, so auch die im Abschnitt 6.3.4

hergeleiteten Ansätze im verwendeten Hydrocode. Diskussionen zur Wahl einer geeigneten Fließregel vertieft CHEN in seiner Veröffentlichung von 1982 [35].

Die Fließfunktion in Gleichung (6.24) enthält materialver- und entfestigende Anteile, d.h. sowohl die Gestalt als auch die Lage der Fließfläche können sich ändern.

In der allgemeinen Formulierung der *kinematischen Verfestigung* existieren nach ARMSTRONG & FREDERICK 1966 [7] ein linearer Verfestigungsanteil mit Begrenzungsterm mit den Materialkonstanten  $b$  und  $c$ :

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = c\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) - b\dot{s}_p(t)\mathbf{X} . \quad (6.29)$$

Die *isotrope Ver- und Entfestigung* ist die in allen Richtungen gleiche Änderung der Fließspannung  $k$  und hängt

- für die Verfestigung von der Verzerrungsgeschichte bzw. von der plastischen Bogenlänge  $s_{pl}$  und von der plastischen Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t)$  ab, und
- für die Entfestigung von der Materialschädigung  $D$  ab.

Für die Fließspannung

$$k = k(s_{pl}, \dot{\mathbf{E}}, D) \quad (6.30)$$

gilt für deren Änderung

$$k'(s_{pl}, \dot{\mathbf{E}}, D) \begin{cases} \geq 0 & \text{im Fall einer Verfestigung,} \\ < 0 & \text{im Fall einer Entfestigung.} \end{cases} \quad (6.31)$$

Die plastische Bogenlänge oder auch akkumulative plastische Verzerrung  $\dot{s}_{pl}(t)$  wird bestimmt mit

$$\dot{s}_{pl}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) : \dot{\mathbf{E}}_{pl}(t)} = \sqrt{\frac{2}{3}\text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t))^2} . \quad (6.32)$$

Die Integration über die Zeit  $t$  ergibt die aktuelle plastische Verzerrung  $s_{pl}(t)$  mit

$$s_{pl}(t) = \int_t \dot{s}_{pl}(t) dt . \quad (6.33)$$

Der positive Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  wird aus der Konsistenzbedingung

$$\dot{f} = 0 \quad (6.34)$$

in Verbindung mit der Fließregel nach Gleichung (6.27) bestimmt, um damit das plastische Verzerrungsinkrement zu ermitteln:

$$\dot{s}_{pl}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}[\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) : \dot{\mathbf{E}}_{pl}(t)]} = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}\text{tr}(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D)^2} = \lambda\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot k^2} = \frac{2}{3}\lambda k . \quad (6.35)$$

Die Konsistenzbedingung ist eine notwendige Bedingung, damit die Fließfunktion während des elasto–plastischen Prozesses identisch erfüllt ist. Somit ist  $\lambda$  kein konstanter Faktor und muss während des plastischen Deformationsprozesses in einer Art und Weise bestimmt werden, dass der Spannungszustand sich immer auf der Fließfläche befindet, solange keine Entlastung eintritt. Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  ist unter Berücksichtigung der Fließregel aus Gleichung (6.27) und der Fließbedingung  $f = 0$  und der Abbildung der plastischen Bogenlänge aus Gleichung (6.35) als Funktion der Spannungsinkremente zu bestimmen durch

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{T}}(t)}{ck^2 - bk(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \mathbf{X} + \frac{2}{3}k^2k'} \quad (6.36)$$

Aus der Elastizitätsbeziehung (6.23) und der additiven Aufspaltung der Gesamtverzerrung nach Gleichung (6.22) folgt, dass die Fließbedingung für alle plastischen Deformationsprozesse nur dann identisch erfüllt ist, wenn

$$\lambda = 3G \frac{(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{E}}(t)}{k^2(2G + c) - bk(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \mathbf{X} + \frac{2}{3}k^2k'} \quad (6.37)$$

Die Stoffgleichung des Spannungsinkrements ergibt sich als Funktion des Verzerrungsincrements aus den oben angegebenen konstitutiven Beziehungen aufgespalten nach Belastung ( $\dot{\mathbf{E}}_{pl} \neq 0$ ) und Entlastung ( $\dot{\mathbf{E}}_{pl} = 0$ ) wie folgt:

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \begin{cases} 2G \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) - \frac{3G}{N} [(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{E}}(t)] (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) \right\} \\ \quad \text{für } \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D)^2 = \frac{1}{3}k^2 \quad \text{und} \quad (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{E}}(t) > 0 \\ 2G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) \right] \quad \text{in allen anderen Fällen,} \end{cases} \quad (6.38)$$

mit

$$N = k^2(2G + c) - bk(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \mathbf{X} + \frac{2}{3}k^2k' \quad (6.39)$$

Dabei sind in den Gleichungen (6.36), (6.37) und (6.39) sowohl die Fließspannung  $k$  als auch deren Ableitung  $k'$  von der plastischen Bogenlänge  $s_{pl}$ , von der Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{E}}(t)$  und von der Schädigung  $D$  abhängig (vgl. Gleichungen (6.30) und (6.31)).

Durch Einsetzen von Gleichung (6.37) in die Fließregel aus Gleichung (6.27) ergibt sich das plastische Verzerrungsincrement  $\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t)$  zu:

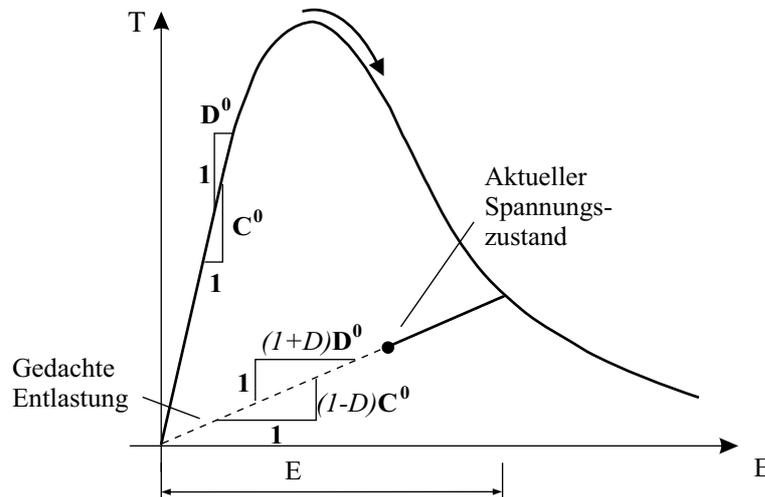
$$\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) = \lambda (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) = \frac{3G}{N} [(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{E}}(t)] (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) \quad (6.40)$$

falls zum betrachteten Zeitpunkt  $t$  die absoluten Verzerrungen bekannt sind, andernfalls gilt mit der Evolution der bekannten Spannungsrate

$$\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) = \lambda (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) = \frac{3G}{2(N - 2Gk)} [(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{T}}(t)] (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) \quad (6.41)$$

### 6.3.3 Theorie zur Kontinuumschädigungsmechanik – Modell der Degradation

Das bereits in Abbildung 1.9 schematisch dargestellte elasto–plastische und elasto–schädigende Materialverhalten lässt sich insbesondere durch eine Kombination aus der Plastizitätstheorie und der Theorie zur Kontinuumschädigungsmechanik modellieren. Gegenüber der in der spannungsbasierten Form dargestellten Plastizitätstheorie erfolgt die im folgenden vorgestellte Beschreibung der Materialdegradation durch Schädigung in einer verzerrungsbasierten Form (vgl. u.a. SIMO & JU 1987 [193], CAROL, RIZZI & WILLAM 1994 [31] oder LEMAÎTRE & CHABOCHE 1998 [135]), bei der der Steifigkeitstensor  $\mathbf{C}$  als interne Schädigungsvariable ausgewählt wird. Alternativ schlägt ORTIZ 1987 [163] die Degradation des Nachgiebigkeitstensors  $\mathbf{D}$  vor, was zu einer spannungsbasierten Schädigungstheorie führt. Letztgenannte Theorie wird hier nicht weiter behandelt.



**Abbildung 6.5:** Ansätze zur spannungsbasierten und verzerrungsbasierten Kontinuumschädigungstheorie: Änderung der Steifigkeit bzw. der Nachgiebigkeit

In der verallgemeinerten Darstellung einer verzerrungsbasierten, anisotropen Elasto–Schädigung erfolgt eine Degradation des elastischen Steifigkeitstensors  $\mathbf{C}^0$  im Ausgangszustand durch den vierstufigen Tensor  $[\mathcal{I} - \mathbf{D}]$ , wobei die Differenz des vierstufigen Einheitstensors  $\mathcal{I}$  und des vierstufigen Schädigungstensors  $\mathbf{D}$  den aktuellen Schädigungszustand des Materialtensors  $\mathbf{C}^{ed}(t)$  charakterisiert:

$$\mathbf{C}^{ed}(t) = [\mathcal{I} - \mathbf{D}] : \mathbf{C}^0 . \quad (6.42)$$

Aufgrund der angenommenen Isotropie im Kontinuum ergibt sich für den vierstufigen Schädigungstensor ein mit einer skalarwertigen Schädigungsgröße  $D$  gewichteter Einheitstensor zu  $\mathbf{D} := D\mathcal{I}$ . Unter Berücksichtigung von Gleichung (6.17) vereinfacht sich Gleichung (6.42)

zu

$$\mathbf{C}^{ed}(t) = (1 - D)\mathbf{C}^0 = (1 - D) \left\{ \left( K - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + G(\mathcal{I} + \bar{\mathcal{I}}) \right\} . \quad (6.43)$$

Das hypoelastische Materialgesetz in Gleichung (6.15) lässt sich folgendermaßen modifiziert darstellen:

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{C}^{ed}(t) : \dot{\mathbf{E}}(t) . \quad (6.44)$$

Aus Gleichung (6.44) lassen sich die Evolutionsgleichung der inneren plastischen Variable  $\lambda$ , die elastischen und plastischen Steifigkeitsbeziehungen sowie das plastische Verzerrungsincrement  $\dot{\mathbf{E}}_p(t)$  aus den Gleichungen (6.36), (6.38) und (6.40) angepasst an die aktuelle Schädigungsevolution ableiten.

Für den Proportionalitätsfaktor:

$$\lambda = (1 - D)3G \frac{(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{E}}(t)}{k^2 [(1 - D)2G + c] - bk(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \mathbf{X} + \frac{2}{3}k^2 k'} . \quad (6.45)$$

Für die elastischen und plastischen Steifigkeitsbeziehungen:

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \begin{cases} (1 - D)2G \left\{ \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t))\mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) - \frac{(1 - D)3G}{N} [(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{E}}(t)] (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) \right\} \\ \text{für } \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D)^2 = \frac{1}{3}k^2 \quad \text{und} \quad (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{E}}(t) > 0 \\ (1 - D)2G \left[ \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t))\mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) \right] \quad \text{in allen anderen Fällen,} \end{cases} \quad (6.46)$$

mit

$$N = k^2 [(1 - D)2G + c] - bk(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \mathbf{X} + \frac{2}{3}k^2 k' . \quad (6.47)$$

Es sei angemerkt, dass in den Gleichungen (6.45) und (6.47) sowohl die Fließspannung  $k$  als auch deren Ableitung  $k'$  Funktionen der Schädigung  $D$  sind (vgl. Gleichungen (6.30) und (6.31)). Hierin ist somit die Materialentfestigung enthalten.

Für das plastische Verzerrungsincrement gilt:

$$\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) = \lambda (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) = \frac{(1 - D)3G}{N} [(\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) : \dot{\mathbf{E}}(t)] (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) . \quad (6.48)$$

### 6.3.4 Bewertung der Theorien und Umsetzung in AUTODYN

#### Zur spannungsbasierten Plastizitätstheorie:

1. Bei dieser Form der Plastizitätstheorie wird die Fließfläche im Spannungsraum abgebildet. Eine Vielzahl von Fließflächenformulierungen sind für verschiedenartige Werkstoffe mit unterschiedlicher Anzahl von Parametern in der Literatur bekannt und sind u.a. übersichtlich in ZHOU 1995 [229] oder RUPPERT 2000 [184] zusammengefasst. Entscheidender Vorteil bei der Abbildung der Fließfläche im Spannungsraum ist die Bestimmung der Materialparameter aus Versuchsergebnissen, wie dies in der Modellierung des Stahlfaserbetons für variierende Stahlfasergehalte im Abschnitt 7.2 gezeigt wird. Häufig liegen für betonartige Werkstoffe lediglich die einachsigen Spannungs–Verzerrungs–Beziehungen vor, aus denen die Abhängigkeiten zum mehrachsigen Materialverhalten sinnvoll postuliert werden (vgl. GUO–Modell 1995 [90]).
2. Die additive Aufspaltung der Gesamtverzerrung  $\mathbf{E}$  in einen elastischen Anteil  $\mathbf{E}_{el}$  und in einen plastischen Anteil  $\mathbf{E}_{pl}$  ist anschaulich und vor allem wesentlich für die Beschreibung der Schädigungsevolution mit Bezug auf eine experimentell ermittelbare maximale Bruchverzerrung.
3. Der numerische Aufwand der Iteration zur Bestimmung des aktuellen Spannungszustands auf der Fließfläche ist aufgrund der Berücksichtigung von isotroper und kinematischer Ver- bzw. Entfestigung mit Schädigungsevolution sehr hoch. Insbesondere ist es schwierig festzustellen, inwiefern plastisches Fließen die Schädigung beeinflusst, bzw. umgekehrt eine Schädigungsfunktion plastische Deformationen verursacht. Um einen stabilen Zustand zu finden, sollten somit kleine Belastungsinckremente gewählt werden. Letztere Aussage wird manifestiert durch die Annahme, dass die spannungsbasierte Plastizitätstheorie nur gültig für kleine Verzerrungen und nur gültig für kleine Verzerrungsinckremente ist.
4. Die Verwendung einer nicht–assozierten Fließregel führt zu einer unsymmetrischen Steifigkeitsmatrix, was einen erhöhten numerischen Aufwand in der finiten Berechnung zur Folge hat. Auf weitere Einflüsse wird in der folgenden Beschreibung bei der Umsetzung der Theorie in die Hydrocode–Formulierung eingegangen.

#### Zur Kontinuumsschädigungstheorie:

1. Die Kontinuumsschädigungsmechanik beschreibt lediglich die Phänomenologie der in der Struktur des betonartigen Werkstoffs tatsächlich auftretenden Mikrodefekte. Eine Bestimmung der aufnehmbaren Bruchverzerrung in einem Schädigungsgesetz bedarf experimenteller Daten, die wenn überhaupt für einachsige Spannungs–Verzerrungs–Beziehungen bis

zum vollständigen Sprödbruch unter wiederkehrender Be- und Entlastung vorliegen. Eine Ausweitung auf das räumliche Spannungs–Verzerrungs–Verhalten unter Schädigung ist nur sinnvoll anzunehmen.

2. Wegen der Annahme der Isotropie besteht keine Möglichkeit der richtungsabhängigen Formulierung der Schädigungsevolution und der damit zu berücksichtigenden Anpassung der Fließfläche im Spannungsraum. Gerade im spröden Materialverhalten von Beton zeigt sich aber deutlich eine starke Richtungsabhängigkeit der Mikrorisse je nach Belastung.
3. Nach der oben angegebenen Theorie nimmt die Schädigungsevolution, ausgedrückt durch die innere Schädigungsvariable  $D$ , Einfluss auf die Degradation der Steifigkeit  $G$  und der Festigkeit über die Fließspannung  $k$ . Es erfolgt keine Berücksichtigung der Schädigung auf die Querkontraktion  $\nu$ , deren Abhängigkeit zum aktuellen Grad der Schädigung experimentell für (Stahlfaser-)Beton auch nicht in der Literatur dokumentiert ist.
4. Schließlich bedarf die quantitative Angabe der Schädigung mit der Variablen  $D$  einer ingenieurmäßigen Interpretation. Was bedeutet eigentlich 40% Schädigung, beispielsweise in Bezug auf sich vom Bauteil lösende (Stahlfaser-) Betonbruchstücke wenn eine Detonationsbelastung auf eine betonartige Struktur aufgebracht wird, oder in Bezug auf die Resttragfähigkeit des geschädigten Werkstoffs?

Die Gleichungen (6.45) bis (6.48) beschreiben das allgemeine isotrope elasto–plastische Schädigungsverhalten und gelten für Werkstoffe unter Berücksichtigung von isotroper und kinematischer Ver- bzw. Entfestigung mit Begrenzungsterm ( $k' \neq 0, c \neq 0, b \neq 0$ ). Idealerweise wäre der im Rahmen dieser Arbeit zu modellierende (Stahlfaser-)Beton so abzubilden und die Werkstoffparameter entsprechend zu bestimmen.

Im folgenden wird gezeigt, wie die allgemeinen konstitutiven Beziehungen der klassischen Plastizitätstheorie und der Kontinuumsschädigungstheorie aus den oben angegeben allgemeinen Formulierungen hergeleitet sowie durch Vereinfachungen und sinnvolle Annahmen aufbereitet in die Hydrocode–Umgebung implementiert sind. Dabei wird deutlich, dass die Materialgleichungen die Werkstoffbeschreibung im Sinne der klassischen Kontinuumsmechanik zwar verletzen – diese Verletzungen aufgrund der numerischen Umsetzung begründet und vernachlässigbar sind, was am Ende dieses Abschnitts erläutert wird.

Im Einzelnen wird nach folgender Reihenfolge vorgegangen:

1. Vernachlässigung der **kinematischen** Ver- bzw. Entfestigung mit Schädigungsevolution,
2. Vernachlässigung der **isotropen** Ver- bzw. Entfestigung mit Schädigungsevolution,
3. Herleitung der **VON MISES Fließspannung** über den einachsigen Spannungs–Verzerrungs–Test beim elastisch–ideal-plastischen Material,

4. **Rückskalierung** des aktuellen Spannungszustandes auf die Fließfläche,
5. Berechnung des **plastischen Verzerrungsinkrements**.

**zu 1.:**

Der Ansatz liegt in der Ausgrenzung des linearen Verfestigungsanteils mit Begrenzungsterm nach Gleichung (6.29) durch Festlegen der Materialparameter  $c = b = 0$ . Eingesetzt in die Gleichungen (6.45) bis (6.48) folgt daraus.

Für den Proportionalitätsfaktor:

$$\lambda = (1 - D)3G \frac{\mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t)}{k^2(1 - D)2G + \frac{2}{3}k^2k'} . \quad (6.49)$$

Für die elastischen und plastischen Steifigkeitsbeziehungen:

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \begin{cases} (1 - D)2G \left\{ \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) - \frac{(1 - D)3G}{N_1} [\mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t)] : \mathbf{T}^D \right\} \\ \text{für } \mathbf{T}^D : \mathbf{T}^D = \frac{2}{3}k^2 \text{ und } \mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t) > 0 \\ (1 - D)2G \left[ \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) \right] \text{ in allen anderen Fällen,} \end{cases} \quad (6.50)$$

mit

$$N_1 = k^2(1 - D)2G + \frac{2}{3}k^2k' . \quad (6.51)$$

Für das plastische Verzerrungsinkrement:

$$\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) = \frac{(1 - D)3G}{N_1} [\mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t)] : \mathbf{T}^D . \quad (6.52)$$

**zu 2.:**

In einem weiteren Schritt wird der isotrope Verfestigungsanteil nach Gleichung (6.31) durch Setzen von  $k' = 0$  vernachlässigt.

Für den Proportionalitätsfaktor:

$$\lambda = \frac{3 [\mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t)]}{2k^2} . \quad (6.53)$$

Für die elastischen und plastischen Steifigkeitsbeziehungen:

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \begin{cases} (1 - D)2G \left\{ \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) - \frac{3}{2k^2} [\mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t)] : \mathbf{T}^D \right\} \\ \text{für } \mathbf{T}^D : \mathbf{T}^D = \frac{2}{3}k^2 \text{ und } \mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t) > 0 \\ (1 - D)2G \left[ \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) \right] \text{ in allen anderen Fällen.} \end{cases} \quad (6.54)$$

Für das plastische Verzerrungsinkrement:

$$\dot{\mathbf{E}}_{pl}(t) = \frac{3}{2k^2} \left[ \mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t) \right] : \mathbf{T}^D . \quad (6.55)$$

Die Gleichungen (6.53) bis (6.55) sind besser bekannt als Stoffgleichungen für einen Festkörper mit elastisch-ideal-plastischem Werkstoffverhalten. Für ein metallisches Material, bei dem rein isochores Verhalten vorliegt (Abbildung 6.6), ist plastisches Fließen allein von der deviatorischen Spannungskomponente  $\mathbf{T}^D$  abhängig. Diese konstitutiven Beziehungen sind auf Basis der Gestaltänderungsarbeit nach HUBER-VON MISES-HENCKY hergeleitet worden (u.a. HILL 1950 [100]). Dies führt zu

$$\dot{\mathbf{T}}^D(t) = \begin{cases} (1-D)2G \left\{ \dot{\mathbf{E}}^D(t) - \frac{3}{2k^2} \left[ \mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t) \right] : \mathbf{T}^D \right\} \\ \text{für } \mathbf{T}^D : \mathbf{T}^D = \frac{2}{3}k^2 \text{ und } \mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t) > 0 \\ (1-D)2G \left[ \dot{\mathbf{E}}^D(t) \right] \text{ in allen anderen Fällen,} \end{cases} \quad (6.56)$$

und

$$\text{tr}(\dot{\mathbf{T}}(t)) = (1-D)2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) . \quad (6.57)$$

### zu 3.:

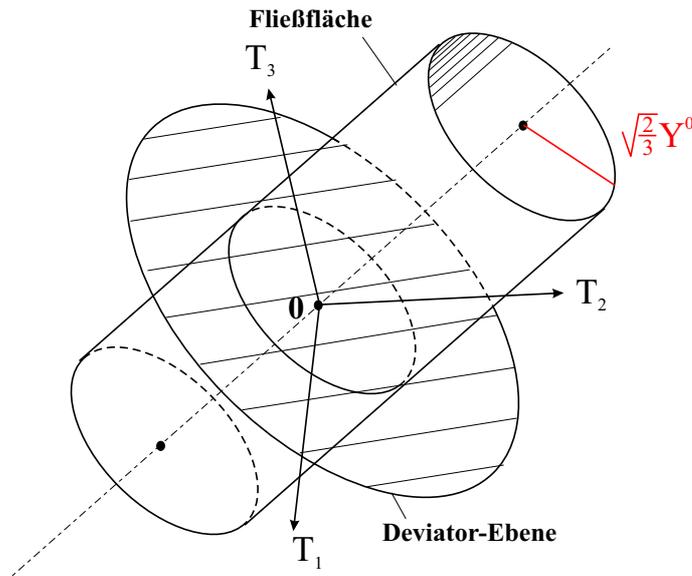
AUTODYN und viele andere Hydrocodes verwenden pragmatisch die VON MISES Fließbedingung für alle Materialien, also auch für spröde Werkstoffe mit gekrümmter Fließfläche in Richtung der Hydrostaten. Dabei wird plastisches Fließen ausschließlich anhand der deviatorischen Spannungsterme über die Fließbedingung

$$f(T_1^D, T_2^D, T_3^D) = \mathbf{T}^D : \mathbf{T}^D - \frac{2}{3}k^2 = 0 \quad (6.58)$$

formuliert. Hierbei ist  $\mathbf{T}^D : \mathbf{T}^D = \frac{2}{3}k^2$  die VON MISES Fließbedingung, bei der plastisches Fließen eintritt, wenn die Fließspannung  $Y^0$  eines Werkstoffs unter einachsialer Belastung erreicht ist:  $T_1 = Y^0, T_2 = T_3 = 0$  und  $k = Y^0$ . Die Fließspannung  $Y^0$  wird alleine aus der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators  $J_2$  bestimmt, die direkt in Bezug zur Oktaederschubspannung aus Gleichung (2.38) steht. Daraus folgt für die VON MISES Fließbedingung aus Gleichung (6.58):

$$f(J_2) := 3J_2 - (Y^0)^2 = 0 \quad \text{und} \quad Y^0 = \sqrt{3J_2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{oct} = \sigma_{eq} . \quad (6.59)$$

Gemäß Gleichung (6.59) muss die Beschreibung der Fließfläche bzw. der Fließspannung des Stahl-faserbetonmodells (s.a. Abschnitt 7) wegen ihrer Darstellung in Oktaederspannungen projiziert werden, um eine konforme Berechnung des plastischen Potentials ( $\sigma_{eq} - Y^0$ ) zu gewährleisten.



**Abbildung 6.6:** Fließflächenbeschreibung von homogenen, isochoren Materialien nach VON MISES

Der Schnitt durch die Deviatorenebene erscheint als Kreis und entspricht im Hauptspannungsraum einem Kreiszyylinder (Abbildung 6.6 und Abbildung 6.7) mit dem Radius  $\sqrt{\frac{2}{3}}Y^0$ . In jedem beliebigen Spannungszustand  $f(T_1^D, T_2^D, T_3^D) < 0$  liegt elastisches Materialverhalten vor.

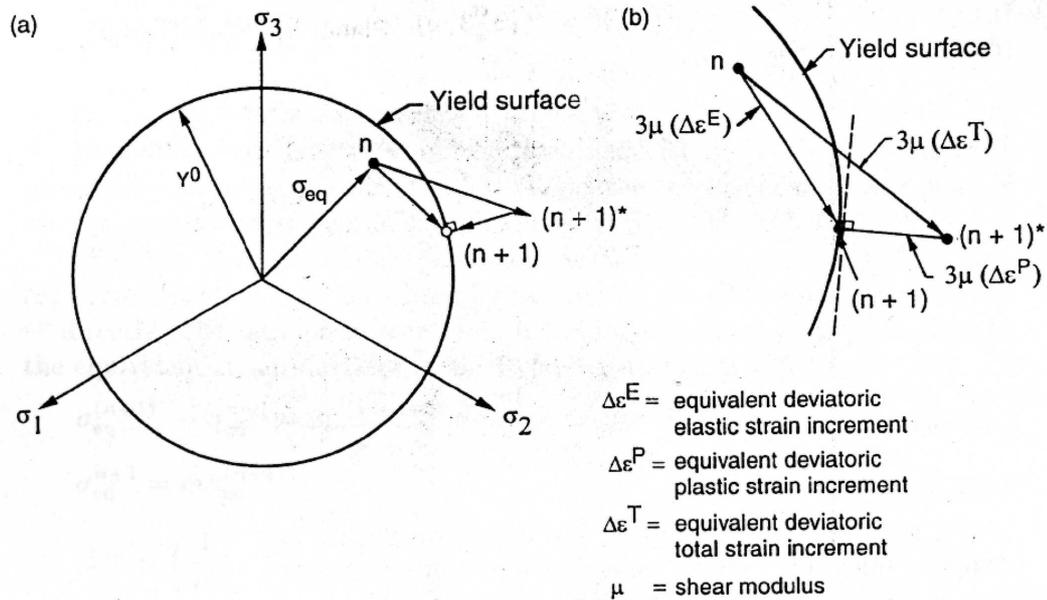
**zu 4.:**

Eine essentielle Vereinfachung in AUTODYN liegt bei der Bestimmung des plastischen Potentials vor. Hierbei wird ein Spannungszinkrement, das plastische Deformationen erzeugt, wie ein elastisches Spannungszinkrement nach dem HOOKE'schen Gesetz behandelt. Es wird **nicht** gemäß Gleichung (6.56) bei plastischer Belastung mit  $\mathbf{T}^D : \dot{\mathbf{E}}(t) > 0$  der Spannungszustand auf der Fließfläche unter Anwendung des Proportionalitätsfaktors  $\lambda$  ausiteriert, sondern ein Spannungszustand  $(n+1)^*$  außerhalb der Fließfläche zugelassen, wie in Abbildung 6.7(a) illustriert ist. Sollte ein neuer Spannungszustand  $(n+1)^*$  die Fließfläche nach außen verlassen, so werden die deviatorischen Spannungskomponenten mit einem linearen Faktor

$$m = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}Y^0}{\sqrt{(T_1^D)^2 + (T_2^D)^2 + (T_3^D)^2}} \quad (6.60)$$

multipliziert, der den aktuellen Spannungszustand  $(n+1)$  wieder auf die Fließfläche des Materials rückskaliert:

$$(T_i^D)^{(n+1)} = m \cdot (T_i^D)^{(n+1)^*} \quad (6.61)$$



**Abbildung 6.7:** a) Querschnitt des VON MISES Zylinders im Hauptspannungsraum, b) Vorgehensweise der inkrementellen Spannungsänderung von  $n$  nach  $n+1$  durch Rückskalierung der deviatorischen Spannungskomponenten auf die Fließfläche (aus: WILKINS 1999 [222])

#### zu 5.:

Wie oben gezeigt, wird das plastische Potenzial ( $\sigma_{eq} - Y^0$ ) wie ein elastisches Spannungsincrement betrachtet. Die Berechnung der plastischen Verzerrungen in der inkrementellen Vorgehensweise erfolgt über die deviatorischen elastischen Spannungsanteile aus Gleichung (6.56) mit

$$\dot{\mathbf{T}}^D(t) = (1 - D)2G \left[ \dot{\mathbf{E}}^D(t) \right] . \quad (6.62)$$

Durch Einsetzen des plastischen Potenzials anstelle einer einachsialen Fließspannung  $Y^0$  in den Spannungstensor  $\mathbf{T}$  ergibt sich für das elastische-ideal-plastische Stoffgesetz mit Schädigungsevolution in Gleichung (6.62) unter Berücksichtigung der einachsialen plastischen Verzerrung von  $\varepsilon_{pl,1} + \varepsilon_{pl,2} + \varepsilon_{pl,3} = 0$  und  $\varepsilon_{pl,2} = \varepsilon_{pl,3} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{pl,1} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{pl}$

$$\frac{2}{3} (\dot{\sigma}_{eq} - \dot{Y}^0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = (1 - D)2G (\dot{\varepsilon}_{pl}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} . \quad (6.63)$$

Es ist deutlich, dass Gleichung (6.64) ein linear abhängiges Gleichungssystem ist, und sich das plastische Verzerrungsincrement  $\dot{\varepsilon}_{pl}$  ergibt zu:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \frac{\dot{\sigma}_{eq} - \dot{Y}^0}{(1 - D)3G} . \quad (6.64)$$

**Zur Umsetzung in AUTODYN:** Ursprünglich sind die implementierten konstitutiven Gesetze für Metalle auf Basis der Gestaltänderungsarbeit nach HUBER-VON MISES-HENCKY hergeleitet worden. Aufgrund der Invarianz von  $I_1$  und der Winkelunabhängigkeit in der Deviatorebene ist das VON MISES-Modell für poröse, spröde Medien wie (Stahlfaser-)Beton unbefriedigend (vgl. VON MISES Fließfläche (Abbildung 6.7) mit GUO Fließfläche (Abbildung 7.8)). Bei betonartigen Werkstoffen wird die Fließfläche häufig auch als Bruchfläche bezeichnet, da nicht wie bei Metallen stets ein plastisches Fließen bei Erreichen der Fließfläche einsetzt sondern es direkt zu einem Bruch/Versagen des Materials aufgrund dessen Sprödigkeit kommt. Insbesondere im Bereich niedriger hydrostatischer Drücke, wo die Fließfläche eines spröden Materials in der  $\sigma_{oct} - \tau_{oct}$ -Ebene stark gekrümmt ist, kann es zu numerischen Schwächen im Modell führen (s.a. 3. Punkt der folgenden Aufzählung). Jedoch ist die Anwendung der VON MISES Fließbedingung unter der Restriktion der reduzierten Größe der Zeitschrittweite  $\Delta t$  nach dem CFL-Kriterium (Abschnitte 4.4 und 4.5) von hochdynamischen Spannungswellenausbreitungen sinnvoll einsetzbar:

1. Im Bereich hoher hydrostatischer Drücke verhalten sich poröse, spröde Materialien nahezu duktil. Deren Bruchfläche ähnelt dann dem VON MISES Zylinder. Das realitätsnahe Zurückbringen der Spannung auf die Bruchfläche mit der assoziierten Fließregel ist praktisch gleichzusetzen mit der nicht-assozierten Fließregel.
2. Die innerhalb eines Inkrements berechnete Spannungsänderung ist so klein, dass bei Verwendung der nicht-assozierten Fließregel die unter Schubverzerrung auftretende Volumendilatation vernachlässigt werden kann.
3. Die Verfestigung, die Raten- und die Schädigungsabhängigkeit des Materials, die zum Ausiterieren der aktuellen Fließspannung pro Zeitinkrement führen würde, kann ebenso aufgrund der geringen Spannungsänderung unberücksichtigt bleiben.

---

## Kapitel 7

# Materialmodelle – Umsetzung der Theorie

---

*Im vorliegenden Kapitel erfolgt die konkrete Umsetzung der in den vorangegangenen Kapiteln hergeleiteten Grundlagen der spannungsbasierten plastischen Kontinuumsschädigungstheorie in Verbindung mit den phänomenologischen Effekten der Schockwellenausbreitung und den Grundlagen der Hydrocode-Simulationsverfahren auf den Stahlfaserbeton und auf den Stahlbetonverbund. Das Ziel bei der Entwicklung geeigneter Werkstoffmodelle ist, die kontinuierliche Abbildung vom statischen bis zum hochdynamischen, vom elastischen bis zum plastisch-schädigenden Werkstoffverhalten zu gewährleisten. Insbesondere steht die Herleitung von wesentlichen Stoffgesetzen im Vordergrund, die das Materialverhalten so wirklichkeitsnah wie möglich und deren Parameter so effizient in der Handhabung wie nötig charakterisieren. Zusätzlich erfolgt zur vollständigen Beschreibung des Stahlbetons eine Anpassung und Implementierung der Materialparameter für Betonstahl nach DIN 488 in ein bestehendes Materialmodell für Metalle.*

---

### 7.1 Verhalten von schockartig beanspruchten Werkstoffen – Anforderungen und bekannte Modelle

#### 7.1.1 Allgemeines

Um die Umsetzung der Theorie in geeignete makromechanische Materialmodelle für numerische Hydrocode-Simulationen vollziehen zu können, werden zusammenfassend die Anforderungen an die Modellbildung und bereits vorhandene Modelle in Bezug auf ihre Stärken und Schwächen erläutert. Die Schlussfolgerungen zeigen deutlich die Notwendigkeit zur eigenen Entwicklung **neuer** Materialmodelle für den *Stahlfaserbeton* und den *Stahlbetonverbund* unter dynamischen Lasten.

Es sei angemerkt, dass die makromechanische, also kontinuumsmechanische Betrachtungsweise, auf der die folgenden Materialmodelle aufbauen, die aus dem Experiment gewonnenen Ergebnisse phänomenologisch abbildet. Diese Betrachtungsweise simuliert nicht die in der inneren,

heterogenen Struktur auftretenden Mechanismen. Um daher Materialien wie Stahlfaserbeton oder Stahlbeton mit einem makroskopischen Modell abzubilden, werden lokale Stoffeigenschaften oder diskrete Schädigungen über einen endlichen Bereich – hier die kleinste Elementgröße – verschmiert.

### 7.1.2 Anforderungen an die Modellbildung

In Anlehnung an die Aussagen in den vorherigen Kapiteln sind folgende wichtige Aspekte des statischen und des dynamischen Werkstoffverhaltens für die Modellbildung des *Stahlfaserbetons* und des *Stahlbetonverbunds* zusammenfassend dargestellt:

#### Stahlfaserbeton:

1. Sowohl die Druck- als auch die Zugfestigkeit steigen mit zunehmendem Stahlfasergehalt. Daher fordert die Beschreibung des mehraxialen Werkstoffverhaltens, bei dem die Festigkeit und das Deformationsvermögen des Stahlfaserbetons stark druckabhängig sind, eine in Abhängigkeit vom Stahlfasergehalt variabel formulierte Modellierung der Zustandsgleichung und der Fließfläche. Da für einen Stahlfasergehalt  $\rightarrow 0.0$  Vol.-% die Eigenschaften des *reinen Betons* vorliegen, erscheint es logisch, auf ein bekanntes, geeignetes Materialmodell für den reinen Beton aufzubauen und dies zu erweitern. Dies geschieht über eine Adaption aller Werkstoffparameter in Abhängigkeit vom Stahlfasergehalt für die Zustandsgleichung, für die Fließfläche und für die Schädigungsevolution. Es sei angemerkt, dass in der Literatur für beliebige, baupraktische Stahlfaserbetone **keine** adäquaten Versuchsergebnisse zum mehraxialen Tragverhalten vorliegen.
2. Im Bereich niedriger Drücke bis etwa 0.5 GPa besitzt der deviatorische Anteil der Spannungen poröser Werkstoffe einen entscheidenden Einfluss auf das Deformationsverhalten und auf das Materialversagen. Bekannte, klassische nichtlineare Modelle sind in der Lage, bei diesen niedrigen Spannungen gut das Tragverhalten abzubilden. Darüber hinaus ist das hydrodynamische Deformationsverhalten, bei dem der Stahlfaserbeton vom porösen in den kompakten Zustand übergeht insbesondere für die Schockwellensimulation von entscheidender Bedeutung.
3. Da keine gezielten Untersuchungen zum Materialverhalten unter extremen Drücken und hohen Verzerrungsraten vorliegen, ist man auf geeignete Vereinfachungen und Annahmen angewiesen. Beispielhaft sei erwähnt, dass mit Zunahme der Belastungsgeschwindigkeit die Druck- und die Zugfestigkeit deutlich ansteigen. Die in der Literatur dokumentierten Versuchsergebnisse reichen lediglich bis zu Verzerrungsraten von  $\dot{\epsilon} \approx 4 \cdot 10^1 s^{-1}$ . Diese Daten decken die durch die Detonation initiierten Beanspruchungsgeschwindigkeiten **nicht**

ab (s.a. Tabelle 1.1). In der Modellierung ist die Ratenabhängigkeit für Verzerrungsraten größer als  $\dot{\epsilon} \approx 4 \cdot 10^1 s^{-1}$  zu postulieren.

4. Die Ergebnisse aus 2. und 3. fordern eine gekoppelte Darstellung der Ver- als auch der Entfestigung im Materialmodell. Die im Abschnitt 6.3.4 beschriebene Umsetzung der spannungsbasierten Plastizitätstheorie und der Kontinuumsschädigungstheorie für die explizite Hydrocode-Formulierung wirken sich vereinfachend in der Berechnung des zeitlich inkrementellen Fließ- und Schädigungspotenzials aus; die Vereinfachungen erweisen sich als zulässig .
5. Gegenüber dem reinen Beton ist der Stahlfaserbeton in der Lage, auch nach Überschreiten der Maximallast noch Zugkräfte aufzunehmen. Dies wirkt sich auf die Entfestigung bei der Fließflächenmodellierung in Bezug auf die Schädigungsevolution aus.
6. Da die numerischen Simulationen der hochdynamischen Prozesse aus Detonationen in einem Zeitraum von maximal Millisekunden stattfinden, wird der Wärmeaustausch, der auch einen Einfluss auf die Wellenfortpflanzung oder die Materialbeschreibung hat, vernachlässigt. Es liegt quasi eine adiabatische Zustandsänderung vor. Somit werden Materialgleichungen verwendet, die keine Entropie als Zustandsgröße verwenden (s.a. Abschnitt 2.5.4).

### **Stahlbetonverbund:**

Die Aufgabe eines Stahlbetonverbundmodells liegt allein in der Beschreibung der Übertragung der örtlich auftretenden Verbund- und Normalspannungen. Ein Festigkeitsmodell zur Beschreibung von aufnehmbaren Spannungszuständen im Sinne der Plastizitätstheorie wird **nicht** gefordert. Dazu sind im Einzelnen folgende Abhängigkeiten in der Modellformulierung zu berücksichtigen:

1. Die Rippenhöhe und der Rippenabstand tragen zum Verbundmechanismus bei und sind sowohl in der Beschreibung der Verbundspannungen als auch der Normalspannung implizit abzubilden.
2. Querdruck und Querkzug beeinflussen das Tragverhalten im Verbundbereich. Insbesondere der Querkzug führt zur Rissöffnung, die bei entsprechender Größe zum vollständigen Verlust des Verbunds führt (gelöster Verbund). Das hat einen entscheidenden Einfluss auf die in Abschnitt 3.1 beschriebenen charakteristischen Phänomene der Wellenausbreitung.
3. Eine Rissschließung ist aufgrund von Spannungswellenausbreitungen möglich. Auch Normal- und Tangentialkräfte lassen sich nach einer Rissschließung wieder übertragen.

4. Untersuchungen haben gezeigt, dass die Verbundfestigkeit in Abhängigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit steigt. Wie beim Stahlfaserbeton decken die in der Literatur dokumentierten Versuchsergebnisse nicht den gesamten dynamischen Bereich ab. Es liegen lediglich Daten bis zu Verzerrungsraten von  $\dot{\epsilon} \approx 1 \text{ s}^{-1}$ . Das Modell muss die Festigkeitssteigerung für Verzerrungsraten größer als  $\dot{\epsilon} \approx 1 \text{ s}^{-1}$  geeignet postulieren.
5. Die Modellbeschreibung in einer Hydrocode-Formulierung fordert zur Ermittlung des aktuellen Spannungszustandes eine Zustandsgleichung.
6. Wie beim Stahlfaserbeton werden thermische Einflüsse auf den Verbund vernachlässigt.

### 7.1.3 Bekannte Modelle für hochdynamische Simulationen

Der in Abschnitt 1.2.4 gegebene Überblick über die Entwicklung von Modellen für betonartige Werkstoffe verdeutlicht, dass zahlreiche Ansätze vorliegen. Im Speziellen sei an dieser Stelle auf die aktuellsten und wichtigsten Ansätze eingegangen, die sowohl Ausgangspunkt als auch teilweise Bestandteil der eigenen Modelle sind.

Die im vorangegangenen Abschnitt zusammengefassten Anforderungen an die Modellbildung zeigen, dass insbesondere für den Stahlfaserbeton auf bestehende Betonmodelle aufgebaut werden soll. Dass dieser Weg nicht nur bei der Entwicklung von Modellen für hochdynamische Lastsituationen geeignet ist, zeigt stellvertretend für viele Arbeiten die Dissertation von STAMM 2001 [197], der sein Stahlfaserbetonmodell ebenso auf einem reinen Betonmodell aufgebaut und in die FEM-Umgebung von ANSYS implementiert hat.

Als Code-Entwickler vom Hydrocode AUTODYN bietet CLEGG in einem state-of-the-art Bericht von 1996 [37] einen gelungenen Überblick über den aktuellen Entwicklungsstand spröder Werkstoffmodelle. Dabei stellt sich klar der modulare Aufbau zur Abbildung **aller** wesentlichen Phänomene für jedes Werkstoffmodell heraus, das in einen Hydrocode eingebettet werden soll. So wird beispielsweise die Versagensfläche aus mehrachsialen, statischen Versuchsergebnissen verwendet und entsprechend mit den dynamischen Eigenschaften gekoppelt, um die Verfestigung des Materials unter großen Verzerrungsraten abzubilden.

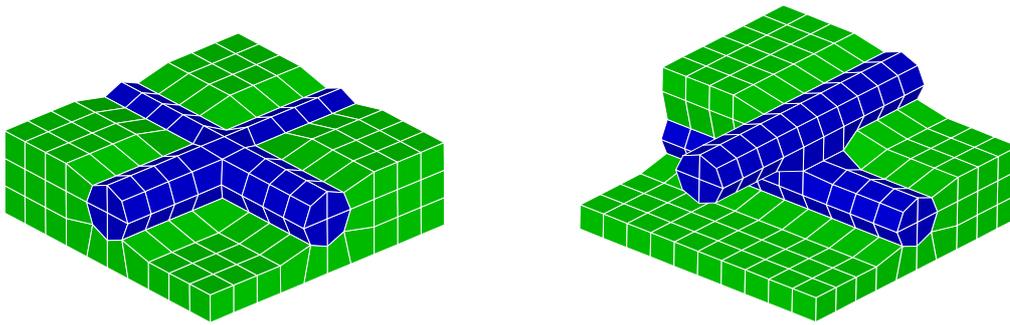
Die wichtigsten Arbeiten in Bezug auf die hier vorliegende Schrift veröffentlichten im Jahr 2000 RUPPERT und RIEDEL [184, 177]. Sie arbeiteten nahezu parallel an der Entwicklung ihrer makromechanischen Betonmodelle, wobei das Modell von RUPPERT für Detonationsbeanspruchungen und das Modell von RIEDEL für Penetrationsbeanspruchungen entwickelt wurde. Beide Autoren diskutierten ausführlich bekannte Werkstoffmodelle unter den Gesichtspunkten elastisches, plastisches und schädigendes Materialverhalten bei hochdynamischen Belastungen und wählten sorgfältig ihre Modellbausteine aus. Hierbei stellte RIEDEL zu Beginn der Modellbeschreibung selbst grundlegende Anforderungen an sein makromechanisches, modular aufgebautes Betonmodell, aus denen u.a. folgender Aspekt zitiert sei: *Ferner sind die Module des Modells leicht*

*austauschbar, wodurch es eine gute Basis für weitere Verbesserungen darstellt.* Diese Aussage trifft auch auf das Modell von RUPPERT zu, so dass für die Formulierung des eigenen Stahlfaserbetonmodells die aus beiden Modellen geeignetsten Module verwendet und weiterentwickelt werden. Die Wahl der Module wird in den Beschreibungen der einzelnen Modellelemente in den folgenden Abschnitten kurz erläutert sowie ihre Vor- und Nachteile für die weitere Verwendung im eigenen Modell herausgearbeitet.

Aus der Literatur sind einige Ansätze zur Modellierung von metallischen Werkstoffen in Hydrocodes bekannt. Hierzu zählen u.a. die Modelle von BODNER & PARTOM 1975 [26], STEINBERG & GUINAN 1980 [202], JOHNSON & COOK 1984 [112], ZERILLI & ARMSTRONG 1987 [227] oder KHAN & HUANG 1992 [118]. Für den Betonstahl wird auf das Modell von JOHNSON & COOK (JC) zurückgegriffen. Vor allem aufgrund der einfachen Möglichkeiten, im JC-Modell die Parameter an die Werkstoffeigenschaften von Metallen und insbesondere für den Betonstahl nach DIN488 anzupassen, wird es hier verwendet.

In der Literatur und in den gängigen Hydrocode-Simulationsverfahren existiert **kein Stahlbetonverbundmodell für hochdynamische Lasten**. Warum ein solches Modell für die eigene Problemstellung insbesondere für die Simulation von Schockwellenausbreitungen in inhomogenen Medien von Interesse ist, zeigen die eigenen Studien von GEBBEKEN, GREULICH & RINGSDORF 2000–2002 [179, 72, 76]. In diesen Studie sind verschiedene Modellansätze für den Verbundwerkstoff Stahlbeton durchgeführt worden. Hierzu zählen:

1. das Einlegen einer dünnen Stahlschicht, deren Schichtdicke abhängig vom Bewehrungsgehalt ist,
2. die Homogenisierung von Bewehrungsstahl und Beton sowie deren Verschmierung über eine gewählte Schichtdicke,
3. die Verknüpfung von Kontinuum (Beton) und einer orthotropen Schale, wobei letztgenannte die Bewehrung abbildet,
4. das dreidimensionale Balkenmodell, dass als Verbesserung zur orthotropen Schale die Bewehrungsführung diskret abbildet und
5. das dreidimensionale Kontinuumsmodell, dass den Bewehrungsstahl als Volumenelemente diskret im Modell abbildet (Abbildung 7.1).



**Abbildung 7.1:** Als Kontinuum modellierter Bewehrungsknoten mit sich durchdringenden und übereinander liegenden Stäben

Die Vorzüge und Nachteile der einzelnen Modelle sind nach

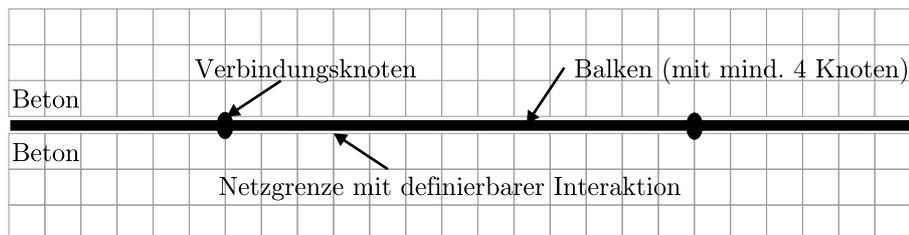
- Aufwand,
- Verbundbeschreibung & Spannungsverteilung und
- Charakteristik der Wellenfortpflanzung

zusammengefasst sowie mit Hilfe von numerischen Studien detailliert untersucht und kritisch beurteilt worden [179, 72, 76].

Das Verbundtragverhalten wird von keinem der Modelle richtig beschrieben.

Bei der **Stahlschicht**, beim **homogenisierten Modell** und bei der **orthotropen Schale** ist nur ein idealer Verbund möglich. Diese Modelle lassen vereinfachte zweidimensionale Simulationen zu, was den Aufwand bei der Diskretisierung und bei der Simulationszeit erheblich verkürzt. Entscheidender Nachteil ist, dass die Bewehrungsanordnung (Stababstand und Stabdurchmesser) nicht abgebildet wird. Dies führt zu einer nicht wirklichkeitsnahen Wellenfortpflanzung und hat einen entscheidenden Einfluss auf die Spannungsverteilung in den Werkstoffen.

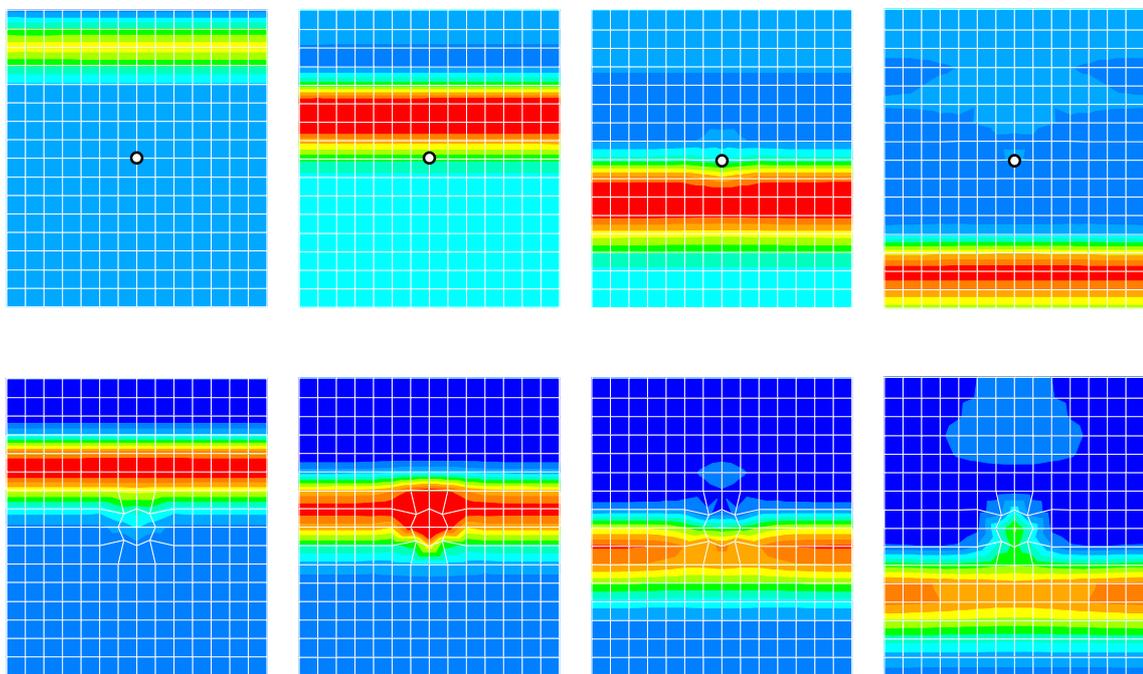
Eine einfache Möglichkeit, ein Verbundtragverhalten näherungsweise zu modellieren, bietet AUTODYN, in dem entlang der Balkenelemente beim **Balkenmodell** Verschiebungen über Netz-Interaktionen zugelassen sind, die mit einem Reibungskoeffizienten gekoppelt sind. Abbildung 7.2 zeigt schematisch, wo eine Interaktion an der Netzgrenze zwischen Beton und Stahl im Balkenmodell beschrieben wird. Eine Vergleichsstudie mit verschiedenen Reibungskoeffizienten hat gezeigt,



**Abbildung 7.2:** Schematische Verbundbeschreibung bei Balkenelementen

dass die Möglichkeit einen Reibungskoeffizienten  $\mu$  für das Verbundtragverhalten heranzuziehen ungenügend ist. Des weiteren sind aufgrund der Überlagerung des Beton- und des Bewehrungsstahlelemente die Massenbilanz im Bereich der Bewehrung verfälscht, da beide Materialien in verschiedenen Diskretisierungen abgebildet werden.

Der entscheidende Vorteil des **Kontinuumsmodells** liegt aber in der realitätsnächsten Abbildung der Wellenfortpflanzungsphänomene. Reflektionen, Transmissionen und Refraktionen können, wie in der Gegenüberstellung zum Balkenmodell in Abbildung 7.3 veranschaulicht, an der Kontaktfläche zwischen Beton und Bewehrungsstahl simuliert werden. In Bereichen, in denen sich keine Bewehrungsstäbe befinden, läuft die Druckspannungswelle ungehindert durch eine Stahlbetonplatte.

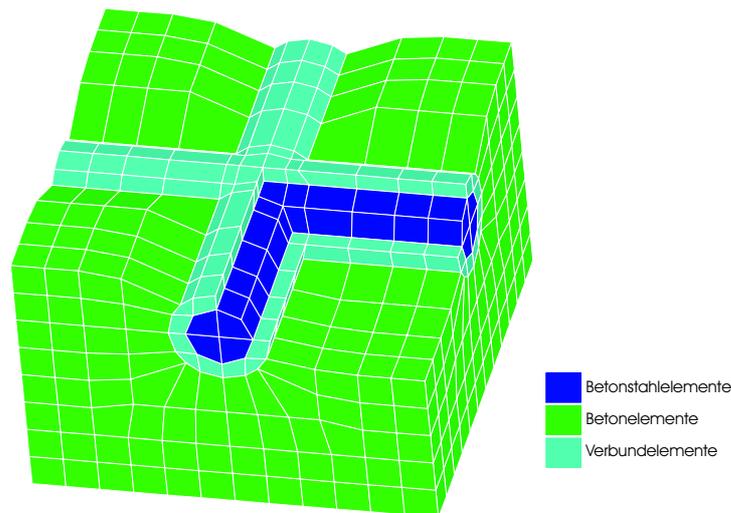


**Abbildung 7.3:** Aus einem Planarplattenaufschlag resultierende Wellenfortpflanzung beim Balkenmodell (oben) und beim Kontinuumsmodell (unten)

Die Modellierung des Stahlbetons mit LAGRANGE-Kontinuums-Elementen ermöglicht die Erweiterung hinsichtlich von Verbundelementen, in denen die im Abschnitt 7.4 entwickelten konstitutiven Gesetze des Verbunds eingebunden werden können (Abbildung 7.4).

**Fazit:** Da die Elementabmessungen aufgrund der hohen Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit im Millimeterbereich liegen (Stabilitätskriterium nach Courant-Friedrich-Levy, s.a. Abschnitt 4.5), ist das **Kontinuumsmodell** eine logische Folge. Wesentliche Vorteile sind:

- beste Abbildung der Wellenfortpflanzungsphänomene,
- gute Darstellung der Beanspruchungszustände im Beton und im Bewehrungsstahl,



**Abbildung 7.4:** Als Kontinuum modellierter Bewehrungsknoten mit sich durchdringenden Stäben und Verbundelementen

- wirklichkeitstreuere Abbildung der Bewehrungsführung und
- wirklichkeitsnahe Berücksichtigung des Verbundverhaltens.

Eine gelungene Arbeit zum Verbundverhalten von Betonrippenstählen erbrachte IDDA in seiner Arbeit von 1999 [109]. Er fasste die bis dato erzielten Ergebnisse übersichtlich zusammen und stellte in seinen numerischen als auch experimentellen Untersuchungen das Verhalten der Verbundkraftübertragung bei Rissöffnung in den Vordergrund. Dabei erweiterte er in seinem Modell die klassischen Verbundspannungs–Schlupf– und Normalspannungs–Schlupf–Beziehungen um die Rissöffnung in Abhängigkeit von der Rippenhöhe und dem Rippenabstand. Diese Beschreibung des Verbundmechanismus baute er in die FE–Umgebung ein und koppelte den Beton mit dem Betonstahl über Federelemente. Diese Art der Modellierung mit Wegfedern besteht in der Hydrocode–Umgebung nicht und muss, wie auch in Abbildung 7.4 dargestellt, über kontinuierliche Verbundelemente erfolgen.

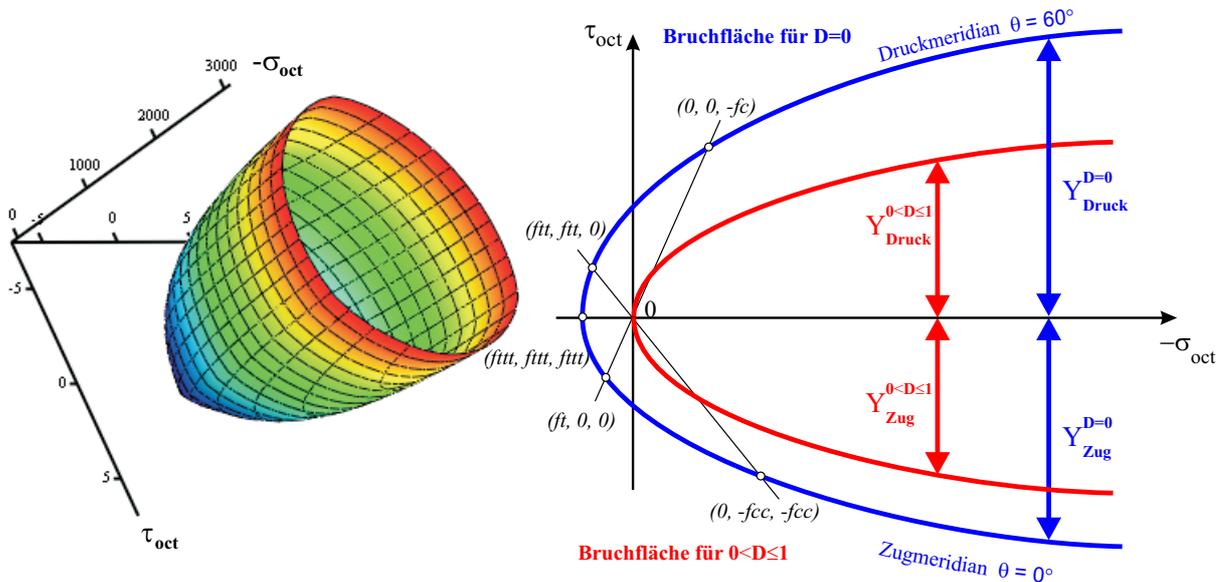
Diese statischen Untersuchungen fließen in das eigene Stahlbetonverbundmodell ein und werden entsprechend der auftretenden hochdynamischen Eigenschaften im Hinblick auf die Wellenfortpflanzungsphänomene erweitert.

## 7.2 Stoffgesetz des Stahlfaserbetons

### 7.2.1 Überblick

Das neue Stahlfaserbetonmodell RGGP ist für beliebige, baupraktisch ausführbare Stahlfasergehalte  $V_f$  zwischen 0.0 und 2.0 Vol-% entwickelt und in AUTODYN implementiert. Mit dem Ziel, dass Modell auch anderen gängigen Hydrocodes zur Verfügung zu stellen, wird die Entkoppe-

lung des CAUCHY-Spannungstensors in einen sphärischen und einen deviatorischen Anteil sowie einen daraus resultierenden getrennten Aufbau der konstitutiven Gesetze vorgenommen. Die Verwendung der spannungsbasierten Plastizitätstheorie und die damit verbundene Formulierung der Fließbedingung und des Fließpotentials im Spannungsraum hat den entscheidenden Vorteil, die Modellparameter der Versagensfläche aus mehraxialen Versuchen gewinnen und für verschiedene Stahlfasergehalte anpassen zu können (vgl. Abschnitt 5.2). Abbildung 7.5 illustriert schematisch im räumlichen Spannungsraum und im Meridianschnitt der  $\sigma_{oct} - \tau_{oct}$ -Projektion die Versagensflächen des (Stahlfaser-)Betrags sowohl im Ausgangszustand (blau) als auch im geschädigten Zustand (rot).



**Abbildung 7.5:** Räumliche Darstellung der Versagensfläche im Hauptspannungsraum und deren Projektion in den Meridianschnitt

Gemäß des Berechnungszyklusses für Hydrocodes aus Abbildung 4.2 wird die aktuelle Fließspannung  $Y$  ermittelt. Darauf bauen die wesentlichen Module des Modells auf:

1. Aus der Volumenänderung wird die aktuelle Dichte bestimmt, mit der der hydrostatische Druck  $p = -\sigma_{oct}$  über eine adaptierte **poröse Zustandsgleichung** ermittelt wird.
2. Bis zur Versagensfläche liegt ein **hypoelastisches Materialgesetz** vor.
3. Die Fließspannung  $Y$  für einen aktuellen Zustand auf der Bruchfläche ergibt sich aus einer modifizierten **Fließfläche** nach GUO et al. 1995 [90] unter Berücksichtigung der Richtungsabhängigkeit aus der dritten Invariante des Spannungsdeviators aus einer Funktion von  $f(p, \theta)$ .
4. Die Verfestigung erfolgt über die **ratenabhängige Zunahme der Festigkeit**.

5. Die **Schädigungsevolution** ergibt sich aus einer entkoppelten Beschreibung der Schädigung, die sich aus der Gestaltänderung (Deviatoranteile) und aus der Kompaktion (hydrostatische Anteile) zusammensetzt. Diese durch das Plastifizieren verursachte Schädigung berücksichtigt zusätzlich die **ratenabhängigen Zunahme der Bruchverzerrung**.
6. Aus dem aktuellen Schädigungszustand erfolgt eine **isotrope Degradation der Materialeigenschaften** Festigkeit und Steifigkeit.

### 7.2.2 Zustandsgleichung – poröse HUGONIOT EoS

Bereits in Abschnitt 6.2 wurde die Bedeutung der Zustandsgleichung bei der Materialmodellierung verdeutlicht. Zur Bestimmung einer HUGONIOT-Zustandsgleichung für reinen Beton erfolgten Versuche, deren Ergebnisse ausführlich im Anhang A beschrieben sind. Gleichwertige Versuchsdaten zur Beschreibung einer Druck–Dichte–Beziehung für Stahlfaserbeton liegen derzeit **nicht** vor.

Zur Ermittlung der Zustandsgleichung von Stahlfaserbeton mit variierenden Stahlfasergehalten wird daher ein Ansatz formuliert, mit dem die charakteristischen Elemente der Zustandsgleichung, nämlich die Anfangsdichte  $\rho_0$ , die elastische Wellengeschwindigkeit  $c_{por}$ , das HEL  $p_{HEL}$  (Beginn der plastischen Kompaktion), der Kompaktionsast, der Kompaktionsdruck  $p_{comp}$  (Ende der plastischen Kompaktion), die Referenzdichte  $\rho_{ref}$  und die kompaktierte Wellengeschwindigkeit  $c_{gran}$ , alleine aus der Anfangsdichte  $\rho_0$  und den Gewichtsanteilen der Stahlfaserbetonmischung berechnet werden (vgl. Abbildung 6.2). Für die Ermittlung der EoS werden die Parameter in Bezug auf die Gewichtsanteile (Gew-%) des Stahlfaserbetons ermittelt (s.a. Abschnitt 5.2.1). Den Ausgangspunkt stellen die Ergebnisse aus Anhang A in einer Druck–Dichte–Beziehung für reinen Beton (Abbildung A.5) – dem Spezialfall für Stahlfaserbeton bei einem Stahlfasergehalt  $\rightarrow 0.0$  Vol.-%.

**zu  $\rho_0$ :** Das Ausgangsmaterial wird maßgeblich durch die Anfangsdichte  $\rho_0$  des Festbetons und die zugeführten Gewichtsanteile von Zuschlag, Zement und Stahlfasern beschrieben. Die Anfangsdichte  $\rho_0$  muss im Vorfeld experimentell ermittelt werden. Die Gewichtsanteile von Zuschlag, Zement und Stahlfasern sollten bekannt sein.

**zu  $c_{por}$ :** Im Bereich niedriger Drücke zwischen dem Hydrostatic–Tensile–Limit HTL und dem HUGONIOT–Elastic–Limit HEL wird das linear elastische Werkstoffverhalten über die Anfangsdichte  $\rho_0$  und die elastische Wellengeschwindigkeit  $c_{por}$  charakterisiert. Auf der Basis der experimentellen Ergebnisse von RIEDEL 2000 [177] und von LANDMANN an der WTD 52 2000 [129] liegen für verschiedene Betonzusammensetzungen unterschiedliche elastische Wellengeschwindigkeiten vor, bei denen allein die Anfangsdichte  $\rho_0$  variiert. Daraus ergibt

sich, dass je höher die Anfangsdichte ist desto höher die elastische Wellengeschwindigkeit ist. Eine lineare Ausgleichsfunktion beschreibt den Zusammenhang in Abbildung 7.6.

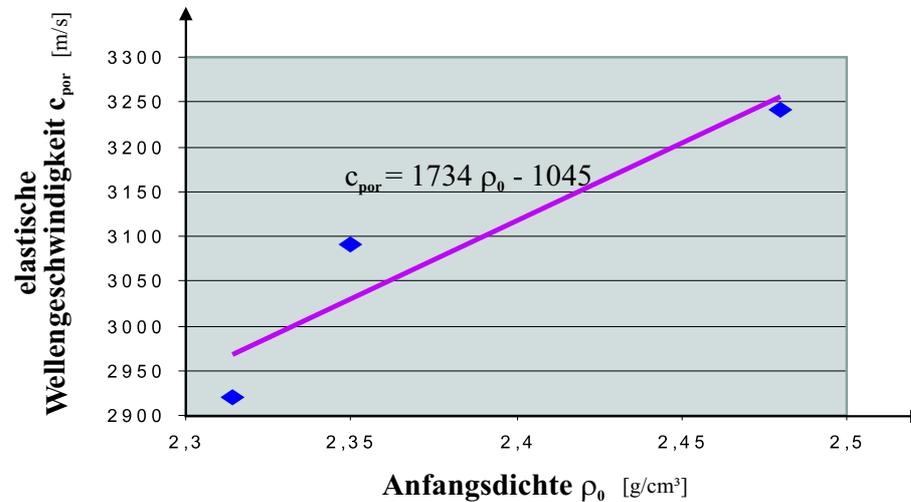


Abbildung 7.6: Ausgleichsfunktion zur Ermittlung der elastischen Wellengeschwindigkeit  $c_{por}$

Weitere Daten liegen sowohl für reinen Beton als auch für Stahlfaserbeton nicht vor. Daher kann die Berechnung einer elastischen Wellengeschwindigkeit  $c_{por}$  für Stahlfaserbeton nur näherungsweise erfolgen. Die Funktion  $c_{por} = 1734\rho_0 - 1045$  wird auch auf Stahlfaserbeton angewandt. Diese Annahme lässt sich physikalisch sinnvoll begründen. Zum einen weist, wie von der Firma VULKAN HAREX 2002 [217] näher beschrieben wurde, der Stahlfaserbeton unter hydrostatischem Druck das gleiche Verhalten wie reiner Beton auf. Zum anderen zeigt Gleichung (6.12) den Zusammenhang der elastischen Wellengeschwindigkeit  $c_{por}$  zum Schubmodul  $G$  und zur Anfangsdichte  $\rho_0$ . In einer gegenüber Beton vergleichbaren Zusammensetzung nimmt durch Hinzufügen der Stahlfasern sowohl der Schubmodul als auch die Dichte zu. Allerdings wächst der Schubmodul proportional stärker als die Dichte, so dass dies eine Zunahme der elastischen Wellengeschwindigkeit  $c_{por}$  zur Folge hat.

**zu  $\rho_{ref}$ :** Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Referenzdichte  $\rho_{ref}$  ist die Berechnung über das Kompaktionsvermögen  $\mu_{gran}$  aus Gleichung (6.13):

$$\rho_{ref} = \rho_0 \cdot (1 + \mu_{gran}) . \quad (7.1)$$

Dabei muss die Porosität des Stahlfaserbetons bekannt sein. Dies ist aber selten der Fall. Eine sicherere Methode ist, die Referenzdichte  $\rho_{ref}$  über die massenbasierte HUGONIOT-Mischregel zu bestimmen (u.a. RIEDEL 2000 [177]). Hierfür werden die genauen Trockenrohichten und Massen des Zuschlags, des Zements und der Stahlfasern benötigt (vgl. Abschnitt A.5). Die Referenzdichte  $\rho_{ref}$  berechnet sich dann mit

$$\rho_{ref} = \sum \frac{m_{i,prozent} \cdot \rho_i}{100\%} . \quad (7.2)$$

**zu  $c_{gran}$ :** Eine Möglichkeit zur Bestimmung der kompaktierten Wellengeschwindigkeit  $c_{gran}$  ist, durch den Punkt der ermittelten Referenzdichte  $\rho_{ref}$  eine Asymptote an die Endneigung der Druck–Dichte–Funktion anzulegen und über die Steigung dieser Asymptote  $c_{gran}$  zu bestimmen. Dieses Vorgehen ist dann möglich, wenn die Druck–Dichte–Funktion vorliegt. Die Dichte eines Materials hat zwar Einfluss auf die Schockwellengeschwindigkeit, sie erfährt aber durch die Zugabe von Stahlfasern praktisch keine Erhöhung, da auf der einen Seite der Stahl so gut wie kein Kompaktionsvermögen aufweist und dessen Dichte sich kaum ändert, auf der anderen Seite der Stahlfasergehalt aufgrund verarbeitungstechnischer Bedingungen gering ist und aus baupraktischen Gründen hier 2.0 Vol-% nicht übersteigt. Auch im vollständig kompaktierten Stahlfaserbeton werden die Stahlfasern wie Zuschlag betrachtet. Daher wird die kompaktierte Wellengeschwindigkeit  $c_{gran}$  vom reinen Beton übernommen.

Damit liegen die wesentlichen Elemente zur Beschreibung der Zustandsgleichung eines Stahlfaserbetons vor. Um eine numerische Simulation durchführen zu können, wird eine lineare Verschiebung der EoS–Wertepaare von vergleichbar reinem Beton vorgenommen, von dem nur die Anfangsdichte  $\rho_0$  und die Stahlfaserbetonmischung bekannt sein müssen.

In dieser Arbeit wird auf die Anfangsdichte der aus den aktuellen Versuchsdaten gewonnenen Ergebnisse für reinen Beton aus Abbildung A.5 zurückgegriffen. Der Kompaktionsast wird nicht als eine einzige sondern als multilineare Funktion in AUTODYN eingegeben. Die Druck–Dichte–Wertepaare aus der Potenzfunktion (A.9) sind zunächst für reinen Beton ermittelt worden.

Die beiden Differenzen der Anfangs- und Referenzdichten von Stahlfaserbeton mit reinem Beton werden so miteinander kombiniert, dass die Dichtewerte für den Stahlfaserbeton aus den Dichtewerten des reinen Betons folgendermaßen ermittelt werden:

$$\Delta\rho_0 = \rho_{0,SF} - \rho_{0,B} \quad , \quad (7.3)$$

$$\Delta\rho_{ref} = \rho_{ref,SF} - \rho_{ref,B} \quad , \quad (7.4)$$

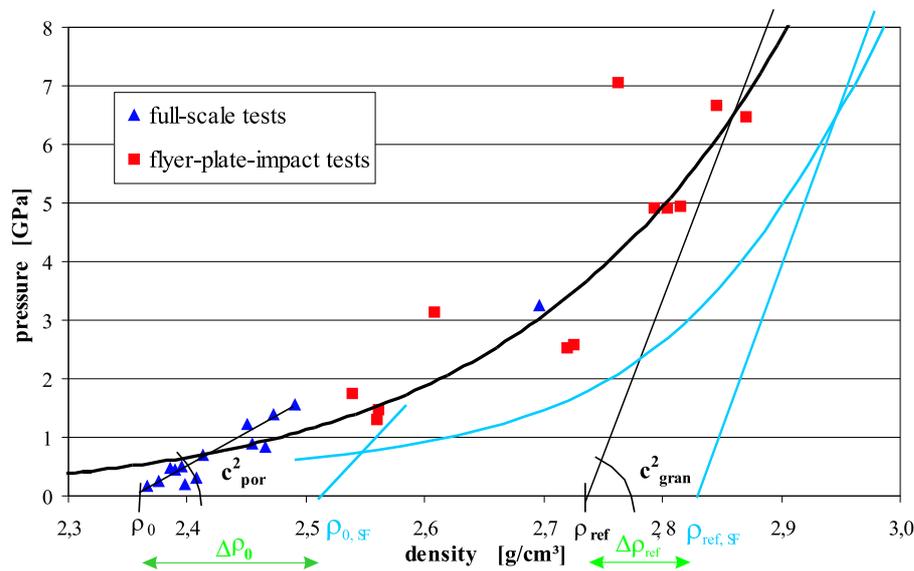
$$\rho_{i,SF} = \left( \Delta\rho_0 - \frac{\Delta\rho_0 - \Delta\rho_{ref}}{6.5} \cdot p_{i,B} \right) + \rho_{i,B} \quad , \quad (7.5)$$

mit

- $\rho_{0,B}$  Anfangsdichte des reinen Betons,
- $\rho_{0,SF}$  Anfangsdichte des Stahlfaserbetons,
- $\rho_{ref,B}$  Referenzdichte des reinen Betons,
- $\rho_{ref,SF}$  Referenzdichte des Stahlfaserbetons,
- $\rho_{i,B}$  Dichtewert des reinen Betons,
- $\rho_{i,SF}$  Dichtewert des Stahlfaserbetons,
- $p_{i,B}$  Druckwert des reinen Betons,
- 6.5 Druck in [GPa], bei dem die Funktion mit konstanter Steigung  $c_{gran}^2$  verläuft.

Für die Berechnung der Druck–Dichte–Werte in AUTODYN muss die multilineare Funktion die Endneigung in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt legt die vollständige Kompaktion  $p_{comp}$  fest. Hierbei wird angenommen, dass dies bei  $p_{comp} = 6.5$  GPa abgeschlossen ist. Das Material ist zu diesem Zeitpunkt bereits vollständig zerstört, weshalb ab diesem Punkt keine wesentliche Steigerungsänderung eintritt. Die Steigung wird als Anstieg der Tangente  $c_{gran}^2$  in diesem Punkt definiert. Wird nach einer vollständigen Kompaktion entlastet, so herrscht ein verdichtetes Material mit der Referenzdichte  $\rho_{ref}$  vor. Die Steigung der Gradiente  $c^2$  für hydrostatische Drücke zwischen  $\rho_{crush}$  und  $\rho_{ref}$  wird aus  $c_{por}^2$  und  $c_{gran}^2$  linear interpoliert ( $c_{por}^2 < c^2 < c_{gran}^2$ ).

Die Verschiebung der EoS–Wertepaare ist in Abbildung 7.7 schematisch dargestellt:



**Abbildung 7.7:** Beton–Zustandsgleichung und daraus entwickelte Verschiebung einer porösen Zustandsgleichung für eine Stahlfaserbetonmischung

Liegen, wie auch im Rahmen dieser Arbeit, keine Angaben zur Stahlfaserbetonmischung vor, so wird vereinfacht eine gleiche Änderung der Referenzdichte  $\Delta\rho_{ref}$  zur Änderung der Anfangsdichte  $\Delta\rho_0$  angesetzt.

Die Parameter der porösen Zustandsgleichung sind exemplarisch für einen Stahlfasergehalt von 1.0 Vol-% einer für einen Versuch an der WTD 52 hergestellten Stahlfaserbetonmischung bestimmt und in Tabelle 7.1 zusammengefasst. Es ist zu beachten, dass der erste Dichteparameter  $\rho_1$  gleich der Anfangsdichte  $\rho_0$  sein muss, damit ein Schnittpunkt zwischen dem elastischen und dem kompaktierten Funktionsast berechnet werden kann. Dieser charakterisiert das HUGONIOT–Elastic–Limit und liegt auch für verschiedene Stahlfasergehalte bei 0.75 GPa (vgl. Abschnitt A.5).

**Tabelle 7.1:** Parameter der Zustandsgleichung für Stahlfaserbeton mit  $V_f = 1.0 \text{ Vol} - \%$ 

Parameter	Bedeutung	Wert	Einheit	AUTODYN	Quelle/Verweis
$\rho_0$	Anfangsdichte	2.514	[g/cm <sup>3</sup> ]	SC(9)	experimentell (WTD 52)
$\rho_{ref}$	Referenzdichte	2.923	[g/cm <sup>3</sup> ]	SC(10)	Gleichung (7.2)
$c_{por}$	elast. Wellengeschw.	0.331	[cm/ $\mu$ s]		Abbildung 7.6
$c_{gran}$	kompakt. Wellengeschw.	0.841	[cm/ $\mu$ s]		Abbildung 7.7
$\rho_1$	EoS-Dichte-Parameter 1	2.514	[g/cm <sup>3</sup> ]		Gleichung (7.5)
$\rho_2$	EoS-Dichte-Parameter 2	2.641	[g/cm <sup>3</sup> ]		Gleichung (7.5)
$\rho_3$	EoS-Dichte-Parameter 3	2.748	[g/cm <sup>3</sup> ]		Gleichung (7.5)
$\rho_4$	EoS-Dichte-Parameter 4	2.834	[g/cm <sup>3</sup> ]		Gleichung (7.5)
$\rho_5$	EoS-Dichte-Parameter 5	2.929	[g/cm <sup>3</sup> ]		Gleichung (7.5)
$\rho_6$	EoS-Dichte-Parameter 6	3.044	[g/cm <sup>3</sup> ]		Gleichung (7.5)
$p_1$	EoS-Druck-Parameter 1	0.0060	[Mbar]		konst. $\forall$ Mischungen
$p_2$	EoS-Druck-Parameter 2	0.0096	[Mbar]		konst. $\forall$ Mischungen
$p_3$	EoS-Druck-Parameter 3	0.0171	[Mbar]		konst. $\forall$ Mischungen
$p_4$	EoS-Druck-Parameter 4	0.0269	[Mbar]		konst. $\forall$ Mischungen
$p_5$	EoS-Druck-Parameter 5	0.0418	[Mbar]		konst. $\forall$ Mischungen
$p_6$	EoS-Druck-Parameter 6	0.0698	[Mbar]		konst. $\forall$ Mischungen

### 7.2.3 Hypoelastisches Materialgesetz

Grundlage des elastischen Werkstoffverhaltens bildet die im Abschnitt 6.3.1 eingeführte inkrementelle Vorgehensweise in der hypoelastischen Materialgleichung des Spannungsinkrements mit

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = 2G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) \right] . \quad (7.6)$$

Falls sich nach dem Plastifizieren wieder ein elastischer Spannungszustand einstellt, wird Gleichung (7.6) entsprechend der aktuellen Schädigung  $D$  gemäß des Degradationsmodells nach Abschnitt 7.2.7 angepasst.

Die Werkstoffkonstante  $G$  wird nach Gleichung (6.12) auf Basis einer konstanten Querkontraktionszahl  $\nu$  nach KUCHLING 1996 [126] für beliebige Stahlfasergehalte bestimmt.

**Tabelle 7.2:** Elastische Werkstoffkonstanten für Stahlfaserbeton mit  $V_f = 1.0 \text{ Vol} - \%$ 

Parameter	Bedeutung	Wert	Einheit	AUTODYN	Quelle/Verweis
$\nu$	Querkontraktionszahl	0.17	[ - ]		KUCHLING [126]
$G$	Schubmodul	0.243	[Mbar]	SC 1	Gleichung (6.12)

### 7.2.4 Versagensfläche im Spannungsraum

Im RGGP-Stahlfaserbetonmodell wird eine nach GUO et al. [90] modifizierte Fließfläche verwendet, die speziell für Beton entwickelt wurde (siehe Abbildung 7.8). RUPPERT wendete diese

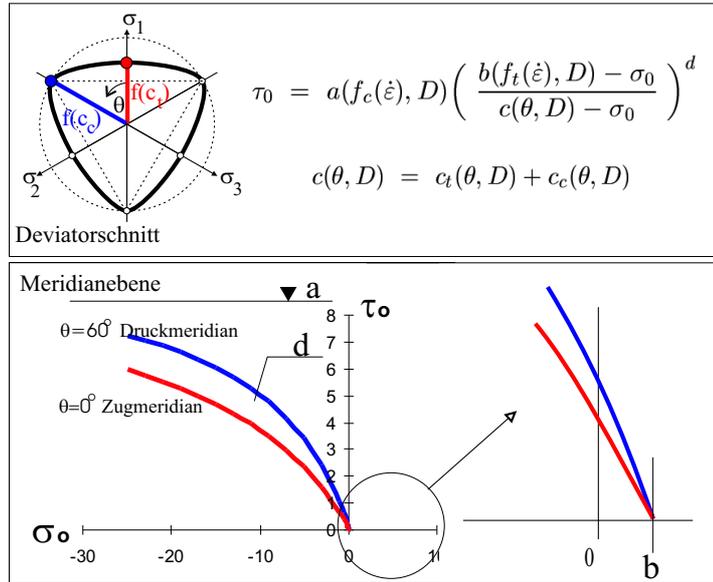
Formulierung in seiner Arbeit 2000 [184] für den reinen Beton erfolgreich in der Hydrocode-Umgebung AUTODYN an. Allerdings wird die Fließflächenformulierung um die verzerrungs-ratenabhängige Druck- und Zugfestigkeitssteigerung (Abschnitt 7.2.5) und um die isotrope Schädigungsevolution (Abschnitt 7.2.6) erweitert und es werden die Parameter entsprechend eines variablen Stahlfasergehalts adaptiert. Die Funktion der Fließfläche ist gegeben mit

$$\tau_0 = a(f_c(\dot{\varepsilon}), D) \left( \frac{b(f_t(\dot{\varepsilon}), D) - \sigma_0}{c(\theta, D) - \sigma_0} \right)^d \quad \text{und} \quad (7.7)$$

$$c(\theta, D) = c_t(\theta, D) + c_c(\theta, D) \quad . \quad (7.8)$$

$\sigma_0$  und  $\tau_0$  entsprechen den normierten Größen der Oktaedernormalspannung  $\sigma_{oct}$  und der Oktaederschubspannung  $\tau_{oct}$ . Die Normierung erfolgt durch die einaxiale Druckfestigkeit  $f_c$  mit

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{oct}}{f_c} \quad \text{und} \quad \tau_0 = \frac{\tau_{oct}}{f_c} \quad . \quad (7.9)$$



**Abbildung 7.8:** Modifizierte Bruchfläche nach GUO et al. [90]

- Der Parameter  $a(f_c(\dot{\varepsilon}), D)$  beschreibt die maximal aufnehmbare Schubspannung  $\tau_0$ , die im hydrostatischen Zustand den Grenzfall charakterisiert, wenn  $\sigma_0$  gegen  $\infty$  strebt.
- Der Parameter  $b(f_t(\dot{\varepsilon}), D)$  entspricht dem "Hydrostatic-Tensile-Limit" (HTL) und beschreibt die aufnehmbare hydrostatische Zugspannung. Für  $\sigma_0 > b$  tritt lokales Zugversagen ein.
- Der Meridianparameter  $c$  hängt vom LODGE-Winkel  $\theta$  ab und beschreibt die Form der Fließfläche im Deviatorschnitt. Im statischen, ungeschädigten Zustand gilt die Beziehung

$$c = c_t(\cos 1.5\theta)^{1.5} + c_c(\sin 1.5\theta)^{2.0} \quad . \quad (7.10)$$

Die Fließfläche stellt im Deviatorschnitt die Form eines nach aussen gewölbten Dreiecks dar. Hierdurch geht die dritte Invariante über Gleichung (2.39) ein. Ist  $\theta = 60^\circ$ , so liegt ein Spannungszustand auf dem Druckmeridian vor ( $c \equiv c_c$ ). Für den Zugmeridian gilt entsprechend  $\theta = 0^\circ$  ( $c \equiv c_t$ ).

- Der geometrische Parameter  $d$  beschreibt die Form der Meridiane längs der Hydrostaten.

Der Vorteil dieser Fließflächenbeschreibung liegt in der aus mehraxialen Versuchen herleitbaren Modellparameter. Bis auf die geometrische Variable  $d$ , sind alle Parameter physikalisch interpretierbar. Die Parameter der Fließfläche werden durch Iteration bestimmt, indem die Ergebnisse aus mehrachsialen Versuchen sowohl für reinen Beton als auch für Stahlfaserbeton (s. Abschnitt 5.2.2.7) als Randbedingungen in die Gleichungen (7.7) und (7.10) eingesetzt werden. Dies wird am Beispiel eines Stahlfaserbetons mit einem Stahlfasergehalt von 1.0 Vol-% gezeigt.

Druck- und Zugmeridian bilden die Einhüllende aller Meridiane. Sie sind in der  $\sigma_{oct}-\tau_{oct}$ -Ebene in Abbildung 7.5 dargestellt. Bei einer bestimmten Spannungskombination beschreiben fünf charakteristische Festigkeiten auf den beiden Meridianen den Bruch:

- Die einachsige Druckfestigkeit ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -f_c$ ) auf dem Druckmeridian.
- Die einachsige Zugfestigkeit ( $\sigma_1 = f_t, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) auf dem Zugmeridian.
- Die zweiachsige Druckfestigkeit ( $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = -f_{cc}$ ) auf dem Zugmeridian.
- Die dreiachsige Druckfestigkeit ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -f_{ccc}$ ) auf dem Druckmeridian.
- Die dreiachsige Zugfestigkeit ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = f_{ttt}$ ) auf beiden Meridianen.

Die fünf oben angegebenen Spannungszustände werden folgend in Abhängigkeit von der einachsigen Druckfestigkeit  $f_c$  und dem Stahlfasergehalt  $V_f$  formuliert. Daraus folgt, dass jeder einzelne Spannungszustand Bezug auf eine Referenzmischung aus reinem Beton  $f_{c,0}$  nimmt.

**Einachsiger Druck:** Gemäß Tabelle 5.2, lässt sich die Zunahme der Druckfestigkeit  $f_c(V_f)$  bei steigendem Stahlfasergehalt mit Bezug auf eine stahlfaserlose Referenzmischung  $f_{c,0}$  funktional angeben mit

$$f_c(V_f) = (0.071 \cdot V_f + 1.000) \cdot f_{c,0} \quad . \quad (7.11)$$

**Einachsiger Zug:** Ebenso liegt nach den in Tabelle 5.2 zusammengefassten Versuchsergebnissen eine Relation der einachsigen Zugfestigkeit  $f_t(V_f)$  bei variierendem Stahlfasergehalt  $V_f$  zu einer stahlfaserlosen Referenzmischung vor:

$$f_t(V_f) = (0.093 \cdot V_f + 1.000) \cdot f_{t,0} \quad . \quad (7.12)$$

Unter Berücksichtigung des konstanten Verhältnisses der einachsigen Zugfestigkeit  $f_{t,0}$  zur einachsigen Druckfestigkeit  $f_{t,0}$  von  $\frac{1}{10}$ , wird die einachsige Zugfestigkeit  $f_t(V_f)$  direkt in Abhängigkeit zur einachsigen Druckfestigkeit einer stahlfaserlosen Referenzmischung  $f_{c,0}$  über Gleichung (7.11) gesetzt:

$$f_t(V_f) = (0.0021 \cdot V_f + 0.100) \cdot f_c(V_f) \quad . \quad (7.13)$$

**Zweiachsiger Druck:** Zur Bestimmung der zweiachsigen Druckfestigkeit  $f_{cc}(V_f)$  für beliebige Stahlfasergehalte  $V_f$  zwischen 0.0 Vol-% und 2.0 Vol-% wird auf die Versuchsergebnisse von YIN 1989 [224] zurückgegriffen. Das im Abschnitt 5.2.2.7 dargestellte Diagramm in Abbildung 5.7 zeigt die zweiachsige Druckfestigkeit für unterschiedliche Fasergehalte  $V_f$ .

Aus diesen Versuchsergebnissen wird eine Funktion entwickelt, mit der das Verhältnis der zweiachsigen Druckfestigkeit  $f_{cc}(V_f)$  zur einachsigen Druckfestigkeit  $f_c(V_f)$  für Stahlfaserbeton mit beliebigem Stahlfasergehalt über die Beziehung

$$f_{cc}(V_f) = f_{cc,c}(V_f) \cdot f_c(V_f) \quad (7.14)$$

bestimmt wird. Für reinen Beton ( $V_f = 0.0$  Vol-%) wird der Wert aus den Versuchsergebnissen von KUPFER 1969 (in GUO 1995 [90]) herangezogen. Desweiteren ist aus Abbildung 5.7 festzustellen, dass eine wesentliche Steigerung über das 1.6-fache der einachsigen Druckfestigkeit auch bei einer weiteren Erhöhung des Stahlfasergehalts mit  $V_f > 2.0$  Vol-% nicht zu erwarten ist. Die mathematische Beschreibung der in Abbildung 7.9 dargestellten Funktion lautet

$$f_{cc,c}(V_f) = \begin{cases} -0.12 \cdot V_f^2 + 0.46 \cdot V_f + 1.16 & ; \text{ für } 0 < V_f < 2 \\ 1.6 & ; \text{ für } V_f \geq 2 \end{cases} \quad . \quad (7.15)$$

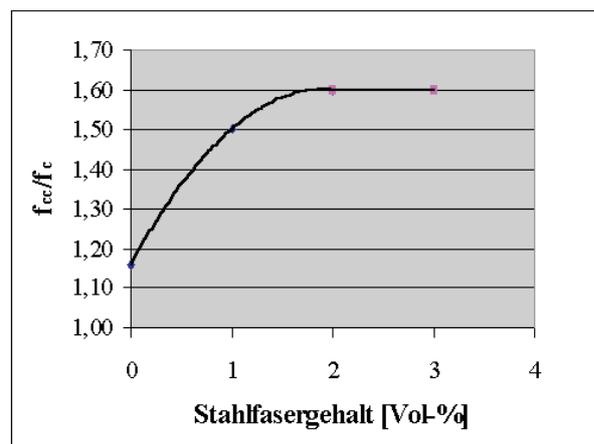


Abbildung 7.9: Stahlfaserbeton, Funktion zur Bestimmung des Verhältnisses  $f_{cc}/f_c$

**Dreiachsiger Druck:** Versuchsergebnisse zur dreiachsigen Druckfestigkeit von Stahlfaserbeton sind in der Literatur nicht vorzufinden. Für die dreiachsige Druckfestigkeit des Stahlfaserbetons wird der Wert von reinem Beton übernommen. Es wird davon ausgegangen, dass sich unter hydrostatischem Druck die Stahlfasern wie Zuschlag verhalten und keinen wesentlichen Einfluss auf die Querdehnung ausüben. Der Stahlfaserbeton versagt dann überwiegend aufgrund der Zerstörung der Matrix. Die dreiachsige Druckfestigkeit  $f_{ccc}(V_f)$  liegt nach ZHOU 1995 [229] dabei etwa beim 3-fachen der einachsigen Druckfestigkeit  $f_c(V_f)$ . Es handelt sich bei den Annahmen um ein Postulat.

**Dreiachsiger Zug:** Das Verhältnis der dreiachsigen Zugfestigkeit  $f_{ttt}$  beträgt für den reinen Beton etwa das 0.9fache der einachsigen Zugfestigkeit  $f_t$  nach ZHOU 1995 [229]. Da für Stahlfaserbeton hierzu keine experimentellen Daten vorliegen, wird das Verhältnis für beliebige Stahlfasergehalte  $V_f$  übernommen:

$$f_{ttt}(V_f) = 0.9 \cdot f_t(V_f) \quad . \quad (7.16)$$

Normiert auf die statische Druckfestigkeit  $f_c(V_f)$  ergibt sich für die dreiachsige Zugfestigkeit  $f_{ttt}(V_f)$  aus Gleichung (7.16) in Abhängigkeit zum Fasergehalt  $V_f$  das "Hydrostatic-Tensile-Limit" (HTL), also der Parameter  $b$  der GUO-Fließfläche aus Abbildung 7.8. Der funktionale Zusammenhang zwischen  $b$  und dem Stahlfasergehalt  $V_f$  leitet sich durch Einsetzen von Gleichung (7.13) in Gleichung (7.16) und Normierung auf die statische Druckfestigkeit  $f_c(V_f)$  ab zu

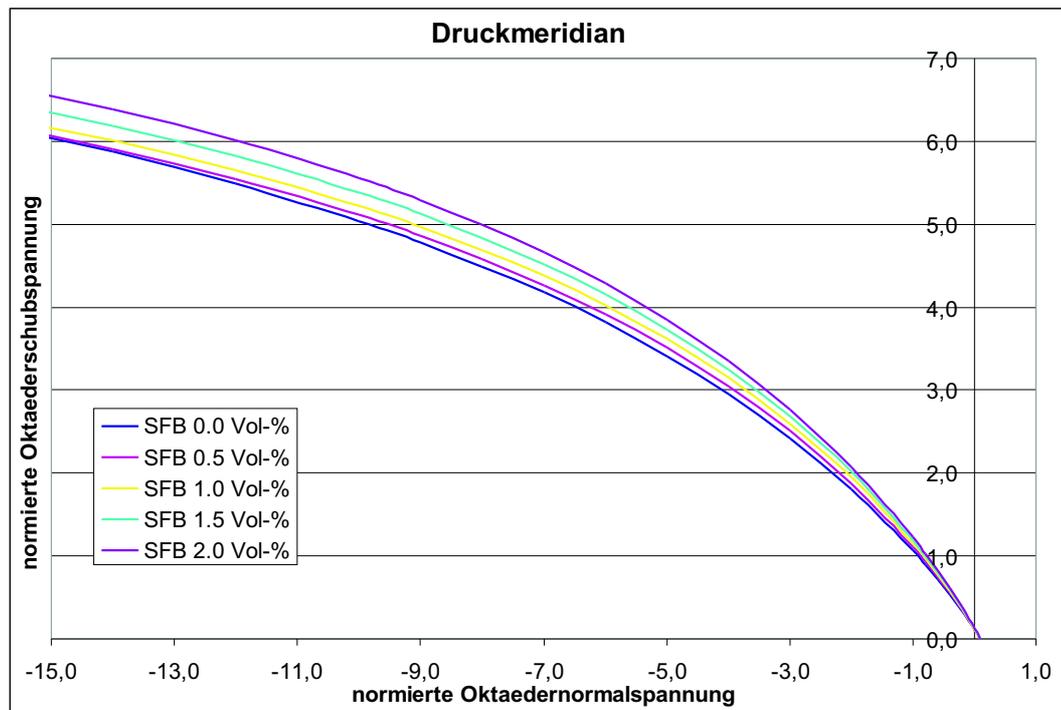
$$b = 0.0019 \cdot V_f + 0.090 \quad . \quad (7.17)$$

Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (2.37) bis (2.39) werden die einzelnen Spannungszustände  $\frac{\sigma_{oct}}{f_c}$  und  $\frac{\tau_{oct}}{f_c}$  in der Tabelle 7.3 für Stahlfasergehalte von 0.0, 1.0 und 2.0 Vol-% berechnet. Diese Spannungszustände bilden charakteristische Punkte auf der GUO-Bruchfläche und werden in die Gleichungen (7.7) und (7.8) eingesetzt. Die Parameter  $a, b, c_c, c_t$  und  $d$  lassen sich mittels MATHCAD [147] ausiterieren, da 5 nichtlineare Gleichungen mit 5 Unbekannten (Parameter  $a, b, c_c, c_t$  und  $d$ ) vorliegen. MATHCAD analysiert automatisch die Art des zu lösenden Problems und probiert geeignete Lösungsverfahren aus, um eine gültige Lösung zu erhalten. Wird für das Problem ein nichtlinearer Lösungsverfahren benötigt, kommt das *Gradientenverfahren* zum Einsatz. Kommt keine Annäherung an das Ergebnis zustande, wird die *Levenberg-Marquadt-Methode* verwendet. Ist auch damit kein Ergebnis zu erzielen, wird auf die *Quasi-Newton-Methode* zurückgegriffen. Die Konvergenztoleranz ist auf den Wert 0.001 eingeschränkt.

**Tabelle 7.3:** Ausgangswerte zur Ermittlung der Bruchflächenparameter für (Stahlfaser-)Beton mit Stahlfasergehalten von 0.0, 1.0 und 2.0 Vol-%

	Spannungszustand & Bruchfestigkeit		$V_f = 0.0$ Vol-%		$V_f = 1.0$ Vol-%		$V_f = 2.0$ Vol-%		$\theta$
			$\frac{\sigma_{oct}}{f_c}$	$\frac{\tau_{oct}}{f_c}$	$\frac{\sigma_{oct}}{f_c}$	$\frac{\tau_{oct}}{f_c}$	$\frac{\sigma_{oct}}{f_c}$	$\frac{\tau_{oct}}{f_c}$	
1	einachsiger Druck	$(0, 0, f_c)$	-0.3333	0.4714	-0.3333	0.4714	-0.3333	0.4714	$60^\circ$
2	einachsiger Zug	$(f_t, 0, 0)$	0.0333	0.0471	0.0340	0.0481	0.0347	0.0491	$0^\circ$
3	zweiachsiger Druck	$(0, f_{cc}, f_{cc})$	-0.7733	0.5468	-1.0000	0.7071	-1.0667	0.7542	$0^\circ$
4	dreiachsiger Druck	$(f_{ccc}, f_{ccc}, f_{ccc})$	-3.0000	2.4242	-3.0000	2.4242	-3.0000	2.4242	$60^\circ$
5	dreiachsiger Zug	$(f_{ttt}, f_{ttt}, f_{ttt})$	0.0900	0.0000	0.0919	0.0000	0.0938	0.0000	

Anhand der ausgewerteten Modellparameter der GUO-Bruchfläche  $a, b, c_c, c_t$  und  $d$  ist in Abbildung 7.10 die Bruchflächenaufweitung aufgrund variierender Stahlfasergehalte verdeutlicht. In Tabelle 7.4 sind die Eingangsdaten für AUTODYN zusammengefasst.



**Abbildung 7.10:** Bruchflächenaufweitung aufgrund variierender Stahlfasergehalte, illustriert an den Druckmeridianen in der normierten  $\sigma_{oct} - \tau_{oct}$  Ebene

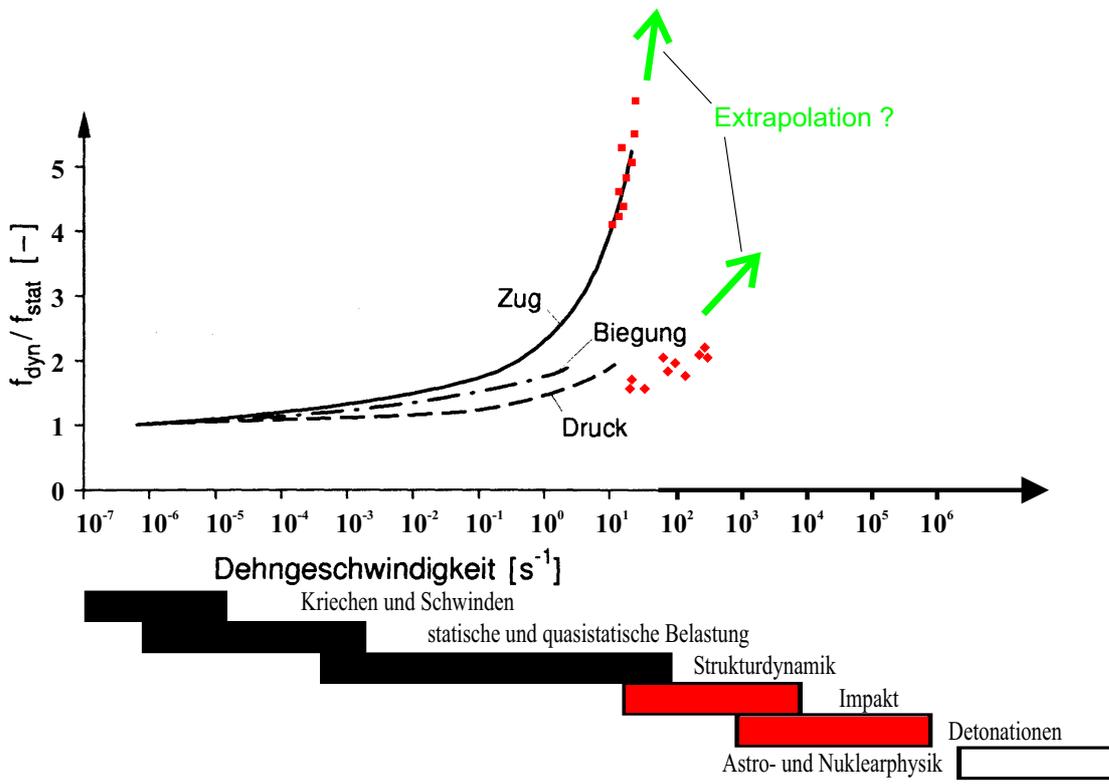
### 7.2.5 Verzerrungsratenabhängigkeit

Wie in Abschnitt 5.2.3 beschrieben, nehmen bei steigender Verzerrungsgeschwindigkeit *Festigkeit* und *Bruchverzerrung* zu. Allerdings schlägt keiner der in diesem Abschnitt genannten Autoren einen geeigneten Ansatz zur Berücksichtigung der Verzerrungsratenabhängigkeit vor. Insbeson-

**Tabelle 7.4:** Modellparameter der GUO–Bruchfläche für variierende Stahlfasergehalte

Par.	Bedeutung	Wert			Einheit	AUTODYN	Quelle/Verweis
		0.0	1.0	2.0			
$V_f$	Stahlfasergehalt	0.0	1.0	2.0	[-]	SC(5)	
$f_c$	Druckfestigkeit	5.24-E4	5.61-E4	5.98-E4	[Mbar]	SC(6)	Versuch & Gl. (7.11)
$a$	Bruchfestigkeit	10.306	9.170	9.094	[-]	SC(12)	Gleichung (7.7)
$b$	Zugversagensgrenze	0.090	0.092	0.094	[-]	intern	Gleichung (7.17)
$c_t$	Zugmeridian	20.734	15.907	15.364	[-]	SC(14)	Gleichung (7.8)
$c_c$	Druckmeridian	12.073	9.823	9.639	[-]	SC(15)	Gleichung (7.8)
$d$	Formparameter	0.913	0.935	0.939	[-]	SC(16)	Gleichung (7.7)

dere bei den durch Detonationen auftretenden Verzerrungsraten im hochdynamischen Bereich von über  $\dot{\epsilon} > 10^{1\frac{1}{s}}$  (vgl. Tabelle 1.1) versagen alle vorgeschlagenen Funktionen, da sie bei Extrapolation die Festigkeitssteigerung deutlich überschätzen (Abbildung 7.11).



**Abbildung 7.11:** Überproportionale Festigkeitssteigerung bei Verzerrungsraten  $\dot{\epsilon} > 10^{1\frac{1}{s}}$ , die bei Detonationslasten auftreten können, durch Extrapolation der Funktionen aus den Versuchen von SUARIS und LOK [204, 139]

Im folgenden wird auf der Grundlage der Versuchsergebnisse eine hyperbolische Funktion für die Festigkeitssteigerung postuliert und in das Stahlfaserbetonmodell implementiert. Dieser ursprüngliche von RUPPERT 2000 [184] aufgestellte Ansatz in Gleichung (7.18) wurde entsprechend der Parameter für reinen Beton entwickelt. Hierzu liegen eine Reihe von Versuchsergebnissen bis

$\dot{\varepsilon} < 10^{2\frac{1}{s}}$  vor (BISCHOFF & PERRY 1995 [25], BACHMANN 1993 [9]). Die hier neu festgelegten Parameter der hyperbolischen Funktionen sind gültig für Stahlfasergehalte von  $V_f=0.0$  Vol-% bis  $V_f=2.0$  Vol-% und decken sich mit den Funktionen für reinen Beton (s. Tabelle 7.5). Abweichungen im hochdynamischen Bereich bei  $\dot{\varepsilon} > 10^{2\frac{1}{s}}$  gegenüber reinem Beton sind geringfügig.

$$f(\dot{\varepsilon}) = \left\{ [\tanh((\log(\dot{\varepsilon}^*) - W_x) \cdot S)] \cdot \left[ \frac{F_m}{W_y} - 1 \right] + 1 \right\} \cdot W_y \quad , \quad (7.18)$$

mit	$f(\dot{\varepsilon})$	Festigkeitssteigerung infolge Druck oder Zug,
	$\dot{\varepsilon}^*$	dimensionslose Verzerrungsrate $\dot{E}^* = \frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_0}$ ,
	$\dot{\varepsilon}_0$	Referenz-Verzerrungsrate $\dot{\varepsilon}_0 = 1.0 \text{ s}^{-1}$ ,
	$F_m$	Grenzwert der Festigkeitssteigerung für $\dot{\varepsilon}^* \rightarrow \infty$ ,
	$W_y$	Formparameter,
	$W_x$	Formparameter,
	$S$	Formparameter.

Wesentliche Vorteile der hyperbolischen Beschreibung sind deren stetiger Verlauf für alle Verzerrungsraten und deren unterer und oberer Grenzwert, der durch geeignete Wahl der Gleichungsparameter bei geringen Verzerrungsraten dem Grenzwert 1.0 und bei hohen Verzerrungsraten  $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$  einem Grenzwert  $F_m$  zustrebt, wobei letztgenannter Grenzwert von der Druck- oder von der Zugfestigkeitssteigerung abhängt.

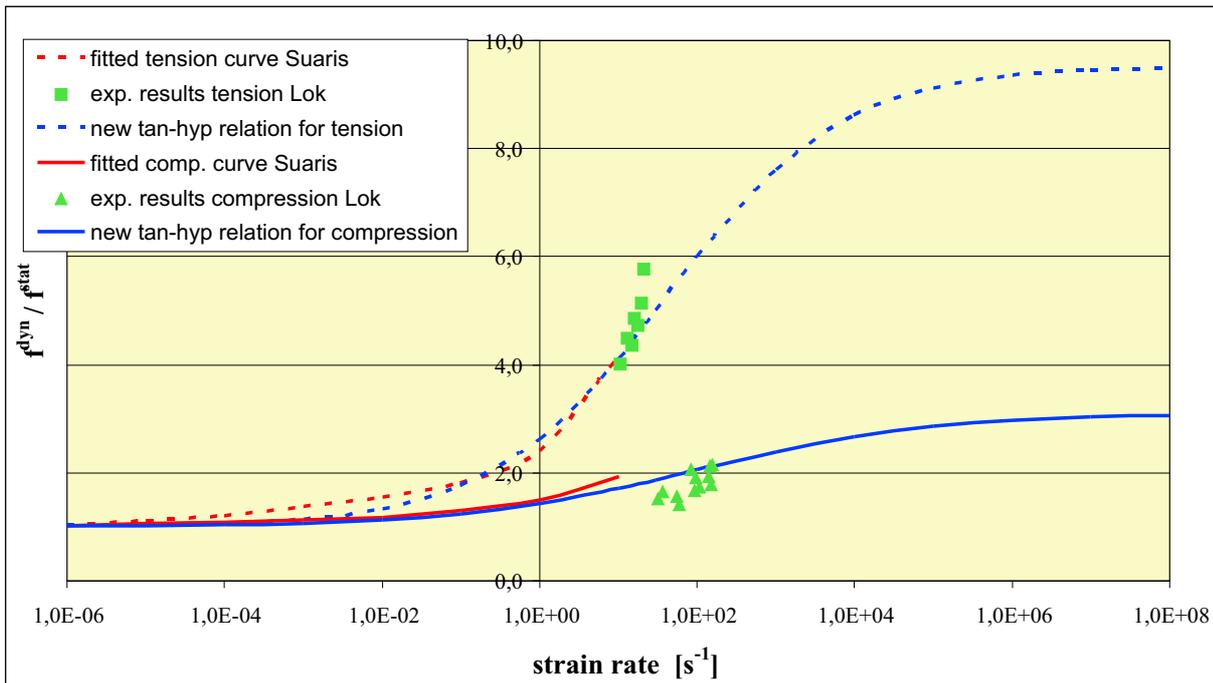
In Abbildung 7.12 sind die implementierten Tanhyp-Funktionen dargestellt, die für  $\dot{\varepsilon} < 10^{1\frac{1}{s}}$  verifiziert und für  $\dot{\varepsilon} > 10^{1\frac{1}{s}}$  postuliert ist. Die Relation der dynamischen zur statischen Festigkeit  $\frac{f^{dyn}}{f^{stat}}$  ist auf der Ordinate aufgetragen und repräsentiert die Festigkeitssteigerung infolge Druck ( $f_c(\dot{\varepsilon})$ ) oder Zug ( $f_t(\dot{\varepsilon})$ ), die in der modifizierten GUO-Fließfläche aus Gleichung (7.7) eingebunden sind. Zusätzlich sind in Abbildung 7.12 alle vorher aufgeführten Daten von SUARIS und LOK übersichtlich zusammengefasst.

Die in der folgenden Tabelle zusammengefassten Konstanten der hyperbolischen Funktion (7.18) sind in AUTODYN fest integriert und können **nicht** verändert werden.

**Tabelle 7.5:** Konstanten der hyperbolischen Funktion zur Festigkeitssteigerung in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate

	Konstanten der hyperbolischen Funktion			
	$f(\dot{\varepsilon}) = \left\{ [\tanh((\log(\dot{\varepsilon}^*) - W_x) \cdot S)] \cdot \left[ \frac{F_m}{W_y} - 1 \right] + 1 \right\} \cdot W_y$			
	$F_m$	$W_x$	$W_y$	$S$
<b>Druck</b> ( $f_c(\dot{\varepsilon})$ )	3.10	2.00	2.05	0.34
<b>Zug</b> ( $f_t(\dot{\varepsilon})$ )	9.50	1.60	5.25	0.45

Die Erhöhung der Bruchverzerrung ist im Bericht vom CEB von 1987 [38] für reinen Beton geregelt und wird für Stahlfaserbeton uneingeschränkt übernommen. Auffällig hierbei ist, dass



**Abbildung 7.12:** Implementierte Funktion zur Beschreibung der Druck- und Zugfestigkeitsteigerung in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate

sowohl bei Druck- als auch bei Zugeinwirkung die gleiche Steigerung der Bruchverzerrung festgestellt wurde. Die Referenz-Verzerrungsrate  $\dot{\epsilon}_0$  beträgt  $30 \text{ s}^{-1}$ , so dass die Verzerrungsratenabhängigkeit für die Bruchverzerrung mit

$$f_u(\dot{\epsilon}) = \left( \frac{\dot{\epsilon}}{30} \right)^{0.02} \quad (7.19)$$

angegeben ist.

### 7.2.6 Schädigungsevolution aus Gestaltänderung und aus Kompaktion

Das Prinzip der Schädigungsevolution im Materialmodell RGGP geht auf die entkoppelte und voneinander unabhängige Beschreibung der Schädigung aus der *Gestaltänderung* (Deviatoranteile) und aus der *Kompaktion* (hydrostatische Anteile) des Stahlfaserbetons zurück. Das von RUPPERT 2000 [184] zur Verfügung gestellte Schädigungsmodell für reinen Beton berücksichtigt die Kombination

1. aus dem von HOLMQUIST, JOHNSON & COOK 1993 [105] entwickelten phänomenologischen Ansatz für die Schädigungsvariable  $D_1$ , bei dem die akkumulierten plastischen Verzerrungen einer maximalen plastischen Verzerrung gegenübergestellt wird. Diese maximal aufnehmbare Verzerrung ist aus einaxialen Spannungs-Verzerrungs-Versuchen bestimmt und für den Fall des mehraxialen Zustands verallgemeinert.

2. Und aus seinem eigenen Ansatz der Schädigungsevolution aus der hydrostatischen Kompaktion mit der Schädigungsvariablen  $D_2$ , bei dem das Kompaktionsvermögen aus der Zustandsgleichung in Abhängigkeit vom hydrostatischen Druck des Betons formuliert ist.

Der Aufbau des Schädigungsmodells ist in Abbildung 7.13 schematisch dargestellt. Aufgrund der allgemeingültig formulierten Beschreibung der auftretenden schädigenden Phänomene in einem porösen Werkstoff, lässt sich der Ansatz auf die Eigenschaften des Stahlfaserbetons erweitern.

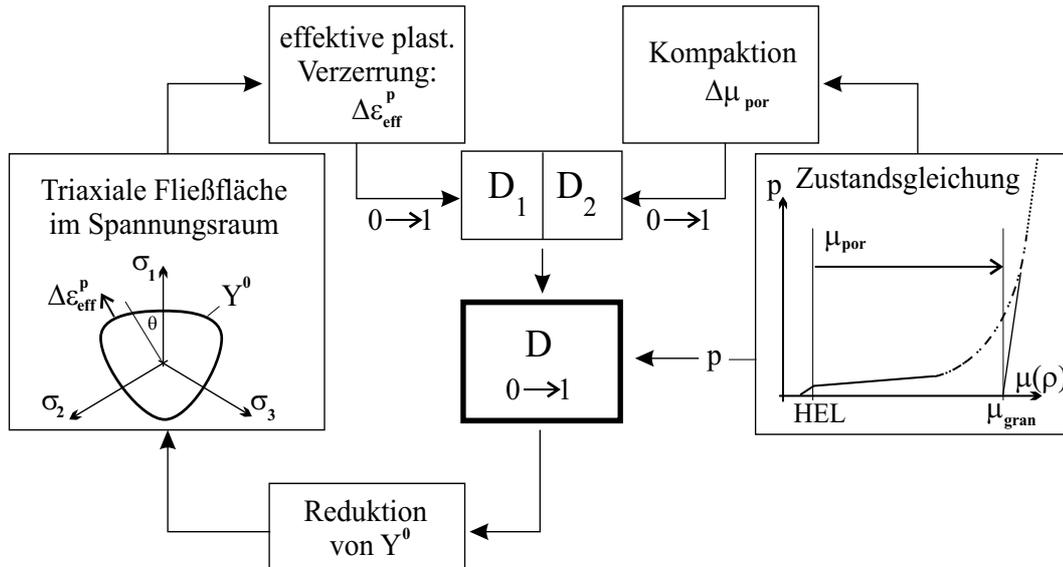


Abbildung 7.13: Aufbau des Schädigungsmodells für poröse Werkstoffe nach RUPPERT 2000 [184]

### Schädigung durch Gestaltänderung

Wenn die effektive bzw. VON MISES-Spannung  $\sigma_{eq}$  die Fließspannung  $Y^0$  erreicht, tritt plastisches Fließen ein (vgl. Abschnitt 6.3.4). Aus dem Fließpotential  $(\sigma_{eq} - Y^0)$  wird das korrespondierende plastische Verzerrungsincrement  $\dot{\epsilon}_{pl}$  nach Gleichung (6.64) bestimmt, dem zur Schädigungsevolution eine vom Material maximal aufnehmbare Bruchverzerrung  $\epsilon_{pl}^f(p, f_u(\dot{\epsilon}))$  gegenübergestellt wird. Daraus folgt die Bestimmung des Schädigungsincrements  $\Delta D_1$  mit

$$\Delta D_1 = \frac{\dot{\epsilon}_{pl}}{\epsilon_{pl}^f(p, f_u(\dot{\epsilon}))} \quad (7.20)$$

Die Inkremente werden mit

$$D_1 = \sum_{(\Delta t)} \Delta D_1 \leq 1.0 \quad (7.21)$$

von einem Zeitschritt zum nächsten akkumuliert, wobei in der Summe der Inkremente  $\Delta D_1$  der Schädigungsparameter  $D_1$  höchstens den Wert 1.0 annimmt, weil bei diesem Grenzwert eine vollständige Schädigung des Materials eingetreten ist.

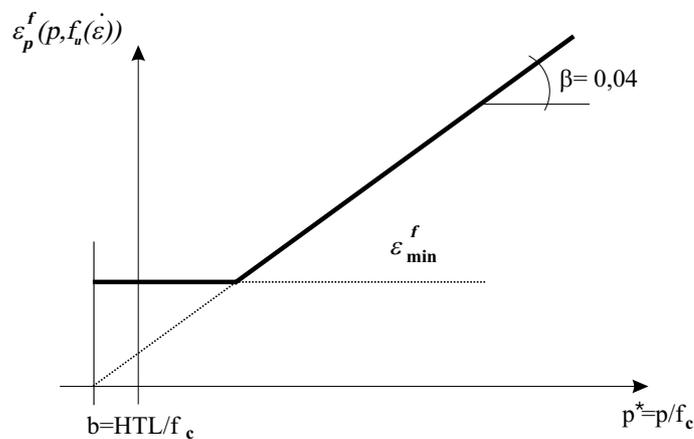
Die Eigenschaften des Stahlfaserbetons beeinflussen im Schädigungsmodell sowohl das plastische Verzerrungsinkrement als auch die aufnehmbare Bruchverzerrung.

Die Berechnung des plastischen Verzerrungsinkrements nach Gleichung (6.64) beinhaltet den Schubmodul  $G$ , der bei höherem Stahlfasergehalt wegen Gleichung (6.12) gemäß zu Abbildung 7.6 zunimmt.

Die Bestimmung der aufnehmbaren Bruchverzerrung geht auf das Schädigungsmodell von HOLMQUIST, JOHNSON & COOK von 1993 [105] zurück, bei dem die Bruchverzerrungsgrenze  $\varepsilon_{pl}^f(p, f_u(\dot{\varepsilon}))$  abhängig vom hydrostatischen Druck und von der Verzerrungsrate beschrieben ist. Der poröse Werkstoff erhöht mit ansteigendem hydrostatischen Druck seine aufnehmbare Verzerrung, wobei die Bruchverzerrungsgrenze linear zunimmt:

$$\varepsilon_{pl}^f(p, f_u(\dot{\varepsilon})) = \beta \cdot (p^* + b)^\kappa \cdot f_u(\dot{\varepsilon}) \quad . \quad (7.22)$$

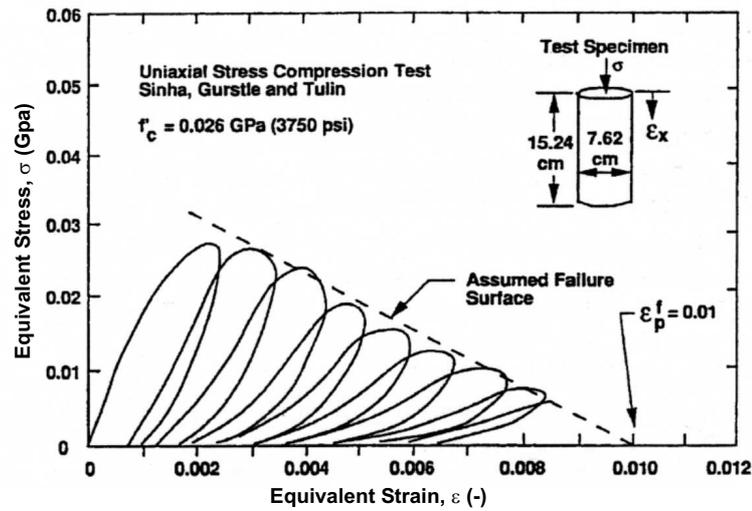
Die aufnehmbare Bruchverzerrung ist in Abbildung 7.14 veranschaulicht, wobei  $\varepsilon_{min}^f(f_u(\dot{\varepsilon}))$  als Grenzwert nicht unterschritten wird, damit auch für relativ niedrige Drücke sinnvolle Bruchverzerrungen gewährleistet sind. Durch Normierung mittels  $\frac{1}{f_c}$  entstehen die dimensionslosen Größen für den hydrostatischen Druck  $p^*$  und das Zuglimit  $b$ , wobei  $b$  ebenfalls in Abhängigkeit von dem Stahlfasergehalt steht (vgl. Gleichung (7.16)). Die Bruchverzerrung steigt mit zunehmender Verzerrungsgeschwindigkeit an (s. Abschnitt 7.2.5, Gleichung (7.19)), so dass sich die dargestellte Funktion in Abbildung 7.14 vertikal nach oben verschiebt.



**Abbildung 7.14:** Modifizierte Bruchverzerrungsgrenze für beliebigen Stahlfasergehalt

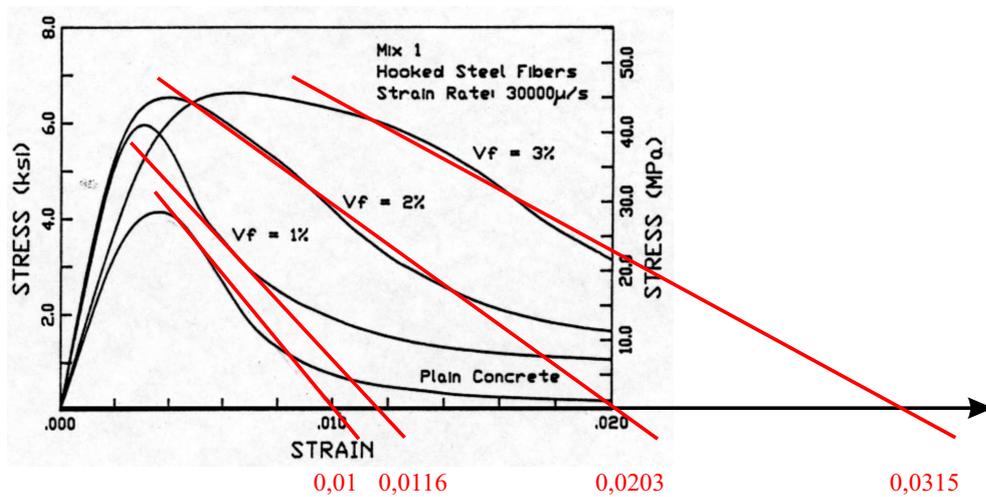
Die Vorgehensweise zur Ermittlung der minimalen Bruchverzerrung für vollständig geschädigtes Material erfolgt gemäß dem Prinzip von HOLMQUIST, JOHNSON & COOK 1993 [105]. Abbildung 7.15 stellt dar, wie der Wert der minimalen Bruchverzerrung aus zyklischen Drucktests nach SINHA, GERSTLE & TULIN 1964 [194] bestimmt wird.

Diese anwendungsorientierte Ermittlung des minimalen Grenzwertes  $\varepsilon_{min}^f(f_u(\dot{\varepsilon}))$  wird auf den Stahlfaserbeton übertragen und führt zur Extension des Terms um den Stahlfasergehalt  $V_f$  zu



**Abbildung 7.15:** Entfestigungsbeschreibung nach HOLMQUIST, JOHNSON & COOK 1993 [105] basierend auf zyklischen einaxialen Drucktests nach SINHA1964 [194]

$\varepsilon_{min}^f(f_u(\dot{\varepsilon}), V_f)$ . Auf Basis der in Abbildung 7.16 dargestellten Versuchsergebnisse von OTTER & NAAMAN von 1988 [164], die Stahlfaserbetone mit verschiedenen Stahlfasergehalten unter zyklischer Belastung untersuchten, werden die minimalen Bruchverzerrungen als Schnittpunkt der abfallenden Tangenten mit der Abszisse händisch ermittelt (DIETRICH 2003 [49]).



**Abbildung 7.16:** Ableitung der minimalen plastischen Verzerrung bis zum Bruch (aus: OTTER & NAAMAN 1988 [164])

Die Wertepaare aus Stahlfasergehalt und Bruchverzerrung sind in ein Diagramm eingetragen (Abbildung 7.17), in das eine polynomische Ausgleichsfunktion gelegt wird.

Die Berechnung der minimalen Bruchverzerrungsgrenze  $\varepsilon_{min}^f(f_u(\dot{\varepsilon}), V_f)$  ist mit der Funktion

$$\varepsilon_{min}^f(f_u(\dot{\varepsilon}), V_f) = \left[ 0.0024 \cdot V_f^2 + 0.0001 \cdot V_f + 0.0098 \right] f_u(\dot{\varepsilon}) \quad (7.23)$$

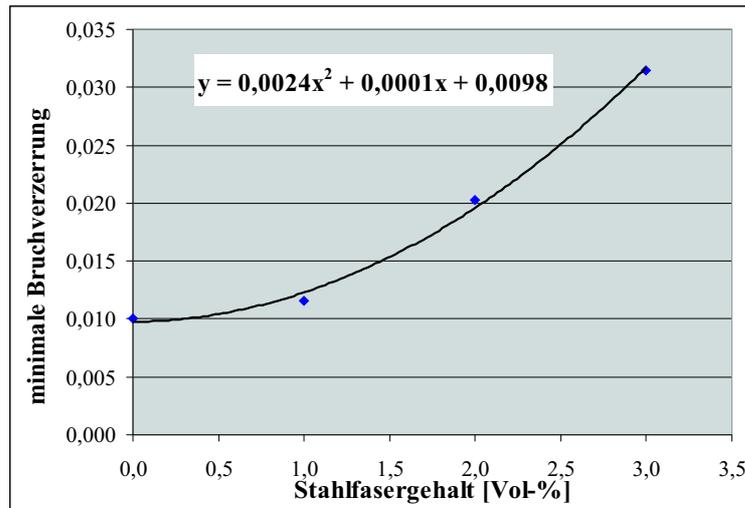


Abbildung 7.17: Ausgleichsfunktion zur Ermittlung der minimalen Bruchverzerrungsgrenze  $\varepsilon_{min}^f$

für variierende Stahlfasergehalte möglich. Dieser Ansatz ist aber aufgrund der geringen Anzahl an Wertepaaren nur eine erste aber sinnvolle Näherung, die durch weitere Versuche noch bestätigt werden sollte.

### Schädigung durch Kompaktion

Der Modellansatz von RUPPERT 2000 [184] zur Beschreibung der Schädigung durch Kompaktion lässt sich uneingeschränkt für den Stahlfaserbeton übernehmen. Das Modell besagt, dass die Schädigungsvariable  $D_2$  aus der Kompaktion des Materialgefüges über den Kompaktionsast der Zustandsgleichung bestimmt wird, wobei die Zustandsgleichung entsprechend vom Stahlfasergehalt formuliert ist (vgl. Abschnitt 7.2.2). Ab dem HUGONIOT–Elastic–Limit mit dem korrespondierenden  $\rho = \rho_{crush}$  beginnt die Kompaktion, die bei  $\rho = \rho_{ref}$  vollständig abgeschlossen ist. Dazwischen beschreibt die Variable

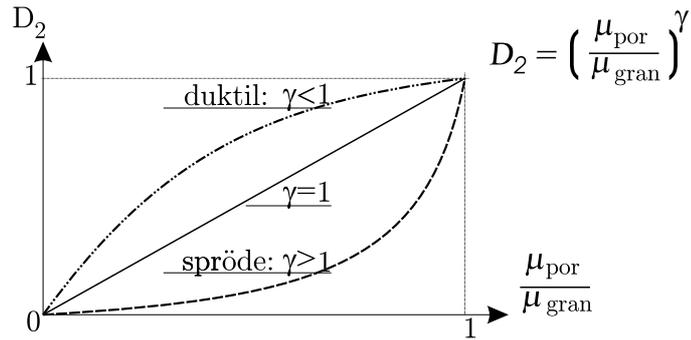
$$\mu_{por}(p) := \frac{\rho(p)}{\rho_0} - 1 \quad (7.24)$$

das von der aktuellen Dichte  $\rho(p)$  abhängige Kompaktionsvermögen des Werkstoffs. Da der elastische Ast der Zustandsgleichung relativ klein ist, wird dieser vernachlässigt. Es gilt für  $\rho_{crush}$  näherungsweise  $\rho_0$  und somit  $\mu_{crush} = \frac{\rho_{crush}}{\rho_0} - 1 \approx \frac{\rho_0}{\rho_0} - 1 = 0$ .

Das Schädigungsinkrement berechnet sich aus dem Inkrement der Porenkompaktion  $\Delta\mu_{por}$  bezogen auf das Kompaktionsvermögen des Materials  $\mu_{gran}$  (siehe Gleichung (6.13)) mit

$$\Delta D_2 = \gamma \left( \frac{\mu_{por}(p)}{\mu_{gran}} \right)^{\gamma-1} \frac{\Delta\mu_{por}}{\mu_{gran}} \quad (7.25)$$

nach dem Entwicklungsgesetz von RUPPERT.



**Abbildung 7.18:** Entwicklungsgesetz für den Schädigungsparameter  $D_2$  nach RUPPERT 2000 [184]

Der Parameter  $\gamma$  beschreibt die Kurvenform der Funktion für  $D_2$  in Abbildung 7.18. Er ist entsprechend der Duktilität des verwendeten Werkstoffs zu wählen und sollte nach RUPPERT in einem Bereich zwischen  $\frac{1}{4} < \gamma < 4$  liegen.

Die Inkremente werden mit

$$D_2 = \sum_{(\Delta t)} \Delta D_2 \leq 1.0 \quad (7.26)$$

von einem Zeitschritt zum nächsten akkumuliert, wobei in der Summe der Schädigungsparameter  $D_2$  höchstens den Wert 1.0 annimmt, weil bei diesem Grenzwert eine vollständige Schädigung des Materials eingetreten ist.

### Globaler Schädigungsparameter $D$

Die Kopplung der *Schädigung durch Gestaltänderung* und *Schädigung durch Kompaktion* in einer globalen Schädigungsvariable  $D$  erfolgt empirisch mittels Kreisgleichung

$$D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \quad (7.27)$$

Der Wert einer jeden Schädigungsvariablen ( $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D$ ) liegt zwischen 0.0 bis 1.0, was dazu führt, dass der globale Schädigungsparameter  $D$  wegen der Kreisgleichung (7.27) nach folgender Bedingung nach oben beschränkt angesetzt wird:

$$D = \begin{cases} \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \leq 1 & , \\ 1.0 & ; \text{ für } \sqrt{D_1^2 + D_2^2} > 1 \end{cases} \quad (7.28)$$

**Tabelle 7.6:** Modellparameter zur Schädigungsevolution für Stahlfaserbeton mit  $V_f = 1.0 \text{ Vol} - \%$

Param.	Bedeutung	Wert	Einheit	AUTODYN	Quelle/Verweis
$\beta$	Multiplikator	0.04	[ - ]	SC(7)	Gleichung (7.22)
$\kappa$	Exponent	1.0	[ - ]		Gleichung (7.22)
$E_{min}^f$	Bruchverzerrung ( $V_f = 1.0$ )	0.014	[ - ]		Gleichung (7.23)
$\gamma$	Exponent	2.0	[ - ]	SC(11)	Gleichung (7.25)

### 7.2.7 Degradation der Materialeigenschaften durch Schädigung

Die in Abbildung 1.9 schematisch illustrierte Anwendung der isotropen Kontinuumschädigungsmechanik führt zur Kombination des elasto–plastischen und elasto–schädigenden Materialverhaltens. Daraus folgt die Degradation der Materialeigenschaften, ausgedrückt durch die Steifigkeit  $(1 - D)G$  und die Festigkeit  $f_c(D)$  (vgl. Abschnitt 6.3.3), die sowohl qualitativ als auch quantitativ aus einaxialen Spannungs–Verzerrungs–Versuchen bestimmt und dann auf den triaxialen räumlichen Spannungszustand der Fließfläche über die Fließspannung  $k = k(s_{pl}, \dot{\mathbf{E}}, D)$  übertragen wird (Abbildung 7.19).

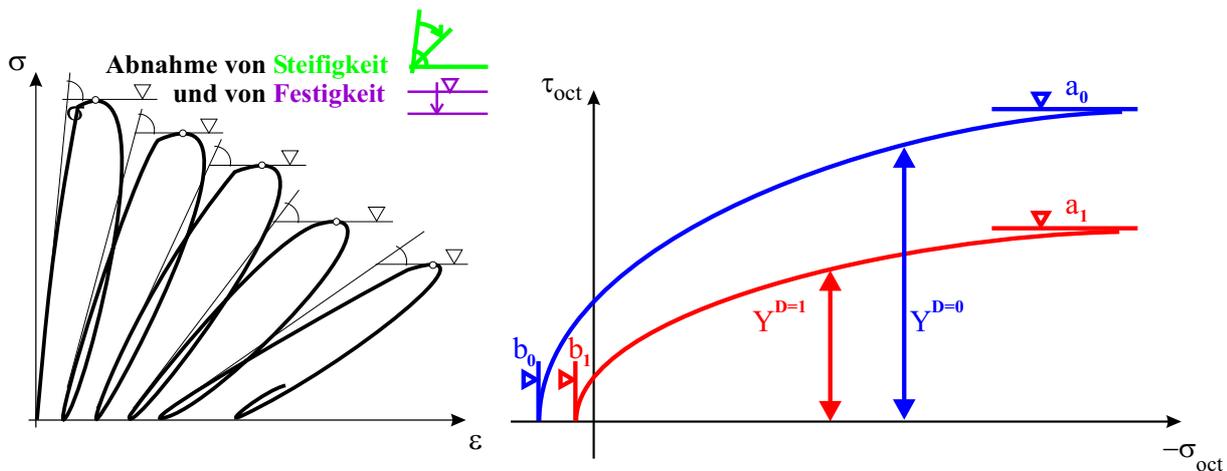


Abbildung 7.19: Zyklische Belastung (einaxial) und Bewegung der Bruchfläche (triaxial)

Die elastische Entfestigung auf der rein makromechanischen Ebene, also ohne Modellierung von Rissöffnung und -schließung, erfolgt durch die *Reduktion des Schubmoduls*  $G$  über einen von mehreren Autoren verwendeten Ansatz für betonartige Werkstoffe (z.B. RANDLES & LIBERSKY 1996 [170]), bei dem für das vollständig geschädigte Material der Schubmodul  $G_{D=1}$  eine Reststeifigkeit von 13% gegenüber der Ausgangssteifigkeit  $G_{D=0}$  aufweist:

$$G(D) = (1 - D) \cdot G_{D=0} + D \cdot G_{D=1} \quad \text{mit} \quad G_{D=1}/G_{D=0} = 0.13 \quad . \quad (7.29)$$

Hinzu kommt die damit verbundene *Modifikation der elastischen deviatorischen Spannungskremente*  $\dot{\mathbf{T}}^D$  formuliert nach RIEDEL 2000 [177] mit

$$\dot{\mathbf{T}}_{D^{t+1}}^D = \dot{\mathbf{T}}_{D^t}^D \frac{(1 - D^{t+1}) + \frac{G_{D=1}}{G_{D=0}} D^{t+1}}{(1 - D^t) + \frac{G_{D=1}}{G_{D=0}} D^t} \quad . \quad (7.30)$$

Die *Reduktion der Festigkeit* wird über eine Verschiebung der Fließflächen im dreidimensionalen Spannungsraum abgebildet, wobei sich die Fließfläche von einem ungeschädigten Stahlfaserbeton mit der Fließspannung  $Y^{D=0}$  bis zu einem vollständig zerstörten, granularen Material mit der

Fließspannung  $Y^{D=1}$  verkleinert. Die im GUO-Modell verwendeten Materialparameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  aus den Gleichungen (7.7) und (7.8) hängen dann vom aktuellen Schädigungszustand  $D$  ab:

$$a = (1 - D) \cdot a_0 + D \cdot a_1 \quad , \quad (7.31)$$

$$b = (1 - D) \cdot b_0 + D \cdot b_1 \quad \text{und} \quad (7.32)$$

$$c_c(D) = (1 - D) \cdot c_c + D c_t \quad \rightarrow \quad c(\theta, D) = c_t (\cos 1.5\theta)^{1.5} + c_c(D) (\sin 1.5\theta)^{2.0} \quad . \quad (7.33)$$

Die tief gestellten Indizes 0 and 1 in den Gleichungen (7.31), (7.32) und (7.33), kennzeichnen den ungeschädigten Parameter mit  $D = 0$  und den geschädigten Parameter mit  $D = 1$  der GUO-Fließfläche aus Abbildung 7.8. Im Ausgangszustand beschreiben die Parameter  $a_0$  und  $b_0$  die Fließfläche mit der Fließspannung  $Y^{D=0}$ . Im endgültigen Zustand für vollständig zerstörtes Material bilden die Parameter  $a_1$  und  $b_1$  die Fließfläche mit der Fließspannung  $Y^{D=1}$  ab.

Der Parameter  $a_1$  ist empirisch gewählt und ist größer als 0, da auch das vollständig zerstörte, granulare Material Schubspannungen entgegenwirkt.  $a_1$  wird unabhängig vom Stahlfasergehalt konstant im RGGP-Modell gesetzt.

Der Parameter  $b$  entspricht der hydrostatischen Zugfestigkeit. Da im granularen Zustand der Beton keine Zugspannungen aufnimmt, strebt mit zunehmender Schädigung der Wert  $b \rightarrow 0$  ( $b_1 = 0$  für  $V_f = 0$  Vol-%). Dies korrespondiert mit den Versuchsergebnissen der einachsigen Spannungs-Verzerrungs-Tests aus Abbildung 5.5. Im Gegensatz zum reinen Beton ist der Stahlfaserbeton in der Lage, Zugspannungen trotz steigender Verzerrungen aufzunehmen. In diesem Zusammenhang wird der Parameter  $b_1$  in Abhängigkeit vom Stahlfasergehalt berechnet. Mit Bezug auf den linearen Zusammenhang der dreiachsigen Zugfestigkeit zur einachsigen aus Gleichung (7.16), ergibt sich eine prozentuale Bestimmung der Restfestigkeit des Parameters  $b_1$  zu  $b_0$  resultierend aus den einachsigen Ergebnissen aus Abbildung 5.5

$$b_1 = (0.1115 \cdot V_f) \cdot b_0 \quad . \quad (7.34)$$

Der Meridianparameter  $c(\theta)$  beschreibt die Form der Fließfläche im Deviatorschnitt. Da granulares Material hinsichtlich seines dreiachsigen Materialverhaltens nicht mehr zwischen Druck- und Zugmeridian unterscheidet, wird es in diesem Zustand als isotrop angenommen. Die GUO-Fließfläche wird bei zunehmender Schädigung zu einem Kreis mit dem Radius  $c = c_t$ .

Versuchstechnisch abgesicherte Fließflächen für mehraxiale Spannungszustände wie bei GUO et. al 1995 [90] existieren weder für reinen Beton unter Berücksichtigung von Schädigung und schon gar nicht für Stahlfaserbetone mit verschiedenen Stahlfasergehalten. Darum sind die Parameter der modifizierten GUO-Fließfläche physikalisch sinnvoll aufgestellte Postulate.

**Tabelle 7.7:** Modellparameter zur Materialdegradation für Stahlfaserbeton mit beliebigem Stahlfasergehalt bei  $D = 1$

Parameter	Bedeutung	Wert	Einheit	AUTODYN-Variable	Quelle/Verweis
$\frac{G_{D=1}}{G_{D=0}}$	Rel. Reststeifigkeit	0.13	[ - ]	SC(17)	Gleichung (7.29)
$a_1$	Bruchfestigkeit	3.5	[ - ]	SC(13)	Gleichung (7.31)

## 7.3 Modellierung des Bewehrungsstahls

### 7.3.1 Einführung

JOHNSON & COOK entwickelten 1984 das nachfolgend beschriebene Materialmodell (JC-Modell) für Metalle [112]. Es verliert auch unter hohen Verzerrungsraten, hohen Temperaturen und großen Verformungen seine Gültigkeit nicht. Anhand der Erkenntnisse von Zug- und Torsionsversuchen mit variierenden Temperaturen und Verzerrungsraten wurde das JC-Modell validiert. Die Versuche erfolgten an einigen amerikanischen Stählen, die den von BRANDES & LIMBERGER 1985 [28] untersuchten Betonstählen der deutschen Norm ähneln. Ein wesentlicher Vorteil des JC-Modells liegt in der einfachen Anpassung von Parametern an die Werkstoffeigenschaften von Metallen.

### 7.3.2 Fließfläche

Im JC-Modell wird die VON MISES Fließspannung  $Y$  entsprechend des statischen, des dynamischen und des thermischen Zustands berechnet mit

$$Y = \underbrace{(A + B \varepsilon^n)}_{\text{statisch}} \cdot \underbrace{(1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*)}_{\text{dynamisch}} \cdot \underbrace{(1 - T^{*m})}_{\text{thermisch}} \quad (7.35)$$

Im zweiten Klammerausdruck wird die Steigerung der Festigkeit in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate beschrieben.  $C$  ist stoffabhängig und steht für die Steigerung des Festigkeitszuwachses. Hierbei wird für  $\dot{\varepsilon}^*$  eine dimensionslose plastische Verzerrungsrate genutzt, die durch Normierung auf die statische Verzerrungsrate  $\dot{\varepsilon}_0 = 1.0s^{-1}$  mit  $\dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}$  ermittelt wird. In der letzten Klammer wird die thermische Entfestigung berücksichtigt. Mit dem Parameter  $T^*$  geht der Einfluss der Temperatur auf die Festigkeit ein. Aufgrund der Kurzzeitbelastung durch Detonationen wird der thermische Einfluss vernachlässigt.

### 7.3.3 Ermittlung der Modellparameter für DIN-Stähle

Zur Ermittlung der Modellparameter für den in Europa gebräuchlichen Betonstahl sind die von BRANDES & LIMBERGER 1985 vorgestellten Versuchsergebnisse verwendet worden [28], die in Abbildung 5.15 dargestellt sind. Hierzu liegen die ratenabhängigen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen für

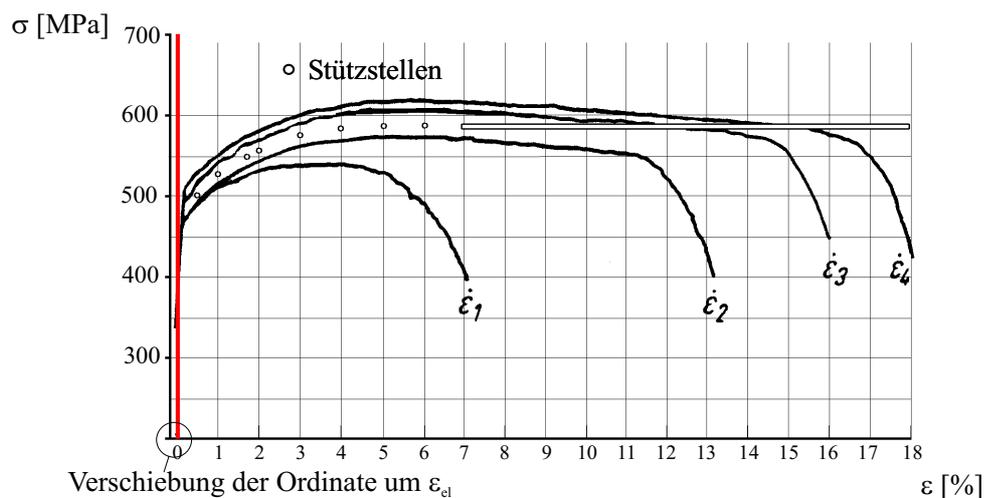
- warmgewalzten Stahl BSt 420/500 RU
- kaltgezogenen Stahl BSt 420/500 RK

vor. In Anlehnung an die Vorgehensweise der Parameterbestimmung nach JOHNSON & COOK in [112], lassen sich die Variablen für die Betonstähle ermitteln. Danach braucht nur der nichtlineare Bereich der Spannungs–Verzerrungs–Beziehung betrachtet zu werden, um die Fließspannung  $Y$  aus Gleichung (7.35) zu bestimmen (Vernachlässigung des elastischen Anteils in der Spannungs–Verzerrungs–Beziehung). Die HOOKE’sche Gerade wird abgetrennt.

In Tabelle 7.8 sind die Anteile dem statischen, dynamischen und dem thermischen Verhalten übersichtlich zugeordnet. In der letzten Spalte wird das allgemeine Vorgehen zur Parameterermittlung kurz beschrieben, bevor dieses Vorgehen exemplarisch für den kaltgezogenen Betonstahl BSt 420/500 RK näher erläutert wird.

**Tabelle 7.8:** Bestandteile des JOHNSON & COOK Materialmodells

Anteile	Formel	Berücksichtigung
Statischer Anteil	$(A + B\varepsilon^n)$	Die Parameter $A$ , $B$ und $n$ werden zuerst ermittelt, die Verzerrungsratenabhängigkeit bleibt zunächst unberücksichtigt
Dynamischer Anteil	$(1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*)$	Im zweiten Schritt wird der Parameter $C$ gesucht
Temperatur Anteil	$(1 - T^{*m})$	Wird aufgrund der kurzen Einwirkungs-dauer <b>nicht</b> berücksichtigt



**Abbildung 7.20:** Spannungs–Verzerrungs–Beziehungen für BSt 420/500 RK, Verschiebung des Koordinatenursprungs um die elastische Verzerrung  $\varepsilon_{el}$

### Bestimmung der statischen JC-Parameter

Bei der Ermittlung der statischen JC-Parameter  $A$ ,  $B$  und  $n$  werden die Spannungs-Verzerrungs-Verläufe für einen BSt 420/500 RK mit einem gesonderten Koordinatensystem versehen, dessen in Abbildung 7.20 rot dargestellte Ordinate durch den Beginn der Fließspannung geht. Dabei ist der Koordinatenursprung gegenüber den realen Spannungs-Verzerrungs-Verläufen aus Abbildung 5.15 um die elastische Verzerrung  $\varepsilon_{el}$  bis an die Fließgrenze verschoben. Die Einteilung der Abszisse bleibt unverändert.

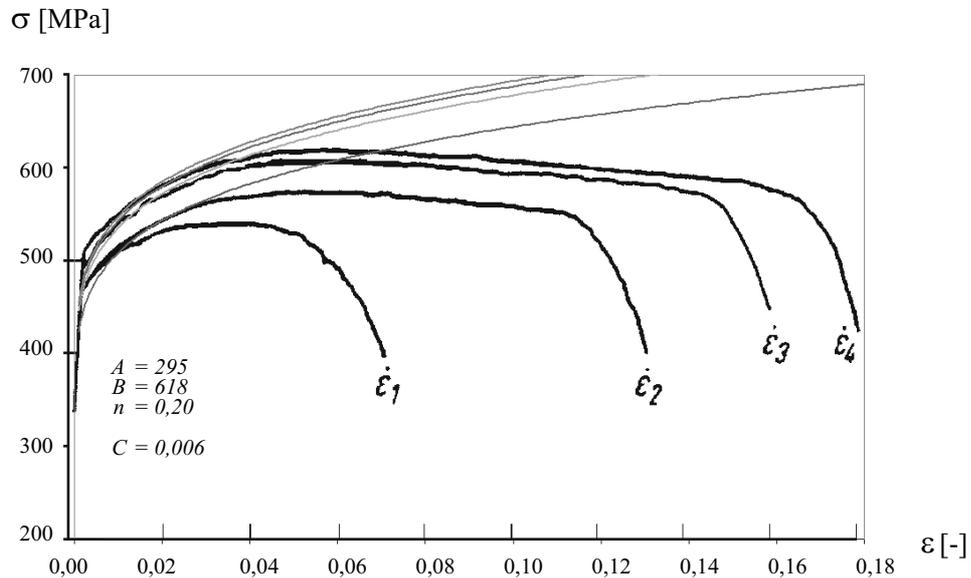
Im JC-Materialmodell ist der Wert für die Referenz-Verzerrungsgeschwindigkeit  $\dot{\varepsilon}_0$  mit  $1 \cdot s^{-1}$  angegeben. BRANDES & LIMBERGER rechnen mit einem  $\dot{\varepsilon}_0$  in Anlehnung an den statischen Zugversuch mit  $5 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ . Eine Anpassung der Verläufe der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen an die Referenz-Verzerrungsgeschwindigkeit für das JC-Modell erfolgt **nicht**.

Die Adaption der Modellparameter in Anlehnung an die statischen als auch an die dynamischen Kurvenverläufe der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen erfolgt unter Anwendung der LEVENBERG-MARQUARDT-Methode, einer modifizierten NEWTONschen Näherungsmethode, mit Hilfe des Programms MATHCAD [147]. Hierbei bilden die an Stützstellen abgelesenen Wertepaare ein überbestimmtes Gleichungssystem mit den drei Unbekannten  $A$ ,  $B$  und  $n$ . In Abbildung 7.20 sind exemplarisch einige Stützstellen eingelegt. Die Vorgehensweise im Einzelnen:

1. Entsprechend des Kurvenverlaufs für  $\dot{\varepsilon}_1$  wird eine gewählte Anzahl an Stützstellen (hier 16) eingelegt und deren Wertepaare abgelesen. Die Stützstellen sind am Beginn des Verfestigungsbereichs verdichtet, um einen genaueren Verlauf der Kurve abzubilden. Das erste Wertepaar wird für den Beginn des Kurvenverlaufs ab  $\varepsilon = 0$  sinnvoll angenommen. Ein Problem stellt die abfallende Gradienten des realen Kurvenverlaufs ab ca. 3% Verzerrung dar. Die Spannungen beziehen sich auf den Ausgangsquerschnitt des Betonstahl – eine Einschnürung bleibt unberücksichtigt.
2. Der Startwert für den iterativen Prozess mit MATHCAD wird an der Stelle  $\varepsilon = 0$  abgeschätzt. Es ergeben sich die Variablen  $A$ ,  $B$  und  $n$ .
3. Diese Parameterwerte werden in den statischen Anteil der JC-Funktion aus Gleichung (7.35) eingesetzt und der Kurvenverlauf mit den realen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen verglichen. Bedingt durch die Einschnürung, sind die Verläufe nicht identisch.
4. Durch Variation des Startwertes ist der Verlauf in erster Linie in Anlehnung an den Verlauf bis ca. 3% Verzerrung angeglichen.

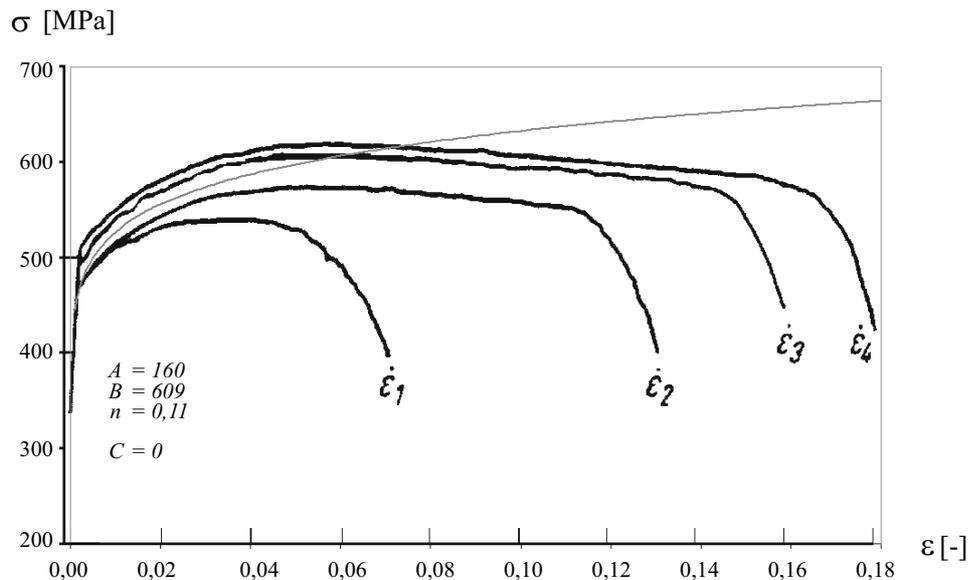
Abbildung 7.21 zeigt die ermittelten Funktionen (dünne Linien), die sich aus den in MATHCAD errechneten Werten ergeben. Ebenfalls sind in Abbildung 7.21 die Ergebnisse des verzerrungs-ratenabhängigen Parameters  $C$  enthalten (s.a. folgender Abschnitt). Zusätzlich sind mit den

dicken Linien die aus Versuchen von BRANDES & LIMBERGER ermittelten Verläufe für variierende Verzerrungsraten eingetragen.



**Abbildung 7.21:** Kurvenverlauf der JC-Funktion mit den per NEWTON'scher Näherungsmethode ermittelten Parametern  $A$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $C$  für BSt 420/500 RK

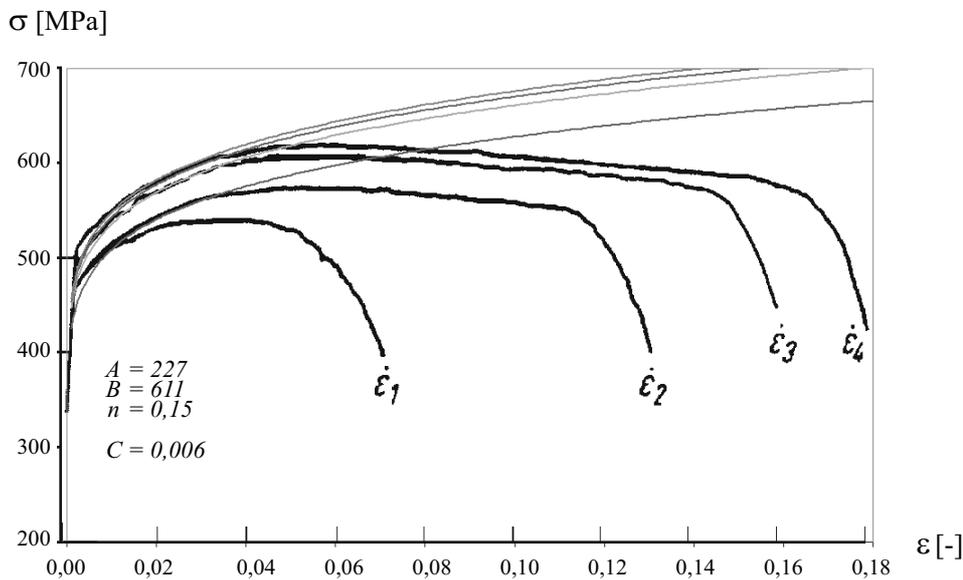
Gegenüber der oben vorgestellten Ermittlung der Parameter ist in einem weiteren Schritt in einer Tabellenkalkulation der Kurvenverlauf im Bereich der steigenden Gradienten durch Variation der Parameter  $A$ ,  $B$  und  $n$  bei konstantem  $C = 0$  untersucht worden. Abbildung 7.22 zeigt das Ergebnis dieser Wertermittlung.



**Abbildung 7.22:** Durch Parametervariation ermittelte Funktionen im Bereich der steigenden Gradienten

Beim Vergleich der Ergebnisse aus Abbildung 7.21 mit denen aus Abbildung 7.22 fällt auf, dass die zuerst ermittelten Verläufe (Abbildung 7.21) bis zu einer Verzerrung von ungefähr 1% unterhalb der in Versuchen erzielten Spannungs–Verzerrungs–Kurven liegen und anschließend darüber. Bei dem zweiten durch Parameter–Variation ermittelten Verlauf (Abbildung 7.22) ist dieses Verhalten nicht so stark ausgeprägt: Erst ab einer Verzerrung von ungefähr 4% liegt die Versuchskurve unter dem iterierten Verlauf.

Die nach beiden Verfahren ermittelten Werte sind jeweils pro Parameter arithmetisch gemittelt. Sie werden in die Funktion eingesetzt und es wird wieder der Funktionsverlauf mit den Versuchsergebnissen verglichen. Die so erhaltenen endgültigen Werte sind in Tabelle 7.9 aufgeführt, und der Verlauf der JC–Funktion ist in Abbildung 7.23 dargestellt.



**Abbildung 7.23:** Durch Parametervariation ermittelte Funktionen, endgültige Parameter für das JC–Modell für BSt 420/500 RK

### Bestimmung des verzerrungsratenabhängigen Parameters $C$

Die Bestimmung des verzerrungsratenabhängigen Parameters  $C$  erfolgt in Anlehnung an die zuvor beschriebene Vorgehensweise durch Iteration und Kurvenvergleich. Eine Erhöhung des Wertes für  $C$  führt zu einer breiteren Streuung der Funktionsverläufe für die von BRANDES & LIMBERGER gewählten Werte der Verzerrungsraten.  $C$  ist so gewählt, dass die Funktionsverläufe über einem möglichst großen Bereich übereinstimmen. In den bereits gezeigten Abbildungen 7.21 und 7.23 ist der Parameter  $C$  schon berücksichtigt. Daher ergeben sich jeweils vier Funktionsverläufe. In Abbildung 7.22 ist  $C = 0$  und somit ist nur der Verlauf für die Referenz–Verzerrungsrate  $\dot{\epsilon}_0 = 1 \cdot s^{-1}$  zu sehen.

**Tabelle 7.9:** Materialkonstanten für das JOHNSON & COOK-Festigkeitsmodell

	Materialkonstanten				
	$Y = (A + B \varepsilon^n) \cdot (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) \cdot (1 - T^{*m})$				
	$A$	$B$	$n$	$C$	$m$
<b>BSt 420/500 RK</b>	<b>227</b>	<b>611</b>	<b>0.15</b>	<b>0.006</b>	<b>1.00</b>
<b>BSt 420/500 RU</b>	<b>411</b>	<b>1032</b>	<b>0.34</b>	<b>0.009</b>	<b>1.00</b>
1006 Steel	350	275	0.36	0.022	1.00
S-7 Steel	1539	477	0.18	0.012	1.00

### 7.3.4 Schädigungsfunktion und Bruchmodell

Im JOHNSON & COOK-Modell 1985 [113] ist eine Schädigungs-Bruch-Funktion implementiert, die ein sukzessives Anwachsen der Schädigung bis zum endgültigen Bruch ausdrückt. Abgeschätzt wird die Elementschädigung  $D$  mit

$$D = \sum_{(\Delta t)} \Delta D = \sum_{(\Delta t)} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon^f}, \quad (7.36)$$

wobei  $\Delta \varepsilon$  das Inkrement der plastischen Verzerrung ist und  $\varepsilon^f$  für die vom Material aufnehmbare Bruchverzerrung steht. Der Schädigungswert  $D$  liegt zwischen 0.0 für ungeschädigt und 1.0 für vollständigen Bruch. Die Bruchverzerrung wird bestimmt über

$$\varepsilon^f = \underbrace{(d_1 + d_2 e^{d_3 \sigma^*})}_{\text{statisch}} \cdot \underbrace{(1 + d_4 \ln \dot{\varepsilon}^*)}_{\text{dynamisch}} \cdot \underbrace{(1 + d_5 T^*)}_{\text{thermisch}}. \quad (7.37)$$

$d_1$  bis  $d_5$  sind Materialkonstanten. Der dimensionslose Parameter  $\sigma^*$  wird aus der Division der ersten Invarianten (gemittelte Hauptspannung)  $\sigma_m$  durch die VON MISES Vergleichsspannung ( $Y$ ) berechnet ( $\sigma^* = \frac{\sigma_m}{Y}$ ).

Auf Grundlage der Modellvorstellung zum Schädigungsverhalten nach HANCOCK & MACKENZIE 1976 [93], wird mit dem ersten Teil der Gleichung (7.37) die Steigerung der Verformungen bei Zunahme der hydrostatischen Zugspannungen beschrieben. In den weiteren Klammerausdrücken werden das verzerrungsratenabhängige Werkstoffverhalten und der Temperatureinfluss berücksichtigt.

**Tabelle 7.10:** Ausgewählte Materialkonstanten für das Schädigungs-Bruch-Modell nach JOHNSON & COOK 1985 [113] angewandt auf Betonstähle nach DIN 488

	Materialkonstanten				
	$\varepsilon^f = [d_1 + d_2 e^{d_3 \sigma^*}][1 + d_4 \ln \dot{\varepsilon}^*][1 + d_5 T]$				
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
<b>BSt 420/500 RK</b>	<b>0.05</b>	<b>3.44</b>	<b>-2.12</b>	<b>0.002</b>	<b>0.61</b>
<b>BSt 420/500 RU</b>	<b>0.05</b>	<b>3.44</b>	<b>-2.12</b>	<b>0.002</b>	<b>0.61</b>
4340 Steel	0.05	3.44	-2.12	0.002	0.61

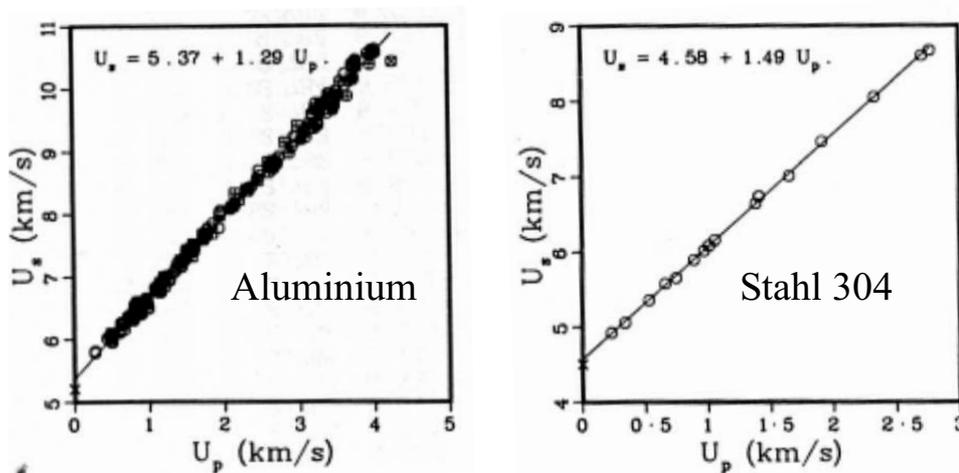
Die Materialparameter sind in Anlehnung an einen ähnlichen amerikanischen Stahl frei gewählt, da keine experimentellen Untersuchungen für einen DIN–Betonstahl vorliegen.

### 7.3.5 Zustandsgleichung

Eine Vielzahl von Planar–Impakt–Experimenten, beispielsweise von MARSH 1980 [146], STEINBERG 1991 [201] oder NAHME 1991 [158], zur Bestimmung dynamischer Werkstoffparameter von Metallen zeigte, dass die Zustandsgleichung für nahezu inkompressible Medien wie Metalle in guter Approximation zu einer linearen Beziehung zwischen Schockwellengeschwindigkeit ( $U_s$ ) und Partikelgeschwindigkeit ( $U_p$ ) steht:

$$U_s = c_B + S U_p . \quad (7.38)$$

Abbildung 7.24 illustriert beispielhaft die gemessenen Ergebnisse von Stoßwellenexperimenten an Aluminium 2024 und Stahl 304 aus MARSH 1980 [146].



**Abbildung 7.24:** Gemessene Zustände von Schockwellengeschwindigkeits- ( $U_s$ ) und Partikelgeschwindigkeits- ( $U_p$ ) Daten für Aluminium 2024 und Stahl 304 (aus: MARSH 1980 [146])

Der Materialparameter  $c_B$  beschreibt die Geschwindigkeit der akustischen Kompressionswellen im unbelasteten Zustand.  $S$  kennzeichnet den Anstieg der  $U_s - U_p$ -Beziehung. Entscheidender Vorteil dieser als Schock–Zustandsgleichung bezeichneten Form ist die direkte Ermittlung der Materialparameter:

1.  $c_B$  lässt sich aus Ultraschallmessungen und
2.  $S$  aus der abgelesenen Gradienten der Ausgleichsgeraden bestimmen.

Die Kompressionsgeschwindigkeit  $c_B = \sqrt{K/\rho}$  entspricht der linearen, hydrodynamischen Kompressionswellengeschwindigkeit in Fluiden (Tabelle 3.1). Der Kompressionsmodul  $K$  und der

Schubmodul  $G$  werden aus dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  gemäß Gleichung (6.18) bestimmt. Die charakteristischen Werte für Stahl eingesetzt, ergeben

$$K = \frac{2.1 \cdot 10^5}{3(1 - 2 \cdot 0.28)} = \frac{2.1 \cdot 10^5}{1.32} = 1.59 \cdot 10^5 \text{ [MPa]} \text{ und}$$

$$G = \frac{2.1 \cdot 10^5}{2(1 + 0.28)} = \frac{2.1 \cdot 10^5}{2.56} = 8.18 \cdot 10^4 \text{ [MPa]} .$$

Für die unbelastete Wellengeschwindigkeit ergibt sich ein Wert von 4502 m/s (AUTODYN-Parameter C1).

Tabelle 7.11 fasst die verwendeten Materialparameter für übliche Betonstähle zusammen und zeigt im Vergleich Werte von zwei amerikanischen Stählen, dem S7-Tool Steel sowie dem 1006-Steel. Da für die Steigungskonstante (AUTODYN-Parameter S1) für den Betonstahl keine Daten vorliegen, wurde der Materialparameter für den Betonstahl zu  $S = 1.367$  über die Vergleichswerte der amerikanischen Stähle linear interpoliert. Daraus ergibt sich der GRÜNEISEN-Koeffizient in Anlehnung an den praktischen Ansatz von DUGDALE & MCDONALD 1953 [53] aus Gleichung (6.5) zu

$$\Gamma \cong 2 \cdot S - 1 = 2 \cdot 1.367 - 1.0 = 1.734 . \quad (7.39)$$

**Tabelle 7.11:** Materialparameter der Zustandsgleichung für Betonstähle nach DIN 488

	Parameter der Schock-Zustandsgleichung			
	$U_S = c_B + S u_p$			
	$\rho_0$	$c_B$	$S$	$\Gamma$
<b>BSt 420/500 RK</b>	<b>7.85</b>	<b>4502</b>	<b>1.367</b>	<b>1.734</b>
<b>BSt 420/500 RU</b>	<b>7.85</b>	<b>4502</b>	<b>1.367</b>	<b>1.734</b>
1006 Steel	7.896	4569	1.49	1.98
S-7 Steel	7.75	4569	1.49	1.98

## 7.4 Diskretes Verbundmodell mit Kontinuumelementen

### 7.4.1 Überblick

Das neue Stahlbetonverbundmodell GRECON ist für beliebige Betonstähle nach DIN 488 bei variablen Betonfestigkeiten entwickelt und in AUTODYN implementiert. Mit dem Ziel, die Übertragung der örtlich auftretenden Verbund Schubspannungen  $\tau$  und Verbundnormalspannungen  $\sigma$  zwischen Beton und Betonstahl von statischen bis zu hochdynamischen Belastungen abzubilden, werden verschiedene konstitutive Beziehungen modular gekoppelt. Die einzelnen konstitutiven Beziehungen sind aus verschiedenen Versuchen entwickelt worden. Beispielsweise wurden Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen einmal unter Querdruck und einmal unter

Querzug durchgeführt. Ein anderes mal wurden dynamische Versuche durchgeführt und von den Ergebnissen die Ratenabhängigkeit der Verbundfestigkeit mathematisch beschrieben.

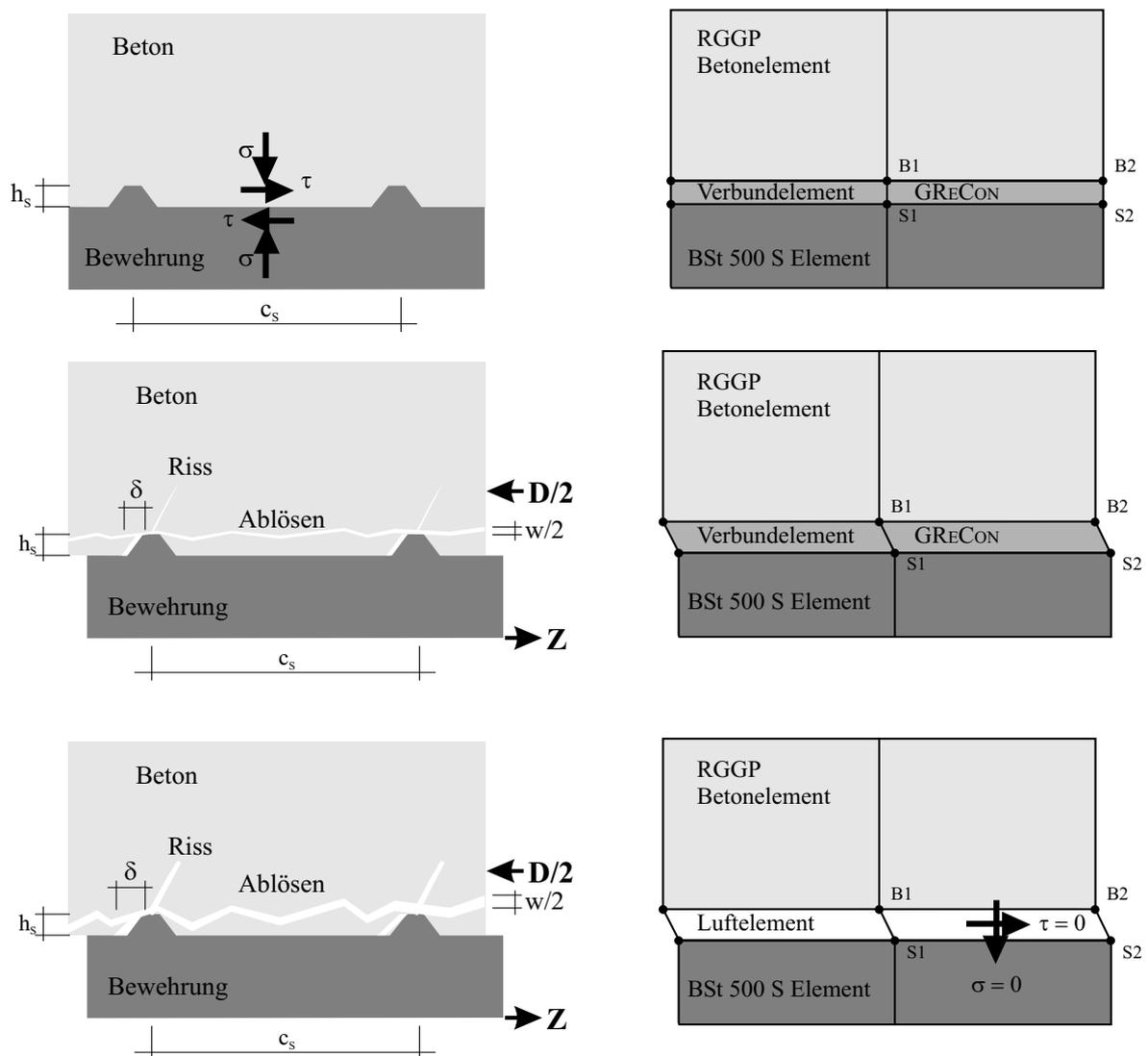
Da das mechanische Tragverhalten des Verbunds signifikant durch das Aufreißen des Betons gekennzeichnet ist, sind die Relativverschiebungen vom Beton zum Betonstahl im Modell zu berücksichtigen. Hinzu kommen Einflüsse aus Verzerrungsraten auf die Verbundfestigkeitssteigerung. Ein wesentlicher Baustein im Materialmodell liegt in der Beschreibung des Ablösens des Betons vom Stabstahl, so dass nur geringe oder keine Verbundspannungen an der Kontaktstelle übertragen werden können. Bei statischen Belastungen von Stahlbetonkonstruktionen reicht allein diese Modellierung aus. Bei gelöstem Verbund kommt der Spannungswellenfortpflanzung in der Simulation bei Reflektion, bei Transmission und bei Refraktion an der Kontaktfläche eine besondere Bedeutung zu (vgl. Abschnitt 3.1.2).

Als Basis für die in den folgenden Abschnitten erläuterten Bausteine des Verbundmodells dient die in Abbildung 7.25 schematisch illustrierte Gegenüberstellung von dem Verbundmechanismus mit den verwendeten Materialmodellen. Vereinfacht ist hier eine zweidimensionale Diskretisierung mit dem RGGP–Betonmodell, dem GRECON–Verbundelement **oder** dem Luftmodell, und dem BSt 500 S Element in der LAGRANGESchen–Betrachtungsweise dargestellt. Jedem Stahlknoten liegt ein zugehöriger Betonknoten gegenüber (S1 zu B1, etc.). Über die Relativverschiebungen werden die Verbundschubspannung  $\tau$  und die Verbundnormalspannung  $\sigma$  ermittelt. Dabei wird deutlich, dass das als Kontinuum abgebildete Verbundelement wegen der in Abschnitt 5.4.2 beschriebenen Konsolenbildung zur Verbundkraftübertragung als Elementhöhe (Abstand S1 zu B1) maximal die Rippenhöhe  $h_s$  aufweisen kann. Die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Simulation wird im Abschnitt 8.2.1.1 näher untersucht. Die konstitutiven Beziehungen im Verbundmodell setzen sich für die zeitlich inkrementelle Spannungsberechnung neben den Modellen für die Berechnung der Verbundspannungen auch aus den bekannten Modellen für den reinen Beton zusammen. Beispielsweise wird die Normalspannung zwischen zwei Verbundelementen aus dem konstitutiven Beziehungen des Betons beschrieben.

Gemäß dem Berechnungszyklus für Hydrocodes aus Abbildung 4.2 werden in den Knotenpunkten die aktuellen Verschiebungen ermittelt. Darauf bauen die wesentlichen Module des Modells auf:

1. Aus den globalen Knotenverschiebungen werden die **relativen Knotenverschiebungen** von S1 zu B1 gemäß Abbildung 7.25 für jeden Kontaktknoten bestimmt. Daraus lassen sich pro Verbundelement die aktuellen örtlich auftretenden **Verbundschubspannungen**  $\tau$  und **Verbundnormalspannungen**  $\sigma$  ermitteln.
2. Die **räumlich inkrementell ermittelten Spannungen** im Verbundelement ergeben sich neben den Verbundspannungen auch aus den bekannten konstitutiven Beziehungen für den reinen Beton.

3. Des Weiteren wird aus den Knotenverschiebungen die Volumenänderung und daraus die aktuelle Dichte bestimmt, mit der über die **poröse Zustandsgleichung** des reinen Betons der hydrostatische Druck  $p = -\sigma_{oct}$  bestimmt wird. Der hydrostatische Druck wird bei der inkrementellen Spannungsermittlung verwendet.
4. Die **Zunahme der Verbundfestigkeit** erfolgt über die **Verzerrungsrate**.
5. Aus dem aktuellen Verschiebungszustand entscheidet sich, ob noch Verbundspannungen übertragen werden können. Bei **zu großer Rissöffnung** ist dies nicht mehr möglich, so dass aus dem Verbundelement ein **Luftelement** wird. Dieser Prozess ist rekursiv.



**Abbildung 7.25:** Gegenüberstellung von Verbundmechanismus mit den verwendeten Materialmodellen für den Beton (RGGP-Modell), für den Verbund (GRECON-Verbundmodell **oder** Luftmodell) und für den Betonstahl (BSt 500 S Modell) bei sich lösendem Verbund

### 7.4.2 Ermittlung der örtlichen Verbundspannungen

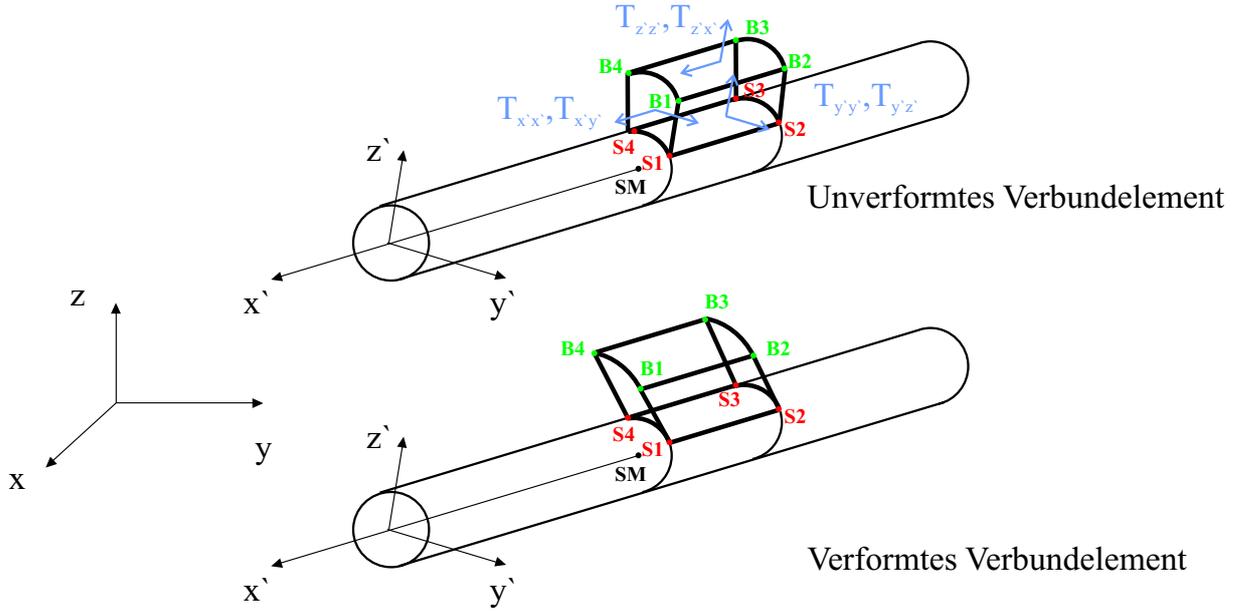
Zur Ermittlung der örtlichen Verbundspannungen wird auf die ausgiebigen experimentellen Ergebnisse von IDDA 1999 [109] eingegangen. Er untersuchte in Parameterstudien den Einfluss folgender Größen auf das Verbundtragverhalten:

- Stabstahldurchmesser,
- Betongüte,
- Querbewehrung und
- Verbundverhältnisse.

Sein Ziel war es, aus den Versuchsergebnissen geeignete Verbundspannungs–Schlupf–Beziehungen aufzustellen und diese mit Daten aus der Literatur (u.a. KEUSER 1985 [117], MALVAR 1992 [143], GAMBAROVA 1982 [69] oder CEB 1991 [39]) zu vergleichen und gegebenenfalls anzupassen. Da schon geringe Rissöffnungen den Verbund erheblich beeinträchtigen, entwickelte IDDA einen geeigneten vierparametrischen Ansatz, der die Einflüsse aus dem Schlupf  $\delta$ , der Rissöffnung  $w$ , den geometrischen Betonstahlparametern  $h_s$  und  $c_s$  (s.a. Tabelle 5.6) und der Betonfestigkeit  $f_c$  auf die Verbundspannungen berücksichtigt. Dieser Ansatz bildet die Basis für das in dieser Arbeit hergeleitete Verbundmodell GRECON.

IDDA verdeutlichte in seiner Arbeit, dass zur Verbundkraftübertragung in räumlichen Modellen die Kopplung der Beton- mit den Stahlknoten über Federelemente mit entsprechenden Verbundsteifigkeiten ausreichend ist. Dies ist in der Hydrocode–Umgebung mit AUTODYN nicht möglich. Es bedarf daher eines erweiterten Ansatzes in der LAGRANGE–Formulierung zur inkrementellen Spannungsermittlung mit räumlichen Kontinuumselementen, wie es in Abbildung 7.26 für ein Verbundelement schematisch illustriert ist.

Ausgehend von einem beliebig orientierten Bewehrungsstab mit den lokalen Koordinaten  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ , bei denen die Achse  $x'$  die Schwerpunktlage des Betonstahls repräsentiert, ist ein Verbundelement durch die 8 Knotenpunkte  $S1$  bis  $S4$  und  $B1$  bis  $B4$  gekennzeichnet. Gemäß Abbildung 4.3 werden in diesem Kontinuumselement die Verschiebungen  $\mathbf{u}_{i,j,k}$  an den Knoten und die dazugehörigen Spannungen  $\mathbf{T}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  im Elementmittelpunkt pro Zeitinkrement ausgewertet (vgl. Abbildung 4.3). In jedem Knoten ergeben sich 3 Verschiebungen, die exemplarisch für den Knoten  $S1$  in lokalen Verschiebungsänderungen mit  $\Delta u_{x'}^{S1}$ ,  $\Delta u_{y'}^{S1}$  und  $\Delta u_{z'}^{S1}$  ausgedrückt sind. Die lokalen Relativverschiebungen zwischen Beton und Bewehrungsstahl werden aus der Relation der Verschiebungsänderungen der Stahlknoten zu den Verschiebungsänderungen der Betonknoten bestimmt. Die Auswertungen sind entsprechend der lokalen Koordinatenrichtungen vorzeichenkonform. Anhand einer arithmetischen Mittelwertbildung aus den vier gegenübergestellten



**Abbildung 7.26:** Lokale Koordinaten  $(x', y', z')$  und Ansatz einer gegenseitigen Verschiebung der Beton- zu den Stahlknoten im räumlichen Kontinuumelement

Verbundknotenpaaren  $S1B1$  bis  $S4B4$  lassen sich die Spannungen im Verbundelement berechnen.

Ausgangspunkt der Relativverschiebungen ist jeweils der zugehörige Betonstahlmittelpunkt  $SM$  in einem Querschnitt. Wie in Abbildung 7.26 exemplarisch dargestellt ist, beziehen sich dann die Verschiebungsänderungen der Knoten  $S1$ ,  $B1$  und  $S4$ ,  $B4$  im Kontinuumelement auf diesen Stahlmittelpunkt  $SM$ .

Die Relativverschiebung in Richtung der lokalen Stabachse  $x'$  kennzeichnet den Schlupf  $\delta_{lang}$  (Abbildung 7.27). Er ist gleich der Differenz der Relativverschiebung  $\Delta u_{x'}^{S1}$  des Stahlknotens  $S1'$ , mit Bezug zum Stahlmittelpunkt  $SM$ , zur Relativverschiebung  $\Delta u_{x'}^{B1}$  des Betonknotens  $B1'$ , mit Bezug zum Stahlmittelpunkt  $SM$ , mit

$$\Delta u_{x'}^{S1B1} = \Delta u_{x'}^{B1} - \Delta u_{x'}^{S1} . \quad (7.40)$$

Somit ergibt sich aus dem Mittelwert der 4 Relativverschiebungen in Stabrichtung  $x'$  der Schlupf  $\delta_{lang}$  eines Verbundelementes mit

$$\delta_{lang} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \Delta u_{x'}^{SiBi} , \quad (7.41)$$

wobei  $\delta_{lang}$  ein Ausgangswert für die Verbundspannungsberechnung ist.

Die Relativverschiebung senkrecht zur lokalen Stabachse  $x'$  kennzeichnet zum einen den Schlupf  $\delta_{rot}$  rotatorisch um die Schwerpunktschwerachse des Betonstahls und zum anderen die Rissöffnung  $w$ .

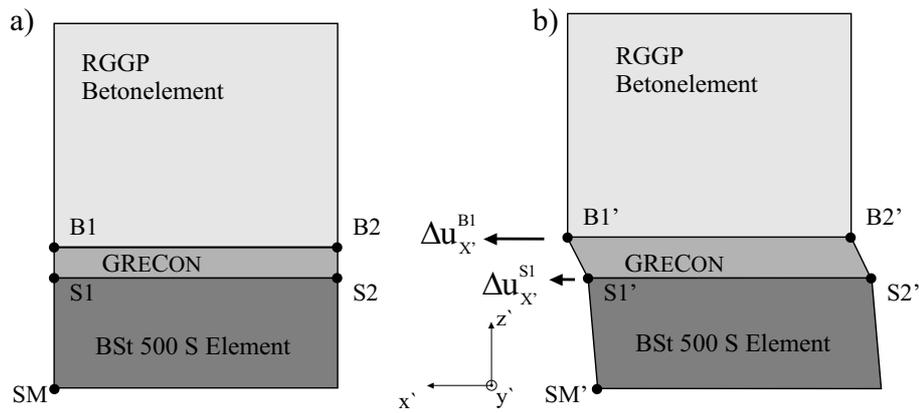


Abbildung 7.27: Schlupf in Stablängsrichtung zwischen Beton- und Stahlknoten: a) Ausgangszustand, b) Verschiebungszustand

Die Ermittlung der Relativverschiebungen von  $\delta_{rot}$  und von  $w$  werden anhand der Verschiebungen von  $S1$  und  $B1$  aus Abbildung 7.28 erläutert.

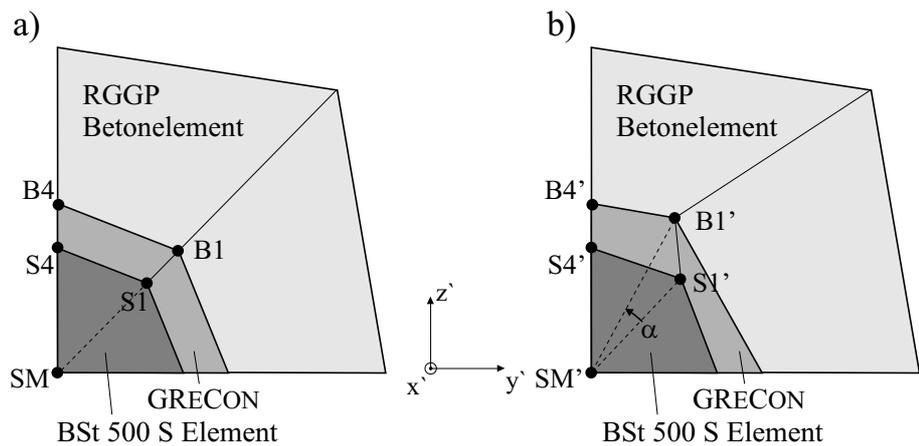


Abbildung 7.28: Verschiebung zum rotatorischen Schlupf und zur Rissöffnung zwischen Beton- und Stahlknoten: a) Ausgangszustand, b) Verschiebungszustand

Im Ausgangszustand liegen die Verbindungen  $SMS1$  und  $SMB1$  auf einer Geraden. Nachdem sich durch die Verschiebung des Stahlknotens  $S1'$  mit  $\Delta u_{y'}^{S1}$  und  $\Delta u_{z'}^{S1}$  sowie durch die Verschiebung des Betonknotens  $B1'$  mit  $\Delta u_{y'}^{B1}$  und  $\Delta u_{z'}^{B1}$  ein Verschiebungszustand eingestellt hat, ergibt sich der rotatorische Schlupf  $\delta_{rot}^{S1'B1'}$  aus der Kreisbogenlänge über die Winkeländerung  $\alpha$  (in [rad]) zu

$$\delta_{rot}^{S1'B1'} = r\alpha \quad . \quad (7.42)$$

Der Radius  $r$  ist die Summe der Längen  $SMS1'$  und der Verbundelementdicke im Ausgangszustand. Die Relativverschiebung senkrecht zur Stabrichtung charakterisiert die Rissöffnung  $w^{S1'B1'}/2$ , die sich dann aus der Differenz der Längen  $SMB1'$  zu  $SMS1'$  ergibt.

Aus den Mittelwerten der 4 Verschiebungen rotatorisch um die Schwerpunktsachse  $x'$  des Betonstahls und der 4 Verschiebungen senkrecht zur Stabrichtung werden der rotatorische Schlupf eines Verbundelementes

$$\delta_{rot} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \delta_{rot}^{S_i' B_i'} \quad (7.43)$$

und die Rissöffnung eines Verbundelementes

$$w/2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 w^{S_i' B_i'} \quad (7.44)$$

ermittelt, wobei  $\delta_{rot}$  und  $w$  Ausgangswerte für die Verbundspannungsberechnung sind.

Mit Bezug auf Abbildung 7.26 werden 3 charakteristische Verbundspannungen zur örtlichen Verbundkraftübertragung bestimmt: Die Verbundschubspannungen  $T_{x'y'}$  und  $T_{y'z'}$ , sowie die Verbundnormalspannung  $T_{z'z'}$ . Hierzu wird der von IDDA entwickelte vierparametrische Ansatz mit den 8 aus einer Dimensionsanalyse bestimmten Freiwerten  $a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1$  und  $d_1$  verwendet.

Für die Verbundschubspannungen gilt:

$$T_{x'y'} = \left[ a_0 \cdot \left( \frac{\delta_{lang}}{c_s} \right)^{b_0} \cdot e \left( c_0 \cdot \frac{\delta_{lang}}{c_s} + d_0 \cdot \sqrt{\frac{w}{h_s}} \right) \right] \cdot f_c \quad , \quad (7.45)$$

$$T_{y'z'} = \left[ a_0 \cdot \left( \frac{\delta_{rot}}{c_s} \right)^{b_0} \cdot e \left( c_0 \cdot \frac{\delta_{rot}}{c_s} + d_0 \cdot \sqrt{\frac{w}{h_s}} \right) \right] \cdot f_c \quad . \quad (7.46)$$

Die Freiwerte sind  $a_0 = +1.9$ ,  $b_0 = +0.5$ ,  $c_0 = -2.3$  und  $d_0 = -1.4$ .

Die maximale Übertragung einer Verbundschubspannung liegt vor, wenn das Verhältnis des Schlupfs zum Rippenabstand  $\frac{\delta}{c_s} = 0.22$  und das Verhältnis der Rissöffnung zur Rippenhöhe  $\sqrt{\frac{w}{h_s}} = 0.00$  beträgt. Daraus folgt für die Verbundschubspannung bezogen auf die Betondruckfestigkeit ein Maximum von  $\frac{T_{x'y'}}{f_c} = \frac{T_{y'z'}}{f_c} = 0.5373$ .

Für die Verbundnormalspannung gilt:

$$T_{z'z'} = \left[ a_1 \cdot \left( \frac{\delta}{c_s} \right)^{b_1} \cdot e \left( c_1 \cdot \frac{\delta}{c_s} + d_1 \cdot \sqrt{\frac{w}{h_s}} \right) \right] \cdot f_c \quad . \quad (7.47)$$

Die Freiwerte sind  $a_1 = +2.3$ ,  $b_1 = +0.5$ ,  $c_1 = -1.3$  und  $d_1 = -1.4$ .

Die maximale Übertragung einer Verbundnormalspannung liegt vor, wenn das Verhältnis des Schlupfs zum Rippenabstand  $\frac{\delta}{c_s} = 0.38$  und das Verhältnis der Rissöffnung zur Rippenhöhe

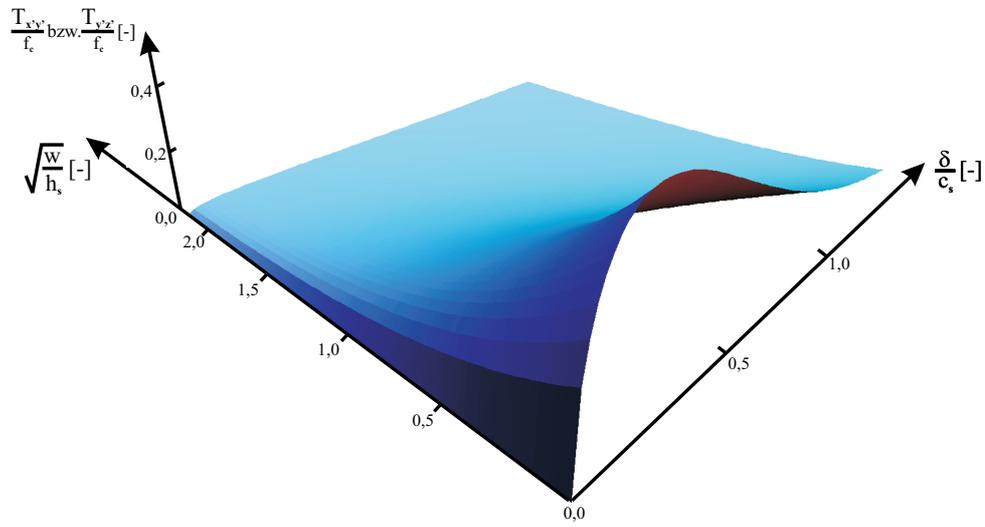


Abbildung 7.29: Verbund Schubspannungsbeziehung nach IDDA [109]: Funktionaler Zusammenhang

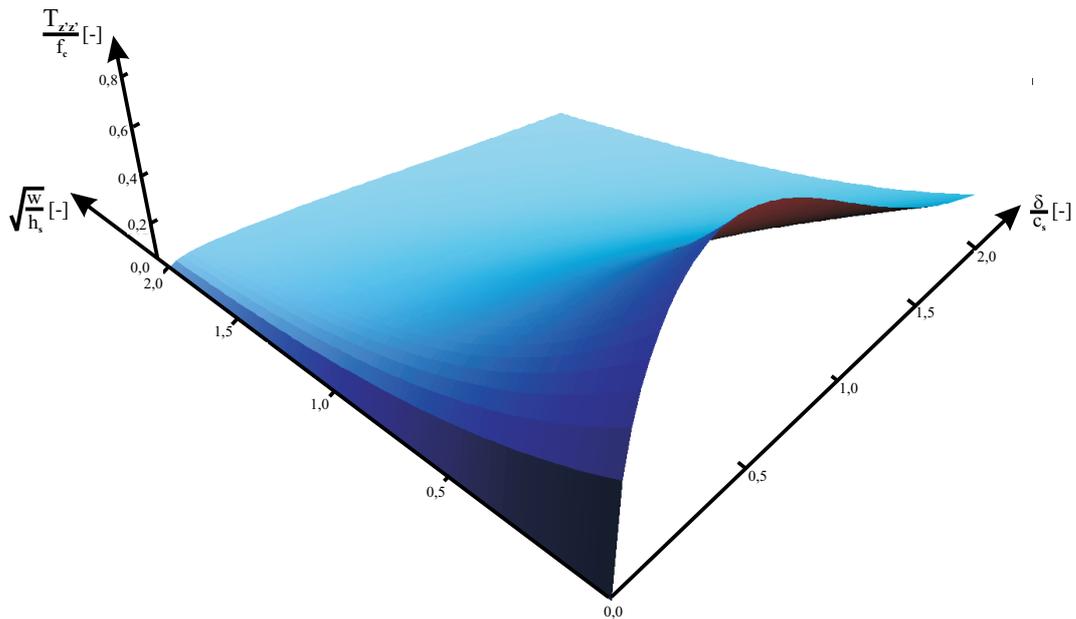


Abbildung 7.30: Verbund Normalspannungsbeziehung nach IDDA [109]: Funktionaler Zusammenhang

$\sqrt{\frac{w}{h_s}} = 0.00$  beträgt. Daraus folgt für die Verbundnormalspannung bezogen auf die Betondruckfestigkeit ein Maximum von  $\frac{T_{z'z'}}{f_c} = 0.8651$ .

Gemäß Abbildung 7.26 sind sechs unabhängige Spannungskomponenten im Verbundelement in jedem Zeitinkrement zu bestimmen. Neben den drei Verbundspannungskomponenten  $T_{z'z'}$ ,

$T_{x'y'}$  und  $T_{y'z'}$  die Spannungen  $T_{x'x'}$ ,  $T_{y'y'}$  und  $T_{x'z'}$ . Letztere drei fehlen noch. Aus der lokalen Betrachtung wird deutlich, dass die Eigenschaften der fehlenden Spannungen allein von dem Betontragverhalten bestimmt werden. Damit gelten für die drei fehlenden Komponenten die konstitutiven Beziehungen für den Beton aus Gleichung (7.6) mit

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = 2G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}(t)) \mathbf{I} + \dot{\mathbf{E}}(t) \right], \quad (7.48)$$

wobei alle Spannungskomponenten in den lokalen Koordinaten  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  vorliegen. Da die Richtung der Betonstabschwerachse  $x'$  zum globalen Koordinatensystem  $x$ ,  $y$  und  $z$  bekannt ist, werden die Spannungen für die weitere Berechnung in globale Spannungskomponenten transformiert.

### 7.4.3 Zustandsgleichung des Verbundelementes

In Abschnitt 6.2 wurde die Notwendigkeit der Zustandsgleichung bei der Materialmodellierung in der Hydrocode-Umgebung deutlich gemacht. Auch die inkrementelle Spannungsberechnung aus dem vorangegangenen Abschnitt greift auf den aus der Zustandsgleichung ermittelten hydrostatischen Druck gemäß des Berechnungszyklusses aus Abbildung 4.2 zurück. Allerdings beeinflusst der hydrostatische Druck nicht die drei wichtigen Verbundspannungskomponenten  $T_{z'z'}$ ,  $T_{x'y'}$  und  $T_{y'z'}$ .

Da ein Verbundelement ein verschmiertes Element im Verbundbereich ist (vgl. Gegenüberstellung Verbundmechanismus mit Modell in Abbildung 7.25), das die alleinige Aufgabe der örtlichen Verbundkraftübertragung hat, beruht die Verwendung der gleichen porösen Zustandsgleichung wie für das Betonmodell aus Tabelle A.4 im Anhang A allein aus dem Verhältnis des Betonanteils zum Stahlanteil innerhalb des repräsentativen Kontinuumelements. Bei einer minimal gewählten Verbundelementdicke in der Größe der Rippenhöhe  $h_S$  entspricht der maximale Stahlanteil innerhalb des verschmierten Verbundelementbereichs nahezu der in Tabelle 5.6 angegebenen bezogenen Rippenfläche  $f_R$  von maximal 5.6%. Damit lässt sich begründen, dass die EoS des porösen Betons ebenso dem Verbundelement zugewiesen werden kann.

### 7.4.4 Verzerrungsratenabhängigkeit

Wie im Abschnitt 5.4.3 beschrieben, zeigen die Versuchsergebnisse von HJORTH und VOS & REINHARDT deutlich den Zuwachs der Verbundfestigkeit in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate. VOS & REINHARDT gaben mit Gleichung (5.7) eine Näherungsfunktion an, die diese Festigkeitssteigerung mathematisch beschreibt. Allerdings führt dieser Ansatz insbesondere bei den durch Detonationen auftretenden Verzerrungsraten im hochdynamischen Bereich von über  $\dot{\epsilon} > 1\frac{1}{5}$  (vgl. Tabelle 1.1) zu einer deutlichen Überschätzung der Festigkeitssteigerung (s.a. Abbildung 7.31).

Eine wichtige Bemerkung entstammt der Arbeit von HJORTH, der die Zunahme der Verbundfestigkeit direkt auf die Festigkeitszunahme des Betons zurückführt. Diese Angaben beeinflussen entscheidend die Wahl der eigenen Funktion. Hier wird auf die bekannte hyperbolische Funktion aus Gleichung (7.18) für die Festigkeitssteigerung bei Stahlfaserbeton aus Abschnitt 7.2.5 zurückgegriffen und deren Parameter entsprechend der experimentellen Daten von HJORTH und dem Näherungsansatz VOS & REINHARDT in niederen Ratenbereichen gewählt. Das führt dazu, dass der Parameter  $F_m$  einem ähnlichen Grenzwert bei hohen Verzerrungsraten  $\dot{\epsilon} \rightarrow \infty$  wie bei der Druckfestigkeitssteigerung von Stahlfaserbeton zustrebt.

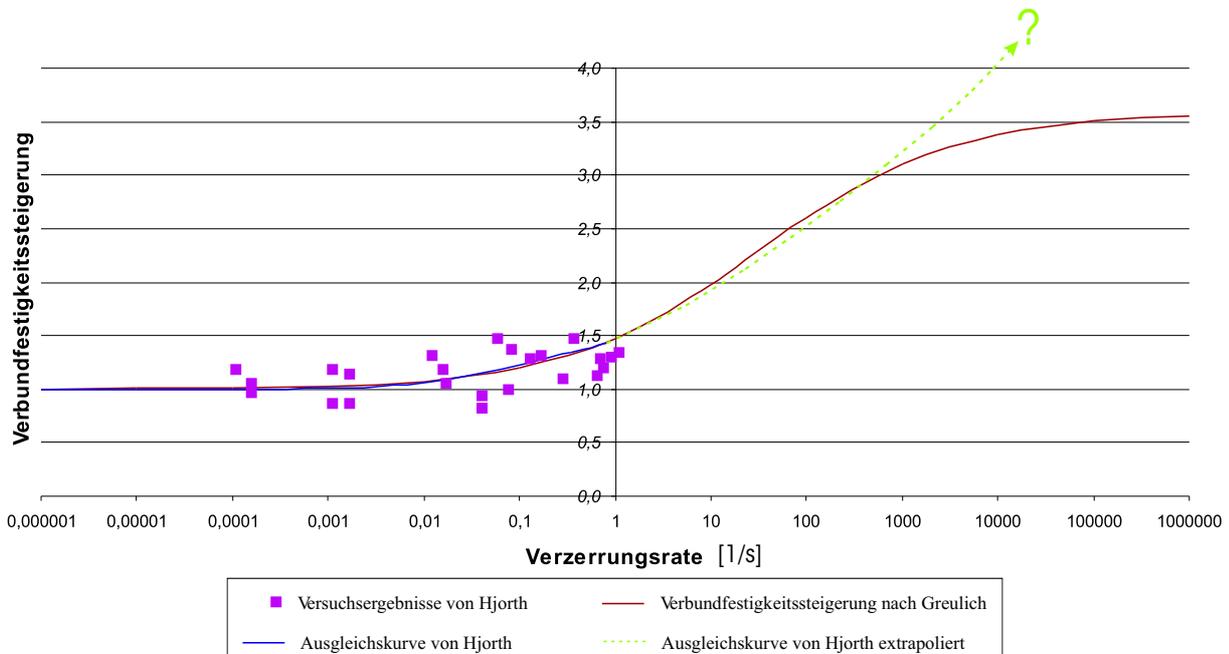
HJORTH stellte fest, dass sich die Verbundfestigkeitssteigerung  $x_s(\dot{\epsilon})$  linear auf die Verbundspannungen aus den Gleichungen (7.45) bis (7.47) auswirkt. Diese gleichmäßige Zunahme der Verbundspannungen durch  $x_s(\dot{\epsilon})$  ist über den gesamten Anwendungsbereich gültig postuliert. Dies führt zu dynamischen Verbundspannungen im Verbundelement:

$$T_{x'y'}^{dyn} = T_{x'y'} \cdot x_s(\dot{\epsilon}) \quad , \quad (7.49)$$

$$T_{y'z'}^{dyn} = T_{y'z'} \cdot x_s(\dot{\epsilon}) \quad , \quad (7.50)$$

$$T_{z'z'}^{dyn} = T_{z'z'} \cdot x_s(\dot{\epsilon}) \quad . \quad (7.51)$$

Die in Tabelle 7.12 angegebene dimensionslose Verzerrungsrate  $\dot{\epsilon}^*$  bezieht sich auf eine Referenz-Verzerrungsrate  $\dot{\epsilon}_0 = 1.0 \text{ s}^{-1}$ .



**Abbildung 7.31:** Steigerung der Verbundfestigkeit in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate

**Tabelle 7.12:** Konstanten der hyperbolischen Funktion zur Verbundfestigkeitssteigerung in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate  $\dot{\varepsilon}$ 

	Konstanten der hyperbolischen Funktion			
	$f(\dot{\varepsilon}) = \left\{ \left[ \tanh((\log(\dot{\varepsilon}^*) - W_x) \cdot S) \right] \cdot \left[ \frac{F_m}{W_y} - 1 \right] + 1 \right\} \cdot W_y$			
	$F_m$	$W_x$	$W_y$	$S$
<b>Verbund</b> ( $x_s(\dot{\varepsilon})$ )	3.58	2.00	2.29	0.40

#### 7.4.5 Umschalten der Materialmodelle bei Rissöffnung oder -schließung

Rissöffnung bedeutet das Lösen des Betons vom Stabstahl. Bei zu großer Rissöffnung kann bei gleichzeitigem Schlupf keine Konsolenbildung durch den Kontakt der Betonstahlrippe mit dem Beton mehr auftreten (s. Abbildung 5.19). Lediglich Reibungskräfte können übertragen werden, sobald eine Rissöffnung  $w$  vorliegt, die mindestens gleich der Rippenhöhe  $h_s$  ist (s. Abbildung 5.21). Der gelöste Verbund hat einen entscheidenden Einfluss auf die Spannungswellenfortpflanzung in inhomogenen Medien (vgl. Abschnitt 3.1.2).

Die Gleichungen (7.45) bis (7.47) zeigen, dass auch bei einem hohen Verhältnis des Schlupfs zum Rippenabstand in Stabslängsrichtung von  $\frac{\delta}{c_s} = 2.00$  und bei einem hohen Verhältnis der Rissöffnung zur Rippenhöhe von  $\sqrt{\frac{w}{h_s}} = 2.00$  geringfügig Verbundschubspannungen von  $\frac{\tau}{f_c} = 0.0016$  und Verbundnormalspannungen von  $\frac{\sigma}{f_c} = 0.0147$  vorliegen. Ein Stabstahl mit dem Nenndurchmesser von 16 mm ist also auf Basis dieser Beziehungen noch in der Lage, bei einer absoluten Rissöffnung von  $w = 2.00^2 \cdot h_s = 2.00^2 \cdot 1.04 \text{ mm} = 4.16 \text{ mm}$  geringfügig Kräfte zu übertragen.

An dieser Stelle wird festgelegt, dass bei  $\frac{1}{10}$  der maximalen Verbundspannung ( $\frac{1}{10} \cdot \frac{\tau}{f_c} = 0.0537$ ) die Rissöffnung vorliegt, bei der die Verbundspannungsübertragung vollständig vernachlässigt wird. Diese Grenze wird ungefähr beim 2.6fachen Verhältnis der Rissöffnung  $w$  zur Rippenhöhe  $h_s$  erreicht. Bei  $\frac{w}{h_s} = 2.60$  und  $\frac{\delta}{c_s} = 0.22$  beträgt das Verhältnis der Verbundschubspannung zur Betondruckfestigkeit  $\frac{\tau}{f_c} = 0.0562$ . Die Verbundspannungen aus den Gleichungen (7.45) bis (7.47) werden zu Null gesetzt (Abbildung 7.25 unten).

Dieses Verhältnis der Rissöffnung zur Rippenhöhe von  $\frac{w}{h_s} = 2.60$  ist entscheidend, mit welcher Dichte in dem Verbundelement gerechnet. Bei entsprechender Rissöffnung oder entsprechendem Schlupf wird dann dem Verbundelement nicht mehr die Betondichte sondern die Luftdichte zu Grunde gelegt, was sich wesentlich auf die Wellenfortpflanzung auswirkt.

Wichtig ist auch, dass dieser Prozess rekursiv ist. Sollten aufgrund einer Belastungsumkehr die Relativverschiebungen zu einer Rissschließung führen, dann sind Übertragungen von Verbundspannungen wieder möglich und die aktuelle Dichte ergibt sich aus dem aktuellen Verschiebungszustand des Verbundelementes gekoppelt mit der porösen Betonzustandsgleichung.

### 7.4.6 Programmtechnische Umsetzung – Algorithmus

Die programmtechnische Umsetzung der oben beschriebenen Lösung für das neue Verbundelement GRECON ist übersichtlich im Algorithmusbaum in Abbildung 7.32 dargestellt.

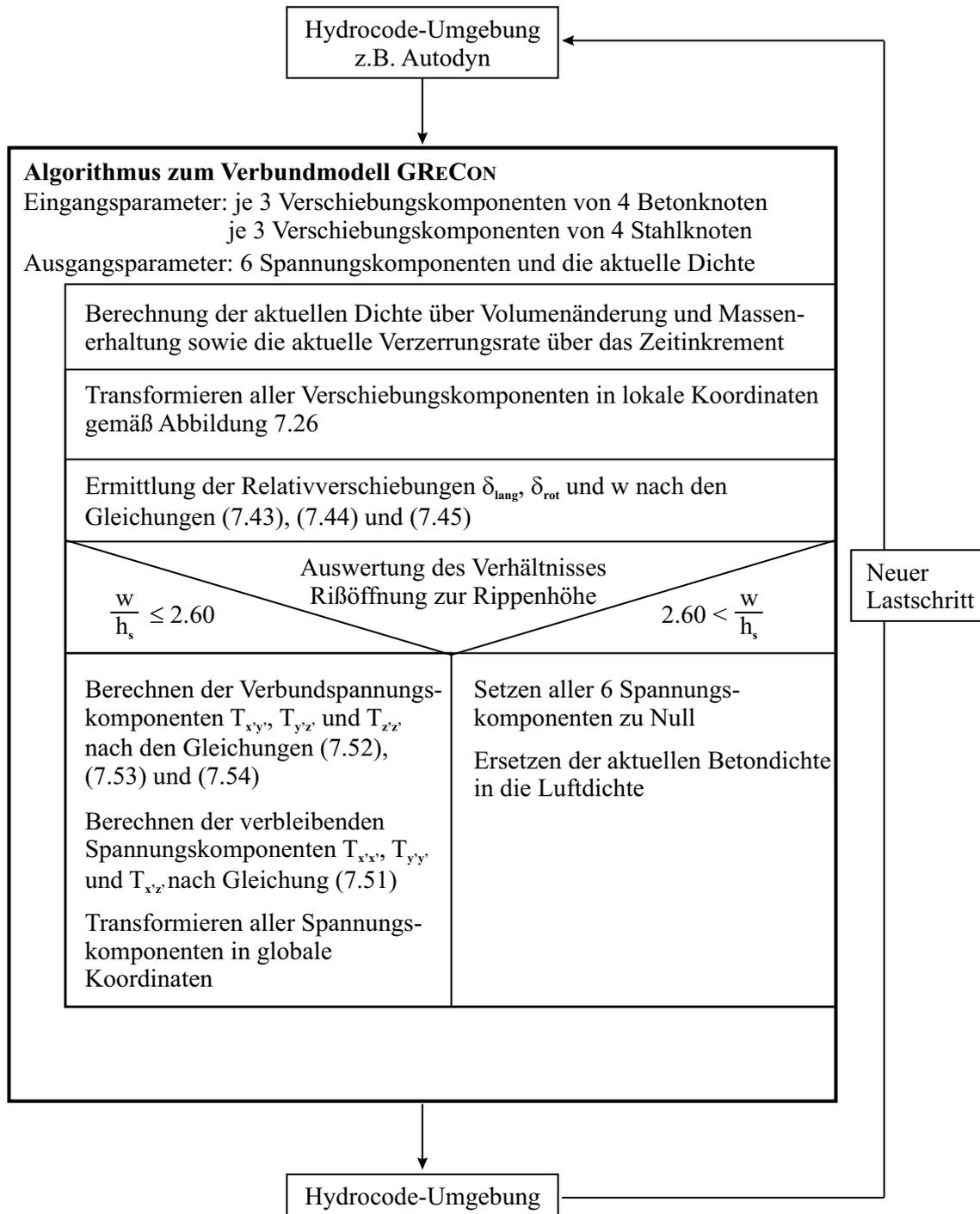


Abbildung 7.32: Algorithmus der Routine für das Verbundelement GRECON

1. Die Eingangsparameter für das Verbundelement GRECON sind die Verschiebungskomponenten aller 8 Knoten des Verbundelementes  $S1$  bis  $S4$  und  $B1$  bis  $B4$  in globalen Koordinatenrichtungen.
2. Durch die Verschiebungen ergibt sich eine Volumenänderung des Verbundelementes. Über die Massenerhaltung wird die aktuelle Betondichte als Eingangsparameter der porösen Betonzustandsgleichung ermittelt.
3. Mit Hilfe des Zeitinkrementes und der Verschiebungsänderungen in diesem Zeitinkrement lässt sich die aktuelle Verzerrungsrate  $\dot{\epsilon}$  bestimmen.
4. Gemäß Abbildung 7.26 werden auf Basis der bekannten Lage der Schwerachse des Betonstahls die Verschiebungskomponenten in lokale Koordinaten transformiert.
5. Die Relativverschiebungen werden nach den Gleichungen (7.41) bis (7.44) berechnet.
6. Die Auswertung des Verhältnisses Rissöffnung zur Rippenhöhe  $\frac{w}{h_s}$  entscheidet darüber, ob die Verbundspannungskomponenten und die verbleibenden Komponenten gemäß den Gleichungen (7.48) bis (7.51) ausgewertet und in die globalen Spannungskomponenten transformiert werden oder ob alle 6 Verbundspannungskomponenten zu Null gesetzt werden und die Dichte des Verbundelementes gleich der Dichte der Luft wird.
7. Die Ausgangsparameter sind die 6 modifizierten Spannungskomponenten in globalen Koordinaten und die aktuelle Dichte des Verbundelementes.



## Kapitel 8

# Numerische Verifikation und durchgeführte Untersuchungen

---

*Die numerische Verifikation der Materialmodelle für den Stahlfaserbeton und den Stahlbetonverbund sowie deren Anwendbarkeit unter hochdynamischen Belastungen in der Hydrocode-Umgebung stehen im Vordergrund dieses Kapitels, das diese Arbeit vervollständigt und abschließt. Zur Verifikation erfolgen Studien anhand von ausgewählten Experimenten. Die Untersuchungen enden zum einen mit einer Gegenüberstellung von numerischen Ergebnissen mit Ergebnissen aus speziell durchgeführten Versuchen von angesprengten unbewehrten und bewehrten (Stahlfaser-) Betonplatten und zum anderen mit Studien zum variierenden Stahlfasergehalt, die den sinnvollen Einsatz von stahlfaserverstärkten Betonkonstruktionen im Schutzbau verdeutlichen.*

---

### 8.1 Zum Stahlfaserbeton

#### 8.1.1 Numerische Verifikation des Stahlfaserbetonmodells

Im Vorfeld der numerischen Untersuchungen wird das Stahlfaserbetonmodell anhand von ausgewählten Versuchen verifiziert und deren wichtigste Ergebnisse vorgestellt. Die Studien verdeutlichen, dass das Modell bei verschiedenartigen Beanspruchungen eine weitgehend gute Übereinstimmung mit vorhandenen Versuchsergebnissen aufweist, wie dies bereits in Abschnitt 7.1.2 gefordert wurde.

#### 8.1.2 Verifikation des Stoffgesetzes

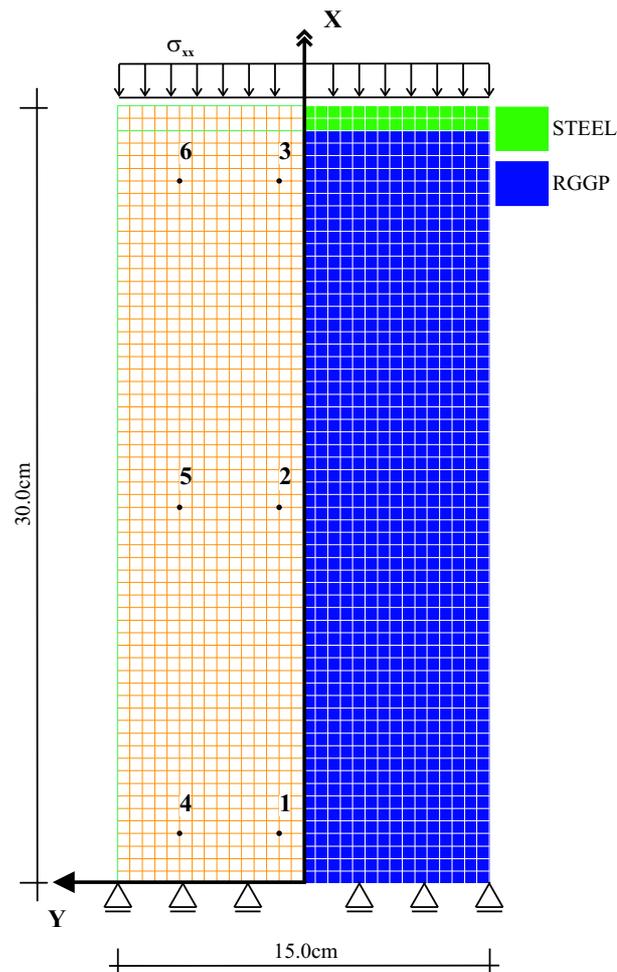
Zunächst wird der Versuch zur Bestimmung der Zylinderdruckfestigkeit nachgerechnet. Die Belastung ist quasistatisch, so dass keine Ratenabhängigkeit die Festigkeitseigenschaften beeinflusst. Die Studie umfasst zwei wesentliche Ziele:

1. Die Belastung wird über die einachsige Druckfestigkeit hinaus sukzessive gesteigert. Dabei wird verdeutlicht, dass bei einem räumlichen Spannungszustand das isotrope Kontinuumschädigungsmodell beim Erreichen der Bruchfläche korrekt einsetzt.

2. Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen aus Abbildung 5.2 können für beliebige Stahlfasergehalte mit der numerischen Simulation wiedergespiegelt werden.

Die Abmessungen des Stahlfaserbetonzylinders betragen gemäß DIN 1048 in der Höhe 30.0 cm und im Durchmesser 15.0 cm. Die Belastung wird durch eine aufgebrachte Druckspannung über eine Stahlplatte in den Prüfkörper eingeleitet und sukzessiv bis zum Versagen gesteigert. Am unteren Rand ist der Zylinder in vertikaler Richtung gelagert, so dass die Verschiebung in dieser Richtung unterbunden ist. Der Versuch wird für den reinen Beton und für den Stahlfaserbeton mit den Fasergehalten von 0.6 Vol-%, von 1.2 Vol-% sowie von 1.9 Vol-% nach den Versuchsdaten aus Abbildung 5.2 (SCHNÜTGEN 1981 [188]) wiederholt durchgeführt.

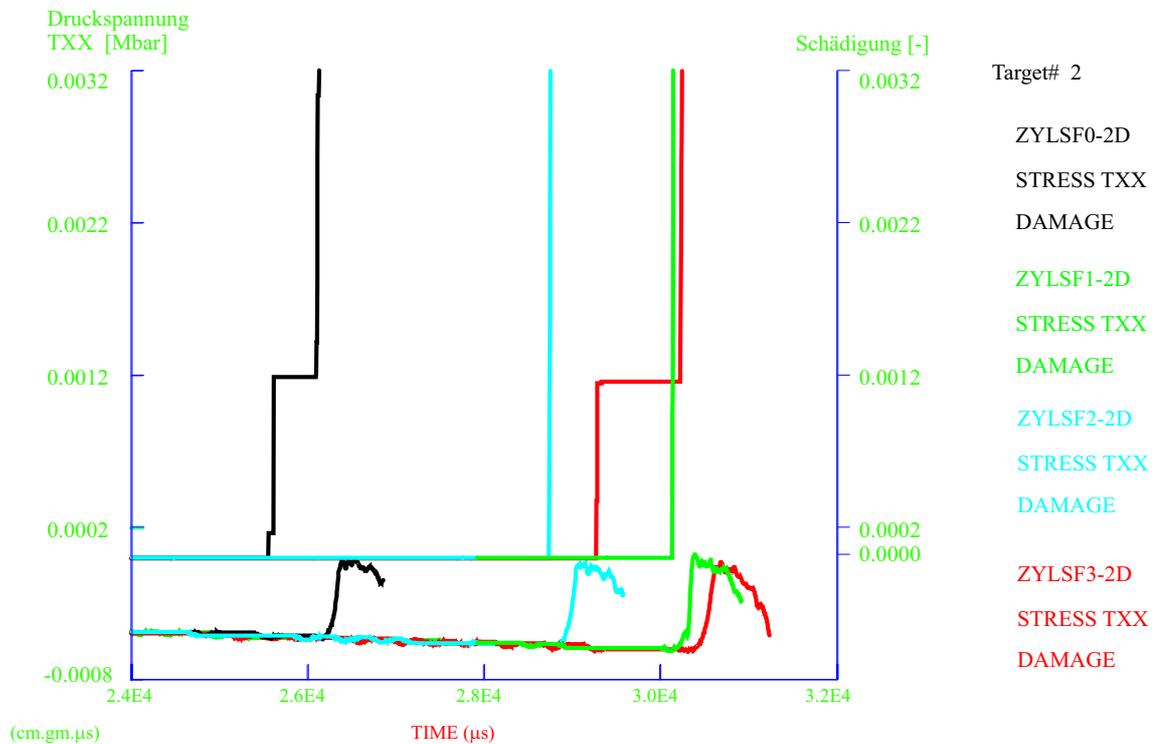
In AUTODYN lässt sich die Rotationssymmetrie des Versuchsaufbaus entsprechend ausnutzen, so dass eine zweidimensionale Beschreibung mit der Rotationsachse  $x$  um die Schwerelinie des Zylinders ausreicht (Abbildung 8.1). Sowohl die Elemente des Stahls (Steel-Modell) als auch die Elemente des Betons (RGGP-Modell) werden mit einer LAGRANGE-Diskretisierung



**Abbildung 8.1:** Diskretisierung des einachsigen Zylinderdruckfestigkeitsversuchs in AUTODYN

abgebildet. Die Materialdaten für den Stahlfaserbeton sind gemäß der im Abschnitt 7.2 eingeführten konstitutiven Gleichungen für verschiedene Stahlfasergehalte ermittelt (s.a. Tabellen 7.1, 7.2, 7.4, 7.6, 7.7). Die Größe der Kontinuums-elemente wurde sukzessive verkleinert: 2.5cm/2.5cm, 1.5cm/1.5cm, 0.75cm/0.75cm, 0.5cm/0.5cm, 0.25cm/0.25cm. Es wurde für diese Konvergenzstudie die Druckspannung  $T_{xx}$  ausgewertet, da diese Größe mit den Versuchsdaten der Druckspannungs–Stauchungs–Beziehungen von SCHNÜTGEN 1981 [188]) vergleichbar ist. Die Abweichung der Druckspannung bei der Netzdichte von 0.25cm zu einer Netzdichte von 0.5cm lag bei 3%. Eine weitere Verkleinerung der Elementgröße ist daher nicht notwendig. Die Auswertungen erfolgen in den 6 in Abbildung 8.1 eingetragenen Messpunkten, hier dargestellt mit quadratischen Elementen von 0.5cm Länge.

Abbildung 8.2 zeigt über die Zeitachse den Vergleich von Druckspannung  $T_{xx}$  zur zugehörigen Schädigungsvariablen  $D$  im Auswertepunkt 2.



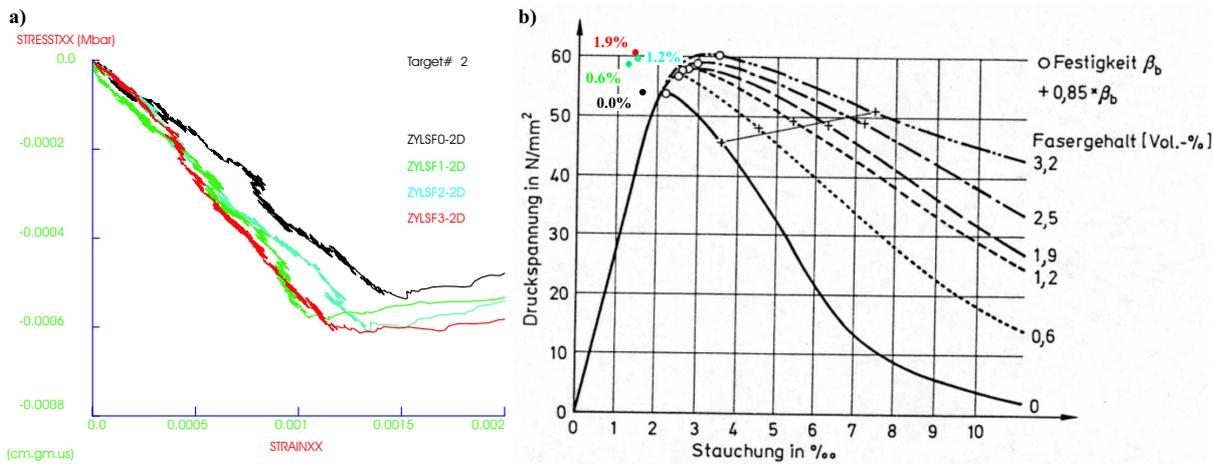
**Abbildung 8.2:** Zyylinderprobe, Vergleich von Druckspannung und Schädigung über die Zeitachse

Unterhalb der horizontalen Nulllinie ist über die Zeit die Zunahme der Druckspannung (negativ) bei stetiger Laststeigerung abgebildet (linke Ordinate). Sie stellt die einaxiale Druckspannung  $\sigma = T_{xx}$  dar. Die im Element vorliegende einaxiale Druckspannung nimmt genau zu dem Zeitpunkt rapide ab, wenn mit dem neuen dreidimensionalen Werkstoffmodell eine Schädigung (rechte Ordinate) ermittelt wird. Es wird deutlich, dass mit zunehmendem Stahlfasergehalt das Versagen erst bei einer größeren Druckspannung einsetzt.

Die vollständigen Druckspannungs–Stauchungs–Beziehungen sind für die verschiedenen Stahlfasergehalte bis zum Einsetzen der Schädigung in Abbildung 8.3 dargestellt. Dabei wird deutlich, dass die maximalen Druckspannungen aus der numerischen Simulation gut mit den Versuchsdaten von SCHNÜTGEN 1981 [188] übereinstimmen (s.a. Tabelle 8.1). Die zur maximalen Spannung zugehörige Stauchung ist kleiner als die aus dem Versuch, was auf verschiedene Steifigkeiten und Anfangsdichten zurück zu führen ist. Diese Materialparameter liegen nicht vor und wurden durch die eigenen Ausgangsdaten aus Abschnitt 7.2 ersetzt, was diese Diskrepanz erklärt.

**Tabelle 8.1:** Gegenüberstellung von der maximalen Druckspannung mit den zugehörigen Stauchungen aus der numerischen Simulation und den Versuchsdaten für verschiedene Stahlfasergehalte

Name	Fasergehalt	maximale Druckspannung			zugehörige Stauchung		
		AUTODYN	Versuch	Abweichung	AUTODYN	Versuch	Abweichung
	[Vol-%]	[MPa]	[MPa]	[%]	[‰]	[‰]	[%]
ZYLSF0	0.0	53.80	53.60	0.38	1.51	2.21	-31.67
ZYLSF1	0.6	58.00	56.67	2.35	1.15	2.54	-54.72
ZYLSF2	1.2	59.26	57.62	2.85	1.37	2.58	-46.90
ZYLSF3	1.9	61.51	58.41	5.31	1.35	2.79	-51.61



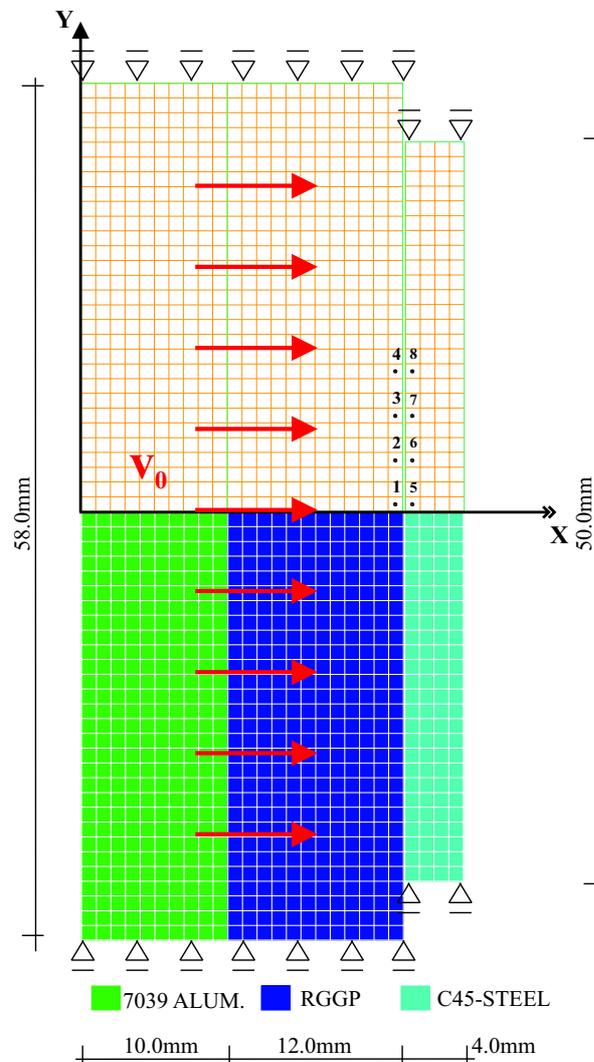
**Abbildung 8.3:** Zylinderdruckversuch, a) Druckspannungs–Stauchungs–Beziehungen aus AUTODYN, b) Maximale Druckspannung mit zugehöriger Stauchung eingetragen in statische Versuchsergebnisse

Die aus den Experimenten ersichtliche typische Abnahme der Spannung nach dem Maximum im Druckspannungs–Stauchungs–Diagramm bis zur Bruchverzerrung kann wegen der kraftgesteuerten Lasteinleitung in der Berechnung nicht simuliert werden.

### 8.1.3 Verifikation am Modell des Flyer–Plate–Impact Tests

Bei der Verifikation am Modell des inversen Flyer–Plate–Impact Tests handelt es sich um die Nachberechnung des im Abschnitt 1.2.3 in Abbildung 1.5 dargestellten Versuchsaufbaus und des

dazu dokumentierten Versuchs im Anhang A zur Bestimmung der HUGONIOT-Spannungen im Beton. Der in der Probe vorliegende dreidimensionale Spannungszustand hängt entscheidend von der aufgebrachten Belastungsgeschwindigkeit ab. Das Ziel dieser Studie ist, den planaren Impact mit dem neuen Werkstoffmodell unter Berücksichtigung der speziell aus diesen Versuchen bestimmten Werkstoffparametern abzubilden. Die Abmessungen der scheibenförmigen Betonproben betragen im Durchmesser 58 mm und in der Dicke  $12.00 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm}$ . Die Betonscheibe ist auf einen Aluminiumträger mit einer Dicke von  $10.00 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm}$  befestigt. Das ebenfalls scheibenförmige Zielobjekt aus C45-Stahl weist einen Durchmesser von 50 mm und eine Dicke von  $3.98 \text{ mm} \pm 0.02 \text{ mm}$  auf. Der Versuchskörper wird durch das Beschleunigungsrohr beim Auftreffen seitlich stabil gehalten, so dass für die numerische Simulation die vertikalen Lagerbedingungen mit der Unterdrückung der Verschiebungen in  $y$ -Richtung eingeführt wurden (Abbildung 8.4). Es werden die vier verschiedenen Auftreffgeschwindigkeiten  $v_0$  der Platten wie im Versuch untersucht.



**Abbildung 8.4:** Diskretisierung des inversen Flyer-Plate-Impact Tests in AUTODYN

Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie erfolgt die numerische Simulation in AUTODYN entsprechend der in Abbildung 8.4 dargestellten Diskretisierung im zweidimensionalen Modell. Sowohl die Elemente des Aluminiums (7039 Aluminium-Modell), die Elemente des Betons (RGGP-Modell) als auch die Elemente des Stahls (C45-Stahlmodell) werden mit einer LAGRANGE-Diskretisierung abgebildet. Die in dem Simulationsmodell dargestellte Netzgröße mit quadratischen Elementen von 1mm Länge (Abbildung 8.4) ist das Resultat einer Netzstudie, bei der die Elementlänge bis zu 0.5mm verkleinert wurde. Eine feinere Elementierung als 1mm Länge führte zu keiner wesentlichen Änderung der ausgewerteten Daten in Tabelle 8.2.

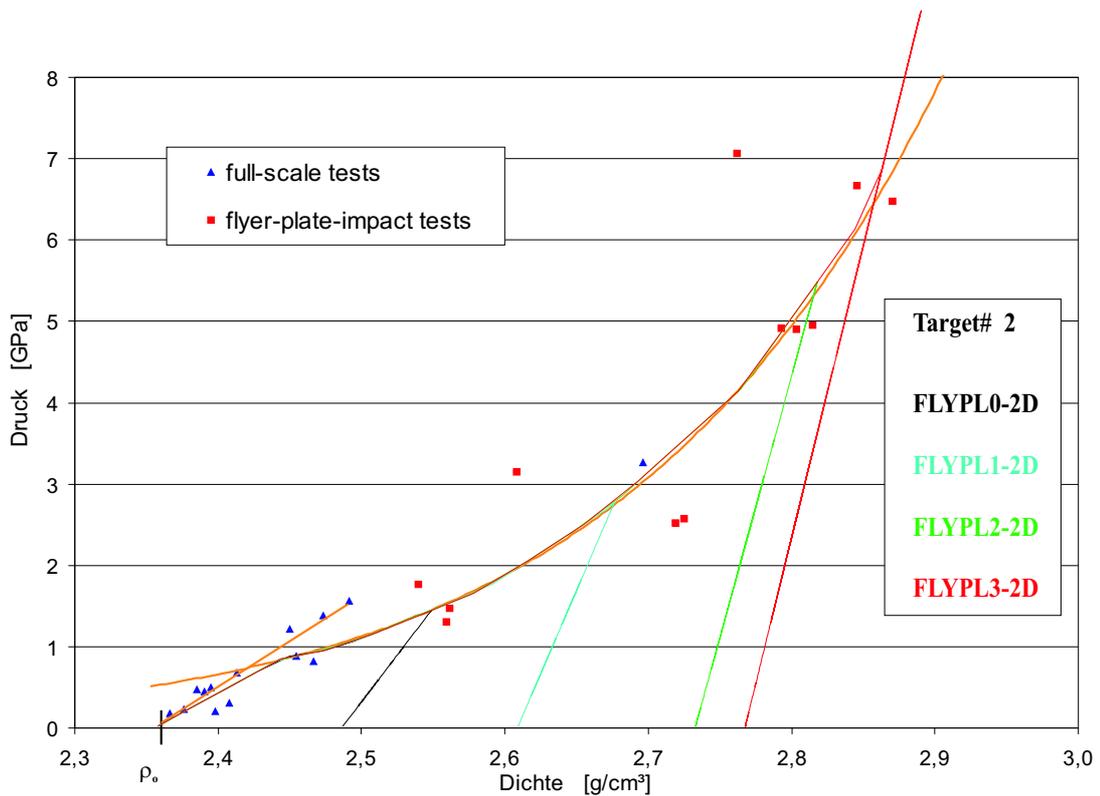
Die Materialdaten sind gemäß der im Abschnitt 7.2 eingeführten konstitutiven Gleichungen für den reinen Beton nach den Tabellen 7.2, 7.4, 7.6, 7.7, A.4 bzw. aus NAHME 1991 [158] bekannt. Während des Impulsaustauschs korrelieren an der Kontaktfläche in Anbetracht der Kontinuität die Spannungen und die Partikelgeschwindigkeiten in den Proben. Diese thermodynamischen Zustände in beiden Materialien werden in den im Bild eingetragenen Messpunkten Nr. 2 und Nr. 6 nahe der Kontaktfläche ausgewertet.

In der Tabelle 8.2 sind die Ergebnisse der hydrostatischen Drücke mit den zugehörigen Betondichten aus der numerischen Simulation (Nr. 2) und den Versuchsdaten für verschiedene Auftreffgeschwindigkeiten gegenübergestellt. Während die HUGONIOT-Spannungen in den Versuchen von NAHME 2000 [159] indirekt über die gemessenen Geschwindigkeiten der C45-Stahlscheibe abgeleitet sind (s. Gleichungen (A.1) bis (A.6) im Anhang A), werden diese Spannungen in der numerischen Simulation direkt aus den Erhaltungsgleichungen verbunden mit den konstitutiven Beziehungen des Betonmodells ermittelt.

**Tabelle 8.2:** Gegenüberstellung von den hydrostatischen Drücken und den zugehörigen Betondichten aus der numerischen Simulation (Nr. 2) mit den Versuchsdaten für verschiedene Auftreffgeschwindigkeiten

Name		Impakt- geschwindigkeit	hydrostatischer Druck		Betondichte	
AUTODYN	Versuch		AUTODYN	Versuch	AUTODYN	Versuch
		[m/s]	[MPa]	[MPa]	[g/cm <sup>3</sup> ]	[g/cm <sup>3</sup> ]
FLYPL0	Bet2347	277	1433	1473	2.54	2.58
FLYPL1	Bet2352	463	2752	3144	2.67	2.64
FLYPL2	Bet2354	728	4921	4906	2.81	2.83
FLYPL3	Bet2358	898	6824	6479	2.86	2.90

In Abbildung 8.5 sind die aus der AUTODYN-Simulation gewonnenen Druck-Dichte-Beziehungen mit den linearen Entlastungspfaden der versuchstechnisch bestimmten potentiellen Ausgleichsfunktion der Zustandsgleichung aus Abbildung A.5 gegenübergestellt. Dabei wird deutlich, dass mit den Materialmodellen für Beton und C45-Stahl sich der gleiche Spannungszustand bei entsprechender Auftreffgeschwindigkeit wie aus der Versuchsserie ergibt, und dass der theoretisch vorbestimmte Verlauf der Zustandsgleichung numerisch modelliert werden kann.



**Abbildung 8.5:** Vergleich von den Druck–Dichte Verläufen mit linearen Entlastungspfaden mit der versuchstechnisch bestimmten potentiellen Ausgleichsfunktion der Zustandsgleichung

#### 8.1.4 Vergleichsberechnungen von Bauteilen aus Versuchen

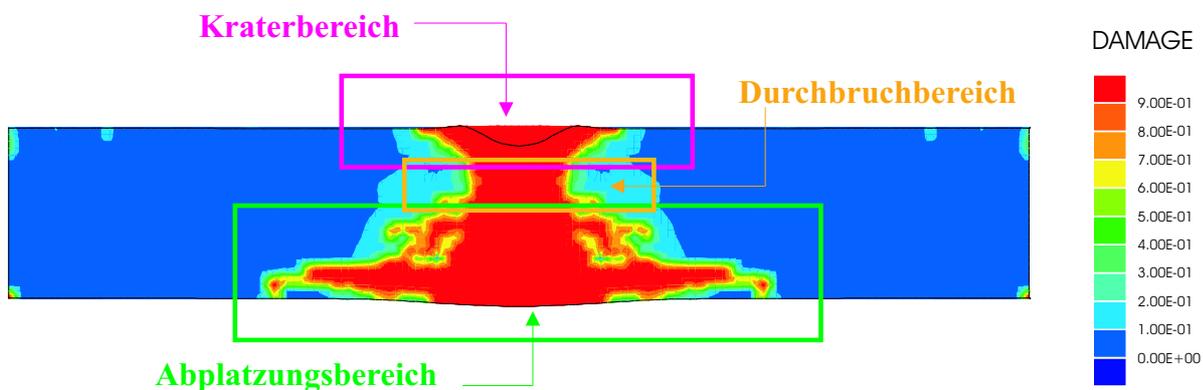
Schwerpunkt der numerischen Untersuchungen sind die Vergleichsberechnungen von angesprengten unbewehrten und bewehrten (Stahlfaser-)Betonplatten. Diese Ansprengversuche wurden an der WTD 52 durchgeführt. LANDMANN dokumentierte in seinem Bericht von 2001 ausführlichst die Experimente vom Herstellungsverfahren mit den Mischungsverhältnissen der verwendeten Materialien über den Versuchsaufbau bis hin zu den Ergebnissen zum Schädigungsverhalten [130].

Ziel der Untersuchungen ist die **qualitative und quantitative Klassifizierung der Schädigung**, um Aussagen

1. zu den Schädigungsabmessungen,
2. zum Abplatzungsverhalten der wegfliegenden Trümmer und
3. zur Resttragfähigkeit einer durch Detonation geschädigten betonartigen Struktur

machen zu können.

Die angesprengten Platten sind in den numerischen Berechnungen und in den Versuchen hinsichtlich der sichtbar abgelösten (Stahlfaser-)Betonbruchstücke im Kraterbereich, im Abplatzungsbereich und im Durchbruchbereich durch Angabe der Schädigungsabmessungen (Tiefen und Durchmesser) ausgewertet (s.a. Abbildung 8.6). Die tatsächliche Schädigung im Material ist aber insbesondere beim bewehrten (Stahlfaser-)Beton erheblich größer, da die Bewehrung das geschädigte Material durch sogenannte Verzahnungen am Ablösen vom Bauteil hindert. Dies hat Auswirkungen auf die Resttragfähigkeit der Platte (Abschnitt 8.1.4.3). Die vertikale Aufstellung der Platte ermöglichte es, die Flugweite der Bruchstücke zu dokumentieren (Abbildung 1.7), so dass Rückschlüsse auf die kinetische Energie gezogen werden konnten (Abschnitt 8.1.4.2).

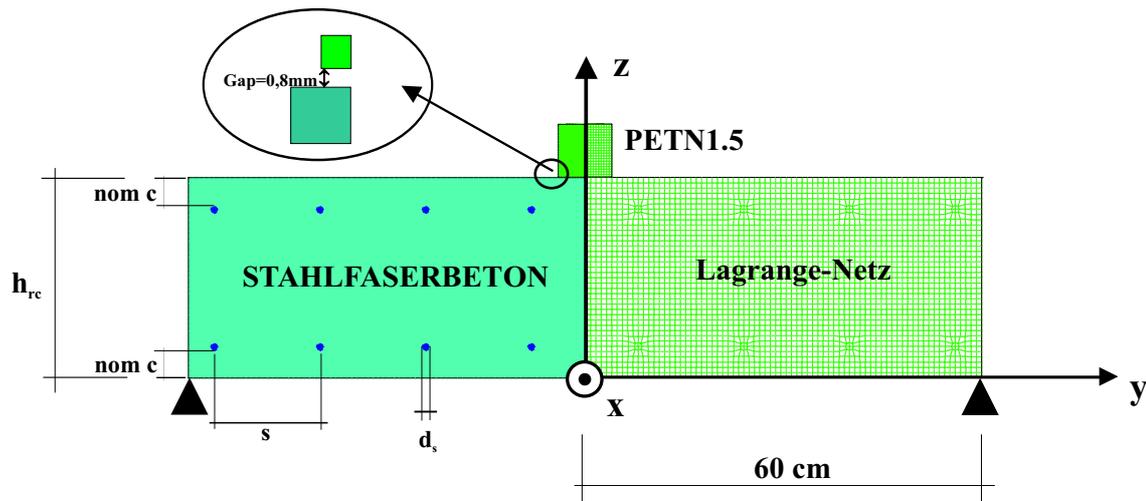


**Abbildung 8.6:** Schädigungsbild aus der numerischen Berechnung einer Kontaktdetonation auf eine Stahlfaserbetonplatte mit AUTODYN

#### 8.1.4.1 Zur Interpretation einer numerisch erzeugten Schädigung

Die Modellbildung der zu simulierenden Detonation auf unbewehrte und bewehrte (Stahlfaser-) Betonplatten erfolgt mit dem Hydrocode AUTODYN in Anlehnung an den Versuchsaufbau der an der WTD 52 durchgeführten experimentellen Untersuchungen [130]. Die für die eigene Problemstellung durchgeführten Anspregversuche an ausgewählten Beton-, Stahlbeton- und Stahlfaserbetonplatten mit den Grundabmessungen von 200cm x 200cm wurden mit zylinderförmigen zentrisch angeordneten Sprengladungsmengen von 350g bis 850g PETN1.5 belastet. Die Zündpunktlage lag bei 90% der Sprengstoffhöhe. Der Durchmesser  $d_{PETN}$  war stets 10cm, so dass die Sprengstoffhöhe  $h_{PETN}$  ermittelt werden kann. Die Bauteildicken  $h_{rc}$  variierten von 20.0cm bis 45.0cm, die Bewehrungsführung mit Stababständen  $s$  von 7.5cm bis 24.5cm, der Stabdurchmesser  $d_s$  von 8mm bis 16mm, die Betondeckung  $nom_c$  von 3.0cm bis 5.0cm und der Stahlfasergehalt  $V_f$  von 0.0 Vol-% bis 1.0 Vol-%.

Das Simulationsmodell ist exemplarisch für eine bewehrte (Stahlfaser-)Betonplatte in der Abbildung 8.7 dargestellt. Der Sprengstoff und die betonartigen Platten werden aus den in Abschnitt 4.5 erläuterten Gründen mit LAGRANGE-Elementen diskretisiert. Die Interakti-



**Abbildung 8.7:** Diskretisierung des zylinderförmigen Sprengstoffs und des bewehrten Stahlfaserbetons mit AUTODYN3D

on der Detonationsbeanspruchung auf die Struktur wird über eine LAGRANGE–LAGRANGE–Kopplung beschrieben. Im Bereich des PETN1.5 beträgt die Größe der Kontinuums-elemente  $0.4\text{cm}/0.4\text{cm}/0.4\text{cm}$ . Diese Elementgröße ergab eine Studie, die die Ausbreitung der Detonationswelle im Sprengstoff mit der CJ–Geschwindigkeit ausreichend genau beschreibt (vgl. Abschnitt 3.2). Bei der Abbildung der Platte wird eine konstante Elementgröße von  $0.8\text{cm}/0.8\text{cm}/0.8\text{cm}$  verwendet, da sich hierfür bereits eine asymptotische Konvergenz in den direkt ausgewerteten Größen in den Erhaltungsgleichungen, beispielsweise des hydrostatischen Drucks, zeigt (vgl. GEBBEKEN & RUPPERT 1999 [73]). Die Interaktion zwischen dem Sprengstoff und der Platte wird mit einem Gap (dt. Lücke) simuliert. AUTODYN gibt vor, dass die Gap–Größe zwischen  $\frac{1}{2}$  bis  $\frac{1}{10}$  der kleinsten Elementgröße der beteiligten Netze liegen soll. In allen Berechnungen wird ein Faktor von  $\frac{1}{5}$  verwendet, so dass ein  $\text{Gap} = \frac{1}{5} \cdot 0.4\text{cm} = 0.08\text{cm}$  beträgt (zum Einfluss unterschiedlicher Gap–Größen s. RUPPERT 2000 [184]).

Die Längenabmessungen der Betonplatte in der Tiefe und Breite sind in den numerischen Simulationen mit jeweils  $120\text{cm}$  konstant. Dies bedeutet eine Veränderung der Plattenmaße gegenüber den Versuchen der WTD ( $b = t = 200\text{cm}$ ). Als Randbedingungen für die seitlichen Flächen werden Verschiebungsrandbedingungen eingeführt. Dadurch wird die ankommende Druckwelle wiederum als Druckwelle reflektiert, die jedoch keine Überschreitung der zulässigen Spannungen und somit keine Schädigung verursacht. Die Verkleinerung der Plattenmaße und die Einführung der Verschiebungsrandbedingungen sind im Vergleich mit den Versuchen zulässig, da in diesem Bereich die Spannungswellen keinen signifikanten Einfluss auf die Schädigung haben. Das Ergebnis erweist sich im Vergleich zu einer Simulation mit den tatsächlichen Plattenabmessungen als ausreichend genau zur Beschreibung der zu untersuchenden Schädigungsabmessungen. Ein wesentlicher Vorteil der reduzierten Längenabmessungen liegt in der geringeren Anzahl an Kno-

ten im numerischen Modell, was zu einer kürzeren Berechnungsdauer führt (ca. 2 bis 3 Tage je nach Plattendicke).

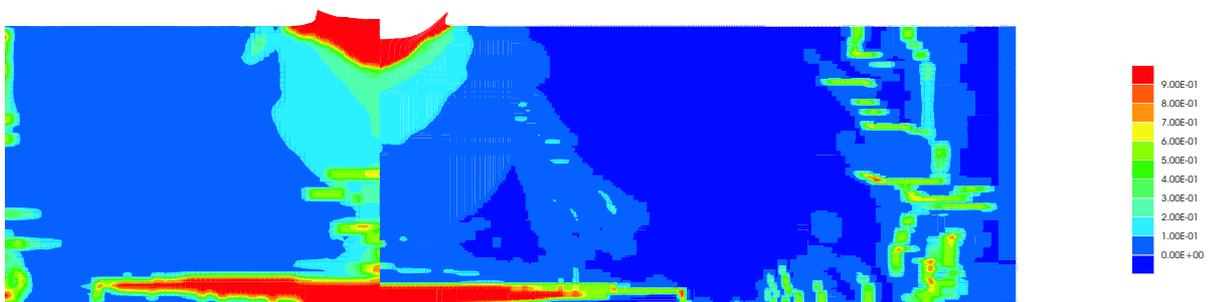
Die untere Plattenfläche wird ausschließlich am äußeren Rand vertikal fest gelagert. An der freien Oberfläche der unteren Plattenseite werden die ankommenden Druckwellen reflektiert. Dadurch entstehen Zugwellen, die zur Schädigung des Bauteils im Abplatzungsbereich erheblich beitragen.

Die Abbildung des unbewehrten (Stahlfaser-)Betrns unter Berücksichtigung der Homogenisierung erlaubt eine vereinfachte Modellierung im Zweidimensionalen unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften durch Rotation um die z-Achse (s.a. BENSON 1992 [21], AUTODYN 2002 [32]). In diesem Fall können die numerischen Auswertungen mit AUTODYN2D durchgeführt werden. Meine Vergleichsstudie mit zwei verschiedenen Versuchsserien S2 und S3 (s.a. Tabelle 8.3), wobei in jeder Serie jeweils drei unterschiedliche Aufbauten untersucht wurden mit

- Versuchsserie S2: die Sprengladungsmenge ist konstant gehalten, während die Bauteildicke einer Betonplatte variiert,
- Versuchsserie S3: die Sprengladungsmenge variiert, während die Bauteildicke einer Betonplatte konstant bleibt,

ergab in der Gegenüberstellung der 2D- mit den 3D-Ergebnissen bei den Schädigungsbildern keine signifikanten Unterschiede (s.a. Abbildungen 8.8 bis 8.13). Des weiteren wurde die Einleitung des Impulses aus der Detonationseinwirkung innerhalb der Betonplatte nach dem gleichen Prinzip aus Abschnitt 3.2.4 miteinander verglichen und ebenfalls keine signifikanten Unterschiede festgestellt. Die linke Plattenhälfte entspricht dem Schädigungsbild einer dreidimensionalen Berechnung und der rechte Teil dem einer zweidimensionalen Simulation.

Wie in Abschnitt 7.1.3 erläutert, erfolgen die Berechnungen des bewehrten (Stahlfaser-)Betrns mit diskret abgebildeten Bewehrungsstäben ausschließlich im Dreidimensionalen.



**Abbildung 8.8:** Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S2/P7, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0

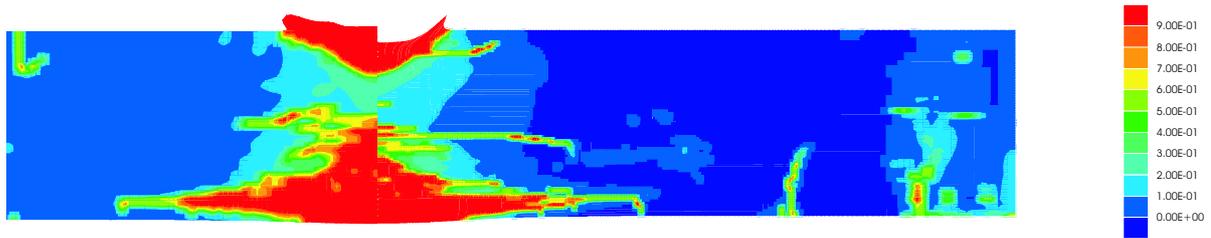


Abbildung 8.9: Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S2/P8, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0

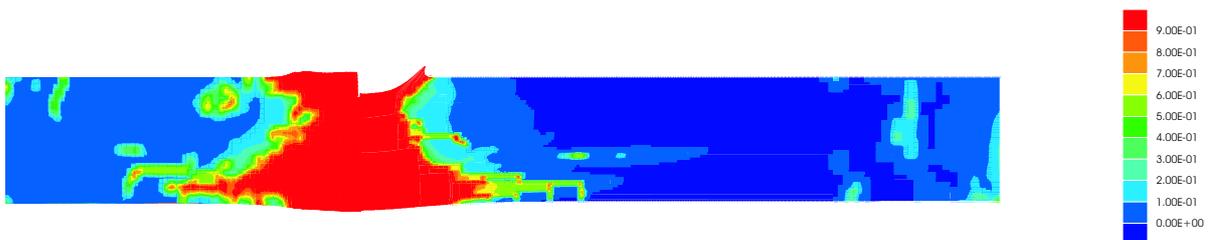


Abbildung 8.10: Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S2/P9, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0

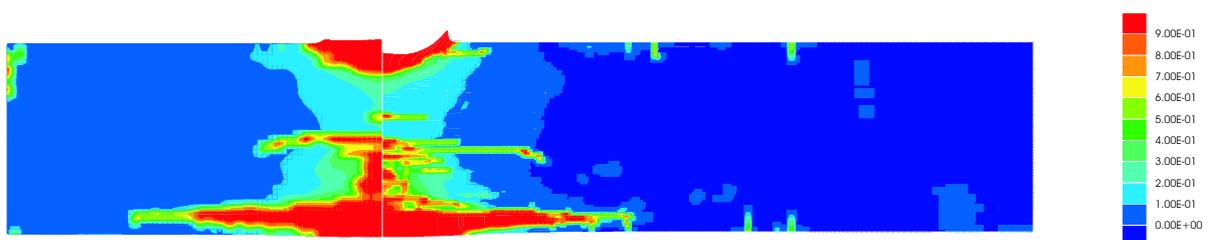


Abbildung 8.11: Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S3/P1, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0

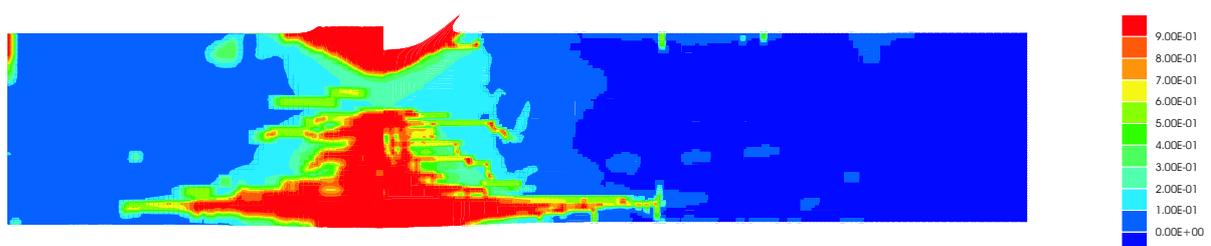
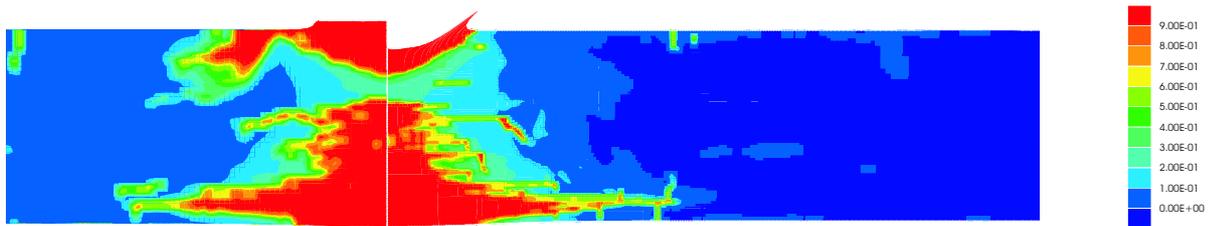


Abbildung 8.12: Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S3/P2, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0

Die Überlagerung eines numerisch erzeugten Schädigungsbildes, bei dem das Ergebnis in einer Skalierung der Schädigungsintensität von  $D = 0.0 = 0.0\%$  für ein unzerstörtes bis  $D = 1.0 = 100\%$  für ein vollkommen geschädigtes Material abgebildet ist ( $D \equiv \text{Damage}$ ), mit dem Schnitt der entsprechenden angespannten Betonplatte aus dem Versuch verdeutlicht in Abbildung 8.14, dass geringfügig geschädigte Kontinuumelemente bis ca.  $D = 0.5$  **nicht** zum Ablösen von Bruchstücken beitragen. Zur Interpretation und Auswertung des numerischen

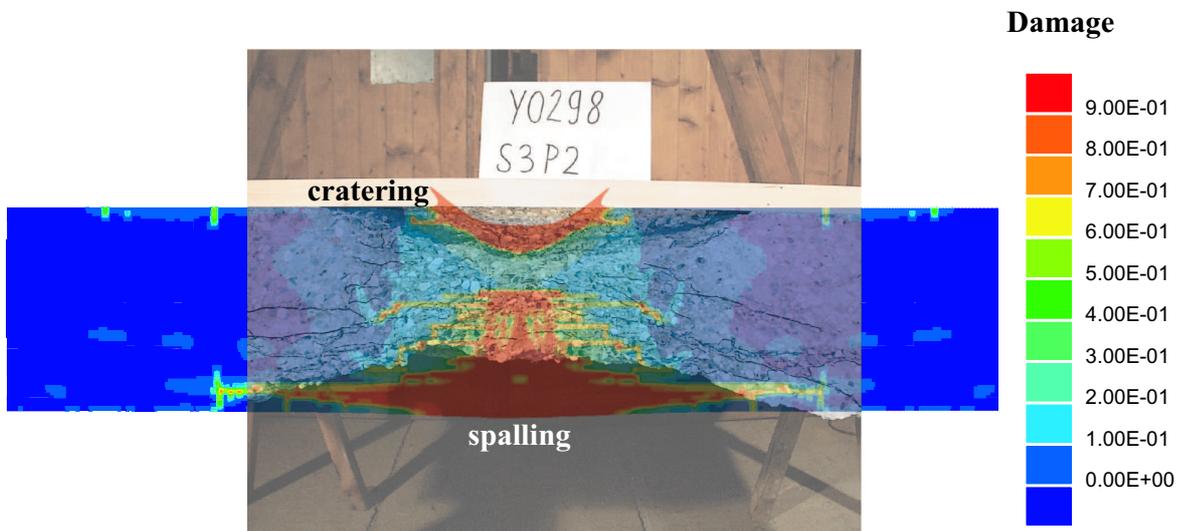


**Abbildung 8.13:** Vergleich der Schädigungsbilder 3D/2D für S3/P3, Schädigungsintensität 0.0 bis 1.0

Schädigungsbildes wird daher eine schädigungsrelevante Schädigungsintensität festgelegt, mit dem eine quantitative Aussage über die Schädigungsparameter

1. Kratertiefe  $T_k$ ,
2. Kraterdurchmesser  $D_k$ ,
3. Abplatzungstiefe  $T_a$ ,
4. Abplatzungsdurchmesser  $D_a$  und
5. Durchbruchdurchmesser  $D_d$ .

getroffen werden kann.



**Abbildung 8.14:** Überlagerung eines numerisch erzeugten Schädigungsbildes mit dem Schnitt einer angesprengten Betonplatte

Hierzu wird jeder einzelne Schädigungsparameter im Detail durch eine Gegenüberstellung aus numerischer Simulation mit dem experimentellen Resultat verglichen. Aus einer Vielzahl von numerischen (über 400) und experimentellen (über 120) Studien an Beton-, Stahlbeton- und Stahlfaserbetonplatten, die in den Berichten von GEBBEKEN & GREULICH 2002/2003 [76, 77]

ausführlich dokumentiert sind, werden hier einige ausgewählte Beispiele aus den Studien vorgestellt.

Für eine eindeutige Ablesung **aller** Schädigungsparameter aus der numerischen Simulation bezüglich der sich ablösenden Bruchstücke ist eine Skalierung des Schädigungsbildes nötig. Dabei wird nur der sichtbare Bereich der Schädigung beispielsweise von  $0.4 \leq D \leq 1.0$  angezeigt. Alle Elemente mit einer Schädigung kleiner als 0.4 erhalten die gleiche Farbe wie die Elemente, die keine Schädigung ( $D = 0.0$ ) aufweisen (s.a. Abbildungen 8.15, 8.16, 8.21 und 8.22). Hierbei wird die Schädigungsintensität soweit variiert, bis das Ergebnis der AUTODYN-Berechnung der Schädigungsabmessung aus dem Versuch der WTD angeglichen werden kann. Eine 100%ige Übereinstimmung der numerischen Resultate konnte im Vergleich mit den Versuchen nicht immer erreicht werden. Für die Ablesung der Schädigungsparameter aus dem Schädigungsbild der numerischen Berechnung ist eine Schädigungsintensität von  $D = 0.55$  (55% geschädigtes Material) das Ergebnis der in den Berichten dokumentierten Studien.

In der Tabelle 8.3 sind einige charakteristische Parameter der hier vorgestellten Serien zusammengefasst.

**Tabelle 8.3:** Charakteristische Parameter der Beton- (S2/S7), der Stahlbeton- (S5) und der Stahlfaserbeton-Serien (FS2)

Name	Sprengst.- menge	Bauteil- dicke	Festig- keit	Dichte	Faser- gehalt	Beton- deckung	Stabdurch- messer	Stabab- stand
	[g]	[cm]	[MPa]	[g/cm <sup>3</sup> ]	[Vol-%]	[cm]	[mm]	[cm]
S2/P7	650	45.0	47.2	2.448	0.0	—	—	—
S2/P8	650	30.0	47.2	2.448	0.0	—	—	—
S2/P9	650	20.0	47.2	2.448	0.0	—	—	—
S3/P1	350	30.0	38.6	2.452	0.0	—	—	—
S3/P2	650	30.0	38.6	2.452	0.0	—	—	—
S3/P3	850	30.0	38.6	2.452	0.0	—	—	—
S5/P1	650	30.0	42.5	2.430	0.0	4.0	10	12.5
S5/P5	650	30.0	45.9	2.450	0.0	4.0	12	18.0
S5/P9	650	30.0	47.2	2.460	0.0	4.0	14	24.5
FB2_S1/P2	650	30.0	55.9	2.483	0.25	—	—	—
FB2_S2/P1	650	30.0	52.5	2.488	0.50	—	—	—
FB2_S3/P2	650	30.0	51.3	2.465	1.00	—	—	—

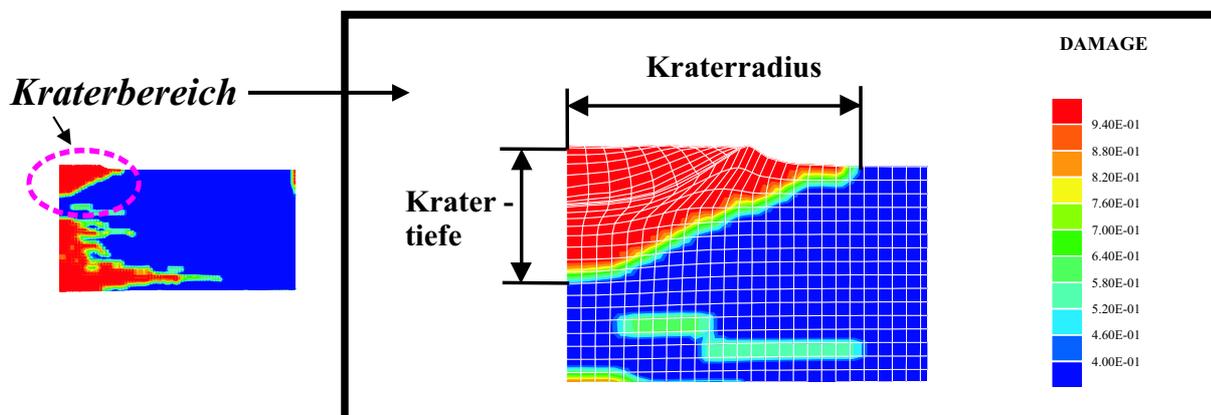
Die Tabelle 8.4 dokumentiert die in den Versuchen ermittelten Schädigungsabmessungen, die sich durch die Detonationsbelastung auf die Platten ergeben haben.

**Tabelle 8.4:** Schädigungsabmessungen der Beton-, der Stahlbeton und der Stahlfaserbetonplatten aus den WTD Versuchen

	Schädigungsparameter				
	Krater-tiefe [cm]	Krater-durchmesser [cm]	Abplatzungs-tiefe [cm]	Abplatzungs-durchmesser [cm]	Durchbruch-durchmesser [cm]
S2/P7	14.0	56.0	0.0	0.0	—
S2/P8	8.5	54.0	14.0	90.0	—
S2/P9	7.0	55.0	13.0	68.0	27.0
S3/P1	8.5	48.0	9.5	81.0	—
S3/P2	9.5	53.0	11.0	85.0	—
S3/P3	9.0	57.0	21.0	85.0	20.0
S5/P1	7.2	55.0	7.3	88.3	—
S5/P5	7.3	54.0	9.1	86.0	—
S5/P9	7.2	55.0	10.5	93.6	—
FB2_S1/P2	8.5	52.0	12.0	91.0	—
FB2_S2/P1	8.0	48.0	11.0	84.0	—
FB2_S3/P2	8.0	50.0	11.0	79.0	—

**Kratertiefe  $T_k$  und Kraterdurchmesser  $D_k$ :**

In Abbildung 8.15 ist der Kraterbereich mit den Schädigungsparametern **Kratertiefe**  $T_k$  und **Kraterdurchmesser**  $D_k$  (entspricht dem zweifachen Wert des Kraterradius) hervorgehoben. Beide Parameter werden für den Beton, für den Stahlbeton und für den Stahlfaserbeton aus dem Schädigungsbild am untersten bzw. am äußersten Punkt des Kraterbereichs mit einer Schädigungsintensität von 0.55 abgelesen. Die Ergebnisse aus den Simulationen und den Experimenten sind für den Kraterbereich zusammenfassend in der Tabelle 8.5 gegenübergestellt und deren Abweichungen mit Bezug zum realen Versuchsparameter angegeben.



**Abbildung 8.15:** Schädigung im Kraterbereich; Schädigungsintensität 0.4 bis 1.0

**Tabelle 8.5:** Vergleich AUTODYN3D mit Versuchsergebnissen der WTD für die Tiefe  $T_k$  und den Durchmesser  $D_k$  im Kraterbereich

	Kratertiefe			Kraterdurchmesser		
	$T_{k,A3D}$ [cm]	$T_{k,WTD}$ [cm]	Abweichung [%]	$D_{k,A3D}$ [cm]	$D_{k,WTD}$ [cm]	Abweichung [%]
S2/P7	7.2	14.0	48.57	36.0	56.0	35.71
S2/P8	7.2	8.5	17.65	35.2	54.0	34.81
S2/P9	—	7.0	—	36.0	55.0	34.55
S3/P1	6.6	8.5	22.35	32.0	48.0	33.33
S3/P2	7.2	9.5	24.21	36.0	53.0	32.08
S3/P3	7.7	9.0	14.44	36.0	57.0	36.84
S5/P1	7.2	7.2	0.0	37.2	55.0	32.36
S5/P5	7.2	7.3	1.37	36.4	54.0	32.59
S5/P9	7.2	7.2	0.0	37.2	55.0	32.86
FB2_S1/P2	7.4	8.5	12.94	36.4	52.0	30.00
FB2_S2/P1	7.2	8.0	10.00	34.4	48.0	28.33
FB2_S3/P2	6.9	8.0	13.75	32.8	50.0	34.40

**Diskussion der Kratertiefe:** Die Studien mit konstanter Sprengstoffmenge (Serien S2, S5 und FB2) zeigen eine nahezu gleich bleibende Kratertiefe  $T_{k,A3D}$  in den numerischen Ergebnissen. Die Abweichungen gehen auf die unterschiedlichen Festigkeiten und Dichten des Werkstoffs zurück, die für das Kompressionsverhalten und die daraus resultierende Schädigung verantwortlich sind. Für die Platte S2/P9 kann keine "eindeutige Kratertiefe" aus dem numerischen Schädigungsbild abgelesen werden, da sich Krater- und Abplatzungsbereich wegen des Durchbruchs überschneiden. Abbildung 8.10 zeigt entlang der z-Achse einen durchgehend zerstörten Bereich mit konstanter Schädigungsintensität von 1.0.

Bei Betrachtung der WTD-Resultate fällt zunächst auf, dass die Platte S2/P7 im Vergleich zum numerischen Ergebnis einen "Ausreißer" darstellt. Obwohl die Sprengladungsmenge wie bei allen anderen, auch den hier nicht dokumentierten Versuchsserien (bis auf Serie S3) konstant 650g betrug, wurde hier eine große Kratertiefe von 14.0cm gemessen, die nicht in der Simulation abgebildet werden kann. Dieser Versuch wurde zweimal wiederholt und die gemessene Kratertiefe jeweils mit 12.5cm von der WTD dokumentiert.

Die weiteren Gegenüberstellungen zeigen maximale Abweichungen von 24% (S3/P2), allerdings führte eine Ablesung der Kratertiefe bei geringerer Schädigungsintensität als  $D \approx 0.55$  zu keiner signifikanten Änderung. Die Abweichungen von 2.3cm bei der Platte und S3/P2 oder von 2.1cm bei der Platte FB2\_S3/P2 liegen im Rahmen des verwendeten Größtkorns im Beton. Hervorragend zeigten sich die Ergebnisse bei allen angesprengten Stahlbetonplatten, die durch die Serie S5 hier repräsentativ dargestellt werden.

Auch der Zusatz von Stahlfasern ergab in der Kratertiefe keine signifikanten Unterschiede zum

reinen Beton, was auf das nahezu gleiche Kompressionsverhalten der Stahlfasern zum Zuschlagskorn zurückzuführen ist (s.a. Abschnitt 7.2.4).

**Diskussion des Kraterdurchmessers:** Die in den numerischen Berechnungen erhaltenen Werte für den Kraterdurchmesser  $D_k$  sind wesentlich kleiner als die Versuchsergebnisse (s. Tabelle 8.5). Auch infolge einer Darstellung des Schädigungsbildes mit variiertem Schädigungsintensität ab  $D = 0.0$  konnte keine Anpassung an die Schädigungsabmessungen der WTD-Versuche erreicht werden. Untersuchungen haben gezeigt, dass im wesentlichen die sogenannten Oberflächenwellen (Rayleighwellen, Abbildung 3.1) verantwortlich dafür sind, die die Schädigung des Kraterdurchmessers verursachen. Eine Schädigung resultierend aus den Oberflächenwellen kann im RGGP-Modell **nicht** abgebildet werden, so dass die Kraterdurchmesser aus den numerischen Schädigungsbildern gegenüber den Versuchen nicht eindeutig abgelesen werden können. Allerdings kann der Einfluss, beispielsweise von Sprengladungsmenge, Bauteildicke, usw., in Relation zueinander untersucht werden, was in ausgiebigen Parameterstudien bewiesen worden ist (GEBBEKEN & GREULICH 2002/2003 [76, 77]). Der Kraterdurchmesser  $D_k$  wird wie alle anderen Schädigungsparameter bei  $D \approx 0.55$  abgelesen.

Bei einem Vergleich der numerischen Berechnungen mit den Experimenten lässt sich feststellen, dass die Schädigungsabmessungen aus den numerischen Ergebnissen zwischen 28–37% von den aus den Versuchen ermittelten Schädigungsabmessungen der Platten abweichen. Um bei zukünftigen numerischen Simulationen einen realitätsnahen Kraterdurchmesser ermitteln zu können, ist eine Normierung der berechneten AUTODYN3D-Werte auf die tatsächlich ablesbaren Schädigungsabmessungen notwendig. Das bedeutet, dass die zukünftig mit dem RGGP-Modell ermittelten Kraterdurchmesser bei einer Detonationsbelastung noch mit einem konstanten Term multipliziert werden müssen, um einen wirklichkeitsnahe Schädigungsabmessung in radialer Richtung im Kraterbereich zu bestimmen.

Hierzu werden in allen Vergleichsberechnungen Normierungsfaktoren  $NKD_i$  ("N"ormierung des "K"rater"D"urchmessers) berechnet, die einen direkten Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der WTD und AUTODYN3D herstellen. Die mathematische Beziehung ist im folgenden aufgezeigt:

$$NKD_i = \frac{\text{Kraterdurchmesser WTD}}{\text{Kraterdurchmesser A3D}} \quad (8.1)$$

Daraus ergeben sich mit den Werten der Tabelle 8.5 die Normierungsfaktoren zu:

$$\begin{aligned} NKD_1 &= \frac{56.0cm}{36.0cm} = 1.56, & NKD_2 &= \frac{54.0cm}{35.2cm} = 1.53, & NKD_3 &= \frac{55.0cm}{36.0cm} = 1.53, \\ NKD_4 &= \frac{48.0cm}{32.0cm} = 1.50, & NKD_5 &= \frac{53.0cm}{36.0cm} = 1.47, & NKD_6 &= \frac{57.0cm}{36.0cm} = 1.58, \\ NKD_7 &= \frac{55.0cm}{37.2cm} = 1.48, & NKD_8 &= \frac{54.0cm}{36.4cm} = 1.48, & NKD_9 &= \frac{55.0cm}{37.2cm} = 1.48, \\ NKD_{10} &= \frac{52.0cm}{36.4cm} = 1.43, & NKD_{11} &= \frac{48.0cm}{34.4cm} = 1.40, & NKD_{12} &= \frac{50.0cm}{33.6cm} = 1.52. \end{aligned}$$

Die Werte für  $NKD_i$  ( $i=1,2,\dots,12$ ) sind nahezu gleich. Für die Auswertung der folgenden Studien ist daher die Berechnung eines allgemeingültigen Normierungsfaktors  $NKD_m$  sinnvoll, der sich auf Basis der Vergleichswerte über die Schwerpunktformel ermitteln lässt zu:

$$NKD_m = \sum_{i=1}^{12} \frac{NKD_i}{n} = \frac{17.96}{12} \approx 1.50 . \quad (8.2)$$

Damit ergibt sich eine maximale Abweichung von 6.67%. Ein endgültiger Kraterdurchmesser  $D_k$  aus einer numerischen Simulation lässt sich damit wie folgt bestimmen:

$$D_k = D_{k,A3D} \cdot NKD_m = D_{k,A3D} \cdot 1.50 \quad (8.3)$$

### Abplatzungstiefe $T_k$ und Abplatzungsdurchmesser $D_k$ :

In Abbildung 8.16 ist der Abplatzungsbereich mit den Schädigungsparametern **Abplatzungstiefe**  $T_a$  und **Abplatzungsdurchmesser**  $D_a$  (entspricht dem zweifachen Wert des Abplatzungsradius) hervorgehoben. Beide Parameter werden für den Beton, für den Stahlbeton und für den Stahlfaserbeton aus dem Schädigungsbild am obersten bzw. am äußersten Punkt des Abplatzungsbereichs mit einer Schädigungsintensität von 0.55 abgelesen. Eine Skalierung der Schädigungsintensität von 0.4 bis 1.0 verdeutlicht im Vergleich zur Abbildung 8.12, dass mit dieser Skalierung sich klarere Konturen des Abplatzungsbereichs herausstellen, so dass die Schädigungsparameter abgelesen werden können. Die Ergebnisse aus den Simulationen und den Experimenten sind für den Abplatzungsbereich zusammenfassend in der Tabelle 8.6 gegenübergestellt und deren Abweichungen mit Bezug zur realen Schädigungsabmessung aus den Versuchen der WTD angegeben.

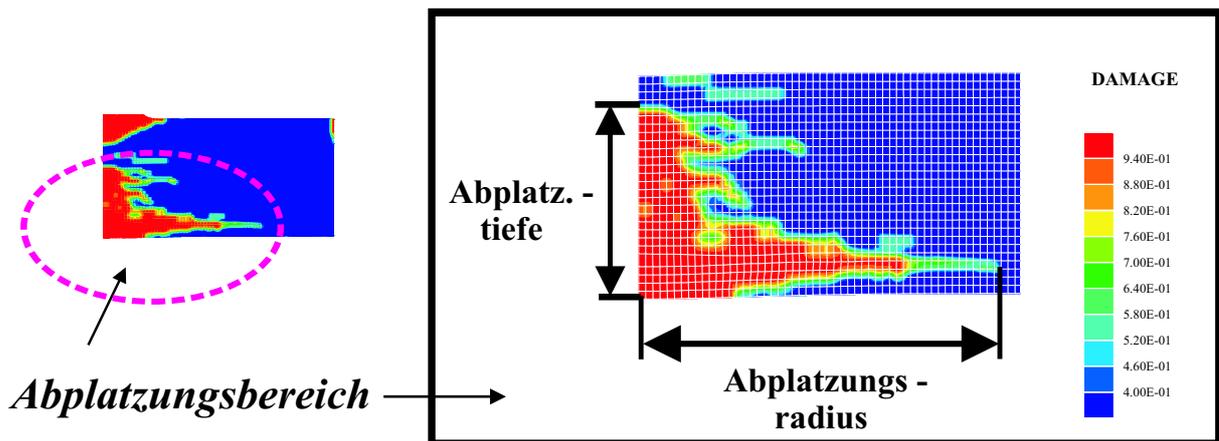


Abbildung 8.16: Schädigung im Abplatzungsbereich; Schädigungsintensität 0.4 bis 1.0

Während bei den Auswertungen der Schädigungsparameter im Kraterbereich kaum ein Einfluss von Plattendicke, Bewehrung und Stahlfasergehalt bei den Studien mit konstanter Sprengstoffmenge festzustellen war, zeigen die Untersuchungen zum Abplatzungsverhalten deutlich, wie

**Tabelle 8.6:** Vergleich AUTODYN3D mit Versuchsergebnissen der WTD für die Tiefe  $T_a$  und den Durchmesser  $D_a$  im Abplatzungsbereich

	Abplatzungstiefe			Abplatzungsdurchmesser		
	$T_{a,A3D}$ [cm]	$T_{a,WTD}$ [cm]	Abweichung [%]	$D_{a,A3D}$ [cm]	$D_{a,WTD}$ [cm]	Abweichung [%]
S2/P7	4.0	—	—	92.8	—	—
S2/P8	17.4	14.0	24.29	82.6	90.0	8.22
S2/P9	—	13.0	—	61.4	68.0	9.71
S3/P1	14.2	10.5	35.24	73.2	81.0	9.63
S3/P2	17.7	13.5	31.11	76.8	85.0	9.65
S3/P3	19.7	21.0	—	79.2	85.0	6.82
S5/P1	19.7	7.3	169.86	73.6	88.3	16.65
S5/P5	19.0	9.2	106.52	75.2	86.0	12.56
S5/P9	19.0	10.5	80.95	80.0	93.6	14.53
FB2_S1/P2	16.4	13.5	21.48	82.4	91.0	9.45
FB2_S2/P1	15.6	11.5	35.65	73.6	84.0	12.38
FB2_S3/P2	14.0	12.0	16.67	69.2	79.0	12.41

stark die Schädigungsabmessungen sowohl in den numerischen als auch in den experimentellen Studien von

1. der Plattendicke,
2. den konstruktiven Stahlbetonparametern wie Stababstand, Stabdurchmesser, Betondeckung und
3. der Zugabe der Stahlfasern mit variierendem Stahlfasergehalt

abhängen. Nicht explizit erwähnt sei die Belastungsintensität (Sprengstoffmenge), die selbstverständlich einen signifikanten Einfluss auf alle Schädigungsabmessungen hat.

**Diskussion der Abplatzungstiefe:** Grundsätzlich fällt auf, dass alle numerischen Ergebnisse zur Abplatzungstiefe  $T_{a,A3D}$  höhere Werte als die Versuchsergebnisse ausweisen. Eine Variation der Schädigungsintensität verdeutlichte, dass das Ablesen des Schädigungsparameters mit einer höheren Schädigungsintensität als  $D=0.55$  keine besseren Resultate zur Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zur Folge hatte. Als Nachteil zeigte sich, dass mit dieser Variation keine deutliche Kontur des Abplatzungsbereichs mehr vorliegt.

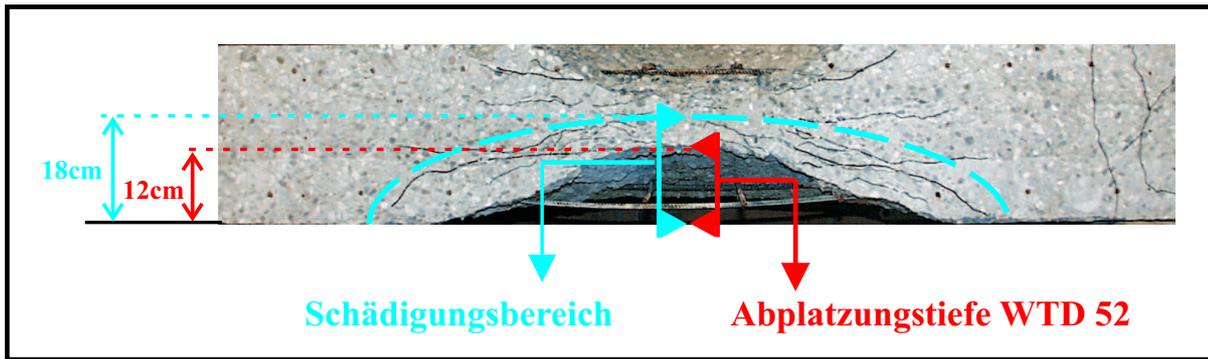
Bei unbewehrten Platten liegen die Abweichungen zwischen 17 und 35%, was absolut maximal 3.7cm ausmacht (Platte S3/P8). Auch die Abnahme der Abplatzungstiefe  $T_{a,A3D}$  durch Zugabe von Stahlfasern wird sichtbar. Die von der WTD 52 angefertigten Bilder und Schnittbilder der angesprengten Platten (s. Abbildung 8.17) zeigen ausgeprägte Risse im (Stahlfaser-)Beton auf,

was damit auch das Schädigungsbild der Platte S2/P7 mit einer Abplatzungstiefe von 4.0cm und einem Abplatzungsdurchmesser von 98.0cm bestätigt. LANDMANN berichtete von "sich lösenden Beton-Schollen" der angesprengten Betonplatten mit einer Bauteildicke von  $h_{rc} = 45.0\text{cm}$  beim Transport. Insbesondere aus den Resttragfähigkeitsstudien mit bewehrten Platten wird deutlich, dass das Material tiefer geschädigt ist, als das die dokumentierten Schädigungsabmessungen bezüglich der sich lösenden Betonbruchstücke zeigen (s. Abbildungen 8.17 und 8.18, vgl. Risse und gelöste Betontrümmer).



**Abbildung 8.17:** Schnittbild einer angesprengten Stahlfaserbetonplatte

Die numerischen Berechnungen aller bewehrten Platten der Serie S5 zeigen trotz variiertes konstruktiver Parameter eine fast konstante Abplatzungstiefe in allen drei Vergleichsberechnungen. Die hierbei ermittelten Resultate liegen deutlich oberhalb der Versuchsergebnisse (Tabelle 8.6). Um die Zusammenhänge zwischen der Abplatzungstiefe aus den WTD-Versuchen und der Abplatzungstiefe des geschädigten Bereiches aus der numerischen Simulation zu verdeutlichen, wurde ein Schnittbild einer angesprengten Stahlbetonplatte näher betrachtet. In der Abbildung 8.18 ist zu erkennen, dass das zerstörte Material (blau dargestellt) ein weit größeres Ausmaß einnimmt als dies nach dem Ablesen der Versuchsergebnisse der WTD von LANDMANN dokumentiert ist [130]. Wird die Abplatzungstiefe  $T_a$  für das geschädigte Material festgelegt, dann ist die numerische Simulation in der Lage, ein genaueres Abbild der Experimente darzustellen.



**Abbildung 8.18:** Schnittbild einer Stahlbetonplatte mit der Bauteildicke  $h_{rc} = 30\text{cm}$

Allerdings hat sich das zerstörte Material nicht zu 100% von der Konstruktion gelöst, was auf die Netzstruktur des Bewehrungsstahls zurückzuführen ist. Diese verhindert ein Ablösen der (Stahlfaser-)Betonbruchstücke, was durch die gemessenen Resultate der WTD ausgedrückt wird. Somit wird der Einfluss des Bewehrungsnetzes bei der Festlegung der Abplatzungstiefe  $T_a$  mit einem Normierungsfaktor  $NAT$  ( $NAT = \text{''N''ormierung der \text{''A''}bplatzungs\text{''T''}iefe$ ) berücksichtigt mit

$$NAT = \frac{\text{Abplatzungstiefe WTD}}{\text{Abplatzungstiefe A3D}} \cdot 100\% = \frac{T_{a,WTD}}{T_{a,A3D}} \cdot 100\% \quad (8.4)$$

und stellt die in der Realität vorhandene Tiefe der Abplatzung in Bezug zum numerischen Ergebnis dar. Es wird deutlich, dass der Stababstand  $s$  der Bewehrung den Normierungsfaktor  $NAT$  beeinflusst. Bei einer Erhöhung des Stababstandes  $s$  ist gleichzeitig ein Ansteigen des  $NAT$  verbunden: Mit einer größeren Maschenweite des Bewehrungsnetzes stellt sich auch eine Zunahme des Volumens und der Tiefe des Abplatzungsbereichs ein, da die haltende Struktur der Stäbe weniger ausgeprägt ist.

Für die Festlegung der realen Abplatzungstiefe  $T_a$  für bewehrtes Material bedeutet dies, dass die Normierung nur durch eine Funktion in Abhängigkeit des Stababstandes  $s$  beschrieben werden kann. Auf Basis der Vergleichsstudien von GEBBEKEN & GREULICH und GEIER 2001/2002 [81, 76] konnte durch das Einlegen einer logarithmischen Ausgleichsfunktion in die bekannten Datenpunkte die Gleichung

$$NAT = 27.302 \cdot \ln(s) - 31.47 \quad (8.5)$$

aufgestellt werden, deren funktionaler Verlauf im Diagramm in Abbildung 8.19 dargestellt ist. Für die Anpassung der Ergebnisse aus den numerischen Studien an das reale Versagensbild ist der Normierungsfaktor  $NAT$  mit dem Simulationsergebnis zu multiplizieren.

$$T_a = \frac{NAT(s) \cdot T_{a,A3D}}{100\%} \quad (8.6)$$

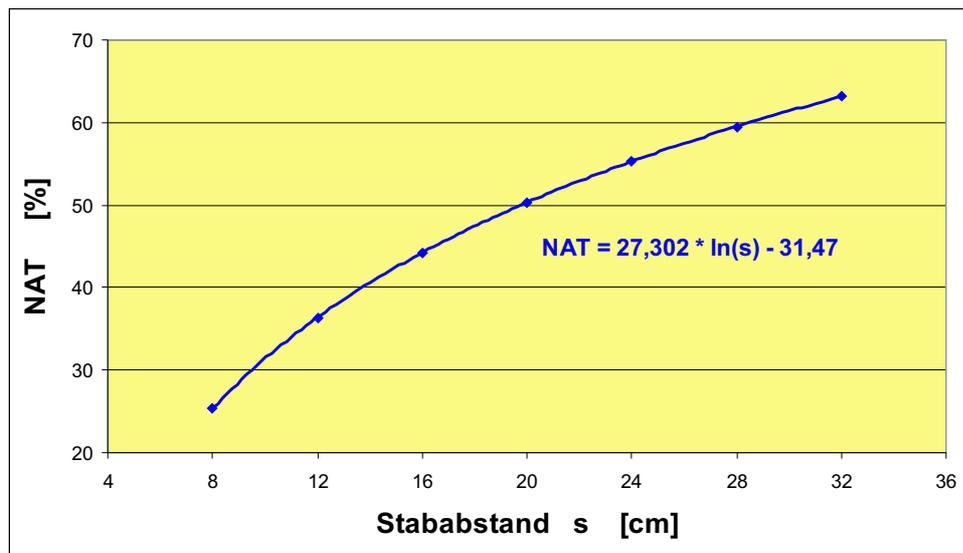


Abbildung 8.19: Abplatzungstiefe-Normierungsfaktor NAT in Abhängigkeit vom Stababstand  $s$

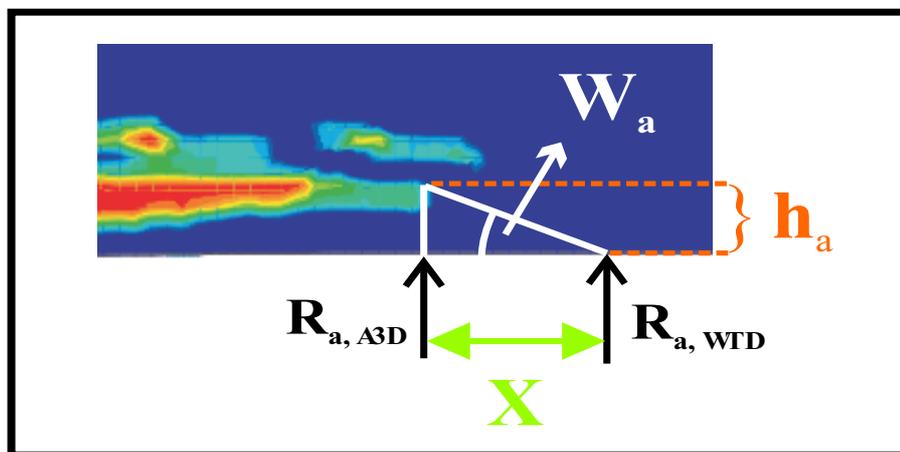
Die Gleichung (8.6) ist jedoch nur für bewehrte Platten relevant, deren Abplatzungstiefe größer als die Betondeckung  $nomc$  ist, da unterhalb der unteren Bewehrungslage kein Einfluss des Stababstandes vorliegt.

Weiterhin ist festzuhalten, dass sich die Abplatzungstiefe  $T_a$  für Stababstände  $s \rightarrow 40cm$  der Abplatzungstiefe einer vergleichbaren reinen Betonplatte annähert, da NAT einem Grenzwert von 100% entgegenstrebt. In der Baupraxis werden Stababstände bis maximal  $s = 30cm$  gewählt (s.a. DIN 1045, Abschnitt 20.1.6). Daher nähert sich die berechnete Abplatzungstiefe  $T_a$  dem Wert bezüglich der "wegfliegenden Trümmer"  $T_{a,WTD}$  an. Der Einfluss der Maschenweite  $s$  wird somit immer geringer. Im Gegensatz dazu, nimmt der Normierungsfaktor NAT bei kleiner werdendem Stababstand  $s \rightarrow 8cm$  ab.

**Diskussion des Abplatzungsdurchmessers:** Die Ergebnisse der Vergleichsberechnungen für die Ermittlung des Abplatzungsdurchmessers weisen gegenüber den experimentellen Ergebnissen um bis zu 16% geringere Schädigungsabmessungen auf (s. Tabelle 8.6). Die Schädigungsbilder aus den numerischen Simulationen zeigen ein Phänomen, dass sich in allen Studien mit Schädigungen im Abplatzungsbereich wiederholt. Der in der Abbildung 8.16 dargestellte Ablesepunkt wird durch die maximale Schädigung in radialer Richtung festgelegt. Dieser Punkt liegt nicht direkt an der Unterkante der Betonplatte. Es befinden sich zwischen Ablesepunkt und Unterkante der Betonplatte drei "ungeschädigte" Elemente. Die Ursache, dass drei Zellen rechnerisch als "ungeschädigt" dargestellt werden, liegt an der numerischen Umsetzung der Reflektion der Druckwelle in eine Zugwelle mit umgekehrter Laufrichtung. Die Druckwelle wird durch die eingeführte künstliche Viskosität über 6 Zellen verteilt (Abschnitt 4.5). Das führt

zu einer Überlagerung der Druck- mit den Zugwellen im Randbereich, wobei sich die resultierende Spannungsamplitude aufhebt. Daher können sich die notwendigen Spannungen, welche die Schädigung hervorrufen, nicht einstellen. Die direkt am freien Rand liegenden Zellen bleiben somit in der Simulation ungeschädigt, was jedoch nicht der Realität entspricht. Die Darstellung dieses Phänomens kann der Abbildung 8.16 und dem Detailbild 8.20 entnommen werden.

Um in weiteren numerischen Studien einen realitätsnahen Abplatzungsdurchmesser  $D_a$  bestimmen zu können, ist eine mathematische Beziehung zur Anpassung der Ergebnisse aus der Simulation an die Versuchsergebnisse aufzustellen. Die Ableseparameter aus der Gegenüberstellung der Ergebnisse aus der numerischen Simulation und aus den Versuchsergebnissen sind in Abbildung 8.20 dargestellt



**Abbildung 8.20:** Festlegung der Ableseparameter für den Bereich des Abplatzungsdurchmessers  $D_a$

Der Wert für  $h_a$  und der Abplatzungsradius  $R_{a,A3D}$  können hierbei aus der jeweiligen Studie abgelesen werden. Der Winkel  $W_a$  wird aus den Vergleichsberechnungen ermittelt, da die Distanz  $x$  aus den Versuchen bekannt ist.  $x$  entspricht der Differenz aus Abplatzungsdurchmesser von WTD und A3D (Tabelle 8.6). Die Berechnung erfolgt über die mathematischen Beziehungen des rechtwinkligen Dreiecks zu:

$$W_{a,i} = \arctan \frac{h_{a,i}}{x_i}. \quad (8.7)$$

Bei den ermittelten Winkeln  $W_{a,i}$  in Tabelle 8.7 ist deutlich zu erkennen, dass alle Ergebnisse nahezu gleich sind. Der gemittelte Winkel  $W_{a,m}$  ist Basis für die Auswertung des Abplatzungsdurchmessers  $D_a$  in weiteren Studien.

Die Werte für  $W_{a,i}$  ( $i=1,2,\dots,11$ ) sind nahezu gleich. Für die Auswertung der folgenden Studien ist daher die Berechnung eines allgemeingültigen Ablesewinkels  $W_{a,m}$  sinnvoll, der sich auf Basis der Vergleichswerte über die Schwerpunktformel ermitteln lässt zu:

$$W_{a,m} = \sum_{i=1}^{11} \frac{W_{a,i}}{n} = \frac{354.15^\circ}{11} \approx 32.20^\circ. \quad (8.8)$$

**Tabelle 8.7:** Winkel  $W_{a,i}$  für die Anpassung an den realen Abplatzungsdurchmesser  $D_a$ 

	Abplatzungsdurchmesser		Ableseparameter		
	$D_{a,A3D}$ [cm]	$D_{a,WTD}$ [cm]	$x_i$ [cm]	$h_{a,i}$ [cm]	$W_{a,i}$ [°]
S2/P8	82.6	90.0	3.7	2.4	32.97
S2/P9	61.4	68.0	3.3	2.4	36.03
S3/P1	73.2	81.0	3.9	2.4	31.61
S3/P2	76.8	85.0	4.1	2.4	30.34
S3/P3	79.2	85.0	2.9	2.4	39.61
S5/P1	73.6	88.3	7.4	4.0	28.56
S5/P5	75.2	86.0	5.4	3.2	30.65
S5/P9	80.0	93.6	6.8	4.0	30.47
FB2.S1/P2	82.4	91.0	4.3	2.4	29.17
FB2.S2/P1	73.6	84.0	5.2	3.2	31.61
FB2.S3/P2	69.2	79.0	4.9	3.2	33.15

Die maximale Abweichung beträgt 23.01%. Ein endgültiger Abplatzungsdurchmesser  $D_a$  aus einer numerischen Simulation lässt sich damit wie folgt bestimmen:

$$D_a = D_{a,A3D} + \left( 2 \cdot \frac{h_a}{\tan 32.20^\circ} \right) \quad (8.9)$$

#### Durchbruchdurchmesser $D_d$ :

Für die Untersuchungen des Durchbruchdurchmessers  $D_d$  liegen aus den Versuchen keine Vergleichsmöglichkeiten vor. Lediglich die Platte S2/P7 weist sowohl in den numerischen als auch in den experimentellen Studien (der Versuch wurde an der WTD 52 insgesamt dreimal durchgeführt) einen Durchbruch auf. Die Ablesung des Radius erfolgt bei einer Schädigungsintensität von 0.55 wie in der Abbildung 8.21 dargestellt. Der zweifache Ablesewert entspricht dem Durchbruchdurchmesser  $D_d$ . Im Vergleich ergab sich aus AUTODYN3D  $D_{a,A3D} = 15.7$  zur Versuchsauswertung der WTD  $D_{a,WTD} = 27.0$  Abweichung von 71.97%.

Es sei angemerkt, dass die mit  $m_{PETN}=850g$  belastete S3/P3-Platte im Schädigungsbild zwar keinen durchgehend zerstörten (roten) Bereich wie die Platte S2/P9 (vgl. Abbildungen 8.10 und 8.13) zeigt. Aufgrund der vorhandenen Restbauteildicke von 2.6cm (30.0cm-19.7cm-7.7cm=2.6cm) kann jedoch von einem Grenzbereich ausgegangen werden, bei dem sich das geschädigte Material wahrscheinlich herauslösen wird, so dass infolge dieser Belastung von einem Durchbruch gesprochen werden kann.

Wie bereits bei bewehrten (Stahlfaser-)Betonplatten beobachtet wurde, verhindert die Netzstruktur des Bewehrungsstahls das Ablösen des zerstörten Materials. Während die numerische Simulation eindeutig einen Durchbruch aus dem Schädigungsbild feststellt, dokumentieren die Versuche nur geringe Abplatzungstiefen bezüglich der wegfliegenden Trümmer. Erst höhere

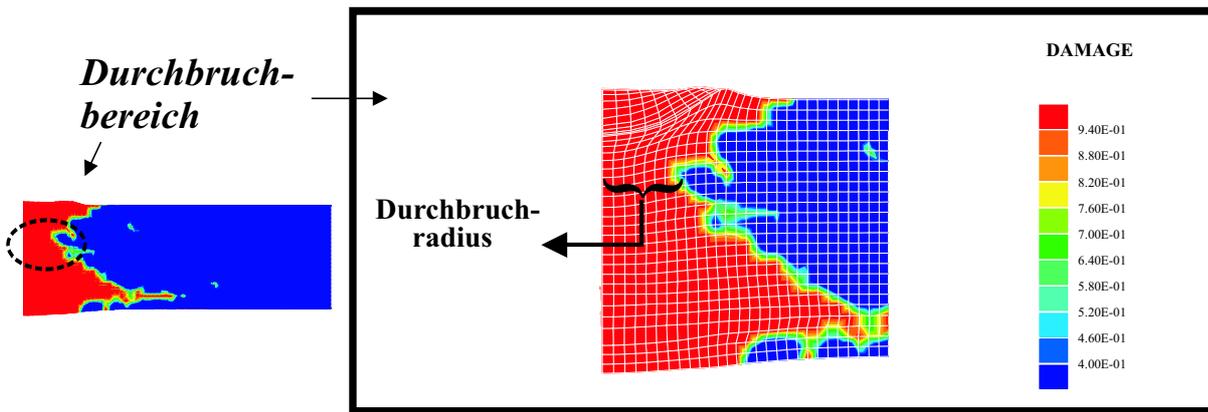


Abbildung 8.21: Platte S2/P9: Schädigung im Durchbruchbereich; Schädigungsintensität 0.4 bis 1.0

Sprengstoffmengen als  $m_{PETN}=650\text{g}$  und/oder geringere Bauteildicken als  $h_{rc}=30\text{cm}$  der untersuchten bewehrten Platten lassen einen Durchbruch erzielen.

Um eine Schädigungsintensität festlegen zu können, mit der die numerischen Schädigungsabmessungen eines Durchbruchs abgelesen werden können, wird ein Vergleich zwischen einer belasteten Beton- und einer Stahlbetonplatte bei einer Bauteildicke von  $h_{rc}=20\text{cm}$  herangezogen. Die Schädigungsbilder beider Platten sind in der Abbildung 8.22 dargestellt.

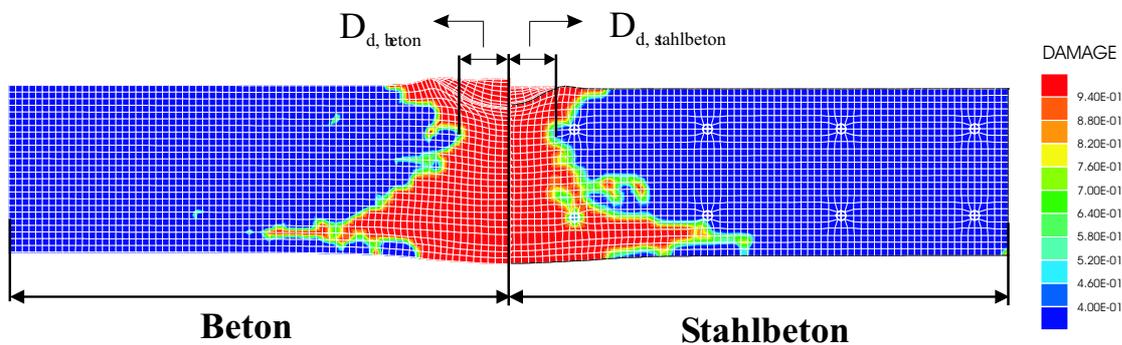


Abbildung 8.22: Gegenüberstellung der Durchbruchbereiche bei einer Beton- und einer Stahlbetonplatte mit einer Bauteildicke von  $h_{rc}=20\text{cm}$ ; Schädigungsintensität 0.4 bis 1.0

Bei der Betrachtung beider Bauteilhälften wird deutlich, dass die Schädigung im Bereich des Durchbruchs nahezu gleich ist. Daher wird die Auswertung der numerischen Schädigungsbilder auf Grundlage des Resultats allein aus der Platte S2/P9 für den reinen Beton geführt. Aus diesem Ergebnis kann ein Normierungsfaktor NDD (NDD = "N"ormierung des "D"urchbruch"D"urchmesser) ermittelt werden, mit dem der Zusammenhang zwischen der numerischen und der experimentellen Schädigungsabmessung festgelegt wird.

Der Normierungsfaktor berechnet sich zu:

$$NDD = \frac{\text{Durchbruchdurchmesser } WTD}{\text{Durchbruchdurchmesser } A3D} = \frac{27.0 \text{ cm}}{15.7 \text{ cm}} = 1.72. \quad (8.10)$$

Mit diesem Ablesewert und dem Normierungsfaktor NDD kann der Durchbruchdurchmesser  $D_d$  ermittelt werden zu:

$$D_d = D_{d,A3D} \cdot NDD = D_{d,A3D} \cdot 1.72. \quad (8.11)$$

### Zum Stahlfasergehalt:

Mit zunehmenden Stahlfasergehalt ändern sich die Stahlfaserbetoneigenschaften wie Festigkeit und Steifigkeit, die sich auf die Bruchfläche (s. Abschnitt 7.2.4) auswirken. Der Werkstoff ist damit in der Lage, höhere plastische Verzerrungen aufzunehmen (s. Abschnitt 7.2.6). Der Stahlfasergehalt hat somit einen entscheidenden Einfluss auf die Schädigungen der angesprengten Platte.

Infolge des Überschreitens der zulässigen Druckspannungen liegen Schädigungen im Kraterbereich vor, während die Abplatzungen an der Plattenunterseite durch zu hohe Zugspannungen auftreten. Eine Zunahme bzw. Abnahme des Stahlfasergehaltes bedeutet somit:

1. eine Verringerung bzw. Vergrößerung der Kratertiefe  $T_k$ . Der Stahlfaserbeton kann höhere bzw. geringere Druckspannungen aufnehmen.
2. eine Verringerung bzw. Vergrößerung der Abplatzungstiefe  $T_a$ . Mit zunehmender bzw. abnehmender Druckfestigkeit  $f_c$ , wird gleichzeitig die Zugfestigkeit  $f_t$  erhöht bzw. verringert. Somit kann der Stahlfaserbeton größere bzw. geringere Zugspannungen aufnehmen.

Um den Einfluss des Stahlfasergehaltes auf die Schädigungstiefen genauer zu untersuchen, wurden numerische Studien durchgeführt, bei denen der Stahlfasergehalt  $V_f$  von 0.0 bis 1.5 Vol-%, die Sprengladungsmenge  $m$  und die Bauteildicke  $T$  variierten. Aus den Schädigungsbildern sind die Kratertiefe  $T_k$  und die Abplatzungstiefe  $T_a$  abgelesen und in einem Diagramm dargestellt (Abbildung 8.23). Dort sind auf der Abszisse der Stahlfasergehalt  $V_f$  und auf der Ordinate die auf die Bauteildicke  $T$  normierten Schädigungstiefen  $T_k$  und  $T_a$  angetragen.

Aufgrund der verschiedenen Bauteildicken  $T$  liegen bei beiden Schädigungstiefen  $T_k$  und  $T_a$  Geradenscharen vor, die alle mit einer linearen Funktion beschrieben werden. In das Diagramm ist repräsentativ je eine Funktion für die normierte Kratertiefe  $T_k/T$  und für die normierte Abplatzungstiefe  $T_a/T$  eingelegt, da alle Geraden für die Kratertiefe  $T_k/T$  nahezu die gleiche Steigung von -0.0428 und alle Geraden für die Abplatzungstiefe  $T_a/T$  nahezu die gleiche Steigung von -0.0259 aufweisen.

**Bemerkung:** Eine Erhöhung des Stahlfasergehaltes gegenüber reinem Beton ( $V_f=0.0$  Vol-%) führt in *beiden* Fällen zu einer Abnahme der Schädigungstiefen  $T_k$  und  $T_a$ .

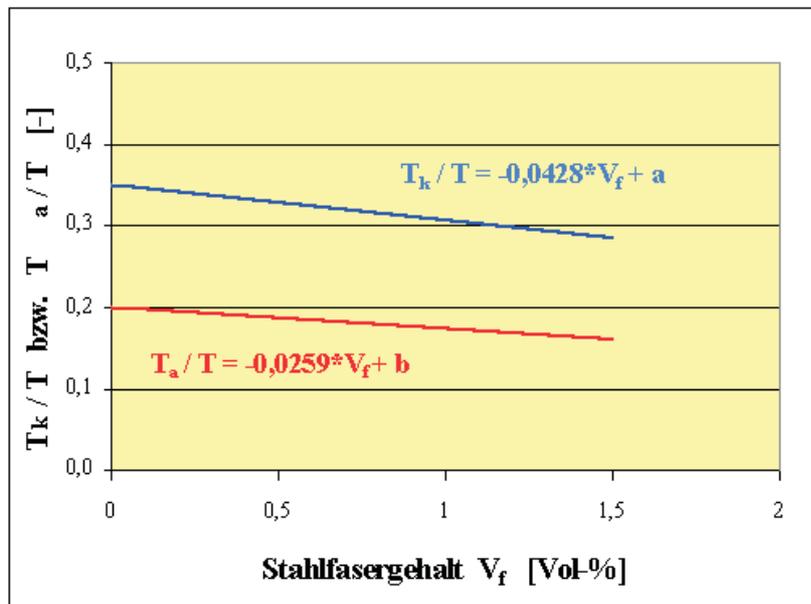


Abbildung 8.23: Verlauf der Schädigungstiefen  $T_k$  und  $T_a$  bei Variation des Stahlfasergehaltes  $V_f$

#### 8.1.4.2 Zum Abplatzungsverhalten der wegfliegenden Trümmer

In den Überlegungen der Baustrukturdimensionierung oder des baulichen Schutzes ist das Abplatzungsverhalten der wegfliegenden Trümmer von Bedeutung. Unter den Gesichtspunkten:

1. Welche Geschwindigkeit besitzen die "wegfliegenden Trümmer" infolge der Detonationsbelastung?
2. Welche kinetische Energie wird durch das Lösen der "wegfliegenden Trümmer" im Abplatzungsbereich freigesetzt?
3. Wie groß ist der Sicherheitsabstand für Personen hinter einer angesprengten Wand zu wählen, beziehungsweise sind für dahinter liegende Konstruktionen Schutzvorkehrungen zu treffen, damit diese nicht durch die "wegfliegenden Trümmer" geschädigt werden (Abplatzschutz)?

sind folgende Ergebnisse aus der Gegenüberstellung der numerischen mit den experimentellen Untersuchungen gewonnen worden.

In einer numerischen Simulation werden zur Bestimmung der Abplatzungsgeschwindigkeit  $v_0$  der "wegfliegenden Trümmer" Messpunkte (Targets) in den Querschnitt einer betonartigen Platte eingelegt, deren Anordnung und Nummerierung der Abbildung 8.24 zu entnehmen ist. Im Hintergrund ist das dazugehörige Schädigungsbild dargestellt. Der Abstand der Targets untereinander beträgt hier beispielhaft horizontal 8.0 cm und vertikal 4.0 cm.

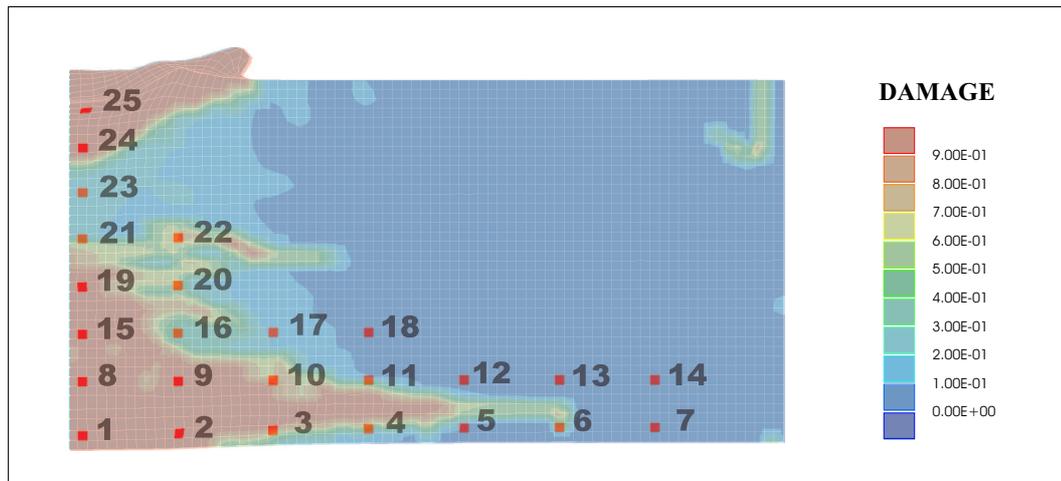


Abbildung 8.24: Anordnung und Nummerierung der in die Betonplatte S2P8 eingelegten Targets

Nach dem sich die endgültige Schädigungsevolution in der Platte eingestellt hat, werden die Target-Informationen ausgewertet. Die zeitliche Betrachtung der Abplatzungsgeschwindigkeiten  $v_0$  ist für die beiden unteren Messpunktzeilen in den Abbildungen 8.25 und 8.26 dargestellt.

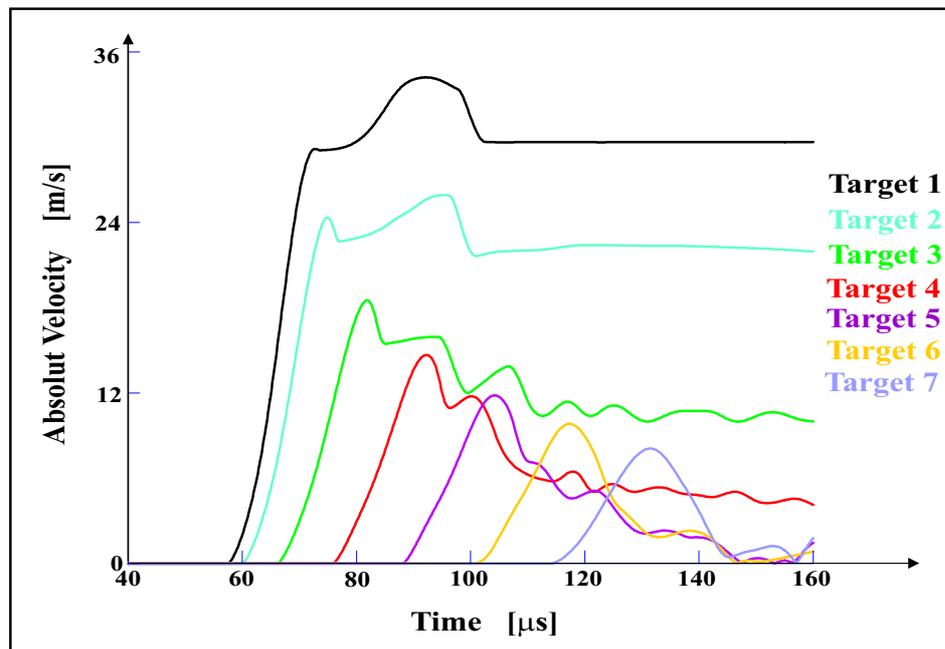


Abbildung 8.25: Verlauf der Abplatzungsgeschwindigkeit der Targets 1 bis 7

Die Maximalwerte der Verläufe stellen hierbei die Abplatzungsgeschwindigkeit des jeweilig betrachteten Messpunktes dar. Die in der Tabelle 8.8 zusammengefassten Abplatzungsgeschwindigkeiten  $v_0$  berücksichtigen nur die Messpunkte, die in dem Bereich der schädigungsrelevanten Schädigungsintensität liegen (Abschnitt 8.1.4.1).

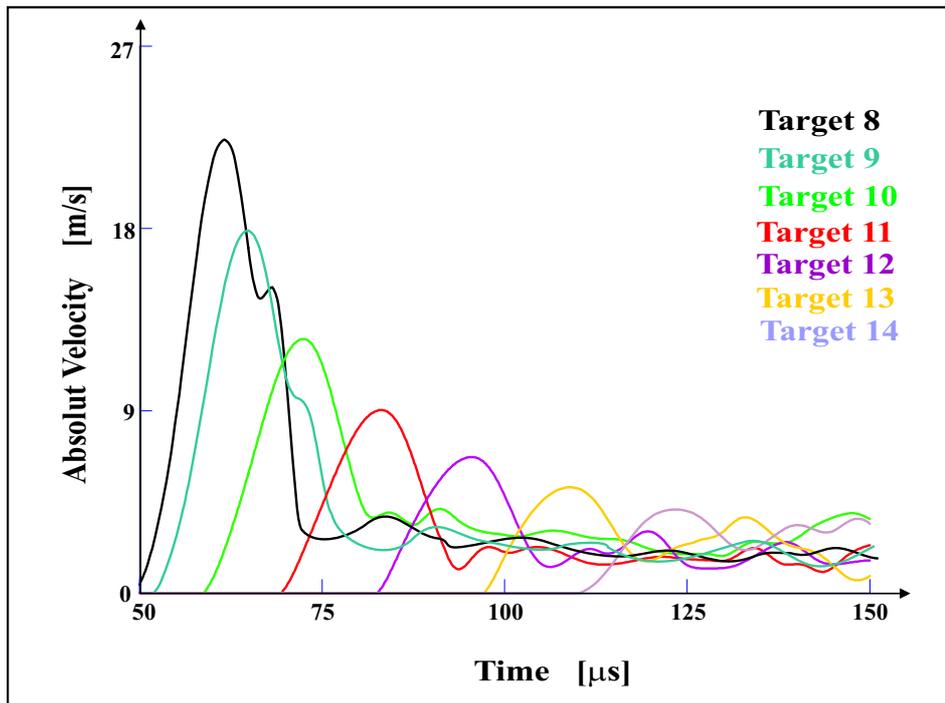


Abbildung 8.26: Verlauf der Abplatzungsgeschwindigkeit der Targets 8 bis 14

Tabelle 8.8: Abplatzungsgeschwindigkeiten  $v_0$  der Elemente mit Targets im Abplatzungsbereich

Messreihe 1		Messreihe 2		Messreihe 3		Messreihe 4		Messreihe 5	
Target	$v_0$								
[-]	[m/s]								
1	34.2	8	22.3	15	27.3	19	43.3	21	70.6
2	25.9	9	17.9	16	20.6	20	24.6	22	34.8
3	18.5	10	12.6	17	13.4	—	—	—	—
4	14.7	11	9.0	18	9.4	—	—	—	—
5	11.8	12	6.7	—	—	—	—	—	—
6	9.8	—	—	—	—	—	—	—	—

Die ermittelten Abplatzungsgeschwindigkeiten bestätigen die Aussagen des Technical Manual TM5-855-1, Ch. 17.3.7.5.1 [207], in dem von *spall velocity ranges from about 6 to 60 m/s* die Rede ist. Auch die Auswertung der Feldversuche der WTD 52 ergab Geschwindigkeiten der "wegfliegenden Trümmer" von 6 bis 50 m/s [130].

Aus den detaillierten Untersuchungen von GEBBEKEN & RÜDIGER 2004 [78] zur geometrischen Form des Abplatzungsvolumens der wegfliegenden Trümmer geht aus den Gegenüberstellungen der numerischen Simulationen mit den Versuchsergebnissen hervor, dass die Kegelstumpfform

mit

$$V^{trümm} = 0.301 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \left( D_a^{trümm} \right)^2 \cdot T_a^{trümm} \quad (8.12)$$

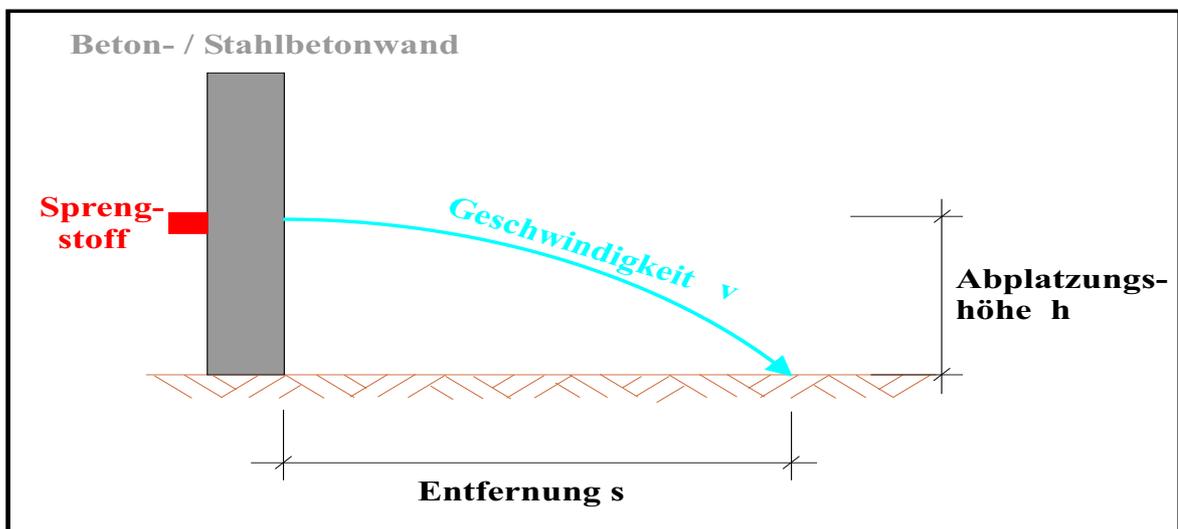
am besten das Volumen der abgelösten Trümmer  $V^{trümm}$  bei unbewehrten (Stahlfaser-)Betonplatten approximiert. Die Abplatzungstiefe  $T_a^{trümm}$  und der Abplatzungsdurchmesser  $D_a^{trümm}$  lassen sich gemäß der im vorherigen Abschnitt 8.1.4.1 festgelegten Interpretation des numerisch erzeugten Schädigungsbildes bestimmen.

Für die Volumenberechnung beim Stahlbeton kann der Ansatz über den Kegel nicht verwendet werden, da sich der Abplatzungsbereich aufgrund der unteren Bewehrungslage nicht so stark ausbilden kann. Es ist in zukünftigen Untersuchungen zu überlegen, ob das Volumen über mehrere Teilvolumen ermittelt werden kann.

Die Versuchsergebnisse von LANDMANN (s.a. Versuchsaufbau in Abbildung 1.7) zeigen die unterschiedlichen Entfernungen der sich von der vertikal aufgestellten Wand gelösten Bruchstücke, was auf unterschiedliche Abplatzungsgeschwindigkeiten  $v_0$  der Bruchstücke schließen lässt.

Aus den dokumentierten Massen und Entfernungen sowie aus der bekannten Abplatzungshöhe  $h$ , wie dies in den Abbildungen 8.27 und 1.7 im Versuchsaufbau illustriert ist, lässt sich unter Anwendung der Wurfparabelgleichung

$$v_0 = s \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot h}} \quad (8.13)$$



**Abbildung 8.27:** Parameter zur Ermittlung der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  mittels der Wurfparabel unter Voraussetzung der bekannten Erdbeschleunigung mit  $g = 9.81m/s^2$  die Anfangsgeschwindigkeit der Bruchstücke berechnen.

Die Anfangsgeschwindigkeiten sind sowohl qualitativ als auch quantitativ von den numerischen Vergleichsberechnungen aus Tabelle 8.8 bestätigt.

Die Gesamtmasse der "wegfliegenden Trümmer"  $m_c^{trümm}$  ergibt sich aus der Multiplikation der Materialdichte  $\rho_c$  mit dem Volumen  $V^{trümm}$  aus Gleichung (8.12) zu:

$$m_c^{trümm} = \rho_c \cdot V^{trümm} . \quad (8.14)$$

Mit Hilfe der Masse und der Anfangsgeschwindigkeit kann die kinetische Energie  $E_{kin}$  ermittelt werden. Hierzu bedarf es einer genaueren Zuordnung der Masse eines Bruchstückes mit der dazugehörigen Anfangsgeschwindigkeit. Einem Target im Querschnitt wird daher eine bestimmte Fläche zugewiesen, die von den Abständen der Targets untereinander abhängt. Aufgrund der Rotationssymmetrie können die Volumen für ein Target  $i$  über Zylinder bzw. Hohlzylinder bestimmt werden. Die Masse  $m_{c,i}^{trümm}$  eines Targets ist

$$m_{c,i}^{trümm} = \rho_c \cdot V_i^{trümm} . \quad (8.15)$$

Die gesamte kinetische Energie  $E_{kin}^{trümm}$  der "wegfliegenden Trümmer" ist die Summe über alle relevanten Targets  $k$  mit

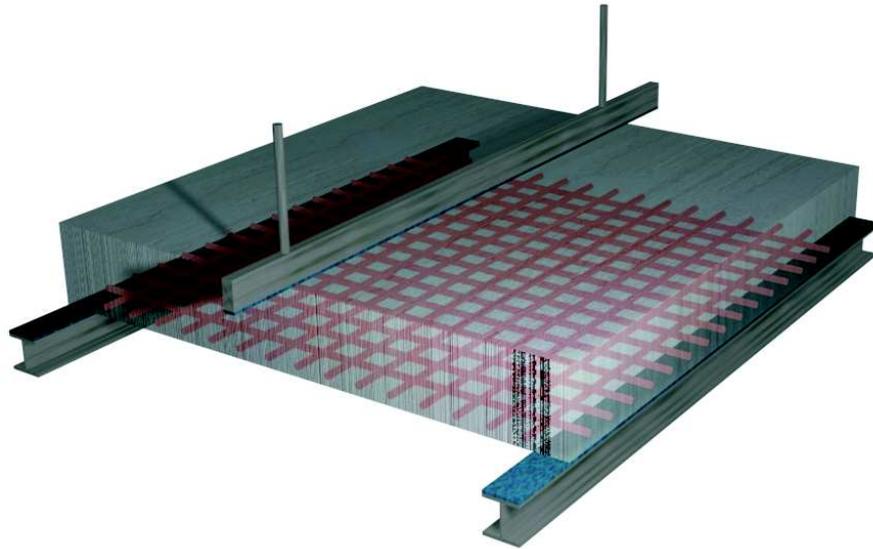
$$E_{kin}^{trümm} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k m_{c,i}^{trümm} \cdot v_{0,i}^2 . \quad (8.16)$$

Mit diesen Kenntnissen können Maßnahmen zum Abplatzschutz getroffen oder ein eventuell notwendiger Sicherheitsabstand festgelegt werden.

### 8.1.4.3 Aussagen zur Tragfähigkeit von ungeschädigten und von geschädigten betonartigen Platten

Neben der Degradation der Materialeigenschaften wie Festigkeit und Steifigkeit, führt das Lösen der Betonbruchstücke zu einer Querschnittsminderung und damit zu einer reduzierten Tragfähigkeit einer angesprengten Platte. Um daher Aussagen über dieses Tragverhalten machen zu können, wird am Institut für Mechanik und Statik in einem anderen Forschungsprojekt derzeit die verformte und geschädigte Struktur von AUTODYN über eine eigens entwickelte Schnittstelle in einen FE-Code transformiert, um mit diesem für statische Belastungen geeigneteren FE-Code die Grenzlast festzustellen (GEBBEKEN & WESTERMEIER 2004 [80]). Die numerischen Ergebnisse werden mit durchgeführten Abdruckversuchen (MANGERIG 2002 [144]) sowohl an ungeschädigten als auch an geschädigten Stahlbetonplatten verglichen. Daraus können dann u.a. Rückschlüsse auf die Qualität der hier implementierten Schädigungsgesetze gemacht werden.

Der Versuchsaufbau zur Ermittlung der Resttragfähigkeit ist schematisch in Abbildung 8.28 illustriert.



**Abbildung 8.28:** Versuchsaufbau zur Ermittlung der statischen Grenzlast an einer Stahlbetonplatte (aus: BEHRING 2004 [19])

### 8.1.5 Bewertung der Ergebnisse zum Stahlfaserbetonmodell

Im ersten Teil dieses Abschnitts wurde anhand des einachsigen Zylinderdruckfestigkeitsversuchs die aus Experimenten bekannten Druckspannungs–Stauchungs–Beziehungen mit dem neuen Werkstoffmodell für Stahlfaserbeton nachgerechnet. Dabei lieferten die Berechnungen mit dem Modell gute Übereinstimmungen der maximalen Druckspannungen für verschiedene Stahlfasergehalte mit den Versuchsdaten (maximal 5% Abweichung). Der Vergleich der zur maximalen Druckspannung zugehörigen Stauchung aus numerischer Berechnung und Versuch führte zu einer Abweichung von ungefähr 50%. Dies ist auf die konstante Steifigkeit der Betonproben in den Experimenten zurückzuführen, während im Werkstoffmodell eine nach Stahlfasergehalt höhere Steifigkeit angesetzt wird. Dieser Ansatz im Modell ist sinnvoll und gemäß den Angaben des Herstellers der Stahlfasern und aktueller Versuchsdaten begründet.

In der folgenden Verifikation des Modells erfolgte eine erfolgreiche Vergleichsstudie von einer Simulation mit dem neuen Stahlfaserbetonmodell und dem entsprechenden Versuch anhand des Flyer–Plate–Impact Tests. Hierbei zeigten die Ergebnisse mit dem Modell die realitätsnahe Abbildung der hydrodynamischen Spannungszustände.

Die Praxistauglichkeit bewies das neue Stahlfaserbetonmodell bei den Vergleichsstudien von angesprengten unbewehrten und bewehrten (Stahlfaser-)Betonplatten. Es konnten qualitative und quantitative Aussagen zur Schädigung relativ genau vorausgesagt werden. Aus den Studien ließen sich die Schädigungsabmessungen für die Kratertiefe, für die Abplattungstiefe und den Abplattungsdurchmesser gut ermitteln. Defizite lagen allein bei der Bestimmung des Kraterdurchmes-

sers. Dies ist auf eine mangelhafte Abbildung der Oberflächenwellen zurückzuführen, deren Energie die Schädigung an der ladungszugewandten Seite erzeugen. Die durch die Longitudinal- und Transversalwellen hervorgerufenen Schädigungen insbesondere im Abplatzungsbereich konnten hingegen sehr gut numerisch erfasst werden.

## 8.2 Zum Stahlbetonverbund

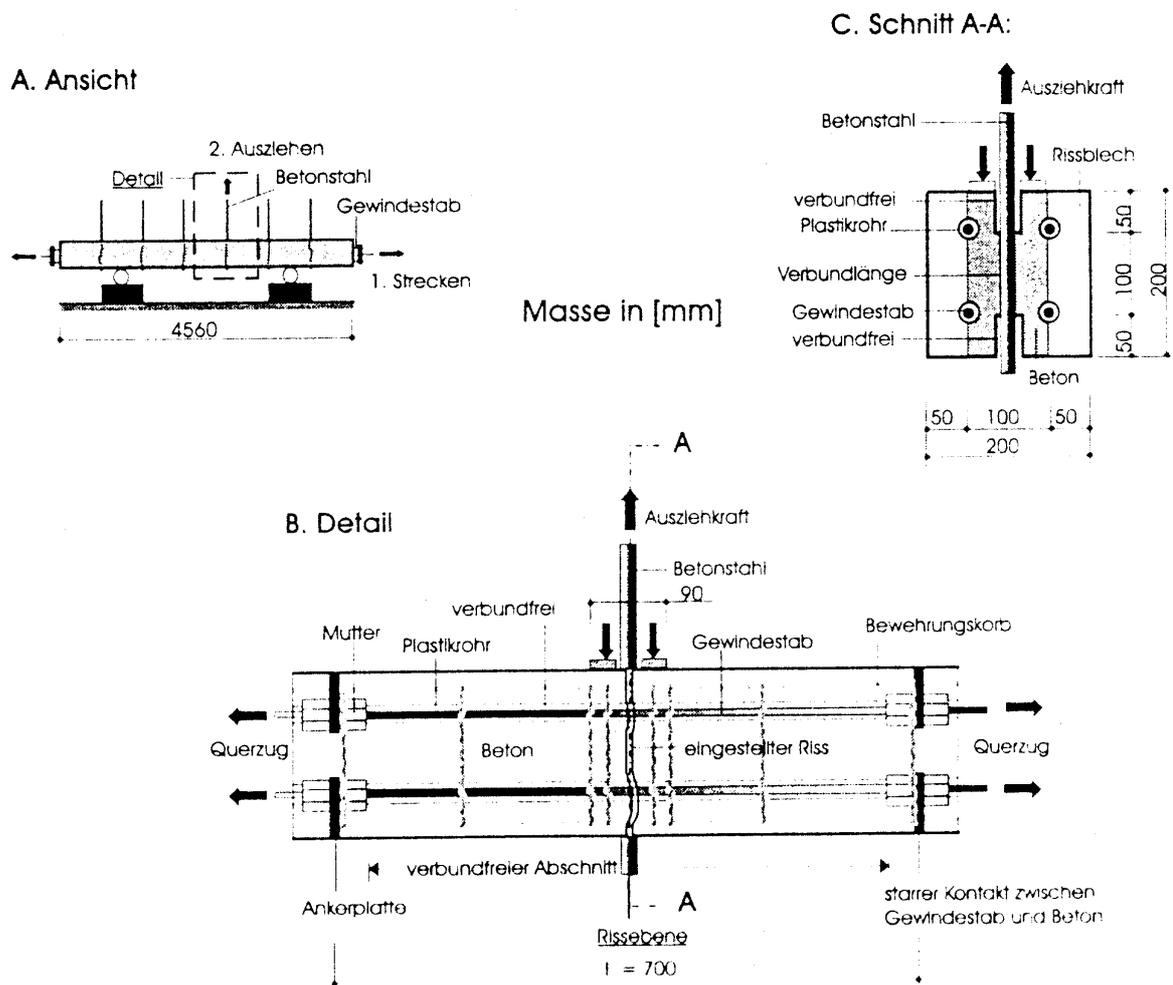
### 8.2.1 Numerische Verifikation des Stahlbetonverbundmodells

Im Folgenden werden anhand von ausgewählten Versuchen die hergeleiteten Verbundgesetze der Verbundspannungs–Verformungs–Beziehungen verifiziert und deren wichtigste Ergebnisse vorgestellt. Insbesondere werden aus der Literatur bekannte quasistatische und dynamische Ausziehversuche nachgerechnet und die numerischen Ergebnisse den experimentellen Daten gegenübergestellt. Anhand von Konvergenzstudien wird die Abhängigkeit der Verbundspannungs–Verformungs–Beziehungen von der Verbundelementdicke untersucht.

#### 8.2.1.1 Verifikation der Numerik am Modell des statischen Ausziehversuchs

Als Referenz für die statischen Ausziehversuche werden die Ergebnisse der Arbeit von IDDA 1999 [109] genommen. Er führte eine große Anzahl von Versuchen unter gleichen Bedingungen durch und überprüfte seine experimentellen Daten mit Ergebnissen aus der Literatur. Entscheidender Vorteil ist neben der Aktualität der Arbeit die präzise Angabe aller wesentlichen Materialparameter, der Versuchsdurchführung und die Berücksichtigung der Rissöffnung in seinen Untersuchungen. Der Versuchsaufbau und der Prüfkörper sind in der Ansicht, im Längs- und im Querschnitt in Abbildung 8.29 dargestellt. Die Belastung ist quasistatisch, so dass keine Ratenabhängigkeit die Verbundeigenschaften beeinflusste.

Als Basis wird der Ausziehversuch mit der Bezeichnung BA11 von IDDA gewählt. Hierbei handelt es sich um einen Betonstahl mit einem Nenndurchmesser von  $d_s = 16$  mm, der aus einem Betonkörper mit einer Würfeldruckfestigkeit von  $f_c = 37$  MPa heraus gezogen wurde. Die voreingestellte Rissöffnung betrug  $w_0 = 0.0$  mm. Die geometrischen Abmessungen des Betonstahls sind nach Tabelle 5.6 bekannt. Damit liegen alle Parameter vor, die zur Berechnung der Verbundspannungen benötigt werden. Aus der Belastung und der Antwort des Gesamtsystems ergeben sich die Verformungsgrößen  $\delta$  und  $w$ .

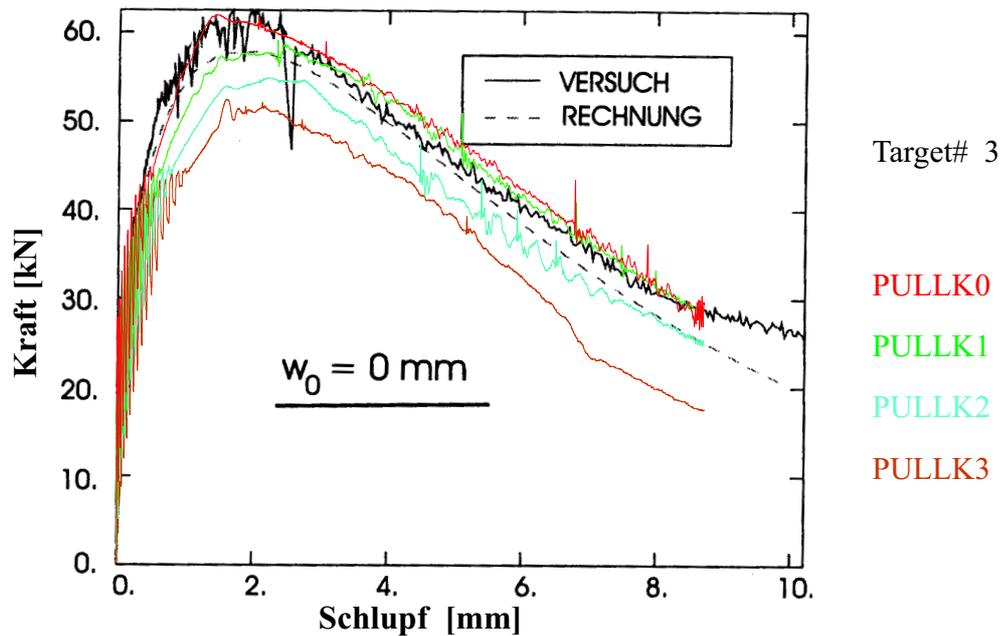


**Abbildung 8.29:** Versuchsaufbau und Prüfkörper in der Ansicht, im Längs- und im Querschnitt (aus: IDDA 1999 [109])

Wie in Abbildung 8.30 dargestellt, erfolgt die Diskretisierung in AUTODYN in Anlehnung an den Versuchsaufbau und an das von IDDA gewählte numerische Modell unter der Ausnutzung der Symmetriebedingungen. Demnach erfolgt die Berechnung lediglich mit einem Viertel-Ausschnitt. Die Belastung wird durch eine direkt an dem Bewehrungsstahl angreifende Zugkraft aufgebracht. Am unteren Rand ist der Prüfkörper in vertikaler Richtung gelagert, so dass die Verschiebung in dieser Richtung unterbunden ist.

Die Elemente des Betons (RGGP-Modell), die Elemente des Betonstahls (BSt 500 RK Modell) und die Elemente des Verbunds (GRECON-Modell) werden mit einer LAGRANGE-Diskretisierung abgebildet. Die Materialdaten entsprechen den im Abschnitt 7.2, im Abschnitt 7.3 und im Abschnitt 7.4 eingeführten konstitutiven Gleichungen für den reinen Beton, für den Betonstahl BSt 500 RK und für den Stahlbetonverbund.

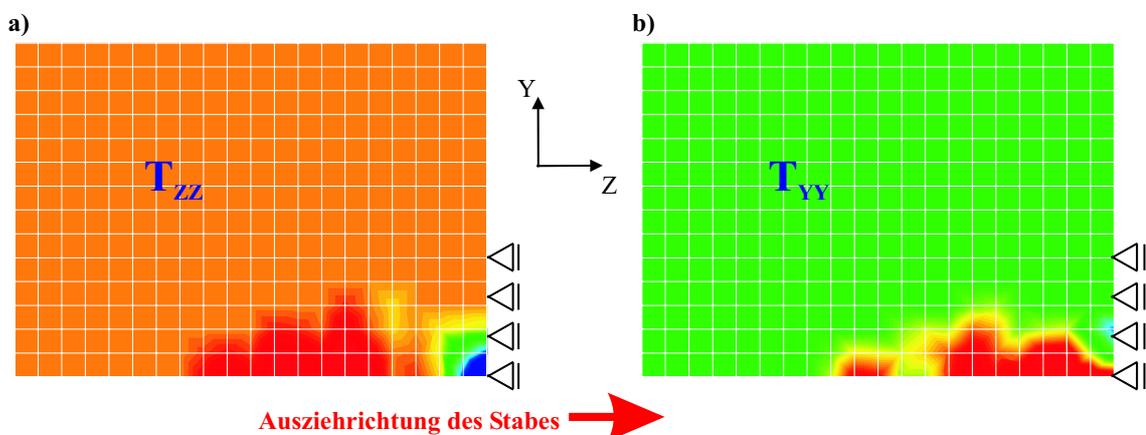




**Abbildung 8.31:** Vergleich Ausziehkraft–Schlupf–Beziehung aus der numerischen Simulation mit den Versuchsergebnissen der von IDDA durchgeführten Versuchsreihe BA11 unter Berücksichtigung der Konvergenzstudie zur Verbundelementdicke

der Zustandsgrößen zurückzuführen (s. Abbildung 4.2). Hydrocodes sind für Strömungsvorgänge konzipiert und haben häufig Schwächen, das statische Verhalten insbesondere während der Last-einleitung abzubilden.

Ergänzend sind auf dem linken Bild in 8.32, vereinfacht in der Seitenansicht (YZ–Ebene) dargestellt, die Betonspannungen in paralleler Richtung zum Ausziehen des Stabes illustriert. Die Elemente des Betonstahls und des Verbunds sind nicht abgebildet. Hier ist der Druckkegel in der

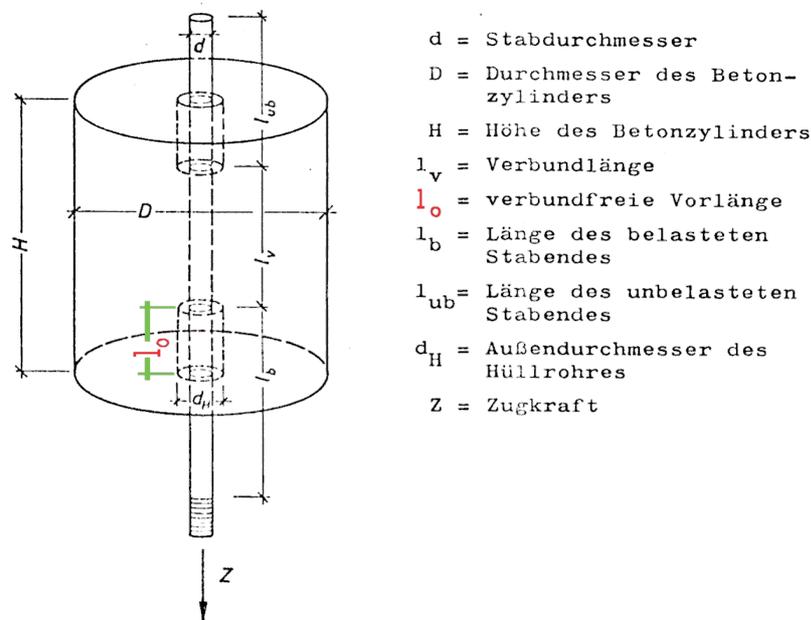


**Abbildung 8.32:** Qualitative Darstellung a) des Druckkegels infolge Verbundwirkung, b) der Ringzugspannungen in Stabnähe infolge der Verbundwirkung

Nähe der ringförmigen Widerlager gut erkennbar. Auf dem rechten Bild sind die Ringzugspannungen in senkrechter Richtung zum Ausziehen des Stabes dargestellt. Die Ergebnisse stimmen qualitativ mit den theoretischen Erkenntnissen der Längsrißbildung nach TEPFERS 1979 [205] überein, der den Spannungszustand innerhalb der Betondeckung mit dem einer Kreisringscheibe unter Innendruck verglich und damit die senkrecht zum Stab wirkende Verbundkraft bestimmte.

### 8.2.1.2 Zur Simulation des dynamischen Ausziehversuchs

Bei der Verifikation am Modell des dynamischen Ausziehversuchs handelt es sich um die Nachberechnung eines von HJORTH 1976 [102] durchgeführten Versuchs zur Untersuchung der Ratenabhängigkeit auf das Verbundtragverhalten. HJORTH variierte in seinen Ausführungen geometrische Parameter, die in Abbildung 8.33 gezeigt sind.



**Abbildung 8.33:** Versuchsaufbau zum dynamischen Ausziehversuch (aus: HJORTH 1976 [102])

Die hier durchgeführte Simulation wird mit dem Versuch von HJORTH verglichen. Aus ihr ergeben sich die Ergebnisse der ratenabhängigen Verbundfestigkeitssteigerung (Abbildung 5.25). Bei dem Versuch handelt es sich um einen Betonstahl mit einem Nenndurchmesser von  $d_s = 16$  mm, der aus einem Betonkörper mit einer Würfeldruckfestigkeit von  $f_c = 26$  MPa heraus gezogen wurde. Der gesamte zylinderförmige Prüfkörper hatte einen Durchmesser von  $D = 17.6$  cm und die Verbundlänge betrug  $l_v = 11.2$  cm. Die geometrischen Abmessungen des Betonstahls sind nach Tabelle 5.6 bekannt.

Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie erfolgt die numerische Simulation in AUTODYN entsprechend der in Abbildung 8.4 dargestellten Diskretisierung im zweidimensionalen Modell. Da-

bei werden die Erkenntnisse der Elementierung der Verbundelemente aus dem statischen Ausziehversuch aufgegriffen. Die Höhe der Verbundelemente entspricht demnach der Rippenhöhe der Bewehrungsstäbe.

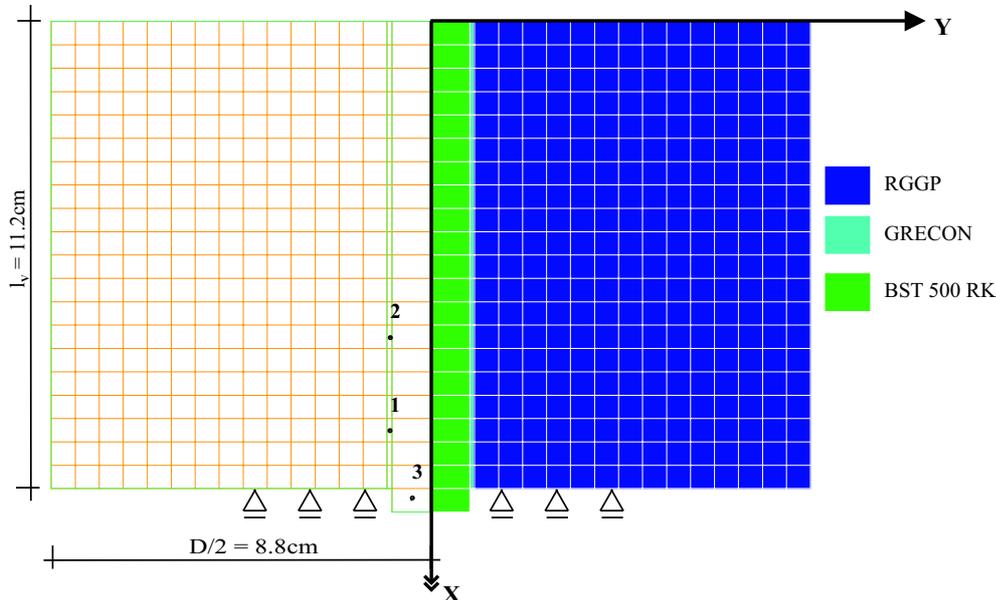
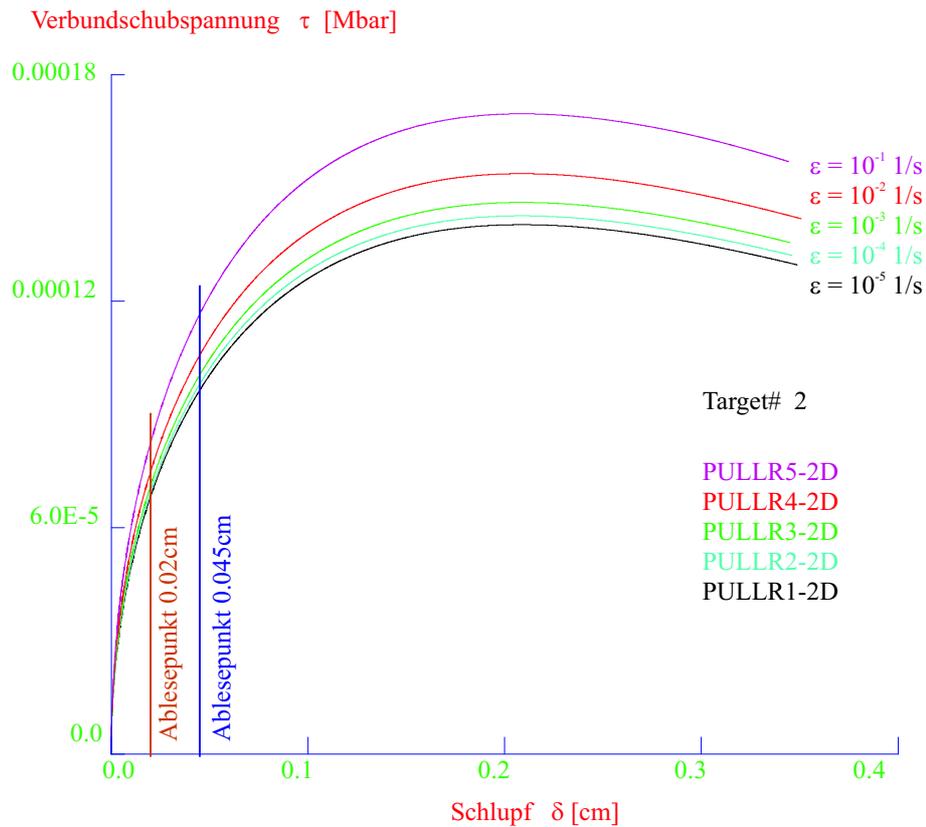


Abbildung 8.34: Diskretisierung des dynamischen Ausziehversuchs in AUTODYN

Wie beim statischen Ausziehversuch werden die Elemente des Betons (RGGP-Modell), die Elemente des Betonstahls (BSt 500 RK Modell) und die Elemente des Verbunds (GRECON-Modell) mit einer LAGRANGE-Diskretisierung abgebildet. Die Materialdaten entsprechen den im Abschnitt 7.2, im Abschnitt 7.3 und im Abschnitt 7.4 eingeführten konstitutiven Gleichungen für den reinen Beton, für den Betonstahl BSt 500 RK und für den Stahlbetonverbund.

Die Belastung wird durch eine direkt an dem Bewehrungsstahl angreifende Zugkraft aufgebracht, wobei die Belastungsgeschwindigkeit der Ausziehkraft variiert. Der Ausziehvorgang erfolgt in die Richtung der Rotationsachse X. Am unteren Rand ist der Prüfkörper in vertikaler Richtung gelagert, so dass die Verschiebung in dieser Richtung unterbunden ist. Die Verbundschubspannung  $\tau$  und der dazugehörige Schlupf  $\delta$  werden in dem im Bild eingetragenen Messpunkt Nr. 2 im Verbundelement für unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeiten ausgewertet, um die dynamische Verbundfestigkeitssteigerung zu untersuchen.

In Abbildung 8.35 sind die Verbundspannung-Schlupf-Beziehungen für verschiedene Verzerrungsraten aus den numerischen Simulationen dargestellt. Dabei wird die Zunahme der Verbundfestigkeit  $\tau$  in Abhängigkeit von der Verzerrungsrate deutlich. Für den Vergleich mit den Versuchsergebnissen von HJORTH werden die Verbundspannungen bei einem Schlupf von  $\delta = 0.2 \text{ mm}$  abgelesen, wie dies für die Auswertung der dynamischen Verbundfestigkeitssteigerung  $x_s = \tau/f_c$  in Abschnitt 5.4.3 bereits erläutert wurde.



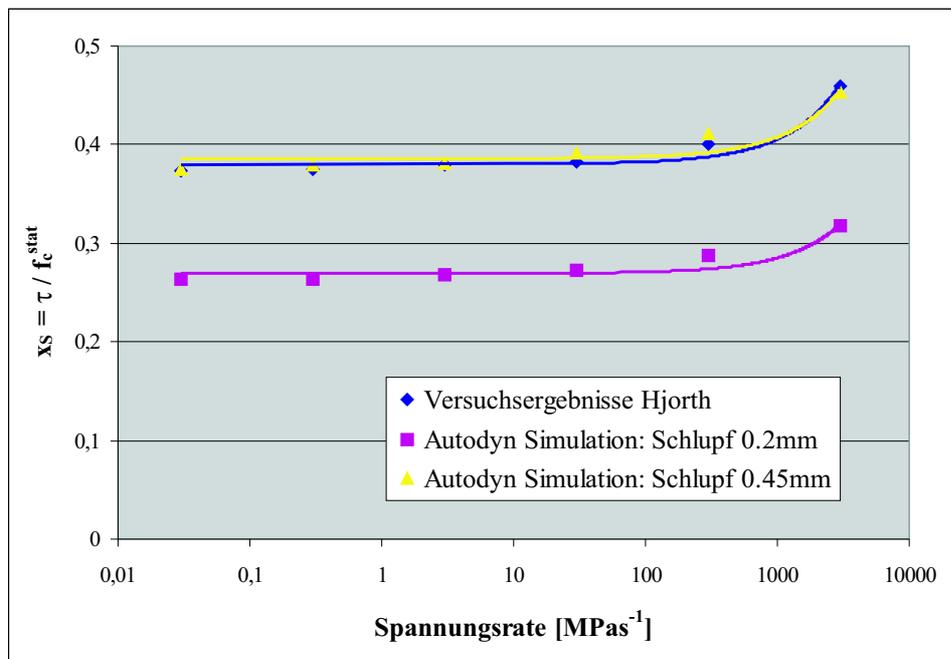
**Abbildung 8.35:** Verbundschubspannung–Schlupf–Beziehungen bei variierenden Belastungsgeschwindigkeiten

Die abgelesenen Daten aus der Hydrocode–Analyse sind für den Vergleich mit den Versuchsergebnissen von HJORTH übersichtlich in der Tabelle 8.9 zusammengefasst. Offensichtlich liegen die Versuchsdaten im Vergleich zu den in AUTODYN ausgewerteten Daten beim in Abbildung 8.35 eingetragenen Ablesepunkt von  $\delta = 0.2 \text{ mm}$  stets oberhalb der numerischen Werte. Werden

**Tabelle 8.9:** Gegenüberstellung der dynamische Verbundfestigkeitssteigerung aus der numerischen Simulation mit den Versuchsdaten von HJORTH 1976 [102]

Name	Verzerrungsrate [1/s]	Spannungsrate [MPa/s]	Normierte Verbundfestigkeit $\tau/f_c$ bei				Vergleich Spalte 5 & 6 Abweichung [%]
			$\delta = 0.2 \text{ mm}$		$\delta = 0.45 \text{ mm}$		
			AUTODYN	Versuch	AUTODYN	Versuch	
PULLR0	$10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-2}$	0.263	0.374	0.375	—	0.27
PULLR1	$10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-1}$	0.264	0.375	0.380	—	1.33
PULLR2	$10^{-4}$	$3 \cdot 10^0$	0.268	0.379	0.381	—	0.53
PULLR3	$10^{-3}$	$3 \cdot 10^1$	0.272	0.383	0.392	—	2.35
PULLR4	$10^{-2}$	$3 \cdot 10^2$	0.287	0.400	0.411	—	2.75
PULLR5	$10^{-1}$	$3 \cdot 10^3$	0.318	0.460	0.453	—	-1.52

die Verbundspannungen bei einem Schlupf von  $\delta = 0.45 \text{ mm}$  ausgewertet, so lassen sich die Versuchsergebnisse von HJORTH nahezu identisch bestimmen (maximale Abweichung 2.75%). Im Diagramm in Abbildung 8.36 ist die dynamische Verbundfestigkeitssteigerung  $x_s = \tau/f_c$  gegenüber der Spannungsrate sowohl für die beiden Ergebnisse der numerischen Berechnungen als auch den Versuchsdaten dargestellt.



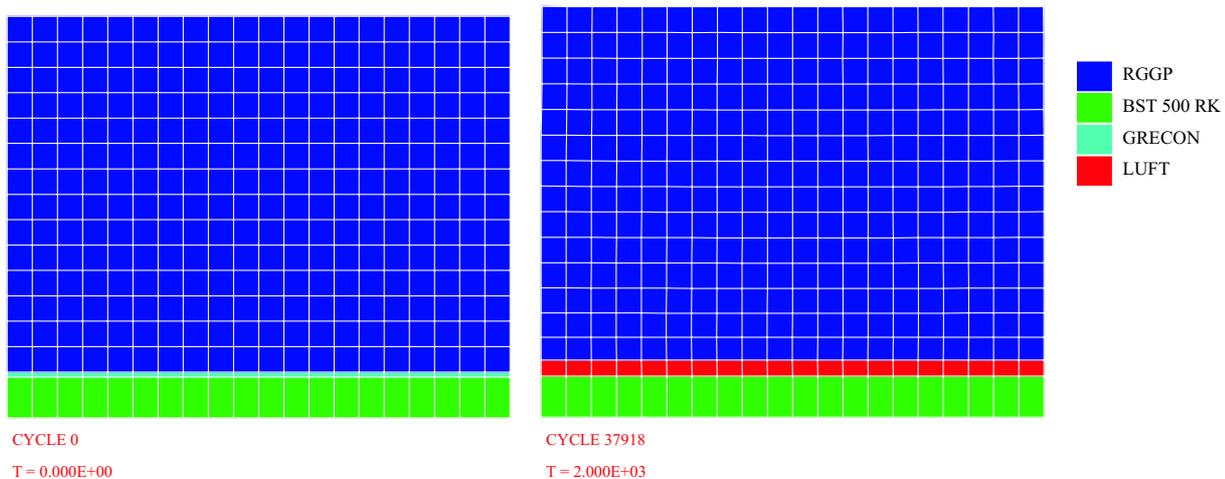
**Abbildung 8.36:** Vergleich der dynamischen Verbundfestigkeitssteigerungen aus den Versuchsergebnissen von HJORTH und aus den AUTODYN-Simulationen

Es wird deutlich, dass mit dem neuen Verbundmodell der dynamische Ausziehversuch abgebildet werden kann. Die Steigerung der Verbundfestigkeit lässt sich gut ermitteln. Für eine präzise Auswertung sind allerdings die Werte bei einem Schlupf von  $\delta = 0.45 \text{ mm}$  und, nicht wie bei den Versuchen, bei einem Schlupf von  $\delta = 0.2 \text{ mm}$  abzulesen. Eine Begründung hierfür gibt es nicht. Es sei aber angemerkt, dass die Betonzusammensetzungen der Versuche von HJORTH aus 1976 und von IDDA aus 1999 für die neu entwickelten Verbundspannung–Schlupf–Beziehungen den ausschlaggebenden Einfluss auf die Ergebnisse haben könnten.

### 8.2.1.3 Berücksichtigung der Rissöffnung

In der folgenden Studie wird das "Umschalten" der Materialmodelle bei fortgeschrittener Rissöffnung gemäß dem in Abschnitt 7.4 entwickelten Ansatz gezeigt. Hierzu wird wieder das Beispiel des dynamischen Ausziehversuchs mit den entsprechenden geometrischen Abmessungen und den Materialdaten des Prüfkörpers aus Abbildung 8.34 verwendet, wobei allerdings auf ein Ausziehen des Stabes verzichtet wird. Um die Rissöffnung zu erzeugen wird, auf den Beton in

Ringrichtung eine Geschwindigkeit mit einer Belastung aufgebracht.



**Abbildung 8.37:** Fortschreitende Rissöffnung und "Umschalten" der Materialmodelle von Verbund auf Luft bei  $\frac{w}{h_s} = 2.60$

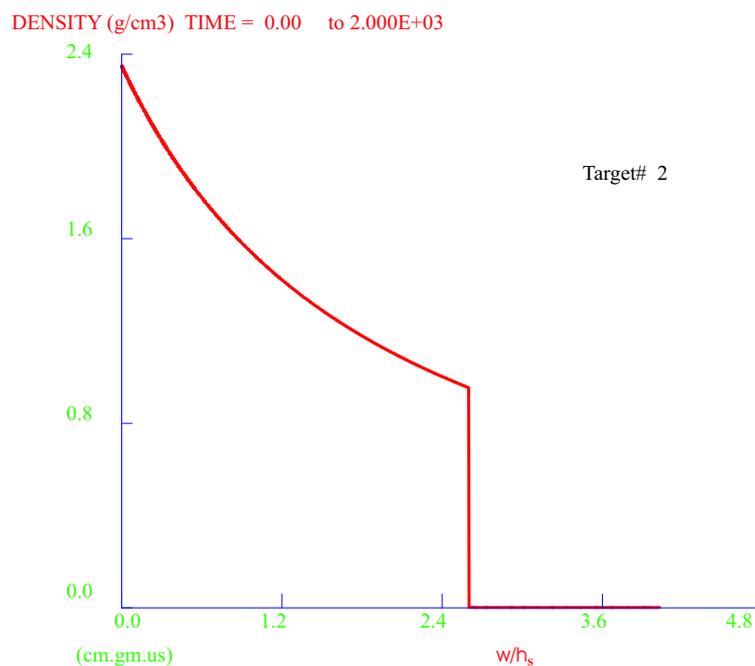
Der in Abbildung 8.37 dargestellte Materialstatus der Elemente zeigt im Ausgangszustand die Zuordnung der Modelle für den Betonstahl (BSt 500 RK), für den Stahlbetonverbund (GRECON) und für den Beton (RGGP). Die Zuordnung des Modells in der Verbundschicht ändert sich, sobald das Verhältnis der Rissöffnung zur Rippenhöhe von  $\frac{w}{h_s} = 2.60$  erreicht ist. Hierzu bedarf es bereits vor dem Start der Simulation, dass das Luftmodell für die Berechnung definiert wurde.

Die Abbildung 8.38 stellt den ermittelten Dichteverlauf mit dem Verhältnis der Rissöffnung zur Rippenhöhe in Beziehung. Die Auswertung erfolgte im Messpunkt Nr. 2. Es wird deutlich, dass ab  $\frac{w}{h_s} = 2.60$  sich die im aktuellen Zustand vorliegende Dichte von Beton auf Luft sprunghaft ändert. In der Simulation wird dem Verbundelement solange ein Luftmodell zugewiesen, bis die Berechnung beendet oder sich eine Risschließung eingestellt hat.

## 8.2.2 Bewertung der Ergebnisse zum Stahlbetonverbundmodell

Im ersten Teil dieses Abschnitts wurde anhand des statischen Ausziehversuchs die experimentell bekannten Kraft–Schlupf–Beziehung mit dem neuen Stahlbetonverbundmodell nachgerechnet. Ziel der Studie war, mit einer Konvergenzstudie die Verbundelementdicke zu untersuchen und für weitere Berechnungen festzulegen. Dabei wurde deutlich, dass mit einer Verbundelementdicke gleich der Rippenhöhe der Verlauf der Kraft–Schlupf–Beziehung aus der numerischen Berechnung den Versuch realitätsgetreu abbildet.

Dieses Ergebnis war wichtig für die folgende Verifikation des Modells am dynamischen Ausziehversuch. In den numerischen Berechnungen wurden Verbundspannung–Schlupf–Beziehungen unter verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten ermittelt. Die Verbundfestigkeitssteigerung wur-



**Abbildung 8.38:** Bezug zwischen der Materialdichte zur Rissöffnung im Verbundmodell

de ausgewertet und den Versuchsdaten gegenübergestellt. Nicht konform war die Auswertung der Verbundfestigkeitssteigerung, da die Werte bei einem Schlupf von  $\delta = 0.45 \text{ mm}$  aus der Hydrocode-Studie und, nicht wie bei den Versuchen, bei einem Schlupf von  $\delta = 0.2 \text{ mm}$  abzulesen sind. Dieses Ergebnis ließ sich nicht begründen.

Schließlich wurde in einer letzten Studie die erfolgreiche Berücksichtigung der Rissöffnung mit dem neuen Verbundmodell simuliert. Eine Änderung der Dichte von Beton zu Luft bei bestimmter Rissöffnung ermöglicht die Berücksichtigung der verbesserten Beschreibung der Wellenausbreitung in zukünftigen Studien.



## Kapitel 9

# Zusammenfassende Bewertung

### 9.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Fragestellung, die Auswirkungen von Detonationseinwirkungen auf betonartige Strukturen möglichst wirklichkeitsnah in einer Computersimulation abzubilden. Hierzu bedarf es geeigneter und zuverlässiger Werkstoffmodelle für den Stahlbeton und für den Stahlfaserbeton, die in der Lage sind, die im Abschnitt 1.2 beschriebenen charakteristischen Merkmale der Wellenfortpflanzung im heterogenen Werkstoff modellieren zu können. Diese Modelle wurden in dieser Arbeit entwickelt und in eine Hydrocode-Umgebung eingebettet. Einleitend sind die mechanischen Grundlagen, die Phänomene der Wellenausbreitung in inhomogenen Medien, die Charakteristika von Detonationsvorgängen und deren Umsetzung in das Finite-Differenzen-Verfahren unter Berücksichtigung des expliziten Zeitintegrationsalgorithmus erläutert worden, auf deren Grundlagen sich die Modelle stützen. Nach einem aus der Literatur zusammengefassten Überblick über die wesentlichen makromechanischen statischen und dynamischen Werkstoffeigenschaften erfolgte die Einführung in die stoffabhängigen konstitutiven Beziehungen des Kontinuums. Unter der Verwendung der für Hydrocodes typischen entkoppelten Darstellung von Zustandsgleichung für das Kompressionsverhalten und vom Festigkeitsmodell für die Beschreibung des deviatorischen Materialverhaltens wurden die verallgemeinerten Materialgleichungen aus den klassischen Materialtheorien unter Anwendung der spannungsbasierten Plastizitätstheorie in Verbindung mit einer isotropen Kontinuumsschädigungstheorie hergeleitet und speziell die Annahmen für die Umsetzung in der Hydrocode-Umgebung diskutiert.

Schwerpunkt der Arbeit bildet die konkrete Umsetzung der Theorien in geeignete Werkstoffmodelle für den Stahlfaserbeton und für den Stahlbetonverbund. Die Stoffparameter, die das Materialverhalten zum einen so wirklichkeitsnah wie möglich und zum anderen so effizient in der Handhabung wie nötig charakterisieren, wurden hergeleitet und zur Verfügung gestellt. Ergänzend wurden zur vollständigen Beschreibung des Stahlbetons die Materialparameter des Betonstahls nach DIN 488 in ein bestehendes Materialmodell für Metalle angepasst.

Alle in dieser Arbeit entwickelten Ansätze der Werkstoffmodelle wurden numerisch umgesetzt, jeweils anhand von Beispielen verifiziert und deren Anwendung durch Vergleichsberechnungen mit vorliegenden Strukturversuchen veranschaulicht.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden insbesondere die folgenden Aspekte bearbeitet, um damit die Palette der bisher entwickelten und in Hydrocodes implementierten Werkstoffmodelle um das Stahlfaserbetonmodell für variable baupraktische Stahlfasergehalte bis 2.0 Vol.-% und um das Stahlbetonverbundmodell zu erweitern:

- Gegenüberstellung und Bewertung der spannungsbasierten Plastizitätstheorie und der isotropen Kontinuumsschädigungstheorie mit den in der Hydrocode-Umgebung vorliegenden Vereinfachungen und Annahmen der Materialgleichungen,
- Zum Stahlfaserbeton:
  - Herleitung der charakteristischen Parameter einer porösen Zustandsgleichung für variable Stahlfasergehalte,
  - Entwicklung einer generalisierten Bruchfläche, die die ratenabhängige Verfestigung und schädigungsabhängige Entfestigung beinhaltet, und deren Materialparameter physikalisch interpretierbar und damit für verschiedene Stahlfasergehalte ableitbar sind,
  - Umsetzung eines phänomenologischen Schädigungsgesetzes unter Berücksichtigung der Schädigung aus Gestaltänderung (plastische Verzerrung) und der Schädigung aus Kompaktion,
  - Anwendung der Schädigungsevolution auf die isotrope Kontinuumsschädigungsmechanik über die Degradation der makromechanischen Materialeigenschaften wie Steifigkeit und Festigkeit,
- Zum Betonstahl:
  - Herleitung der dynamischen Betonstahlparameter und Implementierung in ein bestehendes Materialmodell für Metalle,
- Zum Stahlbetonverbund:
  - Bereitstellung eines verallgemeinerten Modells zur Beschreibung der Verbundspannungen in Abhängigkeit der Rippenhöhe, des Rippenabstands, des Schlupfs und der Rissöffnung,
  - Erweiterung dieses Modells hinsichtlich der ratenabhängigen Verfestigung,
  - Verwendung der porösen Zustandsgleichung für Beton im Verbundelement,

- Ändern der Materialeigenschaften des Verbundelementes bei erweiterter Rissöffnung zur Beschreibung des gelösten Verbunds (rekursiver Prozess bei Risschließung).

## 9.2 Bewertung

Die neuen Materialmodelle gewährleisten die kontinuierliche Abbildung vom statischen bis zum hochdynamischen, vom elastischen bis zum plastisch–schädigenden Werkstoffverhalten. Die wichtigsten Eigenschaften im Aufbau der Modelle sind:

1. Modulare Kopplung einzelner Phänomene: Damit können einzelne Module bei neuem Kenntnisstand oder für die Beschreibung ähnlicher Werkstoffe angepasst, verbessert oder sogar ausgetauscht werden.
2. Weitestgehend dimensionslose Formulierung: Damit wird die Unabhängigkeit gewährleistet, so dass beispielsweise beim Stahlfaserbeton nicht für jeden beliebigen Stahlfasergehalt oder beim Stahlbetonverbund nicht für jeden Betonstahl mit anderen Oberflächencharakteren eigene konstitutive Gesetze entwickelt werden müssen.
3. Aufspaltung der stoffabhängigen Beziehungen in hydrostatische und deviatorische Komponenten: Damit ist eine allgemeine Formulierung geschaffen, die die Implementierung der Modelle in gängige Hydrocodes ermöglicht.

Abschließend konnte im Abschnitt 8 die Anwendungstauglichkeit verdeutlicht werden. Sowohl die experimentellen Versuche zur Verifizierung der Modelle als auch die Anspannungen von Beton-, Stahlbeton- und Stahlfaserbetonplatten konnten erfolgreich abgebildet werden. Insbesondere wurde gezeigt, dass qualitative und quantitative Aussagen zur Klassifizierung der Schädigung unter Angaben zu den Schädigungsabmessungen, zum Abplatzungsverhalten der wegfliegenden Trümmer und zur Resttragfähigkeit einer durch Detonation geschädigten betonartigen Struktur gemacht werden können.

## 9.3 Ausblick

Mit der Bereitstellung der in dieser Arbeit entwickelten Werkstoffmodelle eröffnet sich ein breites Anwendungsspektrum für die in der Praxis weit verbreiteten Baustoffe Stahlbeton und zunehmend auch Stahlfaserbeton. Die Forderung, Bauteildimensionierungen häufig auch für außergewöhnliche Belastungen durchzuführen, ermöglicht Ingenieuren mit diesen Modellen die Auswirkungen von Detonationsbelastungen auf betonartige Strukturen qualitativ als auch quantitativ zu beurteilen.

Hauptsächlich liegt das Augenmerk aber im Bereich der Forschung. Wie in der vorangegangenen Bewertung beschrieben wurde, sind die Ansätze weitestgehend global formuliert, so dass neue Erkenntnisse des Werkstoffverhaltens sowohl die Verbesserungen oder den Austausch einzelner Module erlaubt, als auch die Anpassung der Materialparameter beispielsweise mit Bezug auf die postulierten Parameter im hochdynamischen Bereich ermöglicht.

Eine wesentliche Erkenntnis der Arbeit führt zwangsläufig zu der Frage, warum der Betonstahl mit Stabstahldurchmessern von minimal 6 mm als diskretes Kontinuum abgebildet werden soll, während der heterogene (Stahlfaser-)Beton mit Größtkörnern von bis zu 32 mm weiterhin als homogener Werkstoff modelliert wird. Insbesondere wo deutlich ist, dass an der Kontaktfläche zweier verschiedener Werkstoffe die Spannungswellenfortpflanzung entscheidend beeinflusst wird.

Wie bereits erwähnt, lieferte RIEDEL hierzu einen guten mesomechanischen Ansatz für ein repräsentatives Volumenelement für Beton in der Kurzzeitdynamik. Dieser Ansatz sollte übergreifend aus den Disziplinen der Kontinuums- und Schädigungsmechanik, der Wellenfortpflanzung, der angewandten numerischen Mechanik und der Versuchsmethoden auf der Ebene der Mesoskala durch separate Abbildung der Matrix und der Körner weiterentwickelt werden. Diese Forderung wird durch die zwingend erforderliche Elementierung im Millimeterbereich in der Computersimulation aufgrund der hohen Schockwellengeschwindigkeit unterstützt. Insbesondere die Abbildung nichtlokaler Effekte wie beispielsweise die Mikrorissbildung auf der Mikroebene sowie viskoser Effekte, die aufgrund der Beanspruchungsgeschwindigkeit auftreten, sollten implizit in einer Materialbeschreibung berücksichtigt werden. Deren geeignete materialphänomenologische Erfassung ist fundamental und gibt Aufschluss u.a. über die Entwicklung der Resttragfähigkeit in betonartigen Strukturen. Ergänzend können für die Herleitung konstitutiver Gleichungen und deren Einbettung in erweiterte Kontinuumsmodelle aktuelle Forschungsarbeiten beispielsweise auf der Microplane-Theorie hilfreich angewendet sowie über deren Umsetzung in Hydrocodes nachgedacht werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] ACI Committee 544. *Design Considerations for Steel Fiber Reinforced Concrete*. ACI Structural Journal, Report No. ACI544.4R-88, 1988.
- [2] ACI Committee 544. *Measurement of Properties of Fiber Reinforced Concrete*. ACI Materials Journal, Vol. 85:583–593, 1988.
- [3] ACI Committee 544. *State of the Art Report on the Fiber Reinforced Concrete*. ACI-Manual of Concrete Practice, Part 5, 1989.
- [4] Al'tschuler L.V. *Use of Shock Waves in High-Pressures Physics*. Academy of Science of the USSR, Soviet Physics Eshekpri, Vol. 8(1), 1965.
- [5] Anderson C.E. *An Overview of the Theory of Hydrocodes*. Pergamon Journals Ltd., Vol. 99:33–59, 1987.
- [6] Anderson C.E., Wilbeck J.S., Hokanson J.C., Asay J.R., and Grady D.E. *Shock Waves in Condensed Matter - 1985*. ed. Y.M. Gupta, Plenum, New York, page 185, 1986.
- [7] Armstrong P.J. and Frederick C.O. *A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect*. General Electricity Generating Board, Report No. RD/B/N/731, 1966.
- [8] Ashour S., Wafa F., and Kamal M. *Effect on the Concrete Compressive Strength and Tensile Reinforcement Ratio on the Flexural Behaviour of Fibrous Concrete Beams*. Engineering Structures, pages 1145–1158, 2000.
- [9] Bachmann J. *Die Massenträgheit in einem Pseudo-Stoffgesetz für Beton bei schneller Zugbeanspruchung*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe, 1993.
- [10] Başar Y. and Weichert D. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids – Fundamental Mathematics and Physical Concepts*. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 2000.
- [11] Bangash M.Y.H. *Impact and Explosion, Analysis and Design*. Blackwell Scientific Publication, London, 1993.
- [12] Banthia N. and Mindess S. *Fiber Reinforced Concrete - Modern Developments*. University of British Columbia, Vancouver, B.C., Canada, 1995.
- [13] Banthia N., Trottier J.-F., and Pigeon M. *Fiber Pull Out Mechanisms: Effects of Fiber Geometrie, Loading Rate and Sub-Zero Temperatures*. Conference on Fibre Reinforced Cements and Concretes, London, pages 136–145, 1989.
- [14] Barker L.M. and Hollenbach R.E. *Laser Interferometer for Measuring High Velocities of any Reflecting Surface*. Journal of Applied Physics, pages 4660–4675, 1972.
- [15] Bartlmä F. *Gasdynamik der Verbrennung*. Springer Verlag, 1975.
- [16] Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [17] Bazant Z.P. and Seser S. *Size Effect in Pullout Tests*. ACI Materials Journal, Vol. 85:347–351, 1988.
- [18] Becker E. und Bürger W. *Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, 1975.
- [19] Behring H. *Bestimmung der Grenzlast von ungeschädigten und geschädigten Stahlbetonplatten*. Diplomarbeit an der Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik und Statik, 2004.

- [20] Bekaert. *Test and Design Methods for Steel Fibre Reinforced Concrete*. Brite Euram BRPR-CT98-0813; Project nr. BE 97-4163, Belgium, 2002.
- [21] Benson D.J. *Computational Methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes*. Computer Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 99:235–394, 1992.
- [22] Berner K. *Der Einfluß der Dehngeschwindigkeit auf das mechanische Verhalten von Betonstählen*. 12. Forschungskolloquium des Deutschen Ausschuß für Stahlbeton, Berlin, 1981.
- [23] Betten J. *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.G. Teubner, 1987.
- [24] Bischoff P.H. and Perry S.H. *Compressive Behaviour of Concrete at High Strain Rates*. J. Materials and Structures, Vol. 24:425–450, 1991.
- [25] Bischoff P.H. and Perry S.H. *Impact Behaviour of Plane Concrete Loaded in Uniaxial Compression*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 121:685–693, 1995.
- [26] Bodner S.R. and Partom Y. *Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-Hardening-Materials*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 42:385–389, 1975.
- [27] Bonzel J. und Dahms J. *Schlagfestigkeit von faserbewehrtem Beton*. Betontechnologische Berichte 1980/81, 1981.
- [28] Brandes K. und Limberger E. *Zur Beeinflussung der Festigkeitswerte von Betonstahl durch die Dehngeschwindigkeit*. Beton- und Stahlbetonbau, Vol. 4:90–133, 1985.
- [29] Buchar J., Bilek Z., and Dusek F. *Mechanical behaviour of materials at extremely high strain rates*. Trans Tech Publications, Switzerland, 1986.
- [30] Carl D. *KMW-Aufnehmer in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern, Bericht Teil 2*. Wehrtechnische Dienststelle für Schutz- und Sondertechnik (WTD 52), Oberjettenberg, 1999.
- [31] Carol I., Rizzi E., and Willam K.J. *A unified Theory of Elastic Degradation and Damage Based on a Loading Surface*. Int. J. Solids & Structures, Vol. 29:1173–1191, 1994.
- [32] Century Dynamics Inc. *Autodyn - Theory Manual*. Century Dynamics Inc., 2002.
- [33] Cervenka J. *Discrete Crack Modeling in Concrete Structures*. Dissertation, University of Colorado, Boulder, USA, 1994.
- [34] Chapman E.L. *On the Rate of Explosions in Gases*. Philos. Magazine, Vol. 47:99–104, 1899.
- [35] Chen W.F. *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [36] Chern J.-C., Yang H.-J., and Chen H.-W. *Behaviour of Steel Fibre Concrete in Multiaxial Loading*. ACI Materials Journal, Vol. 89:32–40, 1992.
- [37] Clegg R. *Material Models for Concrete in Hydrocodes – A Review of the State-of-the-Art*. Bericht von Century Dynamics an die Universität der Bundeswehr München, 1996.
- [38] Comite Euro-International du Beton CEB Bulletin D´Information N. 187. *Concrete Structures under Impact and Impulse Loading*. CEB Comite Euro-International du Beton, Lausanne, 1987.
- [39] Comite Euro-International du Beton, CEB Bulletin D´Information N. 210. *Behavior and Analysis of Reinforced Concrete Structures under Alternate Actions Inducing Inelastic Response; Volume 1: General Models*. CEB Comite Euro-International du Beton, Lausanne, 1991.
- [40] Courant R. and Friedrichs K.O. *Supersonic Flow and Shock Waves*. Springer Verlag, New York, 1976.
- [41] Daniel J.I. and Shah S.P. *Thin-Section Fiber Reinforced Concrete and Ferro cement*. American Concrete Institute, 1990.
- [42] Davies R.M. *Report A240*. Roy. Soc. Phil. Trans., page 375, 1948.
- [43] Davis J.L. *Finite Difference Methods in Dynamics of Continuous Media*. Macmillan Publishing Company, New York, 1986.

- [44] Davis W.C. *Die Detonation von Sprengstoffen*. Spektrum der Wissenschaft 7, 1987.
- [45] DBV-Merkblatt. *Stahlfaserbeton*. Deutscher Beton- und Bautechnik-Verein e.V., 2001.
- [46] de Boer R. und Prediger H. *Tensorrechnung – Grundlagen für Ingenieurwissenschaften*. Forschungsberichte aus dem Fachbereich 5, Universität/Gesamthochschule Essen, 1995.
- [47] de Borst R. and Nauta P. *Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model*. Engineering Computations, Vol. 2:35–46, 1985.
- [48] Diederichs U. *Experimentelle Untersuchungen zur mehraxialen Festigkeit von Stahlfaserbeton, Testversuche im Druck-Zug-Bereich*. Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, Universität Kassel, 1991.
- [49] Dietrich R. *Weiterentwicklung der menügesteuerten Ingenieursoftware XPLOSim zur Bestimmung der Auswirkungen von Explosionslasten auf bewehrte Stahlfaserbetonkonstruktionen*. Diplomarbeit an der Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik und Statik, 2003.
- [50] Dobratz B.M. and Crawford P.C. *LLNL Explosive Handbook: Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants*. University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCRL-52997, Rev. 2, 1981.
- [51] Döring W. *On Detonation Processes in Gases*. Ann. Phys., Vol. 43:421–436, 1943.
- [52] Drucker D.C. *A more Fundamental Approach to Plastic Stress–Strain Relations*. Proc. 1st Natl. Congr. Appl. Mech. ASME, Chicago, pages 487–491, 1951.
- [53] Dugdale J.S. and MacDonald D. *The Thermal Expansion of Solids*. Physics Review, Vol. 89:832–834, 1953.
- [54] Eibl J., Keintzel E. und Charlier H. *Dynamische Probleme im Stahlbetonbau (Teil 2): Stahlbetonbauteile und -bauwerke unter dynamischer Beanspruchung*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin–München, Heft 392, 1983.
- [55] Eibl J. und Iványi G. *Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin–München, Heft 260, 1976.
- [56] Eibl S.J. *Schockwellenbeanspruchung von Stahlbetonwänden durch Kontaktdetonationen*. Dissertation, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, 1995.
- [57] Eligehausen R., Popov E.P., and Bertero V.V. *Local Bond Stress–Slip Relationship of Deformed Bars under Generalized Excitations; Experimental Results and Analytical Model*. Report No. UCB/EERC/-83/23, Earthquake Engineering Research Center, University of California, USA, 1983.
- [58] Emmerling F. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Vorlesungsskript, Institut für Mechanik (LRT), Universität der Bundeswehr München, 1995.
- [59] Eringen A.C. *Mechanics of Continua*. John Wiley, 1967.
- [60] Heinze H. et al. *Sprengtechnik*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig Stuttgart, 1987.
- [61] Falkner H. and Teutsch M. *Fachseminar Stahlfaserbeton - Neue Erkenntnisse und Anwendungen*. Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, TU Braunschweig, Heft 100, 1993.
- [62] Falkner H. und Teutsch M. *Stahlfaserbeton - Ein unberechenbares Material?* Braunschweiger Bauseminar, Technische Universität Braunschweig, 2002.
- [63] Feenstra P.H. and de Borst R. *Constitutive Model for Reinforced Concrete*. Journal of Engineering Mechanics (ASCE), Vol. 121 (5):587–595, 1995.
- [64] Fickett W. *Introduction to Detonation*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1987.
- [65] Fickett W. and Davis W.C. *Detonation*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1979.
- [66] Finsterwalder U. und Kern G. *Sprengversuche an schutzbewehrten Stahlbetonplatten*. Zivilschutz, Heft 4,5, 1963.
- [67] Flögl H. and Mang H.A. *Tension Stiffening Concept Based on Bond–Slip*. Journal of Structural Engineering (ASCE), Vol. 108:2681–2701, 1982.

- [68] Friedrich und Weichelt. *Handbuch Sprengtechnik*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1949.
- [69] Gambarova P.G. *Shear-Confinement Interaction at the Bar-to-Concrete-Interface*. Proc. of the Int. Conf. Bond in Concrete, 1982.
- [70] Gambarova P.G. and Schumm C. *Impulsive Punching of Fiber-Reinforced Concrete Slabs*. ASCE Structures Congress, 1994.
- [71] Gebbeken N. *Zur Untersuchung des linearen Tragverhaltens von Faserverbundkonstruktionen mittels numerischer Methoden*. Habilitationsschrift, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau; Universität der Bundeswehr München; Nr.96/1, ISSN 1431-1522, 1996.
- [72] Gebbeken N. and Greulich S. *Reliable Modelling of Explosive Loadings on Reinforced Concrete Structures*. Proceedings of the 10th Int. Symposium on Interaction of the Effects of Munitions with Structures (ISIEMS), San Diego, USA, 2001.
- [73] Gebbeken N. and Ruppert M. *On the Safety and Reliability of High Dynamic Hydrocode Simulations*. Int. Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 46:839–851, 1999.
- [74] Gebbeken N. and Ruppert M. *A new Concrete Material Model for High Dynamic Hydrocode Simulations*. Archive of Applied Mechanics, Vol. 70:463–478, 2000.
- [75] Gebbeken N. und Greulich S. *Simulationsmodell für bewehrten Beton, "state-of-the-art-report" über die statischen und dynamischen Werkstoffeigenschaften von Stahlbeton*. Jahresbericht 1999, Berichte des Lehrstuhls für Baustatik, Universität der Bundeswehr München, 1999.
- [76] Gebbeken N. und Greulich S. *Verhalten von Baustrukturen aus Stahlbeton unter Kontaktdetonationen: "Simulationsmodell für bewehrten Beton"*. Abschlussbericht 2001, Berichte des Lehrstuhls für Baustatik, Universität der Bundeswehr München, 2002.
- [77] Gebbeken N. und Greulich S. *Verhalten von Baustrukturen aus Stahlfaserbeton unter Kontaktdetonationen: "Simulationsmodell für stahlfaserverstärkten Stahlbeton"*. Abschlussbericht 2002, Berichte des Lehrstuhls für Baustatik, Universität der Bundeswehr München, 2003.
- [78] Gebbeken N. und Rüdiger L. *Verhalten von Baustrukturen aus betonartigen Werkstoffen unter Detonationsbeanspruchungen: "Abplatzungsverhalten – wegfliegende Trümmer"*. Jahresbericht 2003, Teilprojekt 3.2, Berichte des Lehrstuhls für Baustatik, Universität der Bundeswehr München, 2004.
- [79] Gebbeken N. und Ruppert M. *Ein Beitrag zur Simulation von Baustrukturen unter hochdynamischen Kurzzeitbeanspruchungen*. Bauingenieur, Band 74:461–470, 1999.
- [80] Gebbeken N. und Westermeier A. *Verhalten von Baustrukturen aus betonartigen Werkstoffen unter Detonationsbeanspruchungen: "Bestimmung der Grenzlast von ungeschädigten und von geschädigten Stahlbetonplatten"*. Jahresbericht 2003, Teilprojekt 3.5, Berichte des Lehrstuhls für Baustatik, Universität der Bundeswehr München, 2004.
- [81] Geier A. *Weiterentwicklung der menügesteuerten Ingenieursoftware XPLOSIM zur Bestimmung der Auswirkungen von Explosivlasten auf Stahlbetonkonstruktionen*. Diplomarbeit an der Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik und Statik, 2001.
- [82] Godunov S.K. *Finite Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics*. Math. Sbornik, Vol. 47:231–306, 1959.
- [83] Gokoz U.N. and Naaman A.E. *Effect of Strain Rate on the Pull-Out Behaviour of Fibres in Mortar*. Int. Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, Vol. 3:187–202, 1981.
- [84] Gopalaratnam V.S. and Shah S.P. *Strength, Deformation and Fracture Toughness of Fiber Cement Composites at Different Rates of Flexural Loading*. US-Sweden Joint Seminar 'Steel Fiber Concrete', pages 299–331, 1985.
- [85] Grady D.E. *Dynamic Material Properties of Armor Ceramics*. Report No. SAND 91-0147.-4C704, Sandia National Laboratory, 1991.

- [86] Grady D.E. *Impact Compression Properties of Concrete*. 6th Int. Symp. on Interaction of Nonnuclear Munitions with Structures, Florida, Vol. 6:172–175, 1993.
- [87] Green A.E. and Zerna W. *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press, 1968.
- [88] Grüneisen E. *Zustand des festen Körpers*. In: *Handbuch der Physik*, Springer-Verlag, Berlin, pages 1–59, 1926.
- [89] Gruschka H.D. and Wecken F. *Gasdynamic Theory of Detonation*. Glassman I. (ed.), Gordon and Breach Science Publishers, Vol. 1, 1971.
- [90] Guo Z., Zhon Y. und Nechvatal D. *Auswertung von Versuchen zur mehrachsigen Betonfestigkeit, die an der technischen Universität München durchgeführt wurden*. DASTB, Heft 447:65–106, 1995.
- [91] Hallquist J.O. *A Theory Manual for DYNA3D*. Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-19401, 1982.
- [92] Hallquist J.O. *NIKE2D – A Vectorized Implicit, Finite Deformation Finite Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of 2D Solids with Interactive Rezoning and Graphics*. Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-19677, Rev. 1, 1986.
- [93] Hancock J.W. and Mackenzie A.C. *On the Mechanism of ductile Failure in high-strength Steels subjected to multiaxial Stress-States*. Journal of Mechanics Phys. Sol., Vol. 21:147–175, 1976.
- [94] Haupt P. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 2000.
- [95] Henrych J. *The Dynamics of Explosions and its Use*. Development in Civil Engineering, Vol. 1, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1979.
- [96] Herrmann W. *Constitutive Equation for the Dynamic Compaction of Ductile Porous Media*. Journal of Applied Physics, Vol. 40:2490–2499, 1969.
- [97] Hibbert A.P. *Impact Resistance of Fibre Concrete*. Ph.D. Thesis, University of Surrey, 1979.
- [98] Hiermaier S. *Numerik und Werkstoffdynamik der Crash- und Impaktvorgänge*. Habilitationsschrift, Fraunhofer Institut für Kurzzeitdynamik, Ernst-Mach-Institut, 2002.
- [99] Hildebrand F.B. *Advanced Calculus for Applications*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, Vol. 3, 1962.
- [100] Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, 1950.
- [101] Hilsdorf H.K. *Beton*. Beton-Kalender, Teil 1:1–142, 1995.
- [102] Hjorth O. *Ein Beitrag zur Frage der Festigkeiten und des Verbundverhaltens von Stahl und Beton bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten*. Dissertation TU Braunschweig, 1976.
- [103] Hofstetter G. and Mang H.A. *Computational Plasticity of Reinforced Concrete Structures*. Fundamentals and Advances in the Engineering Sciences; Vieweg Verlag, 1995.
- [104] Hollenberg K. *Druckmessungen an Stosswellen in Flüssigkeiten und Feststoffen*. Habilitationsschrift, Düsseldorf, 1983.
- [105] Holmquist T.J., Johnson G.R., and Cook W.H. *A computational Constitutive Model for Concrete Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Pressures*. 14th. Int. Symposium on Ballistics, Quebec, Canada, pages 591–600, 1993.
- [106] Hopkinson B. *Report A213*. Roy. Soc. Phil. Trans., page 437, 1914.
- [107] Hughes T.J.R. *Introduction to Stabilized Methods*. Short Course taught at the Fifth US National Congress on Computational Methods, University of Colorado, Boulder, 4.6-6.8, 1999.
- [108] Hugoniot H. *On the Propagation of Motion in Bodies and in Perfect Bodies in Particular - I*. Journal de l'Ecole Polytechnique, Vol. 57:3–97, 1887.

- [109] Idda K. *Verbundverhalten von Betonrippenstählen bei Querzug*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe, Heft 34, 1999.
- [110] Imam. *Shear–Moment Interaction of Steel Fibre High Strength Concrete*. Dissertation, Technische Universität Brüssel, Belgien, 1995.
- [111] Johnson G.R. and Cook W.H. *A Constitutive Model and Data Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures*. Proc. of the 7th Int. Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands, 1983.
- [112] Johnson G.R. and Cook W.H. *A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures*. Defense Systems Division Hopkins, Minesota, USA, Air Force Armament Laboratory; Eglin Air Force Base, Florida, pages 541–547, 1984.
- [113] Johnson G.R. and Cook W.H. *Fracture Characteristics for three Metals subjected to Various Strains, Strain Rates, Temperatures and Pressures*. Journal of Engineering Fracture Mechanics, Vol. 21:31–48, 1985.
- [114] Jouguet E. *On the Propagation of Chemical Reactions in Gases*. J. de Math. Pures et Appl., Vol. 85:347–425, 1906.
- [115] Kachanov L.M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Martinus Hijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
- [116] Karihaloo B.L. and Wang J. *Mechanics of Fibre-Reinforced Cementitious Composites*. Computers and Structures, Vol. 76:19–34, 2000.
- [117] Keuser M. *Verbundmodelle für nichtlineare Finite–Element–Berechnungen von Stahlbetonkonstruktionen*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1985.
- [118] Khan A.S. and Huang S. *Experimental and Theoretical Study of Mechanical Behavior of 1100 Aluminium in the Strain Rate Range  $10^{-5}$  to  $10^4$  s $^{-1}$* . Int. Journal of Plasticity, Vol. 8:501–517, 1992.
- [119] Kinney G.F. and Graham K.J. *Explosive Shocks in Air*. Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [120] Klingbeil E. *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.I. Wissenschaftsverlag, 1989.
- [121] Kolsky H. *Stress Waves in Solids*. Oxford University Press, London, 1953.
- [122] Körmeling H.A. *Experimental Results of Plain and Steel Fibre Reinforced Concrete at Uniaxial Impact Tensile Loading*. Stevinreport 5-80-3, Delft University of Technologie, pages 147–162, 1984.
- [123] Kovacs I. *Modelling of Fiber Reinforced Concrete in Uniaxial Tension*. 3rd Int. PhD Symposium in Civil Engineering 2000 Vienna, pages 203–213, 2000.
- [124] Krajcinovic D. *Damage Mechanics*. Elsevier, North Holland, 1996.
- [125] Krätzig W.B. und Başar Y. *Tragwerke 3: Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1997.
- [126] Kuchling H. *Taschenbuch der Physik, 16. Auflage*. Fachbuchverlag Leipzig, 1996.
- [127] Kupfer H. and Hilsdorf H.K. *Behavior of Concrete under Biaxial Stresses*. ACI Journal, Vol. 66:656–665, 1969.
- [128] Kustermann A. *4. Sachstandsbericht und 1. Jahresbericht der Forschungsauftrags Nr. E/E520/Y0297/X5217*. Institut für Werkstoffe des Bauwesens, Universität der Bundeswehr München, 2000.
- [129] Landmann F. *Vergleich der Messmethoden bei Ermittlung von EoS–Daten von Beton mit Hilfe der KMW–Aufnehmer und durch Flyer Plate Impact*. Wehrtechnische Dienststelle für Schutz- und Sondertechnik (WTD 52), Oberjettenberg, 2000.
- [130] Landmann F. *Dokumentation der Parameteruntersuchungen des Schädigungsverhaltens von Stahlbetonplatten unter Kontaktdetonation*. Zwischenbericht der Wehrtechnischen Dienststelle für Schutz- und Sondertechnik, Oberjettenberg, 2001.
- [131] Lax P. and Wendroff B. *Systems of Conservation Laws*. Comm. Pure Applied Mathematics, Vol. 13:217–237, 1960.

- [132] Lee E.L. and Tarver C.M. *Phenomenological Model of Shock Initiation in Heterogeneous Explosives*. Physics of Fluid, Vol. 6, No. 12, 1980.
- [133] Lee J.H. *Gasdynamics of Detonations*. Acta Astronautica, 1972.
- [134] Lemaître J. *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [135] Lemaître J. and Chaboche J.L. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [136] Leonhardt F. *Vorlesungen über Massivbau*. Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [137] Lohrmann G. *Faserbeton unter hohen Dehngeschwindigkeiten; Dissertation*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie, Karlsruhe, 1998.
- [138] Lok T.S. *Impact Tests on Steel Fibre Reinforced Concrete Panels*. SUSI 3, pages 243–252, 1994.
- [139] Lok T.S., Zhao P.J., and Lu G. *Dynamic Characteristics of Mandai Granite and Steel Fibre Reinforced Concrete*. Protective Technology Research Centre, Nanyang Technological University c/o School of Civil and Environmental Engineering, Singapore, 2002.
- [140] Mader C.L. *Numerical Modeling of Detonations*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1979.
- [141] Maekawa K., Pimanmas A., and Okamura H. *Nonlinear Mechanics of Reinforced Concrete*. Spon Press, Taylor & Francis Group, London New York, 2003.
- [142] Maidl B. *Stahlfaserbeton*. Verlag Ernst & Sohn, 1991.
- [143] Malvar L.J. *Confinement Stress Dependent Bond Behaviour, Part I: Experimental Investigations*. Proc. of the Int. Conf. Bond in Concrete, 1992.
- [144] Mangerig I. und Hiller E. *Bestimmung der Resttragfähigkeit von vorbelasteten Stahlbetonplatten – Teil 1: Versuche*. Berichte des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, Universität der Bundeswehr München, 2002.
- [145] Manjoine M.J. *Influence of Rate of Strain and Temperature on Yield Stresses of Mild Steel*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 11:A211–A218, 1944.
- [146] Marsh S.P. *LASL Shock Hugoniot Data*. University of California Press, 1980.
- [147] MathCad 8 Professional Student Version. *MathSoft, Inc. All rights reserved. U.S.Pat.Nos. 5,469,538 and 5,526,475*. 1986–1998.
- [148] McQueen R.G., Marsh S.P., Taylor J.W., Fritz J.N., and Carter J.W. *The Equation of State of Solids from Shock Wave Studies*. In: *High Velocity Impact Phenomena*, Kinslow R. (ed.), Academic Press, New York, 1970.
- [149] McVay M.K. *Spall Damage of Concrete Structures*. Final Report, Department of the Army, Waterways Experiment Station, Technical Report SL-88-22, 1988.
- [150] Mehlhorn G. *Der Bauingenieur: Grundwissen*. Verlag Ernst & Sohn, Band 1, 1996.
- [151] Meyers M.A. *Dynamic Behavior of Materials*. Wiley-Interscience, New York, 1994.
- [152] Mie G. *Grundlagen einer Theorie der Materie*. Annalen der Physik, Vol. 39, 1912.
- [153] Mörsch E. *Der Eisenbetonbau*. 6. Auflage, 1. Band, 1. Hälfte, Stuttgart, 1921.
- [154] Müller F.P., Heintzel E. und Charlier H. *Dynamische Probleme im Stahlbetonbau, Teil 1: Der Baustoff Stahlbeton unter dynamischer Beanspruchung*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin–München, Heft 342, 1983.
- [155] Naaman A.E. *Fiber Reinforced Concrete under Dynamic Loading*. Inten. Symposium on Fiber Reinforced Concrete, Detroit, pages 169–186, 1984.
- [156] Naaman A.E. *Fiber Reinforcement for Concrete*. ACI Concrete Int., Vol. 7:21–25, 1985.

- [157] Naaman A.E. and Gopalaratnam V.S. *Impact Properties of Steel Fibre Reinforced Concrete in Bending*. Int. Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, pages 225–233, 1983.
- [158] Nahme H. *Equation of State Measurement of 9SMN28- and C45Steel*. EMI-Bericht E11/91, Ernst-Mach-Institut, Freiburg, 1991.
- [159] Nahme H. *Bestimmung der HUGONIOT-Daten von Beton mittels Planar-Impakt-Untersuchungen*. EMI-Bericht E38/00, Ernst-Mach-Institut, Freiburg, 2000.
- [160] Narayanan and Darwish. *Use of Steel Fibers as Shear Reinforcement*. Int. Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, 1987.
- [161] Noh W.F. *A Time-Dependent, Two-Space-Dimensional, Coupled Eulerian-Lagrangian Code*. In: *Methods in Computational Physics, Fundamental Methods in Hydrodynamics*, Academic Press, New York, 1964.
- [162] Ockert J. *Ein Stoffgesetz für die Schockwellenausbreitung in Beton*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe, Heft 30, 1997.
- [163] Ortiz M. *An Analytical Study of the Localized Failure Modes of Concrete*. Mechanics of Materials, Vol. 6:159–174, 1998.
- [164] Otter D.E. and Naaman A.E. *Properties of Steel Fiber Reinforced Concrete under Cyclic Loading*. ACI Materials Journal, 1988.
- [165] Ottosen N.S. *Constitutive Model for Short Time-Loading of Concrete*. J. Engng. Mechanics ASCE, Vol. 105(1):127–141, 1978.
- [166] Petersen C. *Stahlbau*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.
- [167] Pfyl T. *Behaviour of Reinforced Steel Fibre Concrete Members in Bending and Tension*. 3rd Int. PhD Symposium in Civil Engineering 2000 Vienna, pages 47–55, 2000.
- [168] Pölling R. *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*. Dissertation, Forschungsarbeit aus dem SFB 398, Ruhr-Universität Bochum, 2000.
- [169] Potter D. *Computational Physics*. John Wiley & Sons Inc., London, 1973.
- [170] Randles P.W. and Libersky L.D. *Smooth Particle Hydrodynamics: Some recent Improvements and Applications*. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 139:375–408, 1996.
- [171] Rankine W.J.M. *On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance*. Philosophical Transactions, London & Edinburgh, Vol. 160:277–288, 1870.
- [172] Rashid Y.R. *Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels*. Nuclear Engineering and Design, Vol. 7 (4):334–344, 1992.
- [173] Rehm G. *Forschungsbericht Faserbeton*. Informationsverbundzentrum RAUM und BAU der Fraunhofer-Gesellschaft, 1979.
- [174] Reinhardt H.W. *Concrete under Impact Loading - Tensile Strength and Bond*. Heron, Vol. 27:1–48, 1982.
- [175] Rice M.H., McQueen R.G., and Walsh J.M. *Compression of Solids by Strong Shock Waves*. In: *Solid State Physics*, Seitz F. and Turnball D. (ed.), Academic Press, New York, Vol. 6:1–63, 1958.
- [176] Richtmyer R.D. and Morton K.W. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Interscience Publishers Inc., John Wiley & Sons Inc., 1967.
- [177] Riedel W. *Beton unter hochdynamischen Lasten. Meso- und makromechanische Modelle und ihre Parameter*. Fraunhofer Institut für Kurzzeitdynamik, Ernst-Mach-Institut, EMI-Bericht 6/00, 2000.
- [178] Rinehart J.S. *Stress Transients in Solids*. Department of Mechanical Engineering University of Colorado, Hyper Dynamics, Santa Fe, New Mexico, 1975.
- [179] Ringsdorf S. *Vergleich von Ansätzen zur realitätsnahen Modellierung von Stahlbeton unter hochdynamischen Belastungen*. Diplomarbeit an der Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik und Statik, 2000.

- [180] Roschlau H. *Sprengen – Theorie und Praxis*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig Stuttgart, 1993.
- [181] Rostasy F.S. und Hartwich K. *Festigkeits- und Verformungsverhalten von stahlfaserbewehrtem Normalbeton unter schnell ablaufenden Belastungen*. Bericht, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, Universität Braunschweig, 1983.
- [182] Rots J.G. *Computational Modeling of Concrete Fracture*. Dissertation, Delft University, The Netherlands, 1988.
- [183] Rots J.G. and Blauwendraad J. *Crack Models for Concrete: Discrete or Smeared? Fixed, Multidirectional or Rotating?* HERON, Vol. 34 (1), 1989.
- [184] Ruppert M. *Zur makromechanischen Beschreibung des Materialverhaltens von Beton unter hochdynamischen Einwirkungen*. Dissertation, Berichte des Konstruktiven Ingenieurbaus 00/1, Universität der Bundeswehr München, 2000.
- [185] Russwurm D. *Betonstähle für den Stahlbetonbau*. Institut für Stahlbetonbewehrung e.V., München, Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin, 1993.
- [186] Sauer M. *Adaptive Kopplung des netzfreien SPH-Verfahrens mit finiten Elementen zur Berechnung von Impaktvorgängen*. Dissertation, Berichte des Konstruktiven Ingenieurbaus 00/5, Universität der Bundeswehr München, 2000.
- [187] Schnütgen B. *Materialeigenschaften von Stahlfaserbeton*. Konstruktiver Ingenieurbau - Berichte, Heft 31:5–42, 1978.
- [188] Schnütgen B. *Bemessung von Stahlfaserbeton und ihre Problematik*. Konstruktiver Ingenieurbau, Heft 37:9–13, 1981.
- [189] Schnütgen B. *Technologie des Stahlfaserbetons und des Stahlfaserspritzbetons*. Vorträge der DBV-Arbeitstagung, 1992.
- [190] Scholz U., Nechvatal D., Aschl H., Linse D., Stöckl S., Grasser E. und Kupfer H. *Versuche zum Verhalten von Beton unter dreiachsiger Kurzzeitbeanspruchung*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth Verlag GmbH Berlin Köln, (Heft 447), 1995.
- [191] Sheridan A.J. *Response of Concrete to High Explosive Detonation*. In: *Concrete for Hazard Protection*, Concrete Society, Edinburgh, pages 75–87, 1987.
- [192] Simo J.C. and Hughes T.J.R. *Computational Inelasticity*. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1998.
- [193] Simo J.C. and Ju J.W. *Strain- and Stress-Based Continuum Damage Models: Part I – Formulation, Part II – Computational Aspects*. Int. J. Solids & Structures, Vol. 23:821–869, 1987.
- [194] Sinha B.P., Gerstle K.H., and Tulin R.G. *Stress-Strain Relations for Concrete under Cyclic Loading*. ACI Journal, **61**:195–211, 1964.
- [195] Slater J.C. *Introduction to Chemical Physics*. McGraw-Hill, New York, 1939.
- [196] Sod G. *A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*. Journal of Computational Physics, Vol. 27:1–31, 1978.
- [197] Stamm M. *Einfluss von Stahlfasern auf die Schädigungsevolution von Beton in Abhängigkeit von der Dehnrate*. Dissertation, VDI Fortschrittsberichte, Reihe 4, Nr. 168, Düsseldorf, VDI Verlag, 2001.
- [198] Stangenberg F. *Stahlfaserbeton als hervorragender Baustoff für stoßbeanspruchte Bauteile*. Bauingenieur, Heft 61:339–345, 1986.
- [199] Stein E. und Barthold F.-J. *Elastizitätstheorie*. Vorlesungsskript, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1995.
- [200] Steinbeiss P. *KMW-Aufnehmer in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern, Bericht Teil 1*. Wehrtechnische Dienststelle für Schutz- und Sondertechnik (WTD 52), Oberjettenberg, 1999.

- [201] Steinberg D.J. *Equation of State and Strength Properties of Selected Materials*. Report No. UCRL-MA-106439, Lawrence Livermore National Laboratories, Livermore, CA, 1991.
- [202] Steinberg D.J., Cochran S.G., and Guinan M.W. *A Constitutive Model for Metals applicable at high Strain Rates*. Journal of Applied Physics, Vol. 51:1498–1504, 1980.
- [203] Stempniewski L. und Eibl J. *Finite Elemente im Stahlbeton*. Betonkalender 1993, Teil 1, Ernst & Sohn, pages 249–312, 1993.
- [204] Suaris W. and Shah S.P. *Strain-Rate Effects in Fibre-Reinforced Concrete Subjected to Impact and Impulsive Loading*. Composites, Vol. 13:153–159, 1982.
- [205] Tepfers R. *Cracking of Concrete Cover along Anchored Deformed Reinforcing Bars*. Magazine of Concrete Research, Vol. 31, 1979.
- [206] Tillotson J.H. *Metallic Equation of State for Hypervelocity Impact*. Air Force Special Weapon Center, General Atomic, California, Report GA3216, 1962.
- [207] TM5-855-1. *Design and Analysis of Hardened Structures to Conventional Weapons Effects*. The Defence Special Weapons Agency and the Departments of the Army, Air Force and Navy, 1997.
- [208] Truesdell C. *Hypoelasticity*. J. Ration. Mech. Anal., Vol. 4, No. 1, pages 83–133, 1955.
- [209] Truesdell C. *The Simplest Rate Theory of Pure Elastisty*. Commun. Pure Appl. Math., Vol. 8, 1955.
- [210] Truesdell C. and Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. In: Flügge S. (Ed.): Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, Springer Verlag, 1965.
- [211] Truesdell C. and Toupin R.A. *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*. In: Flügge S. (Ed.): Encyclopedia of Physics, Vol. III/1, Springer Verlag, 1960.
- [212] Trulio J.G. and Trigger K.R. *Numerical Solution of the one-dimensional Lagrangian Hydrodynamic Equations*. Lawrence Radiation Laboratory, UCRL-6267, 1961.
- [213] Valle M. and Büyüköztürk O. *Behavior of Fiber Reinforced high Strength Concrete under Direct Shear*. Int. Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, 1993.
- [214] von Neumann J. *Theory of Detonation Waves*. In: J. von Neumann, *Collected Works*, Macmillan, New York, Vol. 6, 1942.
- [215] von Neumann J. and Richtmyer R.D. *A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shock*. Journal of Applied Physics, Vol. 21:232ff, 1950.
- [216] Vos E. and Reinhardt H.W. *Influence of Loading Rate on Bond in Reinforced Concrete*. RILEM-CEB-IABSE-IASS-Inter. Symp. Concrete Structures under Impact an Impulsive Loading, BAM, Berlin, 1982.
- [217] Vulkan Harex. *Stahlfasertechnik GmbH & Co.KG*, 2002.
- [218] Walraven J.C. and Reinhardt H.W. *Theory and Experiments on the Mechanicla Behaviour of Cracks in Plain and Reinforced Concrete Subjected to Shear Loading*. HERON, Vol. 26 (1A), 1981.
- [219] Wetzell F. *Untersuchung der Mechanismen bei Detonationsentstehungs- und Detonationsausbreitungsvorgängen*. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 7: Strömungsmechanik Nr. 228, VDI Verlag, 1993.
- [220] Wilkins M.L. *Calculation of Elastic-Plastic Flow*. Methods of Computational Physics, Academic Press, New York, Vol. 3, 1964.
- [221] Wilkins M.L. *Use of Artificial Viscosity in Multidimensional Calculations*. Journal of Computational Physics, Vol. 36:281–303, 1980.
- [222] Wilkins R. *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [223] Willam K.J. and Warnke D. *Constitutive Model for the Triaxial Behaviour of Concrete*. IABSE Proceedings, Vol. 19, 1975.
- [224] Yin S., Su E.C.M., Mansur M.A., and Hsu T.T.C. *Biaxial Tests of Plain and Fiber Concrete*. ACI Materials Journal, Title 86-M24:236–243, 1989.

- [225] Zel'dovich Y.B. *On the Theory of the Propagation of Detonation in Gaseous Systems*. Zh. Eksp. Teor. Fiz. (English Translation), Vol. 10:542–568, 1940.
- [226] Zel'dovich Y.B. and Kompaneets S.A. *Theory of Detonations*. Academic Press, New York, 1970.
- [227] Zerilli F.J. and Armstrong R.W. *Dislocation-Mechanics-Based Constitutive Relations for Material Dynamics Calculations*. Journal of Applied Physics, Vol. 61:1816–1825, 1987.
- [228] Zharkov V.N. and Kalinin V.A. *Equation of State for Solids at High Pressures and Temperatures*. Special Research Report, Consultants Bureau, New York, 1971.
- [229] Y. Zhou. *Über das Festigkeitsverhalten verschiedener Werkstoffe*. Berichte aus dem Bauwesen, Shaker-Verlag, Aachen, 1995.
- [230] Zukas A.J. *Impact Dynamics*. John Wiley & Sons Inc., 1982.
- [231] Zukas J.A. *High Velocity Impact Dynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1990.



---

## Anhang A

# Ermittlung von EoS-Daten für reinen Beton

### A.1 Einführung

Die Ermittlung von EoS-Daten (HUGONIOT-Daten) für Beton erfolgte auf der Basis von zwei verschiedenen und voneinander unabhängigen Versuchsmethoden:

1. Unter der Leitung von Herrn Hptm Dipl.-Ing. F. Landmann wurden an der WTD 52 in Oberjettenberg **Full-Scale-Tests** durchgeführt. Bei dieser Versuchsmethode leitete eine Kontaktdetonation auf einer Betonplatte liegend eine Druckspannungswelle in das Material ein, wobei elektrische Spannungen mit Kohle-Masse-Widerständen (KMW-Aufnehmer) in festgelegten Tiefen im Probekörper gemessen wurden. Mit Hilfe einer Kalibrierung der KMW-Aufnehmer lassen sich die elektrischen Spannungen in Drücke umrechnen. Die entsprechenden Dichten ergeben sich aus den bekannten sprungartigen Beziehungen der thermodynamischen Zustandsgrößen.
2. **Inverse Planarplatten-Impakt-Versuche** erfolgten am Ernst-Mach-Institut (EMI) in Freiburg unter der Leitung von Herrn Dr.-Ing. H. Nahme. Hierbei wurden Betonproben mit einer Gaskanone auf einen Metallzylinder geschossen. Mit Hilfe eines VISAR-Messgerätes (Velocity Interferometer System for Any Reflector) ließen sich auf der Rückseite des Metalls die Geschwindigkeitsverläufe aufzeichnen. Aufgrund des Kontaktes beider Oberflächen stellt sich in Abhängigkeit der Auftreffgeschwindigkeit der gleiche Spannungszustand in beiden Proben ein. Die Drücke und Dichten ergeben sich aus den Erhaltungsgleichungen.

Um die Versuchsmethoden und deren Ergebnisse, die EoS-Daten, miteinander vergleichen zu können, wurden die Versuchsproben aus ein und derselben Betonmischung hergestellt. Die Durchführung der Versuche fand am gleichen Tag an den verschiedenen Versuchseinrichtungen statt. Somit lag dasselbe Betonalter der Proben beim Versuch vor. Die Untersuchungen haben

gezeigt, dass die Gültigkeit der zwei verschiedenen Methoden hinsichtlich der Bestimmung der EoS-Daten jeweils gegeben ist. Diese Art der Versuchsdurchführung ist zum heutigen Zeitpunkt einzigartig.

## A.2 Materialbeschreibung

Um die Gleichheit der Proben zu gewährleisten, wurde eine Firma beauftragt, Probekörper aus einer Betonmischung herzustellen. Die Anspannungen im Rahmen der **Full-Scale-Tests** erfolgten an vier gegossenen Betonplatten mit den Grundabmessungen 100 cm x 100 cm x 30 cm. Zusätzlich wurde aus der Betonmischung ein Zylinder mit 25 cm Länge und 6 cm Durchmesser für die **Inversen Planarplatten-Impakt-Versuche** vorbereitet, der in 6 Scheiben von 1.2 cm Dicke speziell für die Versuchsdurchführung geschnitten wurde. Um die Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen, in Anlehnung an die DIN 1048, zu ermitteln, wurden neun Prüfwürfel für die Güteprüfung produziert. Die Vorgaben und Eigenschaften der Betonmischung sind:

- Größtkorn: 8 mm,
- Zement: PZ 35F,
- Zementgehalt:  $450 \text{ kg/m}^3$ ,
- Zuschlagsgehalt:  $1730 \text{ kg/m}^3$ ,
- Wasser-Zement-Verhältnis: 0.45,
- Einachsige Druckfestigkeit am Tag der Versuchsdurchführung: 51.2 MPa (mittlere Druckfestigkeit aus sechs Würfeln).

Die Dichte der Betonproben ergab sich aus der Messung am Zylinder zu  $2.35 \text{ g/cm}^3$ . Weitere Beschreibungen im Bezug auf die Herstellung der Betonmischungen sowie auf die Durchführung und auf die Auswertung der Versuche sind im Bericht von LANDMANN 2000 [129] zu entnehmen.

## A.3 Zur Ermittlung von EoS-Daten für Beton

Wie im Abschnitt 6.2 erläutert, beschreiben die aus den Experimenten gewonnenen EoS-Daten die HUGONIOT-Kurve im Raum. Einzeln ausgewertete HUGONIOT-Punkte beinhalten implizit die innere Energie, die in den Versuchsdurchführungen **nicht** explizit gemessen werden kann. Eine Projektion der im Raum liegende HUGONIOT-Kurve auf zwei beliebige Variablen der Erhaltungsgleichungen führt zu einer einfacheren Darstellung der Ergebnisse, wie in den Abbildungen A.4 und A.5 gezeigt. Die Zustandsgleichung für poröse, inhomogene Materialien wie Beton eignet sich besonders in der Druck-Dichte Ebene. Vorteilhaft ist hierbei die gute Abbildung des nichtlinearen Kompaktionsverhaltens des Betons unter hydrostatischem Druck. Bei duktilen, homogenen Werkstoffen wie Metallen ist eine Darstellung der Beziehungen zwischen der Schockwellengeschwindigkeit  $U_s$  und der Partikelgeschwindigkeit  $U_p$  ideal ( $U_s - U_p$ -Beziehung).

## A.4 Experimentelle Vorgehensweise

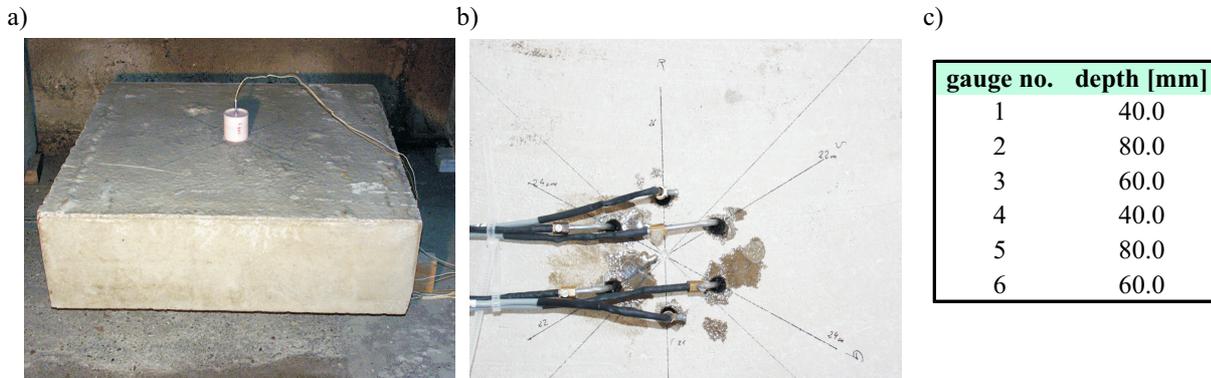
Die Ermittlung von experimentellen Messergebnissen, bei denen extrem hohe Spannungsschwankungen im GPa-Bereich ( $1 \text{ GPa} = 0.01 \text{ Mbar} = 1000 \text{ N/mm}^2$ ) in kürzester Zeit von Millisekunden auftreten, erweisen sich als äußerst schwierig. Die Methode des **Full-Scale-Tests** zielt darauf ab, direkt die durch die Schockwelle initiierte Druckspannung im Betonkörper zu messen. Die Intensität der Druckspannung hängt dabei von der Lage, insbesondere vom Abstand des Druckspannungsaufnehmers zum Sprengladungspunkt, ab. Jeder Druckspannungsaufnehmer liefert ein Messergebnis und somit einen Punkt auf der HUGONIOT-Kurve, wobei bei einer Plattenansprengung mehrere Messaufnehmer in der Betonplatte platziert sind. Bei der bereits in den Abschnitten 1.2.3 und 6.2 erwähnten Methode des **Inversen Planarplatten-Impakt-Versuchs** schießt die Betonprobe planparallel auf einen Festkörper, dessen Materialeigenschaften bekannt sind. Mit Hilfe der auf der Rückseite gemessenen Geschwindigkeiten lassen sich Rückschlüsse auf die vorliegenden Druckspannungen in den belasteten Materialien ziehen, wobei die Spannungsintensität von der Auftreffgeschwindigkeit abhängt. In diesem Fall liefert ein Versuch lediglich einen Punkt auf der HUGONIOT-Kurve.

### A.4.1 Full-Scale-Test: Ansprengung von Betonplatten

Abbildung A.1 zeigt den Versuchsaufbau zum **Full-Scale-Test**, bei dem der Probekörper – die Betonplatte – mit einer Sprengladungsmenge von 500 g PETN 1.5 belastet wurde. Die Zündung der zylindrisch angeordneten Ladungsform mit einem Durchmesser von 75 mm und einer Höhe von 75 mm erfolgte mit einer Sprengkapsel in einer Tiefe von ca. 10 mm, so dass sich eine obere Zündpunktlage ergab. Ein in der Nähe aufgestellter Blitzsensor registrierte den Zeitpunkt der Zündung.

Aufgrund der intensiven Dämpfung der Druckspannungswelle im Beton müssen die für die Messung verwendeten Kohle-Masse-Widerstände (KMW-Aufnehmer) ziemlich nah zur Sprengladung fixiert werden. Die Sensoren ändern ihren elektrischen Widerstand in Abhängigkeit vom umgebenden hydrostatischen Druck und messen den zeitlichen Verlauf der Spannungsänderung. In diesem Zusammenhang werden Kalibrierungsfunktionen benötigt, mit denen die gemessenen elektrischen Spannungen in Drücke umgerechnet werden können. Unter der Leitung von STEINBEISS & CARL 1999 [200, 30] erfolgten hierzu speziell entwickelte Kalibrierungsversuche der KMW-Aufnehmer an der WTD 52, bei denen die elektrischen Spannungen in den Messaufnehmern in bestimmten Abständen zu einer Sprengung im Wasser aufgezeichnet und die Ergebnisse mit analytischen bzw. AUTODYN-Berechnungen zur Berechnung des hydrostatischen Drucks gegenübergestellt wurden. Allerdings treten Probleme in der Sensitivität bei hohen, gemessenen Drücken auf. STEINBEISS & CARL berichten von großen Ungenauigkeiten bei der Umrechnung in hydrostatische Drücke, sollten nur geringe Abweichungen in den gemessenen elektrischen Spannungen auftreten. Weitere Untersuchungen zur Kalibrierung liegen von HOLLENBERG 1983 [104] vor, deren Ergebnisse in die Umrechnung der mit den KMW-Aufnehmern gemessenen elektrischen Spannungen in hydrostatische Drücke in diese Auswertung einfließen.

Für jede Anspannung einer Betonplatte wurden sechs KMW-Aufnehmer in drei verschiedenen Tiefen platziert, deren Anordnung im Versuchsaufbau in Abbildung A.1 illustriert ist.



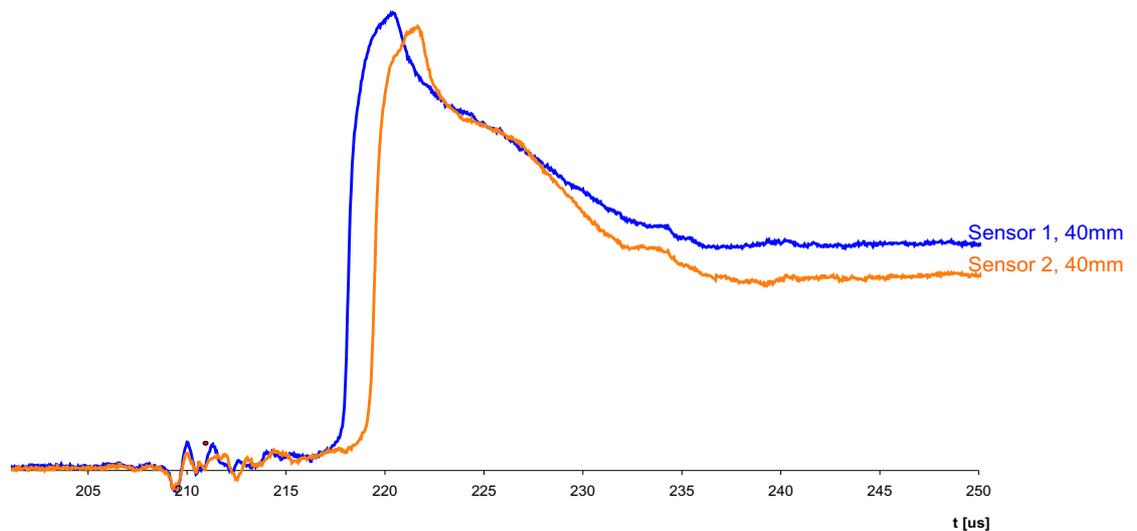
**Abbildung A.1:** Full-scale test: Versuchsaufbau (links), Rückseite der Betonplatte mit eingebauten KMW-Aufnehmern (mitte) und deren Lage und Tiefe (rechts) (aus: LANDMANN 2000 [129])

Die Schockwellengeschwindigkeit  $U_s$  ergibt sich zu  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  aus dem relativen Abstand  $\Delta x$  zwischen zwei KMW-Aufnehmern und aus dem Zeitabstand  $\Delta t$  der Ankunftszeiten, welche aus den Protokollen der gemessenen elektrischen Spannungen entnommen werden. Die Genauigkeit der Schockwellengeschwindigkeit hängt entscheidend vom präzisen Einbau der KMW-Aufnehmer in die Betonplatte und von der Ablesung des ersten Anstiegs der Ankunftszeit aus dem Messprotokoll ab (siehe Abbildung A.2). Die vorgegebene Position der installierten KMW-Aufnehmer konnte mit maximal 1 mm Abweichung beziffert werden, während der Ablesefehler der Ankunftszeit mit weniger als 1  $\mu s$  angegeben wird. Weitere detaillierte Informationen zum Versuchsaufbau und zur Versuchsdurchführung befinden sich im Bericht von LANDMANN 2000 [129].

Die Messungen der elektrischen Spannungen dienen zur Auswertung der Drücke und der Ankunftszeiten während die Schockwelle den KMW-Messaufnehmer durchläuft. Der erste Anstieg der elektrischen Spannung ist ca. 50  $\mu s$  nach dem Auslösen des Blitzsensors zu verzeichnen. In Abbildung A.2 ist das Protokoll der zeitlichen Spannungsmessung für zwei Sensoren mit gleichem Abstand zur Sprengladung dargestellt, wobei sich die Sensoren in diesem Fall 40 mm unterhalb der Sprengladungsmenge befanden.

Die experimentellen Ergebnisse sind in Tabelle A.1 zusammengefasst. Die maximal gemessenen elektrischen Spannungen und deren Ankunftszeiten sind in der zweiten und der vierten Spalte aufgeführt. Die hydrostatischen Drücke in Spalte vier wurden nach den Kalibrierungsfunktionen von HOLLENBERG 1983 [104] ermittelt. Die Schockwellengeschwindigkeit in Spalte sieben berechnet sich anhand des relativen Abstands von zwei KMW-Aufnehmern und deren Differenz der Ankunftszeiten (Spalten fünf und sechs) unter Berücksichtigung einer Abweichungsberechnung mit Hilfe der quadratischen Interpolation.

Die entsprechende Dichte  $\rho$  ergibt sich aus der Betrachtung des thermodynamischen Gleichgewichtszustand wie folgt. Aus dem hydrostatischen Druck  $p$ , der Schockwellengeschwindigkeit  $U_s$  and der bekannten Ausgangsdichte  $\rho_0$  der Betonprobe lässt sich die Dichte des komprimierten Betons in einem Messpunkt aus den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls bestimmen,



**Abbildung A.2:** Full-Scale-Tests: Messprotokoll der zeitlichen Spannungsmessung für zwei Sensoren mit gleichem Abstand zur Sprengladung (aus: LANDMANN 2000 [129])

vergleiche Abschnitt 6.2. Das Ergebnis liefert einen HUGONIOT-Punkt für die Zustandsgleichung. Alle HUGONIOT-Eigenschaften aus dem Full-Scale-Test sind zusammen mit den Ergebnissen des Inversen-Planarplatten-Impakt-Tests im Abschnitt A.5 dargestellt.

#### A.4.2 Flyer-Plate-Impact Tests

Bei den von NAHME 2000 [159] am EMI durchgeführten **inversen Planarplatten-Impakt-Versuchen** wurden scheibenförmige Betonproben mit einem Durchmesser von 58 mm auf einem Träger (Sabot) montiert und in einer Gaskanone beschleunigt. Der Impaktor schießt auf ein stationär positioniertes Zielobjekt aus C45-Stahl mit einem Durchmesser von 50 mm, dessen Materialeigenschaften aus früher durchgeführten Versuchen bekannt sind (NAHME 1991 [158]). Beim planparallelen Aufschlag werden Druckspannungswellen in beiden Platten erzeugt. Die Projektilplatte wird durch den Aufprall abgebremst, während das Zielobjekt dagegen beschleunigt. Auf der Rückseite des Zielobjekts lassen sich die Geschwindigkeiten der Platte unter Verwendung eines VISAR-Laserinterferometers mit einer Zeitauflösung von 4 ns/Messpunkt aufgrund des diffus gestreuten Laserlichts interferometrisch bestimmen (BARKER & HOLLENBACH 1972 [14]). Die Abweichungen der in der Mitte des Zielobjekts gemessenen Geschwindigkeiten wird mit weniger als 3% Abweichung beziffert. Mit Hilfe der Geschwindigkeitsaufzeichnungen und den bekannten Materialeigenschaften des C45-Stahls lassen sich Rückschlüsse auf die thermodynamischen Schockzustände in beiden Materialien ziehen. Abbildung 1.5 im Abschnitt 1.2.3 zeigt den Versuchsaufbau des inversen Planarplatten-Impakt-Tests, so wie er für diese Versuchsreihe verwendet wurde.

**Tabelle A.1:** Full-Scale-Tests: Ergebnisse der drei angesprengten Betonplatten (Spalten 1 bis 5 sind aus LANDMANN 2000 [129] entnommen)

	1	2	3	4	5	6	7	8
	Messung	Spannung [V]	Druck [MPa]	Ankunftszeit [ $\mu$ s]	Abstand [mm]	$\Delta t$ [ $\mu$ s]	$U_s$ [m/s]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]
<b>Platte 1</b>				197,65				
Sensor	40 mm	2.62	1129.2	217.90	42.8	12.09	3488	3.88
Sensor	40 mm	2.542	933.7	218.90	42.8	13.09	3434	3.54
Sensor	60 mm	1.885	137.8	223.50	63.0	17.87	3433	2.47
Sensor	60 mm	1.783	122.0	224.40	63.0	18.77	3569	2.45
Sensor	80 mm	1.12	50.2	229.30	83.0	23.78	3376	2.39
Sensor	80 mm	1.093	47.3	229.85	83.0	24.33	3702	2.39
<b>Platte 2</b>				197,95				
Sensor	40 mm	2.685	1388.4	216.70	42.8	10.59	3540	4.45
Sensor	40 mm	2.697	1582.8	217.15	42.8	11.04	3618	4.84
Sensor	60 mm	1.55	88.5	223.00	63.0	17.07	2977	2.45
Sensor	60 mm	1.35	68.2	222.65	63.0	16.72	3333	2.41
Sensor	80 mm	0.805	30.9	230.15	83.0	24.33	2345	2.41
Sensor	80 mm	0.67	23.6	228.95	83.0	23.13	3011	2.38
<b>Platte 3</b>				199,10				
Sensor	40 mm	2.34	326.0	218.60	42.8	11.34	3287	2.70
Sensor	40 mm	1.985	156.0	219.30	42.8	12.04	3424	2.49
Sensor	60 mm	1.498	82.2	225.35	63.0	18.27	2724	2.47
Sensor	60 mm	1.053	45.0	225.85	63.0	18.77	3380	2.39
Sensor	80 mm	0.575	19.9	233.40	83.0	26.43	2062	2.40
Sensor	80 mm	0.535	18.0	231.00	83.0	24.03	3345	2.37

Die mit Hilfe von Geschwindigkeitsaufnehmern kontrollierten Auftreffgeschwindigkeiten  $v_0$  der Platten lagen im Bereich von 258–900 m/s. Die Messungen erfolgten kurz vor dem Aufprall des Impaktors auf das Ziel. Die Auftreffgeschwindigkeit wurde mit dieser Methode auf  $\pm 2\%$  genau bestimmt. Die Abweichung von einem exakt planaren Aufschlag übersteigt nicht einen Verkippungswinkel von 1 mrad.

Vier verschiedene Impaktgeschwindigkeiten wurden an jeweils drei Betonproben wiederholt. Die Betonscheiben wiesen eine Dicke von  $12.00 \text{ mm} \pm 0.01 \text{ mm}$  auf, während die Dicke der Zielobjekte der C45-Scheibe lediglich  $3.98 \text{ mm} \pm 0.02 \text{ mm}$  war.

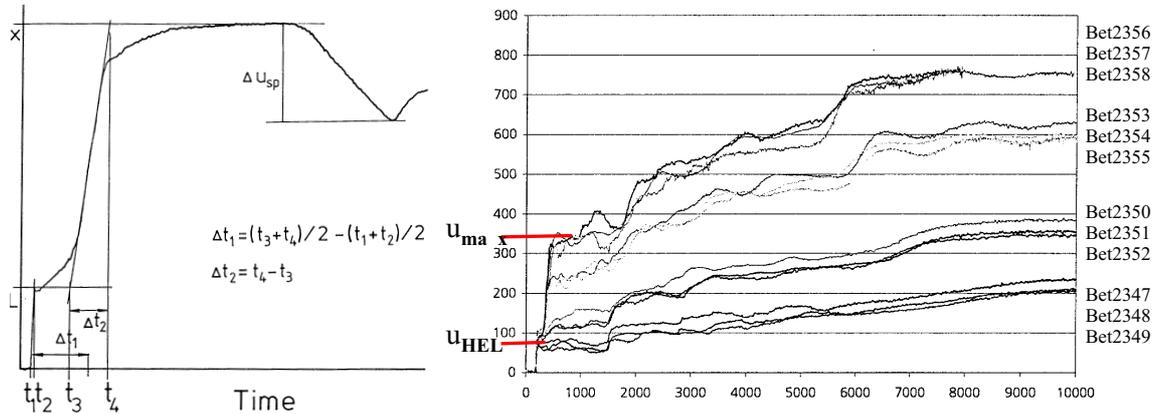
Während des Aufschlags durchlaufen ausgehend von der Kontaktfläche Druckspannungswellen in beiden Materialien, wobei die Intensität der Druckspannung sowie das Transmittieren und das Reflektieren der Wellen von den unterschiedlichen Materialimpedanzen  $I_{m,i} = \rho_i \cdot c_i$  abhängt, vergleiche Abschnitt 3.1.2. Aufgrund der seitlichen Ausdehnung liegt in den Proben ein ein-dimensionaler Verzerrungszustand bei gleichzeitigem dreidimensionalen Spannungszustand vor. In Anbetracht der Kontinuität an der Kontaktfläche korrelieren während des Impulsaustauschs die Spannungen und die Partikelgeschwindigkeiten in den Proben. Zu diesem Zeitpunkt liegt

in beiden Materialien ein HUGONIOT–Spannungszustand  $\sigma_{Hug}$  vor, der zum hydrostatischen Druck bei hohen Druckspannungen korrespondiert, vergleiche Abschnitt 3.1.3.  $\sigma_{Hug}$  lässt sich aus den gemessenen Geschwindigkeiten  $u_{HEL}$  und  $u_{max}$  sowie aus den den bekannten Materialeigenschaften des Zielobjekts (C45–Stahl), der Anfangsdichte  $\rho_{0,C45}$  und der longitudinalen Wellengeschwindigkeit  $c_{B,C45}$ , berechnen mit

$$\sigma_{Hug} = \frac{1}{2} \rho_{0,C45} c_{B,C45} u_{HEL} + \frac{1}{2} \rho_{0,C45} U_{s,C45} (u_{max} - u_{HEL}) . \quad (\text{A.1})$$

Die Ablesepunkte der Geschwindigkeitsamplituden und der Ankunftszeiten sowie die Messprotokolle des VISAR's von den zwölf untersuchten Proben sind in Abbildung A.3 dargestellt. Die elastische Wellengeschwindigkeit  $u_{HEL}$  wird vom VISAR aufgezeichnet, sobald der elastische Vorläufer die Rückseite der C45–Stahlscheibe erreicht. Dieses erste Plateau kennzeichnet das dynamisch ermittelte, elastische Limit des Materials vom Zielobjekt. Das zweite aufgezeichnete Plateau der Wellengeschwindigkeit  $u_{max}$  hängt von der Auftreffgeschwindigkeit des Impaktors und der daraus folgenden eingeleiteten Schockwellengeschwindigkeit ab. Weitere Plateaus, die das VISAR registriert, kennzeichnen bereits im Material vorliegende Entlastungswellen und sind von untergeordneter Bedeutung. Demnach ist das zweite Plateau des VISAR–Messprotokolls entscheidend für die Berechnung der HUGONIOT–Spannungen in Gleichung (A.1).  $U_{s,C45}$  ist die sich im Material ausbreitende Schockwellengeschwindigkeit.

Folgende Größen ergeben sich für die Berechnung des ersten Druckzustands, der sich auf der HUGONIOT–Kurve befindet, wenn aufgrund einer kontinuierlichen Kontaktfläche zwischen Impaktor und Zielobjekt sich in beiden Materialien gleiche Spannungen und Partikelgeschwindigkeiten einstellen.



**Abbildung A.3:** Inverser Planarplatten–Impakt–Test: a) Geschwindigkeitsamplituden, Ankunftszeiten der elastischen und plastischen Wellen, b) Messprotokoll des VISAR's der zwölf Geschwindigkeitsverläufe (aus: NAHME 2000 [159])

$$U_{s,C45} = \frac{c_{B,C45}}{(1 + c_{B,C45} \Delta t_1 / d_{C45})} \quad (\text{A.2})$$

$$U_{p,C45} = \frac{1}{2} u_{max} \quad (\text{A.3})$$

$$U_{p,Beton} = v_0 - U_{p,C45} \quad (\text{A.4})$$

$$U_{s,Beton} = \frac{\sigma_{Hug}}{\rho_0 U_{p,Beton}} \quad (\text{A.5})$$

Die Dicke der C45-Scheibe ist mit  $d_{C45}$  bezeichnet.  $U_p$  stellt jeweils die Partikelgeschwindigkeiten eines Materials dar.  $v_0$  entspricht der Auftreffgeschwindigkeit des Impaktors.

Die HUGONIOTSche Kompressionsverzerrung im Beton ergibt sich aus

$$\varepsilon_{Beton} = \frac{U_{p,Beton}}{U_{s,Beton}} \quad (\text{A.6})$$

und kann nicht aus der Versuchsanordnung gemessen werden. Die Ergebnisse der HUGONIOT-Eigenschaften sind in Tabelle A.2 zusammengefasst.

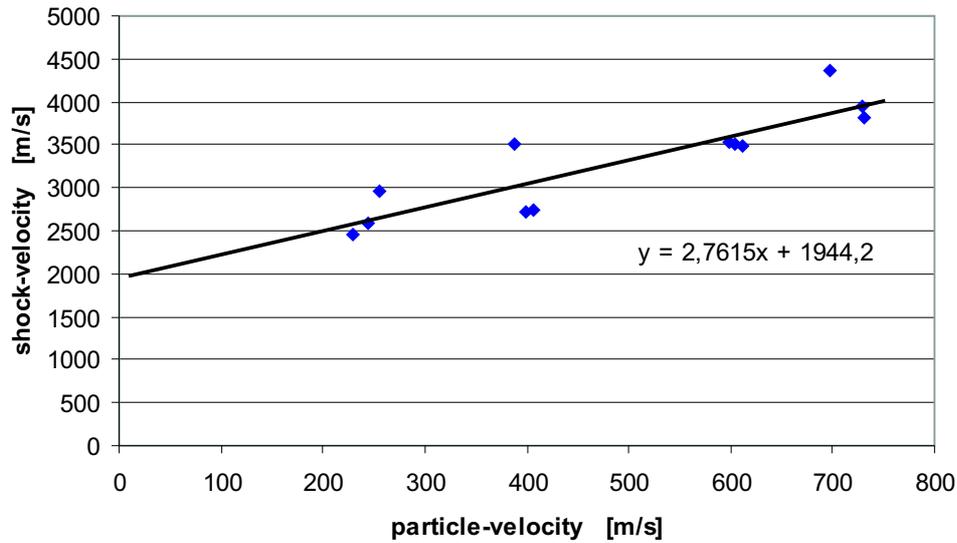
**Tabelle A.2:** Inverser Planarplatten-Impakt-Test: Ergebnisse der zwölf belasteten Betonproben (aus: NAHME 2000 [159])

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>Versuch</b>	$v_0$ (m/s)	$u_{max}$ (m/s)	$U_p$ (m/s)	$U_s$ (m/s)	$\sigma_{Hug}$ (MPa)	$\varepsilon$	$V/V_0$
Bet2347	277	64.8	244.6	2596	1473	0.0942	0.9058
Bet2348	258	57.3	229.4	2449	1303	0.0936	0.9064
Bet2349	295	77.5	256.3	2965	1763	0.0864	0.9136
Bet2350	466	119.9	406.1	2733	2575	0.1486	0.8514
Bet2351	458	116.9	399.6	2721	2523	0.1468	0.8532
Bet2352	463	151.7	387.2	3500	3144	0.1106	0.8894
Bet2353	738	251.0	612.5	3485	4953	0.1757	0.8243
Bet2354	728	248.5	603.8	3503	4906	0.1724	0.8276
Bet2355	723	248.8	598.6	3536	4911	0.1693	0.8307
Bet2356	900	342.9	728.6	3947	6671	0.1846	0.8154
Bet2357	880	363.6	698.2	4361	7063	0.1601	0.8399
Bet2358	898	332.8	731.6	3817	6479	0.1917	0.8083

Abbildung A.4 stellt die Ergebnisse des inversen Planarplatten-Impakt-Tests in einer Schockwellengeschwindigkeits-Partikelgeschwindigkeits-Beziehung ( $U_s - U_p$ ) dar. Da die Belastungsgeschwindigkeiten in allen zwölf Versuchen stets plastische Deformationen in der Betonprobe erzeugt haben, ist es möglich, eine Ausgleichsbeziehung in der Form einer Schock-Zustandsgleichung zwischen den  $U_s - U_p$  Wertepaaren einzulegen. Diese lineare Beziehung gilt nicht für den elastischen Bereich des Betons mit geringen Wellengeschwindigkeiten. Die Kompressionswellengeschwindigkeit  $c_B$  und die Steigung  $S$  werden angegeben mit

$$U_s = S \cdot U_p + c_B = 2.76 \cdot U_p + 1945 \quad (\text{A.7})$$

Die verschiedenen Versuchsmethoden ergaben zum einen eine Druck-Dichte-Beziehung und zum anderen eine Relation zwischen  $U_s$  und  $U_p$ . Beide Beziehungen lassen sich mathematisch mit Hilfe der Erhaltungsgleichungen ineinander transferieren.



**Abbildung A.4:** Inverser Planarplatten–Impakt–Test: Schockwellengeschwindigkeits–Partikelgeschwindigkeits–Beziehung (aus: NAHME 2000 [159])

## A.5 Auswertung und Beurteilung

Zur Veranschaulichung sind alle Ergebnisse aus beiden Versuchsmethoden in Abbildung A.5 in einer Druck–Dichte–Beziehung angegeben. Hierbei lassen sich die Wertepaare aus den **Full–Scale–Tests** (Tabelle A.1) direkt in das Diagramm eintragen, während die HUGONIOT–Daten aus den **inversen Planarplatten–Impakt–Tests** zunächst aus der Schockwellengeschwindigkeits–Partikelgeschwindigkeits–Beziehung umgerechnet werden müssen. Durch Substitution der  $U_s - U_p$ –Beziehung aus Gleichung (A.7) in die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls ergeben sich die gesuchten HUGONIOT–Spannungen mit

$$\sigma_{Hug} = \frac{\rho_0 c_B^2 \eta (1 + \eta)}{(1 - (S - 1) \eta)^2} \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \quad . \quad (\text{A.8})$$

Die Ergebnisse in Abbildung A.5 machen deutlich, dass die aus den unterschiedlichen Versuchsmethoden gewonnenen HUGONIOT–Daten für den Beton sich lediglich im Bereich zwischen 1.3 GPa und 3.3 GPa ergänzen. Unterhalb des erstgenannten Druckwertes liegen nur Daten aus den Full–Scale–Tests vor, während die inversen Planarplatten–Impakt–Studien nur Ergebnisse im Druckbereich zwischen 3.3 GPa und 6.8 GPa ergeben. Darüberhinaus existieren nur einige wenige Daten aus den Anspannungsversuchen (Abbildung A.6).

Das Einlegen einer Ausgleichsfunktion durch alle Druck–Dichte–Wertepaare, deren Bedeutung dem Kompaktionsverhalten des granularen Betons entspricht, in Abbildung A.5 zeigt, dass keine großen Abweichungen der Ergebnisse sowohl aus der einen als auch aus der anderen Versuchsmethode bei gleichem Material aber mit unterschiedlichen Probengrößen vorliegen. Für die

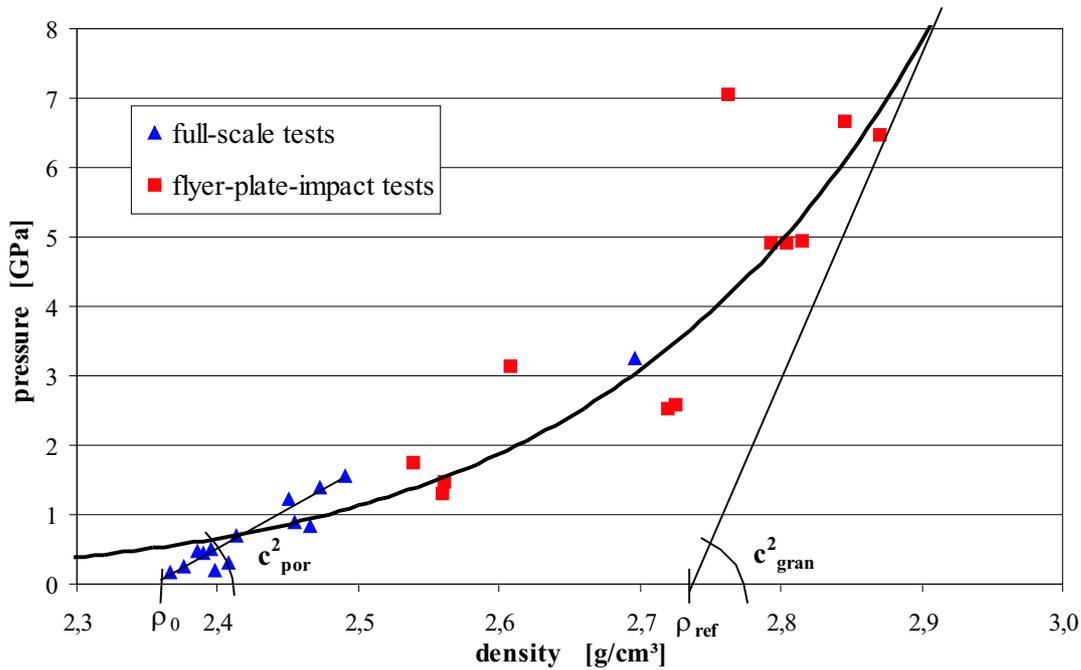


Abbildung A.5: Druck-Dichte Wertepaare für Beton, Teil 1

Ermittlung von HUGONIOT-Daten eines porösen Materials spielt also die verwendete Versuchsmethode keine Rolle. Die Übereinstimmung der Ergebnisse im Druckbereich zwischen 1.3 GPa und 3.3 GPa bestätigt die Unabhängigkeit der Methoden. Da dieser Druckbereich relativ klein ist, resultiert aus der Anordnung der KMW-Aufnehmer in den Betonplatten, so dass weitere Versuche mit anderen Positionen der Messaufnehmer wünschenswert gewesen wären.

Im niedrigen Druckbereich liegen die Wertepaare nah an einer eingelegten Ausgleichsgeraden, dessen Steigung quadratisch zur elastischen Wellengeschwindigkeit  $c_{por}$  des Materials korrespondiert und sich zu  $c_{por} = 3090 \text{ m/s}$  ergibt. Das Ergebnis steht im Vergleich in guter Übereinstimmung mit in der Literatur bekannten Daten verschiedener, aber ähnlicher Betonmischungen von RIEDEL 2000 [177] mit  $c_{por} = 2920 \text{ m/s}$  und  $c_{por} = 3242 \text{ m/s}$  sowie von GRADY 1993 [86] mit  $c_{por} = 3317 \text{ m/s}$ .

Das elastische Materialverhalten endet mit dem Erreichen des HEL (HUGONIOT-Elastic-Limit), das als Schnittpunkt der "elastischen Funktion" mit dem Kompaktionsast festgelegt ist. Als Ausgleich zu den Druck-Dichte-Wertepaaren stellt sich eine Potenzfunktion als geeignet dar, die in Abbildung A.5 den Kompaktionsast repräsentiert:

$$\sigma_{Hug} = 7 \cdot 10^{-6} \cdot \rho^{13.05} \quad . \quad (\text{A.9})$$

Daraus ergibt sich für das HEL ein Druck von 0.75 GPa.

Der Kompaktionsast konvergiert wie erwartet gegen eine Asymptote mit konstanter Steigung, vergleiche Abbildung A.6. Die Referenzdichte  $\rho_{ref}$  als Schnittpunkt mit der Abszisse und die granulare Wellengeschwindigkeit  $c_{gran}$  mit der Steigung der Gradienten charakterisieren den Verlauf

der Asymptote.

Die Ermittlung der Referenzdichte  $\rho_{ref}$  erfolgt nach der massenbasierten HUGONIOT–Mischregel, vergleiche auch RIEDEL 2000 [177]. Hierfür werden die genauen Trockenrohichten und Massen des Zuschlages und des Zements benötigt. Der verwendete Beton ist unter den in Abschnitt A.2 dokumentierten Vorgaben hergestellt worden. Die Werte der beiden Ausgangsstoffe zur Betonherstellung sind in der Tabelle A.3 angegeben.

**Tabelle A.3:** Materialdaten zur Bestimmung der Referenzdichte  $\rho_{ref}$  unter Anwendung der massenbasierten HUGONIOT–Mischregel

Ausgangsstoffe	Einheit	Zuschlag	PZ 35F
Dichte $\rho_i$	$[g/cm^3]$	2.68	3.10
Masse je $m^3$ Beton $m_{i,masse}$	$[kg/m^3]$	1730	450
Masse je $m^3$ Beton $m_{i,prozent}$	$[\%]$	79.36	20.64

Damit ergibt sich für die Referenzdichte  $\rho_{ref}$ :

$$\begin{aligned}
 \rho_{ref} &= \sum \frac{m_{i,prozent} \cdot \rho_i}{100\%} \\
 &= \frac{79.36\% \cdot 2.68g/cm^3 + 20.64\% \cdot 3.10g/cm^3}{100\%} = 2.767g/cm^3
 \end{aligned}
 \tag{A.10}$$

Auf dieser Grundlage wird die Asymptote an die Endneigung des Kompaktionsastes angelegt, die durch den Punkt der ermittelten Referenzdichte  $\rho_{ref}$  verläuft. Damit ergibt sich für die Wellengeschwindigkeit des granularen Betons  $c_{gran} = 8410 \text{ m/s}$ .

Der Vollständigkeit sei an dieser Stelle angemerkt, dass die in Abbildung A.6 eingetragenen Druck–Dichte–Wertepaare aus den Full–Scale–Tests oberhalb von 8 GPa der physikalisch sinnvollen Gradienten widersprechen. Deren Ausgleichsgerade weist eine geringere Steigung der Asymptote aus, was einem Rückgang der granularen Wellengeschwindigkeit  $c_{gran}$  entspricht.

Es wird angenommen, dass die Ergebnisse einem systematischen Fehler in der Auswertung der Messungen zugewiesen werden, da die Diskrepanz der einzelnen Wertepaare nicht wesentlich von einer Ausgleichsgerade abweichen. Ein möglicher Grund hierfür liegt in der Problematik bei der Aufstellung einer Kalibrierungsfunktion. Sowohl HOLLENBERG 1983 [104], deren Funktionen hier verwendet werden, als auch Steinbeiss & Carl 1999 [200, 30] berichten von möglichen Ungenauigkeiten ihrer Kalibrierungen in hohen Druckbereichen, die zu Abweichungen bei der Umrechnung der gemessenen elektrischen Spannungen in hydrostatische Drücke führen können. Des Weiteren sind Ungenauigkeiten in der Berechnung der Schockwellengeschwindigkeiten nicht auszuschließen. Wie in Abbildung A.2 dargestellt, führen geringfügige Abweichungen bei der Ablesung der Ankunftszeiten von  $1 \mu s$ , die aufgrund der Oszillationen der Spannungsmessungen nicht eindeutig festgelegt werden können, zu Streuungen von bis zu 20% bei der Schockwellengeschwindigkeit, wenn gleichzeitig ein unpräziser Einbau der KMW–Aufnehmer mit Abweichungen von bis zu 1 mm vorliegt.

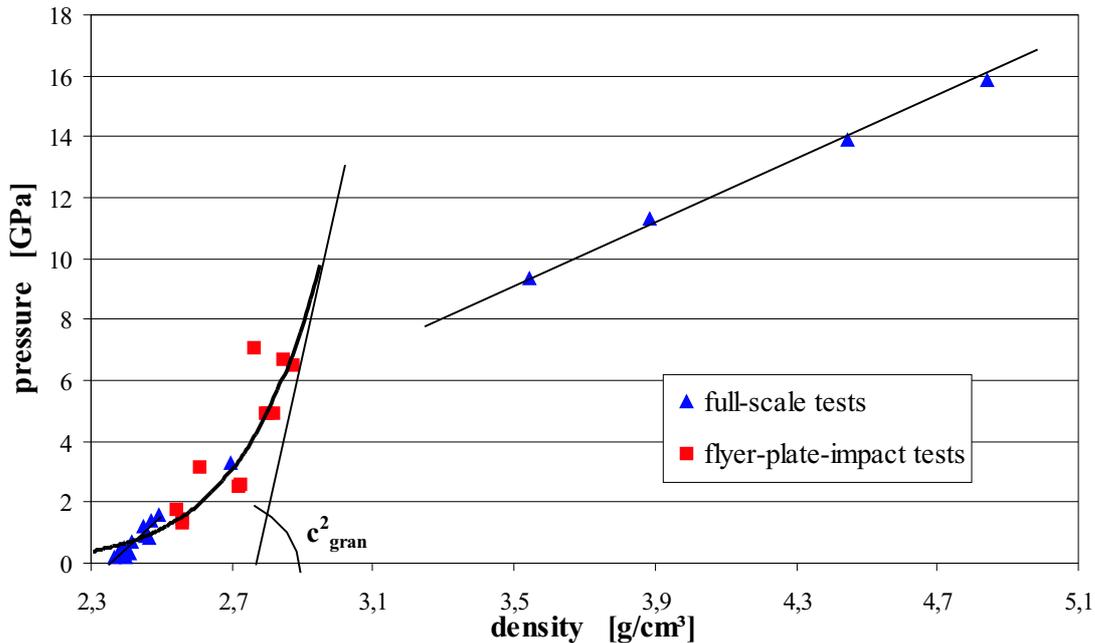


Abbildung A.6: Druck-Dichte Wertepaare für Beton, Teil 2

Im Vergleich dazu liefern die inversen Planarplatten-Impakt-Tests in den extrem hohen Druckbereichen über 8 GPa keine Daten. Das Problem liegt in der geringen Impedanz des Betons im Vergleich zum Material des Zielobjekts, dem C45-Stahl. Daher schlägt RIEDEL in seiner Arbeit 2000 [177] vor, eine modifizierte Versuchsanordnung des inversen Planarplatten-Impakt-Tests anzusetzen, bei der sich mit Hilfe von Mehrfachreflexionen höhere Drücke im Beton erzielen lassen. Eine derartige Versuchsanordnung zur Bestimmung von EoS-Daten für Beton liegt zum aktuellen Zeitpunkt nicht vor.

## A.6 Zustandsgleichungen für poröse Medien

### A.6.1 Betonparameter für eine poröse Druck-Dichte Zustandsgleichung

Die Bereitstellung einer porösen Zustandsgleichung für den Beton in den Hydrocode AUTODYN erfolgt nach dem theoretischen Aufbau der EoS in Abbildung A.7. Der elastische Ast der EoS verläuft linear von der Zugfestigkeit ( $T=HTL=$ Hydrostatic-Tensile-Limit) über die Anfangsdichte  $\rho_0$  beim Druck  $p = 0$  bis zum HEL mit der Dichte  $\rho_{crush}$ . Die Geradengleichung ergibt sich aus der Anfangsdichte  $\rho_0$  und der Steigung der Geraden  $c_{por}^2$ . Die Funktion (A.9) zur Beschreibung des Kompaktionsastes kann nicht als solche in dieser Form in AUTODYN eingegeben werden. Die Implementierung erfolgt als multilineare Funktion, wobei die Druck-Dichte-Wertepaare aus der Potenzfunktion (A.9) ermittelt werden. Nach der vollständigen Kompaktion aller Poren und Einschlüsse liegt die "dichteste Packung" vor, also ein granulares Material. Das Material ist zu

diesem Zeitpunkt bereits vollständig zerstört, weshalb ab diesem Punkt keine wesentliche Steigungsänderung eintritt. Die Steigung wird als Anstieg der Tangente  $c_{gran}^2$  in diesem Punkt definiert. Wird nach einer vollständigen Kompaktion entlastet, so herrscht ein verdichtetes Material mit der Referenzdichte  $\rho_{ref}$  vor. Die Steigung der Gradiente  $c^2$  für hydrostatische Drücke zwischen  $\rho_{crush}$  und  $\rho_{ref}$  wird aus  $c_{por}^2$  und  $c_{gran}^2$  linear interpoliert:

$$c_{por}^2 < c^2 < c_{gran}^2 \quad . \quad (\text{A.11})$$

Über die Differenz aus Referenzdichte  $\rho_{ref}$  und Anfangsdichte  $\rho_0$  ist das Kompaktionsvermögen eines porösen Materials über die Gleichung (A.12) ermittelbar:

$$\mu_{gran} = \frac{\rho_{ref} - \rho_0}{\rho_0} \quad (\text{A.12})$$

Alle Daten einer porösen Zustandsgleichung sind Tabelle A.4 zu entnehmen. Hierbei ist zu beachten, dass der erste Dichteparameter  $\rho_1$  gleich der Anfangsdichte  $\rho_0$  sein muss, damit ein Schnittpunkt zwischen dem elastischen und dem kompaktierten Funktionsast berechnet werden kann.

### A.6.2 Betonparameter für eine $p - \alpha$ Zustandsgleichung

Eine Erweiterung der porösen Zustandsgleichung liefert der phänomenologische Ansatz von HERRMANN 1969 [96]. Er fügt dem nichtlinearen Kompressionsverhalten einen Energieterm hinzu:

$$p = K_1\mu + K_2\mu^2 + K_3\mu^3 + (B_0 + B_1\mu)\rho_0 e \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{\Delta V}{V} \quad . \quad (\text{A.13})$$

RIEDEL gibt in seiner Arbeit 2000 [177] an, dass sich mit Hilfe der Materialparameter  $c_B$  und  $S$  des Matrixmaterials über die massenbasierte HUGONIOT-Mischregel die Koeffizienten des

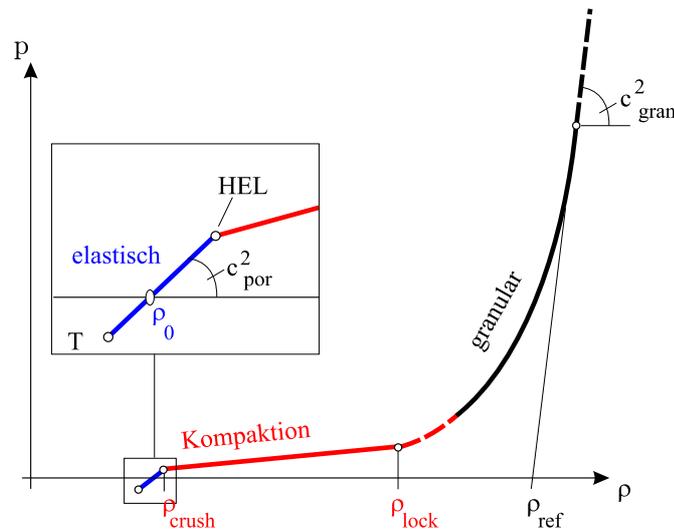


Abbildung A.7: Poröse HUGONIOT-Zustandsgleichung in der Druck-Dichte-Ebene

**Tabelle A.4:** Betonparameter der porösen Druck–Dichte Zustandsgleichung

Parameter	Bedeutung	Wert	Einheit
$\rho_0$	Anfangsdichte	2.35	[g/cm <sup>3</sup> ]
$\rho_{ref}$	Referenzdichte	2.767	[g/cm <sup>3</sup> ]
$c_{por}$	elastische Wellengeschwindigkeit	0.309	[cm/ $\mu$ s]
$c_{gran}$	kompaktierte Wellengeschwindigkeit	0.841	[cm/ $\mu$ s]
$\rho_1$	EoS–Dichte–Parameter 1	2.35	[g/cm <sup>3</sup> ]
$\rho_2$	EoS–Dichte–Parameter 2	2.477	[g/cm <sup>3</sup> ]
$\rho_3$	EoS–Dichte–Parameter 3	2.584	[g/cm <sup>3</sup> ]
$\rho_4$	EoS–Dichte–Parameter 4	2.670	[g/cm <sup>3</sup> ]
$\rho_5$	EoS–Dichte–Parameter 5	2.765	[g/cm <sup>3</sup> ]
$\rho_6$	EoS–Dichte–Parameter 6	2.880	[g/cm <sup>3</sup> ]
$p_1$	EoS–Druck–Parameter 1	0.0060	[Mbar]
$p_2$	EoS–Druck–Parameter 2	0.0096	[Mbar]
$p_3$	EoS–Druck–Parameter 3	0.0171	[Mbar]
$p_4$	EoS–Druck–Parameter 4	0.0269	[Mbar]
$p_5$	EoS–Druck–Parameter 5	0.0418	[Mbar]
$p_6$	EoS–Druck–Parameter 6	0.0698	[Mbar]

Polynomansatzes  $K_1$  bis  $K_3$  bestimmen lassen:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \rho_0 c_B^2 \\
K_2 &= \rho_0 c_B^2 [1 + S(S - 1)] \\
K_3 &= \rho_0 c_B^2 [2(S - 1) + 3(S - 1)^2]
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Nach LEMAÎTRE & CHABOCHE 1998 [135] setzt sich der Portland–Zement aus Kalzium (Ca), Silizium (Si), Aluminium (Al), Eisen (Fe) und Gips zusammen. Unter Vernachlässigung der Massenanteile unter 5 % (Aluminium (Al), Eisen (Fe) und Gips) werden 92.78 % der Massenanteile aus Ca und Si berücksichtigt. Somit ergeben sich für den Ca–Massenanteil  $m_{Ca} = 86.7$  % und für den Si–Massenanteil  $m_{Si} = 13.3$  % (ermittelt nach RIEDEL 2000 [177]). Die Werte  $c_B$  und  $S$  der Einzelmaterialien liegen aus den Sammelwerken von MARSH 1980 [146] und von KUCHLING 1996 [126] vor. Die Massenanteile sind für den Zuschlag (79.36 %) und für den Zement (20.64 %) aus Tabelle A.3 bekannt. Demnach lassen sich die Werte für  $c_B$  und  $S$  aus der HUGONIOT–Mischregel ermitteln zu:

$$\begin{aligned}
c_B &= m_{Sand} \cdot C_{B,Sand} + m_{Zement} \cdot m_{Ca} \cdot C_{B,Ca} + m_{Zement} \cdot m_{Si} \cdot C_{B,Ci} \\
&= 0.7936 \cdot 3750 + 0.2064 \cdot 0.867 \cdot 3602 + 0.2064 \cdot 0.133 \cdot 11800 = 3945 \frac{m}{s}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Da für Silizium  $S$  nicht bekannt ist, wird hypothetisch  $S_{Ca} \approx S_{Si}$  angesetzt:

$$\begin{aligned}
S &= m_{Sand} \cdot S_{Sand} + m_{Zement} \cdot S_{Ca} \\
&= 0.7936 \cdot 1.142 + 0.2064 \cdot 0.948 = 1.102.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Nach dem Ansatz von DUGDALE & MACDONALD 1953 [53] ergibt sich der GRÜNEISEN-Koeffizient  $\Gamma$  zu:

$$\gamma \cong 2S - 1 = 1.204 . \quad (\text{A.17})$$

Alle Parameter einer  $p - \alpha$  Zustandsgleichung sind entsprechend der geforderten Eingabedaten in AUTODYN Tabelle A.5 zu entnehmen.

**Tabelle A.5:** Betonparameter der  $p - \alpha$  Zustandsgleichung

Parameter	Bedeutung	Wert	Einheit
$\rho_0$	Anfangsdichte	2.35	[g/cm <sup>3</sup> ]
$c_{por}$	elastische Wellengeschwindigkeit	0.309	[cm/ $\mu$ s]
$p_{el}$	Druck, bei dem Kompaktion anfängt (HEL)	0.0034	[Mbar]
$p_{kompakt}$	Druck, bei dem vollständige Kompaktion vorliegt	0.06	[Mbar]
$N$	Exponent der Kompaktionsfunktion	3.0	—
$solidEoS$	Typ der Matrixzustandsgleichung	polynomial	—
$compaction\ curve$		standard	—
$\rho_{ref}$	Referenzdichte	2.767	[g/cm <sup>3</sup> ]
$K_1$	Parameter $K_1$	0.3657	[Mbar]
$K_2$	Parameter $K_2$	0.4068	[Mbar]
$K_3$	Parameter $K_3$	0.0860	[Mbar]
$B_0 = \Gamma$	Parameter $B_0$	1.204	—
$B_1 = \Gamma$	Parameter $B_1$	1.204	—
$T_1$	Parameter $T_1$	0.3657	—
$T_2$	Parameter $T_2$	0.3657	—
$T$	Referenztemperatur	300	[K]
$C.K.$	Spezifische Wärmekapazität	6.54E2	[Terg/gK]

