

# Unsicherheiten bei der hydrodynamischen Modellierung von Überschwemmungsgebieten

Universität der Bundeswehr München

Institut für Wasserwesen

Professur für Wasserwirtschaft und Ressourcenschutz

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Markus Disse

Alpaslan Yörük

München 2008



# Vorwort

Infolge der immer heftiger und häufiger eintretenden Hochwasserereignisse nimmt die Bedeutung von hydrodynamischen Modellen, insbesondere für die Hochwasservorhersage, stetig zu. Sie dienen in vielen Ländern zur Ausarbeitung von fundierten Notfall- und Evakuierungsplänen im Hochwasserfall. Hierzu ist die Prognose einer Hochwasserwelle und ihre Ausbreitung im Gelände erforderlich, die im Allgemeinen auf mathematischen Modellen beruht. In der vorliegenden Arbeit wird auf den praktischen Einsatz von hydrodynamischen Modellen eingegangen und insbesondere die Parameterunsicherheit mittels Monte Carlo Simulationen quantitativ erfasst. Die ausführliche und zusammenhängende Beschreibung der mathematischen und physikalischen Grundlagen von verschiedenen komplexen hydrodynamischen Modellgleichungen bildet dabei die Basis zum Verständnis der Unsicherheiten, bedingt durch die vereinfachende Abbildung von natürlichen Prozessen im mathematischen Modell.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Markus Disse, Leiter der Professur Wasserwirtschaft und Ressourcenschutz der Universität der Bundeswehr München, danke ich für die kontinuierliche Unterstützung, den Freiraum bei der Durchführung meiner wissenschaftlichen Untersuchungen und für die Übernahme des Hauptreferats. Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Stephan Theobald, Leiter des Fachgebietes Wasserbau und Wasserwirtschaft der Universität Kassel, danke ich für die gewissenhafte Übernahme des Koreferats.

Ein besonderer Dank gilt meinen Kollegen, den studentischen, nicht-wissenschaftlichen und wissenschaftlichen Mitarbeitern des Instituts für Wasserwesen, die durch ihre Unterstützung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Namentlich erwähnt seien: Astrid Zimmermann, Martina Kalk, Sabine Pakosch und Wolfgang Rieger.

Der größte Dank gilt meiner Energiequelle und meinem Lebensinhalt:  
Noemi, Melina und Olga!

München, im Dezember 2008

*Alpaslan Yörük*



# Abstract

Due to increasing flood events, the demands on flood forecast systems are presently high. In many countries these systems are used for emergency action and evacuation plans. Therefore the flood wave and its propagation have to be forecasted, which is usually carried out by numerical models.

The focus of this thesis is the practical application of different complex models for flood modelling as well as the uncertainties of the model results. Therefore the derivation and principles of the necessary differential equations are consistently described.

The investigation of model uncertainties, which is splitted into three steps, is predicated on modelling with a synthetic channel and a section of the river Oberer Main. At first the parameter uncertainty is based on Monte Carlo Simulations by varying the friction and elevation values in channel and overbank. To quantify the parameter sensitivity the *Global Sensitivity Analysis* is applied. It is shown that as a result of the parameter uncertainties, the water level varies up to 0.5 m, while 80% of the simulated water depths are in a range of 0.25 m.

Generally the flood modelling takes place with different complex models, which is the second part of the uncertainty analyses. The results of one dimensional, two dimensional and hybrid models in the investigation area are compared. The representing of the topography and simplifying assumption in the different model concepts, especially the impulse interaction between channel and overbank discharge, has significant influence on the water level up to 0.25 m.

As the third step, log jam and levee break are analysed by scenario simulations. By these effects the water level differs up to 0.7 m.

Additionally the difference between manual and objective calibration is investigated. For the objective calibration the *Shuffled Complex Evotion Method* is successfully used. The results of both methods are almost equal, but the objective calibration could achieve better results while less modeller time is needed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>iii</b>
<b>Verzeichnis der Formelzeichen und Symbole</b>	<b>ix</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xx</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xxii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Allgemeines . . . . .	1
1.2 Gliederung der Arbeit . . . . .	2
<b>2 Grundlagen der Strömungsberechnung Newtonscher Fluide</b>	<b>5</b>
2.1 Allgemeines . . . . .	5
2.2 Herleitung der kompressiblen Strömungsgleichungen . . . . .	5
2.2.1 Kontinuitätsgleichung . . . . .	6
2.2.2 Impulsgleichungen . . . . .	8
2.3 Allgemeine inkompressible Strömungsgleichungen . . . . .	12
2.3.1 Inkompressible Kontinuitätsgleichung . . . . .	13
2.3.2 Inkompressible Impulsgleichungen . . . . .	13
2.4 Die Reynolds-Gleichungen . . . . .	15
2.5 Die tiefengemittelten Flachwassergleichungen . . . . .	17
2.5.1 Die tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung . . . . .	17
2.5.2 Die tiefengemittelten Impulsgleichungen . . . . .	19
2.6 Die 1D Saint-Venant-Gleichungen . . . . .	28
2.6.1 Die Breitenmittelung der Kontinuitätsgleichung . . . . .	29
2.6.2 Die Breitenmittelung der Impulsgleichungen . . . . .	29
2.7 Stationäres Fließen in offenen Gerinnen . . . . .	32

2.7.1	Fließformel nach Darcy-Weisbach . . . . .	32
2.7.2	Fließformel nach Manning-Strickler . . . . .	34
2.7.3	Wasserspiegellagenberechnung . . . . .	35
2.7.4	Gegenüberstellung der Reibungsansätze DW und MS . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Numerische Methoden</b>	<b>43</b>
3.1	Zeitliche Diskretisierung . . . . .	44
3.1.1	Einleitung . . . . .	45
3.1.2	Explizite Einschrittverfahren . . . . .	48
3.1.3	Explizite Mehrschrittverfahren . . . . .	51
3.1.4	Implizite Einschrittverfahren . . . . .	53
3.1.5	Implizite Mehrschrittverfahren . . . . .	55
3.2	Räumliche Diskretisierung . . . . .	56
3.2.1	Finite Differenzen Methode . . . . .	57
3.2.2	Finite Volumen Methode . . . . .	59
3.2.3	Finite Elemente Methode . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Modellgebiet</b>	<b>63</b>
4.1	Der Obere Main . . . . .	63
4.2	Der Modellabschnitt am Oberen Main . . . . .	64
4.3	Das synthetische Gerinne . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Hydrodynamische Berechnung von Überschwemmungsflächen</b>	<b>71</b>
5.1	Einleitung . . . . .	71
5.2	Eindimensionale Hochwassermodellierung . . . . .	71
5.3	Zweidimensionale Hochwassermodellierung . . . . .	74
5.4	Hybride Ansätze zur Hochwassermodellierung . . . . .	77
5.4.1	SOBEK Rural 1D/2D und Modellaufbau Oberer Main . . . . .	78
5.4.2	MIKE Flood . . . . .	83
5.4.3	Die Modellkalibrierung . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Die Unsicherheit in hydrodynamischen Berechnungen</b>	<b>93</b>
6.1	Einleitung . . . . .	93
6.2	Die Parameterunsicherheit . . . . .	95
6.2.1	Vorbemerkung und Vorgehensweise . . . . .	95
6.2.1.1	Monte Carlo Simulation . . . . .	96
6.2.1.2	Latin Hypercube Sampling . . . . .	99
6.2.2	Untersuchte Modellparameter . . . . .	101

6.2.2.1	Abfluss . . . . .	102
6.2.2.2	Rauhigkeiten . . . . .	104
6.2.2.3	Abflussprofil . . . . .	106
6.2.3	Die Generalisierte Sensitivitätsanalyse . . . . .	108
6.2.4	Synthetisches Gerinne . . . . .	114
6.2.4.1	Parametereinfluss auf die Schlüsselkurve . . . . .	114
6.2.4.2	Synthetisches Gerinne mit stationären Abflussverhältnissen	117
6.2.4.3	Synthetisches Gerinne mit instationären Abflussverhältnissen . . . . .	126
6.2.5	Modellabschnitt am Oberen Main . . . . .	133
6.2.5.1	Stationäre Abflussverhältnisse . . . . .	133
6.2.5.2	Instationäre Abflussverhältnisse . . . . .	142
6.3	Vergleich der Ergebnisse verschieden komplexer Modelle . . . . .	148
6.3.1	Synthetisches Gerinne . . . . .	149
6.3.2	Modellabschnitt Oberer Main . . . . .	150
6.4	Einfluss von Verklausung und Deichbruch . . . . .	157
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>161</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>165</b>
	<b>Anhang</b>	<b>175</b>
<b>A</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>176</b>
A.1	Einsteinsche Summenkonvention . . . . .	176
A.2	Corioliskraft . . . . .	178
A.3	Herleitung der Reibungskräfte am Kontrollvolumen . . . . .	182
A.4	Vektorschreibweise der Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	187
A.5	Die kinematische Randbedingungen für Sohle, freie Oberfläche und Uferlinie	187
A.5.1	Kinematische Randbedingung an der Sohle für die Tiefenintegration	187
A.5.2	Kinematische Randbedingung an der Oberfläche für die Tiefenintegration . . . . .	189
A.5.3	Kinematische Randbedingung der Uferlinien . . . . .	190
A.5.4	1D Strömungsgleichungen als Funktion von $h$ und $v_x$ . . . . .	190
A.6	Herleitung der Crank-Nicolson-Gleichung . . . . .	191
A.7	Eigenschaften der stetigen Gleichverteilung . . . . .	193

<b>B</b>	<b>Das Modellgebiet</b>	<b>195</b>
<b>C</b>	<b>Ergebnisse der Unsicherheitsanalyse</b>	<b>197</b>
C.1	Parametereinfluss auf die Schlüsselkurve (synthetisches Gerinne) und die Abflussanteile im Gerinne sowie im Vorland . . . . .	197
C.2	1D synthetisches Gerinne mit stationären Abflussverhältnissen . . . . .	201
C.3	1D synthetisches Gerinne mit instationären Abflussverhältnissen . . . . .	205
C.4	Flussabschnitt Oberer Main mit stationären Abflussverhältnissen . . . . .	209
C.5	Flussabschnitt am Oberen Main mit instationären Abflussverhältnissen .	217
C.6	Ergebnisvergleich verschieden komplexer Modelle . . . . .	223

# Verzeichnis der Formelzeichen und Symbole

## Lateinische Schriftzeichen

$A$	$[m^2]$	Durchflossener Querschnitt
$a$	$[m/s^2]$	Beschleunigung
$B$	$[m]$	Gewässerbreite
$C$	$[m^{0,5}/s]$	Geschwindigkeits-Beiwert
$C_z$	$[m^{0,5}/s]$	Geschwindigkeits-Beiwert
$c$	$[-]$	Konstante
$d_{hy}$	$[m]$	Hydraulischer Durchmesser
$d_m$	$[m]$	Maßgebender Korndurchmesser
$d_{90}$	$[m]$	Korndurchmesser bei 90% Siebdurchgang
$E$	$[N/m^2]$	Elastizitätsmodul
$e$	$[-]$	Volumenänderung
$F$	$[kg \cdot m/s^2]$	Kraft
$F_G$	$[kg \cdot m/s^2]$	Gewichtskraft
$F_n$	$[-]$	Unterschreitungswahrscheinlichkeit
$F_r$	$[kg \cdot m/s^2]$	Wandreibungskraft
$f$	$[kg \cdot m/s^2]$	Kraft (vektorielle Größe)
$G$	$[N/m^2]$	Schubmodul
$g$	$[m/s^2]$	Erdbeschleunigung
$H$	$[m]$	Höhenkote der Wasseroberfläche
$h_E$	$[m]$	Gesamtenergiehöhe
$h_{kin}$	$[m]$	Kinetische Energiehöhe
$h_p$	$[m]$	Druckhöhe
$h_r$	$[m]$	Reibungsverlusthöhe
$h_V$	$[m]$	Verlusthöhe
$h$	$[m]$	Wassertiefe
$I$	$[-]$	Gefälle

$I_E$	[–]	Energieliniengefälle
$I_R$	[–]	Reibungsgefälle
$I_W$	[–]	Wasserspiegelgefälle
$k_s$	[ $mm$ ]	Absolute (äquivalente) Rauheit
$k_{st}$	[ $m^{1/3}/s$ ]	Manning-Strickler-Beiwert
$l$	[ $m$ ]	Länge eines Gerinneabschnittes
$l_U$	[ $m$ ]	Benetzter Umfang
$M$	[ $kg/s$ ]	Massenstrom
$m$	[ $kg$ ]	Masse
$N$	[–]	Ansatzfunktion
$n$	[ $s/m^{1/3}$ ]	Manning-Beiwert
$\vec{n}$	[–]	Normalenvektor
$O()$	[–]	Fehlerordnung
$P_i$	[–]	Zufallsvariable
$P_x$	[–]	Größe eines Zufallsfeldes
$p$	[ $N/m^2$ ]	Druck
$Q$	[ $m^3/s$ ]	Durchfluss
$q$	[ $m/s$ ]	Einströmgeschwindigkeit
$Re$	[–]	Reynoldszahl
$r_{hy}$	[ $m$ ]	Hydraulischer Radius
$S$	[ $kg/s$ ]	Quelle/Senke
$S_f$	[–]	Sohlschubspannungsgefälle
$S_0$	[–]	Sohlgefälle
$s$	[ $m$ ]	Höhe der Gewässersohle
$s_i$	[–]	Koordinatenrichtungen x, y und z
$s^*$	[ $m/s$ ]	Geschwindigkeit einer Diskontinuität
$t$	[ $s$ ]	Zeit
$U$	[ $m$ ]	Uferlinie
$u_*$	[ $m/s$ ]	Schubspannungsgeschwindigkeit
$u, v$	[ $m/s$ ]	Geschwindigkeit
$u_i$	[ $m$ ]	Verschiebung
$dV$	[ $m^3$ ]	Infinitesimales Volumenelement
$W$	[–]	Wichtungsfunktion
$dx, dy, dz$	[ $m$ ]	Richtungsbezogener infinitesimaler Abstand

**Griechische Schriftzeichen**

$\alpha, \beta$	[–]	Korrekturparameter
$\beta_{i,j}$	[–]	Impulskorrekturfaktor
$\Delta$	[–]	Differenz, Fehler
$\delta_{i,j}$	[–]	Kronecker-Delta Symbol
$\epsilon$	[–]	Dehnung
$\eta$	$[N \cdot s/m^2]$	Dynamische Viskosität
$\lambda$	$[m^2/s]$	Viskositätskoeffizient (Kapitel 2)
$\lambda$	[–]	Widerstandsbeiwert der Rohrreibung
$\mu$	[–]	Mittelwert der Grundgesamtheit
$\nu$	$[m^2/s]$	kinematische Viskosität
$\nu$	[–]	Querkontraktionszahl (Anhang)
$\nu_t$	$[m^2/s]$	Turbulente kinematische Viskosität
$\rho$	$[kg/m^3]$	Massendichte
$\sigma$	$[N/m^2]$	Spannung
$\sigma$	[–]	Standardabweichung einer Grundgesamtheit
$\tau$	$[N/m^2]$	Schubspannung
$\tau_0$	$[N/m^2]$	Sohlschubspannung
$\Phi$	[–]	Parametrisierte Sohlfläche
$\Phi_{i,j}^n$	[–]	räumlich und zeitlich diskretisierter Funktionsvektor
$\phi$	[–]	Lokaler Fehler
$\Omega$	[–]	Operator für die Summe aller Differentialoperatoren und Vorfaktoren
$\omega$	$[Hz]$	Winkelgeschwindigkeit der Erde

**Symbole und Indizes**

$\Delta$	Laplace-Operator
$\nabla$	Nabla-Operator
$\dot{\langle \rangle}$	Zeitliche Ableitung
$\vec{\langle \rangle}$	Vektor
$\tilde{\langle \rangle}$	Matrix
$\bar{\langle \rangle}, \langle \rangle_m$	Mittelwert

---

$\langle \rangle'$	Zeitliche Fluktuation
$\langle \rangle_c$	Coriolis
$\langle \rangle^D$	Inklusive Dispersionsterm
$\langle \rangle_g$	Gravitation
$\langle \rangle_i, \langle \rangle_j$	Koordinatenrichtungen x, y und z
$\langle \rangle_{i,j}$	Ortsdiskrete Größe (Kapitel 3)
$\langle \rangle_l$	Größe auf der linken Seite (Diskontinuität/Ufer)
$\langle \rangle^n$	Zeitdiskrete Größe (Kapitel 3)
$\langle \rangle_O$	Oberfläche
$\langle \rangle^R$	Inklusive Reynolds-Spannungsterm
$\langle \rangle_r$	Größe auf der rechten Seite (Diskontinuität/Ufer)
$\langle \rangle^T$	Transponierung eines Vektors oder einer Matrix
$\langle \rangle_V$	Volumen

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Massenströmungsbilanz am Kontrollvolumen in x-Richtung . . . . .	6
2.2	x-Komponenten der Impulsströme am Kontrollvolumenelement . . . . .	9
2.3	lokale und konvektive Beschleunigung: <b>Links:</b> $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ nur lokale Beschleunigung (bei konstanter Dichte und konstantem Durchflussquerschnitt) <b>Rechts:</b> $v_j \frac{\partial v_i}{\partial s_j}$ nur konvektive Beschleunigung (bei konstanter Eintrittsgeschwindigkeit über die Zeit) . . . . .	15
2.4	Gerinneabschnitt zur Ableitung der Fließformel (nach BOLLRICH [2000])	32
2.5	Energiekomponenten in zwei Querschnitten eines offenen Gerinnes . . . . .	36
2.6	Vergleich des Reibungsbeiwertes $\lambda$ für das hydraulisch raue Regime nach MS (rote Linie) und DW (schwarze Linie) (nach JIRKA & LANG [2005])	39
2.7	Relativer Fehler in der mittleren Geschwindigkeit nach MS als Funktion der relativen Wasserstandsänderung und der relativen Rauheit . . . . .	40
3.1	Zusammenhang zwischen einer räumlichen (2D) und zeitlichen Diskretisierung mit $\Phi_{ij}^n$ als Funktionsvektor im diskretisierten Raumpunkt $i, j$ zur diskretisierten Zeit $t_n$ (äquidistante Diskretisierung) . . . . .	43
3.2	Prinzip der zeitlichen Diskretisierung nach FORKEL [2004] . . . . .	44
3.3	Richtungsfeld für die Differentialgleichung $\Phi'(t) = t^2 + 0,1 \cdot \Phi(t)$ und die Lösungskurven mit den Anfangsbedingungen $\Phi(-1,5) = 0$ und $\Phi(0) = 0,5$ (nach KNORRENSCHILD [2003]) . . . . .	46
3.4	Approximation des Differentialquotienten durch das Prinzip des expliziten Euler-Verfahrens . . . . .	49
3.5	Prinzip des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens mit den Richtungsfeldern in den Stützpunkten . . . . .	50
3.6	Approximation des Differentialquotienten durch das Leap-Frog-Verfahren	52
3.7	Approximation des Differentialquotienten durch das Prinzip des impliziten Euler-Verfahrens . . . . .	54

3.8	Approximation des Differentialquotienten durch das Crank-Nicolson-Verfahren . . . . .	54
3.9	Finite Volumen Diskretisierung . . . . .	59
3.10	Knotenvariable und lokale Formfunktion für einen linearen Ansatz im ein-dimensionalen Element . . . . .	62
4.1	Das Einzugsgebiet des Oberen Mains (Deutsches Gewässerkundliches Jahrbuch) . . . . .	63
4.2	Modellgebiet (Google Earth), gekennzeichnet sind die Wehre, bei denen infolge von Bruchkanten oder Einengungen der Abfluss überwiegend über das Wehr erfolgt . . . . .	64
4.3	Digitales Geländemodell (DGM) des Modellgebietes . . . . .	65
4.4	Flussabschnitt bei Rothwind (Google Earth) . . . . .	66
4.5	Straßendämme quer durch das Flusstal bei Hochstadt (links) und Maineck (rechts) (Google Earth) . . . . .	66
4.6	<b>Flaschenhals</b> in Burgkunstadt, der gesamte Abfluss fließt in diesem Abschnitt durch den Flussschlauch (Google Earth) . . . . .	67
4.7	Sohlbeschaffenheit des Oberen Main, bei Mainleus . . . . .	67
4.8	Uferbeschaffenheit des Oberen Main . . . . .	68
4.9	Landnutzung im Flussabschnitt (aus CORINE Land Cover 2000) . . . . .	68
4.10	Querprofil des synthetischen Gerinnes (nicht maßstabstreu!) . . . . .	69
5.1	Schematische Darstellung der Isotachen im kompakten (links) und gegliederten (rechts) Querschnitt . . . . .	72
5.2	Abbildung des Flussgerinnes mittels Querprofilen. Links: Abfluss über den Flussschlauch ( <i>kompaktes Gerinne</i> ). Rechts: Abfluss über Flussschlauch und Vorland ( <i>gegliedertes Gerinne</i> ) . . . . .	73
5.3	Erstellung des 2D Berechnungsnetzes . . . . .	76
5.4	Schema des kombinierten hydraulischen Modells: links: kombiniertes 1D/2D System, rechts: kombiniertes 1D/2D Massenvolumen . . . . .	80
5.5	Erstellung des Vorlandrasters für den 2D Layer . . . . .	82
5.6	Häufigkeitsverteilung der Wasserspiegeldifferenzen (Gemessen minus Simuliert) für eine 1D und eine hybride (1D/2D) Simulation . . . . .	83
5.7	Schematischer Ablauf des Kalibrierungsprozesses . . . . .	86

5.8	Ablauf der SCE-UA Methode (nach DUAN ET AL. [1992]) für einen zweidimensionalen Parameterraum (Abszisse entspricht Parameter 1 und Ordinate Parameter 2). Die Abbildungen zeigen schematisch als Isolinien die Zielfunktion, die ein lokales und das gesuchte globale Maximum bzw. Minimum besitzt. . . . .	88
5.9	Schematische Beschreibung der unabhängigen Entwicklung der Komplexe zum Optimum der Zielgröße . . . . .	89
5.10	Längsschnitte der Manningwerte bei händischer und objektiver Kalibrierung ( <i>autom. Kalib.</i> : automatische Kalibrierung mit allen Fixierungspunkten, <i>autom. Kalib.*</i> : automatische Kalibrierung ohne fehlerbehaftete Fixierungspunkte) . . . . .	90
5.11	Differenz aus simulierten und gemessenen Werten . . . . .	91
6.1	Schematische Darstellung der Monte Carlo Simulationen . . . . .	97
6.2	Entwicklung des Mittelwertes der simulierten Wassertiefen mit zunehmender Simulationszahl (Auswertung der Simulation entsprechend nach Tabelle 6.4). Beispiel aus Simulationen für synthetisches Gerinne mit Wassertiefe über Sohle . . . . .	98
6.3	Prinzip der Latin Hypercube Methode der beiden Parameter $P_1$ und $P_2$ für eine Zufallsfeldgröße $Px = 4$ und bei unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen . . . . .	101
6.4	Güte von Befliegungsdaten, dargestellt durch ein Histogramm der Differenz aus Befliegungsdaten und terrestrischen Daten (Quelle: LVG) . . . . .	108
6.5	Ergebnis einer GSA mit $n = 100$ , blau: $Max_{Fn}$ , rot: $Min_{Fn}$ . Dieses Beispiel stammt aus der GSA für die Flussschlauchrauigkeit; daher sind die Parameterwerte für große Wassertiefen klein und für kleine Wassertiefen groß . . . . .	109
6.6	links: beide Stichproben decken den gesamten Parameterraum ab, rechts: beide Stichproben verhalten sich unsymmetrisch bezüglich der empirischen Verteilung der Grundgesamtheit . . . . .	111
6.7	Schlüsselkurve sowie Anteile an Flussschlauch- und Vorlandabfluss . . . .	114
6.8	Einfluss der Flussschlauchrauigkeit auf die Schlüsselkurve und auf die Abflussanteile . . . . .	115
6.9	Auswertung der simulierten Wasserstände (Abweichung vom Mittelwert) aus den Monte Carlo Simulationen (2000 Parameterkombinationen) . . .	116

6.10	Auswertung der Abflussanteile des Vorlandes aus den Monte Carlo Simulationen (eine Darstellung als Abweichung vom Mittelwert ist in Abbildung C.4 zu finden) . . . . .	117
6.11	Maximale Wasserspiegeländerung bei Variation eines Parameters. Eine Übersicht dieser Berechnungen ist in Tabelle C.1 (Anhang C.2) aufgelistet. . . . .	118
6.12	Verteilung der Wassertiefen bei Variation der Vorlandrauhigkeit (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten) . . . . .	119
6.13	Dichteverteilung der Wassertiefen (bezogen auf die mittlere Wassertiefe) bei Variation der Vorlandrauhigkeit (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten) . . . . .	120
6.14	GSA bei Variation und Annahme einer Gleichverteilung aller Parameter für einen Abfluss der Jährlichkeit 100 . . . . .	122
6.15	GSA bei Variation aller Parameter (gleichverteilt) . . . . .	123
6.16	GSA bei Variation aller Parameter bis auf Q (gleichverteilt) . . . . .	125
6.17	Maximale Einfluss der Sohlrauhigkeit auf eine Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100 . . . . .	126
6.18	Zeitlicher Verlauf der Abflussanteile einer Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100, synthetisches Gerinne mit $Kst_{FS} = 37$ und $Kst_{VL} = 25 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$ . . . . .	128
6.19	Maximaler Einfluss der Sohlrauhigkeit auf eine Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100, Fließtiefe oben und Geschwindigkeit unten . . . . .	129
6.20	Übersicht der Parameterräume, die nach 2000 Simulationen für vier Parameter abgedeckt werden . . . . .	131
6.21	Maximale Wasserspiegeländerung bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1) $Q_{mittel} = 460 \frac{m^3}{s}$ (Jährlichkeit 100) . . . . .	133
6.22	Quotient aus den Differenzen maximaler minus mittlerer Wasserspiegel und mittlerer minus minimaler Wasserspiegel bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1) $Q_{mittel} = 460 \frac{m^3}{s}$ (Jährlichkeit 100) . . . . .	136
6.23	Auswertung Monte Carlo Simulationen für den Lauf $HQ_{100-a}$ ( $\Delta h_{Quantile}$ ist die Differenz aus 90 %- und 10 %- Quantilwert) . . . . .	138
6.24	$\Delta Fn_{Max}$ aus der GSA für den Lauf $HQ_{100-a}$ . . . . .	141
6.25	Maximale Wasserspiegeländerung bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1) für eine Hochwasserwelle (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100) . . . . .	142

6.26	Abflusswellenänderungen für einen max. ( $k_{st}VL_{max} = 40$ ) und min. ( $k_{st}VL_{min} = 25 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$ ) Vorlandrauhigkeitswert nach 20 km (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100) . . . . .	144
6.27	Differenz der maximalen Wassertiefen für einen stationären und instationären Abfluss der Jährlichkeit 100 für mittlere Parameterwerte . . . . .	145
6.28	Auswertung der Monte Carlo Simulationen für den Lauf $HQ_{100}$ -a, Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse . . . . .	147
6.29	Differenz der maximalen Wasserspiegelschwankungen aus der Monte Carlo Analyse für einen instationären und stationären Abfluss [m] . . . . .	148
6.30	Retention einer Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100 mit SOBEK 1D, SOBEK 1D/2D und HydroAS, synthetisches Gerinne mit $k_{st}FS = 37$ und $k_{st}VL = 25 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$ . . . . .	150
6.31	Differenz aus Geländemodell Hydro_AS-2D und SOBEK 1D/2D (bzw. TIN minus Raster) . . . . .	151
6.32	Differenz der simulierten Wasserspiegel für ein stationäres Abflussereignis der Jährlichkeit 100 . . . . .	153
6.33	Veränderung der Hochwasserwelle (Jährlichkeit 100) nach 20 FKM hybrid und 2D . . . . .	155
6.34	Wasserspiegeldifferenz aus den Berechnungen $HQ_{100} + 15\%$ minus $HQ_{100} - 15\%$ , oben Hydro_AS, unten SOBEK . . . . .	156
6.35	Wasserspiegeldifferenz aus den Szenarienberechnungen, unveränderter Fall minus Fall 1 bis 3, $HQ_{100}$ stationär . . . . .	158
A.1	Kugel auf einer drehenden Scheibe, die sich zum Scheibenrand bewegt. <b>Links:</b> Aus einer <i>Eulerbetrachtung</i> bewegt sich die Kugel entlang einer geradlinigen Bahn. <b>Rechts:</b> Aus der Perspektive eines sich auf der Scheibe befindenden Beobachters ( <i>Lagrange-Betrachter</i> ) folgt die Kugel einer gekrümmten Bahn. Dessen Krümmung entspricht der Coriolisbeschleunigung $a_c$ , die senkrecht zur Bewegungsrichtung gerichtet ist und durch die Corioliskraft verursacht wird. . . . .	178
A.2	Bewegung einer Kugel in einem Polarkoordinatensystem . . . . .	178
A.3	System Erde mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und ein sich mitbewegendes Koordinatensystem (radiale Ausrichtung der z-Achse) in Höhe des Breitengrades $\Theta$ . . . . .	180
A.4	Allgemeiner Spannungszustand am Kontrollvolumenelement in x-Richtung	182

A.5	Darstellung der Sohle $s(x, y)$ und der Wasseroberfläche $H(x, y, t)$ mit den Geschwindigkeits- und Normalenvektoren in einem Punkt . . . . .	188
B.1	Die Landnutzung im Einzugsgebiet des Oberen Main (aus CORINE Land Cover 2000) . . . . .	195
B.2	Die Geologie im Einzugsgebiet des Oberen Main (aus Bodenübersichtskarten der BRD) . . . . .	196
B.3	Längsschnitt der Einzugsgebietsgröße des Oberen Main, Abschnitt Mainleus bis Schwürbitz . . . . .	196
C.1	Einfluss der Vorlandrauhigkeit auf die Schlüsselkurve und auf die Abflussanteile . . . . .	197
C.2	Einfluss der Sohlhöhe auf die Schlüsselkurve und auf die Abflussanteile . . . . .	198
C.3	Einfluss der Vorlandhöhe auf die Schlüsselkurve und auf die Abflussanteile . . . . .	198
C.4	Auswertung der Abflussanteile des Vorlandes aus den Monte Carlo Simulationen, Werte als Differenz zum Mittelwert . . . . .	199
C.5	Verteilung der Wassertiefen bei Variation der Flussschlauchrauhigkeit (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten) . . . . .	202
C.6	Verteilung der Wassertiefen bei Variation des Abflusses (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten) . . . . .	203
C.7	Verteilung der Wassertiefen bei Variation der Flussschlauchsohlhöhe (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten) . . . . .	204
C.8	Verteilung der Wassertiefen bei Variation der Vorlandhöhe (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten) . . . . .	204
C.9	Maximale Parametereinflüsse auf die Form einer Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100 . . . . .	205
C.10	Maximale Parametereinflüsse auf eine Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100, Fließtiefe links und Geschwindigkeit rechts . . . . .	206
C.11	Maximale Parametereinflüsse auf eine Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100, Fließtiefe links und Geschwindigkeit rechts . . . . .	207
C.12	Maximale Wasserspiegeländerung bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1), $Q_{mittel} = 320 \frac{m^3}{s}$ (Jährlichkeit 20) . . . . .	209
C.13	Quotient aus den Differenzen maximaler minus mittlerer Wasserspiegel und mittlerer minus minimaler Wasserspiegel bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1) $Q_{mittel} = 320 \frac{m^3}{s}$ (Jährlichkeit 20) . . . . .	209
C.14	Maximale Wasserspiegeländerung bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1) $Q_{mittel} = 210 \frac{m^3}{s}$ (Jährlichkeit 5) . . . . .	210

C.15 Quotient aus den Differenzen maximaler minus mittlerer Wasserspiegel und mittlerer minus minimaler Wasserspiegel bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1) $Q_{mittel} = 210 \frac{m^3}{s}$ (Jährlichkeit 5) . . . . .	210
C.16 Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf $HQ_{100}$ -b . . . . .	211
C.17 Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf $HQ_{100}$ -c . . . . .	212
C.18 Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf $HQ_{20}$ -a . . . . .	212
C.19 Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf $HQ_{20}$ -b . . . . .	213
C.20 Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf $HQ_5$ -a . . . . .	213
C.21 Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf $HQ_5$ -b . . . . .	214
C.22 $PR$ aus der GSA für den Lauf $HQ_{100}$ -a . . . . .	214
C.23 $\Delta Fn_{Max/Min}$ aus der GSA für den Lauf $HQ_{100}$ -a . . . . .	215
C.24 Quotient aus den Differenzen maximaler minus mittlerer Wasserspiegel und mittlerer minus minimaler Wasserspiegel bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1) für eine Hochwasserwelle (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100) . . . . .	217
C.25 Abflussänderungen für einen max. ( $yVL_{max} = 0,15$ m) und min. ( $yVL_{min} = -0,15$ m) Vorlandhöhenwert nach 20 km (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100) . . . . .	218
C.26 Abflussänderungen für einen max. ( $k_{st}VL_{max} = 44$ ) und min. ( $k_{st}VL_{min} = 30 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$ ) Vorlandrauhigkeitswert nach 20 km (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100) . . . . .	218
C.27 Differenz der maximalen Wassertiefen für einen stationären und instationären Abfluss der Jährlichkeit 100 für mittlere Parameterwerte, 2D Modell	219
C.28 Visualisierung aller 1500 simulierten Abflusswellen bei FKM 440,5 und die zugehörige Zuflusswelle bei FKM 460,4 ( $HQ_{100}$ -a) . . . . .	219
C.29 Visualisierung aller 1500 simulierten Abflusswellen bei FKM 440,5 und die zugehörige Zuflusswelle bei FKM 460,4 ( $HQ_{100}$ -b) . . . . .	220
C.30 Auswertung der Monte Carlo Simulation für den Lauf $HQ_{100}$ -b, Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse . . . . .	220
C.31 $\Delta Fn_{Max}$ aus der GSA für den Lauf $HQ_{100}$ -a, Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse . . . . .	221
C.32 $PR$ aus der GSA für den Lauf $HQ_{100}$ -a, Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse . . . . .	221
C.33 $\Delta Fn_{Max/Min}$ aus der GSA für den Lauf $HQ_{100}$ -a, Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse . . . . .	222

C.34	Differenz der simulierten Wasserspiegel (SOBEK minus MIKE) für ein stationäres Abflussereignis der Jährlichkeit 20 (oben) und 5 (unten) . . .	223
C.35	Differenz der simulierten Wasserspiegel (SOBEK minus Hydro_As) für ein stationäres Abflussereignis der Jährlichkeit 20 (oben) und 5 (unten) . . .	223
C.36	Wasserspiegeldifferenz aus den Berechnungen rauhe Verhältnisse ( $k_{st}FS = 44$ , $k_{st}VL = 40 \sqrt[3]{m/s}$ ) minus glatte Verhältnisse ( $k_{st}FS = 30$ , $k_{st}VL = 25 \sqrt[3]{m/s}$ ), oben Hydro_As, unten SOBEK . . . . .	224

# Tabellenverzeichnis

3.1	Die Adams-Bashforth-Verfahren bis zur 4. Ordnung . . . . .	53
3.2	Die BDF-Verfahren bis zur 4. Ordnung . . . . .	55
3.3	Die Adams-Moulton-Verfahren bis zur 4. Ordnung . . . . .	56
5.1	Typische Längenskalen für Gerinne- und Vorlandabfluss (BEFFA [2002])	77
6.1	Parameterräume für einen vegetationsarmen Zustand (Zustand im Winter)	102
6.2	Parameterkombinationen zur Quantifizierung der maximalen Wasserspiegelschwankungen . . . . .	118
6.3	Auswertung der Wasserspiegellagen bei Variation einzelner Parameter (2000 Parameterwerte, gleichverteilt) für ( $Q = 460 \frac{m^3}{s}$ ) . . . . .	121
6.4	Auswertung der Wasserspiegellagen bei Variation aller Parameter (gleichverteilt) auf Basis von Monte Carlo Simulationen (7000 Parameterkombinationen) . . . . .	122
6.5	Auswertung der GSA für die Simulationsergebnisse nach Abbildung 6.14	123
6.6	Auswertung der Wasserspiegellagen bei Variation aller Parameter bis auf den Abfluss $Q$ ( Monte Carlo Simulationen mit 7000 Parameterkombinationen, gleichverteilt) . . . . .	124
6.7	Auswertung der Wasserspiegellagen bei Variation aller Parameter bis auf den Abfluss $Q$ (Monte Carlo Simulationen mit 7000 Parameterkombinationen, Vorlandhöhe normalverteilt, sonstige Parameter gleichverteilt) . .	125
6.8	Einfluss einzelner Parametergrenzwerte auf die Hochwasserwelle nach 20 km Fließlänge (Am Zuflussrand tritt das $Q_{max} = 458 \frac{m^3}{s}$ um 12:00 Uhr auf), $h$ =Wassertiefe, Zeitpunkt = Eintritt $Q_{max}$ am Modellauslauftrand, $D_{300}$ = Überschreitungsdauer der auslaufenden Welle des Schwellwertes $300 \frac{m^3}{s}$ . . . . .	127
6.9	Wellenlaufzeit und $D_{300}$ -Wert für $HQ_{100}$ -a und $HQ_{100}$ -b, $Q_{max}$ tritt am Zuflussrand um 12:00 Uhr auf . . . . .	131
6.10	Statistische Kenngrößen der Wassertiefe für $HQ_{100}$ -a und $HQ_{100}$ -b . . . .	132

6.11	Übersicht der maximalen Wasserspiegeldifferenzen bei Variation einzelner Parameter in verschiedenen Gewässerabschnitten . . . . .	135
6.12	Übersicht der durchgeführten Monte Carlo Simulationen . . . . .	137
6.13	Übersicht der Wasserspiegeldifferenzen für die Simulationsäufe $HQ_{100}$ -a, $HQ_{100}$ -b und $HQ_{100}$ -c, [m], ( $\Delta h_{Quantile}$ ist die Differenz aus 90 %- und 10 %- Quantilwert) . . . . .	139
6.14	Übersicht der Wasserspiegeldifferenzen für die Simulationsäufe $HQ_{20}$ -a, $HQ_{20}$ -b, $HQ_5$ -a und $HQ_5$ -b, [m] . . . . .	140
6.15	Einfluss einzelner Parametergrenzwerte auf die Hochwasserwelle bei FKM 440,5 bzw. auf 20 km Flusslänge (Bei FKM 460,4 tritt das $Q_{max} = 457 \frac{m^3}{s}$ um 12:30 Uhr auf) . . . . .	143
6.16	Auswertung Monte Carlo Simulationen: Parametereinfluss auf eine Hochwasserwelle nach 20 km Flusslänge (Bei FKM 460,4 tritt das $Q_{max} = 457 \frac{m^3}{s}$ um 12:30 Uhr auf) . . . . .	146
6.17	Übersicht der Wasserspiegeldifferenzen für $HQ_{100}$ -a und $HQ_{100}$ -b [m] . . . . .	147
C.1	Einfluss der Parameter auf die Wasserspiegellagen . . . . .	201
C.1	Einfluss der Parameter auf die Wasserspiegellagen . . . . .	202

# 1 Einleitung

## 1.1 Allgemeines

In Anbetracht der immer heftiger und häufiger eintretenden Extremereignisse ist der Bedarf an effektiven Hochwasserfrühwarnsystemen so hoch wie nie zuvor. Das vom BMBF geförderte Forschungsvorhaben HORIX (*Entwicklung eines operationell einsetzbaren Expertensystems zum Hochwasserrisikomanagement unter Berücksichtigung der Vorhersageunsicherheit*) leistet diesbezüglich einen Beitrag, indem es die gesamte Hochwasserwirkungskette (*Vorhersage des Niederschlagsereignisses - Niederschlag-Abfluss-Modellierung - hydrodynamische Modellierung*) analysiert. Die vorliegende Arbeit ist im Rahmen dieses Verbundprojektes, geleitet von der Universität der Bundeswehr München, entstanden und behandelt das Kettenglied *hydrodynamische Modellierung*.

Die Hochwasservorhersage ist wie jede andere Vorhersage fehlerbehaftet. Wird demnach ein hydrodynamisches Modell zur Modellierung von Vorhersagen herangezogen, so ist die Abbildung des natürlichen Abflussgeschehens durch eine physikalisch basierte Beschreibung der strömungsmechanischen Vorgänge mit Fehlern behaftet. Im Vorhersagefall kann die Unkenntnis der Modellunsicherheit zum Versagen mathematischer Modelle als entscheidungsunterstützendes Werkzeug bzw. zu Fehlentscheidungen führen. Daher ist neben dem Einsatz eines Vorhersagemodells stets die Kenntnis der möglichen Unsicherheiten notwendig.

Die Zielstellung dieser Arbeit ist neben der detaillierten Herleitung und Anwendung der Grundgleichungen zur verschiedenen komplexen Modellierung von Hochwasserereignissen, die Quantifizierung der Modellunsicherheiten in der Hochwassermodellierung. Der Schwerpunkt der Unsicherheitsanalyse liegt in den Modellparametern. Dessen Einflüsse werden zunächst durch eine Sensitivitätsstudie einzeln erfasst. Anschließend werden die Parameterunsicherheiten auf die Hochwassersimulation durch eine Monte Carlo Simulation quantifiziert. Diese Untersuchungen werden an einem synthetischen Gerinne und an

einem Flussabschnitt des Oberen Mains durchgeführt.

Um für jede Monte Carlo Simulation die Sensitivität der einzelnen Parameter ebenfalls zu quantifizieren, wird diesbezüglich die generalisierte Sensitivitätsanalyse herangezogen.

Neben der Parameterunsicherheit werden die Ergebnisse von Hochwassersimulationen hinsichtlich ihrer Modellfehler untersucht. Hierzu werden die Modellstrecken mit verschiedenen komplexen Modellen (1D, 2D und hybride Modellansätze) simuliert und dessen Ergebnisse gegenüber gestellt.

Um die Folgen von Verklausungen und Damnbrüchen abschätzen zu können, werden diesbezüglich Szenarienrechnungen durchgeführt.

Somit ist es schließlich möglich, örtlich variabel das Unsicherheitsband bzw. die möglichen Schwankungsbreiten der simulierten Wassertiefen im Hochwasserfall anzugeben, um im entsprechenden Katastrophenfall die Entscheidungsträger zu unterstützen.

## 1.2 Gliederung der Arbeit

In **Kapitel 2** werden die Navier-Stokes-Gleichungen zur Berechnung Newtonscher Fluide hergeleitet. Daraus folgt die Ableitung der Flachwassergleichungen und aus denen wiederum die Saint-Venant-Gleichungen. Die hierbei getroffenen Annahmen werden aufgezeigt und dienen als Grundlage für die Interpretation der späteren Unsicherheitsanalysen. Zudem wird das stationäre Fließen in offenen Gerinnen beschrieben, um insbesondere die Reibungsansätze von Darcy-Weisbach und Manning-Strickler gegenüberzustellen.

Zur Lösung der beschriebenen Differentialgleichungen werden in **Kapitel 3** die Grundlagen der numerischen Methoden aufgelistet. Hierin werden die zurzeit gebräuchlichsten Verfahren zur zeitlichen und räumlichen Diskretisierung vorgestellt.

Das Modellgebiet am Oberen Main und das synthetische Gerinne werden im Detail in **Kapitel 4** beschrieben und dienen als Grundlage für die folgenden Analysen.

Die Beschreibung des Modellaufbaus zur Simulation einer Hochwasserwelle erfolgt für eindimensionale, zweidimensionale und hybride Modellansätze in **Kapitel 5**. Gleichzeitig werden die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Modelle vorgestellt. Im Anschluss der Modellerstellung wird im Detail auf die Modellkalibrierung eingegangen und das SCE-UA Verfahren zur automatischen Kalibrierung von hydrodynamischen Modellen vorgestellt. Zudem findet die automatische Kalibrierung exemplarisch für ein Fixierungser-

eignis (Bordvollabfluss 2000) Anwendung und die auf diese Weise objektiv ermittelten Ergebnisse werden denen aus der händischen Kalibrierung gegenübergestellt.

Die Unsicherheitsanalyse für die hydrodynamische Simulation von Hochwasserereignissen erfolgt in **Kapitel 6**. Hierzu werden die Grundlagen der Generierung von Zufallsvariablen und die der Monte Carlo Simulation erläutert. Nachdem auf die einzelnen bzw. unsicheren Parameter mit ihren Spannweiten eingegangen wird und die generalisierte Sensitivitätsanalyse beschrieben und leicht erweitert wird, folgen die Monte Carlo Simulationen am synthetischen Gerinne und am Abschnitt des Oberen Main. Die Untersuchungen erfolgen sowohl für stationäre als auch für instationäre Abflussereignisse und zwar hinsichtlich der Parametereinflüsse auf die Zielgröße Wassertiefe sowie auf die Hochwasserwelle.

Anschließend wird ein und dasselbe Ereignis mit verschiedenen Modellen für definierte Parameterkombinationen simuliert und die Ergebnisse gegenübergestellt, um den Einfluss der unterschiedlichen Prozessabbildungen zu untersuchen. Zudem folgen Szenarienrechnungen zur quantitativen Erfassung der Einflüsse von Verklausung und Deichbruch.

Eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick auf den weiteren Forschungsbedarf erfolgt in **Kapitel 7**.



# 2 Grundlagen der Strömungsberechnung Newtonscher Fluide

## 2.1 Allgemeines

Das vorliegende Kapitel befasst sich mit der Herleitung der Bewegungsgleichungen einer allgemeinen Newtonschen Flüssigkeit, sowie ihrer weitergehenden Vereinfachungen zur verschiedenen komplexen Beschreibung der physikalischen Prozesse der Bewegung in einem Fließgewässer. Es wird im Detail die Herleitung der allgemeinen kompressiblen Kontinuitätsgleichung sowie der Navier-Stokes-Gleichungen aufgezeigt. Anschließend werden aus diesen Gleichungen die 2D-Flachwassergleichungen und aus diesen wiederum die 1D-Saint-Venant-Gleichungen abgeleitet. Schließlich wird auf die klassischen Fließformeln sowie auf den Einfluss des Reibungsansatzes auf die Modellergebnisse eingegangen.

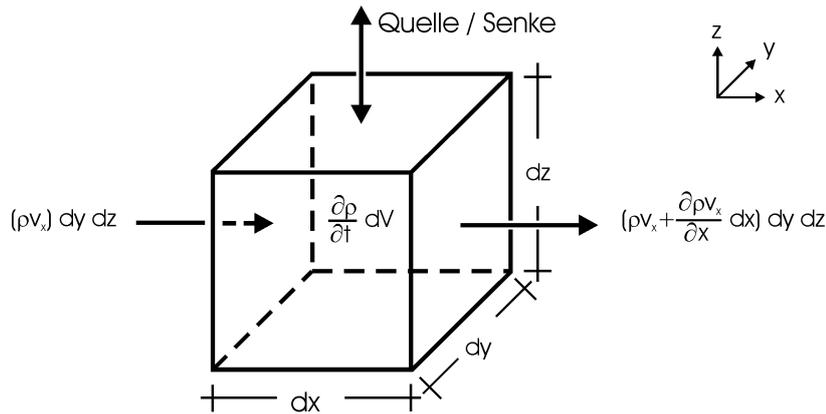
## 2.2 Herleitung der kompressiblen Strömungsgleichungen

Die Grundlage zur Beschreibung des Strömungsverhaltens eines Fluids bilden die beiden Erhaltungssätze für Masse und Impuls. Dabei folgt aus der mathematischen Formulierung der Massenerhaltung die Kontinuitätsgleichung und aus der Impulserhaltung die allgemeinen Navier-Stokes-Gleichungen.

Als unterstützende Literatur sei u. a. auf KÖNGETER & FORKEL [1999] und SCHLICHTING & GERSTEN [1997] verwiesen.

### 2.2.1 Kontinuitätsgleichung

Die Herleitung der Kontinuitätsgleichung, die das Verhalten der Dichte in einem Volumenelement beschreibt, folgt aus der Betrachtung der Massenerhaltung an einem Kontrollvolumen  $dV$  der Breite  $dx$ , Tiefe  $dy$  und Höhe  $dz$  ( $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ ). Die zeit-



**Abb. 2.1:** Massenströmungsbilanz am Kontrollvolumen in x-Richtung

liche Änderung des Massenspeicherterms (Differentialbetrachtung  $\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV$ ) im Kontrollvolumen ist durch die Differenz der ein- und austretenden Massenströme<sup>1</sup>  $\dot{m}$  ( $\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho \cdot Q \cdot dt}{dt} = \rho \cdot v \cdot A$ ) zu- bzw. abzüglich von Quellen und Senken  $S$  definiert:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx \cdot dy \cdot dz = -dx \cdot dy \cdot dz \left( \frac{\partial \rho \cdot v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \cdot v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho \cdot v_z}{\partial z} \right) + S \quad (2.1)$$

mit:

$\rho$ : Dichte des Fluids

$v$ : Geschwindigkeit

$v_x$ : Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung (entsprechendes gilt für  $v_y$  und  $v_z$ )

$Q$ : Durchfluss

$A$ : Durchflossener Querschnitt

<sup>1</sup>Der Massenstrom beschreibt die Masse eines Mediums (hier Wasser), die sich in einer Zeiteinheit durch einen Querschnitt bewegt

Infolge der Division durch das Kontrollvolumen  $dV \neq 0$  folgt aus Gleichung 2.1:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \cdot v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho \cdot v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho \cdot v_z}{\partial z} = \frac{S}{dV} \quad (2.2)$$

Durch die Einsteinsche Summenkonvention (siehe Anhang A.1) ergibt sich für die allgemeine kompressible Kontinuitätsgleichung in Indexschreibweise (mit  $s_i = i = x, y$  und  $z$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \cdot v_i}{\partial s_i} = \frac{S}{dV} \quad (2.3)$$

In Vektorschreibweise entsprechend:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{S}{dV} \quad (2.4)$$

mit:

$$\nabla: \text{Nabla-Operator} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}: \text{Geschwindigkeitsvektor} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

In der Fluidodynamik sagt somit die Kontinuitätsgleichung aus, dass die Divergenz des Geschwindigkeitsvektorfeldes die zeitliche Änderung der Dichte zuzüglich eines Quellen- oder Senkenterms ist.

## 2.2.2 Impulsgleichungen

Die Herleitung der Impulsgleichungen erfolgt aus der Betrachtung der Impulserhaltung am Kontrollvolumen. Der Impuls  $I$  ist definiert als *Masse · Geschwindigkeit*:

$$\vec{I} = m \cdot \vec{v} \quad (2.5)$$

Dabei steht die **zeitliche Impulsänderung** ( $i$ ) im Gleichgewicht mit der Bilanz der **zeitlichen Änderung der ein- und ausströmenden Impulse** ( $ii$ ) und der Summe aller auf das Kontrollvolumen einwirkenden **Kräfte**  $F$  ( $iii$ ).

$$(i) = (ii) + (iii) \quad (2.6)$$

### Zeitliche Impulsänderung ( $i$ )

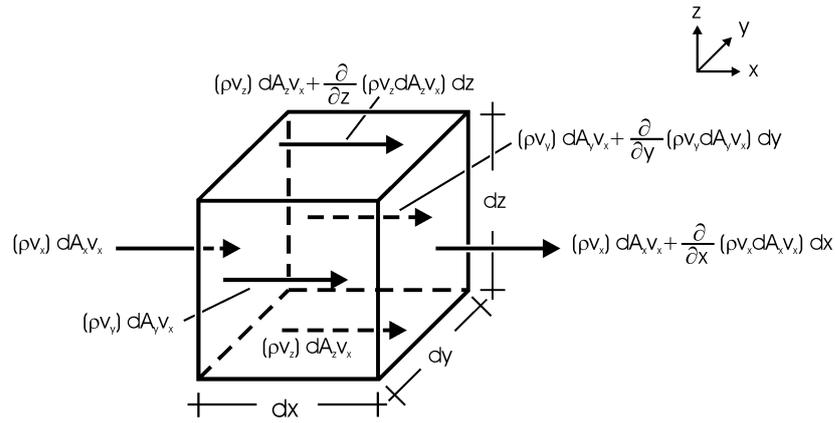
Die Formulierung der zeitlichen Impulsänderung in einem konstanten Kontrollvolumen der differentiellen Masse  $dm = \rho \cdot dV$  lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{I}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \vec{v}) dV \quad (2.7)$$

bzw. in Indexschreibweise

$$\frac{\partial}{\partial t} (I_i) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot v_i) dV. \quad (2.8)$$

**Zeitliche Änderung der ein- und ausströmenden Impulse** ( $ii$ ) Analog zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung in Kapitel 2.2.1, werden hier die ein- und austretenden Impulsströme  $\dot{I}$  ( $\dot{I} = \dot{m} \cdot v = \rho \cdot v \cdot A \cdot v$ ) bilanziert.



**Abb. 2.2:** *x*-Komponenten der Impulsströme am Kontrollvolumenelement

Die zeitliche Änderung der Differenz der in *x*-Richtung (analog auch in *y*- und *z*-Richtung) ein- und austretenden Impulse ( $\Delta I_x$ ) lautet somit (vgl. Abbildung 2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta I_x = & -\frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot v_x \cdot v_x) \cdot dy \cdot dz \cdot dx \\ & -\frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v_x \cdot v_y) \cdot dx \cdot dz \cdot dy \\ & -\frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_x \cdot v_z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned} \quad (2.9)$$

Durch die Einsteinsche Summenkonvention ergibt sich in Indexschreibweise für den dreidimensionalen Fall:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta I_i) = -\frac{\partial}{\partial s_j} (\rho \cdot v_i \cdot v_j) dV \quad (2.10)$$

mit:

$$i = x, y, z$$

$$j = x, y, z$$

$$s_x = x, s_y = y \text{ und } s_z = z$$

In vektorieller Schreibweise ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \vec{T}) = -\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.11)$$

### Einwirkende Kräfte (iii)

Die auf das Kontrollvolumen einwirkenden Kräfte  $F_{ges}$  können grundsätzlich in zwei Gruppen unterteilt werden. Zum einen handelt es sich um Volumenkräfte ( $F_{V,i}$ ), wie beispielsweise die *Gravitationskraft* ( $\vec{f}_g$ ) mit der Erdbeschleunigung  $g$

$$\vec{f}_g = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

oder die durch die Verwendung eines mit der Erdrotation mitbewegten Koordinatensystems resultierende *Corioliskraft*  $\vec{f}_c$  (siehe Anhang A.2):

$$\vec{f}_c = 2\omega m \begin{pmatrix} v_y \sin \Theta - v_z \cos \Theta \\ -v_x \sin \Theta \\ v_x \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

mit:

$g$ : Erdbeschleunigung

$\omega$ : Winkelgeschwindigkeit der Erde ( $\omega = 72,9 \cdot 10^{-6}$  Hz)

$\Theta$ : lokaler Breitengrad

Während die Gravitationskraft stets Berücksichtigung finden muss, ist der Einfluss der Corioliskraft erst bei ausgedehnten Strömungsgebieten (SCHRÖDER & FORKEL [1999]) signifikant und wird daher im vorliegenden Fall vernachlässigt.

Zum anderen wirken die Oberflächenkräfte ( $F_{O,i}$ ), die durch Normal- und Schubkräfte Reibungskräfte am Kontrollvolumen zur Folge haben und Berücksichtigung finden müssen. In Indexschreibweise sind diese wie folgt definiert:

$$F_{O,i} = \left\{ -\frac{\partial p}{\partial s_i} + \frac{\partial}{\partial s_j} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_j}{\partial s_j} \right) \right\} dV \quad (2.14)$$

mit:

$\eta$ : dynamische Viskosität

$p$ : Flüssigkeitsdruck

Ihre Herleitung ist dem Anhang A.3 zu entnehmen.

Der Impulssatz lautet somit nach Gleichung 2.6:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV = -\frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_i v_j) dV + F_{ges} \quad (2.15)$$

bzw.

$$F_{ges} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_i v_j) dV \quad (2.16)$$

Die vollständigen kompressiblen Impulsgleichungen (oder auch als Navier-Stokes Gleichungen bezeichnet) lauten nun mit Hilfe der Gleichungen 2.8, 2.10 und 2.14 sowie nach der Division durch  $dV$  wie folgt:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_i v_j)}_{\text{lokale + konvektive Beschleunigung}} = F_{V,i} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial s_i} + \frac{\partial}{\partial s_j} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_j}{\partial s_j} \right)}_{\text{Oberflächenkräfte}} \quad (2.17)$$

Mit Hilfe der Hypothese von Stokes<sup>2</sup> lautet ihre vektorielle Schreibweise (vgl. Anhang A.4):

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f}_{v,i} - \nabla p + \eta \Delta \vec{v} + (\lambda + \eta) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (2.18)$$

mit:

$\Delta$ : Laplace-Operator =  $\nabla \cdot \nabla$

$\lambda$ : 2. Viskositätskoeffizient

Diese drei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen werden als **Navier-Stokes-Gleichungen** bezeichnet und beschreiben das Verhalten des Geschwindigkeitvektors  $\vec{v}(x, y, z, t)$  in allen drei Raumrichtungen und zu jedem Zeitpunkt. Eine weitere Unbekannte ist die Druckverteilung  $p(x, y, z, t)$ , sodass zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (Gleichung 2.3 bzw. 2.4) vier partielle Differentialgleichungen für vier unbekannte Größen vorliegen. Die Gleichungen beschreiben das Strömungsverhalten einer kompressiblen, instationären und reibungsbehafteten Flüssigkeit. Die analytische Lösung dieses komplexen Gleichungssystems ist jedoch erst durch vereinfachende Annahmen möglich.

## 2.3 Allgemeine inkompressible Strömungsgleichungen

Für die mathematische Modellierung von Strömungsprozessen können die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung vereinfacht werden. Dabei ist eine wesentliche vereinfachende Annahme die Inkompressibilität von Wasser, weil eine Volumenänderung eines Flüssigkeitskörpers infolge Druckänderung vernachlässigbar klein ist. Somit ist (im Gegensatz zu Gasen) von einer konstanten Dichte des Wassers auszugehen, wenn die Einflüsse von Temperatur und Fremdstoffen vernachlässigt werden können. Zusätzlich kann die dynamische Viskosität als unveränderlich und eine Quellen- und Senkenfreiheit des Kontrollvolumens angenommen werden.

---

<sup>2</sup>Wird eine reine Kompression des Fluids angenommen (Schergeschwindigkeiten = 0), ist die Beziehung zwischen der dynamischen Viskosität  $\eta$  und dem Faktor  $\lambda$  gegeben durch:  $\lambda = -\frac{2}{3}\eta$

### 2.3.1 Inkompressible Kontinuitätsgleichung

Durch die obigen Annahmen reduziert sich die kompressible Kontinuitätsgleichung 2.3 bzw. 2.4 zu

$$\frac{\partial v_i}{\partial s_i} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.19)$$

und ist eine partielle Differentialgleichung mit den Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  als Unbekannte. Da das Vektorfeld  $\vec{v}$  ein Strömungsfeld ist, gibt die Divergenz für jede Stelle an, ob ein Teilchen in der Nähe zu diesem Punkt hin- bzw. wegfließt. Die Divergenz gibt somit die Aussage, ob und wo das Vektorfeld Quellen (Divergenz positiv) oder Senken (Divergenz negativ) hat. Da keine Massenerzeugung oder -vernichtung stattfindet und eine Quellen- und Senkenfreiheit angenommen wird (Divergenz null), wird die Strömung als *divergenzfrei* bezeichnet, was bedeutet, dass alles, was in ein abgeschlossenes System über den Rand hineinströmt, gleichzeitig an einer anderen Stelle wieder rausströmen muss.

### 2.3.2 Inkompressible Impulsgleichungen

Die Impulsgleichungen können ebenfalls stark vereinfacht werden (Gleichung 2.17):

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial s_j} (v_i v_j) = F_{V,i} - \frac{\partial p}{\partial s_i} + \eta \frac{\partial}{\partial s_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_i} \right) - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial s_j} \right) \quad (2.20)$$

Durch die Divergenzfreiheit ( $\frac{\partial v_i}{\partial s_i} = 0$ ) folgt:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial s_j} (v_i v_j) = F_{V,i} - \frac{\partial p}{\partial s_i} + \eta \frac{\partial}{\partial s_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_i} \right) \quad (2.21)$$

Mit der kinematischen Viskosität  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  und der Anwendung der Produktregel<sup>3</sup>, ergibt sich für die inkompressible Form der Impulsgleichungen nach der Division durch die Dichte:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial s_j} (v_i) = \frac{F_{V,i}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s_i} + \nu \frac{\partial}{\partial s_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial s_j} \right) \quad (2.22)$$

*(lokale + konvektive Beschleunigung = Volumenkräfte + Druckkraft + Reibung)*

Durch die Gleichung 2.22 wird die physikalische Bedeutung der Impulsgleichungen verdeutlicht. Demnach ist die Summe aller einwirkenden Kräfte am Kontrollvolumen gleich dem Produkt aus Kontrollvolumenmasse und Beschleunigung (substantielle = lokale + konvektive) und beruht somit auf dem 2. Newtonschen Bewegungssatz<sup>4</sup>

$$F = m \cdot a. \quad (2.23)$$

Dabei entsteht die **lokale** Beschleunigung aus der zeitlichen Änderung des Impulses am Kontrollvolumen und wird somit auch als „Speicherterm“ des Impulses im Kontrollvolumenelement bezeichnet. Die **konvektive** Beschleunigung hingegen entsteht wie oben beschrieben aus der zeitlichen Differenz der ein- und austretenden Impulse am Kontrollvolumen und charakterisiert die Impulsänderung, die aus einer räumlichen Veränderung des Impulsfeldes resultiert (vgl. Abbildung 2.3).

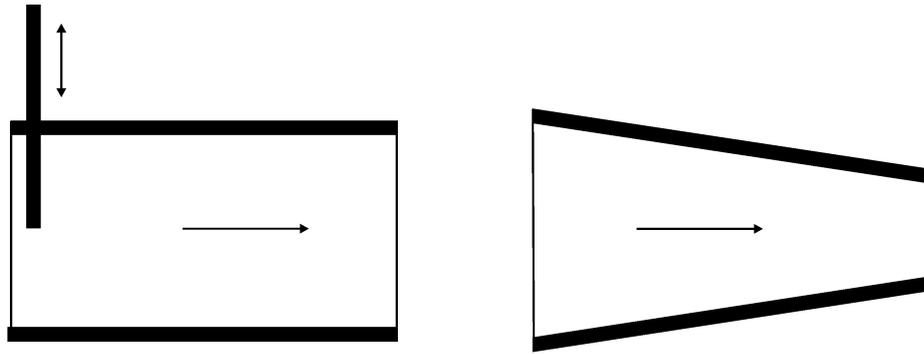
Wird in Gleichung 2.22 der Reibungsterm vereinfachend zu null gesetzt, ist im Allgemeinen von den **3D-Eulergleichungen** die Rede.

---

<sup>3</sup>Die konservative Form des konvektiven Terms für den Impuls kann durch Ausdifferenzierung in die nicht-konservative Form überführt werden (vgl. Kapitel 2.5.2):

$$\frac{\partial}{\partial s_j} (v_i v_j) = v_i \frac{\partial v_j}{\partial s_j} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial s_j} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial s_j}$$

<sup>4</sup>Die Summe aller auf ein Körper wirkenden Kräfte muss zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort mit derjenigen Kraft im Gleichgewicht stehen, welche der träge Körper der Änderung seines Bewegungszustandes entgegengesetzt.



**Abb. 2.3:** lokale und konvektive Beschleunigung: **Links:**  $\frac{\partial v_i}{\partial t}$  nur lokale Beschleunigung (bei konstanter Dichte und konstantem Durchflussquerschnitt) **Rechts:**  $v_j \frac{\partial v_i}{\partial s_j}$  nur konvektive Beschleunigung (bei konstanter Eintrittsgeschwindigkeit über die Zeit)

## 2.4 Die Reynolds-Gleichungen

Die Impulsgleichungen (2.22) sind mittels DNS (Direkter Numerischer Simulation) für laminare und gering turbulente, mit entsprechend hohem Aufwand auch für turbulente Strömungen lösbar (SCHRÖDER & FORKEL [1999]). Da die Strömung in Fließgewässern großen zeitlichen Variabilitäten unterworfen und die mathematische Auflösung der noch so kleinen turbulenten Strukturen sehr unpraktikabel ist (MALCHEREK [2006]), beschränkt man sich auf die zeitlichen Mittelwerte der Strömungsparameter. Zur Berechnung von Strömungen mit höherer Turbulenz werden somit die Bezugsgrößen  $(v_i, p)$  in einen Mittelwert  $(\bar{v}_i, \bar{p})$  und einen Schwankungswert  $(v'_i, p')$  aufgeteilt. Hierzu ist eine zeitliche Mittelung über das Intervall  $\Delta t$  erforderlich. Die Zeitspanne für die statistische Mittelung wird durch den Zeitmaßstab von turbulenten Schwankungen und mittleren Fließbewegungen bestimmt, um die turbulenten Schwankungen aus der Strömungsmodellierung zu eliminieren.

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} v_i(t) dt + v'_i \quad (2.24)$$

$$p = \bar{p} + p' = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} p(t) dt + p' \quad (2.25)$$

Mit

$$\overline{v_i} = \overline{\overline{v_i} + v'_i} \quad , \quad \text{da} \quad \overline{v'_i} = 0 \quad (2.26)$$

und<sup>5</sup>

$$\overline{v_i v_j} = \overline{(\overline{v_i} + v'_i)(\overline{v_j} + v'_j)} = \overline{v_i} \cdot \overline{v_j} + \overline{v'_i v'_j} \quad (2.27)$$

folgt für die gemittelte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial s_i} = 0 \quad (2.28)$$

und für die sogenannten Reynolds-Gleichungen

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial s_j} = \frac{1}{\rho} F_{V,i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s_j} \underbrace{\eta \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial s_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial s_i} \right)}_{\overline{\tau_{ij}} \text{ (Spannungsterm)}} \quad (2.29)$$

bzw. mit Gleichung 2.27 und  $\overline{\tau_{ij}^R}$  als Spannungsterm inklusive dem Reynolds-Spannungsterm

$$\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_i \cdot v_j}}{\partial s_j} = \frac{1}{\rho} F_{V,i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s_j} \underbrace{\left[ \eta \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial s_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial s_i} \right) - \rho \overline{v'_i v'_j} \right]}_{\overline{\tau_{ij}^R}} \quad (2.30)$$

---

5

$$\overline{v_i \cdot (\overline{v_j} + v'_j)} + \overline{v'_i \cdot (\overline{v_j} + v'_j)} = \overline{v_i} \cdot (\overline{v_j} + v'_j) + \overline{v'_i v_j} + \overline{v'_i v'_j} = \overline{v_i} \cdot \overline{v_j} + \overline{v'_i} \cdot \overline{v_j} + \overline{v'_i v'_j} = \overline{v_i} \cdot \overline{v_j} + \overline{v'_i v'_j}$$

Demnach unterscheiden sich die Reynolds-Gleichungen von den Navier-Stokes-Gleichungen, neben der Mittelwertbetrachtung der Bezugsgrößen, durch den sogenannten Reynolds-Spannungsterm  $\overline{v'_i v'_j}$ . Dieser berücksichtigt die turbulenten Schwankungen, die durch die Mittelung der Bezugsgrößen nicht mehr vom Strömungsmodell selbst abgebildet werden können. Für diesen Term existieren bereits verschiedene Modellannahmen (Turbulenzmodelle), um die Gleichungen in eine geschlossen lösbare Form zu überführen. Diesbezüglich sei auf RODI [1993] oder SCHRÖDER [1997] verwiesen.

## 2.5 Die tiefengemittelten Flachwassergleichungen

Die tiefengemittelten Flachwassergleichungen lassen sich durch zusätzliche Vereinfachungen der Kontinuitätsgleichung und der Reynolds-Gleichungen<sup>6</sup> durch Tiefenintegration ableiten. Die grundsätzlichen Voraussetzungen für die Zulässigkeit einer Tiefenintegration sind die Vernachlässigung der vertikalen Geschwindigkeits-  $v_z$  und Beschleunigungskomponente  $\dot{v}_z$  sowie eine uniforme Geschwindigkeitsverteilung von  $v_x$  und  $v_y$  über die Tiefe.

### 2.5.1 Die tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung

Um die tiefengemittelten Kontinuitätsgleichungen zu erhalten, wird Gleichung 2.19 von der Gewässersohle  $s$  bis zur freien Oberfläche  $H$  (Wassertiefe  $h = H - s$ ) integriert.

$$\int_s^H \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.31)$$

---

<sup>6</sup>Die Bezugsgrößen  $v_i$  und  $p$  sind im Folgenden über ein Zeitintervall gemittelte Werte, wobei auf die Schreibweise mit dem Überstrich (vgl. Kapitel 2.4) verzichtet wird

Das Integral kann für jeden Summanden getrennt gelöst werden. Betrachten wir den ersten Term, so wird im ersten Schritt mit Hilfe des Transporttheorems bzw. nach dem Satz von Leibniz<sup>7</sup> das Differential aus dem Integral gezogen.

$$\int_s^H \frac{\partial v_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_s^H v_x dz + v_{x,s} \frac{\partial s}{\partial x} - v_{x,H} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial x} + v_{x,s} \frac{\partial s}{\partial x} - v_{x,H} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.32)$$

Die tiefengemittelte Geschwindigkeit in x-Richtung ist dabei definiert durch:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{h} \int_s^H v_x dz \quad (2.33)$$

Während für den zweiten Term (y-Komponente) analog verfahren wird

$$\int_s^H \frac{\partial v_y}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_s^H v_y dz + v_{y,s} \frac{\partial s}{\partial y} - v_{y,H} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial h \bar{v}_y}{\partial y} + v_{y,s} \frac{\partial s}{\partial y} - v_{y,H} \frac{\partial H}{\partial y} \quad (2.34)$$

ist die Integration der dritten Komponente trivial und lautet nach dem Hauptsatz der Integralrechnung<sup>8</sup>

$$\int_s^H \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = v_{z,H} - v_{z,s}. \quad (2.35)$$

<sup>7</sup>Transporttheorem (Beweis in MALCHEREK [2006])

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{s(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z) dz = \int_{s(x,y)}^{H(x,y)} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} dz - f(x,y,s(x,y)) \frac{\partial s(x,y)}{\partial x} + f(x,y,H(x,y)) \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$$

<sup>8</sup>Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Werden alle Komponenten aufsummiert, folgt für die tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial x} + v_{x,s} \frac{\partial s}{\partial x} - v_{x,H} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_y}{\partial y} + v_{y,s} \frac{\partial s}{\partial y} - v_{y,H} \frac{\partial H}{\partial y} + v_{z,H} - v_{z,s} \quad (2.36)$$

Durch die kinematischen Randbedingungen an Sohle und Oberfläche (vgl. Anhang A.5.1 und A.5.2) und der Annahme einer unveränderlichen Sohle folgt schließlich:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_y}{\partial y} = 0 \quad (2.37)$$

## 2.5.2 Die tiefengemittelten Impulsgleichungen

Die Herleitung der tiefengemittelten Reynolds- bzw. Impulsgleichungen erfolgt analog zur Herleitung der Tiefenintegration der Kontinuitätsgleichung in Kapitel 2.5.1. Da es sich hier um zwei Gleichungen handelt (x- und y- Komponente) und die Lösung des Integrals beider Gleichungen identisch verläuft, wird im Folgenden die Herleitung in x-Richtung beschrieben. Die Reynoldsgleichung in x-Richtung und ohne Überstrich lautet (siehe Gleichung 2.30):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x v_z}{\partial z} = \frac{F_{V,x}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}^R}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^R}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^R}{\partial z} \right) \quad (2.38)$$

Dabei wurde der konvektive Beschleunigungsterm auf seine ursprüngliche Form  $\frac{\partial}{\partial s_j} (v_i v_j)$  gebracht (vgl. hierzu die Umrechnung von Gleichung 2.21 auf Gleichung 2.22) und wird im Folgenden als advektiver Term bezeichnet. Um die Übersicht während der Tiefenintegration von Gleichung 2.38 zu wahren, wird jeder Term bzw. Summand separat integriert:

### Beschleunigungsterme

Mit dem Satz von Leibniz können der lokale Beschleunigungsterm sowie die ersten beiden

Summanden des advektiven Terms berechnet werden, während der dritte Summand des advektiven Terms durch den Hauptsatz der Integralrechnung gelöst wird:

$$\int_s^H \frac{\partial v_x}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_s^H v_x dz + v_{x,s} \frac{\partial s}{\partial t} - v_{x,H} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial t} + v_{x,s} \frac{\partial s}{\partial t} - v_{x,H} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.39)$$

$$\int_s^H \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_s^H v_x^2 dz + v_{x,s}^2 \frac{\partial s}{\partial x} - v_{x,H}^2 \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.40)$$

$$\int_s^H \frac{\partial v_x v_y}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_s^H v_x v_y dz + v_{x,s} v_{y,s} \frac{\partial s}{\partial y} - v_{x,H} v_{y,H} \frac{\partial H}{\partial y} \quad (2.41)$$

$$\int_s^H \frac{\partial v_x v_z}{\partial z} dz = v_{x,H} v_{z,H} - v_{x,s} v_{z,s} \quad (2.42)$$

Durch die Summation und Umformung aller Terme folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_s^H v_x^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_s^H v_x v_y dz + v_{x,s} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v_{x,s} \frac{\partial s}{\partial x} + v_{y,s} \frac{\partial s}{\partial y} - v_{z,s} \right) \\ + v_{x,H} \left( -\frac{\partial H}{\partial t} - v_{x,H} \frac{\partial H}{\partial x} - v_{y,H} \frac{\partial H}{\partial y} + v_{z,H} \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

die sich unter der Annahme einer unveränderlichen Sohle ( $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ ) und den kinematischen Randbedingungen für Sohle und Oberfläche (siehe Anhang A.5.1 und A.5.2) weiter zu

$$\frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_s^H v_x^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_s^H v_x v_y dz \quad (2.44)$$

vereinfacht.

Zur Lösung der verbleibenden beiden Integrale wird analog zum Reynoldsansatz (vgl.

Kapitel 2.4) verfahren und die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_y$  in einen tiefengemittelten Anteil  $(\bar{v}_x, \bar{v}_y)$  sowie in einen Schwankungsanteil  $(v'_x, v'_y)$  aufgeteilt.

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i \quad (2.45)$$

Mit Gleichung 2.27 folgt für Gleichung 2.44

$$\frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}_x \cdot \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_x \cdot \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial h\overline{v'_x v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial h\overline{v'_x v'_y}}{\partial y}, \quad (2.46)$$

worin die beiden neuen Terme die Dispersion bezeichnen und infolge nicht gleichförmiger Geschwindigkeitsverteilung über die Wassertiefe entstehen. Im Gegensatz zu den Reynolds-Gleichungen handelt es sich hierbei um eine räumliche Mittelung. Durch die Einführung der Impulsbeiwerte

$$\beta_{ij} = 1 + \frac{\overline{v'_i \cdot v'_j}}{\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j} \geq 1 \quad (2.47)$$

kann Gleichung 2.46 weiter zusammengefasst werden:

$$\frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial \beta_{xx} h\bar{v}_x^2}{\partial x} + \frac{\partial \beta_{xy} h\bar{v}_x \cdot \bar{v}_y}{\partial y} \quad (2.48)$$

Wird ein turbulenter Gerinneabfluss mit logarithmischem Geschwindigkeitsprofil angenommen, nehmen die Impulsbeiwerte für extrem rauhe Gerinne (Chezywert von  $20 \frac{m^{0,5}}{s}$ ) einen Wert von  $\beta_{xx} = 1,15$  an, während dieser für weniger rauhe Gerinne (Chezywert von  $90 \frac{m^{0,5}}{s}$ ) schnell gegen eins geht (MALCHEREK [2006]) und für praktische Berechnungen allgemein vernachlässigt wird (BEFFA [1994]).

### Spannungsterm

Die Integration des Spannungsterms  $\tau_{ij}^R$  ergibt mit dem Satz von Leibniz für die ersten beiden Summanden und durch den Hauptsatz der Integralrechnung für den dritten Term:

$$\int_s^H \left( \frac{\partial \tau_{xx}^R}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^R}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^R}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_s^H \tau_{xx}^R dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_s^H \tau_{xy}^R dz + \left( \tau_{xx,s}^R \frac{\partial s}{\partial x} + \tau_{xy,s}^R \frac{\partial s}{\partial y} - \tau_{xz,s}^R \right) - \left( \tau_{xx,H}^R \frac{\partial H}{\partial x} + \tau_{xy,H}^R \frac{\partial H}{\partial y} - \tau_{xz,H}^R \right) \quad (2.49)$$

Werden nun die Spannungen an der Wasseroberfläche vernachlässigt<sup>9</sup> (zweite Klammer) und der Reibungsterm an der Sohle (erste Klammer) in einem Wert ( $\tau_{s,x}$ ) zusammengefasst, folgt für den Spannungsterm:

$$\frac{\partial h \overline{\tau_{xx}^R}}{\partial x} + \frac{\partial h \overline{\tau_{xy}^R}}{\partial y} + \tau_{s,x} \quad (2.50)$$

Diese stellen nun auf die horizontale Ebene projizierte Spannungen dar.

Alternativ zum Impulsbeiwert können ebenso die Dispersionsterme aus Gleichung 2.46 dem Spannungstensor  $\tau_{ij}^R$  zugeschlagen werden. Daraus würde der neue Spannungstensor  $\tau_{ij}^D$  resultieren<sup>10</sup>:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h \overline{\tau_{xx}^R}}{\partial x} + \frac{\partial h \overline{\tau_{xy}^R}}{\partial y} + \tau_{s,x} - \rho \frac{\partial h \overline{v'_x v'_x}}{\partial x} + \rho \frac{\partial h \overline{v'_x v'_y}}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h \overline{\tau_{xx}^D}}{\partial x} + \frac{\partial h \overline{\tau_{xy}^D}}{\partial y} + \tau_{s,x} \right) \quad (2.51)$$

<sup>9</sup>Nach der dynamischen Randbedingung an der Oberfläche entspricht die Spannung im Wasserkörper an der Oberfläche dem atmosphärischen Luftdruck. Werden atmosphärische Druckschwankungen und die Windkraft vernachlässigt, ist auch die Schubspannung an der Oberfläche null. Wenn der Windeinfluss berücksichtigt werden soll, kann alternativ die Windschubspannung  $\tau_{Wind,x}$  als Schubspannung an der Oberfläche angesetzt werden.

<sup>10</sup>Mit der Annahme eines logarithmischen Geschwindigkeitsprofil und der Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_*$  gilt (MALCHEREC [2006]):

$$\tau_{ij}^D = \tau_{ij}^R - \overline{\rho v'_i v'_j} = \tau_{ij}^R - 5,95 \rho u_*^2 \left( \begin{array}{cc} \frac{v_x^2}{v_x^2 + v_y^2} & \frac{v_x v_y}{v_x^2 + v_y^2} \\ \frac{v_x v_y}{v_x^2 + v_y^2} & \frac{v_y^2}{v_x^2 + v_y^2} \end{array} \right) \left( 1 - \frac{v_x^2}{v_x^2 + v_y^2} \right)$$

Somit ergibt sich vorerst (ohne die nun folgende Integration der Volumenkräfte und des Druckterms) für die Tiefenintegration der Gleichung 2.38

$$\frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}_x \cdot \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_x \cdot \bar{v}_y}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left[ \int_s^H \left( F_{V,x} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dz + \frac{\partial h\bar{\tau}_{xx}^D}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{\tau}_{xy}^D}{\partial y} + \tau_{s,x} \right] \quad (2.52)$$

### Volumenkräfte

Das Tiefenintegral der Volumenkräfte lautet:

$$\frac{1}{\rho} \int_s^H F_{V,x} dz = \frac{1}{\rho} h \cdot F_{V,x} \quad (2.53)$$

### Druckterm

Mit dem Satz von Leibniz folgt für das Tiefenintegral des Druckterms

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \int_s^H \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) dz &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_s^H p dz + p_s \frac{\partial s}{\partial x} - p_H \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho} \left( \rho g \frac{\partial}{\partial x} \int_s^H (H - z) dz + \rho g h \frac{\partial s}{\partial x} - 0 \right) \\ &= g \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{2} (H - z)^2 \Big|_s^H \right) + g h \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} (H - s)^2 + g h \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{g}{2} h^2 + g h \frac{\partial s}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.54)$$

und der Druck ist somit als Unbekannte aus der Gleichung eliminiert.

### Zusammenfassung

Die Tiefenintegration der Impulsgleichung in x-Richtung lautet nach Addition aller integrierten Terme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{v}_x^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_x \cdot \bar{v}_y}{\partial y} &= \frac{hF_{V,x}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \tau_{s,x} - gh \frac{\partial s}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h\bar{\tau}_{xx}^D}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{\tau}_{xy}^D}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Nach dem Ausschluss der Volumenkräfte sowie der Einführung des Sohlgefälles  $S_0^{11}$  als treibende und der Sohlschubspannung  $S_f^{12}$  als verzögernde Kraft, folgt nach analogem Vorgehen für die y-Komponente die sogenannte konservative Form der Flachwassergleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_y}{\partial y} = 0 \quad (2.56)$$

Impulsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{v}_x^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_x \cdot \bar{v}_y}{\partial y} &= gh(S_{0,x} - S_{f,x}) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h\bar{\tau}_{xx}^D}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{\tau}_{xy}^D}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial h\bar{v}_y}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}_x \cdot \bar{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial (h\bar{v}_y^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial y} &= gh(S_{0,y} - S_{f,y}) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h\bar{\tau}_{xy}^D}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{\tau}_{yy}^D}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dabei werden die Sohlschubspannungen durch empirische Ansätze angenähert, wobei die Grenzschicht entlang der Seitenwände vernachlässigt und einzig eine Reibung am Boden angenommen wird (NÄF [1997]). Eine gebräuchliche Formulierung der Sohlschubspannungen lautet unter Verwendung des Chezy-Koeffizienten  $C_z$

$$S_{f,x} = \frac{\bar{v}_x \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2}}{hC_z^2} \quad (2.58)$$

$$S_{f,y} = \frac{\bar{v}_y \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2}}{hC_z^2}, \quad (2.59)$$

wobei der Koeffizient nach dem empirischen Reibungsgesetzes nach Manning mit dem Stricklerwert  $k_{st}$  bzw. Manningwert  $n = 1/k_{st}$  ausgedrückt werden kann als (mit  $h \approx r_{hy}$ )

$$C_z = \frac{h^{1/6}}{n} = h^{1/6}k_{st}. \quad (2.60)$$

<sup>11</sup>Sohlgefälle in x-Richtung  $S_{0,x} = -\frac{\partial s}{\partial x}$

<sup>12</sup>Sohlschubspannung in x-Richtung  $S_{f,x} = \frac{\tau_{s,x}}{\rho gh}$

Zur praktischen Lösung der Flachwassergleichungen wird die konservative Form durch weitere Umformung in die nicht-konservative Form (auch differentielle Form der Flachwassergleichungen genannt), der sogenannten Geschwindigkeitsformulierung der Flachwassergleichungen, gebracht. Dies erfolgt durch die Ausdifferenzierung der Impulsgleichungen sowie durch die Anwendung der Kontinuitätsbedingung, die selbst unverändert und weiterhin allgemeingültig bleibt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{v}_x^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_x \cdot \bar{v}_y}{\partial y} \\
= h \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial h}{\partial t} + h\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_x \frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial x} + \frac{g}{2} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \bar{v}_x \frac{\partial h\bar{v}_y}{\partial y} + h\bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \\
= h \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \underbrace{\bar{v}_x \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_y}{\partial y} \right)}_{=0} \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Somit lautet die nicht-konservative Geschwindigkeitsformulierung der Flachwassergleichungen inklusive Volumenkräfte und Windschubspannung an der Wasseroberfläche:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}_y}{\partial y} = 0 \quad (2.62)$$

Impulsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{lokale+konvektiveBeschleunigung+freieWasseroberfläche}} &= \underbrace{g(S_{0,x} - S_{f,x})}_{\text{Quellterm}} + \underbrace{\frac{1}{h\rho} \left( \frac{\partial h\bar{\tau}_{xx}^D}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{\tau}_{xy}^D}{\partial y} \right)}_{\text{diffuseTerme}} \\
&+ \underbrace{\frac{F_{V,x}}{\rho} + \frac{\tau_{Wind,x}}{h\rho}}_{\text{Kraft+Wind}} \\
\underbrace{\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} \right) + g \frac{\partial h}{\partial y}}_{\text{lokale+konvektiveBeschleunigung+freieWasseroberfläche}} &= \underbrace{g(S_{0,y} - S_{f,y})}_{\text{Quellterm}} + \underbrace{\frac{1}{h\rho} \left( \frac{\partial h\bar{\tau}_{xy}^D}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{\tau}_{yy}^D}{\partial y} \right)}_{\text{diffuseTerme}} \\
&+ \underbrace{\frac{F_{V,y}}{\rho} + \frac{\tau_{Wind,y}}{h\rho}}_{\text{Kraft+Wind}} \quad (2.63)
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat nun als Unbekannte die Wassertiefe  $h$  und die beiden Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_y$ . Zudem ist der Reynolds-Spannungsterm (vgl. Kapitel 2.4) durch ein Turbulenzmodell zu bestimmen, um anschließend die diffusen Terme berechnen zu können:

$$\tau_{ij}^D = \tau_{ij}^R - \overline{\rho v_i' v_j'} = \tau_{ij}^D = \tau_{ij}^R - 5,95 \rho u_*^2 \begin{pmatrix} \frac{v_x^2}{v_x^2 + v_y^2} & \frac{v_x v_y}{v_x^2 + v_y^2} \\ \frac{v_x v_y}{v_x^2 + v_y^2} & 1 - \frac{v_x^2}{v_x^2 + v_y^2} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Es sei hier erwähnt, dass die konservative (Gleichungen 2.57) und die nicht-konservative (Gleichungen 2.63) Form der Flachwassergleichungen nur für stetige und differenzierbare Lösungen äquivalent sind. Enthält die Lösung allerdings eine Unstetigkeit bzw. Diskontinuität, so kann eine in unterschiedlichen Divergenzformen geschriebene Differentialgleichung (konservative und nicht-konservative Flachwassergleichungen) verschiedene Mengen schwacher Lösungen besitzen. Ein Beispiel zu dieser Problematik kann an der unviskosen ( $\eta = 0$ ) *Burgers-Gleichung*<sup>13</sup> (2.65) mit der Variablen  $u$  gezeigt werden.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.65)$$

Während die stetigen und differenzierbaren Lösungen von Gleichung 2.65 den in unterschiedlicher Divergenzform geschriebenen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0 \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{3} u^3 \right) = 0 \quad (2.67)$$

---

<sup>13</sup>Die Burgers-Gleichung ist eine einfache nichtlineare partielle Differentialgleichung, die häufig zur Veranschaulichung von Eigenschaften komplizierter Differentialgleichungen verwendet wird.

entsprechen, sind die diskontinuierlichen Lösungen dieser Gleichungen unterschiedlich. Dies wird durch die unterschiedlichen Sprungbedingungen (*Rankine-Hugoniot Sprungbedingung*)

$$s^*(u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r) \quad \text{mit } u_l > u_r \quad (2.68)$$

für die Gleichung 2.66

$$s^* = \frac{\frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2)}{u_l - u_r} = \frac{u_l + u_r}{2} \quad (2.69)$$

und Gleichung 2.67

$$s^* = \frac{\frac{1}{3}(u_l^3 - u_r^3)}{\frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2)} = \frac{2}{3} \frac{(u_l^2 + u_l u_r + u_r^2)(u_l - u_r)}{(u_l + u_r)(u_l - u_r)} = \frac{2}{3} \frac{u_l^2 + u_l u_r + u_r^2}{u_l + u_r} \quad (2.70)$$

deutlich (SMOLLER [1994]). Sind somit die Stoßgeschwindigkeiten links der Diskontinuität  $u_l$  und rechts der Diskontinuität  $u_r$  unterschiedlich, verhält es sich ebenso mit den diskontinuierlichen Lösungen. Wird demnach die nicht-konservative Form der Flachwassergleichungen bei vorhandenen Diskontinuitäten (z.B. Wechselsprünge) verwendet, wird offensichtlich die Annahme der Impulserhaltung verletzt. Für zusätzliche physikalische und mathematische Eigenschaften der tiefengemittelten Flachwassergleichungen, wie beispielsweise die schwachen Lösungen, Theorie der Charakteristiken, Reversibilität usw., sei hier auf SCHWANENBERG [2004] und SCHRAMM [2005] verwiesen.

Weitere Annahmen und Vereinfachungen, die für die Herleitung der Flachwassergleichungen getroffen wurden, sind:

- Isotherme Bedingungen mit **konstanter** Fluidichte (Inkompressibilitätsannahme) und dynamischer Viskosität.
- Keine atmosphärischen Druckschwankungen.

- Vernachlässigung der vertikalen Geschwindigkeit und Beschleunigung und somit
- die Annahme einer geringen Sohlneigung und Sohlneigungsänderung (nach Literaturangabe  $S_0 \leq 0,1$ ) sowie
- einer hydrostatischen Druckverteilung im Fluid.
- Reibungseinflüsse werden in einen Sohlreibungsterm zusammengefasst.
- Die vertikale Verteilung der horizontalen Geschwindigkeiten ist meist unbekannt und wird bei praktischen Berechnungen als konstant oder logarithmisch angenommen, um den horizontalen Impulsaustausch berechnen zu können.

Somit ist der Gültigkeitsbereich der Flachwassergleichungen gegenüber den Navier-Stokes-Gleichungen stark eingeschränkt. Die Flachwassergleichungen beschreiben näherungsweise horizontale Gerinneströmungen, die im Verhältnis zu ihrer horizontalen Ausdehnung eine kleine Abflusstiefe besitzen. Dadurch finden sie Anwendung in der Wellenberechnung (z.B.: Dammbrechwellen, Hochwasserwellen, Schwall oder Sunk) wie auch bei stationären Abflusssimulationen (z.B.: Umströmung/Durchströmung von Bauwerken). Sekundärströmungen und Dichteeinflüsse lassen sich hingegen durch die Vereinfachungen nicht abbilden.

## 2.6 Die 1D Saint-Venant-Gleichungen

Für viele Fragestellungen in der Fließgewässermodellierung werden noch heute eindimensionale Berechnungsmodelle gewählt. Der dabei stets gewählte querschnittsgemittelte Ansatz lässt sich durch eine Breitenmittelung der Flachwassergleichungen herleiten. Die wichtigste Annahme hierzu ist, dass die tiefengemittelten transversalen Geschwindigkeits- $v_y$  und Beschleunigungskomponente  $\dot{v}_y$  Null sind.

### 2.6.1 Die Breitenmittelung der Kontinuitätsgleichung

Die eindimensionale Kontinuitätsgleichung folgt aus der Integration der tiefenintegrierten Kontinuitätsgleichung (Gleichung 2.37) über die Gewässerbreite:

$$\int_{U_i}^{U_r} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h v_x}{\partial x} + \frac{\partial h v_y}{\partial y} \right) dy = 0 \quad (2.71)$$

Analog zu Kapitel 2.5.1 folgt durch das Transporttheorem und die kinematischen Randbedingungen an den Ufern (siehe Anhang A.5.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{U_i}^{U_r} h dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{U_i}^{U_r} h v_x dy = 0 \quad (2.72)$$

bzw.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (2.73)$$

### 2.6.2 Die Breitenmittelung der Impulsgleichungen

Für die Breitenmittelung der Impulsgleichungen ist einzig die tiefenintegrierte Impulsgleichung in x-Richtung maßgebend. Hierzu wird die x-Komponente der Gleichung 2.57 mit  $v_y = 0$  in folgende Form gebracht:

$$\frac{\partial h v_x}{\partial t} + \frac{\partial h v_x^2}{\partial x} + g h \frac{\partial h}{\partial x} = -g h \left( \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\tau_{s,x}}{\rho g h} \right) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial h \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2.74)$$

oder

$$\frac{\partial h v_x}{\partial t} + \frac{\partial h v_x^2}{\partial x} = -g h \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \tau_{s,x} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial h \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2.75)$$

Wird die Breitenintegration termweise durchgeführt, folgt unter Anwendung des Transporttheorems und Einführung der Gewässerbreite  $B$  für die beiden Summanden auf der linken Seite<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned} \int_{U_l}^{U_r} \frac{\partial h v_x}{\partial t} dy + \int_{U_l}^{U_r} \frac{\partial h v_x^2}{\partial x} dy &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{U_l}^{U_r} h v_x dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{U_l}^{U_r} h v_x^2 dy \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \overline{h v_x} B + \frac{\partial}{\partial x} \overline{h v_x^2} B = \frac{\partial}{\partial t} \overline{h v_x} B + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_x} \cdot \overline{h v_x}) B + \frac{\partial}{\partial x} \overline{v_x' \cdot (h v_x)'} B \end{aligned} \quad (2.76)$$

Der letzte Summand wird auch als laterale Dispersion bezeichnet.

Die Integration des Oberflächenterms ergibt:

$$-g \int_{U_l}^{U_r} h \frac{\partial H}{\partial x} dy = -g \bar{h} B \frac{\partial H}{\partial x} = -g A \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.77)$$

Wird als nächster Schritt der zusammenfassende Reibungsterm<sup>15</sup>

$$\underbrace{g A I_E}_{\text{Reibungsterm}} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \int_{U_l}^{U_r} \left( \frac{\partial h \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial h \tau_{xy}}{\partial y} \right) dy}_{\text{Dispersionsterm}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \overline{v_x' (h v_x)'}}_{\text{Laterale Dispersion}} B + \underbrace{\frac{1}{\rho} \int_{U_l}^{U_r} \tau_{s,x} dy}_{\text{Sohlrreibung}} \quad (2.78)$$

mit dem Energieliniengefälle  $I_E$  eingeführt, ergeben sich mit dem Volumenstrom  $Q = v A = \overline{B h v_x}$  die eindimensionalen Strömungsgleichungen zu:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_x} Q}{\partial x} = -g A \left( \frac{\partial H}{\partial x} + I_E \right) \quad (2.80)$$

<sup>14</sup>Durch die Annahme der Stokesschen Wandhaftbedingung werden die Geschwindigkeiten an beiden Ufern zu Null gesetzt.

<sup>15</sup>Der Reibungsterm kann durch weitere Summanden erweitert werden, um beispielsweise auch den Einfluss der Sekundärströmung mit zu berücksichtigen (MALCHEREK [2006]).

Wählt man eine von  $h$  und  $v_x$  abhängige Schreibweise (auf die Mittelungsstriche über den Variablen wird im Folgenden verzichtet) dieser Gleichungen, so erhält man die 1D-Saint-Venant-Gleichungen zu (Herleitung siehe Anhang A.5.4):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} = -A \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial A} \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \left( \frac{\partial s}{\partial x} + I_E \right) \quad (2.82)$$

Es sei hier erwähnt, dass  $h$  und  $v_x$  über die Breite gemittelte Variablen sind. Daher ist die erste Schreibweise (Gleichungen 2.79 und 2.80) zu bevorzugen. Zudem kann  $I_E$  nach der von Darcy-Weisbach abgeleiteten Gleichung für den Energieabfall entlang einer Druckrohrleitung bestimmt werden:

$$I_E = \frac{h_V}{l} = \frac{\lambda}{d_{hy}} \frac{v^2}{2g} \quad (2.83)$$

mit:

$h_V$	Verlusthöhe [m]
$l$	Gerinneabschnitt [m]
$d_{hy} = 4r_{hy}$	hydraulischer Durchmesser [m]
$\lambda$	Widerstandsbeiwert der Rohrreibung [-]

Die Annahmen für die 1D Saint-Venant-Gleichungen sind somit:

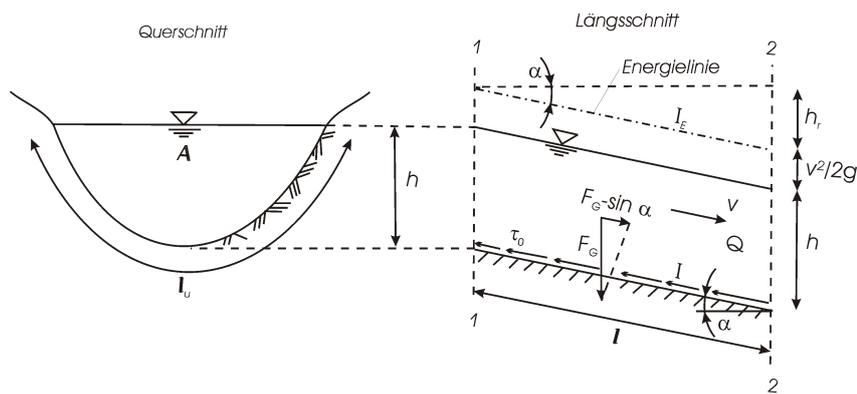
- Vernachlässigung der Beschleunigung und Geschwindigkeit in y-Richtung und somit die Annahme
- einer über den Querschnitt gleich verteilten Fließgeschwindigkeit und
- einer geringen Krümmung der Stromlinien.
- Die Wasserspiegellage senkrecht zur Fließrichtung ist horizontal.
- Berücksichtigung von Reibungs- und Turbulenzeffekten über Widerstandsgesetze (z.B. Darcy-Weisbach oder Manning-Strickler).

## 2.7 Stationäres Fließen in offenen Gerinnen

Für den hydraulischen Entwurf eines offenen Gerinnes ist eine Gesetzmäßigkeit zwischen dem Abfluss  $Q$  bzw. der mittleren Fließgeschwindigkeit  $v$  und den Gerinneparametern wie Gefälle  $I$ , Wassertiefe  $h$ , Querschnittsform  $A$ , benetzter Umfang  $l_u$  und Sohl- und Gerinnewandbeschaffenheit zu suchen. Eine derartige mathematische Gesetzmäßigkeit bzw. Fließformel ist für eine stationär gleichförmige Strömung wie folgt möglich.

### 2.7.1 Fließformel nach Darcy-Weisbach

Betrachtet man den Wasserkörper in einem Gerinneabschnitt zwischen den Querschnitten 1 und 2, so wirkt auf diesen Körper infolge der Gravitation die Gewichtskraft  $F_G$ .



**Abb. 2.4:** Gerinneabschnitt zur Ableitung der Fließformel (nach BOLLRICH [2000])

Diese Gewichtskraft besitzt infolge der Gerinneneigung eine Hangabtriebskomponente ( $\sin \alpha = \tan \alpha$ )

$$F_G \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha = A \cdot l \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \alpha = A \cdot \rho \cdot g \cdot h_r, \quad (2.84)$$

die im Gleichgewicht mit der Wandreibungskraft  $F_r$  mit

$$F_r = \tau_0 \cdot l_u \cdot l \quad (2.85)$$

steht und durch die Wandschubspannung  $\tau_0$  entlang des benetzten Umfangs  $l_u$  über die Länge  $l$  erzeugt wird. Bei turbulenter Fließbewegung ist  $\tau_0$  proportional zum Geschwindigkeitsquadrat. Um hieraus eine Gleichung abzuleiten, lässt sich zusammenfassend die Sohlschubspannung als Reibungsbeiwert (das  $1/4$  stammt aus dem Verhältnis von hydraulischem Durchmesser zu hydraulischem Radius) mal Staudruck beschreiben:

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\rho}{2} v^2 \quad (2.86)$$

Aus dem Gleichgewicht beider Kräfte (Gewichtskraft und Wandreibungskraft) folgt die klassische Fließformel:

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{A}{l_u} \cdot \frac{h_r}{l}} \quad (2.87)$$

Führt man für den ersten Faktor den Geschwindigkeitsbeiwert  $C$  ein, dessen Zusammenhang mit dem dimensionslosen Widerstandsbeiwert  $\lambda$  mit obiger Gleichung beschrieben wird, so erhält man die **klassische Fließformel nach Chezy**<sup>16</sup>:

$$v = C \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I} \quad (2.88)$$

Wird der Geschwindigkeits- bzw. Chezy-Beiwert  $C$  (bzw.  $C_z$ ) nicht eingeführt, so ist im Allgemeinen die Rede von der Fließformel nach Darcy-Weisbach<sup>17</sup>, mit  $\lambda$  als Reibungsbeiwert nach Darcy-Weisbach. Sie gilt als eine Erweiterung der Chezy-Gleichung. Der für die Herleitung erforderliche Ansatz (quadratisches Widerstandsgesetz bzw. der Reibungssatz  $\tau_0 \sim v^2$ ) wurde für die Rohrströmung abgeleitet.

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I} \quad (2.89)$$

<sup>16</sup>Antoine Chezy (1718 - 1798), französischer Hydrauliker

<sup>17</sup>Henry Darcy (1803 - 1858), französischer Hydrauliker und Julius Weisbach (1806 - 1871), deutscher Maschinenbauingenieur

Der Reibungsbeiwert  $\lambda$  ist dabei abhängig von der Reynoldszahl (viskose Einflüsse bzw. Einfluss der inneren Reibung) und der Wandreibung. Durch zahlreiche empirische Untersuchungen von turbulenten Rohrströmungen, wurden zur Beschreibung des Reibungsbeiwertes die Ergebnisse in dem so genannten Moody-Diagramm zusammengefasst. Da für offene Gerinne der Einfluss der Wandreibung überwiegt, werden die viskosen Einflüsse vernachlässigt (für  $k_s/r_{hy} \geq 10^{-4}$ ). Somit folgt für  $\lambda$  aus der Analogie zur Rohrströmung bzw. aus dem Moody-Diagramm:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg \left( \underbrace{\frac{f_g}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}}}_{\approx 0} + \frac{k_s}{4 \cdot f_r \cdot r_{hy}} \right) \quad (2.90)$$

mit:

$f_g$	Formbeiwert (glatt)
$f_r$	Formbeiwert (rauh), Kreisrohr: 3.71, Trapezquerschnitt: 3.16
$k_s$	Absolute Rauheitslänge (äquivalente Sandrauhigkeit)

## 2.7.2 Fließformel nach Manning-Strickler

Zur Berechnung der hydraulischen Leistungsfähigkeit offener Gerinne sind neben der klassischen Fließformel nach Chezy und dem Fließgesetz nach Darcy-Weisbach eine Vielzahl von empirischen Formeln entwickelt worden, die auf folgender allgemeiner Form beruhen:

$$v = k \cdot r_{hy}^\alpha \cdot I^\beta \quad (2.91)$$

mit:

$v$	mittlere Geschwindigkeit
$k$	Faktor für Rauigkeit
$\alpha, \beta$	Korrekturparameter

Die wohl bekannteste ist die Fließformel nach **Gauckler-Manning-Strickler**<sup>18</sup>:

$$v = k_{st} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot \sqrt{I} \quad (2.92)$$

Darin findet die Reibung im Stricklerwert ( $k_{st}$ ) Berücksichtigung. Ein funktionaler Zusammenhang zwischen dem Stricklerbeiwert und der absoluten Rauheit ist gegeben durch (GARBRECHT [1961] nach BOLLRICH [2000]):

$$k_{st} = \frac{26}{k_s^{1/6}} \quad (2.93)$$

Bei Lockergestein als Sohlmaterial (Sand, Kies), kann anstelle der absoluten Rauheit auch der maßgebende Korndurchmesser  $d_m$ , meist  $d_m = d_{90}$  (Korndurchmesser bei 90% Siebdurchgang) eingesetzt werden (BOLLRICH [2000]).

### 2.7.3 Wasserspiegellagenberechnung

Während die oben beschriebenen Fließformeln ausschließlich für stationär gleichförmige Abflusszustände gelten und somit das so ermittelte Abfluss-Wasserstandverhältnis zeit- und ortsunabhängig ist, bedient man sich bei der Berechnung stationär ungleichförmiger Bewegungen der Energiegleichung nach Bernoulli<sup>19</sup>. Diese besagt, dass bei einer stationären Bewegung einer idealen (reibungsfreien) Flüssigkeit, die nur der Gravitationskraft unterworfen ist, die hydraulische Gesamtenergiehöhe  $h_E$  für alle Punkte einer Stromlinie konstant ist. Die Gesamtenergie  $E = m \cdot g \cdot h_E$  (bzw. bezogen auf einen Längenmaßstab: Gesamtenergiehöhe  $h_E$ ) ist dabei die Summe aus den Energieformen (ebenso bezogen auf einen Längenmaßstab):

- Geschwindigkeitshöhe  $h_{kin}$  als Ausdruck der kinetische Energie

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h_{kin} \Rightarrow h_{kin} = \frac{v^2}{2g} \quad (2.94)$$

<sup>18</sup>Gaspar-Philibert Gauckler (1826 - 1905), französischer Wasserbauingenieur; Robert Manning (1816 - 1897), irischer Bauingenieur; Albert Strickler (1887 - 1963), schweizerischer Wasserbauer

<sup>19</sup>Daniel Bernoulli (1700 - 1782), schweizerischer Mathematiker und Physiker

- Druckhöhe  $h_p$  als Ausdruck der Druckenergie

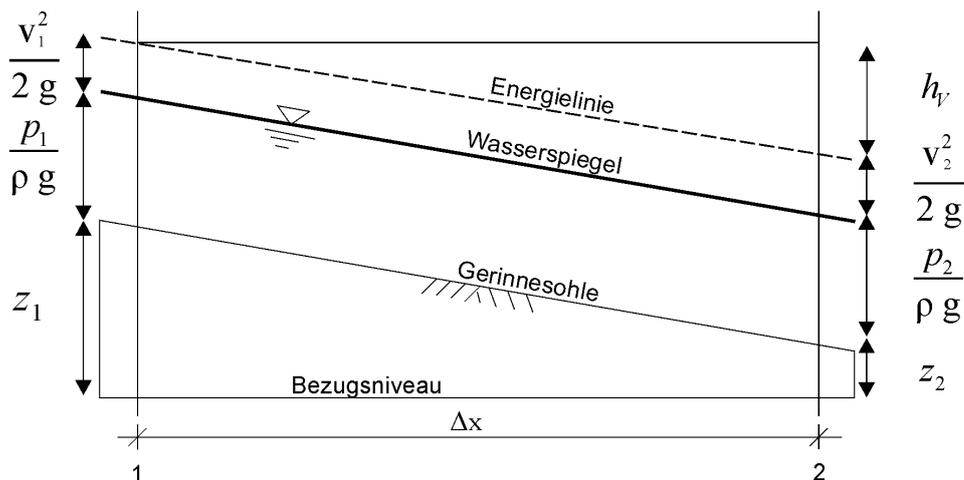
$$p = \rho \cdot g \cdot h_p \Rightarrow h_p = \frac{p}{\rho \cdot g} \quad (2.95)$$

- Geodätische Höhe  $z$  als Ausdruck der Lageenergie

Somit ergibt sich für die Energiegleichung nach Bernoulli an **einem** beliebigen Querschnitt:

$$\frac{E}{m \cdot g} = h_E = z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} \quad (2.96)$$

Diese Gleichung wird um einen weiteren Summanden, der Verlusthöhe  $h_V$  zur Simulation zäher Flüssigkeiten bzw. der Reibungsverluste, erweitert.



**Abb. 2.5:** Energiekomponenten in zwei Querschnitten eines offenen Gerinnes

Betrachtet man nun an zwei Punkten eines Gerinneabschnitts die Energiekomponenten, so sind nach dem Gesetz der Energieerhaltung die Energiesummen gleich.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_V \quad (2.97)$$

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung mit der Inkompressibilitätsannahme von Wasser ( $Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$ ) und durch die Vorgabe der Größen Abfluss sowie in **einem**

beliebigen Querschnitt der Wasserstand (z. B. Schnitt 2), sind sukzessive Geschwindigkeit und Wasserstand in jedem weiteren Schnitt (Schnitt 1) eindeutig definiert. Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass die Querprofile bekannt und die Reibungsverlusthöhen berechenbar sind. Die Verlusthöhe bzw. der Reibungsverlust zwischen zwei Punkten ist das Integral der Verluste auf dem besagten Abschnitt<sup>20</sup>. Ein verbreiteter Ansatz zur Berechnung der Verlusthöhe (die dem Energieliniengefälle entspricht) zwischen zwei Diskretisierungspunkten ist die Berechnung des arithmetischen Mittels der Energieliniengefälle in den beiden Berechnungspunkten.

$$I_R = \frac{h_V}{\Delta x} \approx \frac{I_{E,1} + I_{E,2}}{2}. \quad (2.98)$$

Somit folgt für einen beliebigen Abschnitt (mit  $h_i = z_i + p_i/\rho \cdot g$ ):

$$h_{i+1} = h_i + \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{A_i^2} + \frac{1}{A_{i+1}^2} \right) + \frac{\Delta x}{2} (I_i + I_{i+1}) \quad (2.99)$$

Die Berechnung des Energieliniengefälles in den Berechnungspunkten kann schließlich mit Hilfe der Darcy-Weisbach-

$$I_E = \frac{\lambda}{8g \cdot r_{hy}} \cdot \frac{Q^2}{A^2} \quad (2.100)$$

oder Manning-Strickler-Gleichung

$$I_E = \left( \frac{Q}{A \cdot k_{st} \cdot r_{hy}^{2/3}} \right)^2 \quad (2.101)$$

erfolgen.

Die Berechnung der Wasserspiegellagen erfolgt für strömenden Abfluss stets flussaufwärts,

---

<sup>20</sup>Die Verlusthöhe setzt sich im Grunde aus kontinuierlichen und örtlichen (z.B. Bauwerke, Querschnittsveränderung) Verlusten zusammen. Für die Einzel- bzw. örtlichen Verluste liegen zahlreiche empirische Ansätze vor, auf die in diesem Rahmen nicht eingegangen wird.

weil sich unter diesen Bedingungen eine Störung stets stromaufwärts bemerkbar macht, während im schießenden Zustand umgekehrt verfahren wird.

### 2.7.4 Gegenüberstellung der Reibungsansätze DW und MS

Durch den empirischen Charakter der Manning-Strickler-Formel (MS) und dem physikalisch basierten Ansatz der Darcy-Weisbach-Formel, kommt es Seitens der Wissenschaft immer wieder zu Empfehlungen, die Darcy-Weisbach-Formel (DW) zu bevorzugen (PASCHE ET AL. [2006]). In der Praxis hat sich jedoch die MS durchsetzen können. Daher werden in diesem Abschnitt beide Ansätze gegenüber gestellt und hinsichtlich ihrer Ergebnisse verglichen. Zunächst werden die beiden Fließformeln nach MS und DW in der Form gegenübergestellt, dass der Unterschied der MS Formel (Gleichung 2.92) zur DW Formel (Gleichung 2.89) in einem Reibungswert  $\lambda_{MS}$  zusammengefasst wird. Hierzu wird zunächst die MS Formel in die Form der DW Formel überführt:

$$v = \underbrace{\frac{k_{st} \cdot r_{hy}^{1/6}}{\sqrt{8g}}}_{=1/\sqrt{\lambda_{MS}}} \sqrt{8g} \sqrt{r_{hy} \cdot I} \quad (2.102)$$

Mit Gleichung 2.93 folgt für  $\lambda_{MS}$ :

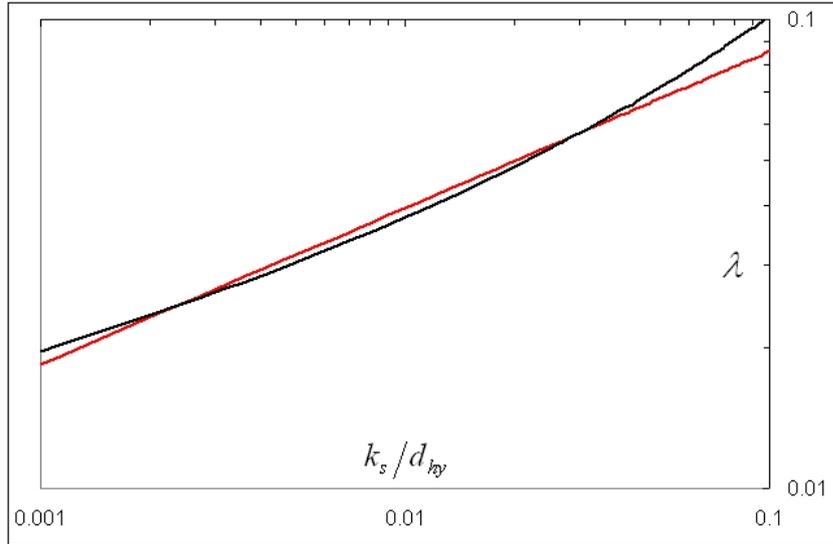
$$\lambda_{MS} = \left[ \frac{\sqrt{8g}}{26} 4^{1/6} \left( \frac{k_s}{4r_{hy}} \right)^{1/6} \right]^2 = 0,1843 \left( \frac{k_s}{4r_{hy}} \right)^{1/3} \quad (2.103)$$

Dieser Gleichung steht der Widerstandsbeiwert für rauhe Zustände nach DW gegenüber (vgl. Gleichung 2.90 für Trapezquerschnitte):

$$\lambda = \frac{0,25}{\left( \lg \frac{k_s}{3,16 \cdot 4r_{hy}} \right)^2} \quad (2.104)$$

Werden nun beide Ansätze in einem weiten Bereich der relativen Rauigkeit ( $0,0001 < k_s/d_{hy} < 0,1$ ), vgl. hierzu das Moody-Diagramm (z.B. BOLLRICH [2000]), gegenübergestellt (vgl. Abbildung 2.6), so liegen die Unterschiede bei ca.  $\pm 6\%$ . Erst für Werte

$k_s/d_{hy} > 0,05$  wird die Rauigkeit durch die MS Formel über 6% unterschätzt und steigt bis  $k_s/d_{hy} = 0,1$  auf 16% an. Aber dieser Bereich ist so rau, dass es im Moody-Diagramm nicht mehr abgebildet wird. Zudem ist zu erkennen, dass MS für einen mittleren rauhen Bereich die Geschwindigkeit unter- und somit den Wasserstand überschätzt, während sich die Situation für extrem raue Verhältnisse umkehrt.



**Abb. 2.6:** Vergleich des Reibungsbeiwertes  $\lambda$  für das hydraulisch raue Regime nach MS (rote Linie) und DW (schwarze Linie) (nach JIRKA & LANG [2005])

Als nächstes wird die Tatsache untersucht, dass der Stricklerwert eine Konstante darstellt, während der Widerstandsbeiwert eine Funktion vom hydraulischen Radius und somit auch vom Wasserstand ist. Hierzu wird zunächst angenommen, dass beide Fließformeln für einen Referenzfall mit dem Gefälle  $I_R$  exakt übereinstimmen. Die Referenzgeschwindigkeiten lauten:

$$v_R = k_{st,R} \cdot r_{hy,R}^{2/3} \cdot \sqrt{I_0} \quad (2.105)$$

$$v_R = \sqrt{\frac{8g}{\lambda_R}} \cdot \sqrt{r_{hy,R} \cdot I_0} \quad (2.106)$$

Es wird nun der Einfluss der Wasserstandsänderung auf die Geschwindigkeit untersucht, indem jeweils das Verhältnis zwischen der allgemeinen Geschwindigkeit und der Referenzgeschwindigkeit gebildet wird.

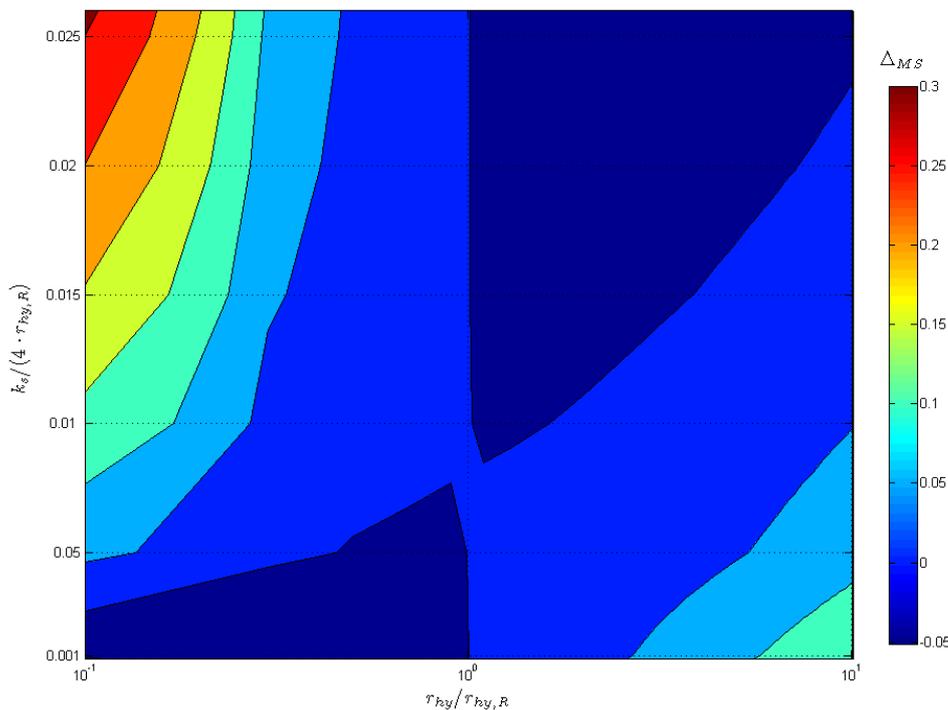
$$\frac{v}{v_R} \Big|_{MS} = \frac{k_{st}}{k_{st,R}} \cdot \left( \frac{r_{hy}}{r_{hy,R}} \right)^{2/3} \quad (2.107)$$

$$\frac{v}{v_R} \Big|_{DW} = \left( 1 + \frac{\lg \frac{r_{hy,R}}{r_{hy}}}{\lg \frac{k_s}{3,16 \cdot 4 r_{hy,R}}} \right) \sqrt{\frac{r_{hy}}{r_{hy,R}}} \quad (2.108)$$

Da der Stricklerwert im Allgemeinen wasserstandsunabhängig ist (könnte auch wasserstandsabhängig gewählt werden), gilt zudem  $k_{st} = k_{st,R}$ . Um nun beide Ansätze gegenüber zu stellen, wird die relative Abweichung oder auch der relative Fehler der MS ( $\Delta_{MS}$ ) gegenüber DW berechnet:

$$\Delta_{MS} = \frac{\frac{v}{v_R} \Big|_{MS} - \frac{v}{v_R} \Big|_{DW}}{\frac{v}{v_R} \Big|_{DW}} \quad (2.109)$$

Der Einfluss des variierenden Wasserstandes kann nun durch den relativen Fehler quantifiziert werden, indem dieser abhängig vom hydraulischen Radius (bzw. hier vom Verhältnis  $r_{hy}/r_{hy,R}$ ) abgebildet wird (siehe Abbildung 2.7).



**Abb. 2.7:** Relativer Fehler in der mittleren Geschwindigkeit nach MS als Funktion der relativen Wasserstandsänderung und der relativen Rauheit

Der Wertebereich für  $r_{hy}/r_{hy,R}$  liegt darin zwischen 0,1 (Wasserstandsunterschreitung auf 1/10 gegenüber der Referenztiefe für Rechteckgerinne) und 10 (Wasserstandsüberschrei-

tung auf den Faktor 10), während sich der Bereich der relativen Rauheit  $k_s/(4r_{hy,R})$  über den hydraulisch rauhen Bereich erstreckt (vgl. Moody-Diagramm).

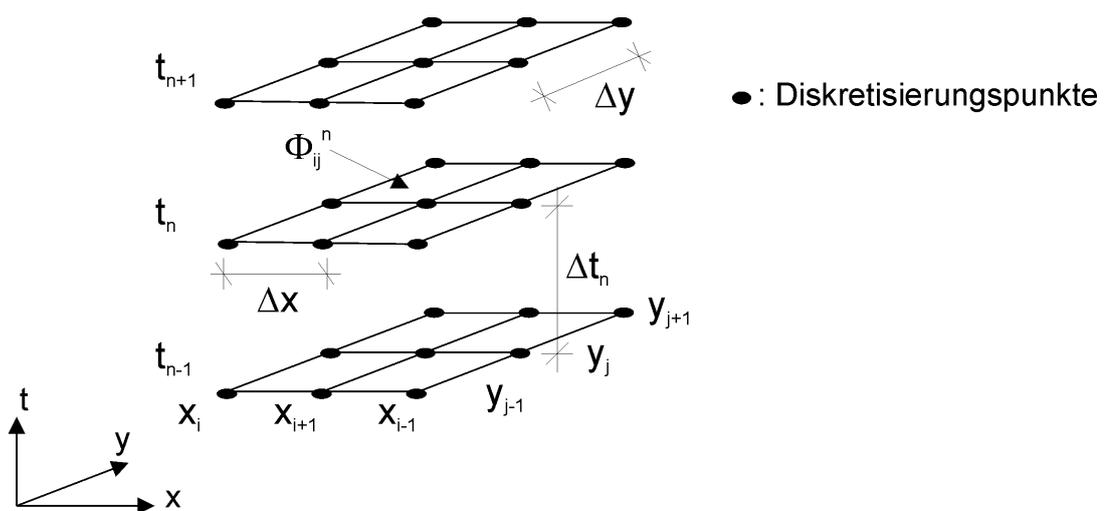
Das Ergebnis zeigt, dass der relative Fehler von MS gegenüber DW betragsmäßig überwiegend unter 10% liegt. Dabei wird für große *Wassertiefen* und wenig rauhen Sohlen die Geschwindigkeit nach MS über- und somit die Wassertiefe unterschätzt. Dasselbe gilt in einem größeren Maße für kleine Wassertiefen in Kombination mit sehr rauhen Sohlen.



### 3 Numerische Methoden

Die partiellen Differentialgleichungen in Kapitel 2 können im Allgemeinen nur numerisch gelöst werden bzw. sind nur für Sonderfälle analytisch lösbar. Das Prinzip von numerischen Verfahren ist dabei nicht, die Gleichungen für den gesamten Gültigkeitsbereich der Variablen zu lösen, sondern allein für definierte Stützstellen Näherungslösungen für die Variablen zu berechnen.

Da es sich hierbei um orts- und zeitabhängige Differentialgleichungen handelt, werden demnach im Wertebereich der Zeit Stützstellen im Abstand von  $\Delta t$  (zeitliche Diskretisierung) und im Wertebereich des Raumes Stützstellen in einem definierten Raumabstand (räumliche Diskretisierung) gesetzt, um die Gleichungen numerisch integrieren zu können. Dabei wird üblicherweise eine Ortsdiskretisierung vor der Zeitdiskretisierung durchgeführt (SCHÄFER [1999]).



**Abb. 3.1:** Zusammenhang zwischen einer räumlichen (2D) und zeitlichen Diskretisierung mit  $\Phi_{ij}^n$  als Funktionsvektor im diskretisierten Raumpunkt  $i, j$  zur diskretisierten Zeit  $t_n$  (äquidistante Diskretisierung)

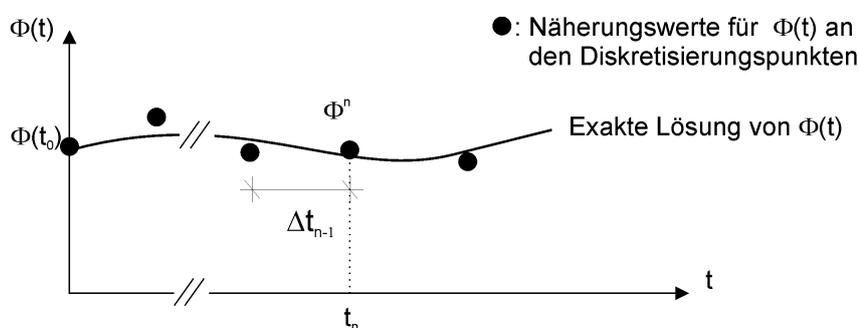
Hierzu existiert eine Vielzahl von numerischen Methoden, die nach ihren Einsatzmöglichkeiten für das gegebene Gleichungssystem mit seinen Eigenschaften und nach numerischen Kriterien (Stabilität, Konvergenz und Genauigkeit des Verfahrens sowie Rechenzeit) bewertet werden müssen. Durch die Diskretisierung werden die Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen überführt, auf die anschließend Gleichungslöser angewendet werden und somit Näherungslösungen für alle Variablen folgen.

### 3.1 Zeitliche Diskretisierung

Da sowohl das Gleichungssystem der Flachwassergleichungen sowie der Saint-Venant-Gleichungen instationäre Vorgänge beschreiben, ist jeweils eine zeitliche Diskretisierung erforderlich. Hierzu wird das zu betrachtende Zeitintervall  $[t_0, t_E]$  in einzelne Teilintervalle  $\Delta t^1$  zerlegt:

$$\underbrace{t_n = t_0 + n \cdot \Delta t}_{\text{äquidistant}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{t_n = t_{n-1} + \Delta t_{n-1}}_{\text{nicht - äquidistant}} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

Hierin sind  $t_n$  der aktuelle Zeitpunkt,  $t_0$  der Anfangszeitpunkt und  $\Delta t_{n-1}$  die Zeitschrittweite zwischen den Zeitpunkten  $n - 1$  und  $n$ . Es wird deutlich, dass die Zeit eine *Einbahnkoordinate* ist und die Lösung zur Zeit  $t_n$  nur von den davorliegenden Zeitpunkten  $t_{n-1}, t_{n-2}, \dots$  abhängt. Es ist also mindestens eine bereits bekannte Zeitebene notwendig (zum Anfangszeitpunkt  $t_0$  ist die Unbekannte  $\Phi$  in Form einer Anfangsbedingung bekannt), um die Zeitableitung zu diskretisieren.



**Abb. 3.2:** Prinzip der zeitlichen Diskretisierung nach FORKEL [2004]

<sup>1</sup>Die Zeitintervalle können äquidistant oder auch nicht-äquidistant sein.

Es wird demnach ein sogenanntes *Anfangswertproblem*<sup>2</sup> gelöst. Nun werden Rechenvorschriften gesucht, um den Lösungswert der Variablen  $\Phi$  sukzessive für die Zeitschritte  $t_1, t_2, t_3, \dots$  zu berechnen. Dabei erfolgt allein in den Stützstellen die direkte Berechnung einer Näherungslösung und im nächsten Schritt die Approximation der Zwischenzeiträume.

Benutzt man zur Beschreibung der aktuellen Zeitebene nur **eine** bekannte (vorherige) Zeitebene, spricht man von *Einschrittverfahren*. Werden mehrere bekannte Zeitebenen verwendet, ist die Rede von *Mehrschrittverfahren*. Eine weitere Klassifizierung der Methoden zur Zeitdiskretisierung erfolgt in *Explizite Verfahren* und *Implizite Verfahren*. Bei Expliziten Verfahren wird der Zustand der Unbekannten  $\Phi$  zum Zeitpunkt  $t_n$  nur von vorherigen bekannten Zeitebenen abgeleitet, während bei Impliziten Verfahren auch der Zustand zum aktuellen unbekanntem Zeitpunkt eine Rolle spielt.

Im Folgenden wird allein eine äquidistante Diskretisierung angenommen.

### 3.1.1 Einleitung

Durch die Diskretisierung der Differentialgleichungen in der Zeit werden die Differentialoperatoren der zeitlichen Ableitung durch Differenzenquotienten ersetzt und somit lösbar gemacht. Hinsichtlich der Approximation eines Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten existieren nun verschiedene Verfahren. Die gebräuchlichsten von ihnen werden im Folgenden näher vorgestellt. Hierzu betrachten wir eine zeitabhängige Differentialgleichung in der Form:

$$\frac{\partial \Phi^n}{\partial t} = \Omega(\Phi^n) \quad (3.2)$$

Hierin werden alle nicht zeitlichen Differentialoperatoren sowie Vorfaktoren in dem Operator  $\Omega(\Phi^n)$  zusammengefasst.

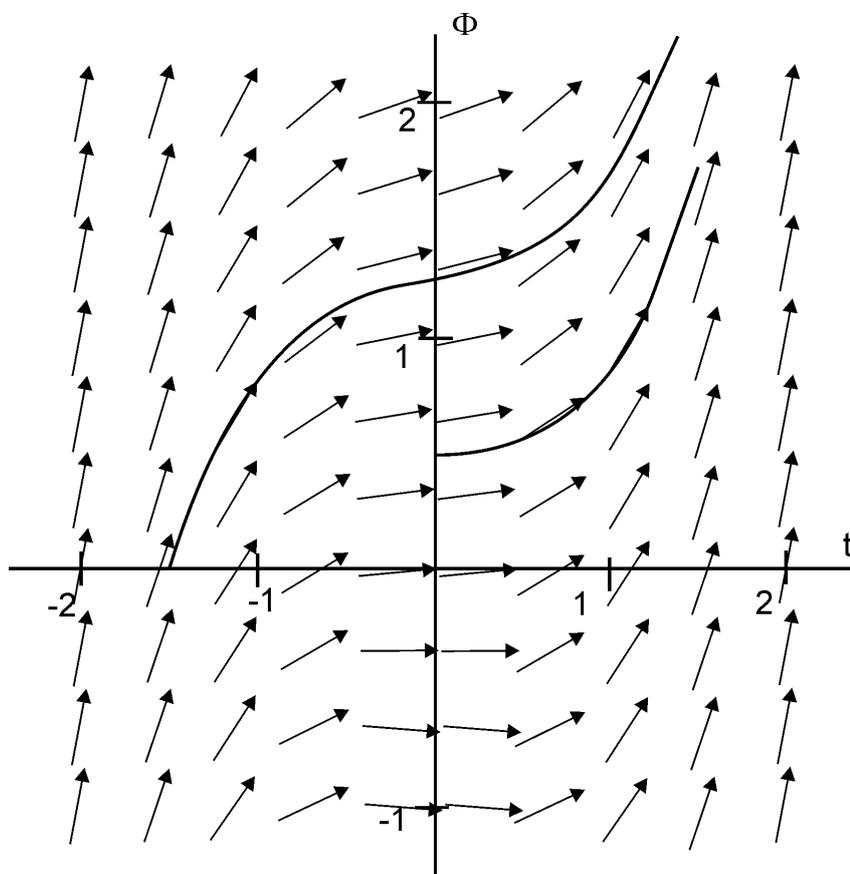
### Differentialgleichungen und ihre Lösungen

Differentialgleichungen und ihre Lösungen lassen sich mit Hilfe des **Richtungsfeldes**

---

<sup>2</sup>Als Anfangswertproblem oder auch *Cauchy-Problem* bezeichnet man in der Mathematik Problemstellungen, in denen aus vordefinierten Anfangsdaten  $\Phi(t_0)$  und der Differentialgleichung  $\Phi(t)$  selbst Funktionswerte für beliebige  $t$  berechnet werden sollen.

veranschaulichen. Hierzu betrachten wir die geometrische Interpretation der Differentialgleichung  $\Phi'(t) = \Omega(t, \Phi(t))$ , die einen Zusammenhang zwischen der Steigung ( $\Phi'$ ) zum Zeitpunkt  $t$  und dem Punkt  $(t, \Phi(t))$  beschreibt. Für die  $t, \Phi$ -Ebene bedeutet das, dass wenn der Graph einer Lösung  $\Phi$  durch den Punkt  $(t, y)$  läuft, er dort die Steigung  $\Phi'$  haben muss. Werden nun in der  $t, \Phi$ -Ebene in jedem Punkt Pfeile mit der Steigung  $\Omega(t, \Phi)$  eingezeichnet, so erhält man das Richtungsfeld der Differentialgleichung, in dem die Pfeile stets die Richtung der Lösungskurve in dem entsprechenden Punkt angeben (siehe Abbildung 3.3). Beginnend mit einer Anfangsbedingung, läuft die Lösung einer Differentialgleichung stets tangential zu den Richtungen im Richtungsfeld.



**Abb. 3.3:** Richtungsfeld für die Differentialgleichung  $\Phi'(t) = t^2 + 0,1 \cdot \Phi(t)$  und die Lösungskurven mit den Anfangsbedingungen  $\Phi(-1, 5) = 0$  und  $\Phi(0) = 0,5$  (nach KNORRENSCHILD [2003])

### Diskretisierung

Das Ziel der zeitlichen Diskretisierung ist nun, den zeitlichen Differentialoperator vor

der unbekanntenen Funktion  $\Phi = \Phi(t)$  durch einen Differenzenquotienten zu ersetzen. Die einfachste Form hierzu ist der *Vorwärtsdifferenzenquotient erster Ordnung*:

$$\Phi'(t_n) = \frac{\partial \Phi^n}{\partial t} = \lim_{t^{n+1} \rightarrow t^n} \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{t^{n+1} - t^n} \approx \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} \quad (3.3)$$

Dabei ist die Lösung der diskreten Gleichung nicht identisch mit der exakten Lösung der Differentialgleichung! Der Fehler sowie die Herleitung der obigen Approximation lässt sich durch eine **Taylorreihenentwicklung** herleiten:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial \Phi^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial^2 t} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi^n}{\partial^3 t} + \dots \quad (3.4)$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial \Phi^n}{\partial t} = \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} - \underbrace{\frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial^2 t} - \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 \Phi^n}{\partial^3 t} - \dots}_{\mathcal{O}(\Delta t^2)} \quad (3.5)$$

Darin beschreibt  $\mathcal{O}(\Delta t^i)$ <sup>3</sup> die Summe aller vernachlässigten Terme in der Taylorreihenentwicklung, beginnend mit dem Term, der den Vorfaktor  $\Delta t^i$  besitzt.

$$\mathcal{O}(\Delta t^1) = \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial^2 t} - \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 \Phi^n}{\partial^3 t} - \dots \quad (3.6)$$

### Konsistenz

Sei allgemein betrachtet  $\Phi(t_n + \Delta t)$  die exakte Lösung des Anfangswertproblems  $\Phi' = \Omega(\Phi)$  und  $\Phi^{n+1}$  der mit einem numerischen Verfahren der Schrittweite  $\Delta t$  berechnete

<sup>3</sup>Die Formulierung  $f(\Delta t) = \mathcal{O}(\Delta t^i)$  bedeutet im Allgemeinen, dass  $|f(\Delta t)|/\Delta t^i \rightarrow c$  für  $\Delta t \rightarrow 0$  (Landau-Symbol)

Näherungswert, so bezeichnet die Differenz beider Terme den **Diskretisierungsfehler** bzw. **lokalen Fehler**  $\varphi(t_n, \Delta t)$  für einen Zeitschritt.

$$\varphi(t_n, \Delta t) = \Phi(t_n + \Delta t) - \Phi^{n+1} \quad (3.7)$$

Strebt der Diskretisierungsfehler für  $\Delta t \rightarrow 0$  gegen Null, so gilt das gewählte Diskretisierungsverfahren als **konsistent**. Laut Definition hat ein Verfahren die **Konsistenzordnung**  $p \in \mathbb{N}$ , wenn es für genügend kleine  $\Delta t$  eine Konstante  $c \geq 0$  gibt, so dass für den lokalen Fehler

$$|\varphi(t_n, \Delta t)| \leq c \cdot \Delta t^{p+1} \quad (3.8)$$

gilt. Das bedeutet, dass man zu jedem Zeitpunkt eine Fehlerbeschränkung in Abhängigkeit der gewählten Schrittweite  $\Delta t$  hat.

Man bezeichnet auch Ausdrücke, die für genügend kleine Zeitschrittweiten durch  $c \cdot \Delta t^{p+1}$  beschränkt sind, als  $\mathcal{O}(\Delta t^p)$  bzw. als Fehler einer definierten Ordnung. Betrachtet man die Gleichung 3.5, so entspricht die Konsistenzordnung des Differenzenquotienten (Gleichung 3.3) der minimalen Potenz, mit dem die Zeitschrittweite im lokalen Verfahrensfehler auftaucht. Der Differenzenquotient hat somit die Konsistenz 1 bzw.  $\mathcal{O}(\Delta t^1)$ . Demnach ist die Konsistenz ein Fehlerbewertungsmechanismus und gibt an, wie eine Änderung der Zeitschrittweite auf die Genauigkeit eines Verfahrens wirkt. Für das vorliegende Differenzenverfahren bedeutet beispielsweise die Halbierung der Zeitschrittweite eine Reduktion der zeitabhängigen Anteile des Verfahrensfehlers um die Hälfte.

### 3.1.2 Explizite Einschrittverfahren

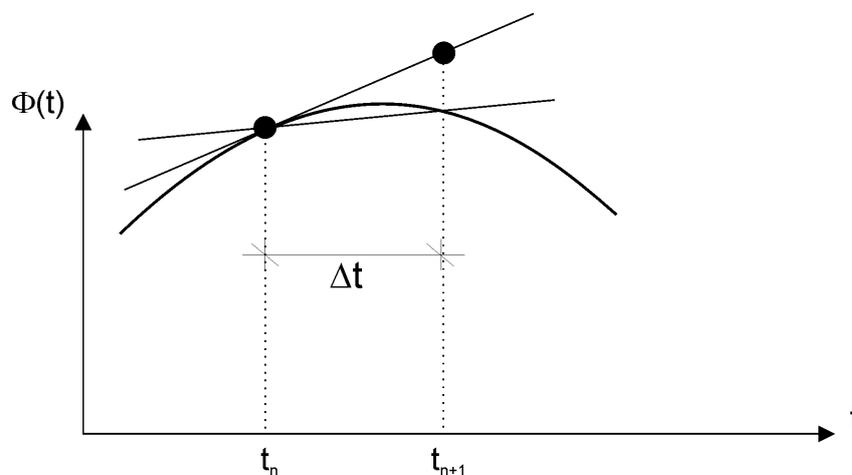
#### Explizites Euler-Verfahren

Ein einfaches Zeitdiskretisierungsverfahren ist das explizite Euler-Verfahren, das auch als *Eulersche Polygonzugmethode* oder *Forward-Euler Verfahren* bezeichnet wird. Dieses Verfahren erhält man durch eine Approximation des Differentialoperators zum Zeitpunkt

$t_n$  durch einen Differenzenoperator zwischen dem neuem Zeitpunkt  $t_{n+1}$  und dem alten Zeitpunkt  $t_n$ :

$$\frac{\partial \Phi(t_n)}{\partial t} \approx \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = \Omega(\Phi^n) \quad (3.9)$$

Dies entspricht einer Annäherung der Zeitableitung von  $\Phi$  zum Zeitschritt  $t_n$  mittels der Steigung der Geraden durch die Punkte  $\Phi^n$  und  $\Phi^{n+1}$ .



**Abb. 3.4:** Approximation des Differentialquotienten durch das Prinzip des expliziten Euler-Verfahrens

Gleichung 3.9 kann nun zum unbekanntem Zeitschritt  $t_{n+1}$  aufgelöst werden und der Vorteil dieses Verfahrens wird offensichtlich:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t \cdot \Omega(\Phi^n) \quad (3.10)$$

Die rechte Seite des Gleichungssystems (Gleichung 3.10) beinhaltet allein Werte aus der bekannten Zeitebene  $t_n$ , so dass die Werte für die neue Zeitebene  $t_{n+1}$  direkt berechnet werden können. Durch die entkoppelten Zeitebenen benötigt dieses Verfahren einen relativ **geringen Rechenaufwand** pro Zeitschritt. Das Verfahren besitzt einen Abbruchfehler 1. Ordnung (Konsistenzordnung) und hat zudem Probleme in der Stabilität, da sich die Diskretisierungsfehler mit jedem Zeitschritt fortpflanzen können.

### Runge-Kutta-Verfahren

Weitere explizite Einschrittverfahren sind u.a. die Gruppe der expliziten Runge-Kutta-Verfahren, die sich für eine beliebige Ordnung definieren lassen. Die Idee der Runge-Kutta-Methoden liegt darin, den Näherungswert von  $\Phi^{n+1}$  nicht alleine durch die Steigung  $\Omega$  im Punkt  $\Phi^n$  zu berechnen. Statt dessen werden nach einer Strategie mehrere Punkte im Intervall  $\Phi^n$  und  $\Phi^{n+1}$  gewählt, in denen die Steigungswerte ausgewertet und mit denen ein Näherungswert für  $\Phi^{n+1}$  berechnet werden. Als Beispiel sei das *klassische Runge-Kutta-Verfahren* erwähnt, das ein Verfahren 4. Ordnung ist (Herleitung siehe MALCHEREK [2006]):

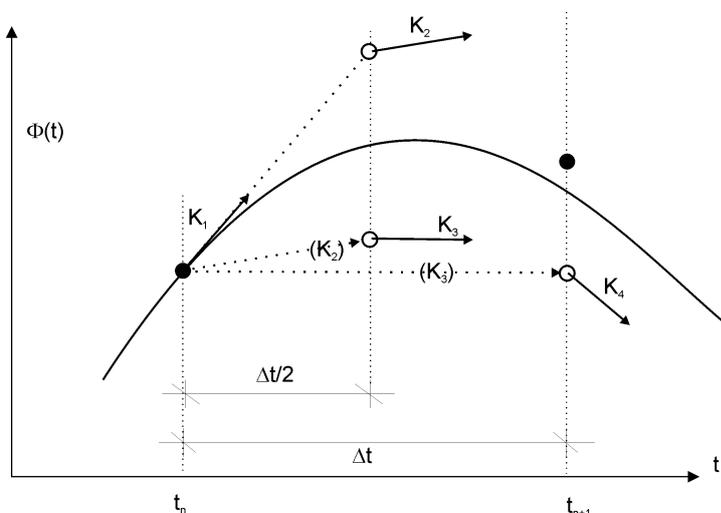
$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad \text{bzw.} \quad (3.11)$$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (3.12)$$

mit:

$$\begin{aligned} K_1 &= \Omega(\Phi^n) \\ K_2 &= \Omega\left(\Phi^n + \frac{\Delta t}{2} K_1\right) \\ K_3 &= \Omega\left(\Phi^n + \frac{\Delta t}{2} K_2\right) \\ K_4 &= \Omega\left(\Phi^n + \Delta t \cdot K_3\right) \end{aligned}$$

Das Verfahren besitzt die Konsistenzordnung  $p = 4$ .



**Abb. 3.5:** Prinzip des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens mit den Richtungsfeldern in den Stützpunkten

Die Steigungen  $K_2$  und  $K_3$  in Abbildung 3.5 zum selben Zeitpunkt  $t_n + \Delta t/2$  können unterschiedlich sein, weil die Gradienten im zweidimensionalen Vektorfeld zu einem festen Zeitpunkt nicht zwangsläufig konstant sind (siehe Abbildung 3.3 für  $t=0$ ). Auf die Erläuterung von weiteren expliziten Einschrittverfahren wie beispielsweise das *modifizierte explizite Eulerverfahren* (bekannt auch als Mittelpunktsregel) oder das *Verfahren von Heun* wird in diesem Rahmen verzichtet. Der interessierte Leser sei beispielsweise auf KNORRENSCHILD [2003] oder HANKE-BOURGEAIS [2006] verwiesen.

### 3.1.3 Explizite Mehrschrittverfahren

Wie bereits erwähnt, werden bei Mehrschrittverfahren neben dem letzten Zeitschritt auch beliebig viele davor liegende Zeitschritte zur Approximation herangezogen. Die Berechnung wird aber immer als Einschrittverfahren gestartet, weil als Anfangsbedingung nur ein Zeitschritt bekannt ist.

#### Leap-Frog-Verfahren

Ein einfaches Mehrschrittverfahren, das zwei bekannte Zeitebenen zur Berechnung des Zustandes auf der aktuellen Zeitebene erfordert, ist das Leap-Frog-Verfahren. Anders als beispielsweise beim expliziten Eulerverfahren, ersetzt man hier nicht die Ableitung durch einen Vorwärtsdifferenzenquotienten, sondern definiert den Differenzenquotienten symmetrisch.

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^{n-1}}{2\Delta t} = \Omega(\Phi^n) \quad \text{bzw.} \quad (3.13)$$

$$\Phi^{n+1} = 2\Delta t \cdot \Omega(\Phi^n) + \Phi^{n-1} \quad (3.14)$$

Dies lässt sich durch eine Taylorreihenentwicklung für  $\Phi^{n+1}$  und  $\Phi^{n-1}$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial \Phi^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial^2 t} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi^n}{\partial^3 t} + \dots \quad (3.15)$$

$$\Phi^{n-1} = \Phi^n - \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial \Phi^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial^2 t} - \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 \Phi^n}{\partial^3 t} + \dots \quad (3.16)$$

herleiten, indem die Gleichungen 3.15 und 3.16 (Ableitungsterme größer zweiten Grades werden in  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  zusammengefasst) nach den ersten Ableitungstermen aufgelöst

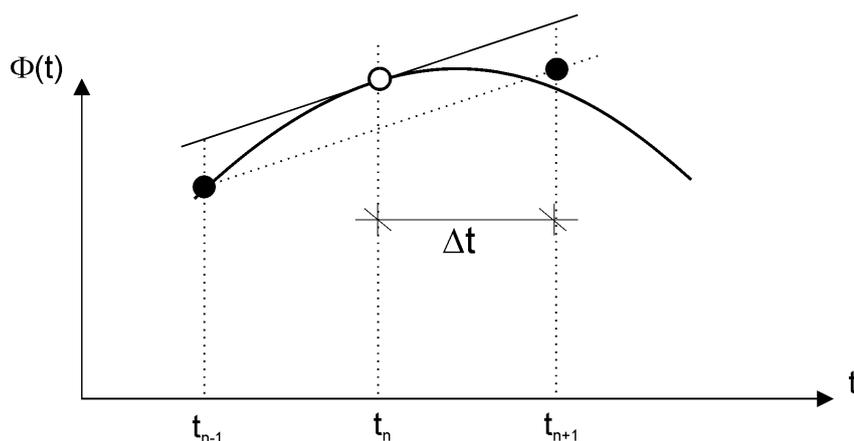
$$\frac{\partial \Phi^n}{\partial t} = \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \Phi^n}{\partial t} = \frac{\Phi^n - \Phi^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 \Phi^n}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.18)$$

und die Gleichungen 3.17 und 3.18 addiert werden:

$$\frac{\partial \Phi^n}{\partial t} = \Omega(\Phi^n) = \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.19)$$

Das Leap-Frog-Verfahren hat die Konsistenzordnung 2 und ist im Gegensatz zum Euler- und Runge-Kutta-Verfahren zeitumkehr-invariant. Wenn also von einem Zeitschritt  $t_n$  aus der Wert zum folgenden Zeitschritt  $t_{n+1}$  berechnet wird und anschließend durch umgedrehte Zeitrichtung ( $\Delta t \rightarrow -\Delta t$ ) der Ausgangszustand erneut berechnet werden würde, so ist dieser berechnete Wert identisch mit dem Ausgangswert.



**Abb. 3.6:** Approximation des Differentialquotienten durch das Leap-Frog-Verfahren

### Adams-Bashforth-Verfahren

Eine weitere Klasse expliziter Mehrschrittverfahren sind die Adams-Bashforth-Verfahren,

die sich durch Polynominterpolation für beliebige Ordnungen ableiten lassen (die Herleitung kann in SCHWARZ [1997] nachgeschlagen werden). In der Regel werden die Verfahren bis zur Ordnung 4 angewandt, wobei das Verfahren 1. Ordnung dem expliziten Euler Verfahren entspricht und somit ein Einschrittverfahren ist.

**Tab. 3.1:** Die Adams-Bashforth-Verfahren bis zur 4. Ordnung

Formel	Ordnung
$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t \cdot \Omega(\Phi^n)$	1
$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{2} [3\Omega(\Phi^n) - \Omega(\Phi^{n-1})]$	2
$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{12} [23\Omega(\Phi^n) - 16\Omega(\Phi^{n-1}) + 5\Omega(\Phi^{n-2})]$	3
$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{24} [55\Omega(\Phi^n) - 59\Omega(\Phi^{n-1}) + 37\Omega(\Phi^{n-2}) - 9\Omega(\Phi^{n-3})]$	4

### 3.1.4 Implizite Einschrittverfahren

#### Implizites Euler-Verfahren

Wird die Zeitableitung von  $\Phi^{n+1}$  durch einen Rückwärtsdifferenzenoperator angenähert, so erhält man das implizite Eulerverfahren (auch als **Backward-Euler-Verfahren** bezeichnet),

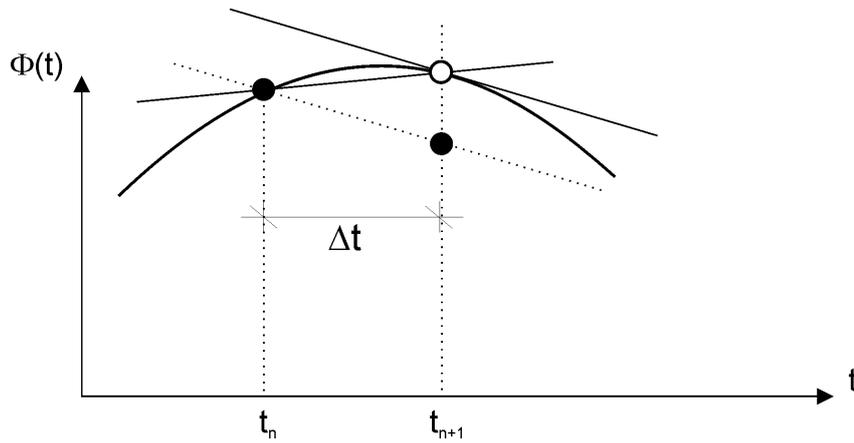
$$\frac{\partial \Phi(t_n)}{\partial t} \approx \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = \Omega(\Phi^{n+1}) \quad \text{bzw.} \quad (3.20)$$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t \cdot \Omega(\Phi^{n+1}) \quad (3.21)$$

das ebenfalls durch eine Taylorreihenentwicklung hergeleitet werden kann (siehe Gleichung 3.18) und die Konsistenzordnung 1 besitzt. Im Gegensatz zu den expliziten Verfahren, kann hier die Variable der neuen Zeitebene nicht mehr isoliert werden, weil sie auf beiden Seiten des Gleichungssystems auftaucht. Daher ist eine iterative Lösung des Gleichungssystems erforderlich, das einen **erhöhten Rechenaufwand** mit sich bringt. Der Vorteil impliziter Verfahren gegenüber den expliziten Verfahren liegt in der Stabilität der numerischen Lösung, wodurch keine stabilitätsbedingte Begrenzung für die Zeitschrittweite vorliegt. Dadurch sind die impliziten Verfahren in den meisten Fällen wesentlich effizienter (SCHÄFER [1999]).

#### Crank-Nicolson-Verfahren

Ein in der Praxis häufig verwendetes implizites Einschrittverfahren ist das Crank-



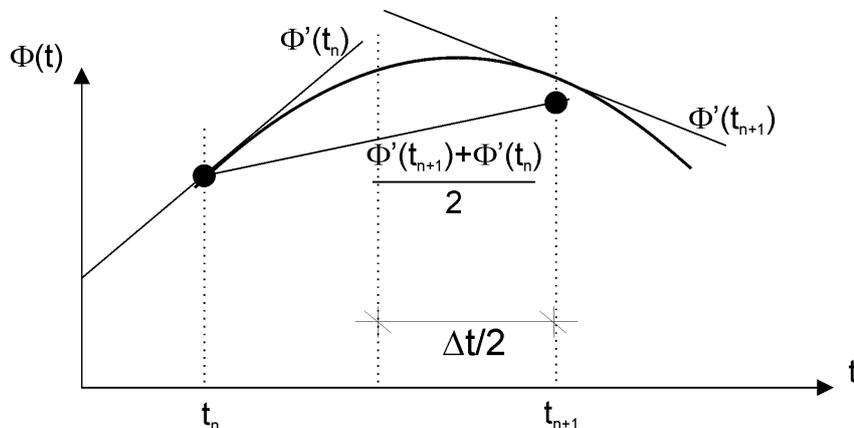
**Abb. 3.7:** Approximation des Differentialquotienten durch das Prinzip des impliziten Euler-Verfahrens

Nicolson-Verfahren, das einer Zentralfdifferenzenapproximation der Zeitableitung zwischen zwei Zeitpunkten entspricht. Das Prinzip des Verfahrens ist, dass die Zeitableitung der Unbekannten im Mittelpunkt zweier benachbarter Zeitpunkte ( $t_{n+1/2}$ ), durch eine Mittelung der Zeitableitung in den Zeitpunkten selbst ( $t_n$  und  $t_{n+1}$ ) approximiert wird.

$$\frac{\partial \Phi(t_{n+1/2})}{\partial t} \approx \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [\Omega(\Phi^{n+1}) + \Omega(\Phi^n)] \quad \text{bzw.} \quad (3.22)$$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{2} [\Omega(\Phi^{n+1}) + \Omega(\Phi^n)] \quad (3.23)$$

Das Verfahren wird auch als **Trapezregel** bezeichnet.



**Abb. 3.8:** Approximation des Differentialquotienten durch das Crank-Nicolson-Verfahren

Durch die Einführung eines Steuerparameters  $\Theta$  lässt sich das Verfahren erweitern, so dass das explizite und implizite Euler-Verfahren sowie das Crank-Nicolson-Verfahren in einer Gleichung zusammengefasst werden können:

$$\frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t} = \Theta \cdot \Omega(\Phi^{n+1}) + (1 - \Theta) \cdot \Omega(\Phi^n) \quad (3.24)$$

Dieses Verfahren wird in der Literatur auch als  $\Theta$ -Verfahren bezeichnet ( $\Theta \in [0, 1]$ ), woraus sich für  $\Theta = 0,5$  das Crank-Nicolson-Verfahren, für  $\Theta = 0$  das explizite Euler-Verfahren und für  $\Theta = 1$  das implizite Eulerverfahren ergibt. Auch alle anderen  $\Theta$ -Werte, die auch als **semiimplizite Verfahren** bezeichnet werden, liefern sinnvolle Zeitdiskretisierungen. Dabei hat das Crank-Nicolson-Verfahren die Konsistenzordnung 2, während alle anderen  $\Theta$ -Werte die Konsistenzordnung 1 zur Folge haben. Es sei erwähnt, dass das Crank-Nicolson-Verfahren das genaueste Verfahren 2. Ordnung ist (SCHÄFER [1999]). Eine Herleitung dieses Verfahrens kann dem Anhang A.6 entnommen werden.

### 3.1.5 Implizite Mehrschrittverfahren

#### BDF-Verfahren

Die Klasse der Rückwärtsdifferenzierungsverfahren wird auch als BDF-Verfahren (**B**ackward **D**ifferentiation **F**ormula) bezeichnet. Diese lassen sich für eine beliebige Ordnung durch die Approximation der Zeitableitung bei  $t_{n+1}$  mit Rückwärtsdifferenzenformeln, unter Verwendung einer entsprechenden Anzahl vorheriger Zeitebenen, ableiten. Eine Herleitung ist beispielsweise in SIMEON [2003] zu finden. Die BDF-Verfahren sind bis zur 4. Ordnung in der kommenden Tabelle aufgelistet. Dabei entspricht das BDF-Verfahren der Ordnung 1 dem impliziten Euler-Verfahren.

**Tab. 3.2:** Die BDF-Verfahren bis zur 4. Ordnung

Formel	Ordnung
$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t \cdot \Omega(\Phi^{n+1})$	1
$\Phi^{n+1} = \frac{4}{3}\Phi^n - \frac{1}{3}\Phi^{n-1} + \frac{2\Delta t}{3}\Omega(\Phi^{n+1})$	2
$\Phi^{n+1} = \frac{18}{11}\Phi^n - \frac{9}{11}\Phi^{n-1} + \frac{2}{11}\Phi^{n-2} + \frac{6\Delta t}{11}\Omega(\Phi^{n+1})$	3
$\Phi^{n+1} = \frac{48}{25}\Phi^n - \frac{36}{25}\Phi^{n-1} + \frac{16}{25}\Phi^{n-2} - \frac{3}{25}\Phi^{n-3} + \frac{2\Delta t}{25}\Omega(\Phi^{n+1})$	4

Es ist anzumerken, dass sich ab der 3. Ordnung die Stabilitätseigenschaften der Verfahren verschlechtern und die Anwendung von Verfahren höherer Ordnung als 4 nicht empfohlen wird (SCHÄFER [1999]).

### Adams-Moulton-Verfahren

Die Klasse der Adams-Moulton-Verfahren ist das implizite Pendant zu der Klasse der expliziten Adams-Bashforth-Verfahren. Diese Verfahren besitzen nicht die nachteilige Eigenschaft der Adams-Bashforth-Verfahren, bei deren Ableitung ein Interpolationspolynom in einem definierten Intervall verwendet wird, obwohl die Interpolationspunkte außerhalb des Intervalls liegen (ZEMKE [2005]). Die Verfahren sind bis zur 4. Ordnung in der Tabelle 3.3 aufgestellt. Eine Herleitung ist beispielsweise in SCHWARZ [1997] zu finden.

Während das BDF- sowie das Adams-Moulton-Verfahren 1. Ordnung identisch sind (implizites Euler-Verfahren), unterscheiden sie sich für Verfahren höherer Ordnung. Dabei entspricht das Adams-Moulton-Verfahren 2. Ordnung dem Crank-Nicolson-Verfahren. Während das BDF-Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung ein Interpolationspolynom durch mehrere approximierten Lösungen legt, um die Lösung für den nächsten Zeitschritt zu ermitteln, wird bei dem Adams-Moulton-Verfahren lediglich der Term der zeitlichen Ableitung durch ein Interpolationspolynom approximiert.

**Tab. 3.3:** Die Adams-Moulton-Verfahren bis zur 4. Ordnung

Formel	Ordnung
$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta t \cdot \Omega(\Phi^{n+1})$	1
$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{2} [\Omega(\Phi^{n+1}) + \Omega(\Phi^n)]$	2
$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{12} [5\Omega(\Phi^{n+1}) + 8\Omega(\Phi^n) - \Omega(\Phi^{n-1})]$	3
$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \frac{\Delta t}{24} [9\Omega(\Phi^{n+1}) + 19\Omega(\Phi^n) - 5\Omega(\Phi^{n-1}) + \Omega(\Phi^{n-2})]$	4

In der Praxis werden auch Adams-Moulton-Verfahren in Kombination mit Adams-Bashforth-Verfahren als sogenannte **Prediktor-Korrektor-Verfahren** benutzt. Mit dem expliziten Prediktor-Verfahren wird ein guter Startwert für das implizite Korrektor-Verfahren bestimmt.

## 3.2 Räumliche Diskretisierung

Die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Verfahren zur Zeitdiskretisierung beruhen grundsätzlich auf dem Prinzip der **Finite Differenzen Methode (FDM)**: Durch

die Diskretisierung wird die Variable  $t$  in eine endliche (*finite*) Zahl von Gitterpunkten zerlegt und die Differentialoperatoren durch Differenzenquotienten ersetzt. Neben der Variablen Zeit müssen auch die Ortsvariablen diskretisiert werden. Zur Raumdiskretisierung existiert jedoch eine Vielzahl von Verfahren, die auf unterschiedliche Prinzipien beruhen. Die bekanntesten und somit am häufigsten verwendeten Ansätze sind die **Finite Differenzen Methode**, **Finite Volumen Methode (FVM)** und **Finite Elemente Methode (FEM)**. Dieses Kapitel soll einen zusammenfassenden Überblick über diese Verfahren geben. Der interessierte Leser sei überdies hinaus auf beispielsweise FORKEL [2004], VERSTEEG & MALALASEKERA [1995], DVWK [1999] und SCHÄFER [1999] verwiesen. Zur Beschreibung dieser drei Diskretisierungsmethoden wird die eindimensionale **Poisson-Gleichung**<sup>4</sup> herangezogen:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = f \quad (3.25)$$

Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung geht die FDM von einer Differentialform, die FVM von der Integralform und die FEM von der schwachen Integralform der Gleichung aus.

### 3.2.1 Finite Differenzen Methode

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, geht die FDM von der Differentialform der zu lösenden Differentialgleichung (DGL) aus, um daraus eine Differenzenform zu erhalten. Hierzu wird zunächst das Modellgebiet in Abschnitte unterteilt, die im eindimensionalen Fall einer Achsenunterteilung in Teilabschnitte entsprechen, während im zweidimensionalen Raum das Gebiet durch rechtwinklige Gitter bzw. Zellen unterteilt wird. Auf diesen Abschnittsgrenzen wird im Anschluss die Lösung der DGL berechnet bzw. approximiert. Die Grundlage für die Überführung der Differentialform in die Differenzenform ist die Taylorreihenentwicklung (vgl. Gleichungen 3.15 und 3.16). Erfolgt

---

<sup>4</sup>Die Poisson-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und beschreibt neben der stationären Sickerströmung auch die stationäre Wärmeleitung sowie das elektrische Feld in einem Kondensator:

$$\Delta \Phi = \nabla^2 \Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = f$$

unter Annahme einer äquidistanten Achsenunterteilung für Gleichung 3.25 eine Taylorreihenentwicklung für  $\Phi$  in den Diskretisierungspunkten  $i - 1$  und  $i + 1$  bis zum zweiten Term

$$\Phi_{i-1} = \Phi_i - \Delta x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_i - \dots \quad (3.26)$$

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \Delta x \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_i + \dots \quad (3.27)$$

und werden diese Gleichungen miteinander addiert, so ergibt sich die Differenzenform:

$$f_i = \left( \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (3.28)$$

Wird diese Funktion in jedem Diskretisierungspunkt formuliert, folgt die Matrixgleichung:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Unter Vorgabe von Randbedingungen kann nun dieses lineare Gleichungssystem durch Standardgleichungslöser aufgelöst werden (KNORRENSCHILD [2003]).

Die FDM sind in Verbindung mit regulären Gittern vergleichsweise sehr schnell. Ihr Nachteil liegt in den strukturierten Gittern, wodurch ein kompliziertes Gebiet nur schwer mit ausreichender Genauigkeit diskretisiert werden kann.

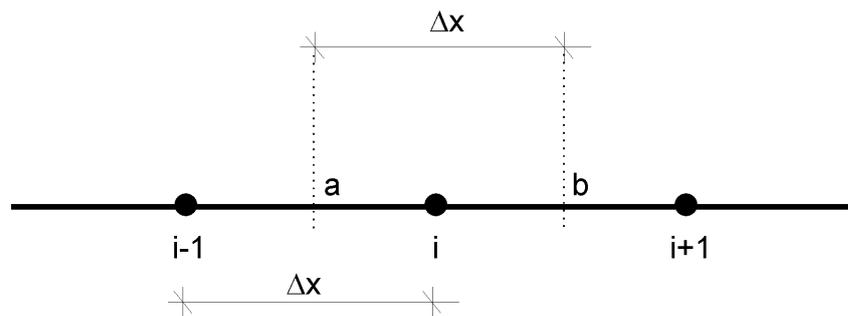
### 3.2.2 Finite Volumen Methode

Im Gegensatz zur FDM Methode, bei der die Lösung der DGL in den Diskretisierungspunkten approximiert wird, werden bei der FVM Kontrollvolumina um die Knoten (Diskretisierungspunkte) gebildet, in denen eine Bilanzierung aller Flüsse erfolgt. Somit werden nicht die eigentlichen Unbekannten betrachtet, sondern einzelne Kontrollvolumen, in denen explizit ein Gleichgewicht von ein- und ausströmender Masse und Impuls gefordert wird. Dabei ist die Bilanzierung unabhängig von der Form des Kontrollvolumens, wodurch die FVM sowohl bei strukturierten als auch bei unstrukturierten Gittern Anwendung finden kann und daher eine größere Flexibilität besitzt als die FDM.

Um die FVM auf Gleichung 3.25 anwenden zu können, schreiben wir sie in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = f \quad (3.30)$$

Wird auch hier ein äquidistanter Abstand zwischen den Diskretisierungspunkten angenommen, so ergibt sich die Integralform dieser Gleichung durch Integration über ein Kontrollvolumen der Länge  $\Delta x$  und einer Ausdehnung von  $a$  nach  $b$  (siehe Abbildung 3.9).



**Abb. 3.9:** Finite Volumen Diskretisierung

Die Integralform von Gleichung 3.25 folgt zu:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_a^b = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_b - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_a = \int_a^b f dx \quad (3.31)$$

Die aus der Integration entstandene DGL kann nun beispielsweise für einfache Geometrien durch FDM gelöst werden. Daher wird die FVM auch als Integrierte FDM bezeichnet.

$$\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x} - \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x} = \bar{f}_i \Delta x \quad (3.32)$$

### 3.2.3 Finite Elemente Methode

Im Gegensatz zu den FDM und FVM, bei denen durch Differenzenbetrachtung zwischen benachbarten Punkten Ergebnisse punktuell ermittelt werden, wird bei der FEM eine Näherungsfunktion gesucht, die die Unbekannte im gesamten Lösungsraum approximiert. Da diese Näherungsfunktion für das gesamte komplexe Strömungsgebiet schwer zu finden ist, erfolgt auch hier eine Diskretisierung des Gesamtgebiets in nicht überlappende Teilgebiete bzw. *finite Elemente*, die im zweidimensionalen Raum aus unregelmäßigen Drei- und Vierecken sowie krummlinigen Elementen bestehen kann. Dadurch ist wiederum eine größere Flexibilität in der Gittergenerierung gegeben, da beispielsweise ein heterogener zweidimensionaler Raum vergleichsweise sehr gut diskretisiert werden kann. Bei Annahme einer gleichen Diskretisierung wie bei den vorangegangenen Diskretisierungsverfahren (FDM und FVM), ist zur Lösung von Gleichung 3.25 dieselbige in die schwache Integralform zu überführen. Dies geschieht meist durch das Verfahren der gewichteten Residuen (siehe FORKEL [2004]), das auf die Ausgangsgleichung angewendet wird. Dabei wird die gesuchte Funktion durch eine endliche Reihe approximiert und ein Restfehler bzw. ein sogenanntes *Residuum*  $R$  bleibt übrig. Werden nun alle Knoten ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) bzw. die Ausgangsgleichung durch eine Wichtungsfunktion erweitert, so verlangt die Methode der gewichteten Residuen, dass der Restfehler nach einer Integration über jedes Teilgebiet zu Null wird:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} W \left( \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - f \right) dx = 0 \quad (3.33)$$

Der bekannteste Ansatz zur Wahl der Wichtungsfunktion ist das *Standard Galerkin Verfahren*. Alternativ seien beispielsweise die Kollokationsmethode und die Methode der

kleinsten Quadrate erwähnt.

Des Weiteren wird in jedem Element  $e$  angenommen, dass die Änderung einer Variablen über das Raumelement mit jeweils einer Polynomfunktion angenähert werden kann. Im einfachsten Fall erfolgt dies durch einen linearen Ansatz, wonach für die Variable  $\Phi$  gilt:

$$\Phi = a_1 + a_2x \quad (3.34)$$

Wird wie im vorliegenden Beispiel das eindimensionale Element auf dem Einheitsintervall  $[0,1]$  betrachtet, können die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  durch eine Punktprobe an den Enden des Intervalls ( $\Phi(0) = \Phi_1$ ,  $\Phi(1) = \Phi_2$ ) berechnet werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi^e} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_K \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_a \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_a = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{K^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi^e} \quad (3.35)$$

Wird Gleichung 3.35 in Gleichung 3.34 eingesetzt, folgt für  $\Phi$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} K^{-1} \Phi^e \quad (3.36)$$

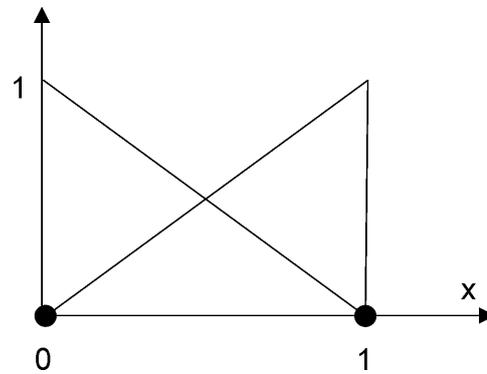
Darin wird

$$N_i = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} K^{-1} \quad (3.37)$$

als Ansatzfunktion bezeichnet, die am lokalen Knoten 1 sein muss und an allen übrigen Knoten des Elements verschwindet. Wird Gleichung 3.36 weiter aufgelöst, so ergibt sich für die Variable  $\Phi$

$$\Phi(x) = \Phi_1 N_1 + \Phi_2 N_2 = \Phi_1 (1 - x) + \Phi_2 x, \quad (3.38)$$

die somit definitionsgemäß die Summe aus den Knotenwerten an den Elementknoten multipliziert mit der entsprechenden Ansatzfunktion (vgl. Abbildung 3.10) ist.



**Abb. 3.10:** Knotenvariable und lokale Formfunktion für einen linearen Ansatz im eindimensionalen Element

## 4 Modellgebiet

### 4.1 Der Obere Main

Das Flusseinzugsgebiet des Oberen Main liegt im Norden Bayerns und grenzt südlich an die Regnitz, südöstlich an die Naab, nordöstlich an das Flussgebiet der Elbe und im westlichen Norden an die Weser. Die Einzugsgebietsfläche beträgt an der Mündung zu Pegel Kemmern rund  $4420 \text{ km}^2$  mit einer Ausdehnung in der Nord-Süd-Richtung von 70 km und in der Ost-West-Richtung von 90 km.



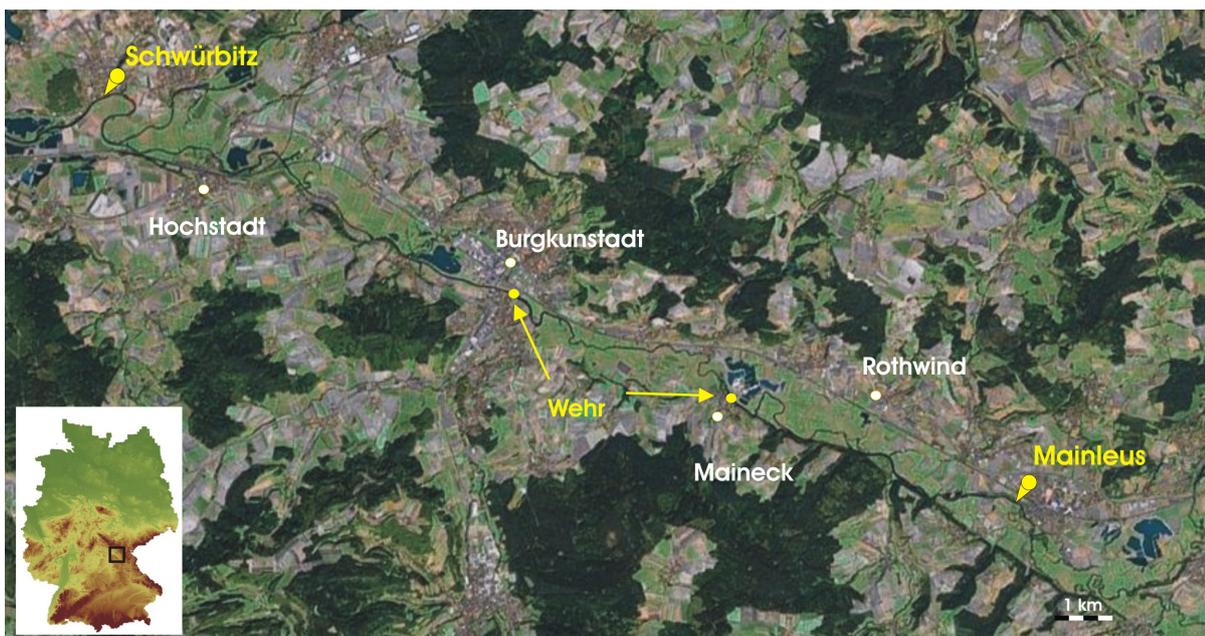
Abb. 4.1: Das Einzugsgebiet des Oberen Mains (Deutsches Gewässerkundliches Jahrbuch)

Das Gebiet liegt zu ca. 75 % auf einer Höhe von 200 - 500 m ü. NN, während der überwiegend restliche Teil sich über das Mittelgebirge erstreckt und zwischen 500 - 850 m ü. NN liegt. Der höchste Punkt liegt mit 1040 m ü. NN im Fichtelgebirge. Mit etwa 5 % gilt das Gebiet als dünn besiedelt. Während die landwirtschaftliche Nutzung mit 50 % überwiegt, sind gut 30 % des Einzugsgebietes Waldflächen (vgl. Abbildung B.1 in Anhang B). Die überwiegend anzutreffenden Bodenarten sind eine Mischung aus Lehm, Ton und Sand (siehe Abbildung B.2 in Anhang B). Der mittlere jährliche Niederschlag liegt zwischen 700 mm in den nordwestlichen und 1500 mm in den östlichen Gebietsteilen (BARTH ET AL. [2004]).

Am Pegel Kemmern ( $A_E = 4251 \text{ km}^2$ ), nahe des Gebietsauslasses, weist der Main einen mittleren Abfluss von  $MQ = 43,7 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  und einen mittleren Höchstabfluss von  $MHQ = 355 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  auf. Für den Zeitraum 1931 bis 2003 wurde im Jahr 1967 der höchste beobachtete Abfluss von  $HHQ = 1000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  erreicht (25.12.1967).

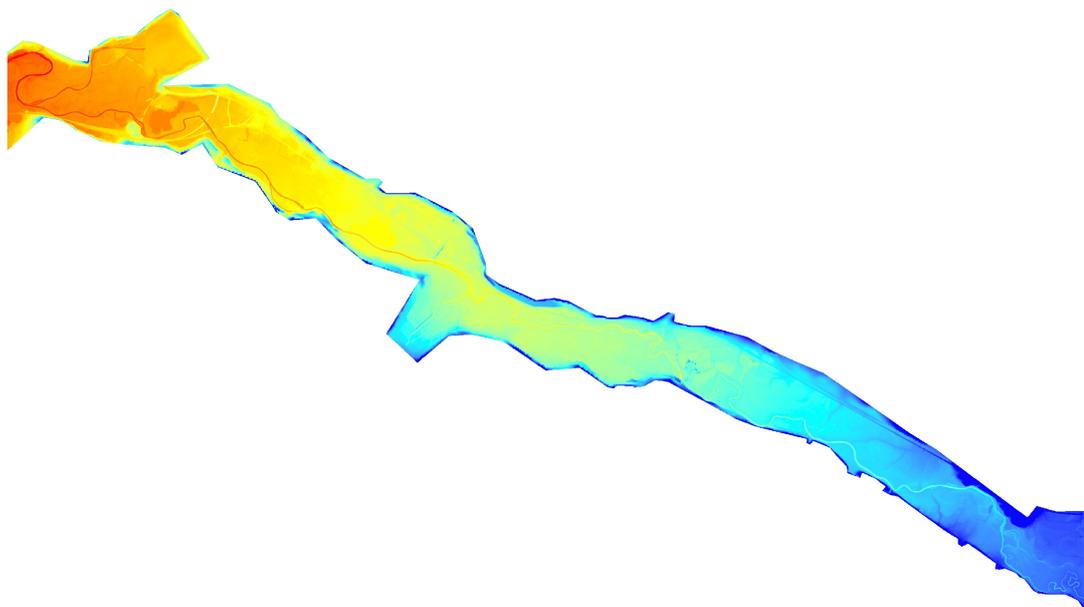
## 4.2 Der Modellabschnitt am Oberen Main

Als Modellgebiet dient in dieser Arbeit der Flussabschnitt zwischen Flusskilometer (FKM) 465,5 (Zusammenfluss von Roter Main und Weisser Main) und FKM 437,4.



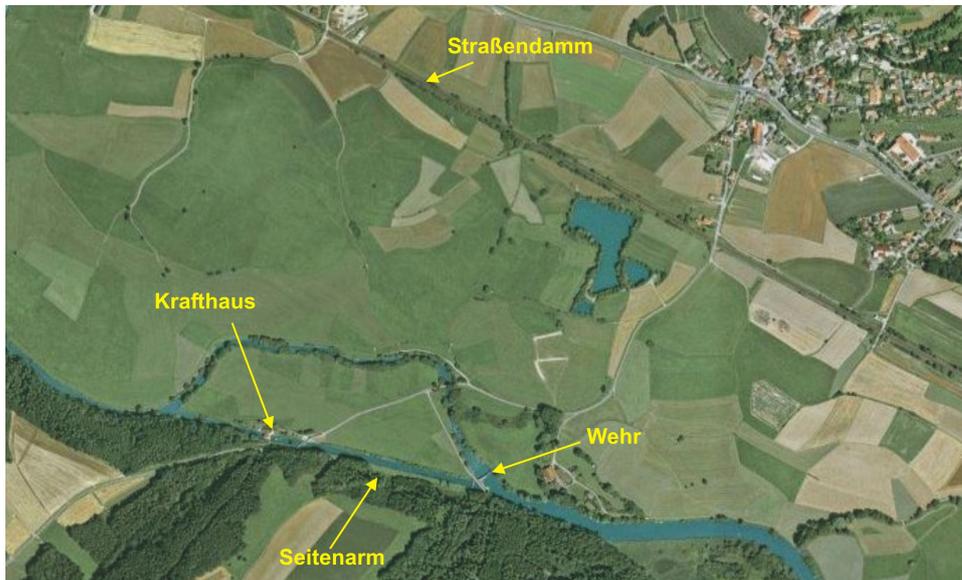
**Abb. 4.2:** Modellgebiet (Google Earth), gekennzeichnet sind die Wehre, bei denen infolge von Bruchkanten oder Einengungen der Abfluss überwiegend über das Wehr erfolgt

Innerhalb dieser 28 Flusskilometer befinden sich die beiden Pegel Mainleus ( $A_E = 1169 \text{ km}^2$ , FKM 461,1, PNP 284,56 m ü. NN) und Schwürbitz ( $A_E = 2419 \text{ km}^2$ , FKM 438,3, PNP 263,5 m ü. NN), so dass Daten von dem Pegel Mainleus für die obere Zuflussrandbedingung und Daten des Pegels Schwürbitz für die untere Randbedingung herangezogen werden können. Am Pegel Mainleus beträgt der mittlere Abfluss  $MQ = 14,1$  und der mittlere Höchstabfluss  $MHQ = 150 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ . Am 26.01.1995 wurde der höchste, im Zeitraum 1931 bis 2003 beobachtete, Abfluss  $HHQ = 357 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  (bei einem Wasserstand von 4,42 m) erreicht. Am Pegel Schwürbitz liegt der mittlere Abfluss bei  $MQ = 29,7$  und der mittlere Höchstabfluss bei  $MHQ = 303 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ . Hier wurde der höchste bisher beobachtete Abfluss von  $HHQ = 764 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  (bei einem Wasserstand von 5,73 m) am 24.12.1967 verzeichnet. Der betrachtete Flussabschnitt hat zwei seitliche Zuflüsse. Zum einen mündet vom Süden die Weissmain Krassach ( $HQ_{100} = 20 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ , FKM 448,8) und vom Norden die Rodach ( $HQ_{100} = 470 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ , FKM 440) in den Main. Die Einzugsgebietsgrößen der Zuflüsse können dem Flächenlängsschnitt in Abbildung B.3 (Anhang B) entnommen werden. Das mittlere Gefälle beträgt 1 ‰. Die Querprofilbreite (Uferbreite) liegt zwischen 18 m im Kopfgebiet und 26 m am unteren Gebietsrand. Mit einer mittleren Tal-Breite von gut 800 m besitzt das Gebiet relativ große Überschwemmungsflächen. Da das Tal eingedeicht und quer zur Fließrichtung relativ flach verläuft, ist im Hochwasserfall von einer schnellen Benetzung der Vorländer auszugehen. Der Hochwasserabfluss findet somit in der eingedeichten Fläche statt, wodurch bei zunehmendem Abfluss eher mit einer Änderung der Wassertiefe als mit einer Änderung der Überschwemmungsfläche zu rechnen ist.



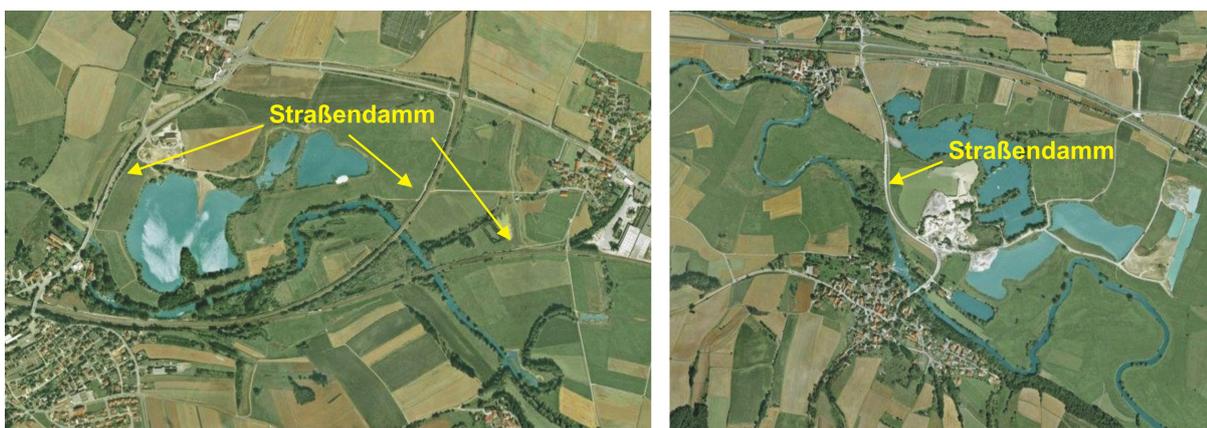
**Abb. 4.3:** Digitales Geländemodell (DGM) des Modellgebietes

Im Modellgebiet existieren vier Wehre in Kombination mit Seitenarmen zur Energiegewinnung (vgl. Abbildung 4.4).



**Abb. 4.4:** Flussabschnitt bei Rothwind (Google Earth)

Die späteren Ergebnisse werden zeigen, dass durch die mögliche Umströmung dieser Wehre über die breiten Vorländer der Einfluss dieser Abschnitte auf den Hochwasserabfluss zu vernachlässigen ist.



**Abb. 4.5:** Straßendämme quer durch das Flusstal bei Hochstadt (links) und Maineck (rechts) (Google Earth)

Interessanter sind solche Abschnitte, in denen der Abfluss durch Bruchkanten im Vorland beeinträchtigt wird. So überqueren beispielsweise in Hochstadt und in Maineck Straßendämme das Flusstal (vgl. Abbildung 4.5), die auch Unterführungen für den zumindest

teilweise durchgängigen Hochwasserabfluss im Vorland enthalten.

Ein weiterer nennenswerter Abschnitt ist der bei der Ortschaft Burgkunstadt. Hier wird der gesamte Abfluss durch den Flussschlauch gezwängt (vgl. Abbildung 4.6).



**Abb. 4.6:** Flaschenhals in Burgkunstadt, der gesamte Abfluss fließt in diesem Abschnitt durch den Flussschlauch (Google Earth)

Der gesamte Flussabschnitt befindet sich auf einem lehmigen Sandboden, wobei die Gerinnesohle selbst einen hohen Anteil an groben Kies aufweist (siehe Abbildung 4.7).



**Abb. 4.7:** Sohlbeschaffenheit des Oberen Main, bei Mainleus

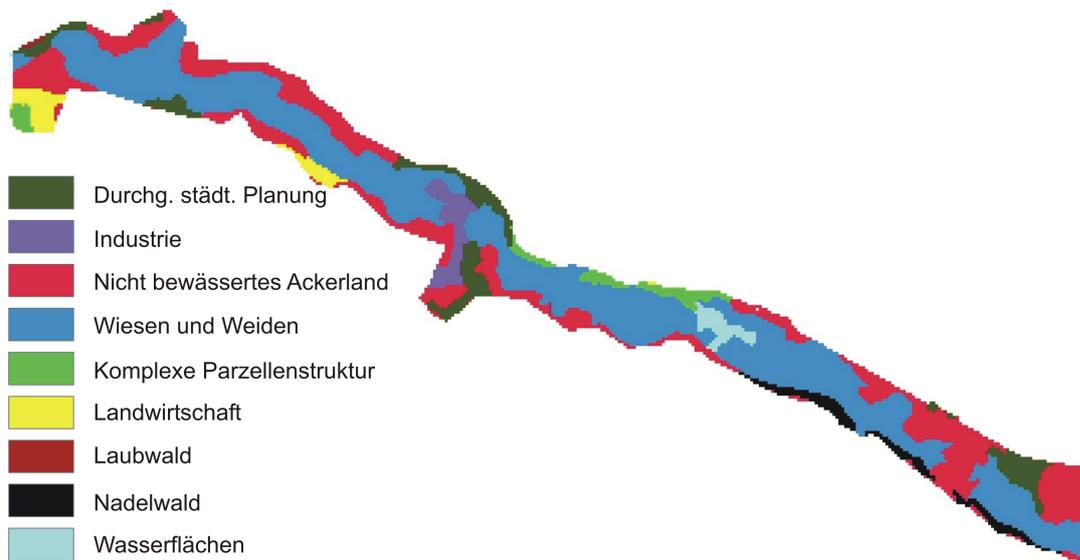
Die Flussufer haben durchweg einen relativ hohen Vegetationsanteil (vgl. Abbildung 4.8).

Die Landnutzung (Vorland) ist in Abbildung 4.9 zu finden. Darin haben Wiesen und Weiden mit 52 % den größten und Ackerland mit 28 % den zweitgrößten Flächenanteil. Bei



**Abb. 4.8:** Uferbeschaffenheit des Oberen Main

Betrachtung eines  $HQ_{100}$ -Ereignisses sind Siedlungs- und Waldflächen kaum betroffen. Wird also hinsichtlich der Landnutzung allein die Überschwemmungsfläche betrachtet, so liegen überwiegend Wiesen und Weiden, sowie zu einem geringen Teil Ackerland vor.

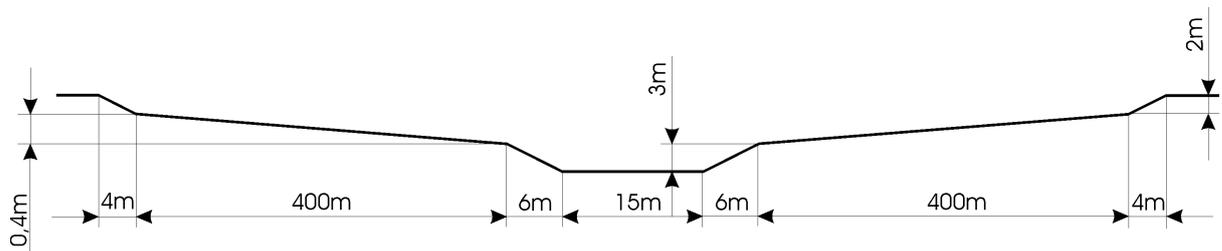


**Abb. 4.9:** Landnutzung im Flussabschnitt (aus CORINE Land Cover 2000)

### 4.3 Das synthetische Gerinne

Neben dem Flussabschnitt am Oberen Main werden auch Untersuchungen an einem synthetischen Gerinne durchgeführt. Der künstliche Flussabschnitt hat eine Länge von 30 km, wobei die mittleren Dimensionen des Abschnittes am Oberen Main als Vorlage für das synthetische Gerinne dienen. Demnach wird eine Tal-Breite von 835 m angesetzt, die sich in einen Flussschlauch der Breite 27 m (Uferabstand) und in ein linkes und rechtes

Vorland mit je 400 m Breite aufteilt. Daran schließen sich auf beiden Seiten Dämme mit einer Breite von 4 m bis zur Dammkrone an (vgl. Abbildung 4.10).



**Abb. 4.10:** Querprofil des synthetischen Gerinnes (nicht maßstabstreu!)

Das mittlere Gerinnegefälle wird entsprechend zum Oberen Main zu 1 ‰ angesetzt.



# 5 Hydrodynamische Berechnung von Überschwemmungsflächen

## 5.1 Einleitung

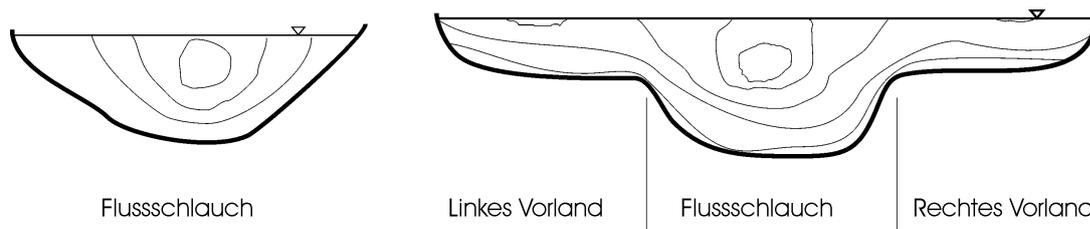
Die hydrodynamische Berechnung von Überschwemmungsflächen kann grundsätzlich mit den dreidimensionalen (3D) Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Da die Berechnung von Überschwemmungsflächen zumeist mit großen Modellflächen verbunden ist, reicht hierzu die derzeitige Rechnerkapazität trotz steigender Tendenz nicht aus. Daher haben sich die 3D Modelle bisher nicht durchsetzen können und finden in erster Linie bei Detailbetrachtungen (z.B. Turbinen, Bauwerke, Ärodynamik von Fahrzeugen ...) Anwendung. Deshalb werden in diesem Kapitel reine eindimensionale (1D), reine zweidimensionale (2D) und hybride (1D/2D) Modellkonzepte betrachtet und es erfolgt jeweils ein zusammenfassender Überblick hinsichtlich des Modellaufbaus. Eine allgemeine Beschreibung des Modellierungsprozesses hinsichtlich Ablauf, Fehlerpotentiale und Kontrollmöglichkeiten ist in FORKEL [2004] zu finden und stellt eine gute Basis dar.

## 5.2 Eindimensionale Hochwassermodellierung

Obwohl mit steigender Rechnerleistung die Anwendung von 2D und 1D/2D Modellen sukzessive wächst, sind 1D Modelle wider Erwarten nicht aus der Praxis weg zu denken. Schon früh wurde die Eignung von 1D Modellen für instationäre Vorgänge in Fließgewässern nachgewiesen (siehe beispielsweise CUNGE ET AL. [1980] oder nach TESCHKE [2004] in BAUCH [1968], KEUNING [1976] sowie KING [1976]). Aufbauend auf diesen Gleichungen, denen ein kompaktes Gerinne mit einfachen Rauheitsverhältnissen zugrunde liegen, bestehen Ansätze und Modelle zur Berücksichtigung der Formrauheit und Bewuchs auf Vorländern sowie Böschungen. Für stationäre Abflüsse sei hier verwiesen auf DVWK

[1991] oder BWK [2000], und für instationäre Abflussverhältnisse auf TESCHKE [2004] sowie SCHRAMM [2005], wobei sich für die instationäre Modellierung noch kein kommerzielles und allgemein verbreitetes Werkzeug etablieren konnte. Durch den 1D Charakter ist zu beachten, dass Prozesse wie Turbulenz oder Sekundärströmungen, die sich über die gesamte Wassersäule verteilen, auf die Sohlrauigkeit addiert werden und somit durch die Sohlreibung Berücksichtigung finden.

Wird ein 1D Modell zur Berechnung von Überschwemmungsflächen aufgebaut, so ist hinsichtlich der Werkzeugwahl zunächst zu entscheiden, ob die Betrachtung der Energiegleichung nach Bernoulli ausreicht (stationäre Abflussbetrachtung), oder die Lösung der flächengemittelten Saint-Venant-Gleichungen zur Simulation instationärer Ereignisse erforderlich ist. Im Modell wird das Flussgerinne mittels Querprofile beschrieben, welche zumeist die Knoten des Berechnungsschemas darstellen. Dabei ist es wichtig, ob es sich bei dem Modellgebiet um kompakte Querschnitte oder gegliederte Querschnitte handelt (vgl. Abbildung 5.1).



**Abb. 5.1:** Schematische Darstellung der Isotachen im kompakten (links) und gegliederten (rechts) Querschnitt

Bei kompakten Querschnitten wird im Allgemeinen das Flussgebiet mit einem einzelnen Flussast beschrieben. Durch die Zuweisung von Rauigkeiten für jeden Abschnitt zwischen zwei Querprofilen, können die Verluste profilweise abgebildet werden. Dieses Berechnungsnetz wird ggf. durch Bauwerke ergänzt und zur Quantifizierung dieser Einflüsse auf den Wasserspiegel unmittelbar vor und hinter dem Bauwerk berechnet. Möglichkeiten zur Abbildung von Bauwerken können zumeist der Programmbeschreibung entnommen werden.

Liegt ein gegliedertes Gerinne vor und erfolgt der Hochwasserabfluss über Flussschlauch und Vorländer, so sind die Querprofile über den Flussschlauch hinaus entsprechend zu erweitern. Während die Beschreibung des Flusses durch einzelne Querprofile bei geradlinigem Flussverlauf keine große Problematik darstellt, sieht sich der Modellierer in mäandrierenden Bereichen einigen Herausforderungen gegenübergestellt; denn die Querprofilspur verläuft zwar im Flussschlauch senkrecht zur Fließrichtung, muss aber in den Vor-

ländern so angepasst werden, dass diese sich für unterschiedliche Stationierungen nicht überschneiden (vgl. Abbildung 5.2 rechts, markierter Bereich). Schließlich stellen diese Querprofilspuren später Linien gleicher Wasserstände dar und die Wassertiefe sollte entlang der Fließrichtung profilweise eine fallende Tendenz besitzen.



**Abb. 5.2:** Abbildung des Flussgerinnes mittels Querprofilen. Links: Abfluss über den Flussschlauch (*kompaktes Gerinne*). Rechts: Abfluss über Flussschlauch und Vorland (*gegliedertes Gerinne*)

Aus diesem Grund werden die Profilsuren in den Vorländern abgelenkt und der zu erwartenden Linie gleichen Wasserstandes angepasst. Alternativ kann für den Flussschlauch und jeweils für die Vorländer separat ein Flussast definiert werden, die parallel verlaufen und in bestimmten Abständen durch Verbindungen kommunizieren können<sup>1</sup>. Diese Methode besitzt zusätzlich den Vorteil, dass die unterschiedlichen Längen beider Vorländer in einer Schleife Berücksichtigung finden. Der Gedanke dabei ist, dass die Abflüsse in dem gegliederten Querschnitt in einzelne Anteile aufgeteilt werden können. Dies ist zulässig, da obwohl die Geschwindigkeit im Flussschlauch höher und damit der Wasserstand tiefer ist als im Vorland und dies Querströmungen bzw. Sekundärströmungen zur Folge hat (d. h. es besteht ein über die Zeit sowie Ort kontinuierlicher Austausch der Abflussanteile zwischen Vorland und Flussschlauch), bleiben die Abflussanteile im Flussschlauch und in den Vorländern unverändert. Dies ist darin begründet, dass die oberflächennahe zufließende Wassermenge (vom Vorland in den Flussschlauch) an der Sohle im gleichen Maße zurück fließt. Somit ist eine Trennung der Abflussanteile in gegliederten Querschnitten zulässig. Ein Problem, das sich durch die Aufteilung des Profils in einzelne Anteile ergibt,

<sup>1</sup>Eine Kombination aus abgelenkter Profilsuren und zusätzlichem Flussast ist ebenfalls möglich, indem nur für ein Vorland ein zusätzlicher Ast definiert wird

ist die Zuweisung der Rauigkeiten in den Trennflächen. Die gängigste Methode ist, dass bei der Betrachtung des Flussschlauchabflusses der Trennfläche die Rauigkeit der Sohle zugewiesen wird, während für die Vorlandabflussanteile keine Trennflächenrauigkeit angesetzt wird. Um bei diesem Verfahren nicht zu große Wasserspiegelunterschiede in den einzelnen Ästen (Flussschlauch- und Vorlandabfluss) zu bekommen, müssen ausreichende Verknüpfungspunkte geschaffen werden, in denen der Wasserstand aller Äste gleicht.

Der interessierte Leser sei bezüglich der Trennflächenproblematik auf KOHANE [1991] und BRETSCHNEIDER & ÖZBEK [1997] verwiesen.

Die Ergebnisse aus unterschiedlichen Berechnungsansätzen können dabei um  $\pm 10\%$  schwanken (BÄR ET AL. [2001]).

Eine weitere Problematik, die sich in mäandrierenden Abschnitten oder bei Schleifen ergeben kann, sind Kurzschlussströmungen. In diesem Fall sind solche Prozesse durch Seitenarme abzubilden. Auch die Bereiche von Bauwerken, die im Hochwasserfall umströmt werden können, müssen mit einem Seitenarm erweitert werden, um dies auch modellieren zu können.

Der Aufbau eines 1D Modells kann zusammenfassend in folgende Arbeitsschritte eingeteilt werden:

- Einteilung des Flussgerinnes in Abschnitte, in denen kompakt oder gegliedert (Aufteilung des Querprofils) gerechnet werden soll
- Erstellung des Gerinnesystems inkl. der Bauwerke
- Abbildung von Kurzschluss- und möglicher Bauwerksumströmungen durch Seitenarme
- Implementierung möglicher Bruchkanten (Straßendämme) in das Flusssystem durch zusätzliche Bauwerke oder Querprofile
- Aufteilung des Gerinnesystems in Abschnitte verschiedener Rauigkeiten
- Kalibrierung des Modells

### 5.3 Zweidimensionale Hochwassermodellierung

Im allgemeinen sind 2D Modelle geeignet zur Simulation von flächigen Abflüssen mit unbekannter oder wechselnder Fliessrichtung, beispielsweise bei überströmten Vorländern, Überflutungsflächen oder Ästuaren (CONNELL ET AL. [2001]). Des Weiteren dienen sie

der kleinskaligen Simulation von Strömungen in Gerinnekurven, Ablösungen bei Buhnen oder seitlicher Einleitungen (DVWK [1999]).

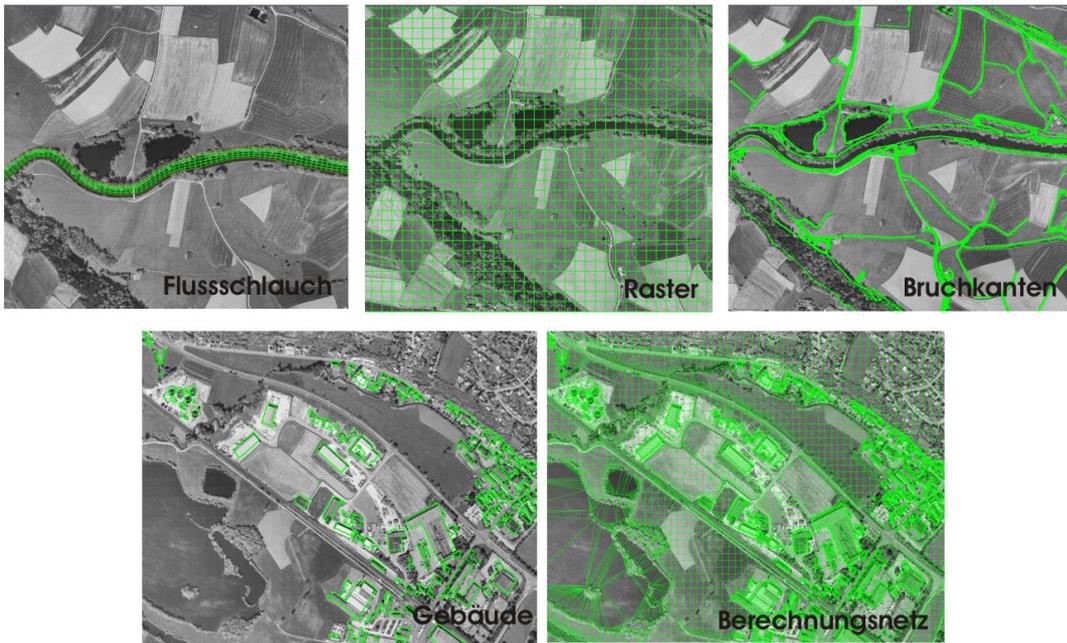
Die reine 2D Hochwassersimulation erfolgt in dieser Arbeit mit dem Programm Hydro\_AS-2D (vgl. NUJIC [1998] und NUJIC [2003]), das schwerpunktmäßig für die Berechnung von Damnbrüchen und Flutwellenausbreitungen entwickelt wurde. Es kann (und wird vor allem in Bayern) für die allgemeine zweidimensionale Strömungs- und Abflusssimulation eingesetzt werden. Unter Verwendung der Finiten Volumen Methode (vgl. Kapitel 3.2.2) erfolgt die räumliche Diskretisierung unter Berücksichtigung von Bruchkanten und lokal erhöhter Netzauflösung auf Basis von linearen Dreiecks- und Viereckselementen. Da aus numerischen Gründen der Wasserfluss orthogonal zu den Elementseiten erfolgen sollte, werden zur Diskretisierung des Flussschlauches ausschließlich Rechteckselemente verwendet, während im Vorland ein automatischer Netzgenerator unterschiedliche Elemente erzeugt. Das Prä- und Postprocessing erfolgt mit dem Programm Surface Water Modeling System bzw. SMS (EMS-I [2007]).

Der Aufbau des 2D Modellnetzes kann dabei in folgende Arbeitsschritte aufgeteilt werden:

- Erstellung des Flussschlauchnetzes
- Aufbau des Vorlandnetzes unter Berücksichtigung der Bruchkanten
- Erzeugung des Gesamtnetzes aus Flussschlauch- und Vorlandnetz
- Implementierung von u.a. Bauwerken und Gebäuden in das Gesamtnetz
- Kalibrierung des Modells

Die Grundlage für die Erstellung des Flussschlauchnetzes sind vorhandene Querprofildaten in Kombination mit den Uferlinien. Daraus wird durch Interpolation zwischen den Querprofilen das Netz, bestehend aus Rechteckelementen mit einem Seitenverhältnis von 1:3 (NUJIC [2003]), für das Gerinne erzeugt.

Aus den Vorlandhöhenpunkten entsteht in Kombination mit den Bruchkanten das Vorlandnetz, das im Anschluss mit dem Flussschlauch zu einem Gesamtnetz verschnitten wird (vgl. Abbildung 5.3). Müssen auch Bauwerke abgebildet werden, so können für einzelne Elemente definierte Eigenschaften zugewiesen (beispielsweise eine Überfallhöhe und -breite für einen Wehrüberfall) und das Netz modifiziert werden. Nicht durchströmbar Flächen (z.B. Gebäude, Straßendämme oder Brücken) werden als ein Netzelement in das Berechnungsnetz implementiert und entsprechend mit einer übertrieben großen Rau-



**Abb. 5.3:** Erstellung des 2D Berechnungsnetzes

higkeit belegt, oder aus dem Berechnungsnetz ausgeschnitten. Folglich wird jedem Element eine Rauigkeit zugewiesen und kann hinsichtlich der Kalibrierung angepasst werden. Die Berechnung des Reibungsgefälles erfolgt nach der Formel von Darcy-Weisbach (vgl. Gleichung 2.83), wobei das Reibungsgefälle aus dem anzugebenden Manningwert berechnet wird. Hierbei wird der hydraulische Radius gleich der Wassertiefe gesetzt.

$$\lambda = 6,34 \frac{2gn^2}{\sqrt[3]{d_{hy}}} \quad (5.1)$$

Die Turbulenz wird im Modell durch eine Kombination aus dem empirischen Viskositätsansatz und dem Ansatz einer über das Element konstanten Viskosität abgebildet.

$$\nu = \nu_0 + c_\mu \nu h \quad (5.2)$$

Bevor jedoch mit dem Netz gerechnet wird, ist die Güte des Netzes zu überprüfen und ggf. auszubessern, um die Qualität der Ergebnisse auf Grund der numerischen Diffusion zu gewährleisten. Kriterien für die Netzqualität sind dabei die Winkel der Elemente, die in einem definierten Bereich liegen sollten, sowie die Netzknotenpunkte, die nicht mehr

als eine definierte Anzahl an Anschlusselementen aufweisen sollte.

Der Vorteil des 2D Modells liegt somit in der zusammenhängenden vermaschten Struktur, in der jedes Element mit dem Nachbarelement kommuniziert. Das Wasser kann somit nicht nur entlang des Flussschlauchs abfließen, sondern auch quer dazu, worin die bessere Abbildung von Retentionseffekten im Gegensatz zu 1D Modellen begründet liegt. Während der Simulation einer ansteigenden Hochwasserwelle werden Elemente neu benetzt oder beim Rückgang des Hochwassers fallen diese wieder trocken. Die Nachteile von 2D Modellen sind neben der hohen Rechenzeit u.a. die Modellierung schmaler Flussläufe, Gräben, Kanäle oder Bauwerke, die 1D einfacher und besser bzw. effizienter abgebildet werden können.

## 5.4 Hybride Ansätze zur Hochwassermodellierung

Da großräumige 2D Berechnungen kaum effizient durchzuführen sind, entstanden bereits Anfang der 90er Jahre erste Ansätze zur Kopplung von 2D Modellen mit 1D Modellen (BECHTELER ET AL. [1993]). Durch eine Kopplung der Modelltypen ist es möglich, Gewässersysteme mit stark heterogenen Längenskalen modellieren zu können. Der Modellierer hat somit die freie Wahl des jeweils optimalen Modelltyps und die Möglichkeit der schrittweisen Einbindung von Teilmodellen in ein Gesamtmodell.

**Tab. 5.1:** *Typische Längenskalen für Gerinne- und Vorlandabfluss (BEFFA [2002])*

<b>Längenskala</b>	<b>klein</b>	<b>groß</b>
Gerinnebreite	1 m	100 m
Vorlandbreite	100 m	10000 m
Gerinnelänge	1000 m	100000 m

Zunächst ist zu beachten, dass hybride bzw. gekoppelte (1D/2D) Modelle grundsätzlich auf zwei unterschiedlichen Ansätzen beruhen können. Zum einen wird unter diesem Begriff verstanden, dass der Abfluss im Flussschlauch 1D und der über die Vorländer 2D erfolgt, wobei beide Prozesse miteinander verknüpft sind. Dieser Ansatz wird in dieser Arbeit ausschließlich als gekoppeltes 1D/2D bzw. hybrides Modell verstanden. Der zweite Ansatz ist eine Kopplung von Flussabschnitten, die unterschiedlich komplex berechnet werden. So können gezielt Flussabschnitte rein 1D und die Zwischenbereiche rein 2D berechnet werden. Durch entsprechende Werkzeuge wird eine Verknüpfung beider Abschnitte erzeugt. Dieser Ansatz findet in der vorliegenden Arbeit keine Berücksichtigung. Obwohl die Vorteile des hybriden Modellansatzes schon frühzeitig erkannt wurden, konn-

te sich dieses Konzept bis vor kurzem nicht durchsetzen und es war „eher fraglich, ob die hybride Modelltechnik sich weiterentwickeln“ würde (DVWK [1999]). Da trotz ständig steigender Rechnerkapazitäten die Rechenzeiten für 3D und 2D Modelle in der Hochwassermodellierung sehr hoch geblieben sind, konnten sich wider Erwarten hybride Modelle auf dem Markt etablieren. Der grundsätzliche Gedanke dabei ist, dass für die Strömung im Flussschlauch eine 1D Betrachtung ausreicht, während das Vorland lückenlos nur 2D dargestellt und somit der Prozess der Retention genauer abgebildet werden kann. Dadurch fällt ein erheblicher Anteil an Berechnungsknoten (Flussschlauch) weg und die Simulationszeit nimmt entsprechend ab. Dabei können die Teilmodelle für Flussschlauch- und Vorlandabfluss unabhängig voneinander erstellt, verifiziert und betrieben werden. Somit wird auch die Abbildung von komplexen Systemen durch einzelne Submodelle erleichtert. Ein Genauigkeitsverlust durch die 1D Betrachtung des Flussschlauches ist zunächst nicht zu befürchten, weil zum einen Sekundärströmungen auch von einem 2D Modell nicht abgebildet werden können und auch Bauwerke ähnlich wie in einem 1D Modell abgebildet werden (empirische Formeln). Einzig die Kopplung beider Komponenten, wie sie in den kommenden Abschnitten beschrieben wird, stellt sich in einem mäandrierenden Bereich schwierig dar, weil durch die beschriebenen Kopplungskonzepte kein Impulsaustausch zwischen Vorland- und Flussschlauchabfluss stattfindet.

#### 5.4.1 SOBEK Rural 1D/2D und Modellaufbau Oberer Main

Das Softwarepaket SOBEK<sup>2</sup> wurde in Zusammenarbeit von WL|Delft Hydraulics, ein unabhängiges Beratungs- und Forschungsinstitut, und dem nationalen niederländischen Institut für Wassermanagement und Abwasserbehandlung (RIZA) entwickelt. Das Paket besteht aus drei Basis-Bestandteilen, die jedes mögliche Szenario der Flussbewirtschaftung abdecken. *SOBEK Rural* berechnet ländliche Flüsse und Vorlandüberflutungen, *SOBEK Urban* städtische Fluss- und Kanalsysteme und *SOBEK River* ist imstande Flusssysteme und Ästuare sowie Morphologie zu berechnen. Dabei werden sieben verschiedene Programmmodule eingesetzt, um Aspekte wie Hydrologie, Gewässergüte oder Morphologie einzeln oder in Kombination einfließen zu lassen. In dieser Arbeit finden das 1D Berechnungspaket *SOBEK-Flow* und das 2D Berechnungspaket *Delft-FLS* (Delft Flooding System), die Bestandteil von SOBEK Rural sind, Anwendung. Dabei dient

---

<sup>2</sup>Das Programm wurde nach einem antiken ägyptischen Gott in Form eines Krokodils benannt. Im alten Ägypten wurden Krokodilen prophetische Kräfte nachgesagt, da sie ihre Eier genau oberhalb des zu erwartenden Pegels der Nil-Flut ablegten. Die Software soll - an diesen Glauben angeknüpft - mit ihrer numerischen Hochwassermodellierung mathematisch korrekte Ergebnisse liefern.

SOBEK-Flow zur Abflusssimulation im Flussschlauch und Delft-FLS zur Abflusssimulation in den Vorländern. Die Grundlage für die 1D Berechnung sind dabei die 1D Saint-Venant-Gleichungen und für die 2D Berechnung die Flachwassergleichungen, wobei das Vorland als ein Raster vorliegen muss.

Für die Kopplung liegen beide Berechnungspakete ähnlich wie *Layer* übereinander bzw. der 2D Layer liegt über dem 1D Layer. In dem 1D Layer sind die Querprofile für den Flussschlauch, sowie Bauwerke wie Brücken oder Wehre implementiert. Elemente im Vorland wie beispielsweise Straßendämme oder tote Flussarme, werden in das Höhenraster eingebaut, wobei durch sogenannte *nested grids* Bereiche durch ein höher aufgelöstes Raster detaillierter abgebildet werden können. Grundlage für den Austausch beider Komponenten stellt eine Kontinuitätsbedingung, die in den kombinierten 1D/2D Massenvolumen gelten muss (vgl. Abbildung 5.4). Hierzu wird der Flussschlauch durch Berechnungspunkte diskretisiert, die in Verbindung mit der jeweils darüber liegenden Rasterzelle das kombinierte Massenvolumen bilden. Der Abstand der Berechnungspunkte und somit die Kopplung beider Komponenten muss nicht zwangsläufig in jeder unterflossenen Rasterzelle erfolgen, sondern kann auch einen größeren Abstand haben.

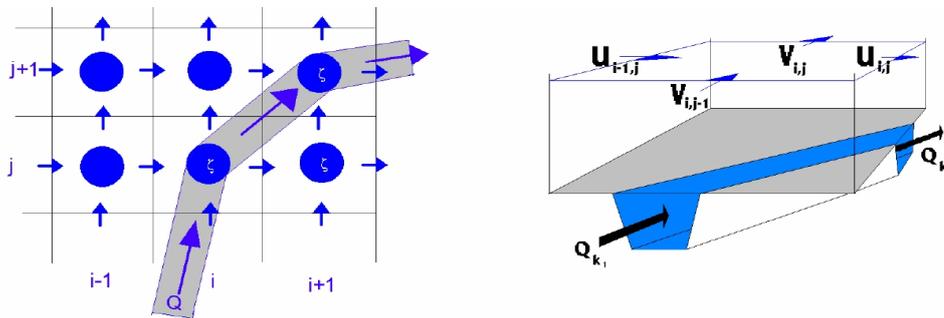
$$\frac{dV_{i,j}(\zeta)}{dt} + \Delta y \left( (uh)_{i,j} - (uh)_{i-1,j} \right) + \Delta x \left( (vh)_{i,j} - (vh)_{i,j-1} \right) + Q_{k+1} - Q_k = 0 \quad (5.3)$$

mit:

- $V$ : kombiniertes 1D/2D Volumenelement
- $u$ : Geschwindigkeit in x-Richtung [m/s]
- $v$ : Geschwindigkeit in y-Richtung [m/s]
- $t$ : Zeit [s]
- $h$ : Wassertiefe über der 2D Gridzelle [m]
- $\zeta$ : Wasserspiegelhöhe ü. NN [m] (für 1D und 2D gleich)
- $\Delta x$ : Auflösung des Rasters in x (bzw. i) -Richtung [m]
- $\Delta y$ : Auflösung des Rasters in y (bzw. j) -Richtung [m]
- $Q$ : Quellen bzw. Senken [ $\frac{m^3}{s}$ ]

Durch diesen Ansatz (Gleichung 5.3 und Abbildung 5.4) wird jeweils ein Berechnungspunkt mit einer Rasterzelle verschnitten, weshalb eine Rasterweite zu wählen ist, die die Flussschlauchbreite übersteigt, weil einzig die kombinierten Massenvolumen eine Quelle bzw. Senke für die 2D Komponente darstellen. Gleichzeitig darf die Rasterweite nicht zu

groß gewählt werden, um Geländestructuren und somit den Vorlandabfluss ausreichend genau abbilden zu können.



**Abb. 5.4:** Schema des kombinierten hydraulischen Modells: links: kombiniertes 1D/2D System, rechts: kombiniertes 1D/2D Massenvolumen

Infolge einer größeren Rasterweite als die Flussschlauchbreite ist allerdings eine separate Überflutung des linken oder rechten Ufers erst durch Umwege möglich. Zudem findet kein Impulsaustausch zwischen den Ebenen statt, so dass vertikale Geschwindigkeiten sowie die Reibung vernachlässigt werden.

Hinsichtlich der Kopplung gibt es drei Möglichkeiten, ab welchem Wasserstand die Rasterzelle über einem Berechnungspunkt im Flussschlauch mit Wasser gefüllt und somit der 2D Layer aktiviert wird (Der Modellierer hat sich für eine der drei Modi zu entscheiden):

1. Der Wasserspiegel im Berechnungspunkt des 1D Layers steigt über die darüber liegende Rasterhöhe
2. Der Wasserspiegel im Berechnungspunkt des 1D Layers steigt über die kleinere der beiden Uferhöhen
3. Der Wasserspiegel im Berechnungspunkt des 1D Layers steigt über die größere der beiden Uferhöhen

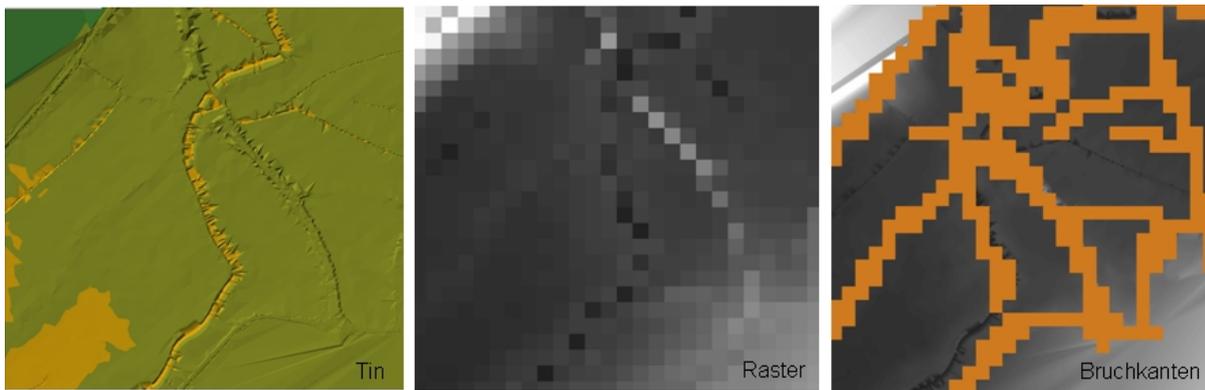
Der Vorteil hybrider Modelle liegt in ihrer Nähe zum natürlichen Hochwasserabflussgeschehen. Denn zur Beschreibung des Vorlandabflusses ist eine 2D Betrachtung erforderlich, während der Gerinneabfluss sehr gut 1D abgebildet werden kann. Durch den hybriden Ansatz reduziert sich die Rechenzeit von ca. 1 Tag (2D Berechnung mit 92000 Knoten und einer Zeitschrittweite von 200 Sekunden) auf 30 Minuten (1D/2D Berechnung mit 9600 quadratischen Rasterzellen der Länge 50 m).

Der Aufbau eines Wellenablaufmodells mit SOBEK Rural 1D/2D, teilt sich grundsätzlich in folgende Arbeitsschritte auf:

- Aufbau des eindimensionalen Flussschlauchs (1D-Komponente)
- Erstellung des Höhenraster (2D-Komponente) zur Abbildung der Vorländer
- Verschneidung der Komponenten 1D und 2D
- Einteilung des Flussschlauches in Abschnitte verschiedener Rauigkeiten und Erstellung eines Rauigkeitsrasters für die Vorländer
- Kalibrierung des Modells

Für den Aufbau der 1D-Komponente werden Querprofil- und Bauwerksdaten gesichtet, ggf. korrigiert und in das Modell implementiert. Dabei werden allein die Daten des Flussschlauches (Uferlinie zu Uferlinie) benötigt. Für den betrachteten Abschnitt liegen Querprofil- und Bauwerksdaten aus den Jahren 1996 und 2001 vor (überwiegend aus dem Jahre 1997). Für die Wehre und Brücken wurden vom Wasserwirtschaftsamt (WWA) Bamberg technische Zeichnungen zur Verfügung gestellt. Dabei wurde vom Amt mitgeteilt (Hr. Ennser), dass im Hochwasserfall alle Wehrfelder geöffnet würden, sodass eine abflussabhängige Wehrsteuerung nicht im Modell erforderlich sei. Nach dem Aufbau der 1D-Komponente sollte zunächst die Kalibrierung der Sohlrauigkeit durch vorhandene Bordvoll- und Niedrigwasserfixierungen erfolgen. Hierzu wird der Flussschlauch in Abschnitte unterteilt, denen jeweils eine Rauigkeit zugewiesen wird. Da Verlustprozesse wie Turbulenz, Sekundärströmung usw. bei der 1D Betrachtung nicht modelliert und somit in der Rauigkeit zusammengefasst werden, kann die Aufteilung neben der Sohlbeschaffenheit auch nach dem Mäandrierungsgrad erfolgen. Der Vergleich der Fixierungsdaten mit den ersten Simulationsergebnissen wird zeigen, ob eine Modifikation der Abschnitte erforderlich ist. Da im vorliegenden Fall sowohl Fixierungsdaten für zwei Niedrigwasserperioden (September 1999 und November 2003) als auch für ein bordvolles Ereignis (März 2000) vorliegen, könnten theoretisch im ersten Schritt die Sohlrauigkeiten und anschließend die Uferrauigkeiten kalibriert werden. Da das aufzubauende Modell zur Hochwassersimulation herangezogen wird, wird mit einem mittleren Rauigkeitswert im Flussschlauch gerechnet. Hierzu reicht eine Fixierung am bordvollen Ereignis aus. Durch die Stauregelung ist zudem für den Niedrigwasserfall eine Kalibrierung nicht möglich, weil über mehr als die Hälfte der Strecke ein horizontaler Wasserspiegel herrscht.

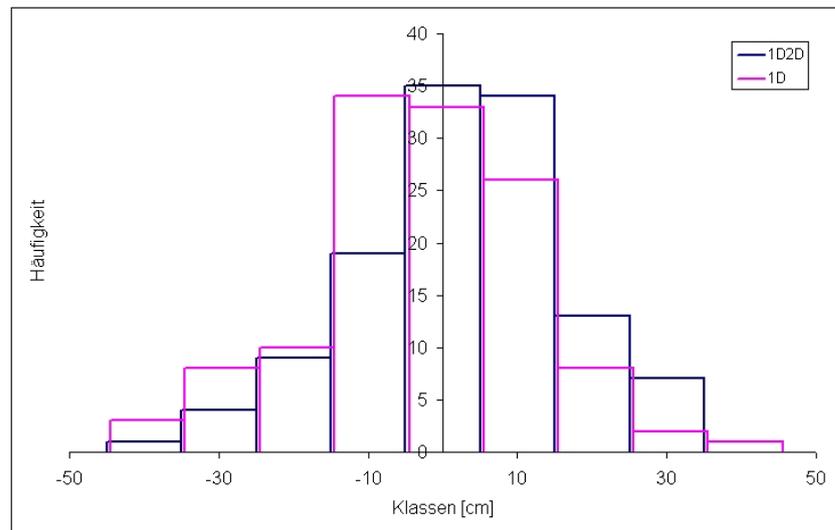
Für die 2D-Komponente liegen vom WWA Bamberg Befliegungsdaten (Punktraster in einer Auflösung von 20 mal 20 m) vor, in denen bereits die Bruchkanten eingearbeitet waren. Aus diesen Punktdaten wurde ein sogenanntes *TIN* (triangulated irregular network) erstellt, um der gesamten Fläche eine Höheninformation zuzuordnen.



**Abb. 5.5:** Erstellung des Vorlandrasters für den 2D Layer

Das nun aus dem TIN gewonnene Raster ist dadurch lückenlos. Anschließend werden auch die Bruchkanten in ein Raster überführt und mit dem Gebietsraster verschnitten (vgl. Abbildung 5.5); denn für eine gute Abbildung des Abflussgeschehens sind vor allem die Bruchkanten genau abzubilden. Das Problem dabei ist die Auflösung der Bruchkanten, die der gewählten Rasterweite entsprechen muss. In Anbetracht der hier vorliegenden Uferbreiten, sowie dem Ziel einer möglichst geringen Simulationszeit, wird ein quadratisches Raster der Länge 50 m gewählt. Somit besitzt beispielsweise ein Straßendamm der Breite 20 m im Modell mindestens eine Breite von 50 m, wodurch abflusswirksame Flächen unterschätzt werden. Es ist zwar möglich auf das definierte Raster feinere Raster einzubauen, allerdings ist das lokal sinnvoll, um beispielsweise eine Unterführungen von Straßendämmen detailliert abzubilden. Aus diesem Grund liegt der Anwendungsbereich dieses Modellansatzes in der Modellierung von großen Flächen, in denen kleinere Kanalstrukturen implementiert sind. Da im vorliegenden Modell die Tal-Längen fast 900 m betragen, ist in diesem Fall die Anwendbarkeit der gewählten Rasterweite gewährleistet. Um ggf. auch größere Ereignisse simulieren zu können bzw. nicht an die Modellgrenzen zu stoßen, wird das vorliegende Raster an den Modellgrenzen durch das Deutschlandgrid D25 (Auflösung 25 mal 25 m) erweitert. Hierzu werden vorerst die Höhenwerte beider Grids in den gemeinsamen Flächen verglichen, um einen möglichen Versatz zu erkennen. Da die Höhenwerte aus dem D25 im Mittel 17 cm höher waren als die aus dem TIN, werden die Werte des D25 vor der Erweiterung des Vorlandrasters entsprechend in Ihrer Höhe angepasst bzw. um 17 cm verringert.

Nachdem beide Modellkomponenten aufgebaut sind, wird abschließend jeder Rasterzelle ein Rauigkeitswert zugewiesen. Grundlage hierzu ist ein Raster, das aus Landnutzungskarten gewonnen werden sollte, wobei jeder Landnutzung die entsprechende Rauigkeit



**Abb. 5.6:** Häufigkeitsverteilung der Wasserspiegeldifferenzen (Gemessen minus Simuliert) für eine 1D und eine hybride (1D/2D) Simulation

zugewiesen wird. Nun sollte die Kalibrierung der Vorlandrauhigkeiten anhand eines Hochwasserereignisses durchgeführt werden. Da im vorliegenden Fall keine Hochwasserfixierungsdaten vorliegen, ist eine entsprechende Kalibrierung nicht erfolgt.

Abbildung 5.6 zeigt die Güte der vorangegangenen Kalibrierung der 1D Komponente am bordvollen Ereignis und ihre Änderung durch die Aktivierung der 2D Komponente. Da durch die Erweiterung des Modells lokale Ausuferungen in das Vorland simuliert werden, sind die Wasserspiegellagen aus der hybriden Modellierung tendenziell kleiner. Denn bei einer reinen 1D Berechnung werden an den Modellgrenzen viertuelle Wände angenommen.

### 5.4.2 MIKE Flood

Ein weiteres hybrides Modell, das in dieser Arbeit Anwendung findet, ist das Programm Mike Flood der Organisation DHI - Wasser & Umwelt. Dabei handelt es sich um eine Verknüpfung der beiden Modelle MIKE 21 (MIKE 21 [2005]) und MIKE 11 (MIKE 11 [2004]). Beide Teilmodelle werden analog zum Programm SOBEK (vgl. Kapitel 5.4.1) unabhängig voneinander erstellt. Für die 1D Komponente wird das Querprofil zwischen den Ufern herangezogen, um den Flussschlauch abzubilden. Der Vorlandabfluss wird wie bei SOBEK über ein Vorlandraster modelliert, während hier alternativ ein unstrukturiertes Netz gewählt werden kann. Das Netz hat im Gegensatz zum Raster den Vorteil der höheren Flexibilität. Denn durch das Netz können vereinzelte Strukturen höher (abflussbeeinflussende Strukturen im Gelände) oder größer (ebene Flächen) aufgelöst und

somit sehr gut abgebildet werden. Ein weiterer Unterschied zwischen beiden Modellen ist ihr Kopplungskonzept. Im Gegensatz zu SOBEK (vgl. Abbildung 5.4) wird nach dem MIKE Konzept der Vorlandabfluss strikt vom Gerinneabfluss getrennt, indem für die Kopplung der Flussschlauch aus dem 2D Netz *ausgestanzt* wird. Hierzu werden die beiden Uferlinien georeferenziert in das 2D Modell geladen und alle Netzlemente dazwischen gelöscht. Demzufolge liegt in diesem Fall auch ein entsprechend anderes Koppelungsverfahren namens **Lateral Link** vor. Hiernach ermittelt ein Suchalgorithmus jede Vorlandzelle, die durch eine Uferlinie berührt wird und im Falle eines steigenden Wasserspiegels als erstes aus dem Gerinne mit Wasser gespeist werden würde (MIKE FLOOD [2007], LARSEN ET AL. [2004]). Entsprechend zu einem Wehrüberfall werden die Zellen im Vorland über die Uferlinien mit Wasser gespeist. Dieses Kopplungsverfahren hat den Vorteil, dass zum einen die Auflösung des Vorlandrasters oder Vorlandnetzes unabhängig von der Flussschlauchbreite ist und des Weiteren die Vorländer links und rechts vom Flussschlauch ohne zusätzlichen Aufwand unabhängig voneinander mit Wasser aus dem Flussschlauch gespeist werden (vgl. 5.4.1). Für genauere Informationen bezüglich der Modellierungskonzepte wird auf die oben erwähnten Literaturquellen verwiesen.

### 5.4.3 Die Modellkalibrierung

Obwohl die hydrodynamisch-numerischen Modelle grundsätzlich physikalisch basiert sind, bleiben trotzdem Vereinfachungen beispielsweise durch Parametrisierung von Prozessen unabdinglich. In diesem Zusammenhang sei insbesondere der Rauigkeitsansatz erwähnt<sup>3</sup>, in dem besonders der Manning-Strickler Ansatz rein empirischer Natur ist.

Die Rauigkeitswerte eines Gewässerabschnittes werden zumeist aus Tabellenwerken entnommen. Dort werden allerdings Spannweiten angegeben, die als Richtwerte für die Rauigkeit der vorherrschenden Landnutzung gelten. Zudem müssen die Reibungswerte in dem eingesetzten mathematischen Werkzeug Einflüsse abbilden, die durch das Modell nicht abgebildet werden können. Gemeint sind die vernachlässigten Geschwindigkeitsverteilungen (Querschnittsgemittelt für 1D Modelle bzw. Tiefengemittelt für 2D Modell), die Sekundärströmungen, Einflüsse der Mäandrierung sowie die der Gerinnegeometrie. Der Sohlreibungswert wird daher zur abschnittsweisen Abbildung der eigentlichen Rei-

---

<sup>3</sup>Für den Ansatz nach Darcy-Weisbach, der aus der Rohrströmung kommt, wird eine Proportionalität zwischen Schubspannung und der Geschwindigkeit zum Quadrat angenommen. Dies gilt für voll ausgebildete Turbulenz und hydraulisch rauhes Verhalten. In Wirklichkeit liegt der Exponent von der Geschwindigkeit zwischen 1,7 und 2. Bei laminarem Fließen liegt der Exponent sogar bei 1,0 (BOLLRICH [2000]).

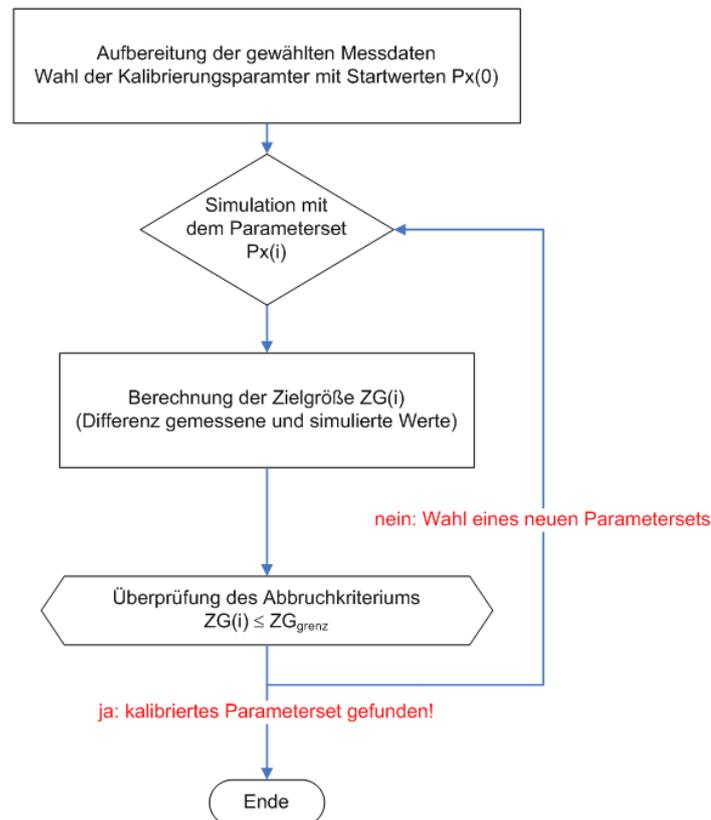
bung und all der nicht abbildbaren Effekte inklusive ihrer Unsicherheiten herangezogen. Somit ist die direkte Zuweisung einer Größe für diesen Modellparameter unmöglich. Der *Parameterwert* zur möglichst genauen Abbildung der Natur durch das Modell wird daher aus einer Kalibrierung gewonnen. Die Grundlage für eine Kalibrierung sind Messwerte, an die sich durch Anpassung des zu kalibrierenden Parameters die Modellergebnisse annähern sollen. Dies bedeutet wiederum, dass die Modellkalibrierung eine entsprechende Erfahrung an den Modellierer voraussetzt und ein wichtiger Arbeitsschritt in der Modellerstellung darstellt. Im Anschluss an eine Kalibrierung ist zudem die Plausibilität der gewonnenen Parameter zu überprüfen (Validierungsmessungen). Sollten nämlich unrealistische Werte ermittelt werden, so sind starke Vereinfachungen in der Modellbildung oder sogar Fehler eine mögliche Ursache.

Die Kalibrierung kann grundsätzlich in die **direkte** und **indirekte Kalibrierung** unterteilt werden. Die direkte Kalibrierung setzt voraus, dass die Modellgleichungen invertierbar bzw. nach den zu kalibrierenden Parametern auflösbar sind. Nach dem Einsetzen von Messergebnissen in das invertierte Gleichungssystem können die zu kalibrierenden Parameter direkt berechnet werden. Dieses Kalibrierungsverfahren ist jedoch sehr fehleranfällig und instabil, weshalb es für komplexe Modellgleichungen keine Anwendung findet (vgl. SACHER [1983] oder FORKEL [2004]).

Bei der indirekten Kalibrierung werden die vorliegenden Modellgleichungen für geschätzte Parameterwerte gelöst und die Differenz aus Modellergebnissen mit Messwerten als Zielgröße berechnet. Dieser Prozess wird iterativ so oft wiederholt, bis die Zielgröße ihr Minimum oder einen definierten Grenzwert unterschritten hat (vgl. Abbildung 5.7).

Die Kalibrierung von hydrodynamisch-numerischen Modellen kann bezüglich der Messwerte, an die die Parameter kalibriert werden, weiter unterteilt werden, da es sich bei den Messwerten um die Messung von stationären und instationären Größen handeln kann. Daher wird die Kalibrierung des Weiteren in die **stationäre** und **instationäre Kalibrierung** unterteilt. Die Kalibrierung an Hochwassermarken bzw. an fixierten Wasserspiegellagen wird demnach als stationäre Kalibrierung bezeichnet, während die Anpassung einer simulierten Hochwasserwelle an eine gemessene Abflussganglinie an einem Pegel einer instationären Kalibrierung entspricht. Generell ist die stationäre Kalibrierung weniger zeit- und rechenaufwendig.

Ein grundsätzliches Problem bei der Kalibrierung ist, dass sie für ein Ereignis und somit für einen Zeitpunkt erfolgt. Die Rauigkeitseigenschaften des natürlichen Modellgebietes verändern sich jedoch permanent infolge der Vegetationsperioden (z.B. Winter und



**Abb. 5.7:** Schematischer Ablauf des Kalibrierungsprozesses

Sommer). Daher sollte ein für Sommerereignisse kalibriertes Modell nicht zur Simulation eines Winterhochwassers verwendet werden. Weiterhin ist die Rauigkeit stark vom Wasserstand abhängig (mit zunehmendem Wasserstand nimmt die Sohl- und auch die Vorlandrauigkeit ab).

Ein weiteres Problem bei der Kalibrierung ist die sogenannte *Equifinalität*, was bedeutet, dass mehrere Parameterkombinationen zu einer guten Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung führen.

Der Prozess des Kalibrierens kann grundsätzlich manuell (Trial and Error Methode) oder automatisch erfolgen. Die Minimierung der Zielgröße bzw. die Annäherung von simulierten Werten an die Messwerte erfolgt grundsätzlich quantitativ. Hierzu werden möglichst alle vorliegenden Messwerte den simulierten Werten in der entsprechenden Stationierung im Modell gegenüber gestellt und in einer Zielgröße zusammengefasst. Eine Zielgröße kann beispielsweise der *mittlere quadratische Fehler*  $\varphi_\sigma$  sein:

$$\varphi_\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{i,gem} - x_{i,sim})^2} \quad (5.4)$$

Soll beispielsweise eine Hochwasserwelle kalibriert werden, mit dem Ziel der besseren Anpassung der Hochwasserspitzen als an das restliche Abflussspektrum, so kann auch eine Wichtung  $w_i$  des entsprechenden Abflussbereiches Berücksichtigung finden:

$$\varphi_{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i (x_{i,gem} - x_{i,sim})^2} \quad (5.5)$$

Der Vorteil einer händischen gegenüber einer automatischen Kalibrierung ist, dass zu der quantitativen Angabe der Zielgröße auch eine Visualisierung *aller* Messpunkte erfolgt und der Modellierer dann über die weitere Wahl der Parameter entscheidet. Somit greift der Modellanwender gezielt in den Kalibrierungsprozess ein und gewinnt zunehmend an Verständnis für das Modellsystem. Genau darin kann auch der Nachteil der händischen Kalibrierung liegen. Denn dieser Sachverstand der Modellierungsprozesse ist unbedingt erforderlich, um zu einem zügigen und plausiblen Ergebnis zu kommen.

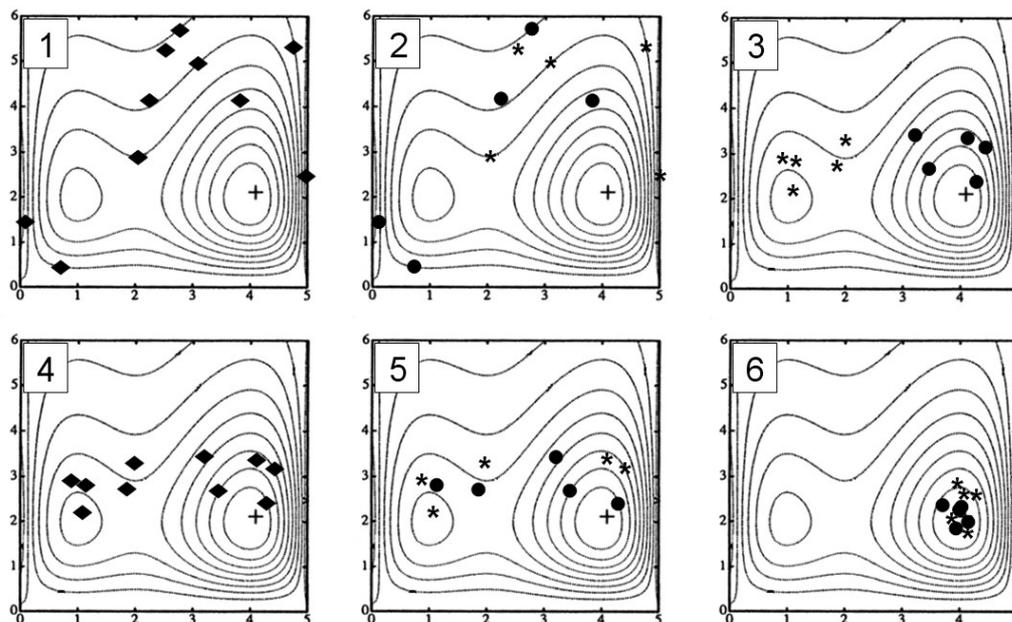
Diese Anforderung an den Modellierer fällt bei der automatischen Kalibrierung weg, weil die Parameterkombinationen von einem Optimierungsalgorithmus generiert werden. Daher wird in der Praxis auch oft von der **objektiven Kalibrierung** gesprochen. Das Ziel der automatischen Kalibrierung ist dabei, die Parameterkombination zu finden bei der das Optimum der Zielgröße erreicht wird<sup>4</sup>. Hierzu wird zufällig ein Startwert (eine zufällige Parameterkombination) generiert, um anschließend die Parameterkombination derart zu ändern, dass stets eine Verbesserung der Zielgröße eintritt. Ein Standardverfahren in kommerziellen Optimierungsalgorithmen ist das klassische Gradientenverfahren. FORKEL [2004] zeigt diesbezüglich die gängigsten Methoden auf.

In der vorliegenden Arbeit wird das Modell des Oberen Mains händisch und automatisch kalibriert, um die Ergebnisse gegenüber zu stellen. Hierzu wird der Fluss in Abschnitte unterschiedlicher Rauigkeitswerte aufgeteilt. Eine Abschätzung erfolgt durch eine Sensitivitätsstudie der Wasserspiegellagen bei konstanter Rauigkeit über die gesamte Flusslänge, der die Messwerte gegenübergestellt werden. Während bei der händischen Kalibrierung jeder Rauigkeitswert iterativ angepasst wird, erfolgt für die automatische Kalibrierung eine Definition eines Startwertes sowie einer möglichen Parameterspannwei-

<sup>4</sup>Neben der manuellen und automatischen Kalibrierung gibt es auch die Möglichkeit der Stochastischen Kalibrierung. Hier wird Anhand von Monte Carlo Simulationen möglichst der gesamte Parameterraum simuliert, um schließlich auf die optimale Parameterkombination zu schließen. Der Nachteil ist eindeutig, dass alle Möglichkeiten simuliert werden und somit ein hoher Rechenaufwand erforderlich ist.

te der Rauigkeit für jeden Abschnitt.

Die objektive Kalibrierung erfolgt hier nach dem **SCE-UA** (Shuffled Complex Evolution - University of Arizonas) Verfahren, das mit Hilfe genetischer Algorithmen das globale Optimum der Zielgröße in einem n-dimensionalen Parameterraum sucht und sich bereits in verschiedenen Themenbereichen bewährt hat (siehe beispielsweise VRUGT ET AL. [2006], AJAMI ET AL. [2004] oder DISSE ET AL. [2007]).



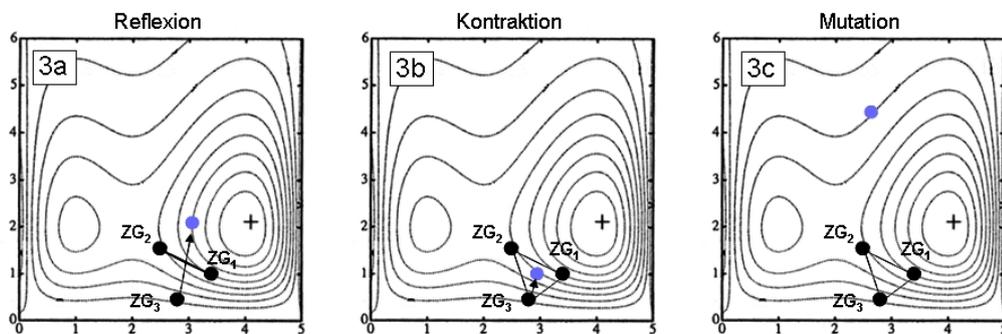
**Abb. 5.8:** Ablauf der SCE-UA Methode (nach DUAN ET AL. [1992]) für einen zweidimensionalen Parameterraum (Abszisse entspricht Parameter 1 und Ordinate Parameter 2). Die Abbildungen zeigen schematisch als Isolinien die Zielfunktion, die ein lokales und das gesuchte globale Maximum bzw. Minimum besitzt.

Die prinzipielle Funktionsweise des SCE-UA Verfahrens (vgl. hierzu DUAN ET AL. [1992], DUAN ET AL. [1993] und DUAN ET AL. [1994]) lässt sich in 6 bzw. 7 Schritten zusammenfassen (vgl. Abbildung 5.8):

1. Zufällige Generierung einer sogenannten *Population*:  $N$  Parameterkombinationen im  $n$ -dimensionalen Parameterraum (Beispiel Bild 1 mit  $n = 2$  und  $N = 10$ )
2. Zufällige Aufteilung der Population in  $a$  *Komplexe* (Beispiel Bild 2 mit  $a = 2$ )
3. Unabhängige Entwicklung der Komplexe zum Optimum der Zielgröße durch *Reflektion, Kontraktion und Mutation* (Beispiel Bild 3)
4. Auflösung der einzelnen Komplexe zu einer Population (Beispiel Bild 4)

5. Erneute zufällige Aufteilung der Population, entspricht Punkt 2. (Beispiel Bild 5)
6. Unabhängige Entwicklung der Komplexe, entspricht Punkt 3.
7. Die Punkte 3. bis 5. werden solange wiederholt, bis sich alle Komplexe im globalen Optimum befinden

Die unabhängige Entwicklung der Komplexe zum Optimum der Zielgröße ist in Abbildung 5.9 beschrieben. Dort seien für drei Parameterkombinationen die jeweiligen Zielgrößen ( $ZG$ ) gegeben.  $ZG_1$  sei die Zielgröße mit der besten und  $ZG_2$  mit der zweitbesten Anpassung, während  $ZG_3$  die schlechteste Anpassung darstellt, die nun im nächsten Schritt aufgelöst und durch eine neue Zielgröße bzw. eine neue Parameterkombination ersetzt werden soll.

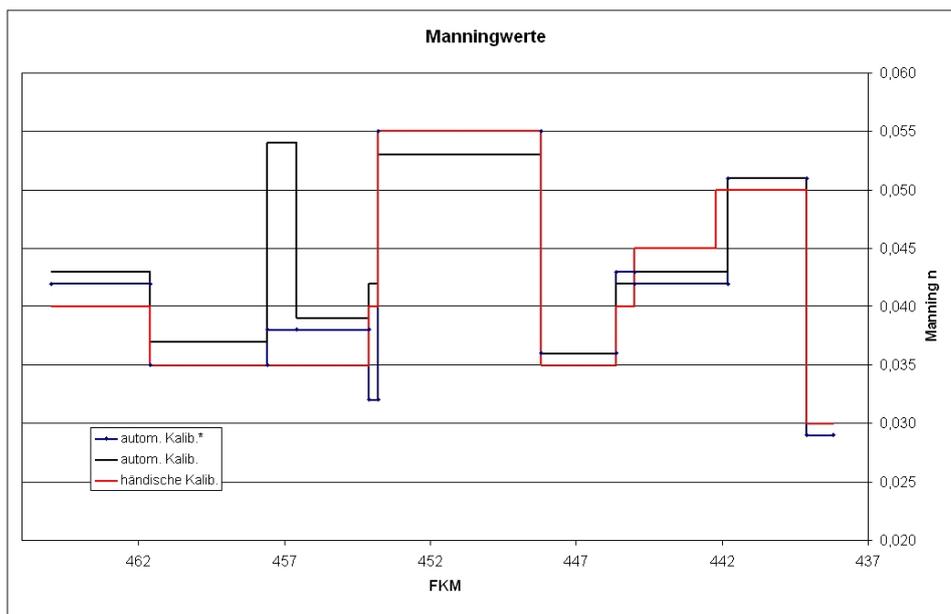


**Abb. 5.9:** Schematische Beschreibung der unabhängigen Entwicklung der Komplexe zum Optimum der Zielgröße

Dies erfolgt prinzipiell durch eine sogenannte Reflexion, Kontraktion oder Mutation. Bei der Reflexion (siehe Abbildung 5.9 Bild 3a) wird die neue Parameterkombination durch Spiegelung der  $ZG_3$  durch den Mittelpunkt der Punkte  $ZG_1$  und  $ZG_2$  ermittelt. Ist der Wert der auf diese Art entstehenden Zielgröße *besser* als für  $ZG_3$ , dann wird die Parameterkombination mit der schlechtesten Anpassung ( $ZG_3$ ) durch den neuen Punkt ersetzt und ein *Evolutionsschritt* ist abgeschlossen.

Wenn durch eine Reflexion keine Verbesserung der Zielgröße erreicht wird, so wird durch eine Kontraktion eine neue Parameterkombination generiert. Diese liegt auf halbem Weg zwischen  $ZG_3$  und dem Mittelpunkt der Punkte  $ZG_1$  und  $ZG_2$  (siehe Abbildung 5.9 Bild 3b). Wenn sowohl die Reflexion als auch die Kontraktion zu keinem besseren Ergebnis führen, so wird  $ZG_3$  durch eine zufällige Parameterkombination, erzeugt durch die sogenannte Mutation, ersetzt (siehe Abbildung 5.9 Bild 3c). Der Mutation bedient sich der Optimierungsalgorithmus auch, wenn die aus der Reflexion gewonnene Parameterkombination außerhalb des definierten Parameterraums liegen sollte.

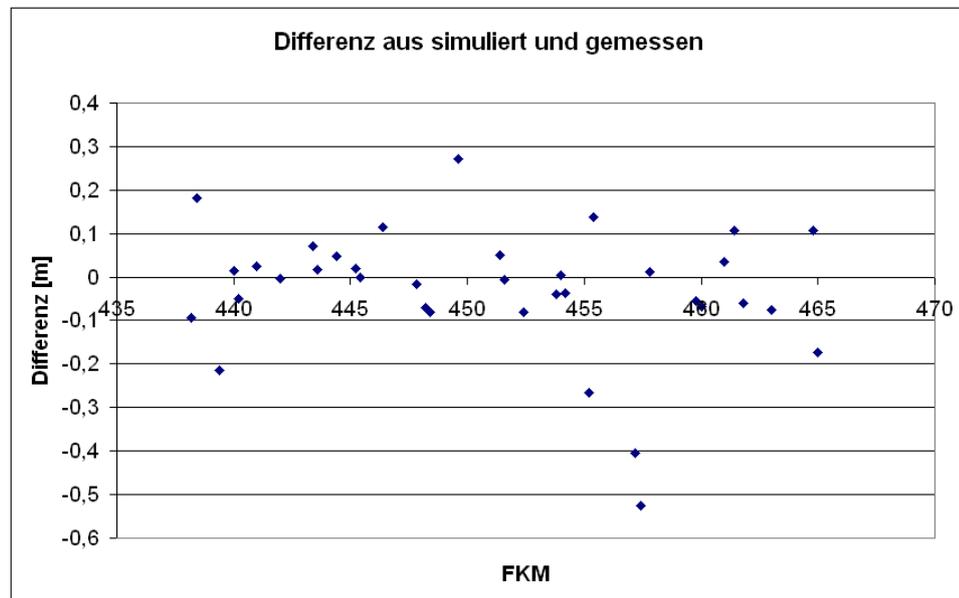
Abbildung 5.10 zeigt den Vergleich der händischen mit der objektiven Kalibrierung. Grundlage für die Kalibrierungen sind Fixierungspunkte für ein bordvolles Ereignis im März 2000 (im Mittel ca. alle 750 m aufgenommen). Darauf aufbauend erfolgt eine händische Kalibrierung, die einen mittleren quadratischen Fehler von 0,15 m aufweist. Durch die Visualisierung der Ergebnisse wird offensichtlich, dass sich unter den Fixierungspunkten zwei Messfehler befinden (FKM 457,2 und FKM 457,4). Werden zur Berechnung des mittleren quadratischen Fehlers die beiden Messpunkte ausgeschlossen, so liegt der mittlere quadratische Fehler bei 0,105 m.



**Abb. 5.10:** Längsschnitte der Manningwerte bei händischer und objektiver Kalibrierung (*autom. Kalib.:* automatische Kalibrierung mit allen Fixierungspunkten, *autom. Kalib.\*:* automatische Kalibrierung ohne fehlerbehaftete Fixierungspunkte)

Bei der automatischen Kalibrierung erfolgt zunächst die Optimierung hinsichtlich aller Fixierungspunkte (vgl. Abbildung 5.10 *autom. Kalib.*). Der mittlere quadratische Fehler ergibt sich hier zu 0,106 m und liegt somit deutlich unter den 0,15 m bei der händischen Kalibrierung. Der Grund liegt jedoch darin, dass bei der automatischen Optimierung auch die beiden fehlerhaften Fixierungspunkte Berücksichtigung finden, während bei der händischen Kalibrierung diese vernachlässigt werden. Vor einem unachtsamen Vertrauen auf die Ergebnisse einer objektiven Kalibrierung wird daher gewarnt. In diesem Fall erfolgte ein zweiter objektiver Kalibrierungslauf, bei dem nicht die fehlerhaften Fixierungspunkte zur Berechnung der Zielfunktion enthalten sind (vgl. Abbildung 5.10 *autom. Kalib.\**). Dieser Rechenlauf ist im direkten Vergleich zur händischen Kalibrierung zu sehen und bringt mit einem mittleren quadratischen Fehler von 0,102 m eine geringe Verbesserung

der Rauigkeitswerte. Jedoch liefern beide Kalibrierungsansätze sehr ähnliche Rauigkeitslängsschnitte, wobei die händische Kalibrierung über einen Tag Arbeitszeit in Anspruch nahm, während die automatische Kalibrierung ohne Aufsicht über Nacht erfolgte. Das Ergebnis der automatischen Kalibrierung kann Abbildung 5.11 entnommen werden.



**Abb. 5.11:** Differenz aus simulierten und gemessenen Werten

Es ist offensichtlich, dass die Güte der Kalibrierung von verschiedenen Faktoren abhängt. Neben den Messfehlern, der Messpunktdichte und dem Prozessverständnis/Genauigkeitsanforderung des Modellierers<sup>5</sup> kann insbesondere die Wahl der Gewässerabschnitte mit gleicher Rauigkeit eine entscheidende Rolle spielen. Hierbei sollten die Abschnitte nicht zu klein gewählt werden, um nicht unnötig den Kalibrierungsprozess undurchsichtig und langwierig zu gestalten. Gleichzeitig sollte dieser aber auch nicht zu groß sein, um bestimmte Prozesse in kleinen Abschnitten abbilden zu können. Das bedeutet, dass eine reine automatische Kalibrierung nicht zum gewünschten Ziel führen kann! Eine Kombination aus händischer und automatischer Kalibrierung hat sich im Rahmen dieser Arbeit als eine sehr gute Lösung bewährt. Daher werden für die Kalibrierung eines Modells folgende Arbeitsschritte vorgeschlagen:

- Sensitivitätsstudie der Rauigkeiten und gleichzeitige Plausibilisierung der Fixierungspunkte sowie Definition von Abschnitten gleicher Rauigkeiten

<sup>5</sup>Es wäre interessant ein Gebiet von 100 Personen getrennt kalibrieren zu lassen, um den Faktor Modellierer quantifizieren zu können. Denn die Anzahl der gewählten Abschnitte und auch die zugehörigen Rauigkeitswerte werden mit Sicherheit unterschiedlich ausfallen.

- Händische *Grobkalibrierung* der Rauigkeiten und Überprüfung bzw. evtl. Anpassung von Bauwerksparametern (z.B. Wehrüberfallhöhe oder -beiwert) sowie Definition von Rauigkeitsspannweiten für jeden Abschnitt
- Objektive Kalibrierung auf Basis der engen Rauigkeitsspannweiten

Zur Genauigkeit von Modellen hinsichtlich der Kalibrierung gibt WYRWA [2004] an, dass wenn genaue Kalibriermessungen und ein detailliert aufgestelltes 2D Modell vorliegen, die simulierten Ergebnisse (Wassertiefen) eine Genauigkeit von 0,1 m besitzen. Bei dem Einsatz eines dreidimensionalen Modells, dem eine hochgenaue Kalibriermessung vorliegt, das den Vegetationszustand berücksichtigt und die Morphodynamik miterfasst, sei eine Genauigkeit von 0,05 m zu erreichen.

# 6 Die Unsicherheit in hydrodynamischen Berechnungen

## 6.1 Einleitung

Numerische Modelle sind für die Ingenieurpraxis unerlässlich geworden. Dabei werden diese nicht nur für Entscheidungsunterstützungen herangezogen, sondern auch zur Berechnung der Standsicherheit von Bauwerken in den verschiedensten Disziplinen (Wasserbau, Statik, Geotechnik ...) verwendet. Somit sind wir an einen Punkt gelangt, an dem wir bereits seit Jahren nahezu uneingeschränkt auf mathematische Werkzeuge vertrauen. Auch wenn immer wieder der Ruf laut wird, dass nicht Modelle allein als Entscheidungsunterstützung verwendet werden sollten, ist das Vertrauen in die Ergebnisse sehr hoch. Insbesondere wenn die Komplexität des Modells zunimmt.

Es stellt sich nun die Frage, besonders wenn es sich um eine Prognose handelt, nach der Genauigkeit solcher Modelle. Hierfür ist der Vergleich mit der Natur das entscheidende Maß für die Genauigkeit, wobei auch mit Messfehlern bei den Naturdaten zu rechnen ist. Das Problem ist jedoch, dass eine mathematisch exakte Fehlerbetrachtung nicht vorgenommen werden kann; denn durch die Vielzahl an Einflussparametern und Annahmen im mathematischen Modell sind einzelne Fehlerquellen (z.B. vereinfachte Betrachtung komplexer Strömungsvorgänge, Turbulenz, Einfluss des Schwebstoff- und Geschiebetransports, etc.) explizit nicht vollständig erfassbar (DVWK [1999]). Da der Vergleich der Modellergebnisse mit der Natur die Genauigkeit widerspiegelt, können die Fehlerquellen in drei Kategorien eingeteilt werden:

- numerische Fehler
- Modellfehler
- Messfehler

Die numerischen Fehler beinhalten die Diskretisierungs- und Rundungsfehler. Denn während die gesuchte Lösung durch eine Differentialgleichung beschrieben wird, erfolgt eine Approximation ihrer Lösung durch eine Diskretisierung des Problems. Für die Eingrenzung dieses Fehlers dienen Konvergenztests, in denen das Verhalten der Ergebnisse für unterschiedliche Zeit- und Raumskalen untersucht wird. Ob die Ergebnisse gegen einen beliebigen oder identischen Endzustand konvergieren, gibt Aufschluss über ihre Korrektheit. Im Allgemeinen ist von einer Konvergenz der Ergebnisse auszugehen, wenn die Ort- und Zeitschrittweite ausreichend klein gewählt wird. In der Praxis wird jedoch mit feiner werdender Diskretisierung die meist heterogene Tiefenstruktur des Modellgebiets stärker aufgelöst, was zu größeren Bodengradienten führt, die sich wiederum nachteilig auf die numerische Genauigkeit auswirken. Für die Strömungsgleichungen führt eine feinere Diskretisierung zu einer höheren Auflösung von Wirbeln im Berechnungsgitter. Daher führt eine Netzverfeinerung nicht zwangsläufig zu einem guten Konvergenzergebnis. Zudem ist der Diskretisierungsfehler wegen der beschränkten Zahlendarstellungen in Computern (Rundungsfehler) nicht exakt berechenbar.

Die Modellfehler resultieren aus den vielen zu treffenden Annahmen und Vereinfachungen. So wird für ein 1D Modell mit einer querschnittsgemittelten Geschwindigkeit gerechnet, weshalb Querströmungen, Sekundärströmungen, Turbulenz, etc. keine Berücksichtigung in den Modellgleichungen finden können. Somit sind die Modellfehler in den Modellgleichungen zu suchen und sind abhängig von der Dominanz einzelner modellgebietabhängiger Prozesse und dessen mathematischer Abbildung.

Durch den Begriff Messfehler sind die Fehler in den Profilaufnahmen, Befliegungsdaten und auch Pegelmessungen gemeint. Das bedeutet, dass in die Un-/Genauigkeit des Modells ein entscheidender Faktor eingeht, der im Grunde nicht dem Modell zuzuschreiben ist.

Als vierte Fehlerquelle sei zudem die Instationarität des Modellgebietes erwähnt. Die Vegetation sowie die Abflussprofile ändern sich über das gesamte Jahr, während das Modell nur einen Zustand abbilden kann. Dies spielt zwar für Bemessungszwecke eher eine untergeordnete Rolle (gerechnet werden würde beispielsweise der *worst case*), aber für Prognosemodelle ist das ein wesentlicher Faktor für die Genauigkeit der Ergebnisse.

Das grundsätzliche Problem bei der Quantifizierung der Unsicherheit von numerischen Modellen für Hochwassersimulationen ist der Mangel an Messwerten. Denn einerseits treten Hochwasserereignisse selten auf und andererseits muss im Hochwasserfall eine Fixierung durchgeführt werden, um zum zugehörigen Pegelabfluss auch die maximalen Wasserstände zu haben. Das instationäre Verhalten einer Hochwasserwelle zwischen zwei

Pegeln ist somit generell nicht durch eine Messung gegeben. Einzig Satellitenaufnahmen<sup>1</sup> (oder eine Befliegung des Gebietes) können aus zeitlich versetzten Bildern der Überflutungsflächen einen flächenhaften Rückschluss auf den Ablauf der Welle geben (wie z.B. in HORRITT & BATES [2002]). Als ein sich etabliertes und effektives Verfahren der Abflussmessung sei hier die ADCP (Acoustic-Doppler-Current-Profiler)-Messung erwähnt. Aufgrund dessen, dass für das aus einer Projektarbeit gegebene Modellgebiet des Oberen Main lediglich ein aufgezeichnetes 5-jährliches Hochwasserereignis vorliegt, ist eine ausführliche Analyse der Unsicherheiten von großen Hochwasserereignissen sehr schwierig. Daher wird hier in erster Linie der quantitative Einfluss von Modellparametern auf den Wasserstand untersucht, um Richtwerte für die Unsicherheit angeben zu können. Zudem wird das Modellgebiet mit unterschiedlich komplexen Modellen abgebildet, um auch dahingehend die Modellergebnisse hinsichtlich ihrer Unterschiede zu untersuchen.

Es werden somit in der vorliegenden Arbeit die Parametereinflüsse sowie der Einfluss der Modellkomplexität durch Vergleichsrechnungen analysiert. Anschließend erfolgen Szenarienrechnungen, um auch die Einflüsse infolge von Deichbrüchen und Verklausungen zu erfassen. Diese unterschiedlichen Unsicherheitsquellen werden für jedes Flächenraster bzw. jeden Flächenberechnungspunkt erfasst und geben Aufschluss über die mögliche Gesamtunsicherheit im Modellgebiet.

## 6.2 Die Parameterunsicherheit

### 6.2.1 Vorbemerkung und Vorgehensweise

Die Methoden der Unsicherheitsanalysen sind vielfältig und können in verschiedene Kategorien eingeteilt werden. Hierbei ist von großer Bedeutung, ob Messdaten zur Unsicherheitsanalyse vorliegen. Das EPSRC (Flood Risk Management Research Consortium, siehe [www.floodrisknet.org.uk](http://www.floodrisknet.org.uk)) nimmt dabei u.a. folgende Klassifizierung der Unsicherheitsanalyseverfahren vor:

- Vorhersageunsicherheiten bei keiner oder geringer Messdatenlage
  - Berechnung der Gesamtunsicherheit aus Einzelunsicherheiten (KUNSTMANN & KASTENS [2006]) bei einfacher Modellstruktur

---

<sup>1</sup>Das Problem im Hochwasserfall ist jedoch, dass der Satellit zum einen ca. alle 2 h (Umlaufdauer) ein Bild aufnehmen kann und zum anderen sich während des Hochwasserereignisses über dem betroffenen Überschwemmungsgebiet befinden muss (dies kann Tage dauern)

- Monte Carlo Simulationen
- Fuzzy Methoden (RUAN [1995] oder KLIR & FOLGER [1988]), wenn die Unsicherheit nicht statistisch definiert werden kann
- Kalibrierung und Unsicherheitsanalyse basierend auf Messdaten
  - Lineare und Nichtlineare Regression (CLARKE [1994])
  - Bayes Methode (BERNARDO & SMITH [1994])
  - GLUE Methode (Generalized Likelihood Uncertainty Estimation) (BEVEN & BINLEY [1992])

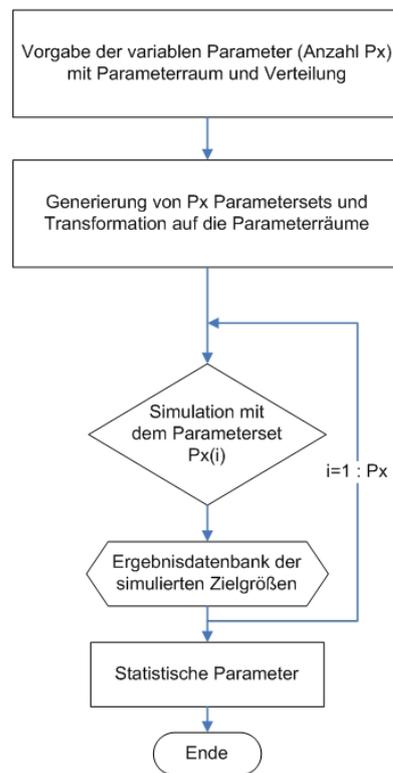
Aufgrund dessen, dass im vorliegend Fall kaum Messdaten zur Verfügung stehen, das Modell keine einfache Modellstruktur besitzt und die Parameterunsicherheit statistisch beschrieben werden kann, findet für die Unsicherheitsanalyse der hiesigen Untersuchungen die Monte Carlo Methode Anwendung.

### 6.2.1.1 Monte Carlo Simulation

Die Monte Carlo Technik ist das Standardverfahren unter den stochastischen Simulationen und stellt auch für andere Unsicherheitsanalyseverfahren die Grundlage dar. Die Vorgehensweise dieser Methode ist wie folgt (vgl. Abbildung 6.1):

- Generierung von Zufallsfeldern für jeden mit Unsicherheit behafteten Parameter (Feldgröße entspricht Simulationszahl) unter Berücksichtigung ihrer jeweiligen Verteilung bzw. Statistik
- Simulation aller generierten Parameterkombinationen aus den Zufallsfeldern
- Statistische Auswertung der Simulationsergebnisse

Die Rechtfertigung, dass Zufallszahlen die Basis für das Ergebnis eines mathematisch basierten Modells darstellen, findet die Monte Carlo Methode im Gesetz der großen Zahlen. Das Gesetz besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses immer weiter an die theoretische Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis annähert, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird.

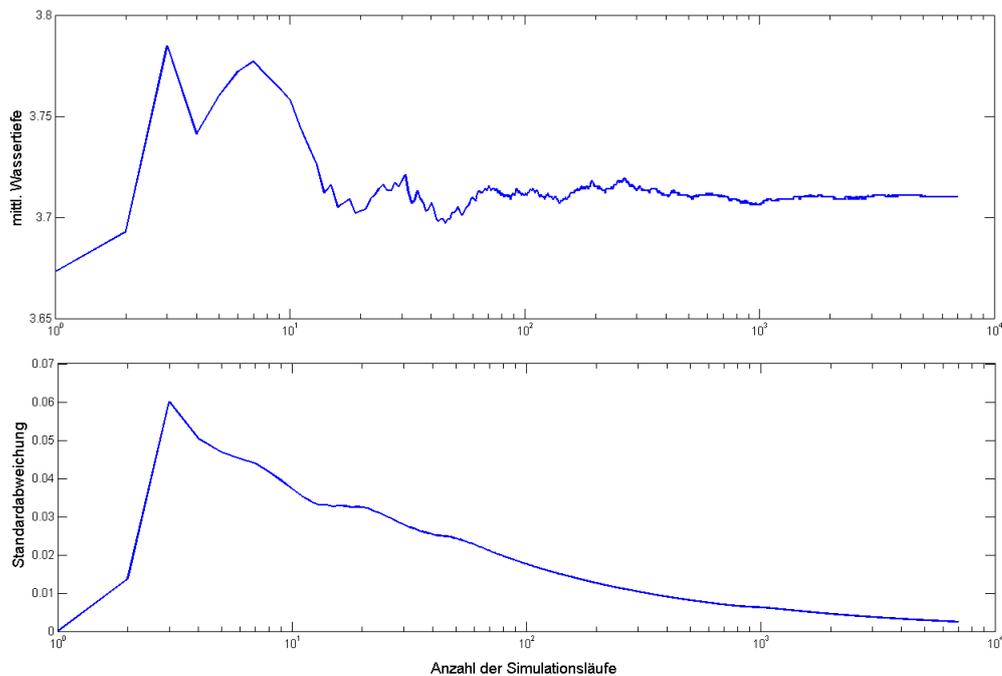


**Abb. 6.1:** Schematische Darstellung der Monte Carlo Simulationen

Somit liegt der Nachteil der Monte Carlo Simulationen darin, dass ihre Genauigkeit im direkten Zusammenhang zu der Anzahl der Simulationsläufe steht. Daher ist meist eine hohe Anzahl an Simulationsläufen erforderlich, um ein statistisch repräsentatives Ergebnis zu erhalten. Eine eindeutige Angabe über die Anzahl der erforderlichen Simulationsläufe ist in der Literatur nicht zu finden. Sie ist abhängig von der Problemstellung und fällt in der Literatur unterschiedlich aus. Grundsätzlich ist davon auszugehen, dass bei der Variation eines Parameters 100 Simulationen ein annähernd korrektes Ergebnis des Mittelwertes liefern und mehr als 1000 Simulationen erforderlich sind, um die Varianzen und Kovarianzen richtig abschätzen zu können (FORKEL [2004]). Liegen mehrere unsichere Parameter vor, so potenziert sich die Anzahl der Simulationsläufe. Daher liegt auch der Hauptnachteil dieser Methode in der Rechenzeit sowie Rechenkapazität.

Um dem entgegen zu wirken, ist ein geeigneter Zufallszahlengenerator zu wählen. Dadurch wird bereits mit einer geringen Anzahl von Zufallszahlen die Parameterspannweite stochastisch (Mittelwert, Standardabweichung, Schiefe und Verteilung) ausreichend abgedeckt, wodurch eine geringere Simulationsanzahl erforderlich wird. Das Thema des Minimierens der Monte Carlo Simulationen ist besonders in der hydrologischen Modellierung verbreitet (z.B. in KHU & WERNER [2003]). Um jedoch die gewählte Simulationszahl als ausreichend erkennen zu können, sollten die verschiedenen statistischen Größen der Zielgröße mit der wachsenden Anzahl an Berechnungsläufen ermittelt und visualisiert

werden. Ist eindeutig ein Konvergenzverhalten zu erkennen und ist die Änderung dieser statistischen Größen mit zunehmender Simulationszahl verschwindend gering, so ist die Anzahl der Simulationsläufe ausreichend. Da im vorliegenden Fall keine Zielgröße optimiert (z.B. wie bei einer Kalibrierung) sondern das statistische Verhalten der Wassertiefe für möglichst den gesamten Parameterraum untersucht wird, ist bei zunehmender Simulationszahl mit einer Konvergenz des Mittelwertes sowie der Standardabweichung der simulierten Wassertiefen zu rechnen. Diesbezüglich zeigt Abbildung 6.2 die sukzessive Änderung der mittleren Wassertiefe und der Standardabweichung bei zunehmender Simulationszahl. Daraus wird für die vorliegende Untersuchung ersichtlich, dass bereits ein Stichprobenumfang von 2000 Simulationen die Grundgesamtheit gut wiedergibt. Trotzdem ist eine möglichst große Simulationszahl anzustreben, was in der vorliegenden Arbeit stets ein Ziel ist.



**Abb. 6.2:** Entwicklung des Mittelwertes der simulierten Wassertiefen mit zunehmender Simulationszahl (Auswertung der Simulation entsprechend nach Tabelle 6.4). Beispiel aus Simulationen für synthetisches Gerinne mit Wassertiefe über Sohle

Die Monte Carlo Simulation findet bereits seit fast 50 Jahren in den Themenbereichen wie Grundwassermodellierung (WARREN & PRICE [1961]), Stofftransportmodellierung (PTAK [1993]), Niederschlag-Abfluss-Modellierung, hydrodynamische Modellierung etc. Anwendung. Das Verfahren hat sich insbesondere für die Unsicherheitsanalyse bewährt.

So verwendet THEIS [2005] das Prinzip der Monte Carlo Simulation zur Quantifizierung von Prognoseunsicherheiten numerischer Grundwassermodelle, FREEZE & MASSMANN [1990] beschreiben einen Ansatz zur Abschätzung der Parameterunsicherheit als einen Teil einer breiteren hydrogeologischen Entscheidungsanalyse und MAURER [2002] berechnet die Zuverlässigkeit von Feststofftransportmodellen durch die Wahrscheinlichkeitsberechnung von Erosions- und Sedimentationsprozessen.

Während die Unsicherheitsanalyse insbesondere in der hydrologischen Modellierung Anwendung findet, werden die dort entwickelten Verfahren immer häufiger in der hydrodynamischen Modellierung eingesetzt. Beispielsweise analysiert PAPPENBERGER ET AL. [2004] die Unsicherheit der Zuflussrandbedingung, wenn diese mittels aufgestellter Abflusskurven abgeleitet wird. In PAPPENBERGER ET AL. [2006] wird neben der Zuflussrandbedingung die Art der Implementierung von Brücken hinsichtlich der Auswirkung auf die Überschwemmungsflächen untersucht. Der Vergleich unterschiedlich komplexer Modelle bezüglich ihrer Modellergebnisse erfolgt beispielsweise in WERNER [2004] und HORRITT & BATES [2002], während der Einfluss der Netzauflösung (zur Beschreibung der Topographie) auf die Modellergebnisse in HARDY ET AL. [1999] und NOACK [2007] behandelt wird. Die meisten Unsicherheitsanalysen beziehen sich jedoch auf die Rauigkeitsparameterwerte (z.B. GUGANESHARAJAH ET AL. [2006], WERNER ET AL. [2005], HORRITT [2006] und HALL ET AL. [2005]).

In der vorliegenden Arbeit werden möglichst viele Aspekte der Modellunsicherheiten zusammenhängend untersucht.

Entscheidende Faktoren für die Qualität der Monte Carlo Verfahren sind die Modelleingangsgrößen (vgl. u.a. PECK ET AL. [1988]). Sie werden durch einen Parameterraum (maximale und minimale Parametergröße) und einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion definiert, aus dem der Zufallszahlengenerator schließlich die Parameterwerte für die Simulationen zieht. Ist beispielsweise die Annahme der Verteilung einer Zufallsvariablen nicht richtig, oder die Zufallszahlen nicht wirklich *zufällig* und zeigen möglicherweise periodische Schwankungen oder Trends, so besitzen in diesem Fall die Ergebnisse einer Monte Carlo Simulation keine statistische Relevanz.

### 6.2.1.2 Latin Hypercube Sampling

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, spielen die Eingangsdaten für die Monte Carlo Simulation eine entscheidende Rolle für die Aussagekraft der Ergebnisse. Hierbei handelt es sich um die Modellparameter, die durch ein Feld mit Parameterkom-

binationen (bzw. ein Zufallsfeld je Parameter) definiert werden. Um die Qualität der Modellergebnisse in Abhängigkeit eines Parameters gewährleisten zu können, müssen die Zufallsfelder die Statistik der Naturdaten besitzen (gleiche Mittelwerte und Varianzen). Denn nur in diesem Fall wird der Modellparameter durch ein Zufallsfeld gut abgebildet. Liegt ein direkter Zusammenhang zwischen den Parametern vor, hat auch die Kovarianz bei der Generierung der Zufallsfelder Berücksichtigung zu finden. Diesbezüglich ist beispielsweise bei der Betrachtung der Rauigkeiten im Vorland und Flussschlauch im Sommer eine positive Kovarianz (beide Parameter besitzen einen *gleichsinnigen* linearen Zusammenhang, bzw. hohe Werte der Flussschlauchrauigkeit gehen einher mit hohen Vorlandrauigkeitswerten) zu erwarten.

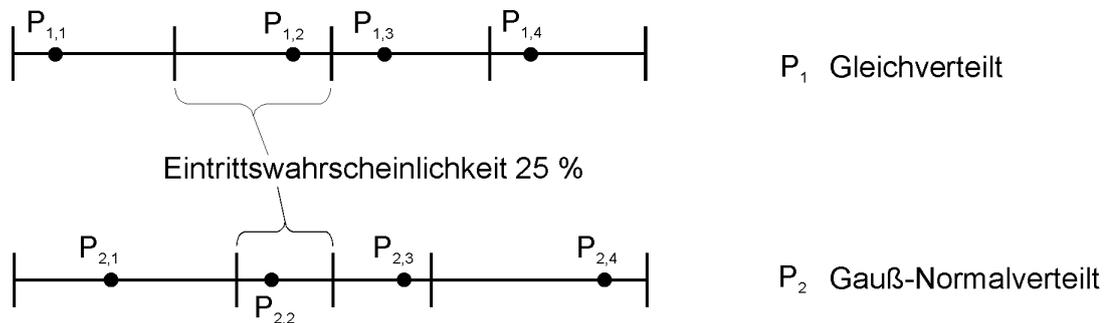
FORKEL [2004] beschreibt vier der bekanntesten Simulationsverfahren, anhand derer geeignete Zufallsfelder generiert werden können:

- Latin Hypercube Sampling
- Turning Band Simulationen (Prinzip der Reduktion des mehrdimensionalen Zufallsfeldes auf mehrere eindimensionale stochastische Prozesse, vgl. u.a. OPHEYS ET AL. [1994] nach FORKEL [2004])
- Sequentielle Simulationsverfahren (die Verteilung der bereits simulierten Werte wird analysiert und für die Simulation weiterer Werte mit einbezogen, vgl. OPHEYS [1997])
- Simulated Annealing (vgl. OPHEYS [1997])

In der vorliegenden Arbeit kommt die Latin Hypercube Methode zur Anwendung, auf deren Beschreibung sich dieser Abschnitt im Folgenden beschränken wird.

Die Generierung von Zufallszahlen am Computer erfolgt generell durch arithmetische Operationen mit hohen Zahlen, weil die letzten Stellen der Zahl im Computerspeicher zufallsabhängig sind. Hierdurch wird ein Vektor gleichverteilter Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt. Allerdings kann es in manch einer arithmetischen Operation zu Abhängigkeiten und zu Periodizitäten in den Zufallszahlen kommen, wodurch die Generierung von *echten* Zufallsfeldern eine wissenschaftliche Herausforderung darstellt. Hier bietet die Latin Hypercube Methode für eine verhältnismäßig geringe Anzahl von Simulationen eine gute Möglichkeit zur Generierung von beispielsweise gleichverteilten oder normalverteilten (Gauß-Normalverteilung) Zufallszahlen. Hierzu wird die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung eines jeden zu variierenden Parameters  $P_i$  in Abschnitte gleicher Wahrscheinlichkeiten unterteilt. Abbildung 6.3 zeigt beispielhaft die Generierung von

zwei Zufallsfeldern (gleich- und normalverteilt) zur gemeinsamen Verwendung für eine Monte Carlo Simulation.



**Abb. 6.3:** Prinzip der Latin Hypercube Methode der beiden Parameter  $P_1$  und  $P_2$  für eine Zufallsfeldgröße  $P_x = 4$  und bei unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen

Die Anzahl der Abschnitte entspricht dabei der Größe des Zufallsfeldes bzw. der Anzahl der Monte Carlo Simulationen (in dem Beispiel handelt es sich um 4 Abschnitte mit einer jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeit von 25%). Ist jeder Parameterraum in Abschnitte gleicher Wahrscheinlichkeiten unterteilt, dann wird aus jedem dieser Abschnitte ein zufälliger Parameterwert  $P_{i,j}$  (mit  $j = 1, 2, \dots, P_x$ ) gezogen. Um nun für eine Simulation jeweils eine zufällige *Parameterkombination* zu erhalten, folgt für jeden Parameter getrennt eine zufällige Permutation der Reihenfolge. Somit haben die Parameter in sich die definierten stochastischen Eigenschaften, und die Kombination von mehreren zu variierenden Parametern ist zudem zufällig, sodass der gesamte zu erschließende Parameterraum gut approximiert wird.

Der Vorteil der Latin Hypercube Methode ist nicht nur die Anwendbarkeit auf Parameter unterschiedlicher Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen, sondern auch, dass bei einer festen Anzahl von Simulationen stets eine bessere Annäherung der vorgegebenen Statistik eines jeden Parameters erhalten wird, als mit einer rein zufälligen Verteilung. Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens ist zudem die einfache Berücksichtigung von Korrelationen verschiedener Parameter untereinander (siehe FORKEL [2004]).

## 6.2.2 Untersuchte Modellparameter

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Einflüsse der Parameter Abfluss ( $Q$ ), Flussschlauchrauigkeit ( $k_{st}FS$ ), Vorlandrauigkeit ( $k_{st}VL$ ), Flussschlauchsohlhöhe ( $y_{FS}$ ) und Vor-

landhöhe (yVL) auf den Wasserstand untersucht. Hierzu werden die in Tabelle 6.1 zusammengefassten Parameterräume bzw. für die Sohl- und Vorlandhöhe die Spannweiten herangezogen.

**Tab. 6.1:** *Parameterräume für einen vegetationsarmen Zustand (Zustand im Winter)*

Parameter	Schwankungsbreite
Q	$\pm 15\%$
$k_{st}FS$	$30 - 44 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$
$k_{st}VL$	$25 - 40 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$
yFS	$\pm 0,2 \text{ m}$
yVL	$\pm 0,15 \text{ m}$

Die Wahl der Parameterräume ist in den kommenden Abschnitten erläutert. Da die Unsicherheit des Abflusses streng genommen nicht der Modellunsicherheit zuzuordnen ist, wird für einen großen Teil der Untersuchungen ein konstanter bzw. nicht variabler Abfluss angenommen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen aller Parameter werden als gleichverteilt angesetzt, weil die gewählten Spannweiten aller Parameter verhältnismäßig klein und somit in einem sehr plausiblen Bereich definiert werden. Einzig die Vorlandhöhe wird für Vergleichsrechnungen zusätzlich normalverteilt gerechnet, weil für diesen Parameter Daten hinsichtlich der statistischen Verteilung vom Landesvermessungsamt vorliegen. Trotzdem ist für diesen Parameter ebenso die Wahl einer Gleichverteilung zu empfehlen, weil die Befliegungsdaten einen Versatz haben (können) dessen statistisches Verhalten unbekannt ist und die Spannweite der möglichen Parameterwerte sehr klein gewählt wurde, wodurch dieser Fehler durch eine Gleichverteilung besser abgebildet wird. Denn die vom Landesvermessungsamt angegebenen statistischen Parameter zur Beschreibung der Unsicherheit von Befliegungsdaten sind lediglich aus der Streuung der Messdaten abgeleitet.

### 6.2.2.1 Abfluss

Der Abfluss geht in das hydrodynamische Modell als Randbedingung ein und wird beispielsweise aus einer Pegelstatistik gewonnen und für Vorhersagemodelle aus Niederschlag-Abfluss Modellen<sup>2</sup> berechnet. Die Unsicherheit dieses Parameters ist somit eher hydrologischen Modellen oder der Hochwasserstatistik bzw. Länge der Pegelzeitreihe und der verwendeten Verteilungsfunktion sowie der Ungenauigkeit von Wasserstand-

<sup>2</sup>Monitoring-Daten bzw. Pegelzeitreihen von Oberliegern können ebenfalls für Vorhersagemodelle herangezogen werden

Abfluss-Beziehungen zuzuschreiben. Demnach ist der Abfluss nicht Bestandteil der Untersuchungen, wenn die Unsicherheit des hydrodynamischen Modells quantifiziert werden soll. Die Monte Carlo Simulationen erfolgen daher in erster Linie mit konstanten Abflusswerten. Trotzdem werden einige Berechnungen durchgeführt, in denen der Einfluss des Abflusses untersucht wird, um dessen Wirkung zu analysieren. Hierzu werden Abflüsse der Jährlichkeiten 5 ( $HQ_5 = 210 \frac{m^3}{s}$ ), 20 ( $HQ_{20} = 320 \frac{m^3}{s}$ ) und 100 ( $HQ_{100} = 460 \frac{m^3}{s}$ ) gewählt und jeweils mit dem gleichen Unsicherheitsband beaufschlagt. Für das definierte Abflussspektrum ist somit gewährleistet, dass einerseits ein Vorlandabfluss stets eintritt und andererseits nicht die Modellgrenzen (Modellrand) erreicht werden. Die Abflusswerte stammen aus den *Hydrologischen Planungsgrundlagen* des Bayerischen Landesamtes für Umwelt (LfU). Neben den Abflüssen sind dort auch Genauigkeitsangaben in % für 100-jährliche Abflüsse getroffen worden, die auf Erfahrungswerte basieren. Es werden pauschal drei Genauigkeitsstufen bzw. Vertrauensbereiche für Abflüsse der Jährlichkeit 100 definiert.

- **15 %**: Pegel mit langen und weitgehend homogenen Messreihen
- **25 %**: Pegel mit kurzen Messreihen und stark streuenden Messwerten
- **20 %**: Pegel mit mittleren Verhältnissen

Somit sind die Genauigkeitsangaben eine Kombination aus der Messgenauigkeit und der Güte der Serie. Bezüglich der Unsicherheiten bei der Extremwertstatistik,

- die auf die Auswahl der zu untersuchenden Stichprobe (Stichprobenumfang),
- auf die Auswahl der Verteilungsfunktion und
- auf die Schätzung der Parameter der Verteilungsfunktion beruhen,

wurde eine Untersuchung von der Bundesanstalt für Gewässerkunde beauftragt (BARDOSSY & MARKOVIC [2002]). Die Ergebnisse der Extremwertstatistik für die bearbeiteten Pegel Andernach, Maxau, Kaub, Worms (Rhein), Cochem (Mosel), Kalkofen (Lahn) und Plochingen (Neckar) zeigen u.a. für einen Abfluss der Jährlichkeit 100 Unterschiede (abhängig vom Pegel) zwischen 8 bis 39 % auf. Abhängig von der Jährlichkeit nehmen die Spannweiten größere Werte (hohe Jährlichkeiten) bzw. kleinere Werte (niedrige Jährlichkeiten) ein.

Der Pegel Mainleus wird in dieser Arbeit für die Zuflussrandbedingung herangezogen. Der Vertrauensbereich wird für diesen Pegel in den *Hydrologischen Planungsgrundlagen*<sup>3</sup> mit

---

<sup>3</sup>Bayerisches Landesamt für Umwelt

20 % angegeben. Da dieses Unsicherheitsband in seiner Wirkung auf die entsprechende Wassertiefe im Gerinne vergleichsweise zu den anderen Parametern sehr groß ist, wird für die vorliegende Arbeit die Spannweite auf 15 % reduziert und unabhängig von der Abflussgröße bzw. Jährlichkeit angenommen.

Für die Analyse der Parametereinflüsse auf eine Hochwasserganglinie ist anstatt eines Abflusswertes eine Zuflussganglinie erforderlich. Diese kann beispielsweise eine gemessene Ganglinie aus einem historischen Ereignis sein. Liegen keine Daten vor, kann ein Niederschlag-Abfluss Modell herangezogen werden, das mit einem Niederschlag der gewünschten Jährlichkeit belastet wird. Die simulierte Ganglinie entspricht dann einer Hochwasserwelle der Jährlichkeit des Niederschlags. Hierbei wird angenommen, dass die Jährlichkeit des Niederschlags der des Abflusses entspricht ( $T_n(\text{Abfluss}) = T_n(\text{Niederschlag})$ ), wobei vorausgesetzt wird, dass das resultierende Abflussereignis die gleiche Wiederholungszeitspanne besitzt wie der verursachende Niederschlag. Näheres dazu ist in DVWK [1984] zu finden. Für das vorliegende Untersuchungsgebiet steht eine gemessene Hochwasserwelle der Jährlichkeit 5 zur Verfügung. Die Form wird für die Untersuchungen behalten und durch eine Verzerrung in ihren Abflusswerten an ein 100-jährliches Ereignis angepasst. Die Dauer des Ereignisses bleibt somit unverändert.

### 6.2.2.2 Rauigkeiten

Ein entscheidender Modellparameter für die Modellunsicherheit ist die Rauigkeit. Genauso wie ein Modellansatz (Rauigkeitsansatz) gewählt werden muss (Manning, Chezy, Darcy-Weisbach), muss auch ein Rauigkeitswert angenommen werden. In ihm werden zusätzlich, neben der Sohlreibung, die nicht im Modell erfassten Prozesse (z.B. Turbulenz oder Sekundärströmung) durch eine Kalibrierung abgebildet. Grundsätzlich kann ein Querprofil zur Simulation eines Hochwassers hinsichtlich der Rauigkeit in die drei Abschnitte Gewässersohle, Böschungsbereich und Vorland aufgeteilt werden, weil in diesen Abschnitten meist unterschiedliche Bedingungen herrschen. Da in der vorliegenden Arbeit allein der Hochwasserabfluss untersucht wird, werden Gewässersohle und Böschungsbereich als ein gemeinsamer Abschnitt betrachtet. Somit erfolgt die Parametrisierung des Querprofils durch die Rauigkeit der Gewässersohle ( $k_{st}FS$ ), gemittelt aus Sohlrauigkeit und Böschungsrauigkeit (vgl. BOLLRICH [2000]), und des Vorlandes ( $k_{st}VL$ ).

Für die Vorgabe der Parameterräume ist die Landnutzung maßgebend. Die Landnutzung ist wiederum abhängig von der Vegetation bzw. von der Jahreszeit. Da im Modellgebiet die Hochwasserereignisse im Winter eintreten, wird dies entsprechend berücksichtigt. Wie bereits in Kapitel 4.2 festgestellt, ist die Landnutzung geprägt durch überwiegend

Wiesen- und Weidenflächen, sowie zu einem geringen Teil durch Ackerland. LFU BADEN-WÜRTTEMBERG [2003] schlägt einen nahezu identischen Parameterraum für Grasflächen ohne Büsche (kurzes Gras) und für landwirtschaftlich genutzte Flächen ohne Bepflanzung vor:  $k_{st}VL = 25 - 40 \sqrt[3]{m}/s$ . Daher wird dieser Wertebereich übernommen, ohne einen zusätzlichen Fehler aufzuschlagen.

Hinsichtlich der Sohlreibung wird die Rauigkeitsspannweite  $k_{st}VL = 30 - 44 \sqrt[3]{m}/s$  gewählt. Diese Spannweite setzt sich zusammen aus einer Sohle ohne Unregelmäßigkeiten, bestehend aus Fein- sowie Grobkies (vgl. Abbildung 4.7), und einer homogenen Uferböschung mit vereinzelt Baumbewuchs. Auch hier wird keine zusätzliche Unsicherheit aufgeschlagen, obwohl Literaturwerte (im Labor oder anderen Modellgebieten ermittelt) nicht bedenkenlos für alle Gebiete genommen werden sollten. WERNER ET AL. [2005] zeigt beispielsweise durch Unsicherheitsanalysen, dass insbesondere die Vorlandrauigkeit schwierig abzuschätzen ist und eine starke Variabilität besitzt. Die Flussschlauchrauigkeit ist hingegen genauer quantifizierbar (siehe WERNER [2004]).

Das grundsätzliche Problem bei der Rauigkeit ist, dass sie aus historischen Ereignissen ermittelt wird, aber sich gleichzeitig instationär verhält. Wenn beispielsweise das Kalibrierungsereignis im April bzw. Frühjahr war, aber das Modell für eine Prognose im Dezember eingesetzt wird, so sind die Randbedingungen nicht mehr dieselben und ein Fehleranteil in den Ergebnissen ist vorprogrammiert. Optimal wäre für ein Prognosemodell eine Vielzahl von fixierten Hochwasserereignissen, aus denen man ein Pool von Modellen erzeugen könnte, die eine Prognose zu jeder Randbedingung bzw. Jahreszeit ermöglichen. Des Weiteren ist zwar eine Kalibrierung im Flussschlauch relativ trivial (Niedrigwasserfixierungen, Bordvollfixierungen), im Vorland ist jedoch eine detaillierte Kalibrierung auf Grund fehlender Geschwindigkeitsinformationen kaum möglich. Somit sind die Unsicherheiten im Vorland entsprechend größer. Eine zusätzliche Fehlerquelle der kalibrierten Rauigkeitswerte stellen die Pegelmessungen und die Vermessung der Fixierungspunkte dar. Denn schließlich bergen auch die Pegelraten (vgl. LFU BADEN-WÜRTTEMBERG [2006], FIEDLER [2007]) und die Aufnahme der Geschwemmsellinie<sup>4</sup> Messungenauigkeiten in sich.

Die Auswirkungen eines Messfehlers hat beispielsweise WYRWA [2004] untersucht. Er zeigt, dass ein Fixierungsmessfehler von  $\pm 0,1$  m den eigentlichen Stricklerwert von  $32 \sqrt[3]{m}/s$  mit  $26 \sqrt[3]{m}/s$  zum Unterschätzen bzw. mit  $45 \sqrt[3]{m}/s$  zum Überschätzen führen

---

<sup>4</sup>Zumeist wird ein Gewässer von unterschiedlichen Messteams aufgezeichnet. Da subjektive Kriterien beim Vermessen eine Rolle spielen können, wäre es jedoch empfehlenswert, dass eine Person die gesamte Vermessung durchführt. Um vereinzelt Messfehlern entgegenzuwirken, sollte zudem ein Ereignis mindestens von zwei Personen, die unabhängig voneinander arbeiten, messtechnisch erfasst werden.

würde.

Es sei hier zudem erwähnt, dass die Rauigkeit zum einen abflussabhängig ist und des Weiteren sich die Sohlenform und somit die Rauigkeit in Abhängigkeit von der Fließgeschwindigkeit ändert<sup>5</sup> (siehe DVWK [1994]).

Somit ist insgesamt der gewählte Wertebereich sehr realistisch, was besonders die Annahme einer Gleichverteilung rechtfertigt.

### 6.2.2.3 Abflussprofil

Neben der Sohlreibung spielt ebenso das Abflussprofil eine entscheidende Rolle bei der Abbildung des Abflussgeschehens. Dabei wird das Abflussprofil unterschieden in Sohlhöhe und Vorlandhöhe. Die Datengrundlage für die Sohle stellen die aufgenommenen Querprofil- und für das Vorland sogenannte Befliegungsdaten dar. Beide Parameter sind mit Unsicherheiten behaftet, sodass auch sie Berücksichtigung in der vorliegenden Untersuchung finden. Hierzu werden entsprechend keine konstanten Werte, sondern zwei Parameterräume für die vertikale Variabilität des Querprofils angenommen (Flussschlauchvariabilität  $y_{FS}$  und Vorlandvariabilität  $y_{VL}$ ). Ein möglicher Fehler in der Querprofilaufnahme lateral zur Fließrichtung wird nicht berücksichtigt, weil eine Verzerrung des Profils in horizontaler Richtung einen in der Größenordnung  $\pm 10\%$  vernachlässigbaren Einfluss auf den Wasserstand besitzt. Dies zeigten eigene Voruntersuchungen an einem synthetischen Gerinne.

Eine eindeutig quantifizierbare Dimensionierung des Parameterraums für die Flusssohle stellt sich grundsätzlich schwierig dar. Denn einerseits sind die vorliegenden Querprofil- und mit Messfehlern behaftet und gleichzeitig sind die Daten mehrere Jahre alt. Während die Messfehler eindeutig bzw. statistisch quantifizierbar sind (vgl. WITTE & SCHMIDT [1995]), kann ohne eine erneute Vermessung das instationäre Verhalten des Profils (infolge Erosion und Sedimentation) kaum abgeschätzt werden. Schließlich können mit jedem Hochwasser gravierende Veränderungen in dem Querprofil erwartet werden.

HORRITT [2006] gibt beispielsweise für den vertikalen Messfehler bei der Profilaufnahme  $\pm 0,1$  m an. Daher wird hier vereinfachend eine mögliche gesamte Fehlerspannweite von  $\pm 0,2$  m angenommen. Dabei stellt sich jedoch die Frage, ob jedes Querprofil unabhängig voneinander verändert werden soll, oder alle Profilsohlen gleichzeitig um den selben Parameterwert verändert werden. Hier wird das letztere angenommen, weil es einerseits einen größeren Einfluss auf die Wassertiefenvariabilität besitzt und des Weiteren sich eine

---

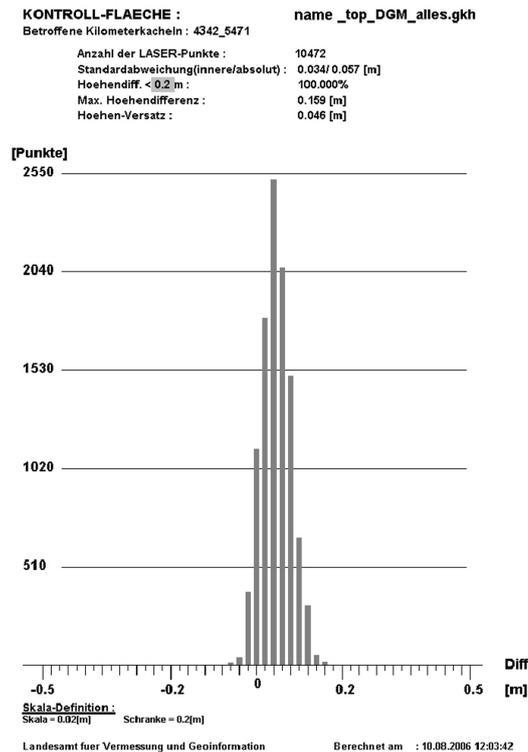
<sup>5</sup>In Gebirgsbächen ist zudem auch der Effekt der Abpflasterung zu beobachten, der das Strömungsgeschehen stark beeinflusst (siehe Projekt ALPRESERV)

Ablagerung, Erosion oder Beharrung, zumeist abschnittsweise einstellt.

Zur Definition des Parameterraums für die mögliche Vorlandhöhenvariabilität spielt in erster Linie das Messverfahren die entscheidende Rolle. Während in der Vergangenheit eher Reliefkarten mit einer Genauigkeitsspannweite von  $\pm 1$  m (BATES ET AL. [1998] und STEWART ET AL. [1999] nach HORRITT [2006]) zur Abbildung des Vorlandes verwendet wurden, dienen heutzutage eher Befliegungsdaten als Datengrundlage für das Vorland (siehe auch RIEGER [2005]). Deren Unsicherheitsspannweite gibt HORRITT [2006] mit  $\pm 0,15$  m an. Diese gründen primär auf Vermessungsfehlern, die aus Vergleichsmessungen zwischen Befliegungsdaten und terrestrischer Vermessung für ebene Flächen (z.B. Sportplätze) stammen. Diese Spannweite wird für die vorliegende Arbeit übernommen.

Das bayerische Landesamt für Vermessung und Geoinformation (LVG), das Befliegungen in Auftrag gibt und anschließend selbst validiert, gibt einen Fehler der Befliegungsdaten mit einer Standardabweichung von bis zu 0,09 m an (Gespräch mit Fr. Karin Möst, LVG München). Diese Ungenauigkeitsangabe gilt jedoch für ebene Flächen ohne Vegetation. Bei inhomogener Topografie oder beispielsweise nicht horizontalen Flächen (Böschungen), sei von einem größeren Fehler auszugehen. Zudem spielt die Approximation des Vorlandes durch das Berechnungsnetz bzw. das Berechnungsraster eine weitere Rolle. So muss bei der Erstellung des Vorlandrasters auf die Auflösung geachtet werden, weil mit größer werdender Rasterweite sich auch die Wiedergabe der Geländeoberfläche verschlechtert.

Auch für den Parameter der Vorlandhöhenvariabilität stellt sich die Frage, ob dieser separat für jede Gridzelle zugewiesen werden soll. Somit wäre die Variabilität einer jeden Zelle völlig unabhängig von der Nachbarzelle. Dies wäre jedoch dann sinnvoll, wenn die Überflutungsfläche sich aus unterschiedlichen Landnutzungsflächen zusammen setzen würde (Genauigkeit der Befliegungsdaten ist landnutzungsabhängig), oder sich über eine teilweise homogene und andernteils stark heterogene Topografie erstrecken würde. Da jedoch das untersuchte Gebiet weder nennenswerten Landnutzungsunterschieden unterliegt, noch die Topografie über die Fläche stark variiert, wird grundsätzlich von einem Vorlandvariationsparameter ausgegangen, der für das gesamte Vorland gilt. Hierfür spricht auch die Tatsache, dass Befliegungsdaten über die gesamte Messfläche einen Versatz besitzen können (vgl. Abbildung 6.4). Trotzdem wurde eine Vergleichsrechnung durchgeführt, bei der jedes Höhenraster unabhängig von dem Nachbarraster variiert wurde.

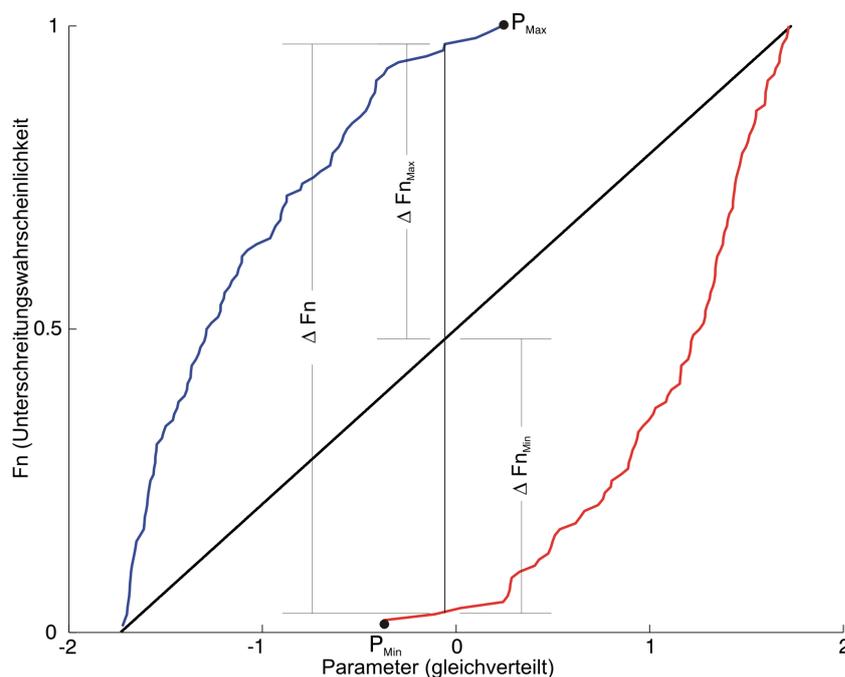


**Abb. 6.4:** Güte von Befliegungsdaten, dargestellt durch ein Histogramm der Differenz aus Befliegungsdaten und terrestrischen Daten (Quelle: LVG)

### 6.2.3 Die Generalisierte Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse ist ein wichtiger Bestandteil der Modellierung. Sie dient zur Quantifizierung von Modellparametereinflüssen auf den Gesamtprozess und wird durch die Variation der Parameter in einem definierten Wertebereich bei gleichzeitiger Analyse der Modellreaktion erfasst. Hierdurch können sensitive und weniger sensitive Parameter ermittelt und diese Kenntnis bei der Modellkalibrierung gezielt eingesetzt werden. Während bei der eindimensionalen Sensitivitätsanalyse jeweils der Einfluss eines Parameters isoliert untersucht wird, kommt bei gleichzeitiger Variation einer Vielzahl von Parametern die Generalisierte Sensitivitätsanalyse (GSA) zum Einsatz (MADSEN [2000], MADSEN [2002] und WADE ET AL. [2001]). Die Grundlage der GSA sind Monte Carlo Simulationen. Für jeden Parameterraum werden gleichverteilte (bzw. normal verteilte) Parameter generiert und für alle so entstehenden Parameterkombinationen eine Simulation durchgeführt. In diesem Fall ist das Modellergebnis die Zielgröße Wassertiefe. Somit ergibt sich für zahlreiche Parameterkombinationen der zugehörige Wasserstand. Da jeder Parameter unterschiedliche Parameterräume und Dimensionen besitzt, werden diese in eine gleichverteilte normierte Variable umgerechnet. Durch die anschließende Betrachtung der Zielgröße und jeweils eines Parameters, wird eine statistische Analyse durchgeführt, um

die Sensitivität zu quantifizieren. Hierzu wird die Zahlentabelle (Parameterkombination und zugehöriger Wasserstand für alle Simulationen zeilenweise aufgetragen) nach der Zielgröße bzw. dem Wasserstand aufsteigend sortiert und angenommen, dass durch die Anzahl der Monte Carlo Simulationen die Grundgesamtheit für jeden Parameter vorgegeben ist. Aus dieser Grundgesamtheit eines Parameters werden daraufhin für eine im Voraus festgelegte Anzahl  $n$  zwei Stichproben ( $Min_{Fn}$  und  $Max_{Fn}$ ) gezogen. Bei der Stichprobe  $Min_{Fn}$  handelt es sich um die ersten  $n$  Parameterwerte (Parameterkombinationen, die die  $n$  niedrigsten Wassertiefen zur Folge haben) und bei der Stichprobe  $Max_{Fn}$  um die letzten  $n$  Parameterwerte (Parameterkombinationen, die die  $n$  höchsten Wassertiefen zur Folge haben). In der vorliegenden Arbeit ist  $n = 100$  gewählt. Nun wird geprüft, ob die Verteilung beider Stichproben gleich ist bzw. wie sich die Stichproben zueinander verhalten. Für eine Interpretation der Sensitivitätsstudie ist jedoch stets die maximale Schwankungsbreite der Zielgröße von Bedeutung, weil die GSA selbst lediglich eine verhältnismäßige Information bezüglich der Sensitivität der Parameter untereinander angibt. Daher ist auf Basis der maximalen Schwankungsbreite eine quantitative Auswertung der GSA möglich.



**Abb. 6.5:** Ergebnis einer GSA mit  $n = 100$ , blau:  $Max_{Fn}$ , rot:  $Min_{Fn}$ . Dieses Beispiel stammt aus der GSA für die Flussschlauchrauigkeit; daher sind die Parameterwerte für große Wassertiefen klein und für kleine Wassertiefen groß

Dies erfolgt mit dem Kolmogoroff-Smirnov-Test (DISSE [2006]), indem die maximale vertikale Abweichung  $\Delta Fn$  zwischen den Summenhäufigkeiten beider Stichproben als Maß

für die Übereinstimmung beider empirischen Verteilungen bestimmt wird. Ist  $\Delta Fn$  klein, so ist die Verteilung der Stichproben (Parameterwerte) für kleine und große Wassertiefen bzw. Zielgrößen gleich und der entsprechende Parameter unsensitiv. Oder anders gesagt: Ist  $\Delta Fn$  kleiner als ein Grenzwert, der sich für eine zu wählende Irrtumswahrscheinlichkeit ergibt, so wird die Hypothese, beide Stichproben stammen aus der gleichen Grundgesamtheit, angenommen.

Um diesbezüglich eine Quantifizierung der Sensitivität vornehmen zu können, wird zudem für  $\Delta Fn$  eines jeden Parameters die Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet, bei der die Hypothese - beide Stichproben entstammen der gleichen Grundgesamtheit - gerade angenommen werden würde. Diese berechnete Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  ist nun ein Maß für die Sensitivität eines Parameters. MADSEN [2000] definiert die Sensitivität infolge der Irrtumswahrscheinlichkeit wie folgt:

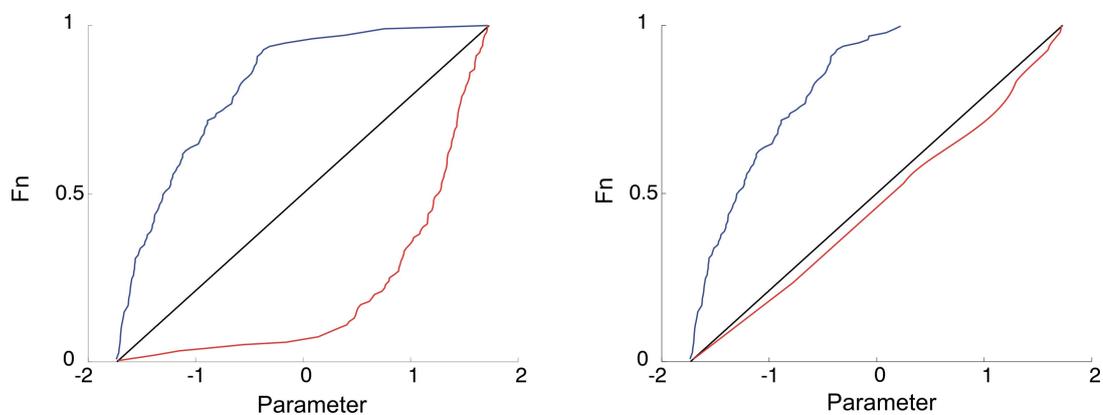
$\alpha \leq 1\%$	Parameter ist sehr sensitiv
$1\% < \alpha < 10\%$	Parameter ist medium sensitiv
$10\% \leq \alpha$	Parameter ist nicht sensitiv

Diese Definition der verschiedenen Irrtumswahrscheinlichkeitsklassen stammt aus der hydrologischen Modellierung und liefert bei der Anwendung in der vorliegenden Arbeit ausschließlich sehr sensitive Parameter. Daher wird auf die Anwendung der Sensitivitätsklassen verzichtet und anstatt der Irrtumswahrscheinlichkeit das  $\Delta Fn$  angegeben. Durch verhältnismäßige Betrachtung bei unterschiedlichen Parametern ist somit eine Aussage über die relative Sensitivität unter den Parametern gegeben.

Grundsätzlich reicht für die Interpretation der GSA die Ergebnisgrafik (vgl. Abbildung 6.5) aus. Daraus ist der Grad der Sensitivität zu erkennen. Liegen die Summenhäufigkeiten beider Stichproben nahe beieinander, so ist dieser Parameter nicht sensitiv, weil sowohl für die maximalen als auch für die minimalen Wasserstände der gesamte Parameterraum gleichmäßig abgedeckt wird. Eine Sensitivität ist erst dann zu erkennen, wenn eine der beiden Stichproben von der Summenhäufigkeit der Grundgesamtheit (bzw. aller Werte) abweicht. Je stärker die Abweichung, umso größer ist die Sensitivität, weil mit steigender Sensitivität sich die Verteilung der Stichprobenwerte über den gesamten Parameterraum verändert. In manchen Fällen besitzen beide Stichproben unterschiedliche Parameterräume der Grundgesamtheit, sodass trotz zunehmender Sensitivität  $\Delta Fn$  konstant bei 1 bleibt. Zudem verhält sich der Verlauf der empirischen Verteilungen beider Stichproben nicht unbedingt symmetrisch (Spiegelachse: empirische Verteilung der Grundgesamtheit), weil möglicherweise dieser Parameter (z. B.) Einfluss auf große aber

kaum auf kleine Wassertiefen besitzt. Dies kann beispielsweise auf die Vorlandrauheit zutreffen, wenn ein beachtlicher Teil der Simulationen im Extremfall keinen Vorlandabfluss erzeugt. Für diesen Fall kann eine beliebige Vorlandrauigkeit gewählt werden, die jedoch keinen Einfluss auf die Wassertiefe besitzt. Für große Abflüsse hingegen wird eine Sensitivität zu erkennen sein.

Diese Informationen über die Art, Form und Höhe einer Sensitivität erfolgt somit durch Betrachtung einer GSA-Auswertung (vgl. Abb. 6.5 und Abb. 6.6), weshalb für eine Ergebnisinterpretation die Visualisierung der empirischen Verteilungen ausreichend und notwendig ist.



**Abb. 6.6:** links: beide Stichproben decken den gesamten Parameterraum ab, rechts: beide Stichproben verhalten sich unsymmetrisch bezüglich der empirischen Verteilung der Grundgesamtheit

Beispielsweise ist der Parameterraum für beide Stichproben sofort ersichtlich und auch wie sich die Parameterdichte über den Parameterraum verhält: flacher Verlauf der Verteilung deutet auf wenige, steiler Verlauf auf viele Parameterwerte hin. Da jedoch für die 1D/2D-Simulationen am Oberen Main für jede Rasterzelle eine GSA erfolgt und somit eine übliche GSA-Visualisierung der Verteilungen unmöglich ist, werden für jede Rasterzelle skalare Größen abgeleitet. Aus der Kombination dieser Werte ist anschließend eine Interpretation analog zu einer GSA-Abbildung möglich. Hierbei handelt es sich neben dem  $\Delta F_n$  um die Parameter  $PR$  und  $\Delta F_{n_{Max/Min}}$ , die im Folgenden näher erläutert werden.

Wie im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, kann sich die Sensitivität eines Parameters auf den Parameterraum unterschiedlich verhalten (z. B. sensitiv für große, weniger

sensitiv für kleine Wassertiefen). Die Quantifizierung einer solchen Asymmetrie beider Stichproben ist durch den Parameter  $\Delta Fn_{Max/Min}$  möglich (vgl. Abbildung 6.5):

$$\Delta Fn_{Max/Min} = \frac{|\Delta Fn_{Max}| - |\Delta Fn_{Min}|}{|\Delta Fn_{Max}| + |\Delta Fn_{Min}|} \quad (6.1)$$

Verhält sich die Sensitivität eines Parameters über den gesamten Parameterraum gleich (Symmetrie), so ist  $|\Delta Fn_{Max}| = |\Delta Fn_{Min}|$  und somit  $\Delta Fn_{Max/Min} = 0$ . Wirkt sich ein Parameter hingegen sehr sensitiv auf große Wassertiefen aus, während kleine Wassertiefen von diesem Parameter unberührt bleiben, ist  $\Delta Fn_{Max/Min} = 1$  (Extremfall). Im umgekehrten Fall ist  $\Delta Fn_{Max/Min} = -1$ .

$PR$  gibt die Summe der Parameterräume beider Stichproben an. Diese skalare Größe ist für sehr sensitive Parameter maßgebend, bei denen eine Veränderung der Sensitivität nicht mehr möglich ist, wenn  $\Delta Fn$  den Wert 1 erreicht. Durch die Normierung der Zufallszahlen (Gleichverteilung)

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad (6.2)$$

mit:

- $z_i$ : standardisierter Parameterwert
- $x_i$ : Parameterwert
- $\mu$ : Mittelwert der Grundgesamtheit
- $\sigma$ : Standardabweichung der Grundgesamtheit

liegt der maximal mögliche Wertebereich für jeden transformierten Parameter zwischen  $-1,73$  und  $+1,73$  bzw.  $\pm\sqrt{3}$  (siehe Anhang A.7). Der tatsächliche Wertebereich kann im vorliegenden Fall (Parameter: Flussschlauch) für die großen Wassertiefen bei  $P_{Max}$  (vgl. Abbildung 6.5) abgegriffen werden ( $-1,73 \div P_{Max}$ ) und die kleinen Wassertiefen bei  $P_{Min}$  ( $P_{Min} \div +1,73$ ).

Der Parameter  $PR$  wird im Folgenden definiert durch

$$PR = P_{Max} - P_{Min} \quad (6.3)$$

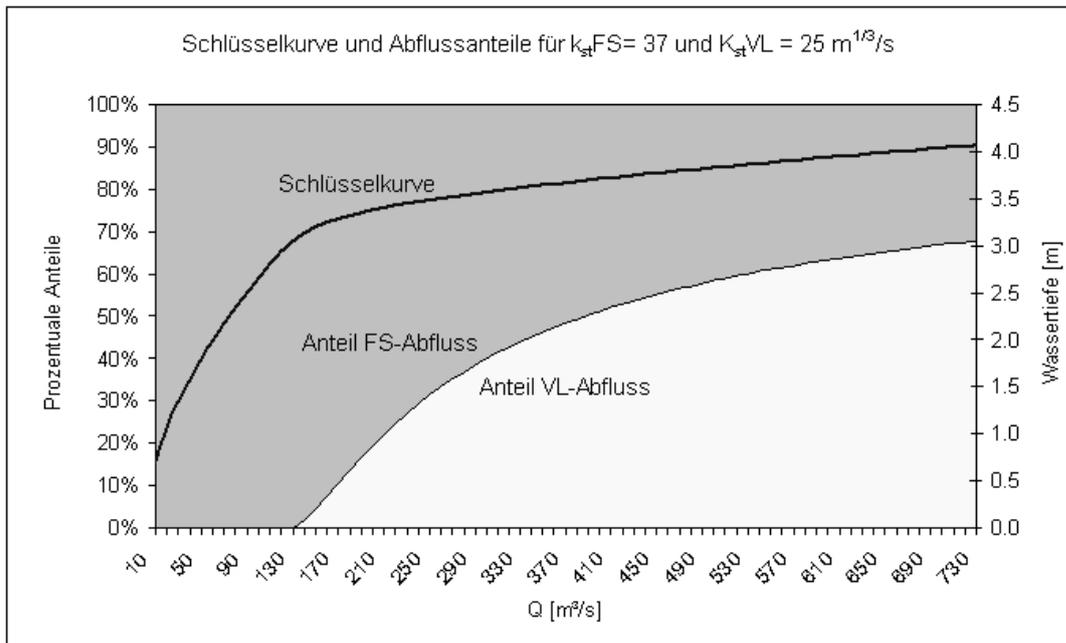
und kann somit Werte zwischen  $-3,46$  und  $+3,46$  einnehmen. In diesem Fall bedeutet der Wert 0, dass die Wertebereiche beider Stichproben sich nicht überlappen und ihre Summe

dem Parameterraum der Grundgesamtheit entspricht. Ist  $PR$  positiv, so überschneiden sich die Wertebereiche beider Stichprobe und der Parameter besitzt eine geringere Sensitivität, als bei negativem  $PR$  (die Summe beider Stichproben deckt nicht den gesamten Parameterraum ab). Wenn beispielsweise die  $\Delta F_n$  zweier Parameter eins sind, so bedeutet dies zwar auch, dass sich die Parameterräume beider Stichproben nicht überlappen, aber durch den Wert  $PR$  ist eine Bewertung beider Parameter untereinander möglich und es kann die Aussage getroffen werden, welcher der beiden Parameter sensitiver ist.

## 6.2.4 Synthetisches Gerinne

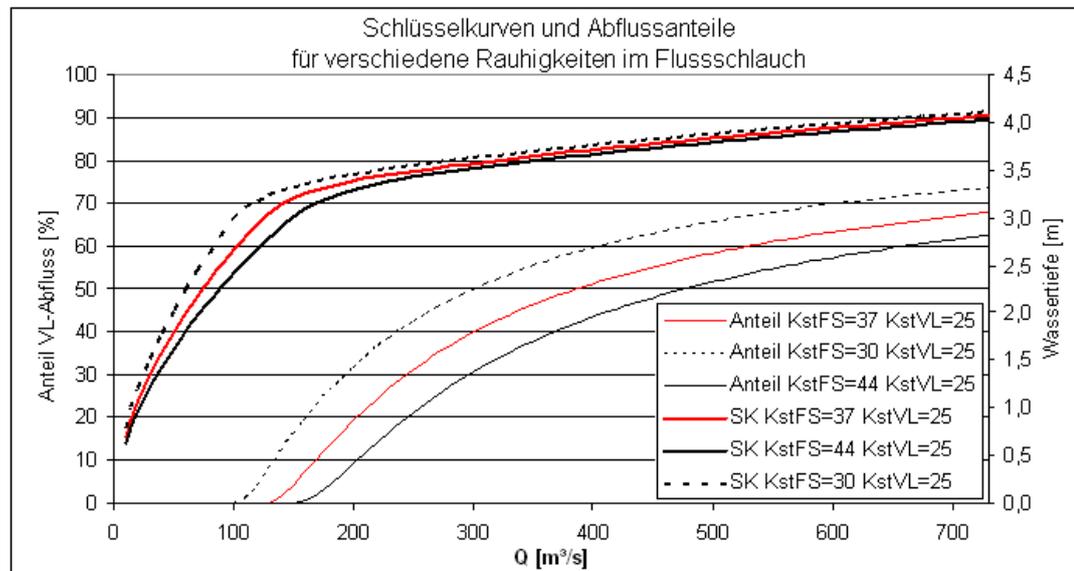
### 6.2.4.1 Parametereinfluss auf die Schlüsselkurve

Im Vorfeld der Unsicherheitsanalysen wird das synthetische Gerinne hinsichtlich seiner Abflusseigenschaften untersucht. Hierzu werden Schlüsselkurven und die dazugehörigen Anteile an Vorland- und Flussschlauchabfluss errechnet (vgl. Abbildung 6.7).



**Abb. 6.7:** Schlüsselkurve sowie Anteile an Flussschlauch- und Vorlandabfluss

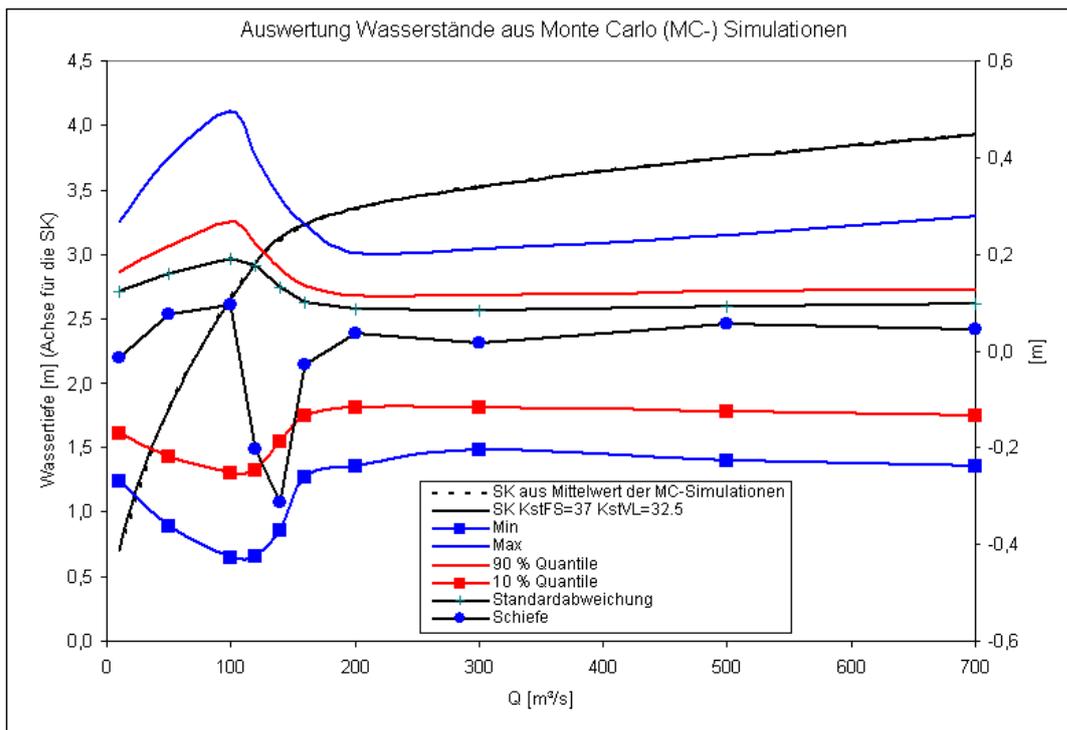
Für eine Flussschlauchrauigkeit von  $k_{st}FS = 37 \frac{\sqrt[3]{\text{m}}}{\text{s}}$  und eine Vorlandrauigkeit von  $k_{st}VL = 25 \frac{\sqrt[3]{\text{m}}}{\text{s}}$  liegt beispielsweise bereits bei einem Abfluss von  $Q = 130 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  eine Überflutung des Vorlandes vor. Für einen  $HQ_5$ -Abfluss ( $Q = 210 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ) beträgt der Anteil des Vorlandabflusses 22 % und steigt für einen  $HQ_{20}$ -Abfluss ( $Q = 320 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ) auf 43 % und bei einem  $HQ_{100}$ -Abfluss ( $Q = 460 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ) auf 56 %. Der Einfluss der veränderlichen Flussschlauchrauigkeit auf die Schlüsselkurve (SK) und auf den Anteil des Vorlandabflusses (Anteil VL) ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Darin wird deutlich, dass abhängig von der Flussschlauchrauigkeit der Beginn der Vorlandüberflutungen in einem Abflussbereich von  $Q = 110$  bis  $150 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  liegen und der Anteil des Vorlandabflusses bis zu 22% variieren kann. Zudem ist für  $Q = 100 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  mit einer maximalen Wasserstands-differenz von 57 cm zu rechnen, die mit zunehmendem Abfluss und dem damit verbundenen Eintreten des Vorlandabflusses auf 9 cm abnimmt.



**Abb. 6.8:** Einfluss der Flussschlauchrauigkeit auf die Schlüsselkurve und auf die Abflussanteile

Die Einflüsse der Vorlandrauigkeit, Vorlandhöhe und der Flussschlauchhöhe können analog zu Abbildung 6.8 dem Anhang C.1 entnommen werden. Hierin wird deutlich, dass mit zunehmendem Strickler-Beiwert für das Vorland auch die Differenz der Wasserspiegellagen zunimmt und für den höchsten Abfluss bei 20 cm liegt, während durch das geringe Verhältnis von Sohl- zu Talbreite der Unterschied der Abflussanteile mit ca. 3% relativ niedrig bleibt. Die Änderung der Gerinnesohl- und der Vorlandhöhe bewirken eine Wasserspiegeländerung in fast gleicher Dimension, wobei der Einfluss der Gerinnesohle im Hochwasserfall eher marginal ist.

Nachdem die Einflüsse der Parameter einzeln untersucht wurden, erfolgt nun die statistische Analyse der Zielgrößen Wasserstand und Abflussanteile auf Basis einer Monte Carlo Analyse. Dabei werden alle Parameter nach der Latin Hypercube Methode gleichverteilt generiert und jede Parameterkombination für jeweils eine Simulation mit Abflusswerten  $Q = 10, 50, 100, 120, 140, 160, 200, 300, 500$  und  $700 \frac{m^3}{s}$  herangezogen. Die gewählten Parameterräume können Tabelle 6.1 (Abflusswerte wurden nicht variiert) entnommen werden. Abbildung 6.9 zeigt die statistische Auswertung der 2000 Schlüsselkurven (SK). Um zunächst zu überprüfen, ob die gewählte Anzahl der Simulationen bzw. Stichproben ausreicht, ist der Mittelwert der SK aus den Monte Carlo Simulationen mit derjenigen SK aufgetragen, die sich für jeweils einen mittleren Parameterwert ergibt. Da beide Kurven übereinander liegen, wird davon ausgegangen, dass eine Simulationszahl von 2000 ausreicht, um das Verhalten der Grundgesamtheit ausreichend wieder zu geben (vgl. Abbildung 6.2).

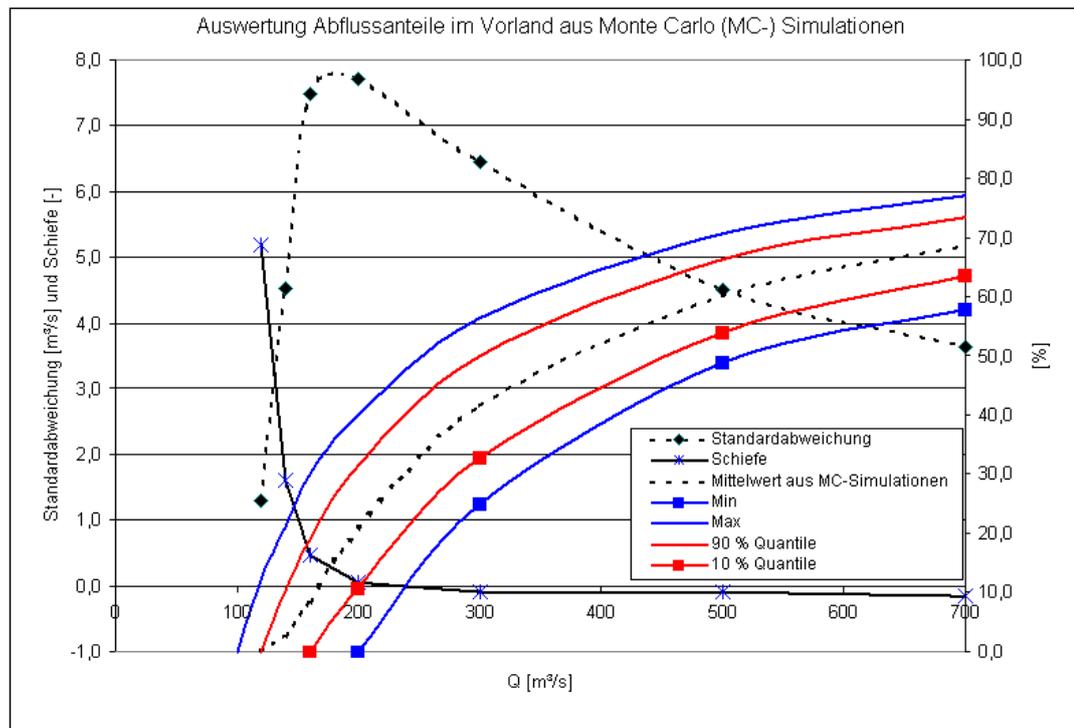


**Abb. 6.9:** Auswertung der simulierten Wasserstände (Abweichung vom Mittelwert) aus den Monte Carlo Simulationen (2000 Parameterkombinationen)

Hinsichtlich der Interpretation der Ergebnisse sind die größten Wasserspiegelschwankungen bei reinem Gerinneabfluss gegeben. Hierbei nimmt die Schwankung mit zunehmendem Abfluss zu und hat ihr Maximum (-0,42 bis 0,49 m) bei dem Abflusswert ( $Q = 100 \frac{m^3}{s}$ ), bei dem alle Parameterkombinationen aus den Monte Carlo Simulationen keinen Vorlandabfluss zur Folge haben (vergleiche Abbildung 6.10). Demnach besitzt die Standardabweichung ihr Maximum mit 0,19 m ebenfalls für diesen Abflusswert. Der simulierte Wertebereich der Wasserstände in diesem Abflusspunkt, hat seine Grenzen der 10 %-Quantile bei -0,25 und der 90 %-Quantile bei 0,27 m. Diese großen Wasserspiegelschwankungen nehmen mit zunehmendem Benetzen des Vorlandes ab, weil durch die breiten Vorländer bereits eine kleine Wasserspiegelerhöhung eine relativ große Abflussflächenzunahme zur Folge hat. Da in diesem Bereich nur einige wenige Parameterkombinationen verhältnismäßig kleine Wasserspiegel als Ausreißer zur Folge haben, schlägt die Schiefenkurve mit bis zu -0,31 relativ stark aus.

Die Auswertung der Abflussanteile im Vorland kann Abbildung 6.10 entnommen werden. Hier ist ein ähnliches Bild wie bei den Wassertiefen zu erkennen: die Standardabweichung steigt mit zunehmendem Benetzen des Vorlandes stark an (7,7 %), um anschließend mit steigender Wassertiefe im Vorland wieder abzunehmen. Da für kleine Abflusswerte viele der Parameterkombinationen keinen Vorlandabfluss hervorrufen, schlägt hier die Schiefe positiv aus.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass bei einer Betrachtung eines Hochwasserabflusses der Wasserspiegel im Vorland zwischen -0,22 und 0,24 m (10/90 %-Quantile -0,12 und 0,13 m) bei einer mittleren Wassertiefe von 0,55 m liegen kann. Und zwar allein durch die Variation der oben genannten Eingabeparameter.



**Abb. 6.10:** Auswertung der Abflussanteile des Vorlandes aus den Monte Carlo Simulationen (eine Darstellung als Abweichung vom Mittelwert ist in Abbildung C.4 zu finden)

#### 6.2.4.2 Synthetisches Gerinne mit stationären Abflussverhältnissen

Grundsätzlich ist die Analyse des synthetischen Gerinnes für stationäre Fließzustände bereits im Zusammenhang mit der Schlüsselkurvenuntersuchung (vgl. vorangegangenes Kapitel) teilweise erfolgt. Das vorliegende Kapitel soll nun darauf aufbauend die Analysen vertiefen, wobei hier der Schwerpunkt im Hochwasserabflussbereich liegt.

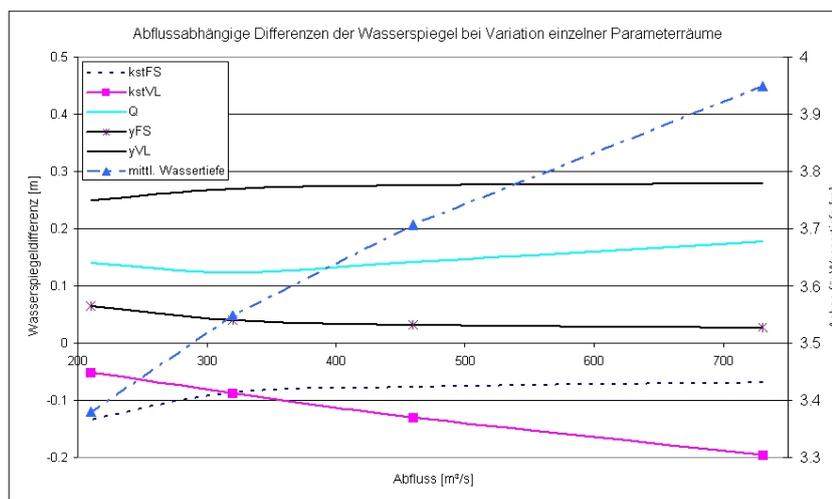
#### Extremale Wasserspiegelschwankungen bei Variation einzelner Parameter

Hierzu wird zunächst die Sensitivität des Wasserstandes auf die einzelnen Parameter untersucht, indem die Wasserspiegeldifferenz für jede maximale Parameterspannweite (vgl. Tabellen 6.1 und 6.2) errechnet wird.

**Tab. 6.2:** Parameterkombinationen zur Quantifizierung der maximalen Wasserspiegelschwankungen

	$k_{st}FS$	$k_{st}VL$	$yVL$	$yFS$
$k_{st}FS_{max}$	44	32.5	0	0
$k_{st}FS_{min}$	30	32.5	0	0
$k_{st}VL_{max}$	37	40	0	0
$k_{st}VL_{min}$	37	25	0	0
$yVL_{max}$	37	32.5	0.15	0
$yVL_{min}$	37	32.5	-0.15	0
$yFS_{max}$	37	32.5	0	0.2
$yFS_{min}$	37	32.5	0	-0.2
Mittelwerte	37	32.5	0	0

Während für einen Parameter die Ober- und Untergrenze des Parameterraumes eingesetzt wird, erhalten die restlichen Parameter den Mittelwert aus den eigenen Parametergrenzen zugewiesen. Als Referenzgröße für die Wasserspiegeldifferenzen wird zudem die Wassertiefe berechnet, die sich bei Mittelung aller Parametergrenzen ergibt.



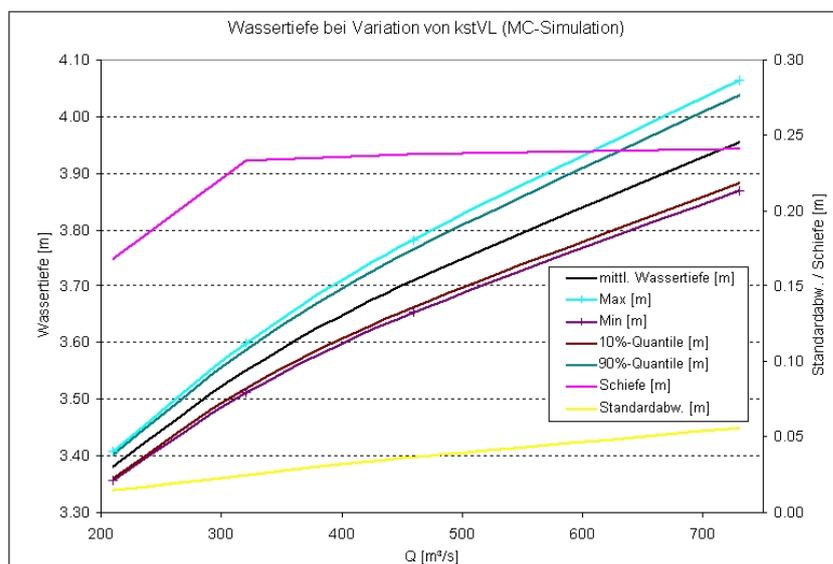
**Abb. 6.11:** Maximale Wasserspiegeländerung bei Variation eines Parameters. Eine Übersicht dieser Berechnungen ist in Tabelle C.1 (Anhang C.2) aufgelistet.

Abbildung 6.11 zeigt, dass für eine Abflusspannweite von 210 bis 730  $\frac{m^3}{s}$  die mittlere Wassertiefe zwischen 3,38 und 3,95 m liegt und somit das Vorland überwiegend benetzt ist. Des Weiteren sind trivialerweise die Differenzen der Wassertiefen infolge großen und kleinen Parameterwerten für  $Kst_{FS}$  und  $Kst_{VL}$  negativ, während diese für  $Q$ ,  $yFS$  und

$y_{VL}$  positiv sind. Hierbei ist der größte Einfluss mit 0,25 bis 0,28 m der Vorlandhöhe  $y_{VL}$  zuzuschreiben, während durch die alleinige Variation der Vorlandrauhigkeit  $K_{stVL}$ , der Wasserspiegel abflussabhängig zwischen 0,05 und 0,2 m verändert werden kann. Der Einfluss der Flussschlauchrauhigkeit  $K_{stFS}$  ist mit ca. 0,08 m am geringsten, während durch die Variation des Abflusses  $Q$  der Wasserspiegel um 0,12 bis 0,18 m schwankt.

### Analyse der Monte Carlo Simulationen

Nachdem die maximalen Wasserspiegelspannweiten für die definierten Parametergrenzwerte bekannt sind, stellt sich nun die Frage nach dem Verhalten des Wasserstandes innerhalb dieser Wasserspiegelgrenzen. Aus diesem Grund werden Monte Carlo Simulationen durchgeführt, bei denen jeweils ein Parameter statistisch aus einem definierten Parameterraum (siehe Tabelle 6.1) generiert wird, während die restlichen Parameter unverändert den Mittelwert ihres Parameterraumes beibehalten. Für diese Untersuchung werden alle Parameterräume gleichverteilt angenommen. Die statistische Auswertung der simulierten Wasserstände liefert schließlich für jeden Parameter die Information hinsichtlich der Verteilung des Wasserstandes innerhalb der Wassertiefenspannweiten<sup>6</sup>.

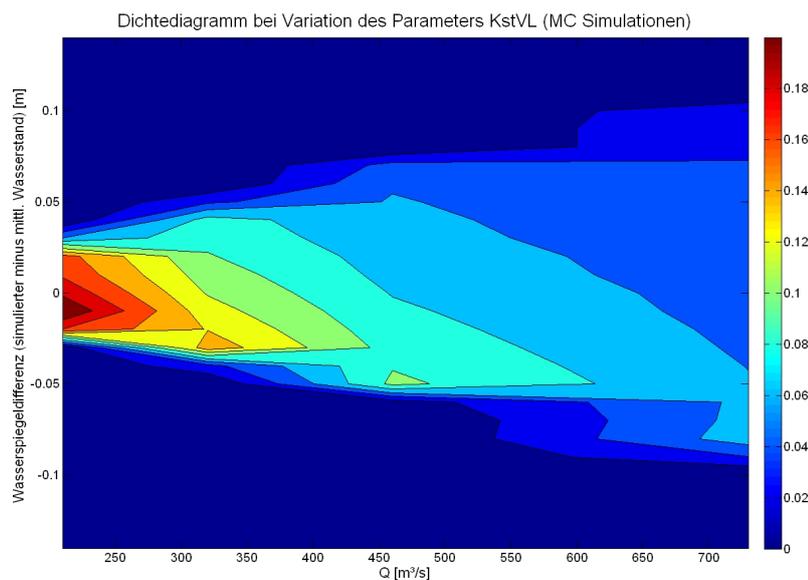


**Abb. 6.12:** Verteilung der Wassertiefen bei Variation der Vorlandrauhigkeit (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten)

<sup>6</sup>Liegt ein lineares Verhältnis zwischen einem Parameter und der Wassertiefe vor, so reichen selbstverständlich nur die Randparameterwerte zur Ermittlung zweier Wasserspiegellagen, um diese anschließend für die Interpolation der Zwischenwerte heranzuziehen.

Abbildung 6.12 zeigt solch eine Analyse für die Vorlandrauhigkeit. Demnach steigt die Standardabweichung mit zunehmendem Abfluss von 0,01 m auf 0,06 m, weil der Abflussanteil im Vorland und somit auch der Einfluss der Vorlandrauhigkeit steigt. Für einen 100-jährlichen Abfluss liegt dieser bei 0,037 m, was bedeutet, dass sich 95 % der simulierten Wasserstände in einer Spannweite von  $\pm 0,07$  m befinden (Grundlagen der Statistik können beispielsweise PLATE [1993] oder in DISSE [2006] nachgelesen werden). Der Wert der Schiefe hingegen ist für Abflüsse mit einer Jährlichkeit ab 20 Jahren relativ konstant bei 0,24. Das bedeutet, dass die Verteilung der Wassertiefen nicht symmetrisch, sondern *rechtsschief* ist und somit mehr als 50 % aller Werte kleiner als der Mittelwert sind. Dies ist auch am Abstand zwischen der kleinsten (Min) Wassertiefen-Kurve und der 10%-Quantil-Kurve, der kleiner ist als der Abstand zwischen der größten Wassertiefen-Kurve und der 90%-Quantil-Kurve in Abbildung 6.12 zu erkennen. Der Grund für die Asymmetrie liegt in der asymptotischen Abnahme der Wasserspiegellage mit steigendem Stricklerwert. Der Wasserspiegelgradient (Quotient aus Wasserspiegellagenänderung und Rauigkeitsänderung) nimmt mit steigendem Stricklerwert ab, worin die positive Schiefe begründet liegt.

Die auf diese Weise aus den statistischen Parametern zu gewinnenden Erkenntnisse können auch beispielsweise aus dem Dichtediagramm aller Simulationen entnommen werden (vgl. Abbildung 6.13). Dort ist für den gesamten Abflussspektrum der Wertebereich, Mittelwert sowie die Schiefe anhand eines Konturdiagramms abzulesen.



**Abb. 6.13:** Dichteverteilung der Wassertiefen (bezogen auf die mittlere Wassertiefe) bei Variation der Vorlandrauhigkeit (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten)

Die statistische Auswertung für die verbleibenden Parameter sind im Anhang C.2 (Abbildungen C.5 bis C.8) zu finden. Die Tabelle 6.3 zeigt daraus eine Zusammenfassung für einen Abfluss der Jährlichkeit 100. Hieraus geht hervor, dass die Vorlandhöhe den größten, der Abfluss und die Vorlandrauigkeit einen mittleren und die Flussschlauchrauigkeit sowie Flussschlauchsohlhöhe einen eher geringen Einfluss auf die Wasserspiegellage besitzen. Dies gilt auch bei der Betrachtung der Wasserspiegelschwankung innerhalb der 10 und 90 %-Quantile.

Nachdem die Analyse der einzelnen Parameter abgeschlossen ist, erfolgt die eigentliche Unsicherheitsanalyse, indem die Wasserspiegeländerung bei gleichzeitiger Variation aller Parameter untersucht wird.

**Tab. 6.3:** Auswertung der Wasserspiegellagen bei Variation einzelner Parameter (2000 Parameterwerte, gleichverteilt) für ( $Q = 460 \frac{m^3}{s}$ )

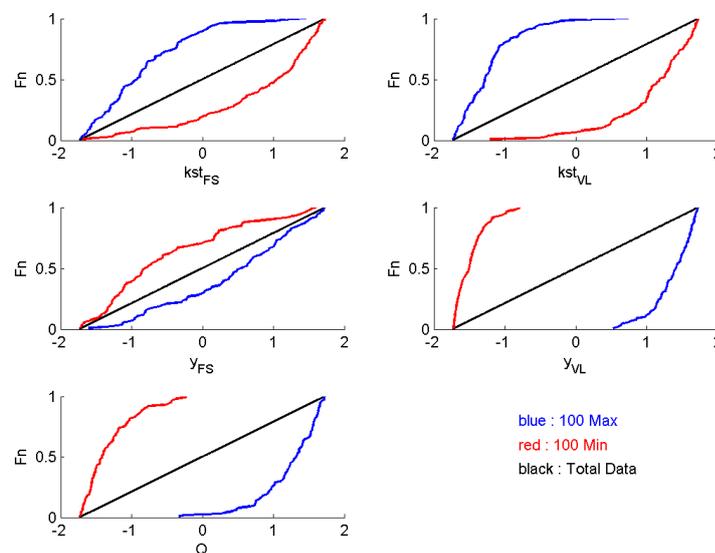
[m]	kstVL	kstFS	Q	yFS	yVL
Mittelwert	3.71	3.71	3.71	3.71	3.71
Schiefe [-]	0.24	0.00	-0.06	-0.03	0.00
Standardabw.	0.04	0.02	0.04	0.01	0.08
Min	3.65	3.67	3.63	3.69	3.57
Max	3.78	3.75	3.78	3.72	3.85
$\Delta h_{max}$	0.13	0.08	0.14	0.03	0.28
10%-Quant.	3.66	3.68	3.65	3.69	3.60
90%-Quant.	3.77	3.74	3.76	3.72	3.82
$\Delta h_{Quantile}$	0.11	0.06	0.11	0.03	0.22

In Tabelle 6.4 sind die Auswertungen der Monte Carlo Simulationen bei der gleichzeitigen Variation aller Parameter aufgelistet. Demnach liegen die maximalen Wasserspiegelschwankungen zwischen 0,5 und 0,6 m (für ein  $HQ_{1000}$  bei 0,67 m) und sind somit doppelt so groß wie bei der alleinigen Variation der Vorlandhöhe. Diese hohen Werte relativieren sich bei der Betrachtung der Schwankungsbreite innerhalb der Quantilgrenzen, die in diesem Fall zwischen 0,25 und 0,3 m liegen und somit nicht mehr als die doppelte Größe an Wasserspiegelschwankung aufweisen, wie es bei der alleinigen Variation der Vorlandhöhe vorliegt. Die Standardabweichung liegt bei einer nahezu symmetrischen Verteilung der Wassertiefen (für den 1000-jährlichen Abfluss liegt die Schiefe bei 0,08, sonst bei 0,01) über das gesamte Abflussspektrum konstant bei ca. 0,1 m.

**Tab. 6.4:** Auswertung der Wasserspiegellagen bei Variation aller Parameter (gleichverteilt) auf Basis von Monte Carlo Simulationen (7000 Parameterkombinationen)

Abfluss	HQ5	HQ20	HQ100	HQ1000
Mittelwert	3.37	3.55	3.71	3.95
Schiefe [-]	-0.05	0.01	0.01	0.08
Standardabw.	0.10	0.09	0.10	0.11
Min	3.05	3.29	3.43	3.64
Max	3.63	3.83	4.00	4.31
$\Delta h_{max}$	0.57	0.53	0.57	0.67
10%-Quant.	3.25	3.42	3.58	3.81
90%-Quant.	3.50	3.67	3.84	4.10
$\Delta h_{Quantile}$	0.25	0.25	0.26	0.30

Bei der Vielzahl der Parameterkombinationen, die zufällig generiert werden und die die Zielgröße Wassertiefe als Resultat haben, stellt sich nun die Frage, auf welchen dieser Parameter der Wasserstand am sensitivsten reagiert. Hierzu wird die GSA durchgeführt.



**Abb. 6.14:** GSA bei Variation und Annahme einer Gleichverteilung aller Parameter für einen Abfluss der Jährlichkeit 100

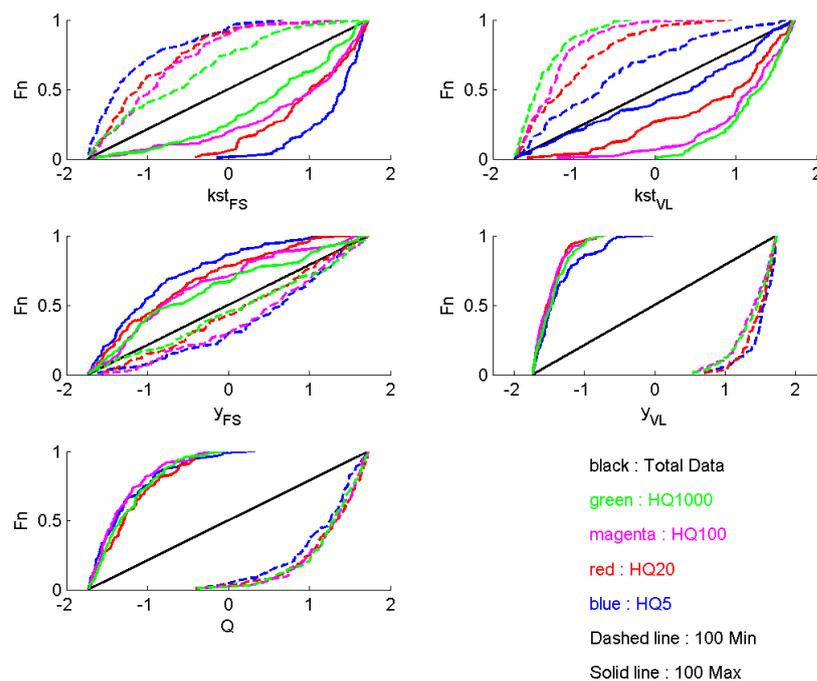
Diesbezüglich zeigt Abbildung 6.14 das Ergebnis der GSA der Monte Carlo Simulation für einen mittleren Abfluss der Jährlichkeit 100. Hieraus ist trivialerweise zunächst zu entnehmen, dass kleine Stricklerwerte im Flussschlauch und im Vorland, sowie große

Abflüsse, Vorland- und Flussschlauchhöhen höhere Wassertiefen als im Mittel liefern und umgekehrt (Anordnung der roten und blauen Linien: ober- oder unterhalb der schwarzen Linie). Dabei reagiert der Wasserstand auf die Vorlandhöhe, den Abfluss und auf die Vorlandrauigkeit sehr sensitiv, während die Flussschlauchrauigkeit und insbesondere die Flussschlauchsohlhöhe einen verhältnismäßig kleinen Einfluss besitzen.

**Tab. 6.5:** Auswertung der GSA für die Simulationsergebnisse nach Abbildung 6.14

0	$\Delta F n_{Max}$	$PR$	$\Delta F n_{Max/Min}$
$k_{st}FS$	0.73	3.15	0.08
$k_{st}VL$	0.93	1.95	0.09
yFS	0.46	3.21	-0.12
yVL	1.00	-1.32	-0.05
Q	0.98	0.10	-0.02

$PR$  in Tabelle 6.5 unterstützt diese Aussage und aus dem Wertebereich für  $\Delta F n_{Max/Min}$  ist zu erkennen, dass die Sensitivität des Wasserstandes über den gesamten Parameter-raum relativ gleichmäßig gegeben ist. Dabei ist die Sensitivität der Stricklerwerte für große Wassertiefen tendenziell größer als für kleine Wassertiefen. Umgekehrtes gilt für die restlichen drei Parameter.



**Abb. 6.15:** GSA bei Variation aller Parameter (gleichverteilt)

Abbildung 6.15 zeigt zusammenfassend die GSA für alle untersuchten Abflusswerte. Darin ist die abflussabhängige Sensitivität der Parameter Flussschlauchrauigkeit, -sohlhöhe und Vorlandrauigkeit zu erkennen. Mit zunehmendem Abfluss nimmt die Sensitivität der Sohlrauigkeit und -höhe ab, während die der Vorlandrauigkeit zunimmt. Die empirischen Verteilungen der Parameter Abfluss und Vorlandhöhe bleiben hingegen relativ unverändert. Um eine Aussage über die Unsicherheit des hydraulischen Modells zu treffen, ist von einem bekannten Abfluss auszugehen, weil die mögliche Schwankungsbreite des Abflusses eher hydrologischen Prozessabbildungen (wenn der Abfluss durch ein Niederschlag-Abfluss Modell ermittelt wird) zuzuordnen ist als dem hydraulischen Modell selbst. Hierzu werden die vorangegangenen Monte Carlo Simulationen mit mittleren bzw. konstanten Abflusswerten wiederholt.

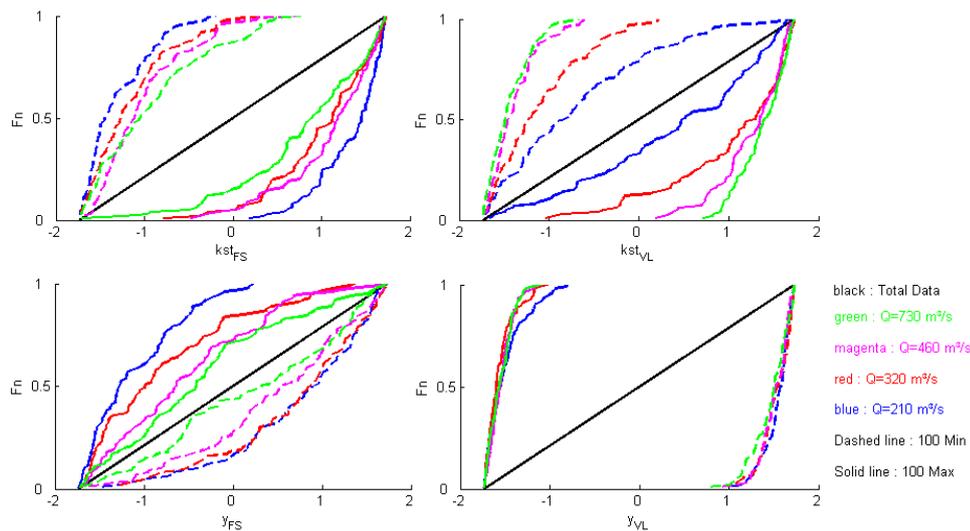
**Tab. 6.6:** Auswertung der Wasserspiegellagen bei Variation aller Parameter bis auf den Abfluss  $Q$  ( Monte Carlo Simulationen mit 7000 Parameterkombinationen, gleichverteilt)

$Q$ [ $m^3/s$ ]	210	320	460	730
Mittelwert	3.38	3.55	3.71	3.96
Schiefe	0.05	0.03	0.04	0.03
Standardabw.	0.09	0.09	0.09	0.10
Min	3.15	3.34	3.48	3.72
Max	3.60	3.77	3.95	4.23
$\Delta h_{max}$	0.46	0.44	0.48	0.51
10%-Quant.	3.26	3.43	3.59	3.82
90%-Quant.	3.49	3.67	3.83	4.09
$\Delta h_{Quantile}$	0.23	0.23	0.24	0.27

Diese Ergebnisse sind Tabelle 6.6 zu entnehmen, wonach die maximalen Wasserspiegeldifferenzen zwischen 0,44 und 0,5 m liegen und somit ca. 0,1 m geringer ausfallen als bei der Variation aller Parameter. Die Differenz der Quantilwerte ist mit 0,24 m ca.

0,02 m ebenfalls geringer als mit variierendem Abflusswert. Während die Standardabweichung sich nicht ändert, hat sich eine leichte Schiefe (0,03 bis 0,04) in der Verteilung der Wassertiefen eingestellt. Wird nun durch den konstanten Abfluss die Parameterzahl von 5 auf 4 reduziert, so folgt für die GSA, dass die Sensitivität für die verbleibenden Parameter zwar qualitativ gleich bleibt, aber quantitativ zunimmt. Vergleiche hierzu die Abbildungen 6.16 mit 6.15.

Durch die verhältnismäßig kleinen und realistischen Parameterräume wurde eine Gleich-



**Abb. 6.16:** GSA bei Variation aller Parameter bis auf  $Q$  (gleichverteilt)

verteilung der Parameter angenommen. Für den Parameter der Vorlandhöhe wird jedoch zusätzlich eine Normalverteilung mit einer Standardabweichung von 0,09 m angegeben. Daher wird eine weitere Monte Carlo Simulation durchgeführt, bei der die Vorlandhöhe normalverteilt angenommen wird. Um bei der Generierung der Zufallszahlen zu extreme Werte auszuschließen, werden nur Zahlenwerte zwischen  $\pm 0,18$  m zugelassen. Da die Form der Dichtefunktion nicht geändert wird, reduziert sich die Standardabweichung dadurch auf 0,08 m. Die Ergebnisse der Monte Carlo Simulationen sind in Tabelle 6.7 zusammengefasst.

**Tab. 6.7:** Auswertung der Wasserspiegellagen bei Variation aller Parameter bis auf den Abfluss  $Q$  (Monte Carlo Simulationen mit 7000 Parameterkombinationen, Vorlandhöhe normalverteilt, sonstige Parameter gleichverteilt)

$Q$ [ $m^3/s$ ]	210	320	460	730
Mittelwert	3.38	3.55	3.71	3.96
Schiefe	0.03	0.03	0.04	0.02
Standardabw.	0.08	0.08	0.08	0.10
Min	3.14	3.32	3.46	3.68
Max	3.63	3.79	3.98	4.25
$\Delta h_{max}$	0.49	0.46	0.52	0.57
10%-Quant.	3.27	3.44	3.60	3.83
90%-Quant.	3.48	3.66	3.82	4.08
$\Delta h_{Quantile}$	0.21	0.21	0.22	0.25

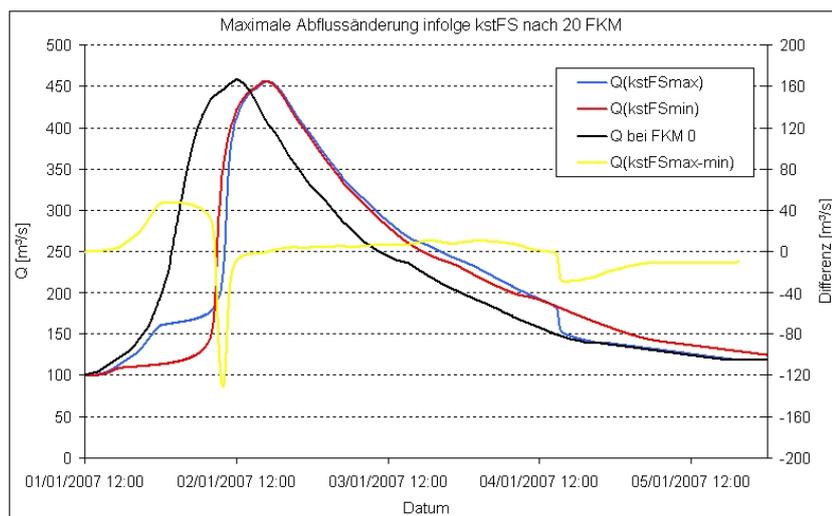
Ein Vergleich der Tabellen 6.7 und 6.6 zeigt, dass durch die Annahme der Normalverteilung der Vorlandhöhe keine großen Änderungen in den Ergebnissen hervorgerufen werden.

### 6.2.4.3 Synthetisches Gerinne mit instationären Abflussverhältnissen

In diesem Abschnitt werden die Parametereinflüsse auf eine Hochwasserganglinie untersucht. Als Zielgröße dienen neben der Wassertiefe die Scheitellaufzeit, der Scheitelabfluss und die Gerinneretention. Hierzu wird eine Hochwasserwelle einer bestimmten Jährlichkeit als Zufluss definiert und auf ihre Änderung nach 20 Kilometern untersucht.

#### Extremale Hochwasserwellenveränderung bei Variation einzelner Parameter

Die Untersuchung beginnt mit der Analyse des Einflusses jedes einzelnen Parameters auf die Hochwasserwelle (vgl. Tabelle 6.2).



**Abb. 6.17:** Maximale Einfluss der Sohlrauigkeit auf eine Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100

Abbildung 6.17 zeigt den Einfluss der Flussschlauchrauigkeit auf die Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100. Darin ist die Zuflussganglinie ( $Q$  bei FKM 0) und dessen Veränderung nach 20 km für den oberen ( $Q(kstFSmax)$ ) und unteren ( $Q(kstFSmin)$ ) Parameterrand abgebildet. Die Einflüsse der Parameter Sohlhöhe, Vorlandhöhe und Vorlandrauigkeit können Abbildung C.9 entnommen werden. Bei der Betrachtung des Hochwasserscheitels wird deutlich, dass dieser sich kaum verändert. Tabelle 6.8 listet die Scheitelwerte für alle berechneten Parameterkombinationen auf, wonach ein Parametereinfluss auf den Hochwasserscheitelwert ausgeschlossen werden kann.

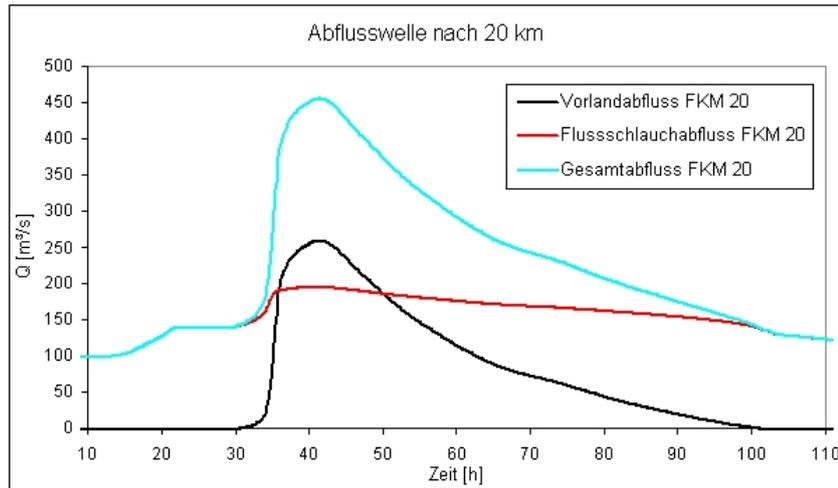
**Tab. 6.8:** Einfluss einzelner Parametergrenzwerte auf die Hochwasserwelle nach 20 km Fließlänge (Am Zuflussrand tritt das  $Q_{max} = 458 \frac{m^3}{s}$  um 12:00 Uhr auf),  $h$  = Wassertiefe, Zeitpunkt = Eintritt  $Q_{max}$  am Modellauslauftrand,  $D_{300}$  = Überschreitungsdauer der auslaufenden Welle des Schwellwertes  $300 \frac{m^3}{s}$

Parameterwerte	Zeitpunkt	$Q_{max}$ [ $\frac{m^3}{s}$ ]	$h$ [m]	$v$ [m/s]	$D_{300}$ [h]	Gerinneret. [%]
$k_{st}FS_{max}$	16:50	455,3	3,65	1,03	23,3	93,3
$k_{st}FS_{min}$	16:40	455,7	3,73	0,90	24,0	106,0
$k_{st}VL_{max}$	16:10	456,1	3,64	1,05	23,5	90,0
$k_{st}VL_{min}$	17:30	454,6	3,76	0,85	23,5	113,9
$yVL_{max}$	16:50	455,4	3,83	0,97	23,5	98,1
$yVL_{min}$	16:40	455,6	3,56	0,94	23,7	101,8
$yFS_{max}$	16:40	455,7	3,71	0,94	23,7	102,4
$yFS_{min}$	16:50	455,4	3,67	0,98	23,3	97,4
Mittelwerte	16:50	455,5	3,69	0,96	23,7	100,0

Bezüglich der Scheitellaufzeit liegt einzig für die Vorlandrauhigkeit eine deutliche Sensitivität vor, wodurch eine mittlere Scheitellaufzeit von 4,83 h um 0,67 h verkürzt bzw. verlängert wird. Es sei jedoch erwähnt, dass sich der Scheitelwert im Zeitraum einer Stunde kaum verändert (weniger als  $1 \frac{m^3}{s}$ ). Im direkten Zusammenhang zur Scheitellaufzeit liegt die Gerinnereretention, womit die Vorlandrauhigkeit den größten Einfluss auf diese ausübt. Die Retentionsvolumina sind bezogen auf das Gerinnereretentionsvolumen zwischen der Zuflusswelle (FKM 0) und der Abflusswelle (FKM 20) für mittlere Parameterwerte und beträgt ca. 8,4 Mio.  $m^3$ .

Trivialerweise sollten für große Rauigkeiten im Flussschlauch oder Vorland eine höhere Retention zu erwarten sein als für glatte Verhältnisse. Dies gilt im vorliegenden Fall zwar für die Vorlandrauhigkeit, aber der Einfluss der Flussschlauchrauhigkeit ist hier nicht erkennbar. Der Grund hierfür ist, dass der Abfluss im Flussschlauch als eine Art Basisabfluss angesehen werden kann. Auf diesem Basisabfluss liegt die Hochwasserwelle auf, dessen Abfluss im Vorland statt findet. Somit sind die Parameter des Vorlandes maßgebend für den Abfluss der Hochwasserwelle.

Diesbezüglich zeigt Abbildung 6.18 die Abflussanteile im Vorland und im Flussschlauch für den Flusskilometer 20 auf. Als zusätzliche Information bezüglich der Änderung der Hochwasserwellenform (Wellenverbreiterung) nach 20 Fließkilometern wird die Dauer an-

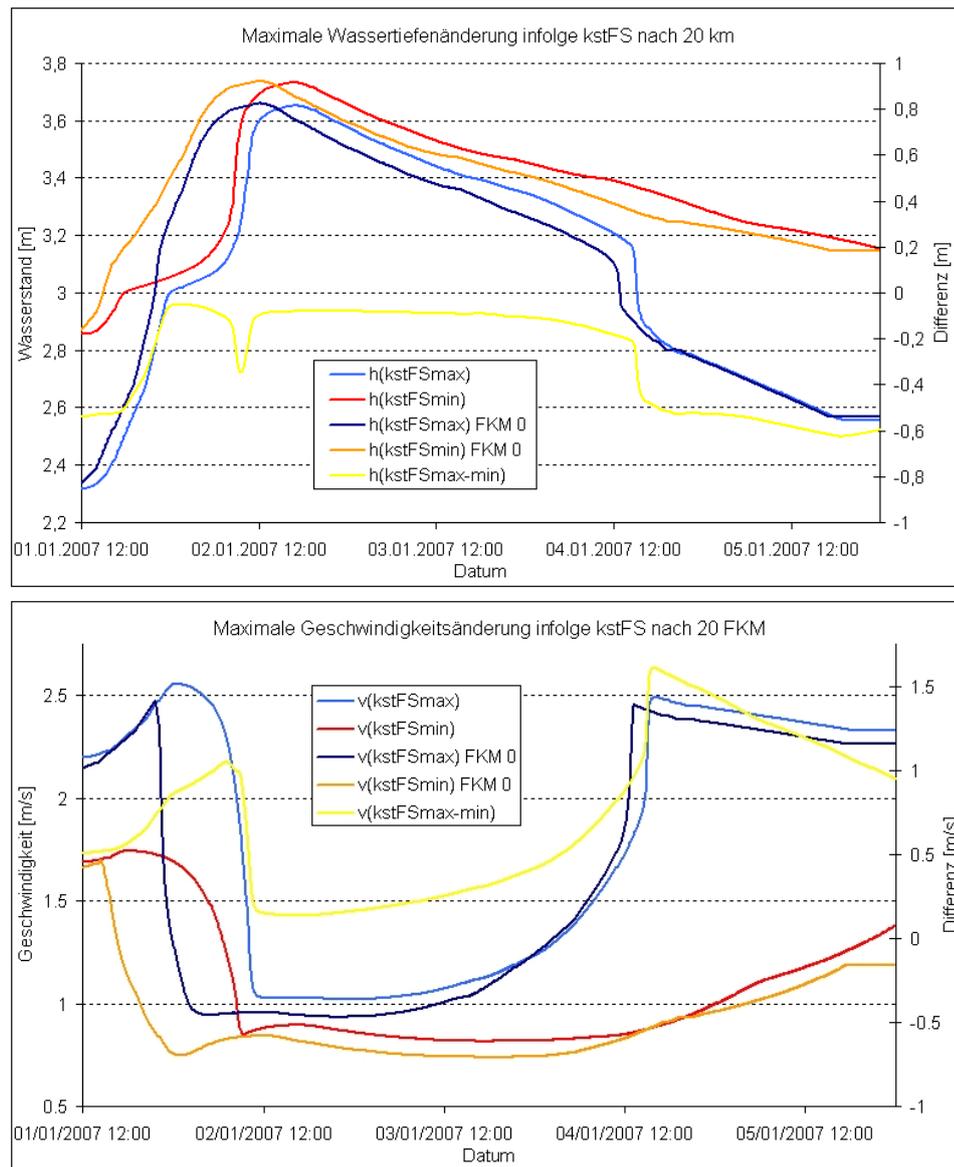


**Abb. 6.18:** Zeitlicher Verlauf der Abflussanteile einer Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100, synthetisches Gerinne mit  $Kst_{FS} = 37$  und  $Kst_{VL} = 25 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$

gezeigt, für die der Abflusswert  $300 \frac{m^3}{s}$  überschritten wird ( $D_{300}$ ). Der Schwellenwert wurde zu  $300 \frac{m^3}{s}$  gewählt, um die Ausuferung mit zu berücksichtigen. Zudem besitzt die Zuflussganglinie im abfallenden Ast (bei einem Abfluss von ca.  $240 \frac{m^3}{s}$ ) einen Knick. Dieser sollte keinen Einfluss auf die Untersuchungen ausüben. Aus den  $D_{300}$ -Werten ist zu entnehmen, dass sich die Wellenform nicht verändert<sup>7</sup>. Einzig die Flussschlauchrauigkeit zeigt eine Tendenz, dass ein rauhes Gerinne zu einer Wellenverbreiterung und ein glattes Gerinne zu einer Stauchung der Welle führt.

Bei näherer Betrachtung der Retentionsvolumina in Zusammenhang mit der Scheitellaufzeit fällt für den Parameter Flussschlauchrauigkeit (vgl. hierzu den Knick im anlaufenden Wellenast in Abbildung 6.17) auf, dass sich die Retentionsvolumina relativ stark unterscheiden, obwohl die Scheitellaufzeit kaum eine Änderung aufweist. Der Grund hierfür liegt an der Gerinneform sowie an dem Wertebereich der Hochwasserwelle, dessen Abfluss zunächst allein durch den Flussschlauch erfolgt und ab einem Abfluss von fast  $150 \frac{m^3}{s}$  sich ein zusätzlicher Abfluss im Vorland einstellt. Dieser Übergang zwischen Flussschlauch- und Vorlandabfluss variiert in Abhängigkeit von der Flussschlauchrauigkeit, Sohlhöhe und Vorlandhöhe. Während der Abfluss im Vorland unbeeinflusst bleibt, nimmt für glatte Zustände im Flussschlauch der Wert des *Basisabflusses* zu. Dadurch findet für einen längeren Zeitraum ein reiner Gerinneabfluss mit einer relativ hohen Geschwindigkeit (siehe Abbildung 6.19) statt, was zu einer Verminderung des Retentionsvolumens führt. Ein entsprechendes Verhalten ist auch für die übrigen Parameter zu beobachten (siehe Abbildung C.9).

<sup>7</sup>Nach der Theorie müsste es sukzessive zu einer Abflachung der Welle führen, weil sich die Wasserspiegelgradienten der Hochwasserwelle im aufsteigenden und absteigenden Ast im Vorzeichen unterscheiden.



**Abb. 6.19:** Maximaler Einfluss der Sohlrauigkeit auf eine Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100, Flieftiefe oben und Geschwindigkeit unten

Während alle Parameter kaum Einfluss auf die Wellenspitze ausüben, ist nach Tabelle 6.8 eine Wasserspiegelschwankung zwischen 3,56 und 3,83 m möglich. Entsprechend den Untersuchungen für stationäre Abflussverhältnisse besitzen die Vorlandparameter (Rauigkeit und Höhe) den größten Einfluss. Demnach ändert sich zwar der Abfluss nicht nennenswert, aber die Parameter besitzen einen Einfluss auf die Geschwindigkeit bzw. auf die Wassertiefe (vgl. Abbildungen 6.19, C.10 und C.11).

Werden nun diese Ergebnisse mit den Untersuchungen für stationäre Fließzustände verglichen, so stimmen die Wasserspiegeldifferenzen durch die jeweilige Parametervariation zentimetergenau überein (vgl. hierzu Abbildung 6.11). Die Wassertiefen der instationären Untersuchung sind 0,01 - 0,02 m kleiner (vgl. Tabelle 6.8 mit Tabelle C.1), da

der mittlere Abfluss mit ca.  $455 \frac{m^3}{s}$  kleiner ist als bei den stationären Berechnungen. Somit kann zusammenfassend die Aussage getroffen werden, dass für den vorliegenden Fall kein Unterschied zwischen den stationären und instationären Berechnungsergebnissen vorliegt, die Scheitellaufzeit primär von der Vorlandrauhigkeit abhängt und keine nennenswerte Abminderung der Wellenspitze zu verzeichnen ist. Es sei jedoch erwähnt, 20 km Fließlänge eine kurze Strecke sind, um einen signifikanten Einfluss der fließenden Retention zu verzeichnen. Der Wert der Gerinneretention wird zudem durch die großen Vorlandbreiten in Kombination mit dem variierenden bordvollen Abfluss (in Abhängigkeit der Flussschlauchparameter) stark beeinflusst. Dadurch wird die Interpretationsfähigkeit stark abgeschwächt, weshalb für die nun folgenden Monte Carlo Simulationen der Wert der Retention keine Berücksichtigung finden wird.

### Analyse der Monte Carlo Simulationen

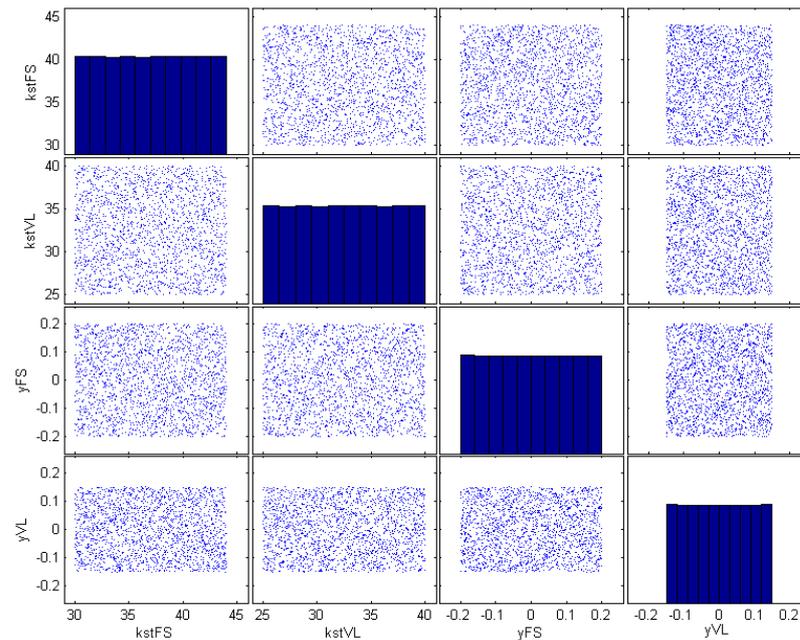
Nachdem die Einflüsse des oberen und unteren Grenzwertes eines jeden Parameterraumes untersucht wurden, erfolgen auch hier Monte Carlo Simulationen, um das statistische Verhalten gewählter Zielgrößen bei gleichzeitiger Variation der entscheidenden Parameter zu analysieren. Variiert werden die Rauigkeiten sowie Höhen im Vorland und im Flussschlauch. Aus diesen vier Parametern werden 2000 Parameterkombinationen generiert und für die Simulationen herangezogen. Da aus Gründen der Rechenzeit die Anzahl der Simulationen im Vergleich zu den stationären Ereignissen von 7000 auf 2000 reduziert wird, ist zunächst zu kontrollieren, ob der gesamte Parameterraum gleichmäßig abgedeckt wird. Hierzu wird in Abbildung 6.20 der Parameterraum jeweils von zwei Parametern aufgezeigt. Die Diagonale der Abbildungsmatrix ist durch ein Histogramm jedes einzelnen Parameters gefüllt. Somit ist zum einen zu erkennen, dass die Parameter gleichverteilt sind und zudem dass die Anzahl von 2000 Parameterkombinationen ausreichend ist und der gesamte Parameterraum aller Wahrscheinlichkeit nach<sup>8</sup> abgedeckt wird (vgl. diesbezüglich auch Abbildung 6.2).

Es erfolgen zwei Monte Carlo Simulationen für eine Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100. Zum einen werden alle Parameter gleichverteilt ( $HQ_{100-a}$ ) und zum anderen die Vorlandhöhe als normalverteilt (während die restlichen Parameter gleichverteilt belassen werden) ( $HQ_{100-b}$ ) angenommen.

Wie bereits aus den Voruntersuchungen bzw. Einflussuntersuchungen der Parameter-

---

<sup>8</sup>Um hier eine genaue Aussage treffen zu können, müsste ein vierdimensionales Histogramm ausgegeben werden



**Abb. 6.20:** Übersicht der Parameterräume, die nach 2000 Simulationen für vier Parameter abgedeckt werden

grenzen zu erwarten war, zeigen auch die Monte Carlo Ergebnisse keine nennenswerte Veränderung der Abflussspitze. Die Abflussspitze von  $458 \frac{m^3}{s}$  am Zuflussrand ist nach 20 Flusskilometern auf  $455,5 \frac{m^3}{s}$  bzw. um ein halbes Prozent reduziert. Für alle 2000 Simulationen liegt das  $Q_{max}$  zwischen  $454,2$  und  $456,3 \frac{m^3}{s}$ .

Somit ist eine Scheitelabminderung infolge Retention nach 20 Flusskilometern praktisch null (ähnliche Ergebnisse sind beispielsweise in KREITER [2007] nachzulesen) und die untersuchten Parameter besitzen keinen Einfluss auf die Abflussspitze (zumindest nicht für die hier vorliegenden Randbedingungen).

**Tab. 6.9:** Wellenlaufzeit und  $D_{300}$ -Wert für  $HQ_{100-a}$  und  $HQ_{100-b}$ ,  $Q_{max}$  tritt am Zuflussrand um 12:00 Uhr auf

Stat. Parameter	$HQ_{100-a}$		$HQ_{100-b}$	
	$t(Q_{max})$	$D_{300}$	$t(Q_{max})$	$D_{300}$
	Zeit	[h]	Zeit	[h]
Mittelwert	16:50	23,6	16:50	23,6
Standardabw.	-	0,17	-	0,17
Schiefe	-	0,11	-	0,10
Max	17:40	24,2	17:40	24,3
Min	16:10	23,3	16:00	23,3

Tabelle 6.9 zeigt zudem, dass die Form der Hochwasserwelle ebenfalls nahezu unverändert bleibt.

Bei der Betrachtung der ausgewerteten Wassertiefen wird das Ergebnis aus den stationären Untersuchungen bestätigt, dass durch die Annahme der Normalverteilung des Parameters Vorlandhöhe kaum Änderungen in den statistischen Kenngrößen eintreten (siehe Tabelle 6.10).

**Tab. 6.10:** Statistische Kenngrößen der Wassertiefe für  $HQ_{100-a}$  und  $HQ_{100-b}$

	$HQ_{100-a}$	$HQ_{100-b}$
Mittelwert	3,70	3,70
Standardabw.	0,09	0,08
Schiefe	0,02	0,01
Max	3,94	3,93
Min	3,48	3,46
90%-Quant.	3,81	3,80
10%-Quant.	3,57	3,58

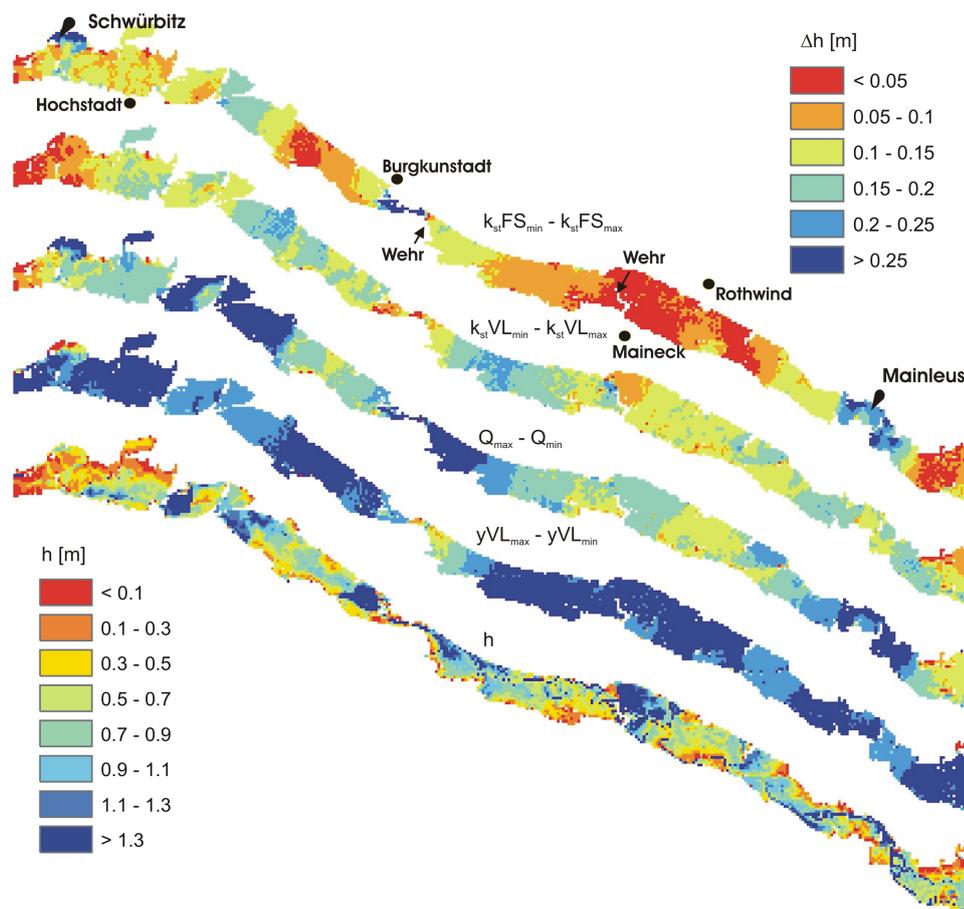
Zudem stimmen die statistischen Kenngrößen aus den stationären und instationären Untersuchungen überein (vgl. Tabelle 6.10 mit Tabelle 6.6), sodass hinsichtlich der Wassertiefen die stationäre Betrachtung ausreichend ist. Somit wird in diesem Rahmen auf Simulationen für weitere Abflüsse verschiedener Jährlichkeiten verzichtet und auf das Kapitel 6.2.4.2 verwiesen. Hinsichtlich der Wellenform ist einzig eine Änderung (bzw. nennenswerte Retentionseffekte wie Abflussspitzenreduktion und Wellenverformung) im Vergleich zu den vorliegenden Ergebnissen zu erwarten, wenn die Zuflusswelle in der Zeitachse gestaucht bzw. dieselbe Welle innerhalb eines kürzeren Zeitraums ablaufen würde, denn dadurch nimmt das Volumen der Welle ab, während der Wertebereich der Abflüsse gleich bleibt. Somit ist für kurze Wellen eher von Retentionseffekten auszugehen. Da jedoch die hier verwendete Zuflussganglinie aus einer gemessenen Welle der Jährlichkeit 5 nur in ihren Abflusswerten extrapoliert wurde und die Zeitachse unverändert geblieben ist, ist bereits die vorliegende Wellendauer verhältnismäßig kurz. Eine weitere Verringerung der Wellendauer entspricht somit einer theoretischen Annahme. Allerdings würden Untersuchungen mit einem Niederschlag-Abfluss Modell endgültige Aussagen hinsichtlich der möglichen Zuflussganglinien treffen lassen, worauf in diesem Rahmen verzichtet wird.

## 6.2.5 Modellabschnitt am Oberen Main

### 6.2.5.1 Stationäre Abflussverhältnisse

#### Extremale Wasserspiegelschwankung bei Variation einzelner Parameter

In diesem Abschnitt wird der Parametereinfluss auf stationäre Hochwasserereignisse am Oberen Main untersucht. Wie in dem vorangegangenen Kapitel wird auch hier zunächst die maximale Wasserspiegelspannweite bei der Variation von einzelnen Parametern analysiert.



**Abb. 6.21:** Maximale Wasserspiegeländerung bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1)

$$Q_{mittel} = 460 \frac{m^3}{s} \text{ (Jährlichkeit 100)}$$

Zusätzlich wird die mittlere Wassertiefe  $h$  in jeder Rasterzelle angegeben (für mittlere Parameterwerte), um die Wasserspiegeldifferenzen im Verhältnis zu sehen. Da die Analysen für das synthetische Gerinne zeigen, dass der Einfluss der Sohlhöhe verhältnismäßig klein ist, wird dieser Parameter für die Untersuchungen am Oberen Main als konstant angenommen.

Abbildung 6.21 zeigt die Sensitivität der Wassertiefe auf die einzelnen Parameter bei einem Abfluss der Jährlichkeit 100 (entsprechende Abbildungen für die Abflüsse der Jährlichkeit 20 und 5 sind in den Abbildungen C.12 und C.14 in Anhang C.4 zu finden). Darin ist auf dem ersten Blick zu erkennen, dass bezogen auf die Flächenanteile die Flussschlauchrauigkeit den geringsten und die Vorlandrauigkeit den zweitgeringsten Einfluss besitzen, gefolgt vom Abfluss und schließlich der Vorlandhöhe. Jedoch sind die Einflüsse aller Parameter örtlich variabel, sodass sich auch die Einflüsse der Parameter jeweils unterschiedlich verhalten. Zur Differenzierung dieser örtlichen Variabilität wird die Modellstrecke durch drei Abschnittstypen charakterisiert, in denen sich die Parametereinflüsse jeweils unterscheiden (vergleiche hierzu Abbildung 4.2):

- **AS1:** Abschnitte, in denen ein normaler bzw. ungestörter Abfluss im Flussschlauch und Vorland erfolgt wie beispielsweise unmittelbar nach dem oberen Zulauf, unterhalb Mainleus bis Rothwind, auf der halben Strecke zwischen Maineck und Burgkunstadt, unmittelbar nach Burgkunstadt sowie der Bereich nach Hochstadt.
- **AS2:** Abschnitte unmittelbar vor (auf einer Länge von ca. 1 bis 2 km) und innerhalb von Einengungen, in denen der Vorlandabfluss durch Flaschenhalse (z.B. Brücken oder Unterführungen) erfolgen muss wie beispielsweise die Abschnitte bei Mainleus, Burgkunstadt und Hochstadt
- **AS3:** Abschnitte unmittelbar vor Wehren (auf einer Länge von gut 1 km), wobei das Wehr einen Flaschenhals darstellt und somit der größte Anteil des Vorlandabflusses über das Wehr abfließen muss, wie die Flussabschnitte vor den Wehren bei Maineck und Burgkunstadt. Hier ist allerdings zu beachten, dass bei Burgkunstadt das Vorland kontinuierlich bis zum Wehr eingeschnürt wird (vgl. AS2), während bei Maineck das Wasser im Vorland durch einen Straßendamm über der gesamten Tal-Breite steht und durch eine ca. 50 m breite Unterführung (siehe Abbildung 4.5 rechts) im Damm ein Abfluss im Nebenschluss zum Wehr gegeben ist.

Die mögliche Wasserspiegelschwankung infolge der Flussschlauchrauigkeit liegt nach Abbildung 6.21 für Abschnittstypen AS1 zwischen 0,07 und 0,12 m. Vor Einengungen (AS2) ist der Einfluss mit 0,17 m größer und mit bis zu 0,4 m innerhalb von Einengungen (Burgkunstadt) am größten. Vor Wehren ist die Sensitivität der Wassertiefe auf die Flussschlauchrauigkeit mit weniger als 0,04 m am geringsten. Die mögliche Schwankungsbreite der Wassertiefe infolge der Vorlandrauigkeit liegt innerhalb von Einengungen bei 0,05 m und vor Einengungen bei 0,13 m. Den größten Einfluss besitzt die Vorlandrauigkeit in AS1 mit Wasserspiegeländerungen zwischen 0,15 und 0,20 m, und

den geringsten Einfluss vor Wehren mit ca. 0,06 m. Für den Abfluss treten die größten Schwankungen mit 0,3 bis 0,35 m in AS2 auf. In AS1 liegen diese bei 0,15 m und in AS3 bei 0,18 m. Der Einfluss der Vorlandhöhe liegt gleichmäßig zwischen 0,23 m (vor Einengungen) und 0,27 m. Allein vor Burgkunstadt ist die Wasserspiegeländerung infolge der Vorlandhöhenänderung unter 0,1 m, weil das zuströmende Wasser über ein sich nicht veränderndes Querprofil zwingen muss. Zur Veranschaulichung sind die soeben genannten Werte in Tabelle 6.11 zusammengefasst.

**Tab. 6.11:** Übersicht der maximalen Wasserspiegeldifferenzen bei Variation einzelner Parameter in verschiedenen Gewässerabschnitten

Parameter	$k_{st}FS [\frac{\sqrt[3]{m}}{s}]$	$k_{st}VL [\frac{\sqrt[3]{m}}{s}]$	Q [ $\frac{m^3}{s}$ ]	yVL [m]
AS1 (normal)	0,07 - 0,12 m	0,13 m	0,15 m	0,27 m
AS2 (Einengung)	0,17 - 0,35 m	0,13 - 0,05 m	0,3 - 0,35 m	0,23 m
AS3 (Wehr)	0,04 m	0,06 m	0,18 m	0,27 m

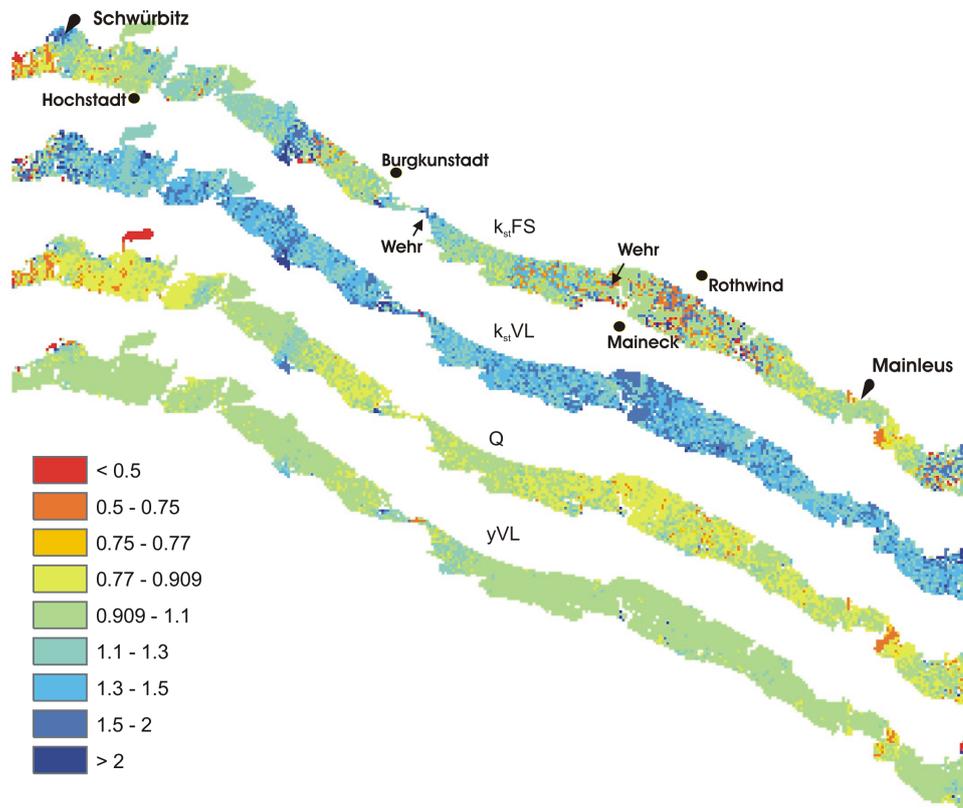
Als Bezugsgröße für die Wasserspiegeldifferenzen in Abbildung 6.21 sind ebenso die Wassertiefen oberhalb des bordvollen Abflusses abgebildet, die sich für jeweils einen mittleren Parameterwert in jeder Rasterzelle ergeben. Mit einer mittleren Wassertiefe von 0,5 bis 1,0 m, sind die möglichen Wasserspiegelschwankungen infolge der definierten Parameterschwankungsbreiten verhältnismäßig groß.

Für den Bereich AS1 stimmen die errechneten Wasserspiegeldifferenzen relativ gut mit den Berechnungen für das synthetische Gerinne überein (vgl. Tabelle 6.11 mit Abbildung 6.11).

Die hier errechneten Wassertiefen sind jedoch nur aus den Grenzwerten der Parameterräume ermittelt und können somit keinen Aufschluss über den Verlauf eines Wasserspiegelgradienten (Quotient aus Wasserspiegel- und Parameteränderung) über den jeweiligen Parameterraum liefern. Um auch in dieser Beziehung eine Aussage treffen zu können, wurde für jeden Parameter der Quotient aus der Wasserspiegeländerung für den oberen (maximale minus mittlere Wassertiefe) Parameterraum mit dem unteren Parameterraum (mittlere minus minimale Wassertiefe) gebildet<sup>9</sup>. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.22 sowie für die Jährlichkeiten 20 und 5 in den Abbildungen C.13 und C.15 zu finden. Bei einem Abfluss der Jährlichkeit 100 ist zu erkennen, dass die Änderung der Vorlandhöhe (yVL) in beiden Parameterräumen eine ähnliche Änderung der Wasserspiegellagen zur Folge hat. Demnach kann ein nahezu lineares Verhältnis zwischen Parameter und

<sup>9</sup>Eine Monte Carlo Untersuchung zur Ermittlung der statistischen Parameter, wie es für das synthetische Gerinne erfolgte, wird infolge der sehr hohen Simulationsdauer nicht durchgeführt.

Wasserspiegeländerung angenommen werden, wobei die Wasserspiegeländerung ca. 10 % geringer ist als die Änderung des Parameterwertes (vgl. Tabelle 6.11).



**Abb. 6.22:** Quotient aus den Differenzen maximaler minus mittlerer Wasserspiegel und mittlerer minus minimaler Wasserspiegel bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1)  $Q_{\text{mittel}} = 460 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  (Jährlichkeit 100)

Der Parameter Abfluss (Q) verhält sich ähnlich vor Einengungen (AS2), während in Abschnitten mit breiten Tälern die Änderung der Wasserspiegellage für die untere Hälfte des Parameterraums ( $391 - 460 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ) größer ist, als der für die obere Parameterraumhälfte ( $460 - 529 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ). Dies liegt darin begründet, dass für kleine Abflusswerte das Vorland relativ leicht benetzt und somit der hydraulische Radius sehr klein ist. Einer kleinen Abflusszunahme folgt wegen den geringen Geschwindigkeiten im Vorland demnach eine verhältnismäßig große Wasserspiegelzunahme, was zusätzlich durch Wehre und auch durch Bruchkanten im Vorland verstärkt werden kann. Nimmt aber die Wassertiefe im Vorland weiter zu, so steigt auch der hydraulische Radius und durch die auf diese Art steigende Geschwindigkeit folgt einem Abflussanstieg eine verhältnismäßig kleinere Wasserspiegelzunahme. Dementsprechend ist bei der Betrachtung des Parameters der Vorlandrauigkeit ( $k_{st}VL$ ) die Differenz der Wassertiefen für den oberen Parameterraum ( $25 - 32,5 \frac{\sqrt[3]{\text{m}}}{\text{s}}$ ) um den Faktor 1,3 bis 1,7 größer als für die untere Parameterraumhälfte ( $32,5$

-  $40 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$ ). Denn die Wassertiefe nimmt mit zunehmendem Strickler-Beiwert asymptotisch ab. Der Parameter Flussschlauchrauhigkeit ( $k_{st}FS$ ) zeigt vor Einengungen ein ähnliches Bild wie die Vorlandrauhigkeit, jedoch ist der beschriebene Effekt nicht so stark, weil sich in diesem Fall der hydraulische Radius weniger verändert.

### Analyse der Monte Carlo Simulationen

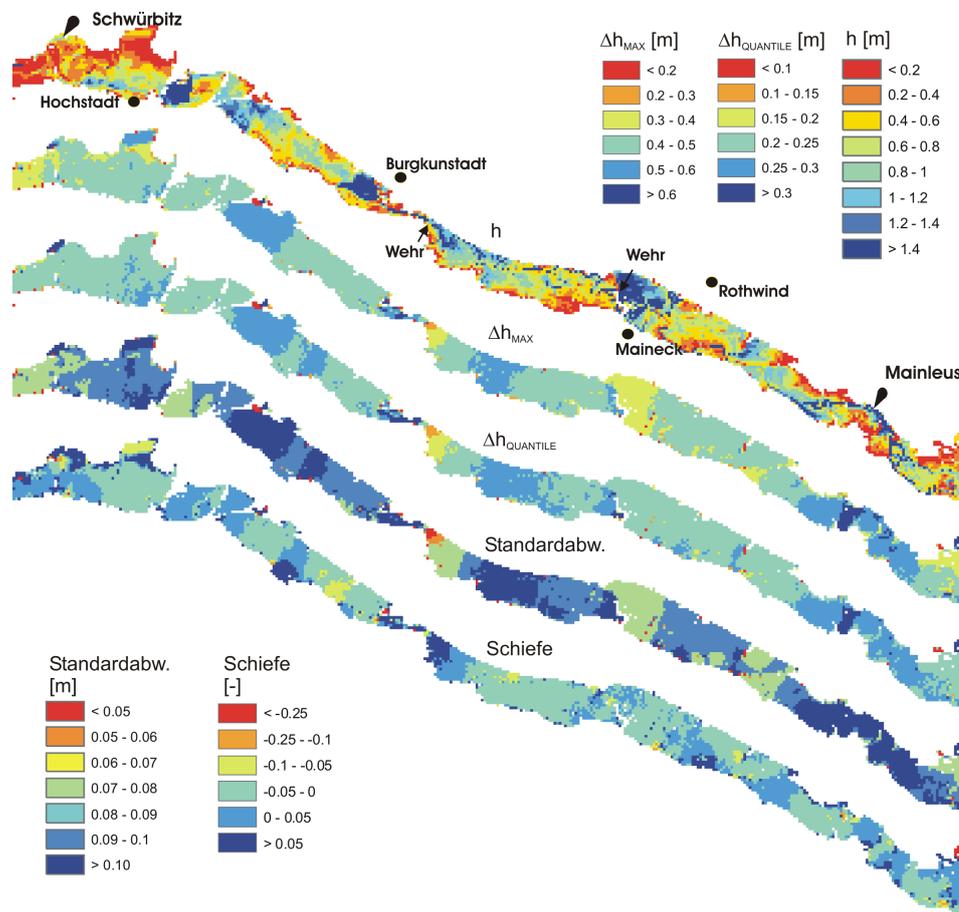
Um eine Aussage über die Modellunsicherheit infolge falsch angenommener Parameter treffen zu können, erfolgen auch hier Monte Carlo Simulationen. Ein Simulationslauf basiert dabei auf 2000 Simulationen. Variiert werden die Rauigkeiten im Vorland und Flussschlauch sowie die Vorlandhöhe für die drei stationären Abflusszustände  $HQ_{100}$ ,  $HQ_{20}$  und  $HQ_5$ . Hinsichtlich der Parameterverteilungen wird zum einen eine Gleichverteilung aller Parameter angenommen und zum anderen folgt allein die Vorlandhöhe einer Normalverteilung. Da grundsätzlich das Höhenraster einheitlich um den Wert des Parameters Vorlandhöhe verändert wird, erfolgt eine weitere Analyse, bei der für alle 2000 Simulationen eines Laufs, jeder Rasterzelle ein separater Vorlandhöhenparameter zugewiesen wird. Jedes Höhenraster variiert somit unabhängig von den anderen, wobei die Höhenwerte normalverteilt angenommen werden (Standardabweichung 0,09 m). Eine Übersicht der Analysen gibt Tabelle 6.12.

**Tab. 6.12:** Übersicht der durchgeführten Monte Carlo Simulationen

	Bezeichnung
$HQ_{100}$	
alle Parameter gleichverteilt	$HQ_{100}$ -a
yVL normal- sonstige Parameter gleichverteilt	$HQ_{100}$ -b
yVL für jede Rasterzelle separat normal- sonst gleichverteilt	$HQ_{100}$ -c
$HQ_{20}$	
alle Parameter gleichverteilt	$HQ_{20}$ -a
yVL normal- sonst gleichverteilt	$HQ_{20}$ -b
$HQ_5$	
alle Parameter gleichverteilt	$HQ_5$ -a
yVL normal- sonst gleichverteilt	$HQ_5$ -b

Als Ergebnis der Monte Carlo Simulationen werden die möglichen Wasserspiegelschwankungen sowie die Standardabweichung und Schiefe ausgegeben. In Abbildung 6.23 sind diese Wasserspiegelschwankungen für den Simulationslauf  $HQ_{100}$ -a aufgezeichnet. Um diese im Verhältnis zur Wassertiefe zu sehen, ist auch die mittlere Wassertiefe (h) oberhalb des bordvollen Wasserstandes dargestellt. Die Ergebnisse zeigen, dass die maximale Wasserspiegelschwankung mit 0,55 m in Bereichen vor Einengungen (AS2) auftreten

(Mainleus und Hochstadt). Die Differenz zwischen den Quantilwerten ist mit 0,28 m allerdings halb so groß. Für normale Abflusszustände (AS1) liegt die maximale Wasserspiegeldifferenz bei 0,5 m, wobei die Schwankung zwischen den Quantilwerten ebenfalls mit 0,25 m halb so groß ist.



**Abb. 6.23:** Auswertung Monte Carlo Simulationen für den Lauf  $HQ_{100-a}$  ( $\Delta h_{Quantile}$  ist die Differenz aus 90 %- und 10 %- Quantilwert)

Die Standardabweichung liegt für das gesamte Gebiet überwiegend zwischen 0,08 und 0,10 m, während die Schiefe bis auf den Abschnitt bei Burgkunstadt vernachlässigbar klein ist. Bei Burgkunstadt beträgt die Schiefe gut 0,05 und ist auf die Einengung in Kombination mit dem Wehr zurück zu führen, denn der Wasserstand ist für alle Simulationen durch das Wehr nach unten begrenzt, sodass für einen großen Teil an Parameterkombinationen die Wehrhöhe maßgebend für die Wassertiefe ist. Ausreißer der Wassertiefe sind somit nur nach oben möglich.

Die Auswertungen für die Simulationsläufe  $HQ_{100-b}$  und  $HQ_{100-c}$  können Abbildung C.16 und C.17 in Anhang C.4 entnommen werden.

**Tab. 6.13:** Übersicht der Wasserspiegeldifferenzen für die Simulationsläufe  $HQ_{100-a}$ ,  $HQ_{100-b}$  und  $HQ_{100-c}$ , [m], ( $\Delta h_{Quantile}$  ist die Differenz aus 90 %- und 10 %- Quantilwert)

	$HQ_{100-a}$		$HQ_{100-b}$		$HQ_{100-c}$	
	$\Delta h_{Max}$	$\Delta h_{Quantile}$	$\Delta h_{Max}$	$\Delta h_{Quantile}$	$\Delta h_{Max}$	$\Delta h_{Quantile}$
AS1	0,5	0,25	0,45	0,23	0,26	0,13
AS2	0,55	0,28	0,55	0,25	0,35 - 0,40	0,20
AS3	0,35	0,22	0,38	0,20	0,23	0,11

Eine Übersicht der Wasserspiegeldifferenzen für die drei Simulationsläufe  $HQ_{100-a}$ ,  $HQ_{100-b}$  und  $HQ_{100-c}$  gibt Tabelle 6.13. Daraus ist zu erkennen, dass der Einfluss einer gleich- und einer normalverteilten Vorlandhöhenannahme nahezu identisch ist (wie auch bereits am synthetischen Gerinne festgestellt). Für die extremalen Wassertiefen war dies auch zu erwarten, weil trotz unterschiedlicher Verteilung die Parameterräume gleich geblieben und somit bei einer ausreichenden Simulationszahl die gleichen Parameterkombination zu erwarten sind, wie bei der Annahme einer Gleichverteilung. Einzig die Häufigkeiten dieser Parameterkombinationen werden durch die unterschiedliche Verteilungsannahme beeinflusst, so dass für den Lauf  $HQ_{100-b}$  die Grenzen der Quantile ca. 0,02 m näher gerückt sind als bei dem Simulationslauf  $HQ_{100-a}$ . Bezogen auf eine Wasserspiegelschwankung zwischen den Quantilgrenzen von im Mittel 0,25 m, ist diese Änderung jedoch relativ gering. Wird allerdings jedes Höhenraster unabhängig voneinander verändert (Lauf  $HQ_{100-c}$ ), so nimmt die mögliche Wasserspiegelschwankung erwartungsgemäß ab. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere benachbarte Zellen sich in eine Richtung ändern und somit einen großen Einfluss auf die Wassertiefe in dem Abschnitt ausüben ist sehr gering. Durch die unterschiedlichen Änderungen jeder Zelle, kompensieren sich diese Effekte und der Einfluss der Vorlandhöhe nimmt im Mittel stark ab. In Zahlen ausgedrückt, bedeutet das eine Halbierung der Wassertiefendifferenzen in den Abschnittstypen AS1 und AS3. In den Bereichen von Einengungen (AS2) fällt der Effekt der Kompensation durch die geringere Zahl der Zellen nicht so stark aus, sodass die Wasserspiegeldifferenzen nur geringfügig abnehmen.

Um ggf. eine Abflussabhängigkeit der Wasserspiegelschwankungsbreiten analysieren zu können, erfolgen auch Monte Carlo Simulationen für Abflüsse der Jährlichkeiten 20 (siehe Abbildung C.18 für den Lauf  $HQ_{20-a}$  und Abbildung C.19 für den Lauf  $HQ_{20-b}$ ) und 5 (siehe Abbildung C.20 für den Lauf  $HQ_5-a$  und Abbildung C.21 für den Lauf  $HQ_5-b$ ).

Tabelle 6.14 zeigt zusammenfassend diese Wasserspiegelschwankungen. Daraus wird deutlich, dass mit abnehmendem Abfluss zwar die Wasserspiegelschwankungen ebenfalls ab-

**Tab. 6.14:** Übersicht der Wasserspiegeldifferenzen für die Simulationsäufte  $HQ_{20-a}$ ,  $HQ_{20-b}$ ,  $HQ_{5-a}$  und  $HQ_{5-b}$ , [m]

	$HQ_{20-a}$		$HQ_{20-b}$		$HQ_{5-a}$		$HQ_{5-b}$	
	$\Delta h_{Max}$	$\Delta h_Q$						
AS1	0,4	0,24	0,41	0,21	0,38	0,24	0,45	0,2
AS2	0,5	0,25 - 0,34	0,5	0,22 - 0,32	0,42	0,23	0,45	0,22
AS3	0,44	0,2	0,43	0,19	0,53	0,25	0,54	0,23

nehmen, jedoch nur in einem relativ geringen Maß (0,05 bis 0,1 m). Nur für den Bereich AS3 (Wehr und Bruchkante bei Maineck) ist ein paradoxes Bild zu erkennen. Mit abnehmendem Abfluss steigt die Wasserspiegelschwankung von gut 0,35 m auf über 0,55 m an. Dies ist dadurch zu erklären, dass in diesem Abschnitt sowohl ein Abfluss über das Wehr als auch durch eine Unterführung in dem Straßendamm (bei weiter ansteigendem Abfluss ebenso durch eine Überströmung der Bruchkante) erfolgen kann. Für große Abflüsse teilt sich der Abfluss für alle möglichen Parameterkombinationen in diese beiden (drei) Abflussanteile auf. Bei kleineren Abflüssen hingegen, erfolgt für eine Großzahl an Parameterkombinationen der Abfluss allein über das Wehr. Die maßgebende Spannweite für die Wassertiefe ist somit die Wehrkrone und die Höhe, bei der der Abfluss in der Unterführung eintritt. Da hierzu sich das Wasser im Vorland aufstauen muss, bis sich ein Abfluss durch die Unterführung im Straßendamm bildet, stellen sich hier verhältnismäßig große Wassertiefenschwankungen ein.

Werden die vorliegenden Wasserspiegelschwankungen mit denen für das synthetische Gerinne verglichen (vgl. Tabelle 6.14 mit Tabelle 6.6), so geben beide nahezu gleiche Ergebnisse wieder, wonach für Bereiche normaler Abflusszustände eine Wasserspiegelschwankung von 0,4 bis 0,5 m möglich ist.

Analog zu den Untersuchungen am synthetischen Gerinne, erfolgt auch hier eine GSA, um die Parametersensitivitäten örtlich verteilt wiedergeben zu können. Hierzu ist in Abbildung 6.24  $\Delta Fn_{Max}$ , in Abbildung C.22  $PR$  und in Abbildung C.23  $\Delta Fn_{Max/Min}$  aufgetragen.

Die GSA zeigt (Abbildung 6.24), dass, bezogen auf die Flächenanteile, die Vorlandhöhe die größte Sensitivität besitzt<sup>10</sup>. Einzig bei Burgkunstadt ist durch den nahezu reinen Gerinneabfluss,  $\Delta Fn_{Max}$  gut 0,6 und damit kleiner als eins. Die örtliche Verteilung von

<sup>10</sup>Diese Aussage ist zwar trivial, aber trotzdem ist eine Bewertung der GSA in diesem Rahmen möglich, um es anschließend auch für andere Untersuchungen einsetzen zu können.

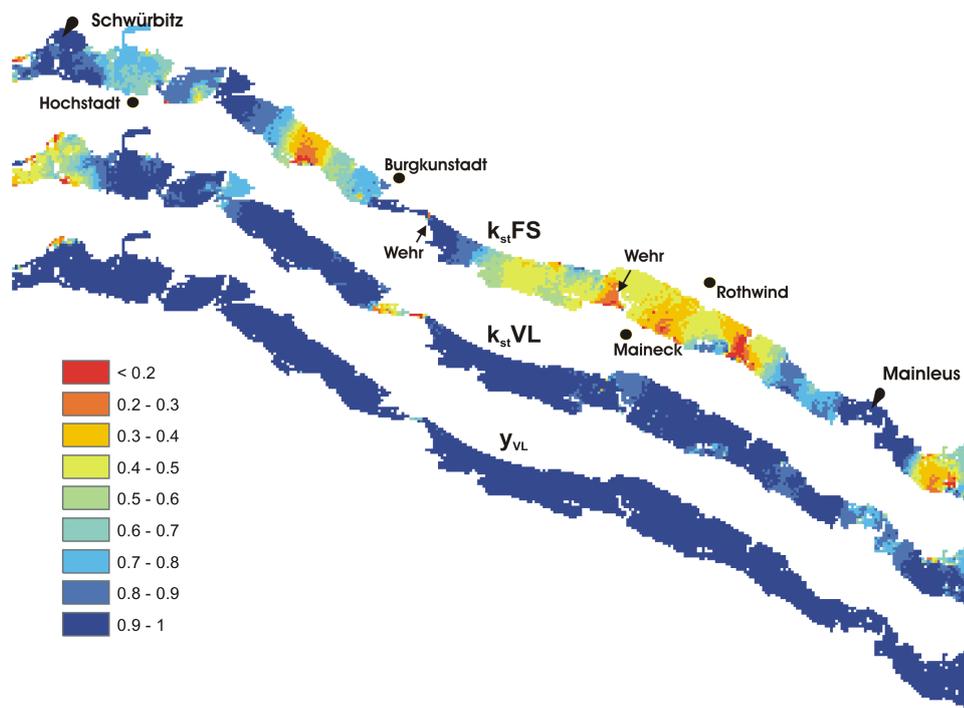


Abb. 6.24:  $\Delta F n_{Max}$  aus der GSA für den Lauf HQ<sub>100-a</sub>

PR (Abbildung C.22) zeigt zudem, dass die Sensitivität vor Einengungen etwas kleiner ist. Ein ähnliches Bild zeigt die Vorlandrauhigkeit allerdings in einer leicht abgeschwächten Form. Die Flussschlauchrauhigkeit hingegen besitzt nur in und vor Einengungen erwartungsgemäß die größten Sensitivitäten. Hinsichtlich der Sensitivität bei kleinen und großen Wassertiefen (Abbildung C.23) zeigt  $\Delta F n_{Max/Min}$  überwiegend ein symmetrisches Verhalten für die Vorlandhöhe. Einzig in Bereichen von Einengungen ist der Einfluss der Vorlandhöhe für kleine Wassertiefen größer, da sich im Gegensatz zu großen Wassertiefen eine Sohländerung nicht durch eine mögliche Anpassung der Geschwindigkeit zumindest teilweise kompensieren kann. Steht im Vorland eine verhältnismäßig geringe Wassertiefe an, so wird eine Änderung der Sohlhöhe eine in derselben Dimension befindende Änderung der Wasserspiegellage zur Folge haben, während bei größeren Tiefen diese generell kleiner ausfällt.

Die Vorlandrauhigkeit zeigt diesbezüglich ein umgekehrtes Bild. In Einengungen ist dieser Parameter für kleine und große Wassertiefen ähnlich sensitiv, während in den restlichen Gebieten eine höhere Sensitivität für kleine Wassertiefen folgt. Wie bereits bei der Analyse des synthetischen Gerinnes erwähnt, ist auch hier der kleine hydraulische Radius der Grund für die größere Sensitivität der Rauhigkeit bei kleinen Wassertiefen.

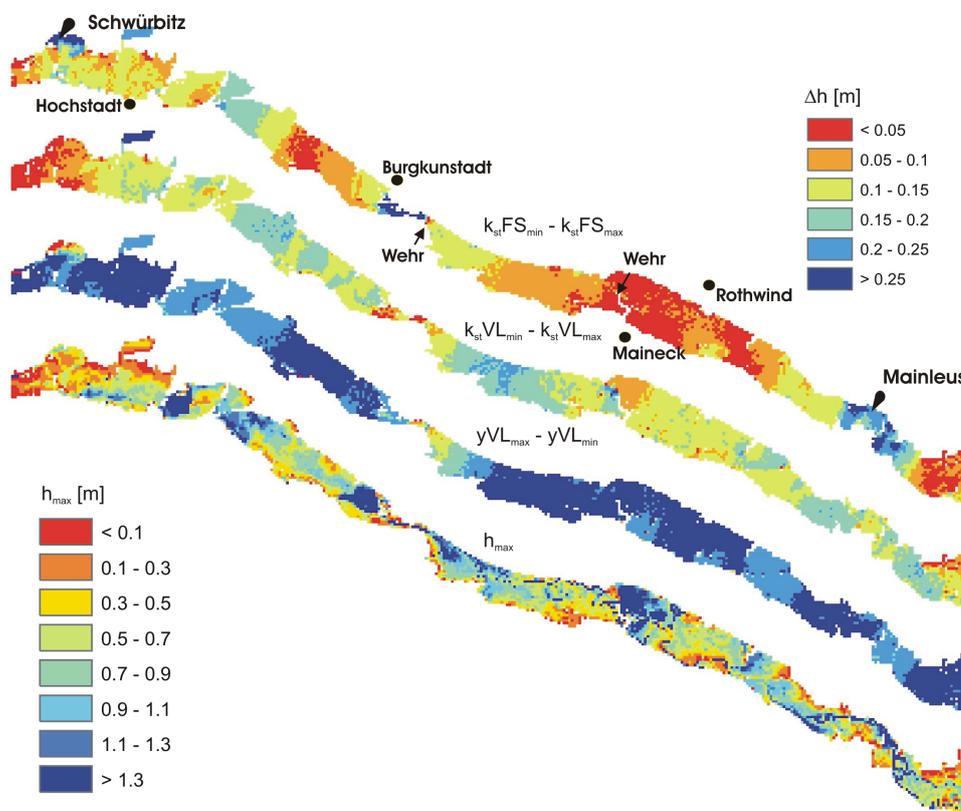
Die Flussschlauchrauhigkeit zeigt in Einengungen (Mainleus und vor Hochstadt) ebenfalls eine gleichmäßige Sensitivität über den gesamten Parameterraum. Bei Burgkunstadt wird den großen Wassertiefen eine höhere Sensitivität zugeschrieben, da das Wehr maßgebend

für die kleinen Wassertiefen ist. Entsprechend zur Vorlandrauhigkeit, ist bei weiterer Betrachtung auch hier die größere Parametersensitivität für rauhe Verhältnisse bzw. große Wassertiefen gegeben.

Grundsätzlich gibt die GSA hinsichtlich der Einzelsensitivitäten der Parameter das wieder, was sich durch die Untersuchung der jeweiligen Parameterränder ergeben hat. Ein anderes Ergebnis war nicht zu erwarten, aber die vorliegende Untersuchung zeigt die gute Anwendbarkeit der GSA zur Quantifizierung der Sensitivitäten einzelner Parameter. Somit wird auf die Visualisierung der verbleibenden Monte Carlo Simulationen verzichtet.

### 6.2.5.2 Instationäre Abflussverhältnisse

Auch bei der Betrachtung von instationären Abflussverhältnissen wird zunächst die Sensitivität des Wasserstandes auf die einzelnen Parameter untersucht, indem die Wasserspiegeldifferenzen für jede maximale Parameterspannweite (vgl. Tabelle 6.1) errechnet werden. Die Zuflussganglinie entspricht dabei der Welle aus den Untersuchungen an dem synthetischen Gerinne.



**Abb. 6.25:** Maximale Wasserspiegelländerung bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1) für eine Hochwasserwelle (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100)

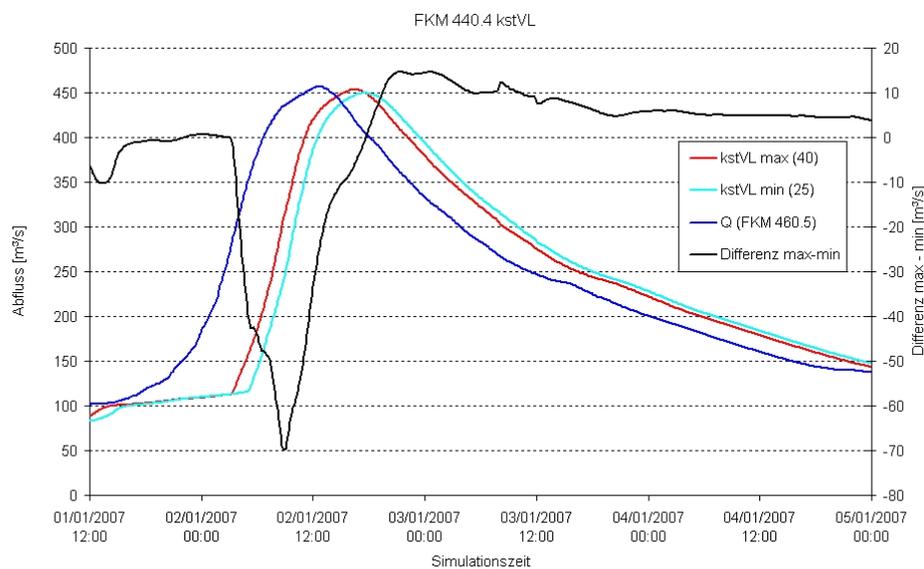
Abbildung 6.25 zeigt örtlich verteilt, die maximal mögliche Wasserspiegeländerung bei Variation der Parameter Vorlandrauhigkeit, Flussschlauchrauhigkeit und Vorlandhöhe. Zu diesen Wasserspiegeldifferenzen wird zusätzlich die sich maximal einstellende Wassertiefe  $h_{max}$  über dem bordvollen Wasserstand (in jeder Rasterzelle nach dem Durchlauf der Welle) angegeben. Da es sich hier um Hochwasserwellen handelt, werden neben den Überschwemmungstiefen auch die Änderungen der Hochwasserwelle untersucht. Dazu werden nahe des Pegels Mainleus (FKM 460,4) und rund 20 km flussabwärts in Höhe des Zuflusses der Rodach (FKM 440,5), zur Quantifizierung der Hochwasserwellenverformung innerhalb dieses Abschnittes, Kontrollquerschnitte eingefügt. Somit werden bei der instationären Betrachtung neben den Wassertiefen auch die Laufzeit der Wellenspitze, Gerinneretention und der Wert der Wellenspitze als Zielgrößen betrachtet. Hinsichtlich der Abflussanteile sei hier erwähnt, dass für mittlere Parameterwerte der Abfluss im Flussschlauch maximal  $200 \text{ m}^3/\text{s}$  beträgt.

Tabelle 6.15 zeigt den Einfluss der einzelnen Parameter auf eine 100-jährliche Hochwasserwelle. Darin ist zu erkennen, dass eine Abflussspitzenreduktion infolge Retention kaum erfolgt und unter 2 % (bezogen auf die Abflussspitze bei FKM 460,4) bleibt. Somit werden die Ergebnisse aus den Untersuchungen an dem synthetischen Gerinne, die ähnliches ergaben, bestätigt. Auch die maximal benetzten Flächen ändern sich durch die Eindeichung der Vorländer kaum. Zudem ist auch hier (vgl. Ergebnisse am synthetischen Gerinne) die Scheitellaufzeit allein von der Vorlandrauhigkeit abhängig, wobei die Spitze bei einer mittleren Gesamtlaufzeit von 4 Stunden und 20 Minuten früher ( $k_{st}VL_{max}$ ) oder 40 Minuten später ( $k_{st}VL_{min}$ ) ankommen kann. Weiterhin fällt auf, dass die Scheitellaufzeiten fast mit denen aus den Berechnungen für das synthetische Gerinne identisch sind (vgl. Tabellen 6.15 und 6.8).

**Tab. 6.15:** Einfluss einzelner Parametergrenzwerte auf die Hochwasserwelle bei FKM 440,5 bzw. auf 20 km Flusslänge (Bei FKM 460,4 tritt das  $Q_{max} = 457 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  um 12:30 Uhr auf)

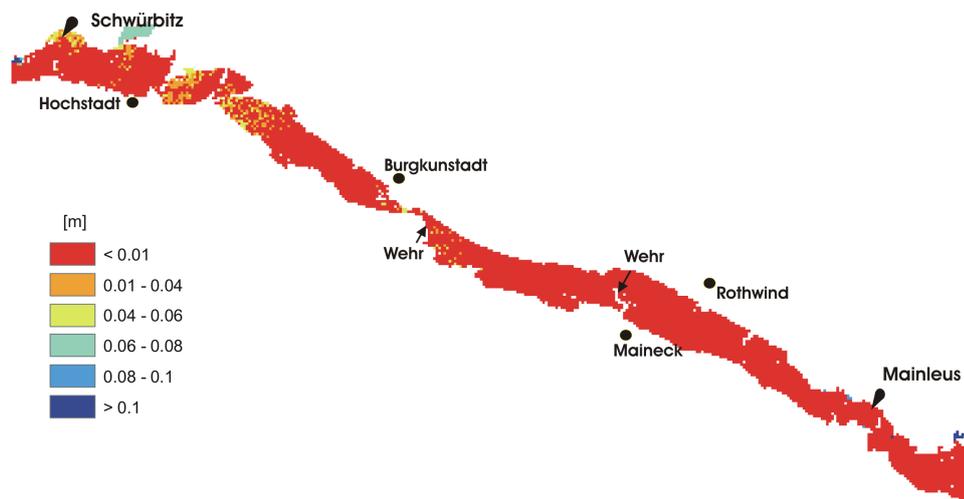
Parameterwerte	Qmax $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	Zeitpunkt Zeit	Gerinneretention [%]	max. benetzte Fläche [%]
mittl. Parameterwerte	452.1	16:50	100	100
$k_{st}FS_{max}$ (44)	452.53	16:50	94.1	97.8
$k_{st}FS_{min}$ (30)	451.08	16:50	104.8	102.0
$k_{st}VL_{max}$ (40)	453.38	16:30	90.4	98.2
$k_{st}VL_{min}$ (25)	449.63	17:30	113.5	102.5
$yVL_{max}$ (0,15)	452.34	16:50	98.5	99.0
$yVL_{min}$ (-0,15)	451.74	16:50	101.5	100.8

Einzig die mittlere Scheitellaufzeit ist für das synthetische Gerinne mit 4 Stunden und 50 Minuten um eine halbe Stunde länger. Dies ist jedoch darauf zurückzuführen, dass am Oberen Main die 20 FKM auf den sich teilweise stark mäandrierenden Verlauf des Flussschlauches beziehen, während der Vorlandabfluss eine wesentlich geringere Strecke zurück legt. Hinsichtlich der Gerinneretention zwischen den betrachteten 20 km Flusslänge (Gerinneretention aus der Zuflusswelle und der sich ergebenden Welle nach 20 FKM für mittl. Parameterwerte:  $V = 8,3 \text{ Mio. m}^3$ ) besitzt auch hier die Vorlandrauuhigkeit mit  $-10$  ( $k_{st}VL_{max}$ ) bis  $+13,5$  % ( $k_{st}VL_{min}$ ) den größten Einfluss. Die Flussschlauchrauuhigkeit hat mit  $-6$  ( $k_{st}FS_{max}$ ) bis  $+5$  % ( $k_{st}FS_{min}$ ) den zweitgrößten Einfluss (vgl. hierzu auch die Abbildungen 6.26, C.25 und C.26).



**Abb. 6.26:** Abflusswellenänderungen für einen max. ( $k_{st}VL_{max} = 40$ ) und min. ( $k_{st}VL_{min} = 25 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$ ) Vorlandrauuhigkeitswert nach 20 km (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100)

Es stellt sich nun auch die Frage, inwiefern die berechneten Wassertiefen für stationäre Abflusszustände mit den vorliegenden Ergebnissen übereinstimmen. Der direkte Vergleich hat für das vorliegende Untersuchungsgebiet ergeben, dass praktisch beide Ansätze dasselbe Ergebnis liefern (vgl. Abbildung 6.27). Dies gilt ebenso für die maximalen Wasserspiegeldifferenzen, die im instationären und instationären Fall praktisch identisch sind (vgl. Abbildungen 6.25 und 6.21). Daher wird auf die Interpretation der instationären Ergebnisse (extremale Wasserspiegelschwankungen bei Variation eines Parameterwertes) verzichtet und auf den stationären Fall verwiesen.



**Abb. 6.27:** Differenz der maximalen Wassertiefen für einen stationären und instationären Abfluss der Jährlichkeit 100 für mittlere Parameterwerte

Dieser Vergleich ist auch für das 2D Modell erfolgt und bestätigt für das vorliegende Gebiet mit den entsprechenden Randbedingungen, dass es hinsichtlich der Wassertiefen praktisch keinen Unterschied macht, stationär oder instationär zu rechnen. Einzig vor Einengungen sind die Wasserspiegellinien bei stationären Abflusszuständen bis zu 0,03 m größer, weil es zu einem größeren Rückstau kommt (vgl. Abbildung C.27).

### Analyse der Monte Carlo Simulationen

Nachdem auch am Oberen Main die Einflüsse der Parametergrenzwerte auf den Wasserspiegel sowie auf die Hochwasserwelle untersucht wurden, erfolgen nun entsprechend die Monte Carlo Simulationen. Auch hier soll das statistische Verhalten der definierten Zielgrößen hinsichtlich der gewählten Parameterräume erfasst werden. Variiert werden (wie auch bei den stationären Abflusszuständen) die Rauigkeiten im Vorland und Flussschlauch sowie die Vorlandhöhe. Um die ohnehin langen Simulationszeiten zu verkürzen<sup>11</sup>, werden für eine Monte Carlo Simulation 1500 Parameterkombinationen mittels der Latin Hypercube Methode generiert. Da eine Monte Carlo Simulation weit mehr als einen Monat dauert, erfolgen zwei Simulationsläufe entsprechend zu den Untersuchungen am synthetischen Gerinne, die auch hier mit  $HQ_{100-a}$  (alle Parameter gleich verteilt) und  $HQ_{100-b}$  (Vorlandhöhe normalverteilt) bezeichnet werden. Die entsprechend simulierte Kurvenschar ist in den Abbildungen C.28 und C.29 aufgetragen.

Tabelle 6.16 gibt eine zusammenfassende Auswertung der Monte Carlo Simulationen für die Hochwasserwellen wieder.

<sup>11</sup>1500 Simulationsläufe benötigen an einem P4, 3.2 GHz, 3.5 GB RAM Rechner über einen Monat.

**Tab. 6.16:** Auswertung Monte Carlo Simulationen: Parametereinfluss auf eine Hochwasserwelle nach 20 km Flusslänge (Bei FKM 460,4 tritt das  $Q_{max} = 457 \frac{m^3}{s}$  um 12:30 Uhr auf)

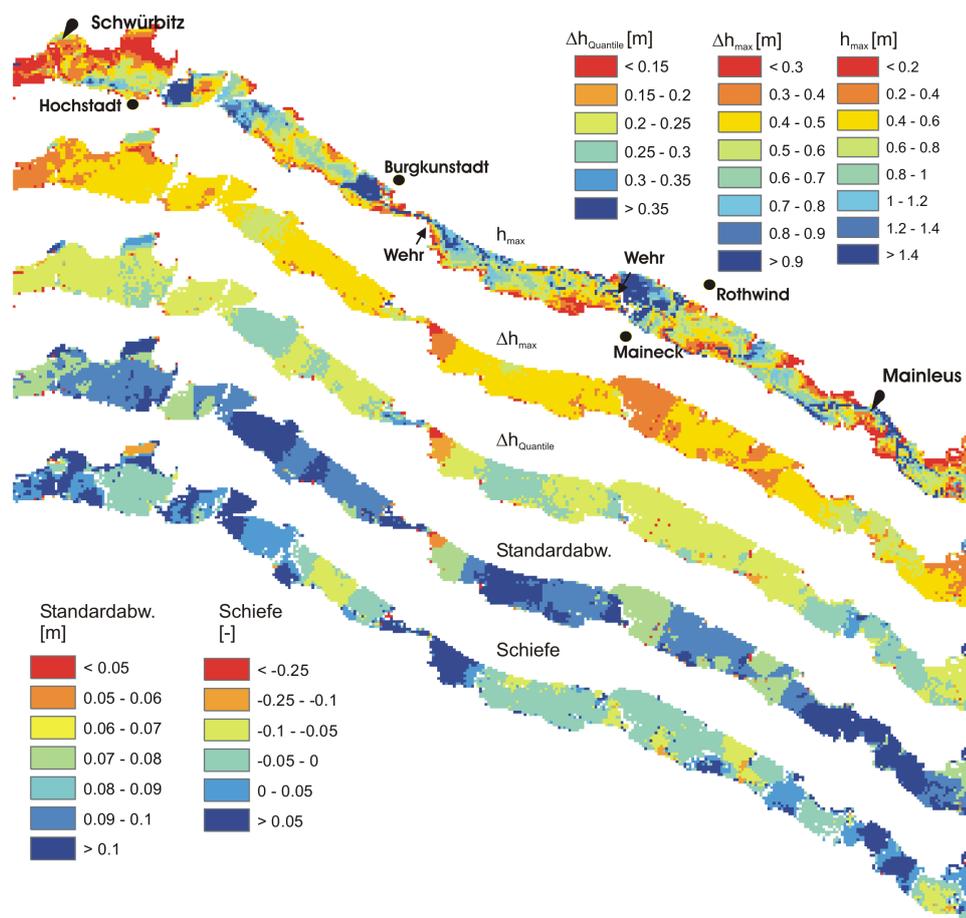
	$t(Q_{max})$	Gerinneret.	HQ <sub>100-a</sub>		HQ <sub>100-b</sub>	
			$D_{300}$	$Q_{max}$	$D_{300}$	$Q_{max}$
stat. Parameter	Zeit	[%]	[h]	$[\frac{m^3}{s}]$	[h]	$[\frac{m^3}{s}]$
Mittelwert	16:50	100	24,05	451,65	24,05	451,65
Standardabw.	-	7,6	0,12	1,07	0,11	1,05
Schiefe	-	0 [-]	-0,1 [-]	-0,01	-0,09 [-]	-0,04
Max	17:50	118,8	24,33	453,99	24,33	453,96
Min	16:20	82,1	23,67	449,45	23,67	449,5
90%-Quant.	17:30	110,2	24,17	453,09	24,17	453,05
10%-Quant.	16:30	89,7	23,83	450,22	23,95	450,22

Die statistischen (stat.) Parameter zeigen, dass beide untersuchten Fälle (HQ<sub>100-a</sub> und HQ<sub>100-b</sub>) nahezu identische Ergebnisse liefern. Der Übersichtlichkeit halber werden die Eintrittszeitpunkte der Scheitelwerte sowie die Werte der Gerinnereretention in der Tabelle einfach aufgeführt, weil sie für beide Simulationen identisch ausfallen. Für den Scheitelwert gilt, dass dieser bei einer mittleren Laufzeit von 4 Stunden und 20 Minuten ca. eine halbe Stunde früher oder eine Stunde später eintreffen kann<sup>12</sup>. Die Berechnung des Gerinnereretentionsvolumens erfolgt zwischen der Zuflussganglinie und jeder einzelnen Abflusswelle bei FKM 440,5 (bzw. nach ca. 20 km). Der Mittelwert aller Retentionsvolumen beträgt 8,34 Mio.  $m^3$ . Dieses Volumen wird anschließend mit den Volumina ins Verhältnis gesetzt, die sich aus der statistischen Auswertung aller Retentionsvolumina ergeben.

Die Monte Carlo Simulationen zeigen also auch in diesem Fall keine nennenswerte Veränderung der Hochwasserwelle hinsichtlich der Abflussspitzenreduktion ( $Q_{max}$ ) und Verformung ( $D_{max}$ ). Ein Vergleich der Tabellen 6.16 und 6.8 zeigt, dass sich die Hochwasserwelle im synthetischen Gerinne und im Abschnitt des Oberen Main nahezu gleich verhält.

Während sich das Abflussverhalten kaum durch die Parametervariationen ändert, ist der Einfluss auf den Wasserspiegel bzw. auf die Fließgeschwindigkeit gut erkennbar. Die Abbildungen 6.28 und C.30 zeigen diesbezüglich die statistische Auswertung der Wassertiefen für jede einzelne Rasterzelle für beide Simulationsläufe. Entsprechend zu dem vorangegangenen Kapitel (stationärer Abfluss am Oberen Main) werden örtlich verteilt die möglichen Schwankungsbreiten sowie die statistischen Parameter angegeben.

<sup>12</sup>Es sei hingewiesen, dass für ein Zeitfenster von einer Stunde die Abflussspitze der Zuflusswelle sich zwischen den Werten 454 und 457  $m^3/s$  befindet und somit die Varianz der Scheitelintrittszeitpunkte relativ gesehen werden müssen



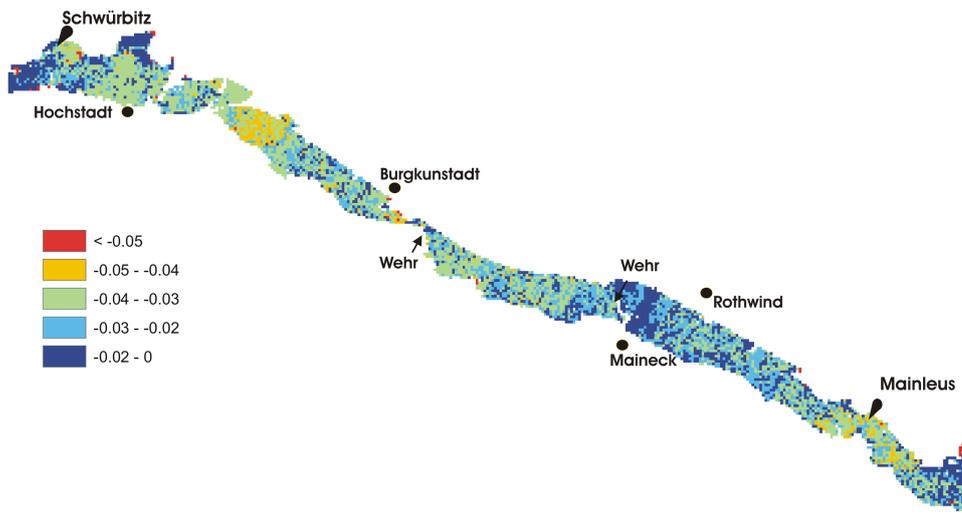
**Abb. 6.28:** Auswertung der Monte Carlo Simulationen für den Lauf  $HQ_{100-a}$ , Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse

Auch hinsichtlich den Wassertiefen stimmen die Ergebnisse von  $HQ_{100-a}$  und  $HQ_{100-b}$

**Tab. 6.17:** Übersicht der Wasserspiegeldifferenzen für  $HQ_{100-a}$  und  $HQ_{100-b}$  [m]

	$HQ_{100-a}$		$HQ_{100-b}$	
	$\Delta h_{Max}$	$\Delta h_{Quantile}$	$\Delta h_{Max}$	$\Delta h_{Quantile}$
AS1	0,45	0,23	0,46	0,23
AS2	0,55	0,30	0,56	0,27
AS3	0,38	0,22	0,40	0,20

überein (siehe Tabelle 6.17). Demnach liegt die maximale Wasserspiegelschwankungsbreite für einen ungestörten Abfluss über Fluss Schlauch und Vorland bei fast einem halben Meter. In Einengungen liegt die Spannweite mit ca. 0,55 m etwas höher und vor Wehren mit nahezu 0,40 m etwas darunter. Diese Spannweiten sind für ein hydrodynamisches Modell sehr hoch, aber es handelt sich hierbei um die maximalen Spannweiten. Betrachtet man die Wasserspiegelspannweite, in der sich 80 % der simulierten Wasserspiegel befinden, so liegen diese grundsätzlich um die Hälfte unter den maximalen Werten.



**Abb. 6.29:** Differenz der maximalen Wasserspiegelschwankungen aus der Monte Carlo Analyse für einen instationären und stationären Abfluss [m]

Wird die Tabelle 6.17 mit den entsprechenden Ergebnissen aus der stationären Untersuchung (vgl. Tabelle 6.13) verglichen, so stimmen auch die Ergebnisse der Wassertiefen aus den Monte Carlo Analysen überein. Dies wird durch die Visualisierung der maximalen Wasserspiegelschwankungen aus der instationären und stationären Betrachtung für jede Rasterzelle untermauert (siehe Abbildung 6.29).

Obwohl bisher die Ergebnisse der instationären Untersuchung nicht von der stationären abweichen, erfolgt der Vollständigkeit halber auch für die instationären Abflussverhältnisse die GSA hinsichtlich der maximalen Wasserspiegellagen. Aber auch hier gleichen die Ergebnisse den Untersuchungen mit stationären Fließzuständen. Daher wird auf die Interpretation verzichtet und lediglich auf die Abbildungen C.31, C.32 und C.33 verwiesen.

### 6.3 Vergleich der Ergebnisse verschieden komplexer Modelle

Die hydrodynamische Berechnung von Hochwasserereignissen kann auf unterschiedlich komplexen Modellen beruhen. DVWK [1999] gibt hierzu an, dass unterschiedliche Modellvarianten Ergebnisdifferenzen im Zentimeterbereich liefern. Um diesbezüglich eine detailliertere Aussage treffen zu können, wird zunächst das synthetische Gerinne und anschließend der Modellabschnitt am Oberen Main mit unterschiedlichen Modellen simuliert. Die Ergebnisse werden anschließend gegenübergestellt.

### 6.3.1 Synthetisches Gerinne

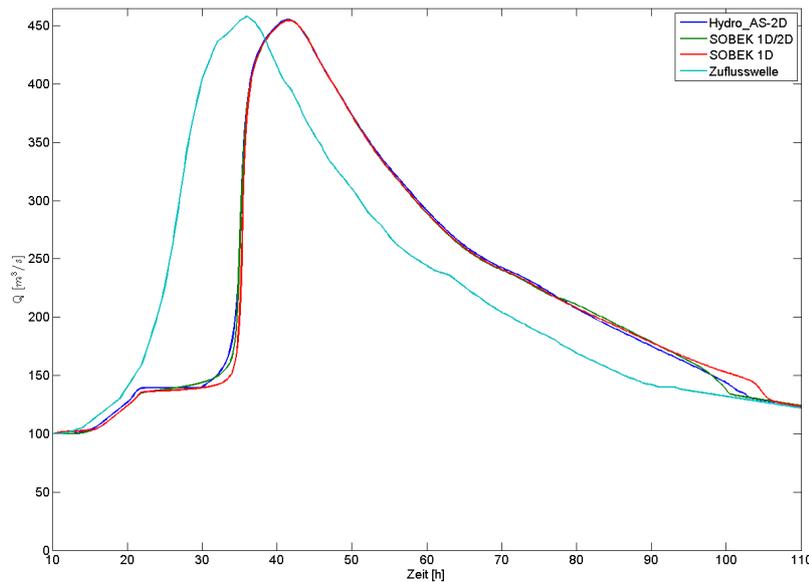
Die Berechnungen für das synthetische Gerinne erfolgen mit SOBEK 1D, SOBEK 1D/2D und mit Hydro\_AS-2D. Die Betrachtung der aus den verschiedenen Modellen ermittelten Wassertiefen (ermittelt für stationäre Abflusszustände) ergibt unter sonst gleichen Bedingungen (Randbedingungen und Rauheitswerte), dass die Ergebnisse des 2D Modells mit den Ergebnissen des 1D Modells zentimetergenau übereinstimmen und zwar für das untersuchte Abflussspektrum 210 bis 460  $m^3/s$ . Einzig der hybride Ansatz zeigt eine Abweichung von 0,04 bis 0,05 m (stets zu große Wassertiefen). Die Abweichung ist auf das Vorlandraster zurückzuführen, das den stetigen Sohlverlauf durch die Diskretisierung abbildet. Da das Wasser in den einzelnen Rasterzellen über eine horizontale Sohle fließt, sind somit auch die berechneten Fließgeschwindigkeiten etwas geringer und daher die errechneten Wassertiefen höher.

Grundsätzlich stellt dieser Wasserstandsunterschied bei dem hybriden Modell kein Problem dar, weil er durch eine Kalibrierung des Modells ausgeglichen werden würde. Gleichzeitig heißt das wiederum, dass bereits kalibrierte Rauheitsdaten aus einem vergangenen Modell nur als Anhaltswerte dienen können, wenn dasselbe Gebiet durch ein neues Modell abgebildet werden soll. Das bedeutet, das Modell sollte stets neu kalibriert werden.

Hinsichtlich der Verformung einer Hochwasserwelle, sei auf Abbildung 6.30 verwiesen. Dort ist die Veränderung einer Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100 nach 20 km mit den verschiedenen Modellen gegenübergestellt.

Wie durch das unsensitive Verhalten der Abflusszeitreihen infolge verschiedener Parameterkombinationen (vgl. Kapitel 6.2) zu erwarten war, berechnen die Modelle gleiche Abflusswellen nach 20 FKM. Auch der Knick im ansteigenden Ast infolge des Einsetzens der Vorlandüberflutung wird von allen drei Modellen abgebildet. Was lediglich auffällig ist, dass bei der reinen 1D Modellierung der Anstieg der Hochwasserwellenfront fast eine Stunde später ansetzt, sich aber dann den anderen Ergebnissen wieder annähert, um am Ende des Ereignisses als letztes abzuklingen.

Es erfolgten des Weiteren Simulationen mit synthetischen Hochwasserwellen unterschiedlicher Abflussspitzenwerte, die das gleiche Ergebnis liefern und daher lediglich hier eine Erwähnung finden sollen.



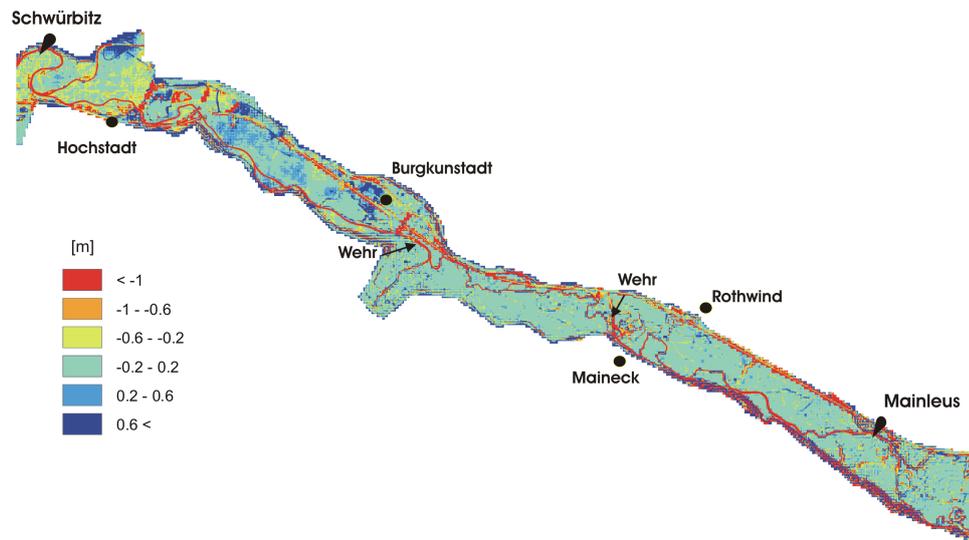
**Abb. 6.30:** Retention einer Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100 mit SOBEK 1D, SOBEK 1D/2D und HydroAS, synthetisches Gerinne mit  $k_{st}FS = 37$  und  $k_{st}VL = 25 \frac{\sqrt[3]{m}}{s}$

### 6.3.2 Modellabschnitt Oberer Main

Die Modellierung des Oberen Main erfolgt mit den Modellen Hydro\_AS-2D, SOBEK 1D/2D und mit MIKE-Flood. Auch hier ist das Ziel, mit den gleichen Randbedingungen dasselbe Ereignis zu simulieren und die Ergebnisse zu vergleichen. Während die gleichen Rauigkeitswerte, Zufluss- und die Abflussrandbedingungen problemlos bei allen Modellen zugewiesen werden können, kann die Topographie in den drei Modellen nicht exakt gleich abgebildet werden. Während die hybriden Modellansätze sich diesbezüglich auf ein Raster beziehen (hier mit einer Rasterweite von 50 m), bedient sich das 2D Modell einem TIN. Somit liegen bereits in den Randbedingungen Unterschiede vor, was sicherlich auch Einfluss auf die Wasserspiegellagen haben wird. Es ist zwar durch die Wahl eines sehr feinen Rasters möglich, diese Unterschiede zu minimieren, aber aus modelltechnischen Gründen (vgl. Kapitel 5.4) ist zumindest für das Programmpaket SOBEK die Rasterweite nach unten eingeschränkt.

Rasterbasierte Modelle können Geländestrukturen nur in einer Auflösung der Rasterweite abbilden. Somit werden beispielsweise Bruchkanten (z.B. Straßendämme) mit einer natürlichen Breite von ca. 20 m hier als 50 m breit dargestellt. Zudem werden hierdurch die abflusswirksamen Flächen reduziert, was aber bei diesen Tal-Breiten eher eine untergeordnete Rolle spielt.

Für einen quantitativen Vergleich beider Geländemodelle wird ihre Differenz gebildet.



**Abb. 6.31:** Differenz aus Geländemodell Hydro\_AS-2D und SOBEK 1D/2D (bzw. TIN minus Raster)

Daraus ist zu erkennen (vgl. Abbildung 6.31), dass zwar die Differenzen stark fluktuieren, aber größtenteils unter  $\pm 0,2$  m bleiben. Des Weiteren sind zwar die relevanten Bruchkanten im hybriden Modell manuell implementiert worden, aber kleinere Geländestrukturen werden im Rastermodell nicht abgebildet. Auffällig ist insbesondere ein kurzer Abschnitt vor Hochstadt, in dem die Differenz tendenziell zwischen 0,3 und 0,4 m liegt, obwohl beiden Geländemodellen dieselben Daten zugrunde liegen. Diese bestehen aus einem Punktraster (Auflösung 20 m), in dem die Bruchkanten und kleinere Geländestrukturen (Eintiefungen wie Altarme oder Aufhöhungen) mit einer höheren Punktdichte implementiert sind. Da bei der Rasterbildung die vorliegenden Höhenpunkte gemittelt werden, kann es offensichtlich zu einer kleinen Über- oder Unterschätzung kommen. Somit werden für den Oberen Main zwangsläufig unterschiedliche Wassertiefen zwischen dem Raster und dem TIN Modell erwartet.

Diese Problematik des Rastermodells ist erkannt, weshalb seit kurzem das Programmpaket MIKE Flood als Alternative zum Raster mit einem TIN arbeiten kann. Eine ähnliche Entwicklung läuft ebenso für das Programm SOBEK.

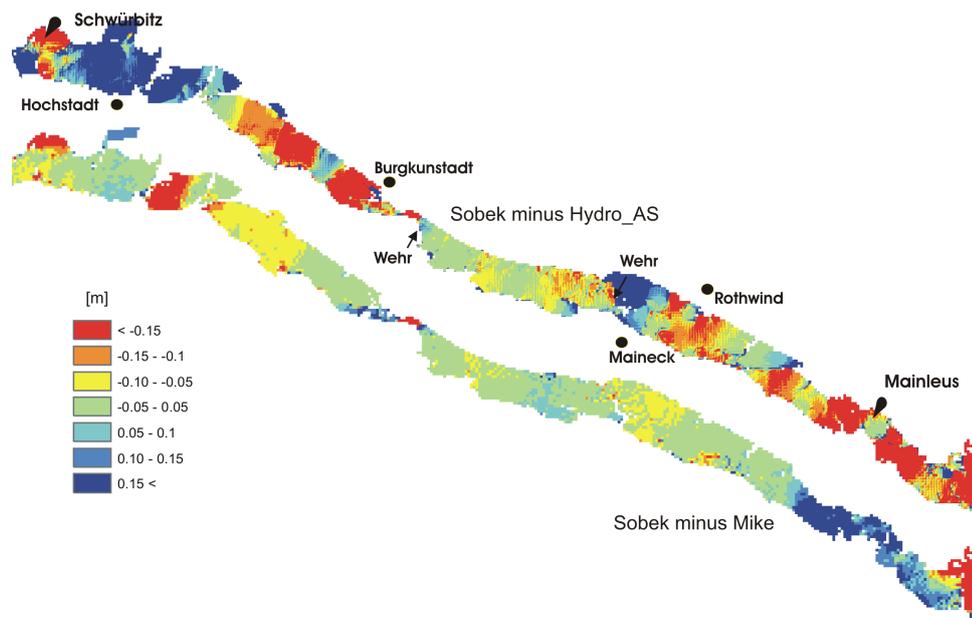
Hinsichtlich der Überschwemmungsflächen stimmen, infolge der Eindeichung in Kombination mit den flachen Vorländern, die Ergebnisse relativ gut überein. Einzig das 2D Modell stellt die Überschwemmungsgrenzen feiner (TIN statt Raster) dar. Abbildung 6.32 zeigt im nächsten Schritt die Gegenüberstellung der simulierten Wassertiefen für einen Abfluss der Jährlichkeit 100<sup>13</sup>. Hierzu werden jeweils die Differenzen zweier Ergebnisse aufgezeigt.

<sup>13</sup>Entsprechende Abbildungen für die Jährlichkeiten 20 und 5 sind in Abbildung C.34 und C.35 zu finden.

Zunächst ist grundsätzlich zu erwähnen, dass beide hybriden Modelle dieselben Ergebnisse liefern sollten, weil beiden Modellansätzen die gleichen Randbedingungen vorliegen (Rauigkeiten, Querprofile und Höhenraster).

Beide Modelle unterscheiden sich jedoch durch ihre Kopplungsmethoden (vgl. Kapitel 5.4). Während in SOBEK der Flussschlauch und die darüber liegenden Rasterzellen jeweils eine Einheit bilden, stanzt das Programmpaket MIKE Flood die Rasterzellen, die durch den Flussschlauch berührt werden, aus. Dadurch wird verhindert, dass nicht zum vorliegenden Flussschlauchabfluss in der 1D Komponente noch zusätzlich ein Abfluss in den darüberliegenden Rasterzellen erfolgt. Da aus Vergleichszwecken auch für MIKE Flood ein Raster mit der Weite 50 m gewählt worden ist und die Uferbreiten teilweise bei 30 m liegen, wird ein Teil abflussfähiger Vorlandfläche nicht abgebildet. Dadurch ist in diesen Abschnitten (Bereiche mit engen Vorländern) ein höherer Wasserstand als bei SOBEK zu erwarten. Im vorliegenden Beispiel liegt der Wasserstandsunterschied bei fast 0,2 m (Abschnitte bei Hochstadt und Burgkunstadt in Abbildung 6.32). Ansonsten sind die Wasserspiegeldifferenzen weniger als 0,02 m und steigen teilweise bis auf 0.05 m an. Einzig bei Mainleus simuliert SOBEK Wassertiefen, die gut 0,15 m größer sind als die mit MIKE simulierten Werte. Dieser Wasserstandsunterschied fällt jedoch bei FKM 459 (südlich von Rothwind) schlagartig weg. Der direkte Vergleich zum 2D Modell zeigt für den kleinen Abschnitt bei Mainleus, dass die Wassertiefen sehr gut mit denen von SOBEK übereinstimmen und das MIKE Flood Modell näher betrachtet werden sollte. Erst der Vergleich der Geschwindigkeiten bzw. der Abflussanteile im Flussschlauch erklärt den Unterschied. Während der Anteil des Flussschlauchabflusses bei SOBEK in diesem Bereich gut  $100 \text{ m}^3/\text{s}$  beträgt, liegt dieser bei MIKE bei über  $160 \text{ m}^3/\text{s}$ . Durch den glatteren Zustand im Flussschlauch (im Vergleich zum Vorland) wird bei gleichem Wasserstand eine größere Abflussmenge transportiert.

Diese Defizite von MIKE Flood, vor allem das Ausstanzen der Rasterzellen und der damit verbundene Verlust der effektiven Abflussflächen im Vorland, sind jedoch auf die Wahl der Rasterweite zurückzuführen. Grundsätzlich kann durch das entsprechende Kopplungskonzept bei der Modellierung mit MIKE eine höhere Rasterauflösung gewählt werden, wodurch dieser Problematik entgegengewirkt wird. Da der Modellierer mit MIKE bei der Wahl der Rasterweite nicht eingeschränkt ist, sollte er eine Weite wählen, die zum einen die Heterogenität des Gebietes ausreichend abbildet und gleichzeitig die Simulationszeit in einem geeigneten Rahmen belässt. Da die Performance des MIKE Modells subopti-



**Abb. 6.32:** Differenz der simulierten Wasserspiegel für ein stationäres Abflussereignis der Jährlichkeit 100

mal ist, wird sich im Folgenden auf den Vergleich zwischen SOBEK und Hydro\_AS-2D beschränkt.

Der Vergleich der SOBEK Wassertiefen mit dem Ergebnis der 2D Modellierung zeigt, dass auch hier beide Modelle in Abschnitten normaler Abflussverhältnisse (ungestörter Vorland- und Flussschlauchabfluss)übereinstimmende Ergebnisse liefern. Es existieren jedoch ganz offensichtlich Bereiche unterschiedlicher Wassertiefen. Diese sind auf folgende Prozesse bzw. Gegebenheiten zurückzuführen:

- Interaktion zwischen Vorland- und Flussschlauchabfluss
- Abbildung von kleineren Geländestrukturen
- Rasterauflösung von Bruchkanten

Die Interaktion zwischen dem Vorland- und Flussschlauchabfluss wird in den hybriden Modellansätzen entweder durch die Kontinuitätsbedingung (SOBEK) oder durch eine Überfallformel (MIKE) realisiert. Ein Impulsaustausch zwischen beiden Ebenen findet demnach nicht statt. Diese Gegebenheit ist für parallel verlaufende Vorland- und Flussschlauchabflüsse nicht von Bedeutung. Besitzen jedoch beide Abflusskomponenten, infolge eines mäandrierenden Charakters des Flussschlauches, unterschiedliche Abflussrichtungen und fließt der Vorlandabfluss über das quer verlaufende Gerinne, so kommt es in diesen Bereichen zu Turbulenzen. Diese führen zu hohen Energieverlusten, wodurch in diesen Abschnitten die Wassertiefen im 2D Modell höher sind als bei den hy-

briden Modellen. Dieser Effekt wird im vorliegenden Fall in dem Abschnitt bei Mainleus deutlich (vgl. Abbildungen 6.32 und 4.2). Dort sind die Wassertiefen beider Modelle am Pegel gleich, weil der Flussschlauch parallel zum Vorland verläuft. Unmittelbar vor und hinter dem Pegel kommt es zu dem beschriebenen Effekt und die Wassertiefen im 2D Modell sind ca. 0,25 m höher.

Für die Gewässerabschnitte bei Rothwind sowie den zwischen Brugkunstadt und Hochstadt sind örtlich Wassertiefenunterschiede zu erkennen, die schlagartig zurückfallen. Der Grund dafür sind kleinere Geländestrukturen wie kleine Altarme und (was eher von Bedeutung ist) leicht erhöhte Gehwege. Diese werden zwar im 2D Modell abgebildet, aber im hybriden Modell durch die Mittelung aller Höhenpunkte im Raster verwischt. Im vorliegenden Fall sind das Wassertiefenunterschiede von ca. 0,2 m.

Die Wasserspiegeldifferenz im Zuflussbereich der Rodach ist ebenfalls auf die teilweise mangelhafte Abbildung von Geländestrukturen eines Rastermodells zurückzuführen. So ist im 2D Modell der Flussschlauch implementiert, während im Rastermodell der Flussschlauch im Raster nicht abgebildet werden kann<sup>14</sup>. Die Folge ist ein zu großer Wasserstand im Rastermodell. Daher sollten die seitlichen Zuflüsse stets mit den Flussschläuchen (im 1D Modell) abgebildet werden, anstatt einen Zuflusspunkt zu definieren.

Der dritte Grund für die unterschiedlichen Wassertiefen beider Modelle ist die Rasterauflösung der vorliegenden Bruchkanten. Diesbezüglich sei auf die Abschnitte bei Mainneck und bei Hochstadt verwiesen. Hier sind eindeutig die Wassertiefen im 2D Modell kleiner als in den hybriden Modellen. Da in den Modellen sowohl die Bauwerke als auch die Bruchkanten mit den zugehörigen Unterführungen korrekt abgebildet waren und daher dieser Unterschied im ersten Augenblick unerklärlich blieb, gab erst die Visualisierung der Überflutungsflächen in bewegten Bildern Aufschluss. Und zwar liegt für den untersuchten Abfluss eine Überflutung der Bruchkanten vor. Diese Überfallbreiten unterscheiden sich jedoch im 2D Modell mit denen des Rastermodells in der Form, dass sich im hybriden Modellansatz ein größerer Rückstau bildet. Dadurch sind die Wasserspiegellagen in diesen Punkten um ca. 0,25 m größer.

Während sich für das synthetische Gerinne keine großen Unterschiede in den Wassertiefen ergaben, wird am Abschnitt des Oberen Main deutlich, dass durch die Heterogenität des Gebietes (sei es die Topographie oder der Verlauf des Flussschlauchabflusses bezüglich zum Vorlandabfluss) und dessen Abbildung im Modell, Wasserstandsunterschiede bis zu 0,25 m ergeben. Dies stellt in der ermittelten Dimension bei vorhandenen Fixierungsdaten kein Problem dar, weil eine entsprechende Anpassung durch eine Kalibrierung des

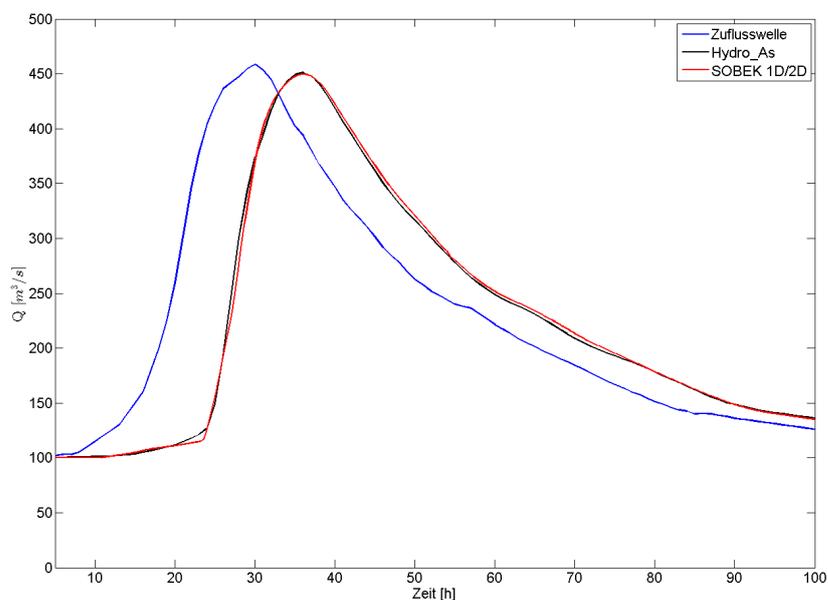
---

<sup>14</sup>Der Zufluss der Rodach wurde als seitlicher Zuflusspunkt definiert.

Modells durchgeführt werden kann. Allerdings ist offensichtlich, dass teilweise enorme Eingriffe in die Rauigkeitswerte erforderlich sind.

Wird dieses Ergebnis mit den Einflüssen der Parameter (insbesondere der Vorlandparameter) auf die Wassertiefe zusammengefasst, dann bedeutet das eine Modellunsicherheit bis zu 0,5 m, wenn keine Kalibrierungsdaten vorliegen sollten und die Rauigkeitsdaten durch beispielsweise Landnutzungskarten abgeleitet werden.

Abbildung 6.33 zeigt die Veränderung der Zuflusswelle nach 20 FKM nach dem hybriden (SOBEK) und dem 2D Modell.



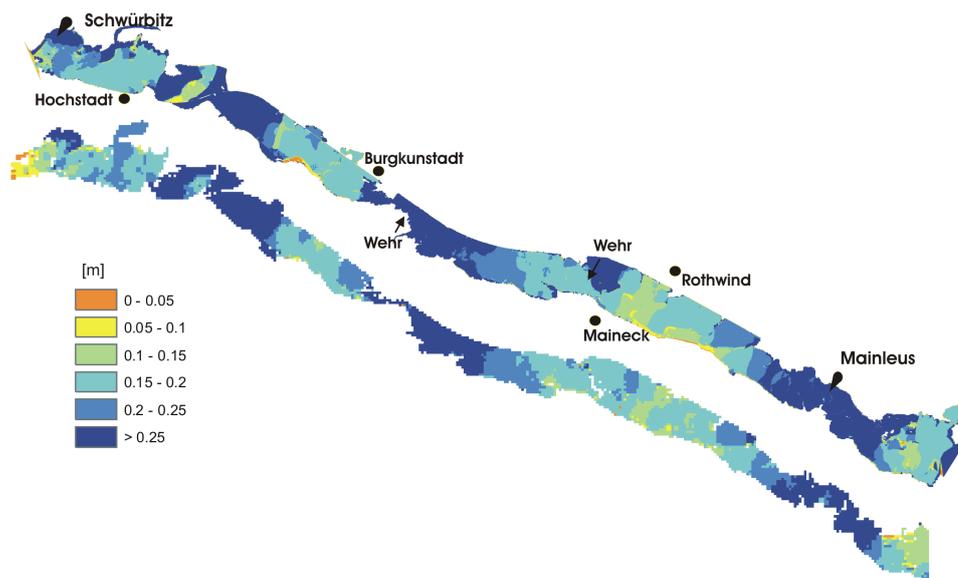
**Abb. 6.33:** Veränderung der Hochwasserwelle (Jährlichkeit 100) nach 20 FKM hybrid und 2D

Der Vergleich der Hochwasserwellen zeigt deutlich, dass die Wellenspitze und die Form sehr gut wieder gegeben werden. Lediglich am Fuß des ansteigenden Astes ist für SOBEK durch die Aktivierung der 2D-Komponente ein Knick zu erkennen. Im mittleren Abflussbereich wird zudem deutlich, dass die Front der Hochwasserwelle im hybriden Modell eine halbe Stunde später eintrifft. Diese Verzögerung liegt im selben Rahmen auch für den fallenden Ast vor.

Insgesamt liegen zwischen den verschieden komplexen Modellen Unterschiede infolge der unzureichend berücksichtigten Mikrotopographie sowie des Impulaaustausches zwischen Vorland und Flussschlauch vor, was aber abhängig vom Modellierer im Rahmen bleibt und durch eine Kalibrierung kompensiert werden kann. Dies bestätigt Vergleichsstudien, die darauf hinweisen, dass einfache konzeptionelle Modelle durchaus in der Lage sind,

ähnlich gute Resultate wie komplizierte physikalische Modelle zu erbringen (sich z.B. HORRITT & BATES [2002]). Der Sachverstand des Modellierers spielt jedoch hierbei eine entscheidende Rolle.

Als abschließender Vergleich sind in Abbildung 6.34 die Wasserspiegeldifferenzen für das Programm Hydro\_AS (oben) und SOBEK (unten) gegenübergestellt, wenn der 100-jährliche Abfluss (stationär) um  $\pm 15\%$  schwanken würde. Abbildung C.36 zeigt entsprechend die Wasserspiegelschwankungen für unterschiedliche Rauigkeiten.



**Abb. 6.34:** Wasserspiegeldifferenz aus den Berechnungen  $HQ_{100} + 15\%$  minus  $HQ_{100} - 15\%$ , oben Hydro\_AS, unten SOBEK

Aus den Abbildungen wird deutlich, dass grundsätzlich beide Modelle (hybrid und 2D) die gleichen Sensitivitäten wieder geben. Die Unterschiede zwischen dem Raster und der Netzstruktur ist, wie bereits erläutert, auch hier zu erkennen.

Abschließend sei erwähnt, dass NOACK [2007] für denselben Modellabschnitt des Oberen Main, die Einflüsse der Netzauflösung im 2D Modell untersucht hat. Hierzu wurden die Netzauflösungen (für das Vorland) 40 und 60 m gewählt und die Ergebnisse mit denen des Netzes basierend auf ein 20 m aufgelöstes Netz verglichen.

Das Ergebnis zeigt zwar für große Flächen übereinstimmende Wassertiefen, allerdings werden an Engstellen (Burgkunstadt) und an abflusswirksamen Geländestrukturen Unterschiede bis zu 0,1 m (zwischen 20 und 40 m Netzauflösung) bzw. 0,25 m (zwischen 20 und 60 m Netzauflösung) errechnet.

## 6.4 Einfluss von Verklausung und Deichbruch

Neben den Parameter-, Modell- und Messfehlern nehmen im Hochwasserfall ganz besonders die Verklausung und der Deichbruch eine entscheidende Rolle hinsichtlich der Modellunsicherheit ein. Durch einige Szenarienrechnungen soll in diesem Abschnitt der Einfluss der Verklausung und der des Deichbruches auf die Wassertiefen analysiert werden. Hinsichtlich der vertieften thematischen Grundlage beider Prozesse sei in diesem Rahmen auf LANGE ET AL. [2006] und LIEM [2003] verwiesen.

Die Verklausung beschreibt den teilweisen oder vollständigen Verschluss eines Fließgewässerquerschnittes infolge angeschwemmten Treibgutes. Sie bildet sich vorwiegend an Gewässerengstellen wie an Brücken oder Wehren. Dadurch entsteht im Allgemeinen ein Rückstau, welcher zu schnell und stark steigenden Wasserständen oberhalb des Abflusshindernisses führt. Dieser Wasserstandsanstieg steht dabei in direktem Zusammenhang zu der möglichen Umströmung des Abflusshindernisses. Ist eine Umströmung gegeben, so ist der Rückstau geringer als bei keiner möglichen Umströmung (hier Abschnitt bei Burgkunstadt).

Während bei einem verklausten Wehr das Wasser über das Hindernis fließt, besteht bei einer Brücke die Gefahr der Überströmung. Da Brücken zumeist in Kombination mit Straßendämmen bzw. Bruchkanten auftreten, ist eine Überströmung und somit ein möglicher Dammbbruch vorprogrammiert.

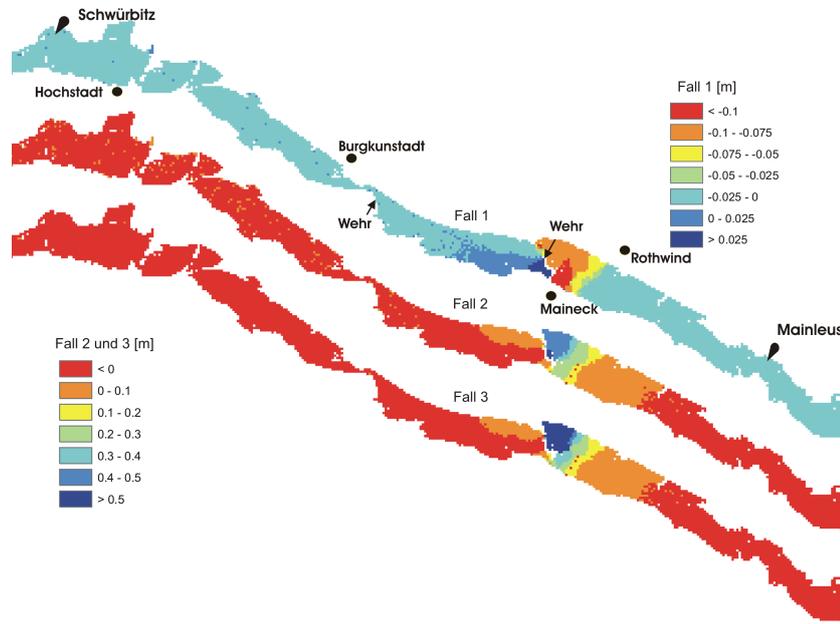
Beide Prozesse sind jedoch sehr schwierig vorherzusagen und vor allem naturgetreu abzubilden. Hinsichtlich der Verklausung stellt sich insbesondere die Frage nach dem Grad der Fließquerschnittreduktion und dessen Abbildung im Modell (das Material wird in der Regel nicht nur über- sondern auch durchströmt). Für den Deichbruch ist in erster Linie unklar wo und in welcher Dimension er auftritt. Daher sollen hier lediglich einige ausgewählte Szenarien gerechnet und der Einfluss auf die Wassertiefen visualisiert werden. Hierzu wird der Abschnitt bei Maineck herangezogen. Dort überquert ein Straßendamm in Kombination mit einer Brücke den Fließquerschnitt. Somit ist es hier möglich den Fließquerschnitt unter der Brücke zu reduzieren oder den Straßendamm auf einer definierten Länge brechen zu lassen. Ein Dammbbruch lateral zur eingedeichten Fließstrecke findet keine Berücksichtigung.

Simuliert wurden die Fälle:

- *Fall 1*: Brücke Maineck verklaust zu 90%
- *Fall 2*: Straßendamm bricht auf einer Breite von 50 m

- *Fall 3*: Straßendamm bricht auf einer Breite von 100 m

Abbildung 6.35 zeigt jeweils die Differenz zwischen dem unveränderten Fall und den Fällen 1 bis 3.



**Abb. 6.35:** Wasserspiegeldifferenz aus den Szenarienberechnungen, unveränderter Fall minus Fall 1 bis 3,  $HQ_{100}$  stationär

Es ist ersichtlich, dass für den ausgesuchten Abschnitt eine 90%-tige Verklausung der Brücke zu einem oberwasserseitigen Wasserspiegelanstieg von ca. 0,1 m führt. Der Grund für diese geringe Veränderung ist auf die Überströmung des Straßendamms zurückzuführen, die bereits vor der Verklausung vorliegt. Infolge der großen **Überfallbreite** (mehrere Rasterzellen), führt bereits ein kleiner Wassertiefenanstieg zu einem großen Überfallabfluss. Dies erhöht jedoch die Wahrscheinlichkeit des Dammbrechens und sollte nicht als weniger gefährlich eingestuft werden.

Selbstverständlich sind infolge Verklausung auch ganz andere Ergebnisse zu erwarten, wenn insbesondere keine Umströmung des Abflusshindernisses möglich ist (z.B. bei Burgkunstadt). Eine Verklausung des Wehres würde in diesem Fall einem Wasserspiegelanstieg entsprechen, wie die Überfallhöhe durch das Material verändert werden würde. Bei einer Brücke würde es, je nach Grad der Verklausung, zu einer Überströmung kommen.

Ein Deichbruch hat in diesem Fall einen höheren Einfluss. So fällt der Wasserstand bei einer 50 m breiten Bresche um ca. 0,45 m, während eine 100 m Bresche einen Wassertiefenabfall von fast 0,7 m bedeutet.

Diese Unsicherheiten sind sicherlich schwierig statistisch zu definieren. Aber es sollte dem

---

Modellierer bewusst sein, dass in Bereichen von Bruchkanten die mögliche Unsicherheit sehr wohl der Dimension der Bruchkantenhöhe entsprechen kann.



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Die durch ein extremes Hochwasserereignis resultierenden Flutwellen führen in der Regel zu verheerenden Schäden und bringen stets Menschenleben in Gefahr. Ein Hochwasserfrühwarnsystem ermöglicht diesbezüglich eine rechtzeitige Durchführung von Notfall- und Evakuierungsplänen. Die Grundlage solcher Notfall- und Evakuierungspläne sind prognostizierte Überflutungsflächen mit den zugehörigen Ausbreitungszeiten der Hochwasserwelle. Diese werden mit hydrodynamischen Modellen verschiedenster Komplexitäten berechnet und zur Entscheidungsunterstützung herangezogen.

In der vorliegenden Arbeit wird der praktische Einsatz verschieden komplexer hydrodynamischer Modelle für die Hochwassersimulation erläutert. Die Grundlage hierfür ist eine ausführliche und zusammenhängende Beschreibung der mathematischen und physikalischen Modellgleichungen zur verschiedenen komplexen Simulation von Hochwasserwellen. Diese Gleichungen bilden des weiteren die Basis zum Verständnis von unvermeidlichen Modellunsicherheiten, die den Kern der Arbeit bilden.

Zur Quantifizierung der Unsicherheiten werden zunächst die Reibungsansätze von Darcy-Weisbach und Manning-Strickler gegenübergestellt. Das Ergebnis zeigt, dass der relative Fehler in der mittleren Geschwindigkeit des Manning-Strickler Ansatzes, bezogen auf den Ansatz nach Darcy-Weisbach, bis zu 10% betragen kann. Dabei werden für große Wassertiefen und wenig rauher Sohle die Geschwindigkeiten nach Manning-Strickler über- und somit die Wassertiefe unterschätzt. Dasselbe gilt in einem größeren Maße für kleine Wassertiefen in Kombination mit sehr rauhen Sohlen.

Der Vergleich einer händischen Kalibrierung mit der objektiven Kalibrierung mittels des SCE-UA Verfahrens hat gezeigt, dass eine teilautomatische Kalibrierung (händische Grobakalibrierung und anschließend automatische Kalibrierung) zu einer leichten Verbesserung der Rauigkeitsparameter führt und zwar mit einem wesentlich geringeren Zeit- und Arbeitsaufwand.

Der Kern der Unsicherheitsanalyse ist die Quantifizierung der Parameterunsicherheiten. Hierzu werden mittels Monte Carlo Simulationen die Einflüsse der Parameter Flussschlauchrauigkeit, Flussschlauchsohlhöhe, Vorlandrauigkeit und Vorlandhöhe untersucht. Hierzu wird jeder Parameter durch einen Wertebereich mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte beschrieben. Im Anschluss einer Monte Carlo Simulation erfolgt zudem eine *Generalisierte Sensitivitätsanalyse* zur Quantifizierung der Parametersensitivitäten.

Die Berechnungen werden an einem synthetischen Gerinne sowie an einem Flussabschnitt am Oberen Main durchgeführt. Für die Dimensionierung des synthetischen Gerinnes dient der Abschnitt am Oberen Main als Vorlage. Die stationären Berechnungen umfassen ein Abflusspektrum bis zu einem Abflusswert der Jährlichkeit 100, während die instationären Berechnungen mit einer Hochwasserwelle ( $HQ_{100}$ ) erfolgen.

Am synthetischen Gerinne beträgt die maximale Wassertiefenschwankung bei einem stationären Abfluss der Jährlichkeit 100 bis zu 0,5 m, wobei 80% der simulierten Wassertiefen innerhalb einer Schwankungsbreite von 0,25 m liegen. Die gleichen Ergebnisse konnten auch bei instationärer Abflussannahme festgestellt werden.

Die Parametereinflüsse und somit die Unsicherheiten am Oberen Main sind örtlich stark unterschiedlich. Um eine allgemeine Aussage hinsichtlich der Parameterunsicherheiten treffen zu können, wird das Gebiet in drei Abschnittstypen unterteilt. In Abschnitten, in denen ein ungestörter Abfluss im Vorland und Flussschlauch erfolgt, verhält sich die Wassertiefenschwankung nahezu identisch wie am synthetischen Gerinne. Abschnitte unmittelbar vor und innerhalb von Einengungen, in denen der Abfluss überwiegend über den Flussschlauch erfolgt, besitzen eine maximale Wassertiefenspannweite von 0,55 m und eine Differenz aus den Quantilwerten 90% und 10% von 0,28 m. In Abschnitten unmittelbar vor Wehren ist die Parameterunsicherheit am geringsten. Die maximale Differenz liegt hier bei 0,35 m und die der Quantilwerte bei 0,22 m. Die Parametersensitivitäten verhalten sich entsprechend den Abschnittstypen unterschiedlich. Trotzdem sind die maßgebenden Parameter für die Unsicherheit die Vorlandhöhe und die Vorlandrauigkeit. Eine signifikante Korrelation der Jährlichkeit eines Abflusses mit der maximal möglichen Spannweite der Wassertiefe ist jedoch für das untersuchte Gebiet nicht zu erkennen.

Eine erkennbare Retention der Hochwasserwelle (Abminderung der Wellenspitze und Verformung der Wellenbreite) ist für beide Modellgebiete (auf 20 Flusskilometern) nicht eingetreten und eine Sensitivität der Hochwasserwelle auf die Modellparameter liegt ebenfalls nicht vor. Zudem konnte gezeigt werden, dass die Überschwemmungstiefen für stationäre und instationäre Abflussverhältnisse praktisch identisch sind. Einzig vor Bruchkanten

sind die Wassertiefen bei stationärem Fließverhalten bis zu 0,03 m größer als für eine Hochwasserwelle.

Durch Vergleichsrechnungen mit unterschiedlichen hydrodynamischen Modellen konnten die Unterschiede der simulierten Wassertiefen bei sonst gleichen Randbedingungen bestimmt und der Einfluss verschiedener Modellkonzepte erfasst werden. Während für das synthetische Gerinne alle Modelle (eindimensionales, hybrides und zweidimensionales Modell) das gleiche Ergebnis für stationäre und instationäre Abflusszustände liefern, sind am Oberen Main, infolge der Heterogenität des Gebietes, abschnittsweise signifikante Unterschiede festzustellen. So liegt der Einfluss des Impulsaustausches zwischen Vorland und Flussschlauch in maßgebenden Abschnitten dermaßen vor, dass der Wasserstandsunterschied zwischen einem zweidimensionalen und hybriden Modell bis zu 0,25 m betragen kann. Ebenso spielt die Abbildung des Vorlandhöhenmodells eine entscheidende Rolle. Wird es durch ein relativ grobes Raster abgebildet, können kleinere Geländestrukturen nicht erfasst werden, was im vorliegenden Fall zu Wasserstandsunterschieden bis zu 0,2 m führt. Des Weiteren besitzt in diesem Zusammenhang auch die Abbildung von Bruchkanten einen großen Einfluss. Falls es zu einer Überströmung von Bruchkanten kommt, muss sie in ihrer Höhenvariabilität entlang der Bruchkante sehr detailliert abgebildet werden.

Abschließend werden Szenarienrechnungen durchgeführt, um exemplarisch die Einflüsse von Verklausungen und Deichbrüchen zu quantifizieren. Die Ergebnisse zeigen auch hier, dass allein durch einen Deichbruch oder eine Verklausung der Wasserstand sich im Dezimeterbereich verändert.

Die vorliegende Schrift liefert einen guten Einstieg in die hydrodynamische Modellierung und zeigt die Modellunsicherheiten quantitativ an einem Beispiel auf. Mit Sicherheit sind die Unsicherheiten einzugsgebietsabhängig und somit die Ergebnisse nicht bedenkenlos auf andere Gebiete anzuwenden. Trotzdem stellt das hier beschriebene Vorgehen eine Grundlage für weitergehende Untersuchungen dar.

So wäre eine Anwendung der hier beschriebenen Unterschiede in den Reibungsansätzen von Darcy-Weisbach und Manning-Strickler für ein Tabellenwerk bestehend aus unterschiedlichen Gerinnetypen zu empfehlen. Dadurch wäre für jedes Gewässer eine Aussage hinsichtlich der Wassertiefenunterschiede beider Rauigkeitsansätze möglich.

Das hier verwendete Werkzeug zur objektiven Kalibrierung könnte ebenso für ein weit feiner aufgelöstes Gerinne (mehr Abschnitte unterschiedlicher Rauigkeiten) und für Parameter wie Wehrüberfallbeiwerte verwendet werden, um die Grenzen der Anwendbarkeit und der Gütwerte zu untersuchen. Zudem korreliert die Unsicherheit hinsichtlich der Modellkalibrierung stark mit der Dichte an Messpunkten, was ebenfalls einer Analyse

bedarf. Des Weiteren zeigt die Erfahrung, dass eine Kalibrierung mit einem stationären Abfluss und die mit einem instationären Abfluss unterschiedliche Parameter liefert. Diese zu quantifizieren stellt ebenso eine Herausforderung dar.

Zur Analyse der Hochwasserwellen könnten auch Zuflussganglinien aus einem Niederschlag-Abfluss Modell herangezogen werden. Das Ziel wäre hierbei eine sehr spitze Welle mit möglich wenig Volumen, um evtl. für diesen Fall die Retentionseffekte zu analysieren. Zudem ist der Einfluss von Kovarianzen einzelner Parameter auf die statistische Verteilung der Wassertiefen interessant.

Hybride Modelle befinden sich, insbesondere für die Hochwasservorhersage, im Vormarsch. Daher wäre auch der Einfluss der hier beschriebenen Kopplungskonzepte im Detail weiter zu analysieren.

Eine Herausforderung wäre zudem aus beispielsweise Landnutzungsdaten, Bodendaten und der Topographie das Verklausungsmaterial abzuschätzen und für unterschiedliche Bauwerke die Wahrscheinlichkeit und den Grad der Verklausung zu quantifizieren, um auch diesen Prozess in die Monte Carlo Analyse aufzunehmen.

# Literaturverzeichnis

- [1] ABBOTT, M. B. (1979): *Computational Hydraulics*, Elements of the Theory of Free-Surface Flows, Pitman Publ., London
- [2] AJAMI, N.K., GUPTA, H., WAGENER, T., SOROOSHIAN, S. (2004): *Calibration of a semi-distributed hydrological model for streamflow estimation along a river system*, Journal of Hydrology, Volume 298, Issues 1-4, pp. 112-135
- [3] BAUCH, W. (1968): *Die Hochwasserwelle im gestauten und ungestauten Fluss*, Dissertation, Berichte des Lehrstuhls und Versuchsanstalt für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Bericht Nr. 16, Technische Universität München
- [4] A. BÁRDOSSY & D. MARKOVIC (2002): *Extremwertstatistik*, Endbericht, Beauftragt von der Bundesanstalt für Gewässerkunde
- [5] BARTH, E., MOLNAR, T., ØVERLAND, H. (2004): *Simulation des Wasserhaushalts für das Obere Maingebiet*, Beitrag zum KLIWA Symposium 2004
- [6] BATES, P.D., STEWART, M.D., SIGGERS, G.B., SMITH, C.N., HERVOUET, J.-M., SELLING, R.J.H. (1998): *Internal and external validation of a two-dimensional finite element code for river flood simulations*, P. I. Civ. Eng.-Water 130, pp.127-141
- [7] BÄR, A., DITTRICH, A, HARTMANN, G. (2001): *Anwendungsgrenzen eindimensionaler Berechnungsansätze für geradlinig gegliederte Gerinne*, Zeitschrift „Wasserwirtschaft“, 91. Jahrgang, Nr. 5, S. 256 - 261
- [8] BECHTELER, W., HARTMANN, S., OTOO, A.J. (1993): *Coupling of 2D- and 1D-models and integration into geographic information systems*, Advances in Hydro-Science and -Engineering, Volume I
- [9] BEFFA, C. (1994): *Praktische Lösung der tiefengemittelten Flachwassergleichungen*, Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich, Heft 133

- [10] BEFFA, C. (2002): *Integration ein- und zweidimensionaler Modelle zur hydrodynamischen Simulation von Gewässersystemen*, Internationales Symposium 'Moderne Methoden und Konzepte im Wasserbau' 7.-9. Oktober 2002, ETH Zürich
- [11] J.M. BERNARDO & A.F.M. SMITH (1994): *Bayesian theory*, Wiley, Chichester, xiv, 586p.
- [12] K. BEVEN & A. BINLEY (1992): *The future of distributed models: Model calibration and uncertainty prediction*, Hydrological Processes 6, 279-298
- [13] BOLLRICH, G. (2000): *Technische Hydromechanik 1*, 5. Auflage, Verlag für Bauwesen, Berlin
- [14] H. BRETSCHEIDER & T. ÖZBEK (1997): *Durchflussermittlung bei gegliederten Gerinnen*, Zeitschrift „Wasserwirtschaft“, 87. Jahrgang, Nr. 4, S. 206 - 209
- [15] BRONSTEIN, I.N., K.A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL, H. MÜHLIG (1995): *Taschenbuch der Mathematik*, 2. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main
- [16] BWK (2000): *Grundlagen für stationäre, eindimensionale Wasserspiegellagenberechnungen*, Bund der Ingenieure für Wasserwirtschaft, Abfallwirtschaft und Kulturbau (BWK) e.V.
- [17] CLARKE, R.T. (1994): *Statistical modelling in hydrology*, Wiley & Sons, Chichester, xii, 412p.
- [18] CLAASSEN, K. (1995): *Hochwasser – alle Jahre wieder..., und jedes Jahr ein wenig höher?*, Praxis Geographie Nr. 12/95
- [19] CONNELL, R.J., PAINTER, D.J., BEFFA, C. (2001): *Two-dimensional flood plain flow. II: Modell validation*, Journal of Hydrological Engineering. ASCE, 6 (5)
- [20] CUNGE, J.A., HOLLY, F.M.JR., VERWEY, A. (1980): *Practical aspects of computational river hydraulics*, Pitman Publishing
- [21] DEMISSIE, M., LIAN, Y., BHOWMIK, N.G. (2001): *Application of Hydraulic Models for the Analysis of the Interaction of the Illinois River and its Floodplain*, World Water and Environmental Resource Congress, 20-24 Mai 2001 May Orlando, Florida, USA
- [22] DISSE, M. (2006): *Hydrologische Statistik*, Vorlesungsumdruck der Professur für Wasserwirtschaft und Ressourcenschutz, Universität der Bundeswehr München

- [23] DISSE, M., PAKOSCH, S., YÖRÜK, A. (2007): *Entwicklung eines Expertensystems zur Hochwasserfrühwarnung unter Berücksichtigung der Vorhersageunsicherheit*, Hydrologie und Wasserbewirtschaftung, 51. Jahrgang, Heft 5, S. 210 - 215
- [24] DUAN, Q., SOROOSHAIN, S., GUPTA, V.K. (1992): *Effective and efficient global optimization for conceptual rainfall-runoff models*, Water Resources Research, 28(4), pp. 1015-1031
- [25] DUAN, Q., SOROOSHAIN, S., GUPTA, V.K. (1993): *Shuffled complex evolution approach for effective and efficient global minimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, 76(3), pp. 501-521
- [26] DUAN, Q., SOROOSHAIN, S., GUPTA, V.K. (1994): *Optimal use of the sce-ua global optimization method for calibrating watershed models*, Journal of Hydrology, 158, pp. 265-284
- [27] DVWK (1991): *Hydraulische Berechnung von Fließgewässern*, Nummer 220/1991 in Merkblätter zur Wasserwirtschaft, Deutscher Verband für Wasserwirtschaft und Kulturbau e.V. (DVWK), Bonn: Kommissionsvertrieb Paul Parey, Hamburg und Berlin
- [28] DVWK-MITTEILUNGEN 25 (1994): *Hydraulisch-sedimentologische Berechnungen naturnah gestalteter Fließgewässer - Berechnungsverfahren für die Ingenieurpraxis*, In Mitteilungen des Deutschen Verbandes für Wasserwirtschaft und Kulturbau e.V. (DVWK), Heft 25, Bonn: Kommissionsvertrieb Wirtschafts- und Verlagsgesellschaft Gas und Wasser mbH
- [29] DVWK-REGEL 113 (1984): *Arbeitsanleitung zur Anwendung von Niederschlag-Abfluss-Modellen in kleinen Einzugsgebieten*, Teil II: Synthese, Regeln zur Wasserwirtschaft, DVWK-Fachausschuss „Niederschlag-Abfluss-Modelle“, DVWK-Regeln, Heft 113
- [30] DVWK-HEFT 127 (1999): *Numerische Modelle von Flüssen, Seen und Küstengewässern*, (Eds.: Zielke, W.), Wirtschafts- und Verl.-Ges. Gas und Wasser, Bonn
- [31] EMS-I (2007): *SMS, Surface Water Modelling System*, Environmental Modeling System Inc., Version 9.0, Januar 2007
- [32] A.R. FREEZE & J. MASSMANN (1990): *Hydrogeological Decision Analysis, !. A Framework*, Ground Water 28 (5), pp. 738-766

- [33] FIEDLER, K. (2007): *ADCP-Messungen an zwei Pegeln in Bayern*, Beiträge zum Treffen junger Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler (JuWi-Treffen), Band 9, Herausgeber Fachgebiet Wasserbau und Wasserwirtschaft der Universität Kassel
- [34] FORKEL, C. (2004): *Numerische Modelle für die Wasserbaupraxis: Grundlagen, Anwendungen und Qualitätsaspekte*, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Heft 130, RWTH Aachen
- [35] FRANK, E., OStan, A., CACCATO, M., STELLING, G.S. (2001): *Use of an integrated one dimensional-two dimensional hydraulic Modelling approach for flood hazard and risk mapping*, River Basin Management, eds R.A. Falconer & W.R. Blain, WIT Press, Southampton, UK, pp. 99-108
- [36] GARBRECHT, G. (1961): *Abflussberechnungen für Flüsse und Kanäle*, Zeitschrift „Wasserwirtschaft“, H. 2, S. 40 - 45, H. 3, S 72 - 77
- [37] GUGANESHARAJAH, K., LYONS, D.J., PARSONS, S.B., LLOYD, B.J. (2006): *Influence of Uncertainties in the Estimation Procedure of Floodwater Level*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, October 2006, pp. 1052 - 1060
- [38] HALL, J.W., TARANTOLA, S., BATES, P.D., HORRITT, M.S. (2005): *Distributed Sensitivity Analysis of Flood Inundation Model Calibration*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, February 2005, pp. 117-126
- [39] HANKE-BOURGEAIS, M. (2006): *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, 2. Auflage, B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlag GmbH, Wiesbaden
- [40] HARDY, R.J., BATES, P.D., ANDERSON, M.G. (1999): *The importance of spatial resolution in hydraulic models for floodplain environments*, Journal of Hydrology 216, pp. 124 - 136
- [41] HORRITT, M.S. (2006): *A linearized approach to flow resistance uncertainty in a 2-D finite volume model of flood flow*, Journal of Hydrology 316, pp. 13-27
- [42] M.S. HORRITT & P.D. BATES (2002): *Evaluation of 1D and 2D numerical models for prediction river flood inundation*, Journal of Hydrology 268, pp. 87-99
- [43] JIRKA, G.H. & LANG, C. (2005): *Gerinnehydraulik*, Vorlesungsskript des Instituts für Hydromechanik der Universität Karlsruhe

- [44] KEUNING, D.H. (1976): *Application of Finite Element Method to Open Channel Flow*, ASCE Journal of Hydraulic Division, Vol. 102, No. HY4A, American Society of Civil Engineers
- [45] S.T. KHU & M.G.F. WERNER (2003): *Reduction of Monte-Carlo simulation runs for uncertainty estimation in hydrological modelling*, Hydrology and Earth System Sciences, 7 (5), pp. 680-692
- [46] KING, I.P. (1976): *Finite Element Model for Unsteady Flow Routing through Irregular Channel*, Proc. First Int. Conf. on FE in Water Resources. Pentech Press, London, 1976
- [47] G.J. KLIR & T.A. FOLGER (1988): *Fuzzy Sets, uncertainty and Information*, Prentice Hall, New Jersey
- [48] KOHANE, R. (1991): *Berechnungsmethoden für Hochwasserabfluss in Fließgewässern mit überströmten Vorländern*, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau, Heft 73, Universität Stuttgart
- [49] KÖNGETER, J., FORKEL, C. (1999): *Hydromechanik III*, Vorlesungsumdruck des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft der RWTH Aachen
- [50] KNORRENSCHILD, M. (2003): *Numerische Mathematik*, Eine beispielorientierte Einführung, Fachbuchverlag Leipzig im Carls Hanser Verlag
- [51] KREITER, T. (2007): *Dezentrale und naturnahe Retentionsmaßnahmen als Beitrag zum Hochwasserschutz in mesoskaligen Einzugsgebieten der Mittelgebirge*, Dissertation, Fachbereich VI (Geographie / Geowissenschaften) der Universität Trier
- [52] H. KUNSTMANN & M. KASTENS (2006): *Direct propagation of probability density functions in hydrological equations*, Journal of Hydrology 325, pp. 82-95
- [53] LANGE, D., BEZZOLA, G.R., MINOR, H.E. (2006): *Schwemmholz - Probleme und Lösungsansätze*, Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich, Heft 188
- [54] LARSEN, O., PRECHT, E., RUNGØ, M., OLESEN, K.W. (2004): *Flussgebietsmodellierung mit Mike Flood - Theorie bis Praxis*, Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen, Heft 27, Institut für Wasserbau und THM der TU Dresden, S. 431 - 444
- [55] LFU BADEN-WÜRTTEMBERG (2003): *Hydraulik naturnaher Fließgewässer*, Teil 3: Rauheits- und Widerstandsbeiwerte für Fließgewässer in Baden-Württemberg, Landesanstalt für Umweltschutz Baden-Württemberg, Karlsruhe

- [56] LFU BADEN-WÜRTTEMBERG (2006): *Unsicherheiten von Durchflusswerten*, Arbeitsanleitung Pegel- und Datendienst, Landesanstalt für Umweltschutz Baden-Württemberg, Karlsruhe
- [57] LIEM, R. (2003): *Zur Verwendung der Flachwassertheorie bei der Simulation von Dammbrechwellen*, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Heft 128, RWTH Aachen
- [58] MADSEN, H. (2000): *Automatic Calibration and Uncertainty Assessment in Rainfall-Runoff Modelling*, Joint Conference on Water Resources Engineering and Water Resources Planning & Management, Hyatt Regency Minneapolis, USA, July 30. - August 2.
- [59] MADSEN, H. (2002): *A multi-objective calibration framework for parameter estimation in the MIKE-SHE integrated hydrological modelling system. ModelCARE 2002*, Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Calibration and Reliability in Groundwater Modelling, Prague, Czech Republic, Acta Universitatis Carolinae - Geologica 2002, 46(2/3), pp. 270 - 273
- [60] MALCHEREK, A.(2006): *FlieSSgewässer - Hydromechanik und Wasserbau*, Vorlesungsumdruck der Professur für Hydromechanik und Wasserbau, Version 2.0, Universität der Bundeswehr München
- [61] MALCHEREK, A.(2006): *Numerische Methoden der Strömungsmechanik*, Vorlesungsumdruck der Professur für Hydromechanik und Wasserbau, Universität der Bundeswehr München
- [62] MAURER, T.(2002): *Zuverlässigkeit von Berechnungen des Feststofftransportmodells*, Mitteilungen des Instituts für Wasserwesen, Universität der Bundeswehr München, Heft 83
- [63] MIKE 11 (2004): *A Modelling System for Rivers and Channels*, Reference Manual, DHI - Water & Environment
- [64] MIKE 21 (2005): *MIKE 21 Flow Modul FM*, Scientific Documentation, DHI - Water & Environment
- [65] MIKE FLOOD (2007): *MIKE FLOOD, 1D-2D Modelling*, User Manual, DHI - Water & Environment

- [66] NÄF, D.R. (1997): *Numerische Simulation von Stosswellen in Freispiegelströmungen*, Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich, Heft 148
- [67] NOACK, M. (2007): *Unsicherheit hydraulischer Modelle in der operationellen Hochwasservorhersage*, Beiträge zum Treffen junger Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler (JuWi-Treffen), Band 9, Herausgeber Fachgebiet Wasserbau und Wasserwirtschaft der Universität Kassel
- [68] NUJIC, M. (1998): *Praktischer Einsatz eines hochgenauen Verfahrens für die Berechnung von tiefengemittelten Strömungen*, Mitteilungen des Instituts für Wasserwesen der Universität der Bundeswehr München, Heft 62, München
- [69] NUJIC, M. (2003): *HYDRO\_AS-2D  $\checkmark$  Ein zweidimensionales Strömungsmodell für die wasserwirtschaftliche Praxis*, Benutzerhandbuch
- [70] OPHEYS, S., TOMPSON, A.F.B., ROUVÉ, G. (1994): *Comparison of two indicator simulations methods*, Proceedings of the Xth International Conference on Computational Methods in Water Resources Eds. A. Peters et al., Kluwer Academic Publishers, pp. 563-570
- [71] OPHEYS, S. (1997): *Numerische Untersuchungen zur Dispersion in anisotrop heterogenen, porösen Medien*, Heft 113, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft der RWTH-Aachen
- [72] PAPPENBERGER, F., MATGEN, P., BEVEN, K.J., HENRY, J.-B., PFISTER, L., DE FRAIPONT, P. (2004): *The influence of rating curve uncertainty on flood inundation predictions*, 1<sup>st</sup> International Conference on Flood Risk Assessment, Bath, United Kingdom, September 7-8.
- [73] PAPPENBERGER, F., MATGEN, P., BEVEN, K.J., HENRY, J.-B., PFISTER, L., DE FRAIPONT, P. (2006): *Influence of uncertain boundary conditions and model structure on flood inundation predictions*, Advances in Water Resources 29, pp. 1430 - 1449
- [74] PASCHE, E., KRÄSSIG, S., LIPPERT, K., NASERMOADDELI, H., PLÖGER, W., RATH, S. (2006): *Wie viel Physik braucht die Strömungsberechnung in der Ingenieurpraxis*, Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen, Heft 27, Institut für Wasserbau und THM der TU Dresden, S. 431 - 444

- [75] PECK, A., GORELICK, G., MARSILY, G., FOSTER, S., KOVALEVSKY, V. (1988): *Consequences of spatial variability in aquifer properties and data limitations for groundwater modelling practice*, IAHS Publication No. 175, Institute of Hydrology, Wallingford, Oxfordshire, UK
- [76] PLATE, E.J. (1993): *Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure*, Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 1993
- [77] PTAK, E. (1993): *Stofftransport in heterogenen Porenaquifern: Felduntersuchung und stochastische Modellierung*, Heft 80, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau der Universität Stuttgart
- [78] RIEGER, D. (2005): *Neue Möglichkeiten zur Verwendung von Laserscanner-Daten für die 2d-Modellierung*, DWA-Landesverband Bayern, Landesverbandstagung 2005 in Neu-Ulm, Seminar 2 - Wasserwirtschaft, S. 208 - 216
- [79] RODI, W. (1993): *Turbulence Models and their Applications in Hydraulics, A State-of-the-art Review*, IAHR Monograph Series, 3. Auflage, A. A. Balkema, Rotterdam
- [80] RUAN, D. (1995): *Fuzzy set theory and advanced mathematical applications*, Kluwer, Boston, ISBN: 0-7923-9586-7
- [81] SACHER, H. (1983): *Berücksichtigung von Unsicherheiten bei der Parameterschätzung für mathematisch-numerische Grundwassermodelle*, Heft 49, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft der RWTH Aachen
- [82] SCHÄFER, M. (1999): *Numerik im Maschinenbau*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- [83] H. SCHLICHTING & K. GERSTEN (1997): *Grenzschicht-Theorie*, 9. Auflage Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- [84] SCHRAMM, J.M. (2005): *Eindimensionale Berechnung instationärer und diskontinuierlicher Strömungen in abflussschwachen naturnahen Fließgewässern*, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Heft 138, RWTH Aachen
- [85] SCHRÖDER, P.-M. (1997): *Zur numerischen Simulation turbulenter Freispiegelströmungen mit ausgeprägt dreidimensionaler Charakteristik*, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Heft 108, RWTH Aachen

- [86] P.-M. SCHRÖDER & C. FORKEL (1999): *Mathematische Beschreibung der physikalischen Prozesse*, Kapitel 2 der DVWK-Schrift 127 „Numerische Modell von Flüssen, Seen und Küstengewässern“, zusammengestellt von W. Zielke, Wirtschafts- und Verlagsgesellschaft Gas und Wasser mbH, Bonn, pp. 47-81
- [87] SCHWANENBERG, D. (2004): *Die Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin-Methode zur Lösung konvektionsdominierter tiefengemittelter Flachwasserprobleme*, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Heft 135, RWTH Aachen
- [88] SCHWARZ, H.R. (1997): *Numerische Mathematik*, Teubner Verlag, 4. Auflage
- [89] SIMEON, B. (2003): *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript M2-Zentrum Mathematik der TU-München
- [90] SMOLLER, J. (1994): *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, 2. Ausgabe in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 258, Springer-Verlag
- [91] STEWART, M.D., BATES, P.D., ANDERSON, M.G., PRICE, D.A., BURT, T.P. (1999): *Modelling floods in hydrologically complex lowland river reaches*, Journal of Hydrology 223, pp. 85-106
- [92] TESCHKE, U. (2004): *Zur Berechnung eindimensionaler instationärer Strömungen von natürlichen Fließgewässern mit der Methode der Finiten Elemente*, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 7 Nr. 458, Düsseldorf: VDI Verlag
- [93] THEIS, H.J. (2005): *Quantifizierung der Prognoseunsicherheiten bei der praktischen Anwendung numerischer Grundwassermodelle*, Dissertation beim Fachbereich Architektur/Raum- und Umweltplanung/Bauingenieurwesen der Universität Kaiserslautern
- [94] H.K. VERSTEEG & W. MALALASEKERA (1995): *An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method*, Longman Scientific and Technical, ISBN 0-582-21884-5
- [95] VRUGT, J.A., GUPTA, H.V., DEKKER, S.C., SOROOSHIAN, S., WAGENER, T., BOUTEN, W. (2006): *Application of stochastic parameter optimization to the Sacramento Soil Moisture Accounting model*, Journal of Hydrology, Volume 325, Issues 1-4, pp. 288-307
- [96] WADE, A.J., HORNBERGER, G.M., WHITEHEAD, P.G., JARVIE, H.P., FLYNN, N. (2001): *On modeling the mechanism that control in-stream phosphorus, macrophyte*,

- and epiphyte dynamics: An assessment of a new model using general sensitivity analysis*, Water Resources Research, Vol. 37, No. 11, pp. 2777 - 2792, November 2001
- [97] J.E. WARREN & H.S. PRICE (1961): *Flow in heterogeneous media*, Soc. Petrol. Eng. Journal, Vol. 1, pp. 153-169
- [98] WERNER, M.G.F. (2004): *A comparison of flood extent modelling approaches through constraining uncertainties on gauge data*, Hydrology and Earth System Sciences, 8 (6), pp. 1141 - 1152
- [99] WERNER, M.G.F. (2004): *Spatial flood extent modelling, a performance-based comparison*, Dissertation, Published and distributed by DUP Science, ISBN 90-407-2558-6
- [100] WERNER, M.G.F., HUNTER, N.M., BATES, P.D. (2005): *Identifiability of distributed floodplain roughness values in flood extent estimation*, Journal of Hydrology 314, pp. 139-157
- [101] B. WITTE & H. SCHMIDT (1995): *Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen*, 3. Auflage, Verlag Konrad Wittwer GmbH, Stuttgart
- [102] WYRWA, J. (2004): *Aspekte zur Berechnungsgenauigkeit von Hochwassersimulationen mit mehrdimensionalen Strömungsmodellen*, Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen, Heft 27, S. 271-283
- [103] ZEMKE, J.-P.M. (2005): *Numerische Verfahren*, Vorlesungsskript im Arbeitsbereich der Mathematik, Technische Universität Hamburg-Harburg

# Anhang

# A Mathematische Grundlagen

## A.1 Einsteinsche Summenkonvention

Die Einsteinsche Summenkonvention ist eine Konvention innerhalb der Indexschreibweise u. a. in der Tensoranalysis. Die Summenkonvention legt im Allgemeinen fest (BRONSTEIN ET AL. [1995]), dass wenn über Produkte sowie über Quotienten Indizes doppelt auftreten, dieser Ausdruck dann über alle vorgesehenen Werte dieses Indexes aufsummiert wird. Wenn ein Index in den Ausdrücken einer Gleichung nur einmal auftritt, so gilt die betreffende Gleichung für alle Werte, die der Index durchlaufen kann.

**Beispiel:** Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\vec{y} = \tilde{A} \cdot \vec{x} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Dieses Gleichungssystem kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

In Indexschreibweise kann dieses Gleichungssystem wie folgt ausgedrückt werden:

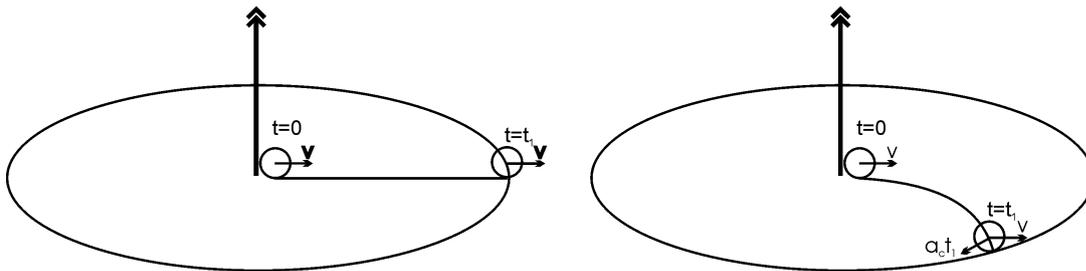
$$y_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot x_j \quad (\text{mit } i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.3})$$

Gewöhnlich wird als Laufvariable für die Zeile der Index  $i$  und für die Spalte (Matrix) bzw. Summanden (vgl. Gleichung A.3) der Index  $j$  gewählt. Unter der Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention kann für Gleichung A.3 abkürzend geschrieben werden:

$$y_i = a_{ij}x_j \quad (\text{mit } i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Corioliskraft

Bewegt sich ein Körper in einem rotierenden bzw. beschleunigten Bezugssystem, so wird dieser aus Sicht eines mitrotierenden Beobachters infolge der Corioliskraft abgelenkt. Die Corioliskraft tritt nur auf, wenn der Körper im Bezug auf das rotierende Bezugssystem eine Ortsänderung bzw. Bewegung vollführt.

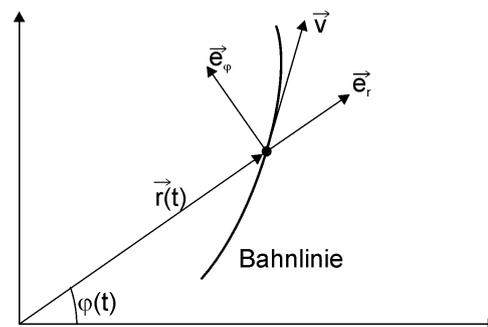


**Abb. A.1:** Kugel auf einer drehenden Scheibe, die sich zum Scheibenrand bewegt.

**Links:** Aus einer Eulerbetrachtung bewegt sich die Kugel entlang einer geradlinigen Bahn.

**Rechts:** Aus der Perspektive eines sich auf der Scheibe befindenden Beobachters (Lagrange-Betrachter) folgt die Kugel einer gekrümmten Bahn. Dessen Krümmung entspricht der Coriolisbeschleunigung  $a_c$ , die senkrecht zur Bewegungsrichtung gerichtet ist und durch die Corioliskraft verursacht wird.

Da der Effekt der Ablenkung in einem ruhenden System nicht vorhanden ist (vgl. Abbildung A.1), wird die Corioliskraft  $\vec{f}_c$  auch als Scheinkraft bezeichnet. Für Ihre Herleitung beschreiben wir die Bewegung einer Kugel auf einer Ebene in einem Polarkoordinatensystem (vgl. Abbildung A.2):



**Abb. A.2:** Bewegung einer Kugel in einem Polarkoordinatensystem

Die Einheitsvektoren der Polarkoordinaten lauten (mit  $\vec{e}$  als Einheitsvektor)

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos \varphi(t) \vec{e}_x + \sin \varphi(t) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi(t) \vec{e}_x + \cos \varphi(t) \vec{e}_y\end{aligned}\tag{A.5}$$

und für ihre Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial t} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{e}_r\end{aligned}\tag{A.6}$$

Für den Radiusvektor ergibt sich somit:

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r\tag{A.7}$$

Das Ziel ist nun die Beschleunigung mathematisch zu beschreiben. Hierfür wird zunächst die erste zeitliche Ableitung des Radiusvektors gebildet (ergibt die Geschwindigkeit)

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial t} = \frac{\partial r(t)}{\partial t} \vec{e}_r + r(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{e}_\varphi\tag{A.8}$$

und anschließend die zweite zeitliche Ableitung, die die Beschleunigung ergibt:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \vec{e}_r}_{\text{Relativ-}} - \underbrace{r \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \vec{e}_r + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \vec{e}_\varphi}_{\text{Fhrungs-}} + \underbrace{2 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{e}_\varphi}_{\text{Coriolisbeschl.}}\tag{A.9}$$

Somit folgt für die Corioliskraft, die auf das Kontrollvolumen wirkt:

$$\vec{f}_c = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})\tag{A.10}$$

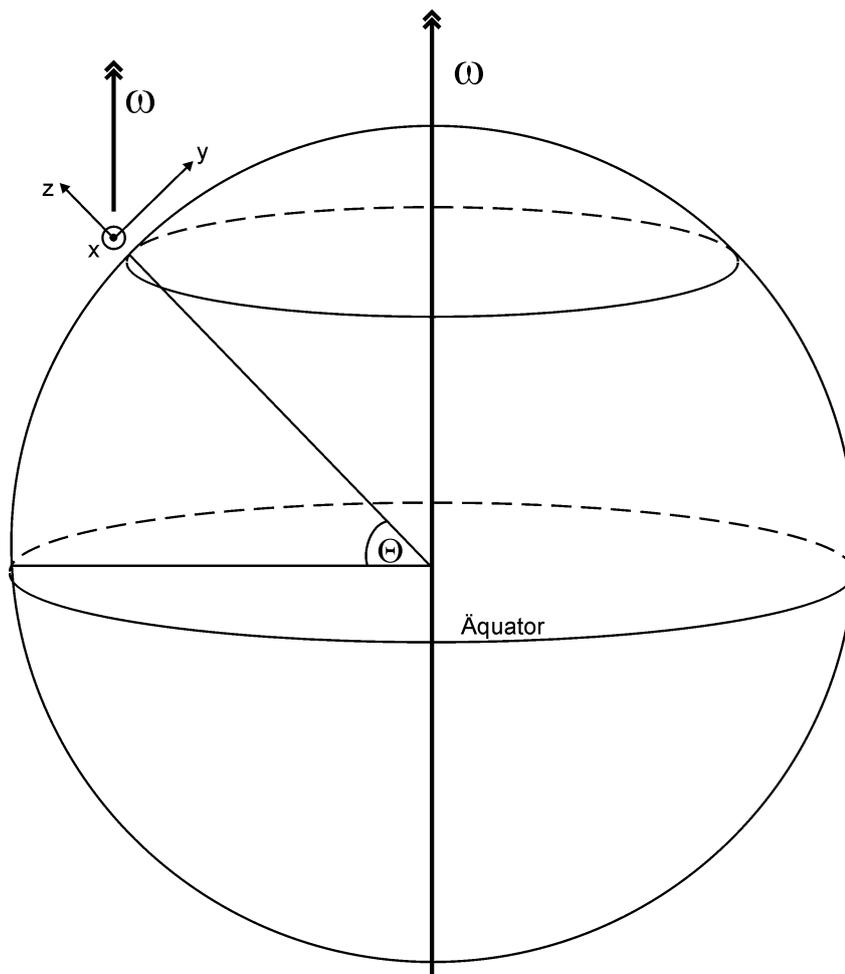
mit:

$m$ : Masse des bewegten Körpers

$\vec{v}$ : Geschwindigkeitsvektor in Betrag und Richtung

$\vec{\omega}$ : Rotationsvektor in Betrag und Richtung

Zur Berechnung der Corioliskraft in einem Punkt auf der Erdoberfläche bezogen auf ein lokales Koordinatensystem, betrachten wir folgendes System:



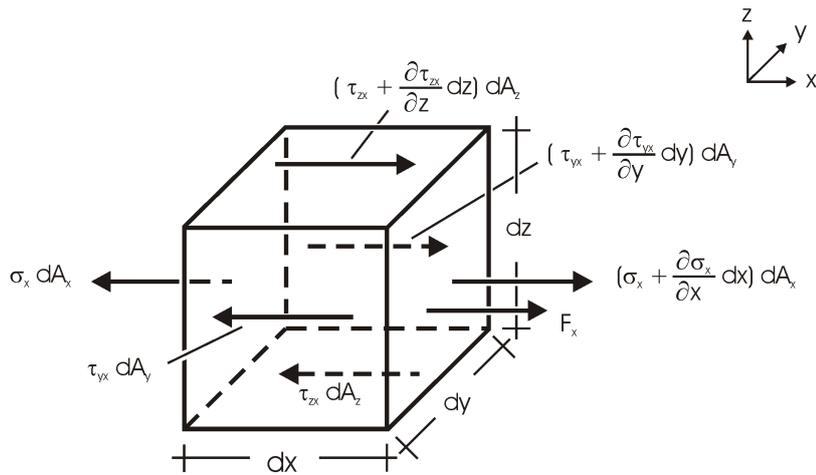
**Abb. A.3:** System Erde mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und ein sich mitbewegendes Koordinatensystem (radiale Ausrichtung der z-Achse) in Höhe des Breitengrades  $\Theta$

Wird  $\omega$  auf das lokale Koordinatensystem transformiert und in Gleichung A.10 eingesetzt folgt für die Corioliskraft:

$$\vec{f}_c = 2m \left[ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cdot \cos \Theta \\ \omega \cdot \sin \Theta \end{pmatrix} \right] = 2m\omega \begin{pmatrix} v_y \cdot \sin \Theta - v_z \cdot \cos \Theta \\ -v_x \cdot \sin \Theta \\ v_x \cdot \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

### A.3 Herleitung der Reibungskräfte am Kontrollvolumen

Die Herleitung der Oberflächenkräfte am Fluid erfolgt analog zu der Herleitung der Oberflächenkräfte in der Festkörpermechanik. Dort wird der allgemeine Spannungszustand am Kontrollvolumenelement betrachtet, um die Oberflächenkräfte zu beschreiben:



**Abb. A.4:** Allgemeiner Spannungszustand am Kontrollvolumenelement in x-Richtung

Die Komponenten in der Ebene des zugehörigen Flächenelementes haben einen Doppelindex, wobei der erste Index die Richtung der Flächennormale definiert und der zweite Index, in welche Richtung die Kraft bzw. Spannung zeigt. Für die Oberflächenkräfte folgt nach Abbildung A.4 (analog auch für die y- und z- Komponente):

$$\begin{aligned}
 F_{O,x} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \cdot dA_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \cdot dA_y + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \cdot dA_z \\
 F_{O,y} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \cdot dA_x + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \cdot dA_y + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \cdot dA_z \\
 F_{O,z} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \cdot dA_x + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy \cdot dA_y + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \cdot dA_z
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

In Indexschreibweise:

$$F_{O,i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial s_j} dV \quad \text{mit } \tau_{ij} = \sigma_i \quad \text{für } i = j \tag{A.13}$$

bzw. Vektorschreibweise (Die Spannungsmatrix ist dabei symmetrisch):

$$\vec{F}_O = \nabla \cdot \tilde{\tau}_{ij} \cdot dV \quad (\text{A.14})$$

Zur Beschreibung der Spannungsmatrix bedient man sich der Spannungs-Dehnungsbeziehung nach dem Hookeschen Gesetz. Unter der Voraussetzung von Isotropie, Homogenität und konstanter Temperatur gilt für die *Dehnung*  $\varepsilon_i$  infolge der Normalspannungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

und für die *Gleitung*  $\varepsilon_{ij}$  infolge Schubspannungen

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{xy} &= \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 2\varepsilon_{yx} \\ 2\varepsilon_{xz} &= \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{yz} &= \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 2\varepsilon_{zy} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

mit:

$u_i$ : Verschiebung

$G$ : Schubmodul mit  $G = E/2(1 + \nu)$

$E$ : Elastizitätsmodul

$\nu$ : Querkontraktionszahl

Während die Gleichungen A.16 jede Schubspannungskomponente eindeutig definieren

$$\tau_{ij} = G \left( \frac{\partial u_i}{\partial s_j} + \frac{\partial u_j}{\partial s_i} \right) \text{ mit } i \neq j, \quad (\text{A.17})$$

ist zur Beschreibung der Normalspannungen die Umformung der Gleichungen A.15 erforderlich. Hierzu wird die Volumenänderung  $e$  infolge Spannungen

$$\frac{\Delta V}{V} = e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u_i}{\partial s_i} \quad (\text{A.18})$$

sowie die mittlere Spannung  $\sigma_m$

$$3\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (\text{A.19})$$

eingeführt, um die Gleichungen A.15 soweit umformen zu können, dass eine Analogie-betrachtung von der Festkörpermechanik auf die Hydromechanik möglich wird. Daraus kann im Anschluss der allgemeine Spannungszustand im Fluid abgeleitet werden.

Die erforderlichen Schritte der mathematischen Umformungen werden nun im Folgenden beschrieben.

Gleichung A.15 in Gleichung A.18 eingesetzt und umgeformt folgt für die Volumenänderung

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} \cdot 3\sigma_m, \quad (\text{A.20})$$

bzw. weiter umgeformt mit  $E = 2G(1 + \nu)$  ergibt sich für die mittlere Spannung

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \frac{2G(1 + \nu)}{1 - 2\nu} \cdot e. \quad (\text{A.21})$$

Mit Hilfe der Gleichungen A.19, A.20 und A.21 können nun die Gleichungen A.15 zur Beschreibung der Normalspannungen umgeformt werden. Die Umformung erfolgt hier beispielhaft an der Normalspannung in x-Richtung:

Aus Gleichung A.15 folgt:

$$\varepsilon_x \cdot E = (1 + \nu) \sigma_x - \nu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (\text{A.22})$$

Mit den Gleichungen A.19 und A.20 ergibt sich weiter:

$$\frac{\varepsilon_x \cdot E}{1 + \nu} = \sigma_x - \frac{\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \underbrace{\frac{e}{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) 1 - 2\nu}}_{=1} \quad (\text{A.23})$$

Mit  $E = 2G(1 + \nu)$  und weiterer Umformung nach der Spannung  $\sigma_x$ , erfolgt eine Erweiterung mit Gleichung A.21:

$$\sigma_x = 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \cdot e \right) + \underbrace{\sigma_m - \frac{1}{3} \frac{2G(1 + \nu)}{1 - 2\nu} \cdot e}_{=0} \quad (\text{A.24})$$

Ausmultipliziert und zusammengefasst lässt sich für die Spannung in x-Richtung (entsprechendes gilt auch für die Spannung in y- und z-Richtung)

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \sigma_m - \frac{2}{3}Ge \quad (\text{A.25})$$

schreiben. Abschließend lässt sich mit der Einführung des Kronecker-Delta-Symbols<sup>1</sup> der allgemeine Spannungszustand (Normalspannungen nach Gleichung A.25 für  $i = j$  und Schubspannungen nach Gleichung A.17 für  $i \neq j$ ) formulieren als:

$$\tau_{ij} = G \left( \frac{\partial u_i}{\partial s_j} + \frac{\partial u_j}{\partial s_i} \right) + \left( \sigma_m - \frac{2}{3}G \frac{\partial u_i}{\partial s_i} \right) \delta_{ij} \quad (\text{A.26})$$

---

<sup>1</sup> $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$

Wird eine Newtonsche Flüssigkeit<sup>2</sup> und somit eine lineare Spannungs-Reibungsbeziehung vorausgesetzt, kann aus der Analogie zwischen dem Hookschen Gesetz und dem Stokeschen Reibungsansatz der Spannungszustand in Flüssigkeiten abgeleitet werden:

$$\tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_i} \right) - \left( p + \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_i}{\partial s_i} \right) \delta_{ij} \quad (\text{A.27})$$

Dabei entspricht die Verschiebung  $u_i$  der Verschiebungsgeschwindigkeit  $v_i$ , das Schubmodul  $G$  der dynamischen Viskosität  $\eta$  und die mittlere Spannung  $\sigma_m$  dem negativen Flüssigkeitsdruck  $-p$ .

Für die Oberflächenkräfte folgt somit nach Gleichung A.13

$$\frac{F_{O,i}}{dV} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial s_j} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial s_j} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_i} \right) \right]}_i - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial s_i} - \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_j}{\partial s_j} \right)}_{ii}. \quad (\text{A.28})$$

Zur Ableitung der Normalspannungen ( $ii$ ) in Gleichung A.28 wird die Gleichung ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial s_j} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial s_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial s_3} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial s_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial s_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial s_3} \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial s_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial s_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_i}{\partial s_i} \right) + \dots \\ -\frac{\partial p}{\partial s_2} - \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_i}{\partial s_i} \right) + \dots \\ -\frac{\partial p}{\partial s_3} - \frac{\partial}{\partial s_3} \left( \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_i}{\partial s_i} \right) + \dots \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial s_i} - \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_j}{\partial s_j} \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Dabei gilt für den symmetrischen Spannungstensor

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_i}{\partial s_i} & \eta \left( \frac{\partial v_1}{\partial s_2} + \frac{\partial v_2}{\partial s_1} \right) & \eta \left( \frac{\partial v_1}{\partial s_3} + \frac{\partial v_3}{\partial s_1} \right) \\ & -p - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_i}{\partial s_i} & \eta \left( \frac{\partial v_2}{\partial s_3} + \frac{\partial v_3}{\partial s_2} \right) \\ & & -p - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_i}{\partial s_i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

<sup>2</sup>Ein Newtonsches Fluid ist eine Flüssigkeit oder ein Gas, dessen Scherspannung  $\tau$  proportional zur Verzerrungsgeschwindigkeit  $\frac{du}{dy}$  ist:  $\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$

## A.4 Vektorschreibweise der Navier-Stokes-Gleichungen

Durch das Ausschreiben der Gleichung 2.18 wird gezeigt, dass sie Gleichung 2.17 entspricht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \left\{ \nabla^T \left[ \rho \begin{pmatrix} v_x v_x & v_y v_x & v_z v_x \\ v_x v_y & v_y v_y & v_z v_y \\ v_x v_z & v_y v_z & v_z v_z \end{pmatrix} \right] \right\}^T &= \vec{f}_{V,i} - \nabla p \\ &+ \eta \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\ &+ (\lambda + \eta) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

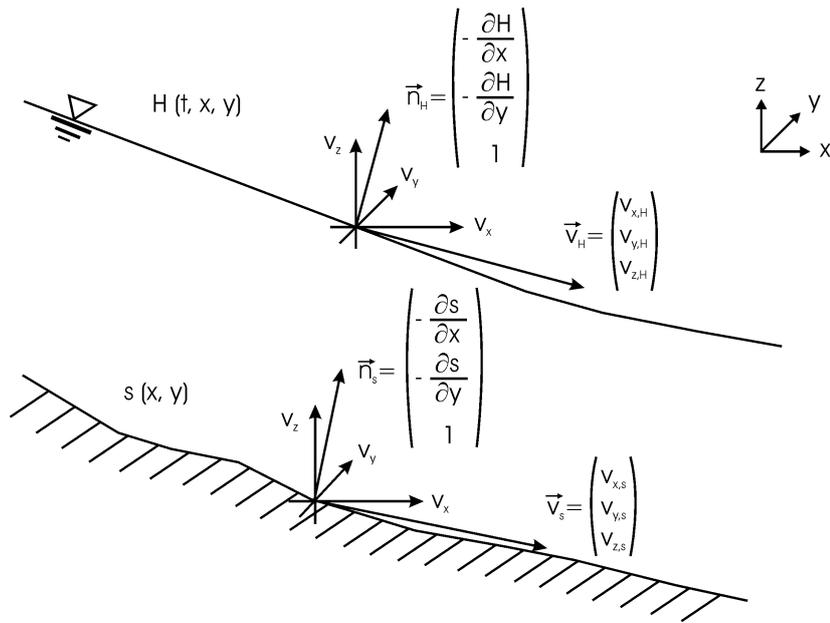
Somit folgt (vgl. Gleichung 2.17):

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_i v_j) = F_{V,i} - \frac{\partial p}{\partial s_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial s_j^2} + \left( -\frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_j}{\partial s_i \partial s_j} + \eta \frac{\partial v_j}{\partial s_i \partial s_j} \right) \quad (\text{A.32})$$

## A.5 Die kinematische Randbedingungen für Sohle, freie Oberfläche und Uferlinie

### A.5.1 Kinematische Randbedingung an der Sohle für die Tiefenintegration

Betrachten wir den Strömungszustand an der Gerinnesohle, so wird für die kinematische Randbedingung der Massenfluss senkrecht zur Sohle vernachlässigbar klein angenommen.



**Abb. A.5:** Darstellung der Sohle  $s(x, y)$  und der Wasseroberfläche  $H(x, y, t)$  mit den Geschwindigkeits- und Normalenvektoren in einem Punkt

Demnach ist das Produkt aus Geschwindigkeitsvektor und Normalenvektor an der Sohle null<sup>3</sup>.

$$\vec{n}_s \cdot \vec{v}_s = 0 \quad (\text{A.33})$$

Da der Normalenvektor senkrecht zu der parametrisierten Sohlfläche  $\vec{\Phi}$  mit

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ s(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

<sup>3</sup>Eine Ex- bzw. Infiltration an der Sohle (entspricht einer Quelle oder Senke) kann ggf. hier durch die Ein- bzw. Ausströmgeschwindigkeit  $q$ , die integriert über die Sohlfläche einen Abfluss ergibt, Berücksichtigung finden:

$$\vec{n}_s \cdot \vec{v}_s = q$$

steht, ist seine Richtung eindeutig definiert durch das Kreuzprodukt der Tangentialvektoren an der Sohle (gegeben durch die partielle Ableitung von  $\vec{\Phi}$  in die entsprechende Richtung):

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial s(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial s(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial s(x,y)}{\partial x} \\ -\frac{\partial s(x,y)}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Die sogenannte **kinematische Randbedingung an der Sohle** lautet demnach mit Gleichung A.33 und A.35:

$$0 = -v_{x,s} \frac{\partial s}{\partial x} - v_{y,s} \frac{\partial s}{\partial y} + v_{z,s} \quad (\text{A.36})$$

### A.5.2 Kinematische Randbedingung an der Oberfläche für die Tiefenintegration

Für die **kinematische Randbedingung an der Oberfläche** wird analog zur Sohle eine zur Wasseroberfläche tangentiale Oberflächengeschwindigkeit  $\vec{v}_H$  angenommen. Da die Oberfläche zeitlich veränderlich ist und jeder Massenstrom senkrecht zur Oberfläche eine Wasserspiegeländerung mit sich bringt, gilt:

$$\vec{n}_H \cdot \vec{v}_H = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x} \\ -\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \vec{v}_H = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{A.37})$$

Demnach lautet die kinematische Randbedingung für die Oberfläche

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -v_{x,H} \frac{\partial H}{\partial x} - v_{y,H} \frac{\partial H}{\partial y} + v_{z,H}. \quad (\text{A.38})$$

### A.5.3 Kinematische Randbedingung der Uferlinien

Die Herleitung der kinematischen Randbedingungen an der linken  $U_l$  und der rechten Uferlinie  $U_r$  kann nach der Parametrisierung der variablen Uferlinien durch die Hauptströmungsrichtung  $x$  und die Zeit  $t$  analog zu den vorangegangenen Kapiteln erfolgen. Zum selben Ergebnis gelangt man auch, wenn das *totale Differential*<sup>4</sup> der Uferlinie, die eine Funktion von zwei Veränderlichen ( $x$  und  $t$ ) ist, gebildet wird. So folgt ausgehend von der Undurchdringlichkeitsbedingung für den rechten Rand:

$$\frac{dU_r(x, t)}{dt} = v_{y,r} = \frac{\partial U_r}{\partial t} + \frac{\partial U_r}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial U_r}{\partial t} + v_{x,r} \frac{\partial U_r}{\partial x} \quad (\text{A.39})$$

Eine entsprechende Bedingung folgt auch für den linken Rand.

### A.5.4 1D Strömungsgleichungen als Funktion von $h$ und $v_x$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x A) = 0 \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \text{mit } B \neq 0 \quad (\text{A.43})$$

Impulsgleichung:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial v_x Q}{\partial x} = -gA \left( \frac{\partial H}{\partial x} + I_E \right) \quad (\text{A.44})$$

<sup>4</sup>Das totale Differential einer Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von  $n$  Variablen ist:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

$$v_x \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial v_x}{\partial x} = -gA \left( \frac{\partial H}{\partial x} + I_E \right) \quad (\text{A.45})$$

$$v_x \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 2v_x A \frac{\partial v_x}{\partial x} = -gA \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} + I_E \right) \quad (\text{A.46})$$

Wird nun die Kontinuitätsgleichung (Gleichung A.43) mit  $v_x B$  erweitert und von der linken Seite der obigen Gleichung abgezogen, so folgt weiter:

$$A \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x A \frac{\partial v_x}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = -gA \left( \frac{\partial s}{\partial x} + I_E \right) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \left( \frac{\partial s}{\partial x} + I_E \right) \quad \text{mit } A \neq 0 \quad (\text{A.48})$$

## A.6 Herleitung der Crank-Nicolson-Gleichung

Für die mathematische Herleitung der Crank-Nicolson-Gleichung wird die unbekannte Größe  $\Phi$  zwischen den zwei benachbarten Zeitpunkten  $t_n$  und  $t_{n+1}$  durch eine Parabel (mit den Faktoren  $a$ ,  $b$  und  $c$ ) approximiert:

$$\Phi(t_n) = \Phi_n = a \cdot t_n^2 + b \cdot t_n + c \quad (\text{A.49})$$

Die Faktoren  $a$  und  $b$  können dabei in Abhängigkeit der Steigungen in den Randpunkten ( $t_n$  und  $t_{n+1}$ ) ausgedrückt werden:

Mit

$$\Phi'_n = 2a \cdot t_n + b \quad \text{und} \quad \Phi'_{n+1} = 2a \cdot t_{n+1} + b \quad (\text{A.50})$$

folgt:

$$a = \frac{\Phi'_{n+1} - \Phi'_n}{2\Delta t} \quad \text{und} \quad b = \Phi'_n - 2 \cdot t_n \frac{\Phi'_{n+1} - \Phi'_n}{2\Delta t} \quad (\text{A.51})$$

Werden mit Gleichung A.49 die Funktionswerte in den Zeitpunkten  $t_n$  und  $t_{n+1}$  ermittelt und beide Gleichungen voneinander abgezogen, so folgt die Eliminierung des Faktors  $c$ :

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n = a (t_{n+1}^2 - t_n^2) + b (t_{n+1} - t_n) \quad (\text{A.52})$$

Durch das Einsetzen der Gleichungen A.51 in Gleichung A.52 folgt nach Umformung die Crank-Nicolson-Gleichung:

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + \frac{\Delta t}{2} (\Phi'_{n+1} + \Phi'_n) \quad (\text{A.53})$$

## A.7 Eigenschaften der stetigen Gleichverteilung

Die Grundlage der Monte Carlo Simulationen sind generierte Zufallsvariablen, die eine beliebige Verteilung besitzen können. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde eine (stetige) Gleichverteilung<sup>5</sup> angenommen. Auf dem Intervall  $(a, b)$  ist der Erwartungswert  $E(X)$  (definiert als Integral des Wahrscheinlichkeitsmaßes) einer gleichverteilten Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  für die gleichverteilte Zufallsvariable  $X$ :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{b+a}{2} \quad (\text{A.54})$$

Die Varianz  $V(X)$  gibt das Streuungsmaß an, für das nach dem Verschiebungssatz<sup>6</sup>

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (\text{A.55})$$

sowie nach weiterer Lösung des Gleichungssystems ergibt:

$$V(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (\text{A.56})$$

Im Rahmen der Normierung der Zufallsvariable (siehe Gleichung 6.2) ergibt sich für die Grenzwerte  $a = -\sqrt{3}$  und  $b = +\sqrt{3}$ .

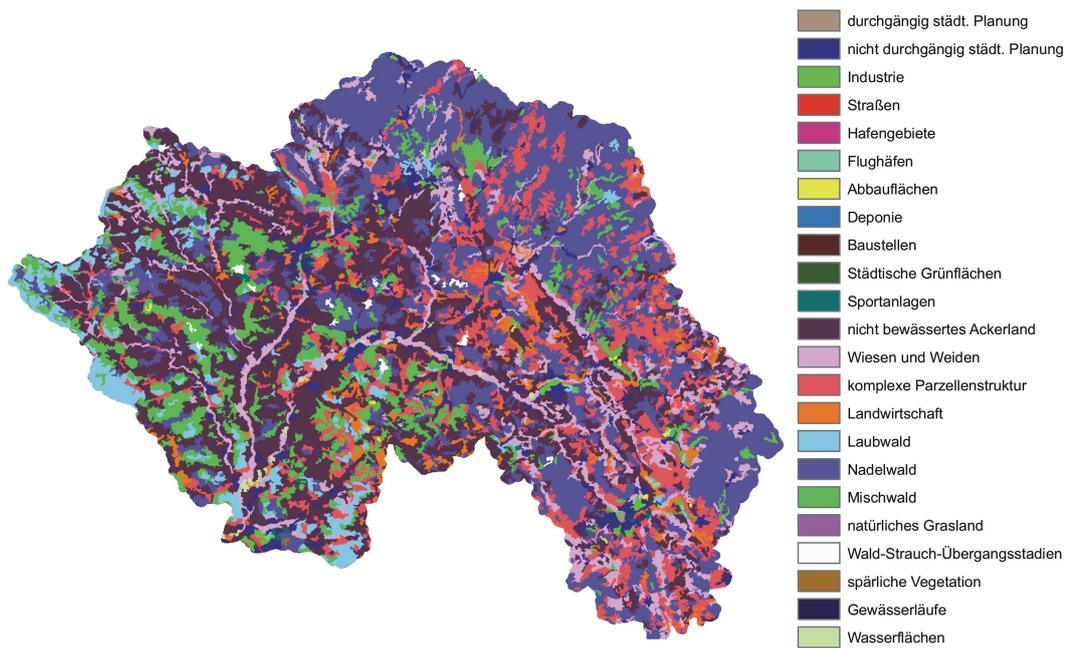
---

<sup>5</sup>Auch Rechteckverteilung oder Uniformverteilung genannt.

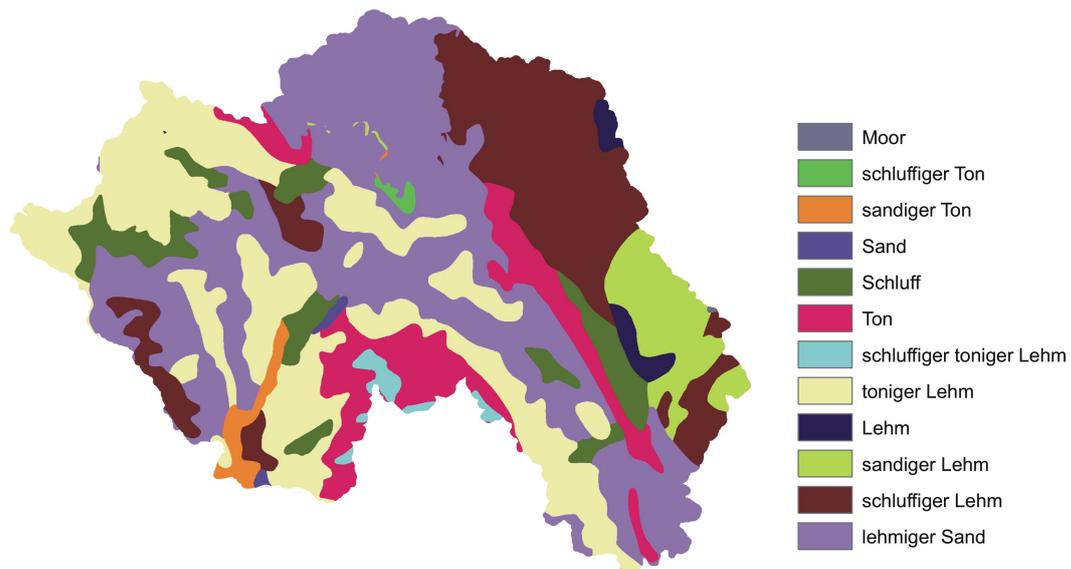
<sup>6</sup>Eine Rechenregel für die Ermittlung der Summe quadratischer Abweichungen



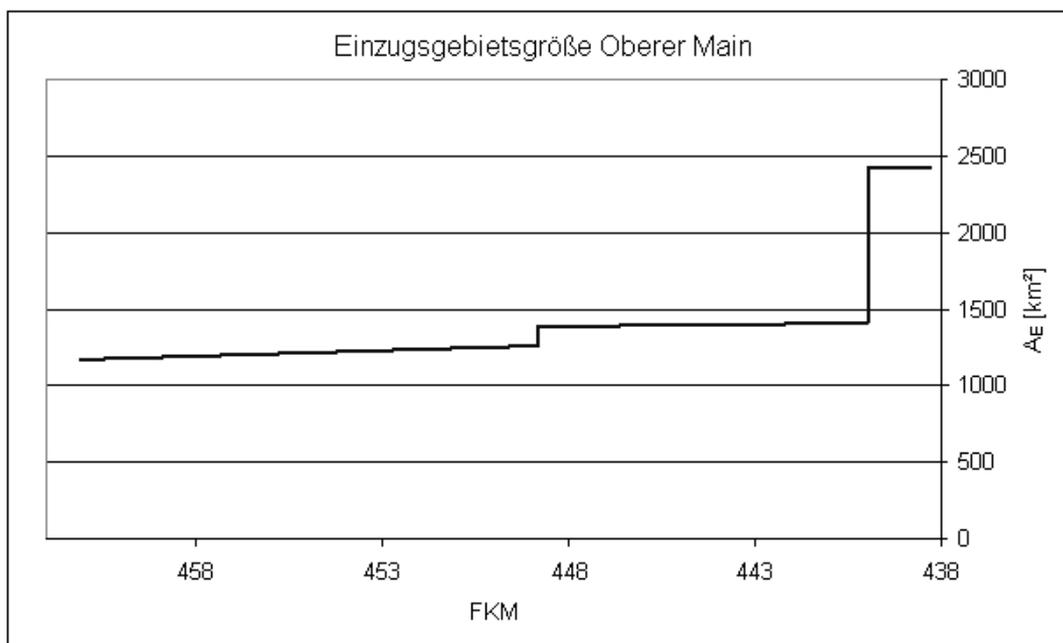
## B Das Modellgebiet



*Abb. B.1: Die Landnutzung im Einzugsgebiet des Oberen Main (aus CORINE Land Cover 2000)*



**Abb. B.2:** Die Geologie im Einzugsgebiet des Oberen Main (aus Bodenübersichtskarten der BRD)



**Abb. B.3:** Längsschnitt der Einzugsgebietsgröße des Oberen Main, Abschnitt Mainleus bis Schwürbitz

## C Ergebnisse der Unsicherheitsanalyse

### C.1 Parametereinfluss auf die Schlüsselkurve (synthetisches Gerinne) und die Abflussanteile im Gerinne sowie im Vorland

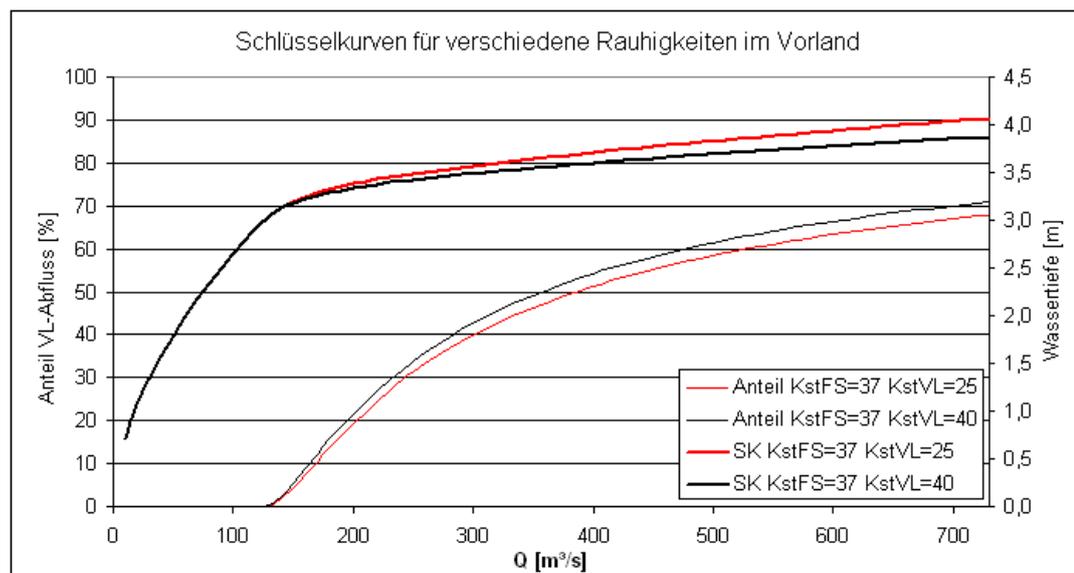
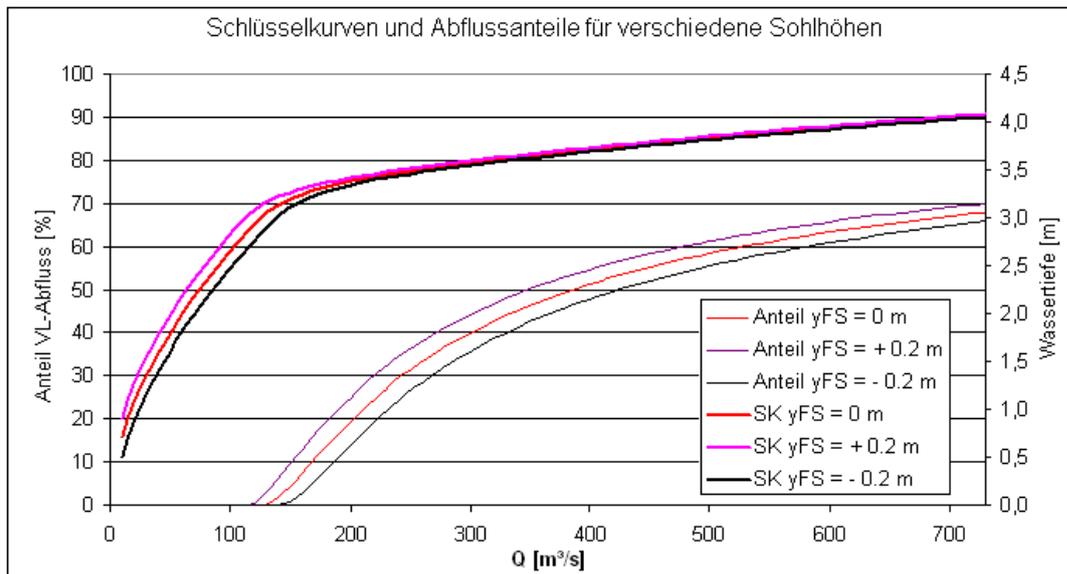
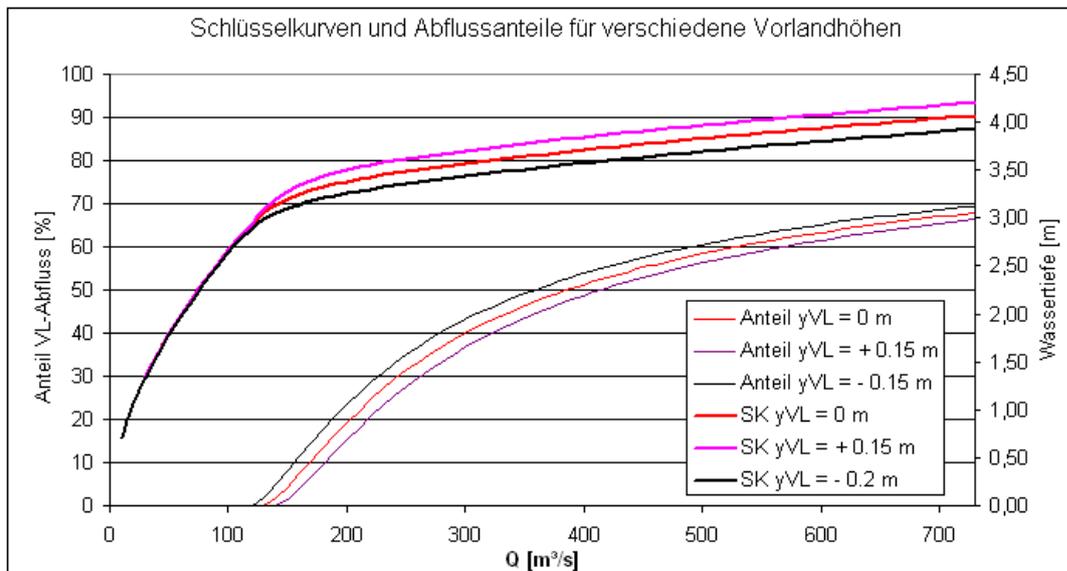


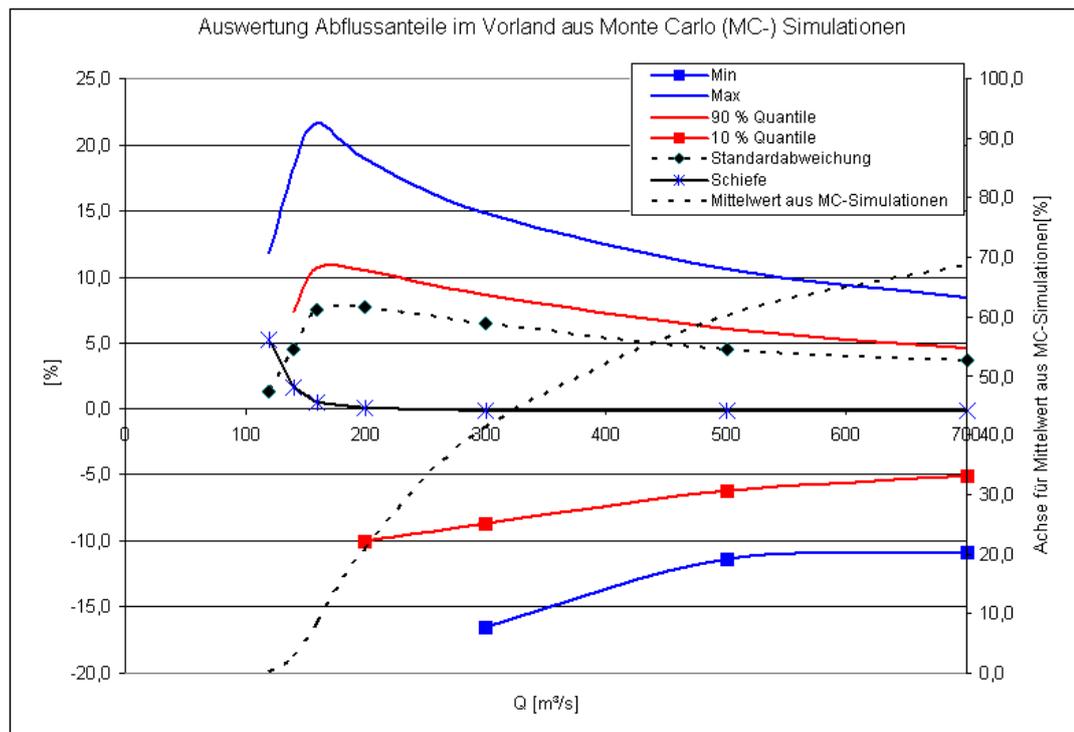
Abb. C.1: Einfluss der Vorlandrauigkeit auf die Schlüsselkurve und auf die Abflussanteile



**Abb. C.2:** Einfluss der Sohlhöhe auf die Schlüsselkurve und auf die Abflussanteile



**Abb. C.3:** Einfluss der Vorlandhöhe auf die Schlüsselkurve und auf die Abflussanteile



**Abb. C.4:** Auswertung der Abflussanteile des Vorlandes aus den Monte Carlo Simulationen, Werte als Differenz zum Mittelwert



## C.2 1D synthetisches Gerinne mit stationären Abflussverhältnissen

Tab. C.1: Einfluss der Parameter auf die Wasserspiegellagen

Q	kstFS	kstVL	yFS	yVL	Wassertiefe [m]
620.5	37	32.5	0	0	3.86
839.5	37	32.5	0	0	4.04
730	30	32.5	0	0	3.98
730	44	32.5	0	0	3.92
730	37	25	0	0	4.06
730	37	40	0	0	3.87
730	37	32.5	-0.2	0	3.94
730	37	32.5	0.2	0	3.96
730	37	32.5	0	-0.15	3.81
730	37	32.5	0	0.15	4.09
730	37	32.5	0	0	3.95
391	37	32.5	0	0	3.63
529	37	32.5	0	0	3.78
460	30	32.5	0	0	3.75
460	44	32.5	0	0	3.67
460	37	25	0	0	3.78
460	37	40	0	0	3.65
460	37	32.5	-0.2	0	3.69
460	37	32.5	0.2	0	3.72
460	37	32.5	0	-0.15	3.57
460	37	32.5	0	0.15	3.85
460	37	32.5	0	0	3.71
272	37	32.5	0	0	3.48
368	37	32.5	0	0	3.61
320	30	32.5	0	0	3.59
320	44	32.5	0	0	3.51
320	37	25	0	0	3.60
320	37	40	0	0	3.51

Tab. C.1: Einfluss der Parameter auf die Wasserspiegellagen

Q	kstFS	kstVL	yFS	yVL	Wassertiefe [m]
320	37	32.5	-0.2	0	3.53
320	37	32.5	0.2	0	3.57
320	37	32.5	0	-0.15	3.41
320	37	32.5	0	0.15	3.68
320	37	32.5	0	0	3.55
178.5	37	32.5	0	0	3.30
241.5	37	32.5	0	0	3.44
210	30	32.5	0	0	3.44
210	44	32.5	0	0	3.30
210	37	25	0	0	3.41
210	37	40	0	0	3.36
210	37	32.5	-0.2	0	3.34
210	37	32.5	0.2	0	3.41
210	37	32.5	0	-0.15	3.25
210	37	32.5	0	0.15	3.50
210	37	32.5	0	0	3.38

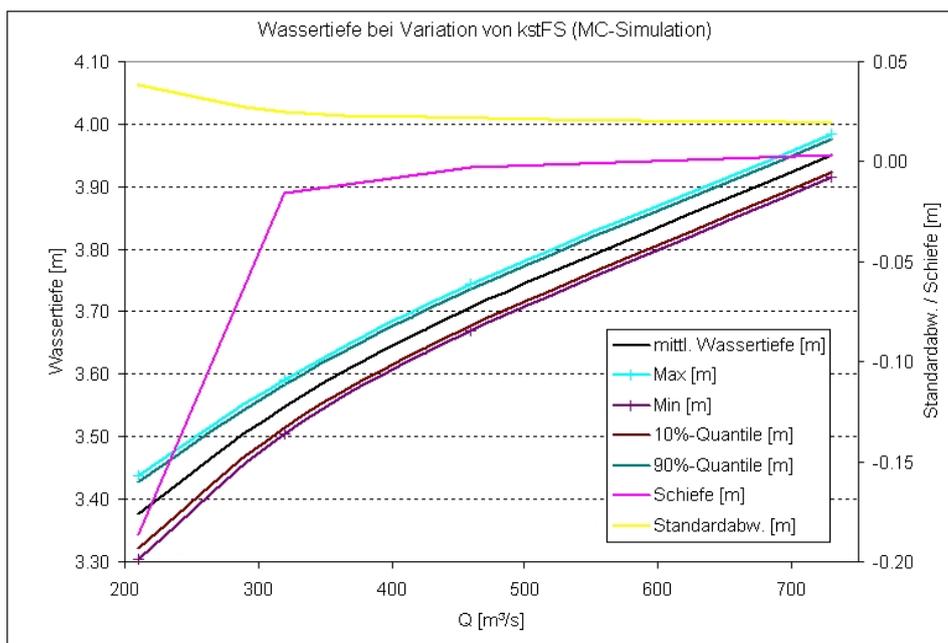
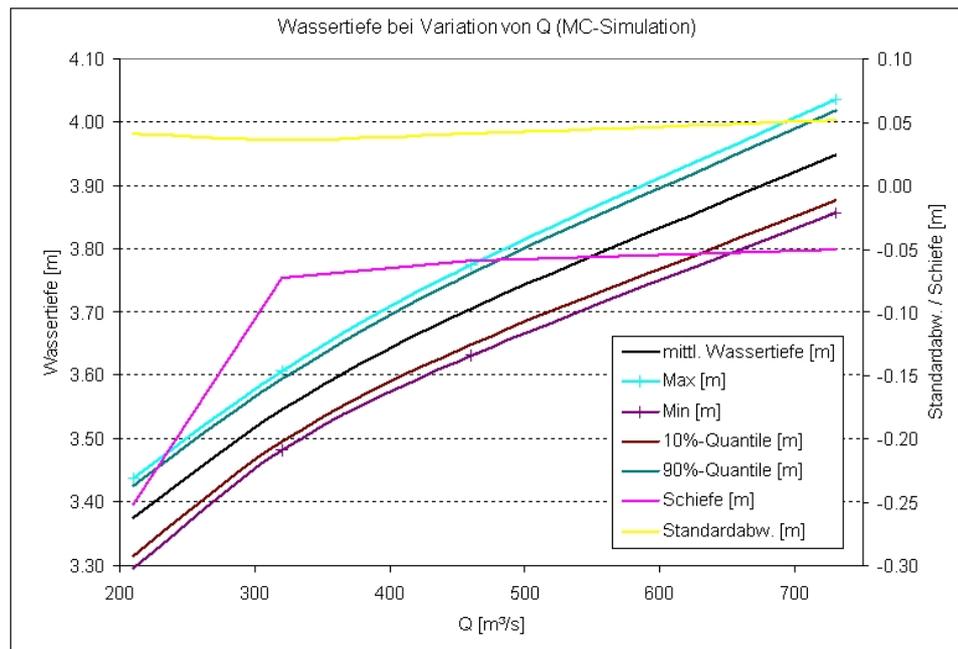
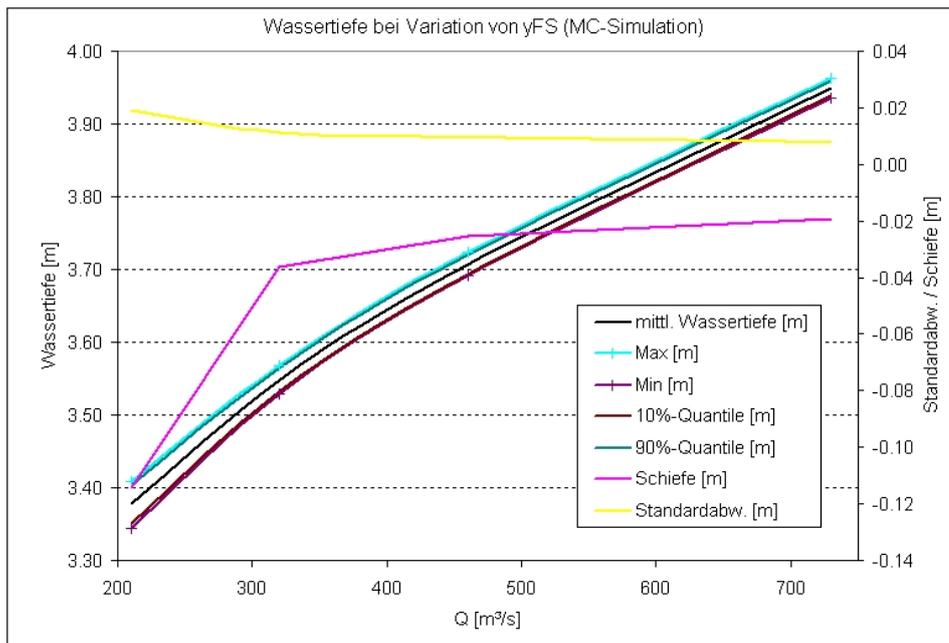


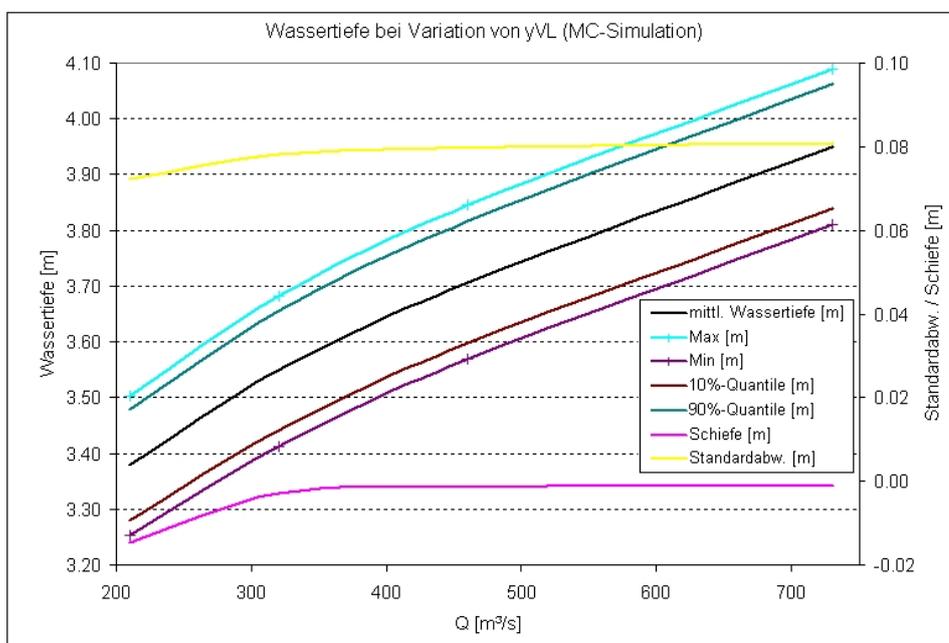
Abb. C.5: Verteilung der Wassertiefen bei Variation der Flussschlauchrauigkeit (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten)



**Abb. C.6:** Verteilung der Wassertiefen bei Variation des Abflusses (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten)



**Abb. C.7:** Verteilung der Wassertiefen bei Variation der Flussschlauchsohlhöhe (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten)



**Abb. C.8:** Verteilung der Wassertiefen bei Variation der Vorlandhöhe (Monte Carlo Simulation mit 2000 Parameterwerten)

### C.3 1D synthetisches Gerinne mit instationären Abflussverhältnissen

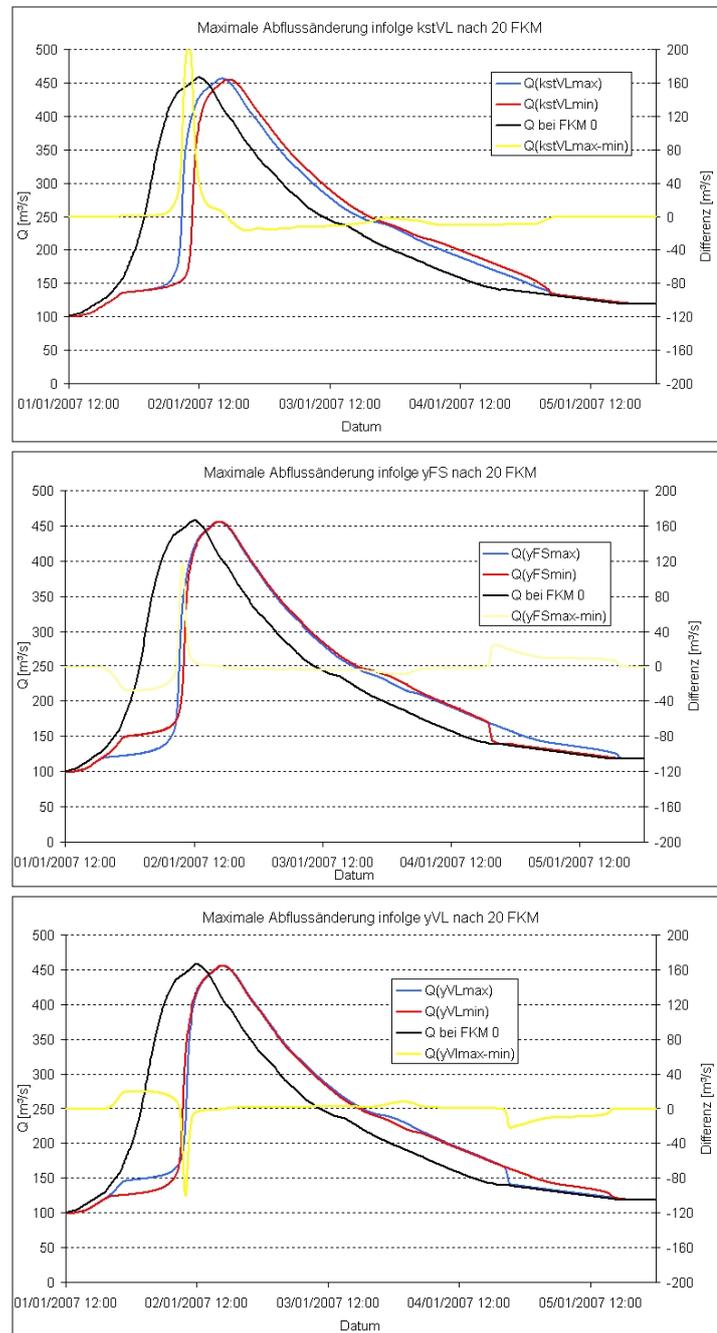
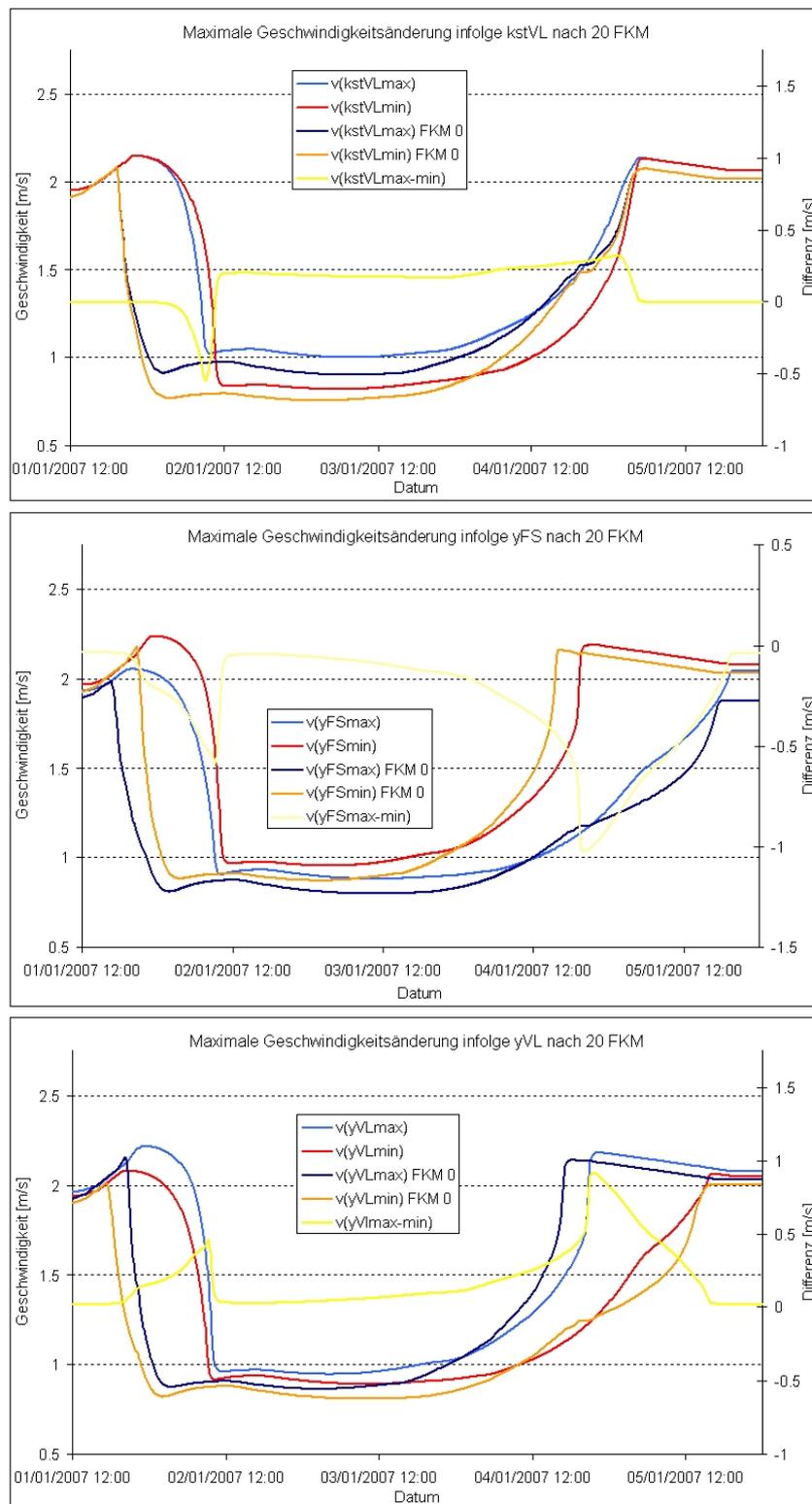
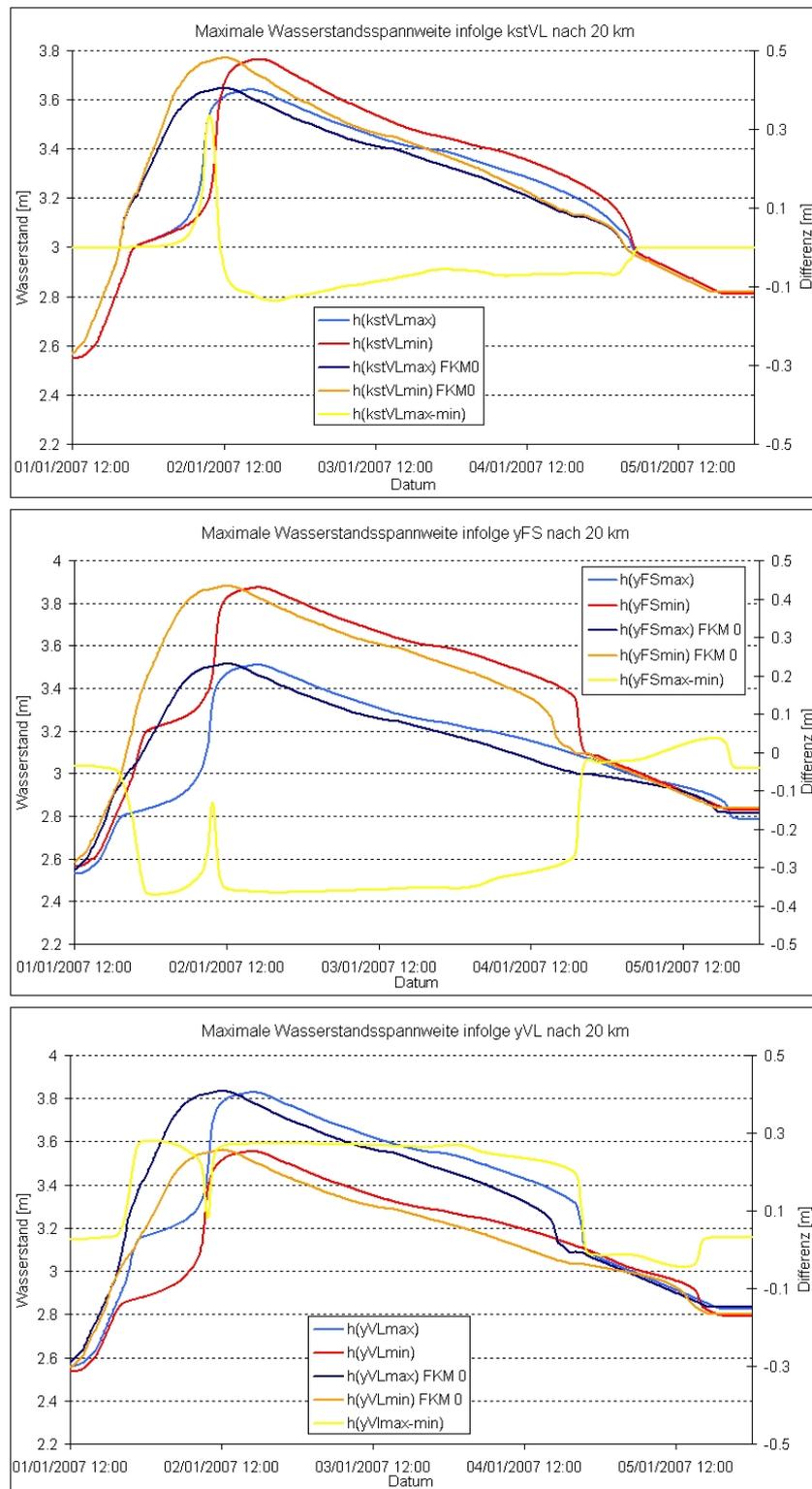


Abb. C.9: Maximale Parametereinflüsse auf die Form einer Hochwasserwelle der Jährlichkeit



**Abb. C.10:** Maximale Parametereinflüsse auf eine Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100, Fließtiefe links und Geschwindigkeit rechts



**Abb. C.11:** Maximale Parametereinflüsse auf eine Hochwasserwelle der Jährlichkeit 100, Fließtiefe links und Geschwindigkeit rechts



## C.4 Flussabschnitt Oberer Main mit stationären Abflussverhältnissen

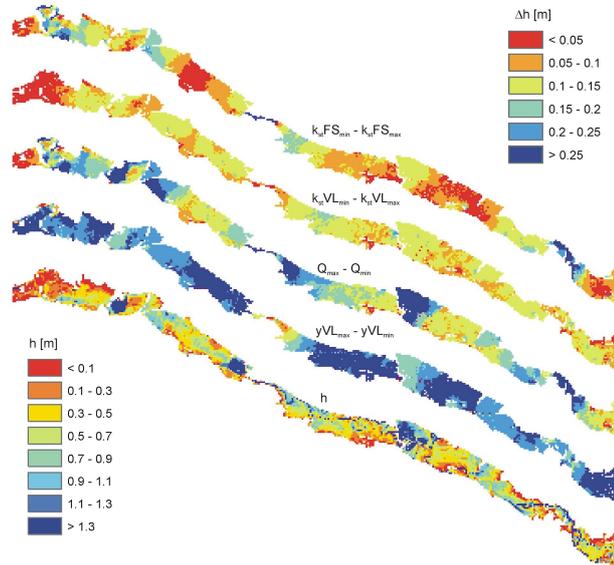


Abb. C.12: Maximale Wasserspiegeländerung bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1),

$$Q_{\text{mittel}} = 320 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \text{ (Jährlichkeit 20)}$$

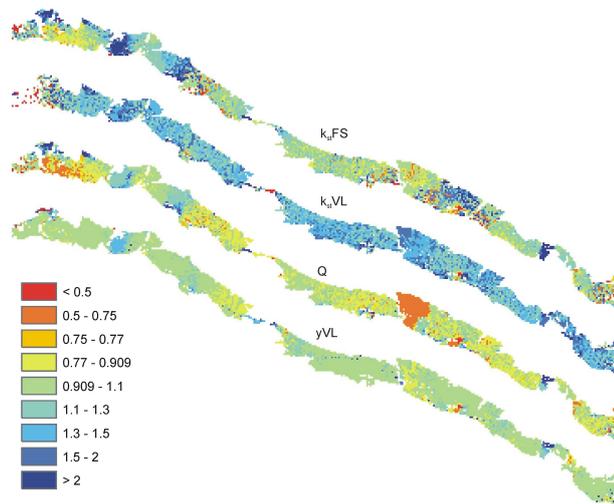
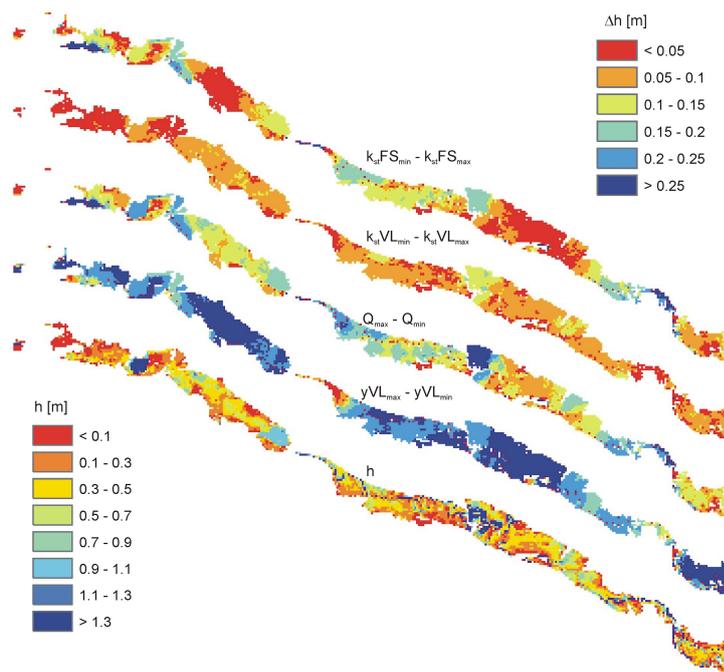


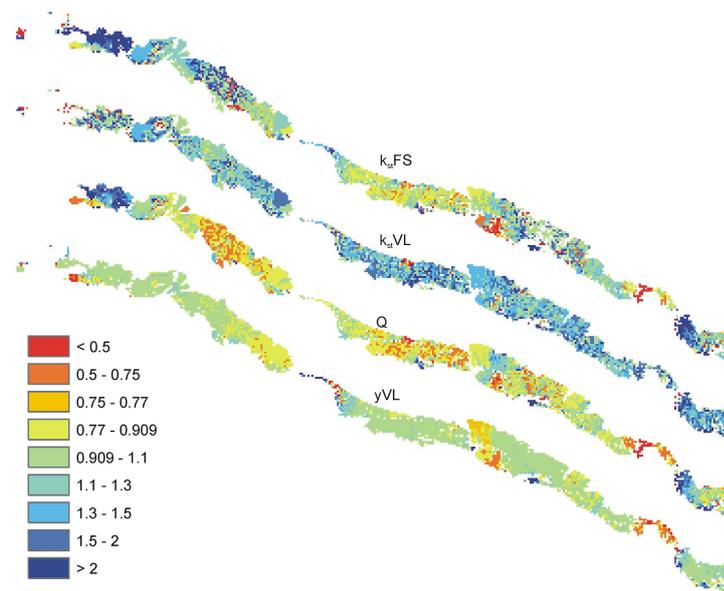
Abb. C.13: Quotient aus den Differenzen maximaler minus mittlerer Wasserspiegel und mittlerer minus minimaler Wasserspiegel bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle

$$6.1) Q_{\text{mittel}} = 320 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \text{ (Jährlichkeit 20)}$$



**Abb. C.14:** Maximale Wasserspiegeländerung bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1)

$$Q_{\text{mittel}} = 210 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \text{ (Jährlichkeit 5)}$$



**Abb. C.15:** Quotient aus den Differenzen maximaler minus mittlerer Wasserspiegel und mittlerer minus minimaler Wasserspiegel bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1)

$$Q_{\text{mittel}} = 210 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \text{ (Jährlichkeit 5)}$$

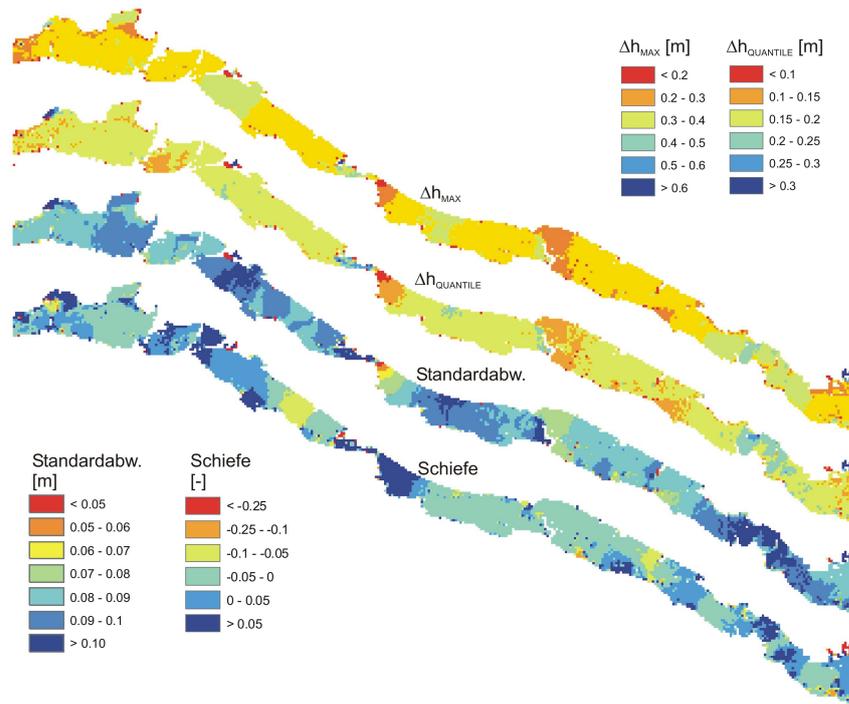


Abb. C.16: Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf HQ100-b

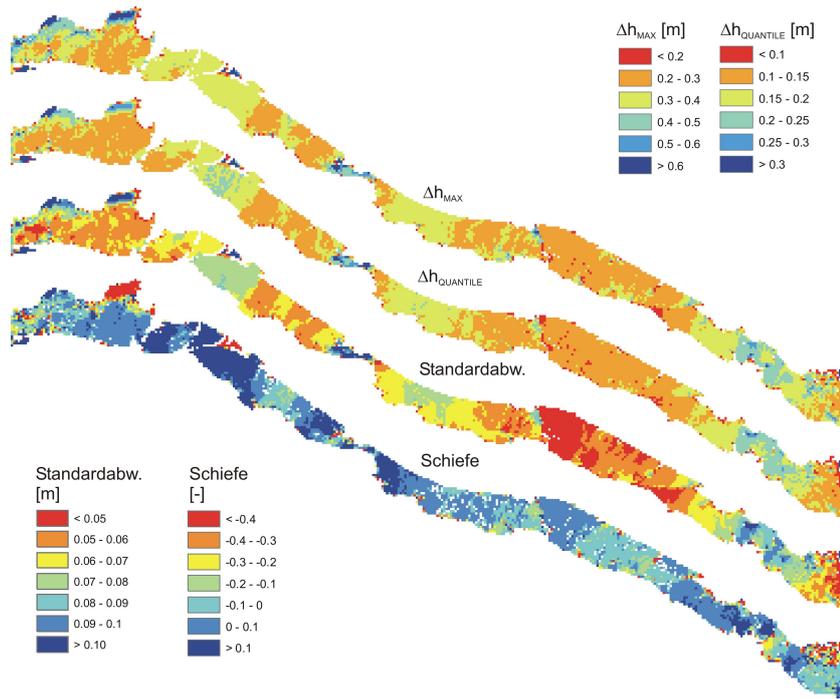


Abb. C.17: Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf HQ<sub>100-c</sub>

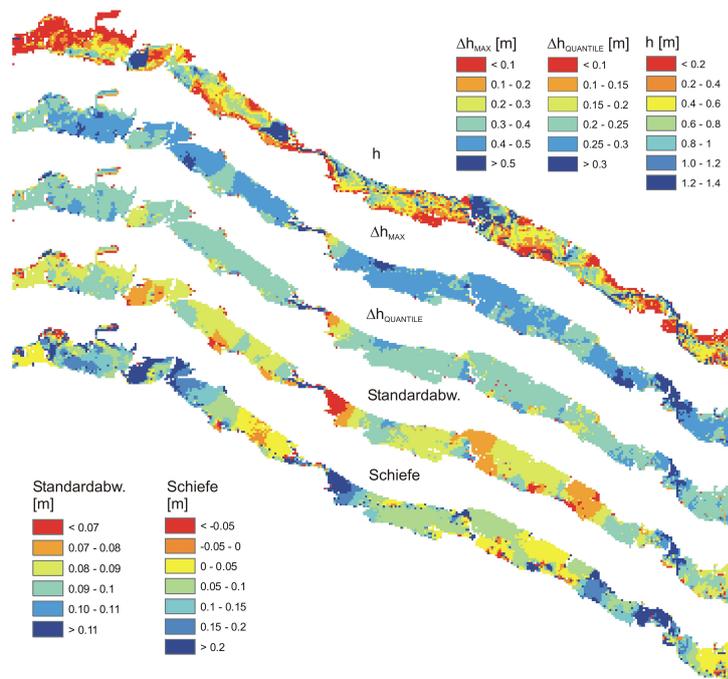


Abb. C.18: Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf HQ<sub>20-a</sub>

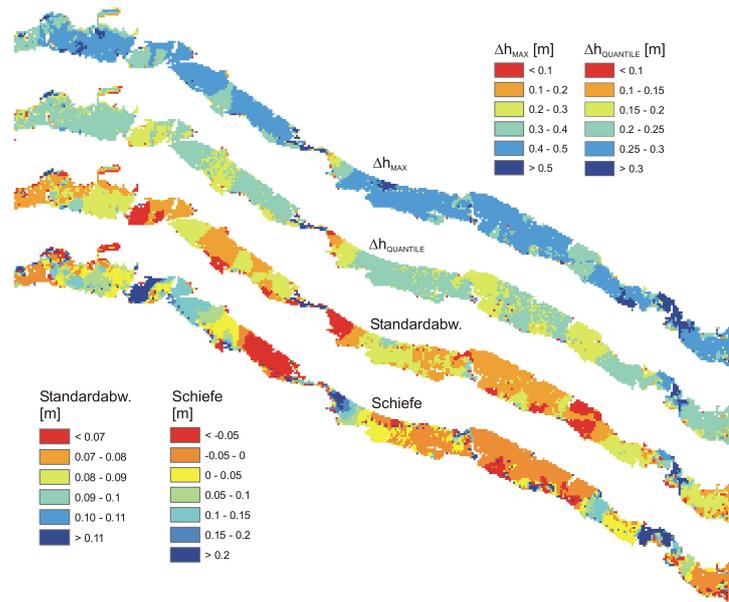


Abb. C.19: Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf HQ<sub>20-b</sub>

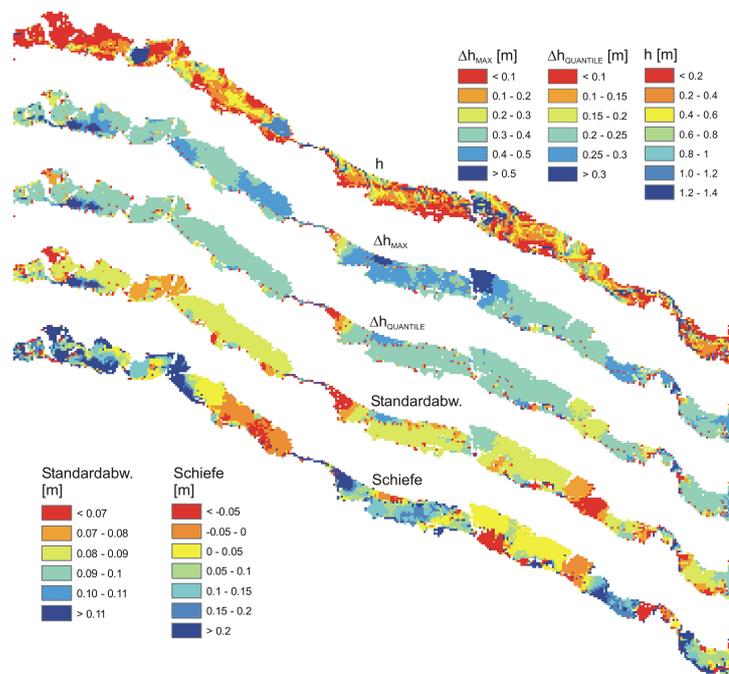


Abb. C.20: Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf HQ<sub>5-a</sub>

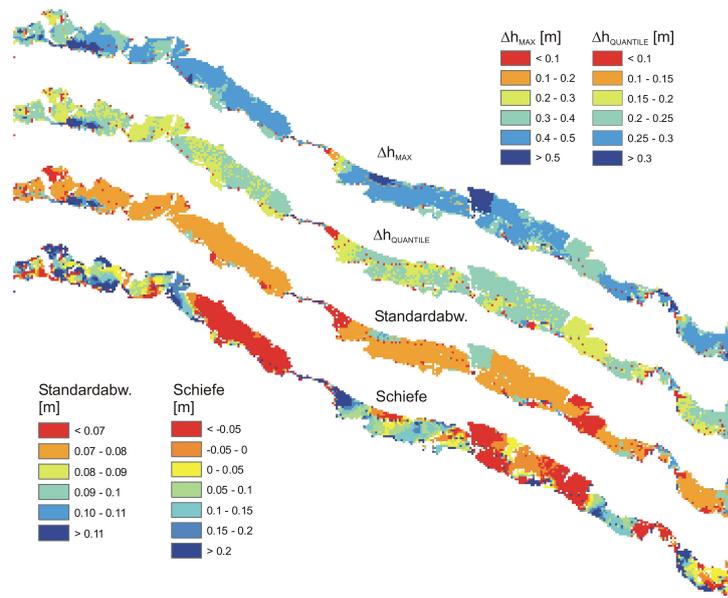


Abb. C.21: Auswertung Monte Carlo Simulation für den Lauf HQ<sub>5</sub>-b

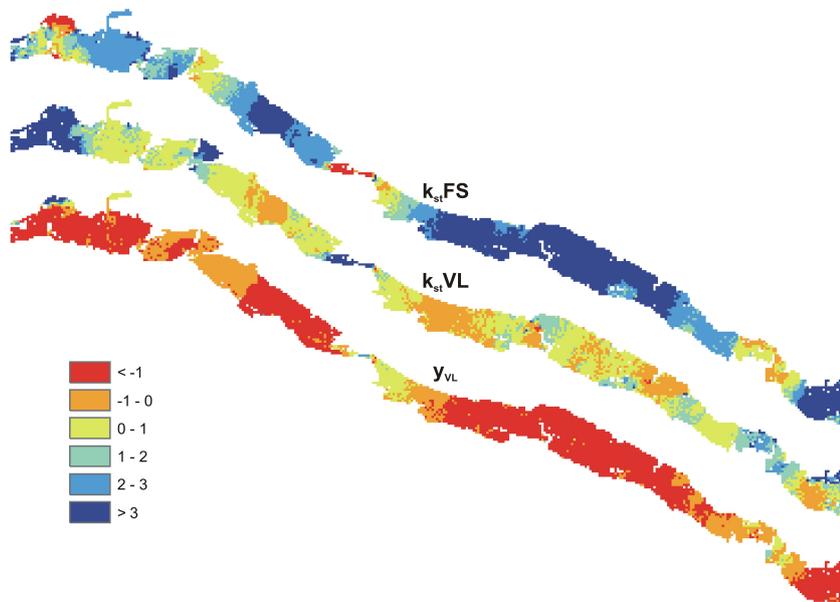
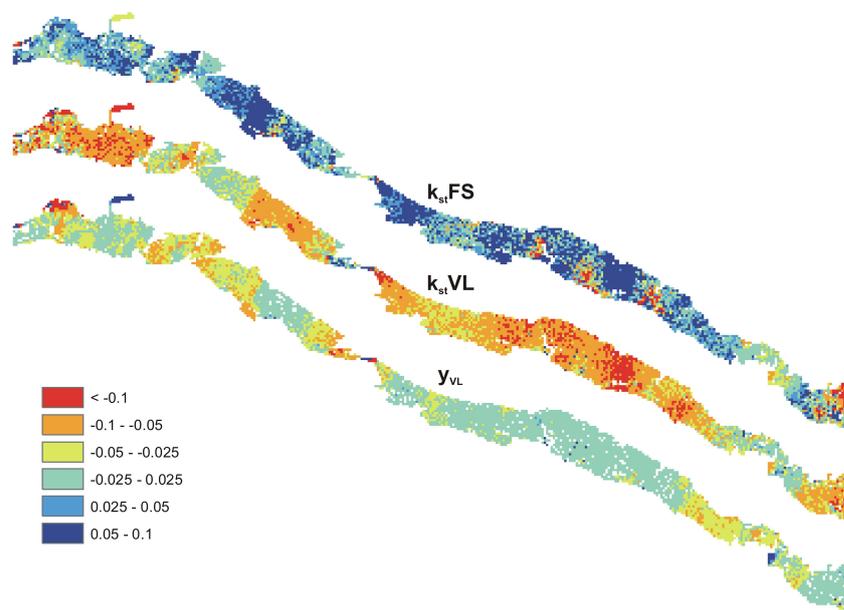


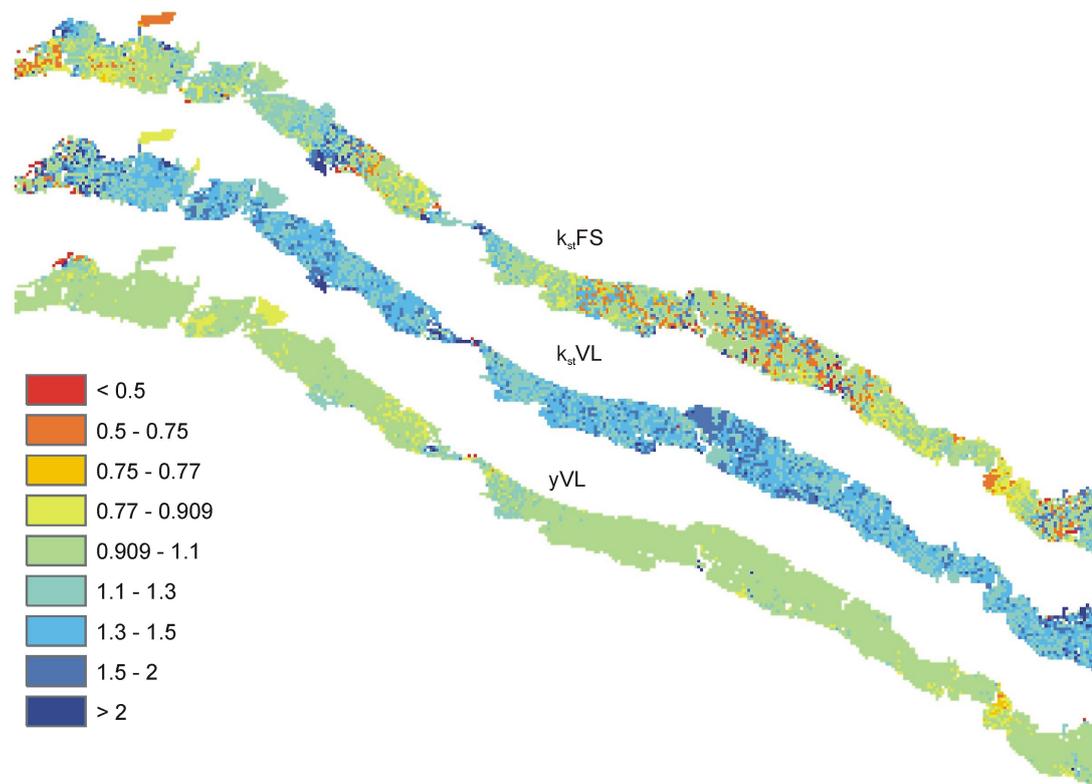
Abb. C.22: PR aus der GSA für den Lauf HQ<sub>100</sub>-a



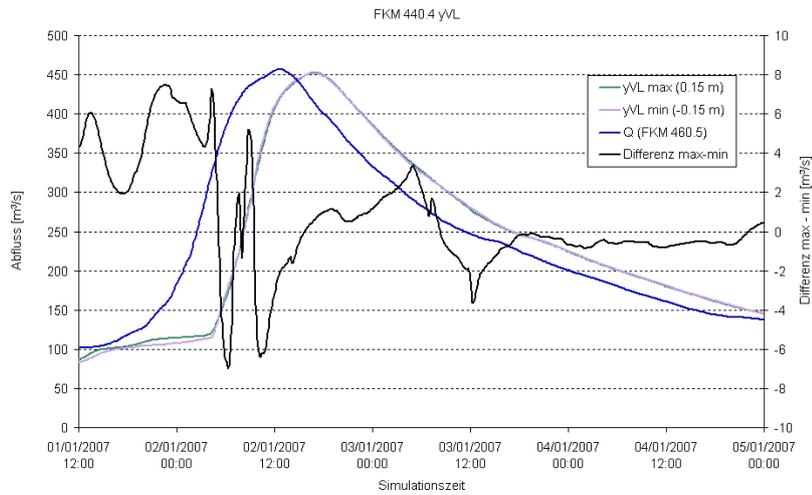
**Abb. C.23:**  $\Delta F n_{Max/Min}$  aus der GSA für den Lauf  $HQ_{100-a}$



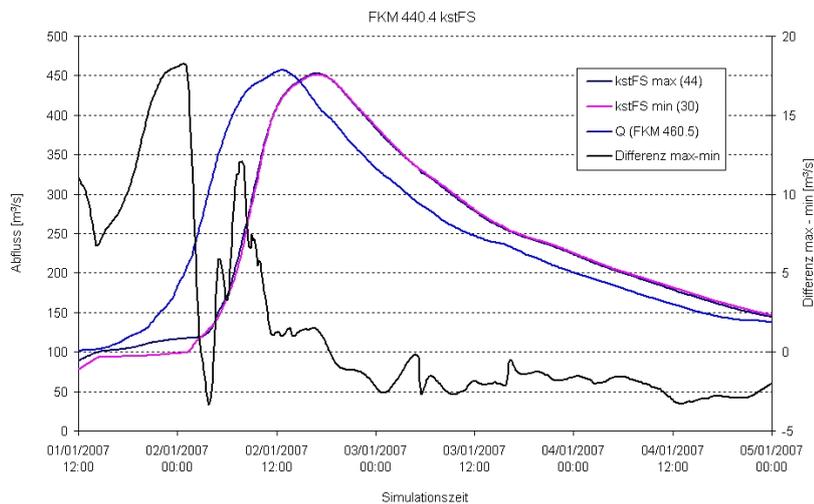
## C.5 Flussabschnitt am Oberen Main mit instationären Abflussverhältnissen



**Abb. C.24:** Quotient aus den Differenzen maximaler minus mittlerer Wasserspiegel und mittlerer minus minimaler Wasserspiegel bei Variation eines Parameters (vgl. Tabelle 6.1) für eine Hochwasserwelle (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100)



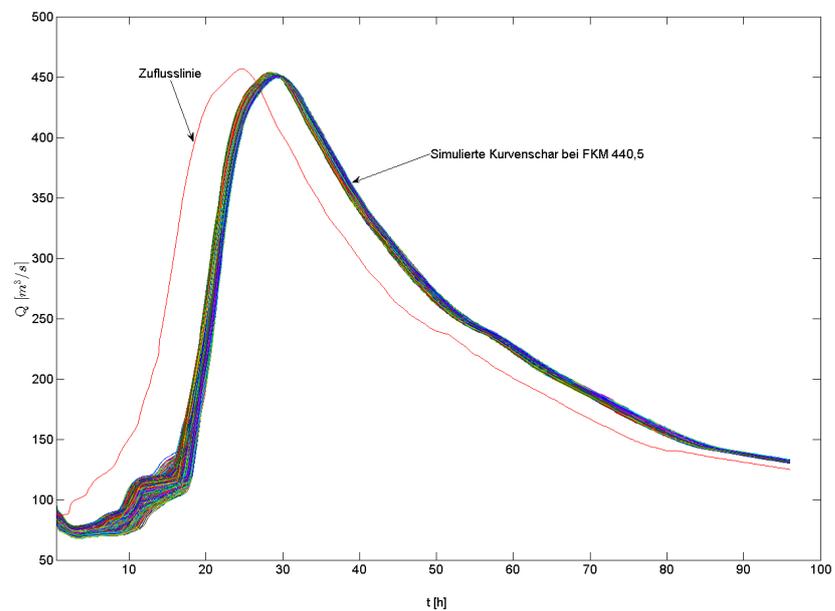
**Abb. C.25:** Abflussänderungen für einen max. ( $yVL_{max} = 0,15 \text{ m}$ ) und min. ( $yVL_{min} = -0,15 \text{ m}$ ) Vorlandhöhenwert nach 20 km (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100)



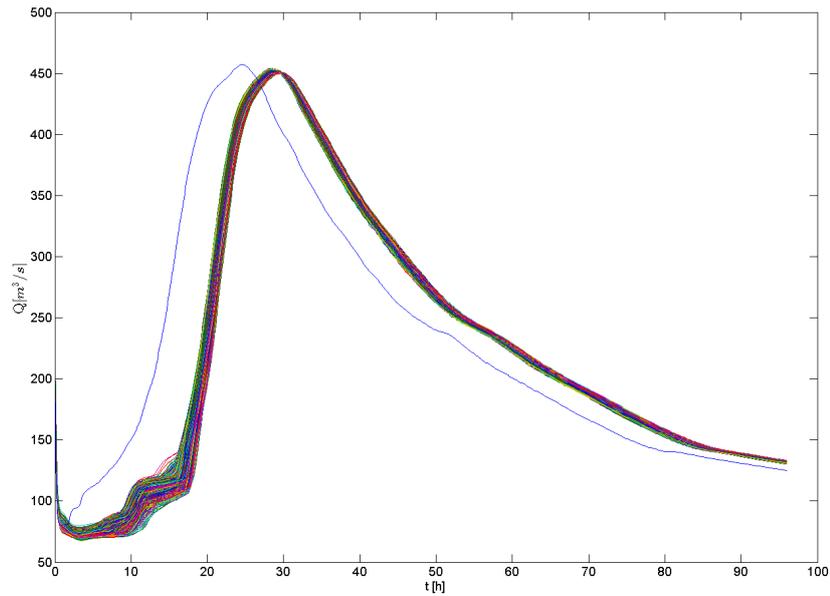
**Abb. C.26:** Abflussänderungen für einen max. ( $k_{st}VL_{max} = 44$ ) und min. ( $k_{st}VL_{min} = 30$   $\frac{\sqrt[3]{m}}{s}$ ) Vorlandrauheitswert nach 20 km (bei einer Abflussspitze der Jährlichkeit 100)



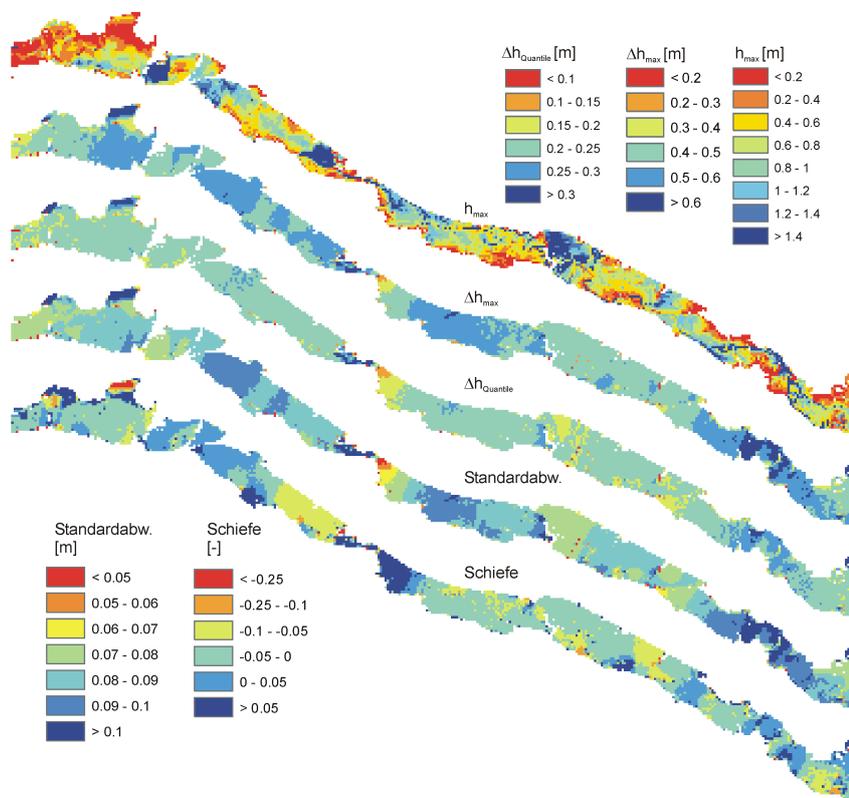
**Abb. C.27:** Differenz der maximalen Wassertiefen für einen stationären und instationären Abfluss der Jährlichkeit 100 für mittlere Parameterwerte, 2D Modell



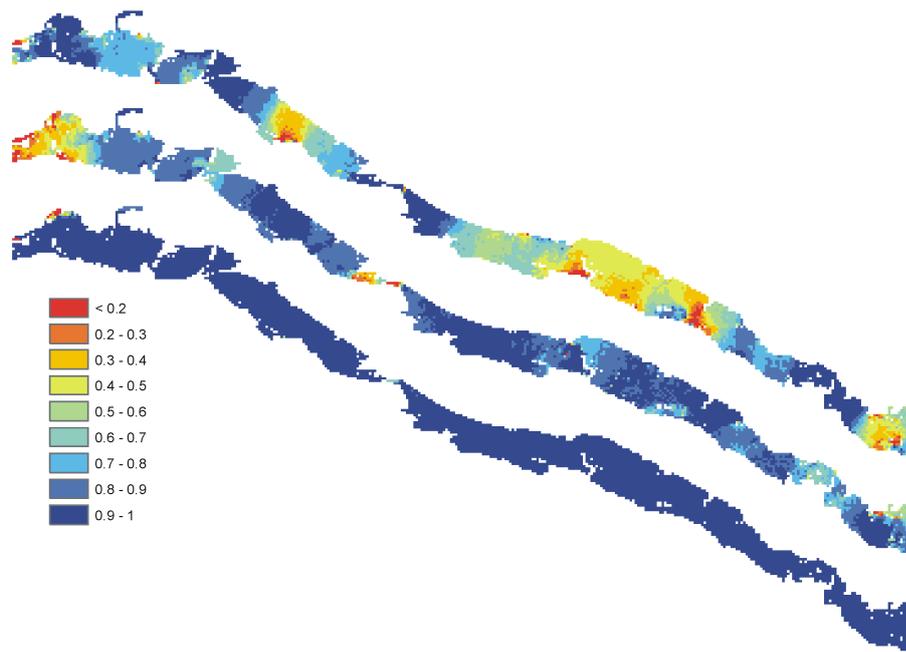
**Abb. C.28:** Visualisierung aller 1500 simulierten Abflusswellen bei FKM 440,5 und die zugehörige Zuflusswelle bei FKM 460,4 ( $HQ_{100-a}$ )



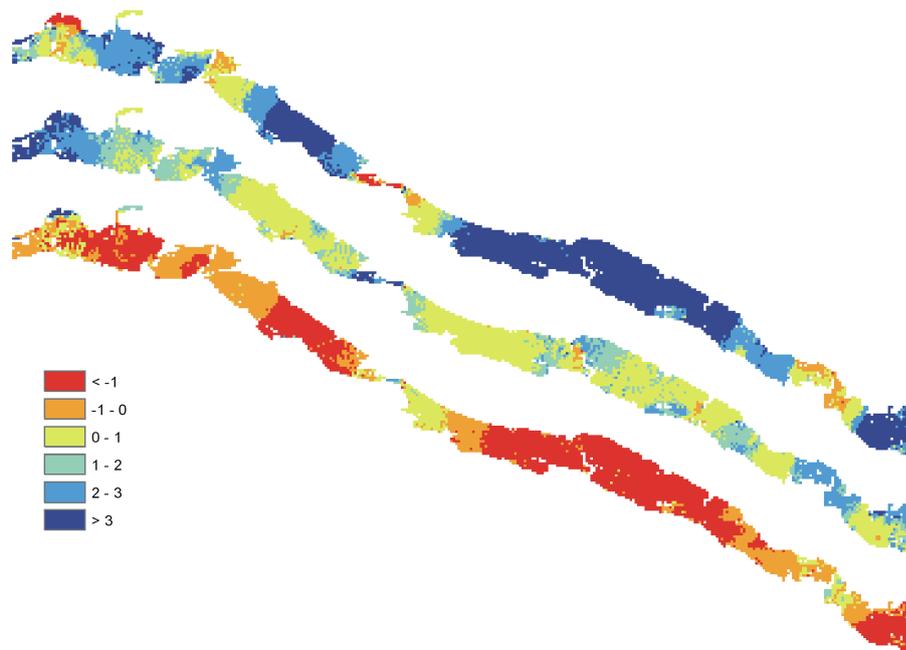
**Abb. C.29:** Visualisierung aller 1500 simulierten Abflusswellen bei FKM 440,5 und die zugehörige Zuflusswelle bei FKM 460,4 ( $HQ_{100-b}$ )



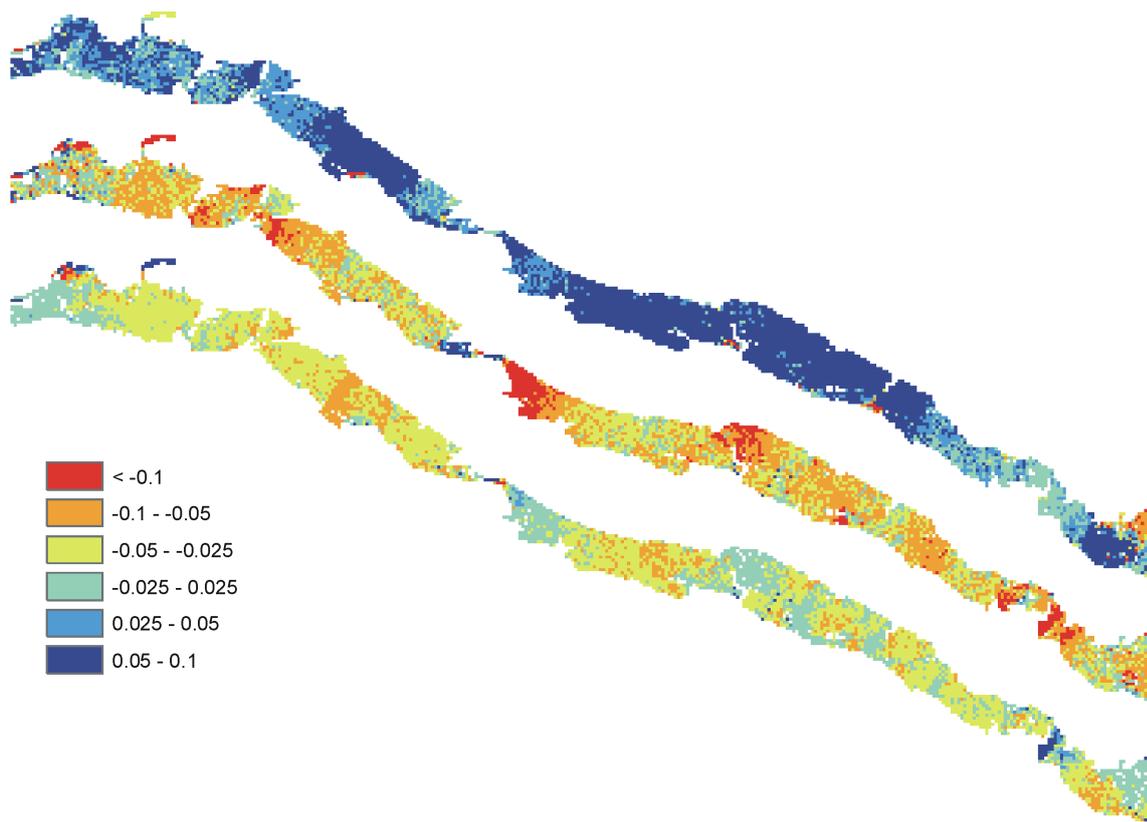
**Abb. C.30:** Auswertung der Monte Carlo Simulation für den Lauf  $HQ_{100-b}$ , Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse



**Abb. C.31:**  $\Delta F n_{Max}$  aus der GSA für den Lauf  $HQ_{100-a}$ , Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse

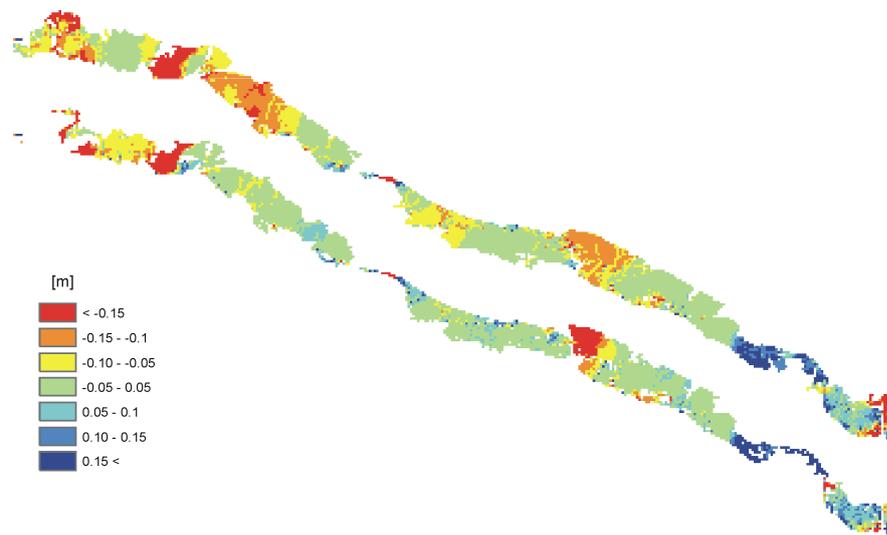


**Abb. C.32:**  $PR$  aus der GSA für den Lauf  $HQ_{100-a}$ , Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse

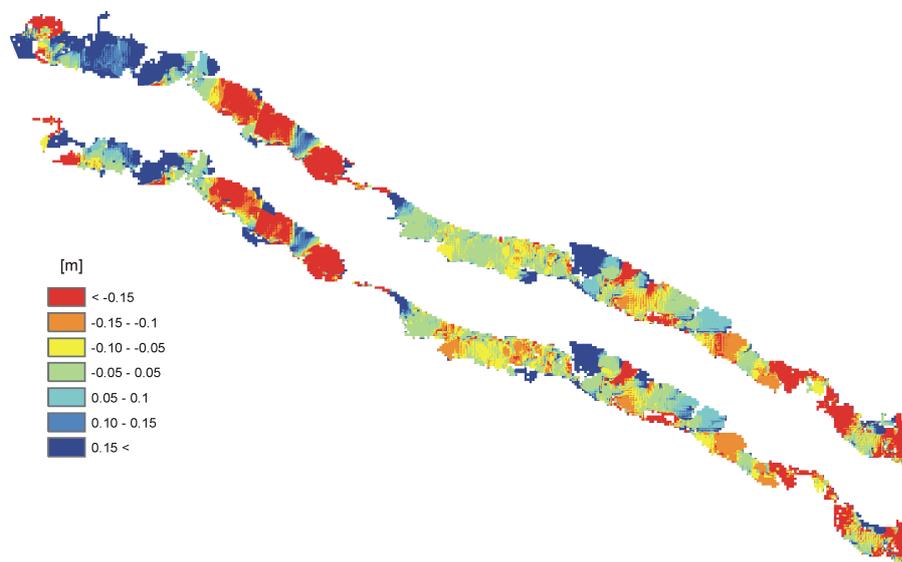


**Abb. C.33:**  $\Delta F n_{Max/Min}$  aus der GSA für den Lauf  $HQ_{100-a}$ , Oberer Main - instationäre Abflussverhältnisse

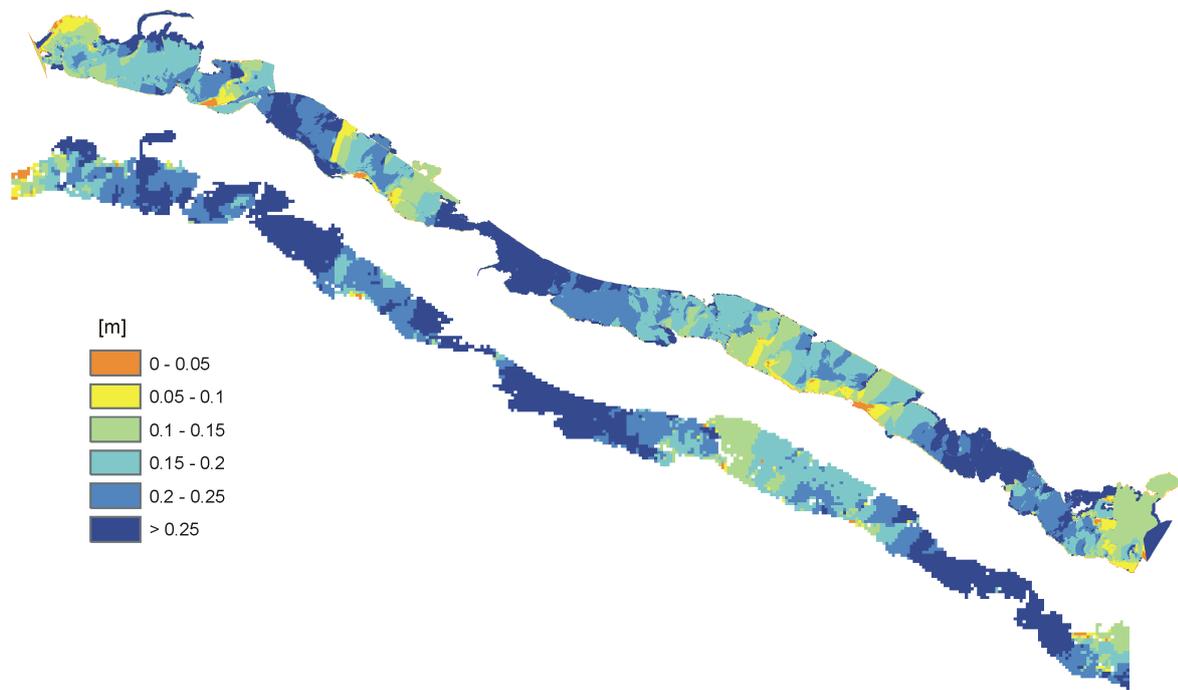
## C.6 Ergebnisvergleich verschieden komplexer Modelle



**Abb. C.34:** Differenz der simulierten Wasserspiegel (SOBEK minus MIKE) für ein stationäres Abflussereignis der Jährlichkeit 20 (oben) und 5 (unten)



**Abb. C.35:** Differenz der simulierten Wasserspiegel (SOBEK minus Hydro\_As) für ein stationäres Abflussereignis der Jährlichkeit 20 (oben) und 5 (unten)



**Abb. C.36:** Wasserspiegeldifferenz aus den Berechnungen rauhe Verhältnisse ( $k_{st}FS = 44$ ,  $k_{st}VL = 40 \sqrt[3]{m/s}$ ) minus glatte Verhältnisse ( $k_{st}FS = 30$ ,  $k_{st}VL = 25 \sqrt[3]{m/s}$ ), oben Hydro\_As, unten SOBEK