

Ein stromlinienbasiertes Verfahren zur Berechnung von stationären, kompressiblen und reibungsbehafteten Strömungen

Dipl.-Ing. Bastian Thorwald

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation.

Gutachter:

Vorsitzender : Univ.-Prof. Dr.-Ing. Helmut Rapp
1. Berichterstatter : Univ.-Prof. Dr.-Ing. Christian Mundt
2. Berichterstatter : Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Markus Klein

Die Dissertation wurde am 04.04.2013 bei der Universität der Bundeswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik am 17.04.2013 angenommen. Die mündliche Prüfung fand am 05.07.2013 statt.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Thermodynamik der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik der Universität der Bundeswehr München. Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Christian Mundt für die Möglichkeit, die Arbeit an seinem Institut durchführen zu können, die Freiheit in der Bearbeitung der mir gestellten wissenschaftlichen Aufgaben und das mir entgegengebrachte Vertrauen.

Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Markus Klein für die Übernahme des Zweitgutachtens und seine wertvollen Anregungen, die sehr zur Verbesserung der Arbeit beigetragen haben.

Nürnberg, im März 2013

Bastian Thorwald

Kurzbeschreibung des Themas

In dieser Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, das die Berechnung von zwei- und dreidimensionalen, kompressiblen, reibungsbehafteten, stationären Unter- und Überschallströmungen mit Verdichtungsstößen auf der Basis von Stromlinien ermöglicht. Durch die quasi-1D Formulierung der Erhaltungsgleichungen entlang der Stromlinien erlaubt es bereits mit wenigen Stromlinien die effiziente Berechnung von Startlösungen für komplexe, konvektions-dominierte Strömungen. Zum Anderen wird mit steigender Stromliniendichte eine Genauigkeit erreicht, die vergleichbar mit der kommerziell eingesetzter Navier-Stokes Verfahren ist.

Jede Stromlinie wird als Teil einer Stromröhre betrachtet, die abschnittsweise mit jeweils lokal benachbarten Stromlinien-Segmenten gebildet werden. Die Stromlinienform wird so bestimmt, dass der Massenstrom in diesen Stromröhren-Segmenten konstant gehalten wird. Die thermodynamischen Zustandsgrößen sind durch die Randbedingungen und den Querschnitt der Stromröhren-Segmente eindeutig bestimmt. Der Einfluss der Viskosität wird über Quellterme für Totaldruck und -temperatur modelliert. Auch Strömungsphänomene wie Rezirkulationen, Ablösung und Wiederanlegen der Strömung können behandelt werden.

Die räumliche Diskretisierung ist über die Stromlinien gegeben. Darüber hinaus ist kein Rechenetz erforderlich. Nur die Ränder des Rechengebiets müssen in diskretisierter Form für die Anwendung der Randbedingungen vorliegen.

Verdichtungsstöße werden diskret behandelt und die Zustandsänderung über den Stoß analytisch mit Hilfe der Rankine-Hugoniot Gleichungen bestimmt. Die Form von schiefen Verdichtungsstößen ergibt sich direkt aus der erforderlichen Umlenkung der Stromlinien. Im Fall von senkrechten bzw. starken Verdichtungsstößen werden Stoßform und -abstand iterativ so bestimmt, dass der analytisch berechnete Druck hinter dem Stoß dem entspricht, der an diesem Ort aufgrund der Stromlinienform und der Abstände zu Nachbarstromlinien vorliegt.

Die Anpassung der räumlichen Diskretisierungsgenauigkeit der Stromlinien kann automatisiert erfolgen, beispielsweise gesteuert durch Gradienten wichtiger thermodynamischer Größen oder der geometrischen Krümmung der Stromlinien.

In der hier verwendeten Version des Stromlinien-Verfahrens ist die Berechnung zweidimensionaler, kompressibler und reibungsbehafteter Unterschall-Strömungen möglich und anhand mehrerer Beispiele validiert. Die Algorithmen für eine Erweiterung des Anwendungsbereichs auf dreidimensionale sowie Überschall-Strömungen werden detailliert beschrieben.

Abstract

A method is presented which allows the analysis of two- and three-dimensional, compressible, viscous, subsonic and supersonic flows with shocks on the basis of streamlines. On the one hand, initial solutions for convection-dominated complex flows can be computed efficiently with only a few streamlines. On the other hand, an accuracy comparable to commercially used Finite-Volume Navier-Stokes codes is achieved with increasing streamline density.

Each streamline is considered to be part of a streamtube, which is formed in sections with adjacent streamlines. The streamline shape is adapted such that the mass flow is kept constant in streamtube segments. Thermodynamic quantities are uniquely determined by the boundary conditions and the cross-section of the streamtube segments. The influence of viscosity is modeled through source terms for total pressure and total temperature.

The computational domain is discretized only by streamlines. No mesh is required beyond that. Only discretized boundaries are needed for the application of the boundary conditions.

Shocks are treated discretely and the change of flow properties across the shock is determined analytically by the Rankine-Hugoniot equations. The shape of oblique shocks is given by the deflection of streamlines. In the case of strong and normal shocks, shape and shock-standoff distance is iteratively adapted so that the analytically computed pressure behind the shock corresponds to what results from streamline shape and distance to adjacent streamlines in the subsonic region behind the shock.

The adjustment of the spatial discretization accuracy of streamlines can be automated, for example, determined by local gradients of thermodynamic quantities or the geometric curvature of streamlines.

The version of the streamline-method used here allows the computation of two-dimensional, compressible and viscous subsonic flows and is validated on several examples. The algorithms for the extension to three-dimensional and supersonic flows are described in detail.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Inhaltsverzeichnis | vi |
| Formelzeichen | 1 |
| 1 Einleitung | 1 |
| 1.1 Motivation | 2 |
| 1.2 Stand der Technik | 2 |
| 1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise | 6 |
| 2 Grundlagen | 8 |
| 2.1 Definitionen | 8 |
| 2.1.1 Stromlinie | 9 |
| 2.1.2 Stromröhre | 9 |
| 2.1.3 Stromfaden | 10 |
| 2.2 Thermodynamische und strömungsmechanische Grundlagen des Verfahrens . . . | 10 |
| 2.3 Modellierung viskoser Effekte | 20 |
| 2.3.1 Quellterm für den Totaldruck | 21 |
| 2.3.2 Quellterm für die Totaltemperatur | 23 |
| 2.4 Grenzschichtströmungen | 24 |
| 2.5 Fehlerabschätzung | 26 |
| 2.5.1 Modellfehler | 26 |
| 2.5.2 Rundungsfehler | 27 |
| 2.5.3 Iterationsfehler | 27 |
| 2.5.4 Diskretisierungsfehler | 27 |
| 2.6 Eigenschaften des Verfahrens | 29 |
| 2.6.1 Konsistenz | 30 |
| 2.6.2 Stabilität | 30 |
| 2.6.3 Konvergenz | 30 |
| 2.6.4 Konservativität | 31 |
| 3 Räumliche Diskretisierung | 32 |
| 3.1 Rechengebiet | 32 |
| 3.2 Stromlinien | 33 |
| 3.2.1 Geometrie | 33 |
| 3.2.2 Bestimmung der nächstgelegenen Punkte auf Nachbarstromlinien | 34 |
| 3.2.3 Krümmungskorrektur | 35 |
| 3.2.4 Aktualisierung der nächstgelegenen Punkte auf Nachbarstromlinien . . . | 38 |
| 3.2.5 Anpassung der Stromliniendichte | 38 |
| 3.2.6 Behandlung von Rezirkulation, Ablösung und Wiederanlegen | 39 |
| 3.2.7 Gespeicherte Daten | 40 |
| 3.3 Konvergenzordnung des Verfahrens | 42 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4 | Iterativer Lösungsalgorithmus | 46 |
| 4.1 | Initialisierung | 47 |
| 4.2 | Aktualisierung des statischen Drucks | 47 |
| 4.3 | Aktualisierung des Totaldrucks und der Totaltemperatur | 49 |
| 4.4 | Einschub für reibungsbehaftete Strömung | 49 |
| 4.5 | Aktualisierung der Stromlinienform | 50 |
| 5 | Randbedingungen | 52 |
| 5.1 | Kombinationen von Randbedingungen für Unterschallströmungen | 52 |
| 5.1.1 | Einströmrand: Machzahl, Temperatur - Ausströmrand: Druck | 52 |
| 5.1.2 | Einströmrand: Geschwindigkeit, Temperatur - Ausströmrand: Druck | 52 |
| 5.1.3 | Einströmrand: Totaltemperatur, Totaldruck, Strömungsrichtung - Ausströmrand: Druck | 53 |
| 5.1.4 | Einströmrand: Massenstrom, Temperatur - Ausströmrand: Druck | 53 |
| 5.2 | Kombinationen von Randbedingungen für Überschallströmungen | 53 |
| 5.2.1 | Einströmrand: Machzahl, Temperatur, Druck - Ausströmrand: Druck | 54 |
| 6 | Verifikation der Implementation | 55 |
| 6.1 | Druckanpassung - gerade Stromröhre, variabler Querschnitt | 55 |
| 6.2 | Druckanpassung - kreisförmige Stromröhre, konstanter Querschnitt | 60 |
| 6.3 | Anpassung von Druck und Stromlinienform - gekrümmte Stromröhre, variabler Querschnitt | 67 |
| 6.4 | Druckverlust einer laminaren Kanalströmung | 70 |
| 7 | Validierung | 72 |
| 7.1 | Referenzsoftware - STAR-CCM+ | 72 |
| 7.1.1 | Erhaltungsgleichungen | 73 |
| 7.1.2 | Validierungsfälle | 74 |
| 7.2 | Interne Strömung | 75 |
| 7.2.1 | Schwach kompressible Kanalströmung | 75 |
| 7.2.2 | Stark kompressible Kanalströmung | 88 |
| 7.3 | Externe Strömung | 100 |
| 7.3.1 | Kompressible Profilströmung - NACA 0012 | 100 |
| 7.4 | Reibungsbehaftete Strömung | 116 |
| 7.4.1 | Ebene Poiseuille-Stömung | 116 |
| 7.4.2 | Blasius-Grenzschicht | 119 |
| 8 | Erweiterungen | 127 |
| 8.1 | Überschallströmungen | 128 |
| 8.1.1 | Grundlagen | 128 |
| 8.1.2 | Initialisierung des Strömungsfeldes | 134 |
| 8.1.3 | Randbedingungen | 134 |
| 8.1.4 | Bestimmung der relevanten Punkte auf Nachbarstromlinien | 135 |
| 8.1.5 | Aktualisierung des statischen Drucks | 136 |
| 8.1.6 | Adaption von Stromlinienform im stoßfreien Überschallgebiet | 136 |
| 8.1.7 | Erkennen eines Stoßes | 136 |
| 8.1.8 | Anpassung der Stoßform und des Stoßabstands | 137 |
| 8.2 | Dreidimensionale Strömungen | 139 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 8.3 | Parallelisierung | 141 |
| 8.3.1 | Aktualisierung des statischen Drucks | 142 |
| 8.3.2 | Aktualisierung des Totaldrucks und der Totaltemperatur | 142 |
| 8.3.3 | Aktualisierung der Stromlinienform | 142 |
| 8.3.4 | Zusammenfassung und Bewertung | 143 |
| 9 | Abgrenzung gegenüber ähnlichen Verfahren bzw. Verfahren mit ähnlichem Anwendungsbereich | 144 |
| 9.1 | Potentialströmungs-Verfahren | 144 |
| 9.1.1 | Inkompressible Strömungen | 145 |
| 9.1.2 | Kompressible Strömungen | 147 |
| 9.2 | Charakteristiken-Verfahren | 151 |
| 9.3 | Navier-Stokes Verfahren | 152 |
| 9.4 | Stromlinien-Krümmungsverfahren für Turbomaschinen | 153 |
| 10 | Zusammenfassung und Ausblick | 155 |
| | Literaturverzeichnis | 160 |
| 11 | Anhang | 161 |
| 11.1 | Tabellierte Lösung der Blasiusgleichung | 161 |

Formelzeichen

Lateinische Symbole

| Zeichen | Bedeutung | Einheit |
|--------------|--|--------------------------------|
| A | Querschnittsfläche | m^2 |
| \mathbf{a} | Normalenvektor der Oberfläche | m |
| a | Oberfläche | m^2 |
| c | Geschwindigkeit | $m \cdot s^{-1}$ |
| c | Krümmung | m^{-1} |
| c | Schallgeschwindigkeit | $m \cdot s^{-1}$ |
| c_m | Mittlere Geschwindigkeit | $m \cdot s^{-1}$ |
| c_{max} | Maximale Geschwindigkeit | $m \cdot s^{-1}$ |
| c_p | Spezifische Wärmekapazität bei konst. Druck | $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ |
| c_v | Spezifische Wärmekapazität bei konst. Volumen | $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ |
| d | Abstand eines Kreispunktes von der Sekante | m |
| E | Spezifische totale Energie | $J \cdot kg^{-1}$ |
| e | Spezifische Energie | $J \cdot kg^{-1}$ |
| F | Kraft | N |
| F_p | Druckkraft | N |
| F_τ | Scherkraft | N |
| \mathbf{f} | Volumenkraft-Vektor | N |
| f | Baryzentrische Koordinate entlang einer Stromlinie | – |
| f | Stromfunktion der Prandtl'schen Grenzschichtgl. | – |
| f | Skalierungsfaktor | – |
| f_o | Anteil der Zellen mit oszillatorischer Konvergenz | – |
| H | Halbe Kanalhöhe | m |
| E | Spezifische Totalenthalpie | $J \cdot kg^{-1}$ |
| h | Abstand einer Sekante vom Kreismittelpunkt | m |
| h | Referenzgröße | m |
| h | Höhe des Stromkanals | m |
| h | Spezifische Enthalpie | $J \cdot kg^{-1}$ |
| h_t | Totalenthalpie | $J \cdot kg^{-1}$ |
| \mathbf{I} | Einheitstensor | – |
| i | Index | – |
| k_B | Boltzmann Konstante | $J \cdot K^{-1}$ |
| L | Länge | m |
| M | Molare Masse | $kg \cdot mol^{-1}$ |
| Ma | Machzahl | – |
| m | Masse | kg |
| \dot{m} | Massenstrom | $kg \cdot s^{-1}$ |
| N | Zellenanzahl | – |

| Zeichen | Bedeutung | Einheit |
|--------------|--|---------------------------------|
| N_A | Avogadro Konstante | mol^{-1} |
| \mathbf{n} | Richtungsvektor | m |
| n | Anzahl | — |
| n | Längenkoordinate quer zur Strömungsrichtung in einem Kanal | m |
| p | Ordnung des Diskretisierungsfehlers | — |
| p | Statischer Druck | $N \cdot m^{-2}$ |
| p_t | Totaldruck | $N \cdot m^{-2}$ |
| \mathbf{q} | Wärmestrom-Vektor | $J \cdot kg^{-1} \cdot s^{-1}$ |
| q_w | Wandwärmestrom | $J \cdot m^{-2}$ |
| R | Radius | m |
| R | Spezifische Gaskonstante | $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ |
| Re | Reynolds-Zahl | — |
| R_{uni} | Universelle Gaskonstante | $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ |
| r | Radius | m |
| r | Verhältnis zweier Referenzgrößen | — |
| S_u | Benutzerdefinierter volumenspezifischer Energie-Quellterm | $J \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$ |
| S_u | Benutzerdefinierter volumenspezifischer Massen-Quellterm | $J \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$ |
| s | Längenkoordinate einer Stromlinie | m |
| \mathbf{T} | Spannungstensor | $N \cdot m^{-2}$ |
| T | Statische Temperatur | K |
| T_t | Totaltemperatur | K |
| t | Einheitstiefe ($t = 1m$) | m |
| t | Zeit | s |
| U_∞ | Anströmgeschwindigkeit | $m \cdot s^{-1}$ |
| u | Spezifische innere Energie | $J \cdot kg^{-1}$ |
| u | Geschwindigkeits-Komponente in x-Richtung | $m \cdot s^{-1}$ |
| V | Volumen | m^3 |
| \dot{V} | Volumenstrom | $m^3 \cdot s^{-1}$ |
| \mathbf{v} | Geschwindigkeitsvektor | $m \cdot s^{-1}$ |
| \bar{v} | mittlere Strömungsgeschwindigkeit | $m \cdot s^{-1}$ |
| v | Geschwindigkeit | $m \cdot s^{-1}$ |
| v | Geschwindigkeits-Komponente in y-Richtung | $m \cdot s^{-1}$ |
| v | Spezifisches Volumen ρ^{-1} | $m^3 \cdot kg^{-1}$ |
| w | Geschwindigkeits-Komponente in z-Richtung | $m \cdot s^{-1}$ |
| x | Längenkoordinate | m |
| y | Längenkoordinate | m |

Griechische Symbole

| Zeichen | Bedeutung | Einheit |
|--------------------|--|--------------------------------|
| Φ | Geschwindigkeits-Potential | $m^2 \cdot s^{-1}$ |
| Ψ | Stromfunktion | $m^2 \cdot s^{-1}$ |
| β | Umlenkungswinkel | <i>rad</i> |
| β | Skalierungsfaktor für Kompressibilitätskorrektur | – |
| ϵ | Differenz zweier Skalarwerte ϕ | [Skalar] |
| η | Dimensionslose Variable | – |
| θ | Stoßwinkel | <i>rad</i> |
| κ | Isentropenexponent, Verhältnis der spez. Wärmen $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ | – |
| μ | Dynamische Viskosität | $Pa \cdot s$ |
| μ | Machwinkel | <i>rad</i> |
| μ_{eff} | Effektive dynamische Viskosität | $Pa \cdot s$ |
| μ_t | Turbulente Viskosität | $Pa \cdot s$ |
| ν | Prandtl-Meyer-Funktion | <i>rad</i> |
| ρ | Dichte | $kg \cdot m^{-3}$ |
| $\bar{\rho}$ | mittlere Dichte in einem Stromröhrenquerschnitt | $kg \cdot m^{-3}$ |
| $\dot{\bar{\rho}}$ | zeitl. Änderung von $\bar{\rho}$ in einem Stromröhrenquerschn. | $kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-3}$ |
| τ | Schubspannung | $N \cdot m^2$ |
| τ | Relative Gesamt-Rechenzeit | – |
| φ | Winkel | <i>rad</i> |
| ϕ | Skalarwert | [Skalar] |

Abkürzungen

| Abkürzung | Bedeutung |
|-----------|---|
| 2D | Zweidimensional |
| 3D | Dreidimensional |
| AIAA | American Institute of Aeronautics and Astronautics |
| CAE | Computer Aided Engineering |
| CFD | Computational-Fluid-Dynamics (Numerische Strömungsmechanik) |
| GCI | Grid-Convergence-Index (Netz-Konvergenz-Index) |
| NACA | National Advisory Committee for Aeronautics |
| NASA | National Aeronautics and Space Administration |
| SIMPLE | Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations |

1 Einleitung

DAS WICHTIGSTE IN KÜRZE

- Gestiegene Rechnerleistung führt nicht zu kürzeren Rechenzeiten, sondern eher zu erhöhter Komplexität von Simulationen. Deswegen ist ein effizientes Verfahren zur Berechnung von Startlösungen immer wertvoll.
- Stromlinien-Verfahren haben einige grundsätzliche Vorteile. Teilweise vereinfacht sich die Modellierung von Transportvorgängen und es können physikalische Phänomene ausgenutzt werden, wie z.B. ein konstanter Totaldruck entlang einer Stromlinie in einer isentropen Strömung.
- Gute Startlösungen erlauben die Erzeugung von „perfekten“ (in Bezug auf den räumlichen Diskretisierungsfehler) Finite-Volumen-Netzen für Navier-Stokes Verfahren.
- Bisher entwickelte Stromlinien-Verfahren haben einen eingeschränkten Anwendungsbereich.
- Ein neuer, allgemein anwendbarer Ansatz wird vorgestellt.

Sowohl die Rechenleistung heutiger Arbeitsplatzrechner, als auch die Güte und Modellierungstiefe kommerziell verfügbarer Strömungs-Simulationssoftware erlaubt die Berechnung immer komplexerer Aufgabenstellungen zur Unterstützung der Entwicklung und Optimierung von Prozessen und Produkten. Aufgrund ihrer Vielseitigkeit werden häufig dreidimensionale Navier-Stokes-Verfahren eingesetzt, die sich in vielen Bereichen als zuverlässige Werkzeuge erweisen.

Allerdings hängt die Güte der Ergebnisse der weit verbreiteten Klasse der Finite-Volumen Verfahren stark von der Qualität der räumlichen Diskretisierung ab. Gute Vernetzungs-Programme zur automatisierten Erzeugung unstrukturierter Netze für komplexe Geometrien erleichtern diese Aufgabenstellung sehr. Ein gutes Netz hängt jedoch nicht nur von geometrischen Einflussgrößen ab, sondern auch von der Strömungstopologie. Die Zellgröße sollte in etwa umgekehrt proportional zu Gradienten wichtiger Strömungsgrößen sein, der Diskretisierungsfehler möglichst homogen verteilt und die Zellgröße effizient in Bezug auf das gewünschte Ergebnis angepasst sein. Einige Programme bieten deswegen die Möglichkeit, das Netz abhängig von benutzerdefinierten Steuergößen automatisiert zu verfeinern. Daraus ergibt sich, dass es auch heutzutage immer noch entweder lange Rechenzeiten oder viel Erfahrung erfordert, ein gutes Rechennetz zu erzeugen.

1.1 Motivation

Auch wenn Stromlinien-Verfahren in der heutigen Simulationspraxis nur ein Nischendasein fristen, haben sie doch einige grundlegende Vorzüge, die eine nähere Betrachtung rechtfertigen. Einige physikalische Transportmechanismen gehorchen unterschiedlichen Gesetzmäßigkeiten in und quer zur Strömungsrichtung. Ein Beispiel dafür ist der Totaldruck. In einer isentropen Strömung ist er konstant entlang von Stromlinien. Es gibt aber keine Gesetzmäßigkeit, die die Änderung dieser Größe quer zur Strömungsrichtung beschreibt. Aus diesem Grund taucht der Totaldruck in der mathematischen Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen nicht als eigenständige Erhaltungsgröße auf. Sein Wert kann z.B. zur Überprüfung einer Lösung nachträglich ermittelt werden. Für ein Stromlinien-Verfahren hingegen kann der Totaldruck als sehr einfach zu behandelnde Erhaltungsgröße dienen. Da die Anzahl der erforderlichen Gleichungen zur Beschreibung eines physikalischen Prozesses gleich der Anzahl der unabhängigen Variablen ist, vereinfacht die Möglichkeit, den konstanten Totaldruck als eine der Erhaltungsgrößen verwenden zu können, die mathematische Komplexität der Modellierung erheblich. Das birgt das Potential einer Rechenzeitverkürzung aufgrund einer höheren Effizienz des Lösungsalgorithmus.

Ein weiterer Vorteil von stromlinienbasierten Verfahren ist, dass sie kein Rechennetz benötigen, da die dynamisch erzeugten und angepassten Stromlinien selbst die räumliche Diskretisierung darstellen.

Auch in der Vergangenheit haben unter anderem diese Vorteile dazu geführt, dass für bestimmte Anwendungszwecke sehr effiziente stromlinienbasierte Methoden entwickelt wurden. Eine Hochzeit der Stromlinien-Verfahren dürfte dabei die frühe Phase des Computerzeitalters gewesen sein, in der die Simulation komplexer Strömungen und Prozesse aufgrund der geringen Rechenleistung unmöglich war. Die meisten Ansätze basieren jedoch auf einer Potentialgleichung zur Beschreibung der Strömung, was die Anwendung auf isentrope, reibungsfreie, drehungsfreie, adiabate Strömungen ohne starke Verdichtungsstöße, Ablösungen und Rezirkulationen beschränkt.

Ziel des hier vorgestellten Verfahrens ist es daher, die grundsätzlichen Vorteile eines stromlinienbasierten Ansatzes für die Simulation allgemeiner Strömungen anwendbar zu machen.

In der Praxis kann eine kombinierte Verwendung eines Navier-Stokes Programms und dem Stromlinien-Verfahren zu einer deutlichen Reduktion der gesamten Bearbeitungszeit führen. Die Stärke des Stromlinien-Verfahrens ist es, schnell und effizient eine Startlösung zu erzeugen, was dazu beiträgt, die Hauptschwäche des Navier-Stokes Ansatzes auszugleichen. Diese besteht darin, dass die Lösung sehr von der Güte der räumlichen Diskretisierung abhängt, die wiederum von der Lösung abhängt. Liegt jedoch bereits eine Lösung vor, kann auf dieser Basis automatisiert ein Finite-Volumen-Netz mit geringem Diskretisierungsfehler erzeugt werden. Darüber hinaus verkürzt eine gute Startlösung die gesamte Bearbeitungszeit der Simulationsaufgabe, deren Ergebnis aufgrund des „guten“ Netzes auch noch zuverlässiger und genauer ist.

1.2 Stand der Technik

Seit den ersten Anfängen der numerischen Strömungs-Simulation in den 1960er Jahren wurde versucht, die Erhaltungsgleichungen problemangepasst umzuformulieren oder Modellierungen zu vereinfachen, so dass sie entweder mit der damals verfügbaren Rechenleistung überhaupt lösbar oder komplexere Probleme berechenbar waren.

Zu diesem Zweck wird häufig auf die Potential-Gleichung zurückgegriffen. Sie entspricht der Euler-Gleichung für reibungsfreie, isentrope ($\nabla s = 0$) und isoenergetische ($\nabla h_t = 0$) Strömungen. Ist eine Strömung zusätzlich drehungsfrei ($\text{rot } \vec{v} = 0$), wird die Massenerhaltungs-Gleichung von den Impulserhaltungs-Gleichungen entkoppelt. Das erlaubt die Formulierung für Geschwindigkeitspotentiale (siehe z.B. [1, S. 268 ff]). Die Anzahl der unabhängigen Variablen wird von fünf (Masse, Impuls in x-, y- und z-Richtung und Energie) auf zwei (das Geschwindigkeits-Potential Φ und ein weiterer Skalar φ , z.B. die Machzahl) reduziert. Weitere algebraische Gleichungen erlauben die Berechnung der abhängigen thermodynamischen Größen. Für inkompressible Strömungen wird die Energiegleichung mathematisch von der Massenerhaltungs- und den Impulserhaltungs-Gleichungen entkoppelt. In diesem Fall ist eine einzige Potential-Gleichung ausreichend, um die Strömung zu beschreiben, die Laplace-Gleichung (siehe z.B. [1, S. 274]). Zusammen mit einer Form der Energieerhaltungs-Gleichung, für reibungsfreie stationäre Strömungen in einem Potentialfeld (z.B. einem Gravitationsfeld), üblicherweise der Bernoulli'schen Erhaltungsgleichung der mechanischen Energie (siehe z.B. [2, S. 82 ff]), lässt sich aus dem Geschwindigkeitsfeld das Druckfeld bestimmen.

Eine erste Anwendung der Potential-Gleichung ist die Skelett-Theorie nach Birnbaum [3], Ackermann und Glauert ([4], [5]) zum Entwurf und der Nachrechnung von zweidimensionalen Flügelprofilen, die in Kapitel 9.1 genauer beschrieben ist.

Für die Berechnung stationärer Strömungen um dreidimensionale Körper entwickelten Hess und Smith [6] ein Panelverfahren, bei dem die Körperoberfläche durch drei- oder viereckige Paneele diskretisiert wird. Deren Quellverteilung wird so bestimmt, dass die Neumann-Bedingung (die Strömungsrichtung muss parallel zur Oberfläche sein) in den Mittelpunkten aller Paneele erfüllt ist. Als Ergebnis erhält man das Geschwindigkeits-Potential, das die Bestimmung von Geschwindigkeit und Druck im gesamten Rechengebiet erlaubt. Außer im (Vor-)Entwurf von Flugzeugen wird dieser Ansatz auch im Automobilbau [7] sowie im Schiffbau ([8], [9]) nach wie vor verwendet.

Die Quellstärke (oder auch die Wirbelstärke) auf jedem Panel hängt jedoch von der jedes anderen Panels ab. Das kann man sich anschaulich vorstellen, da jede Quelle die Strömungsrichtung an jedem Ort im Rechengebiet beeinflusst. Die Strömungsrichtung muss aber wiederum parallel zu jedem Panel verlaufen. Das Ergebnis ist eine vollbesetzte Matrix, die recht aufwändig zu lösen ist.

Eine andere Möglichkeit zur Lösung der Potential-Gleichung besteht darin, sie in Stromlinien-Koordinaten (2D: x, Stromfunktion Ψ) zu formulieren, die von Mises [10] einführte und diese dann diskret für die Zellen eines, an den Stromlinien ausgerichteten Netzes, löst. Durch die räumliche Diskretisierung ist das Geschwindigkeits-Potential nur noch von den Nachbarzellen abhängig und die Matrix wird zwar größer, bekommt aber eine tridiagonale Form, die wesentlich einfacher zu lösen ist. Darüber hinaus vereinfacht die Ausrichtung des Netzes entlang der Stromlinien die Formulierung der Randbedingungen, da alle Wände Stromlinien sind. Martin [11] leitet die Erhaltungsgleichungen eines viskosen, inkompressiblen Fluids für eine stationäre, zweidimensionale Strömung ohne externe Kräfte in Stromlinien-Koordinaten her.

Greywall [12] wendete diesen Ansatz auf stationäre, inkompressible 2D Strömungen an.

Barron und Naeem [13], sowie An und Barron [14] beschreiben ein Verfahren, mit dem die vollständigen Potentialgleichungen in Stromlinien-Koordinaten für stationäre, isentrope, drehungsfreie, zweidimensionale, kompressible transonische Strömungen um symmetrische Profile ohne Anstellwinkel gelöst werden. Starke Verdichtungsstöße werden mit Hilfe des Stoß-Punkt-Operators (*shock point operator* - SPO) behandelt, wobei die Änderung über den Stoß mit Hilfe

der Rankine-Hugoniot Gleichungen bestimmt werden.

An et al. [15] beschreiben die Formulierung für instationäre 1D Strömungen in Stromlinien-Koordinaten. Anwendungsmöglichkeiten sind Berechnungen von Störungsausbreitungen, Expansions- und Kompressionswellen, Wellenreflexion und -interaktion, Stoßrohr-Strömungen, Düsenströmungen, usw.

Boynton und Thomson [16] berechnen mit einer Methode, die auf den Erhaltungsgleichungen entlang von Stromröhren beruht, mehrere stationäre, kompressible, reibungsbehaftete 2D Überschall-Strömungen (unterexpandierte Abgasstrahlen). Verdichtungsstöße werden diskret behandelt. Die Stromröhren werden segmentweise in Strömungsrichtung angefügt. Diese Vorgehensweise verhindert die Anwendung auf Unterschall-Strömungen, da sie nur Informationstransport in Strömungsrichtung ermöglicht. Abgesehen von Einschränkungen der Schrittweite aus Stabilitätsgründen besteht der Hauptnachteil dieses Ansatzes darin, dass es in dreidimensionalen Strömungen oder bei Ablöse- und Anlegelinien nicht immer möglich ist, eine durchgängige Ebene senkrecht zu den Stromlinien zu konstruieren. Beide genannten Probleme kann der Autor dieser Arbeit durch vorangegangene Versuche mit einem ähnlichen Ansatz bestätigen.

Auch Latypov [17] verwendete die Euler-Gleichungen in Stromlinien-Koordinaten in einem orthogonalen System der Stromfunktion und der dazu orthogonalen Geschwindigkeits-Potentialfunktion zur Berechnung einer kompressiblen, reibungsfreien 2D-Strömung. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass die Koordinatentransformation auch möglich ist, wenn die Strömung senkrecht zur x-Achse verläuft.

Für inverse Aufgabenstellungen, bei denen z.B. die korrekte Geometrie für einen vorgegebenen Druck- oder Geschwindigkeitsverlauf entlang einer Kanalwand gefunden werden soll, sind u.a. von Stanitz [18] und Zannetti [19] Methoden entwickelt worden, die für kompressible, reibungsfreie zweidimensionale Strömungen auch mit Verdichtungsstößen geeignet sind. Allerdings ist die Formulierung speziell an die typischen Randbedingungen des inversen Problems angepasst.

Eine Methode, die der hier Vorgestellten grundsätzlich ähnlich ist, beschreiben Hamala et al. [20]. Sie ist auf stationäre, reibungsbehaftete, zweidimensionale Unter- und Überschall-Strömungen anwendbar. Das Netz wird in jeder Iteration der neuen Stromlinienform entsprechend ausgerichtet. Die Erhaltungsgleichungen werden in einer quasi-1D Formulierung entlang der Stromlinien verwendet, die auch einen Informationstransport stromaufwärts erlauben. Die Abhängigkeit von einem, parallel zum Geschwindigkeitsvektor ausgerichteten Netz, schränkt die Anwendbarkeit jedoch insbesondere bei dreidimensionalen Strömungen deutlich ein. Die Intention der Autoren ist jedoch gerade, dass die Stromlinien-Formulierung die automatische Erzeugung und Anpassung des Netzes ermöglicht. Der Fokus liegt dabei auf inversen Aufgabenstellungen, bei der die korrekte Geometrie z.B. für einen vorgegebenen Druckverlauf entlang einer Kanalwand gefunden werden soll. Das trifft jedoch nur auf stetige Konturänderungen ohne Ablösungen zu.

Yang et al. [21] stellen eine Variante für Realgas-Zustandsgleichungen vor.

Für eine näherungsweise Berechnung dreidimensionaler Strömungen zeigte Giese [22], dass stationäre, kompressible, reibungsfreie, dreidimensionale und drehungsbehaftete Strömungen mit zwei Sätzen, senkrecht aufeinander stehenden Stromflächen (konstante Werte der Stromfunktionen) approximiert werden können. Die Schnittlinien beider Flächen stellen die Stromlinien dar.

Wu [23] wendete diese Methode als Erster auf Strömungen zwischen den Schaufeln von Turbomaschinen an. Da sie bis heute zu den Standard-Verfahren im Turbomaschinen-Bereich zählt,

wird sie in Kapitel 9.4 etwas detaillierter mit dem hier beschriebenen Stromlinien-Verfahren verglichen.

Yih [24] erweiterte den Ansatz auf instationäre Strömungen.

Auch Huang und Dulikravich [25] arbeiteten an einem vergleichbaren Verfahren, dass aber auf drehungsfreie Potentialströmungen eines barotropen Fluids (der Druck ist nur eine Funktion der Dichte) beschränkt ist.

In einem Kommentar in einer späteren Veröffentlichung nennt Dulikravich [26] die Nachteile aller auf Potential-Gleichungen und Stromlinien-Koordinaten basierenden Verfahren: sie sind generell nicht für reibungsbehaftete Strömungen anwendbar (Viskosität verursacht Rotation, damit ist eine Hauptannahme von Potentialströmungen verletzt), die Jakobi-Determinante wird singular, wenn die Stromlinie senkrecht zur x-Achse verläuft und Stromlinien dürfen nicht mehrmals dieselbe x-Koordinate haben (multivaluedness), was Rezirkulationen ausschließt.

Khosla und Abdallah [27] beschreiben eine Form, bei der auf den, zueinander senkrecht verlaufenden Ebenen, die Euler-Gleichungen ohne weitere Einschränkungen in effizienter Weise in Stromlinien-Koordinaten gelöst werden.

Pearson [28] stellt eine Methode zur Berechnung stationärer, isentroper, reibungsfreier, dreidimensionaler Unter- und Überschall-Strömungen vor. Auch dieser Ansatz ist dem hier Vorgestellten ähnlich. Die Erhaltungsgleichungen entlang der Stromlinien sind so formuliert, dass deren Lösung zu iterativ angepassten Stromlinien-Formen führt. Im Gegensatz dazu ist die, in dieser Arbeit beschriebenen Methode, unabhängig von einer Koordinatenrichtung formuliert, die Erhaltungsgleichungen sind für eine effiziente Lösung etwas anders kombiniert und die Berechnung viskoser Strömungen ist möglich.

Kansa [29] beschreibt übersichtlich Euler- und Navier-Stokes Gleichungen, die lokal parallel zum Geschwindigkeitsvektor gedreht sind. Wie bereits mehrfach erwähnt, vereinfacht sich die Berechnung dadurch erheblich und numerische Fehler, aufgrund von ungünstiger Ausrichtung der Strömung zum Netz, werden deutlich reduziert. Aber auch Kansa zweifelt daran, ob es für allgemeine, dreidimensionale Strömungen möglich ist, das Netz überall entlang von Stromlinien auszurichten und sieht einen Einsatz eher mit netzlosen Verfahren.

Die Vorteile einer Formulierung in Stromlinien-Koordinaten bei der Berechnung stationärer Strömungen nicht-Newton'scher (Bingham-) Fluide beschreibt Chung et al. [30].

Ein anderen Ansatz zur Vereinfachung der Berechnung der vollständigen Navier-Stokes Gleichungen verfolgen Patankar und Spalding [31], die eine Form der Navier-Stokes Gleichungen aufstellen, die als Parabolisierte oder Reduzierte Navier-Stokes Gleichungen (PNS/RNS) bezeichnet werden. Sie erlauben eine vereinfachte Strömungs-Berechnung für den Fall, dass (a) eine ausgezeichnete Strömungsrichtung vorliegt, also keine Rezirkulationen, (b) die Diffusion von Impuls, Masse, Wärme, etc. in dieser Richtung vernachlässigbar sind und (c) das stromabwärtige Druckfeld nur einen sehr geringen Einfluss auf die stromaufwärtige Strömung hat. Diese Annahmen treffen z.B. auf Grenzschichten zu. Grundsätzlich sind die Navier-Stokes Gleichungen elliptischer Natur, d.h. der Wert einer Feldgröße wird durch das gesamte übrige Feld beeinflusst. Hauptsächlich der Druckgradient in Strömungsrichtung sorgt für den Informations-transport entgegen dem Geschwindigkeitsvektor und führt zu der elliptischen Natur der Gleichungen. Durch die Entkopplung der Druckgradienten in Längs- und Querrichtung wird das System parabolisch. Das wiederum erlaubt die effiziente Lösung der vereinfachten Gleichungen mit Schritt-Techniken in Strömungsrichtung.

Vignerot et al. [32] verwenden die PNS Gleichungen für Berechnung des Strömungsfeldes eines Delta-Flügels mit hohem Anstellwinkel im Überschall mit Unterschall-Vorderkantenströmung.

Kim et al. [33] erweitern den PNS Ansatz, indem sie ein Stromlinien-Koordinatensystem verwenden. Damit berechnen sie das Strömungsfeld hinter einem abgelösten, gekrümmten Stoß und einem stumpfen Körper mit hohem Anstellwinkel im Hyperschall. Besonders bei hohen Anstellwinkeln weicht die Strömungsrichtung oft erheblich von der Hauptrichtung, eines am Körper ausgerichteten Rechennetzes, ab. PNS-Verfahren lösen die Gleichungen aber in einer speziellen Richtung entlang des Netzes. Deswegen wird dieses nach einer Aktualisierung des Geschwindigkeitsfeldes jeweils wieder parallel und senkrecht zum lokalen Geschwindigkeitsvektor ausgerichtet.

Eine sehr umfangreiche Übersicht über PNS/RNS Ansätze stammt von Rubin und Tannehill [34].

Obwohl die Berechnung von Turbulenz nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, soll dennoch eine interessante Entwicklung von Wang [35] erwähnt werden, der aus der Lösung der (nicht vereinfachten) Navier-Stokes Gleichungen Stromröhren berechnet, entlang derer er vielversprechende Ergebnisse in Bezug auf die quantitative Beschreibung von Turbulenz erzielt. Dieser Ansatz ließe sich ideal mit dem hier vorgestellten Stromlinien-Verfahren kombinieren.

Der Vollständigkeit halber soll auch ein weiteres großes Anwendungsgebiet von Stromlinien-Verfahren genannt werden, nämlich die Reservoir-Simulation. Für die Strömung in porösen Medien (z.B. Grundwasser oder Rohöl in Gesteinen) wird schon lange eine spezielle Variante von Stromlinien-Methoden verwendet. Vereinfacht gesagt werden dabei die Druck- und Geschwindigkeitsfelder auf einem (Euler'schen) Netz berechnet, welche dann konstant gehalten werden und mit einer Anzahl von 1D Simulationen entlang von Stromlinien die Konzentrationen der beteiligten Spezies (z.B. von Salzwasser oder einem Schadstoff in einem Aquifer) aktualisiert werden. Dabei wird das „time of flight“ Konzept angewendet, dass die Zeit wiedergibt, die ein neutrales Partikel (Tracer) gebraucht hat, um an die jeweilige Stelle der Stromlinie zu gelangen. Eine Übersicht über Methoden aus diesem Gebiet ist in [36] zu finden.

1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise

Der Übersicht über den Stand der Technik sind folgende Haupteinschränkungen bisher entwickelter Methoden zu entnehmen:

- auf einer Potential-Gleichung basierende Ansätze haben den Nachteil, dass keine drehungsbehafteten Strömungen berechnet werden können. Das schließt viskose Strömungen aus, ebenso wie gekrümmte Verdichtungsstöße. Desweiteren können ohne zusätzliche Modelle allgemein keine starken Stöße behandelt werden.
- alle Verfahren, bei denen das Rechennetz so angepasst wird, dass es parallel zu den Stromlinien ausgerichtet ist, um die Anwendung der Erhaltungsgleichungen in vereinfachter Form zu erlauben, sind nur eingeschränkt auf komplexe, dreidimensionale Strömungstopologien anwendbar.
- Methoden, die auf den parabolisierten Navier-Stokes Gleichungen basieren, sind ebenfalls nicht für allgemeine, dreidimensionale Strömungen geeignet, da sie physikalisch relevante Mechanismen der Störungsausbreitung nicht abbilden.

Das Ziel dieser Arbeit ist daher der Versuch, eine Methode zu entwickeln, die die Vorteile der Reduktion der Erhaltungsgleichungen entlang von Stromlinien auf einfache, algebraische Gleichungen ausnutzen kann und trotzdem auf allgemeine, kompressible, dreidimensionale, drehungsweil reibungsbehaftete, Unter- und Überschallströmungen anwendbar ist.

Anhand von mehreren Validierungsrechnungen wird demonstriert, dass mit dem vorgestellten Ansatz Ergebnisse ähnlicher Qualität wie mit Navier-Stokes Verfahren erzielt werden, jedoch mit teilweise deutlich kürzeren Rechenzeiten. Darüber hinaus wird kein Rechennetz benötigt. Der räumliche Diskretisierungsfehler kann durch Anpassung der Stromliniendichte und des Abstandes von Stromlinien-Stützpunkten automatisiert an einen vorgegebenen Grenzwert angepasst werden. Das Verfahren ist konservativ. Da bereits mit wenigen Stromlinien in kurzer Zeit eine qualitativ gute Lösung berechnet wird, ist es gut geeignet zur Erzeugung von Startlösungen.

Nach einem kurzen Gesamtüberblick in der Kurzbeschreibung des Themas, werden im Abschnitt 2 alle verwendeten thermodynamischen und strömungsmechanischen Grundlagen erläutert. Die Anforderungen an die Diskretisierung der Stromlinien sind in Kapitel 3 geschildert. Eine detaillierte Beschreibung des iterativen Lösungsalgorithmus zur Anpassung des Druckfeldes, der Einhaltung der Randbedingungen und der Stromlinienform folgt in Kapitel 4. Die Realisierung verschiedener Randbedingungskombinationen für Unter- und Überschallströmungen ist in Kapitel 5 diskutiert. Nachdem es sich um ein komplett neu entwickeltes Verfahren handelt, wird die Implementation der einzelnen Komponenten des Löser in Kapitel 6 separat verifiziert. Zum Vergleich der folgenden Validierungsrechnungen wird das kommerzielle CFD-Programm STAR-CCM+ der Firma CD-adapco herangezogen. Die Funktionsweise dieses Navier-Stokes-Verfahrens ist kurz in Kapitel 7 beschrieben. Anschließend folgt in diesem Abschnitt ein detaillierter Vergleich der Ergebnisse des hier vorgestellten Stromlinien-Verfahrens und der kommerziellen Software an Beispielen stark und schwach kompressibler, interner Kanalströmungen sowie einer kompressiblen, externen Profilmströmung und einer ebenen Plattengrenzschicht. In der aktuellen Implementation ist der Funktionsumfang des Stromlinien-Verfahrens noch auf zweidimensionale Unterschallströmungen begrenzt. Mögliche Erweiterungen auf dreidimensionale und Überschallströmungen, sowie Aspekte der Parallelisierung, werden in Kapitel 8 behandelt. In Kapitel 9 werden kurz ähnliche Verfahren, bzw. solche mit vergleichbarem Anwendungsbereich, vorgestellt und die Unterschiede zu der hier beschriebenen Methode diskutiert.

2 Grundlagen

DAS WICHTIGSTE IN KÜRZE

- Häufig verwendete Bezeichnungen werden definiert.
- Alle verwendeten thermodynamischen und strömungsmechanischen Zusammenhänge - der „Werkzeugkasten“ - werden zusammengefasst bzw. hergeleitet.
- Die Lösungsvariablen des Stromlinien-Verfahrens sind:
Statischer Druck, Totaldruck und Totaltemperatur.
- Die zentrale Gleichung des Stromlinien-Verfahrens

$$\frac{\dot{m}}{A\bar{p}_t} \sqrt{\frac{RT_t}{\kappa}} = Ma \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{-\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

ist eine gekoppelte Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichung. Sie wird mit einem Newton-Verfahren gelöst um die Machzahl entlang einer Stromröhre zu berechnen.

- Um den Massenstrom in einer Stromröhre zwischen zwei Stromlinien zu berechnen, müssen die Lösungsvariablen auf Beiden bekannt sein. Um die Konvergenz zu beschleunigen und den Datenaustausch zu minimieren, werden die Werte auf der Nachbarstromlinie nicht entlang der Stromlinie interpoliert, sondern über die radialen Gradienten der Lösungsvariablen approximiert.
- Der Einfluss der Viskosität wird durch Quellterme für den Totaldruck und die Totaltemperatur modelliert.
- Fehler numerischer Verfahren im Allgemeinen und die hier verwendete Methode zur Quantifizierung von Diskretisierungsfehlern werden beschrieben.

2.1 Definitionen

Zunächst sollen einige häufig verwendete Begriffe in ihrer hier verwendeten Bedeutung definiert werden.

2.1.1 Stromlinie

Wie in Bild 2.1 dargestellt, verläuft eine Stromlinie tangential zu den Geschwindigkeitsvektoren eines stationären Strömungsfeldes. Stromlinien können sichtbar gemacht werden, indem einem Fluid Schwebeteilchen (Tracer) zugesetzt werden und anschließend ein Foto mit einer Belichtungszeit aufgenommen wird, die so gewählt ist, dass sich die Teilchen in diesem Zeitfenster um eine kleine Strecke fortbewegen. Da die Strömung immer tangential zu Stromlinien verläuft, gibt es keinen konvektiven Massenaustausch quer zu einer Stromlinie. Der Massenstrom zwischen zwei Stromlinien (im Fall einer zweidimensionalen Strömung) ist also immer konstant. Stromlinien verlaufen, ausgenommen an Verdichtungs-Stößen, immer stetig und können sich nicht schneiden, da es in jedem Punkt einer Strömung einen eindeutigen Geschwindigkeitsvektor gibt.

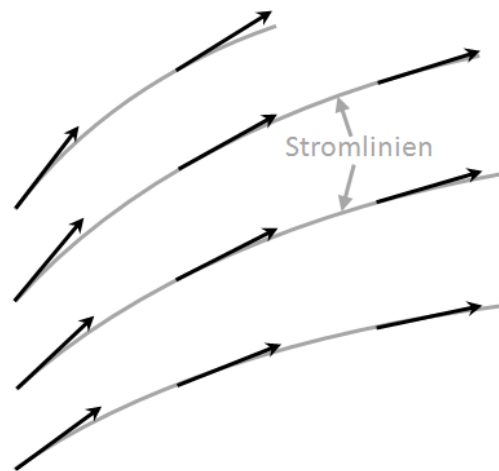


Abbildung 2.1: Stromlinie

2.1.2 Stromröhre

Die Gesamtheit aller Stromlinien, die durch eine geschlossene Kurve (bezeichnet mit K in Bild 2.2) im Raum verlaufen, bilden zusammen die Oberfläche einer Stromröhre. Da sie von undurchströmbaren Stromlinien begrenzt wird, ist der Massenstrom in einer Stromröhre immer konstant.

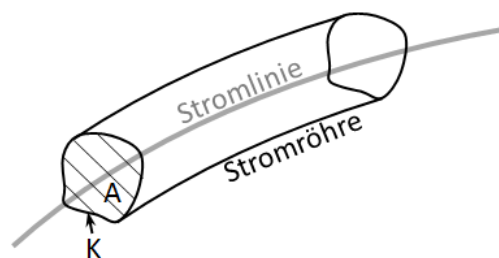


Abbildung 2.2: Stromröhre

2.1.3 Stromfaden

Ein Stromfaden ist eine Stromröhre mit so kleinem Querschnitt, dass alle Strömungsgrößen als konstant über den Querschnitt betrachtet werden können.

Das hier beschriebene Verfahren geht jedoch von linearen Verläufen der Zustandsgrößen über den Querschnitt aus. Stromröhren werden also nicht als Stromfäden betrachtet.

2.2 Thermodynamische und strömungsmechanische Grundlagen des Verfahrens

Thermische Zustandsgleichung idealer Gase

Die thermische Zustandsgleichung idealer Gase beschreibt das Verhältnis zwischen dem Druck p , der Temperatur T und der Dichte ρ in Abhängigkeit der spezifischen Gaskonstante $R = \frac{R_{uni}}{M}$, die mit der universellen Gaskonstante $R_{uni} = N_A k_B = 8314,46 \frac{J}{kmolK}$, dem Produkt der Avogadro-Konstante $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$ und der Boltzmann-Konstante $k_B = 8,617 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ und der molaren Masse M des Gases gebildet wird [37, S. 2]

$$p = \rho RT. \quad (2.1)$$

Ein Gas, das diese thermische Zustandsgleichung erfüllt, wird thermisch ideal genannt.

Kalorische Zustandsgleichung idealer Gase

Eine kalorische Zustandsgleichung beschreibt die Abhängigkeit der Zustandsgröße innerer Energie u in Abhängigkeit der Temperatur und des Volumens (bzw. des spezifischen Volumens $v = \frac{1}{\rho}$), nach [37, S. 2] gilt

$$u = u(T, v). \quad (2.2)$$

Mit Hilfe des ersten Hauptsatzes kann man zeigen (siehe z.B. [37, S. 2]), dass

$$du = c_v dT + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv. \quad (2.3)$$

Dabei steht c_v für die spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen (siehe [37, S. 3])

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v, \quad (2.4)$$

also der partiellen Ableitung der spezifischen inneren Energie u nach der Temperatur bei konstantem Volumen.

Mit c_p ist die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck bezeichnet (siehe [37, S. 3])

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad (2.5)$$

also der partielle Ableitung der spezifischen Enthalpie h nach der Temperatur bei konstantem Druck.

Wenn die spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck c_p und bei konstantem Volumen c_v konstant sind, bezeichnet man das Gas als kalorisch ideal. Dann lässt sich die kalorische Zustandsgleichung Gl. 2.3 nach [37, S. 2] auch schreiben als

$$du = c_v dT. \quad (2.6)$$

Die Differenz zwischen den spezifischen Wärmen ist (siehe [37, S. 3])

$$c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -T \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T}. \quad (2.7)$$

Für ein thermisch ideales Gas gilt also (siehe [37, S. 3])

$$c_p - c_v = R. \quad (2.8)$$

Der Isentropenexponent κ ist definiert als das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten (siehe [37, S. 3])

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.9)$$

Kombiniert man die Gleichungen 2.8 und 2.9, erhält man

$$c_p - \frac{c_p}{\kappa} = R, \quad (2.10)$$

$$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}. \quad (2.11)$$

Schallgeschwindigkeit

Die Schallgeschwindigkeit c eines thermisch und kalorisch idealen Gases ist gegeben durch (siehe [37, S. 4])

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} = \sqrt{\kappa \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T}. \quad (2.12)$$

Machzahl

Die Machzahl Ma ist das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit und der Schallgeschwindigkeit (siehe [37, S. 4])

$$Ma = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{\kappa R T}}. \quad (2.13)$$

Isentrope Zustandsänderung

Ein Prozess, bei dem über die Systemgrenzen keine Masse oder Energie zugeführt wird, ist die Beziehung zwischen statischer Temperatur T und Totaltemperatur T_t nach [37, S. 4] gegeben durch

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2. \quad (2.14)$$

Ist der Prozess nicht nur adiabat, sondern auch isentrop, gilt nach [37, S. 4] darüber hinaus für das Verhältnis zwischen Totaldruck p_t und statischem Druck p

$$\frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (2.15)$$

Der Bezug auf totale Zustandsgrößen hat im Vergleich zu den statischen Größen den Vorteil, dass sie Erhaltungsgrößen sind. Der Totaldruck beispielsweise ändert sich nur, wenn mechanische Arbeit über die Systemgrenzen zu- oder abgeführt wird oder dissipative Prozesse für eine Umwandlung (kinetischer oder potentieller) mechanischer Energie sorgen (z.B. durch Viskosität). Eine Änderung der Totaltemperatur liegt nur dann vor, wenn dem System z.B. über Wärmeleitung, Strahlung oder chemische Prozesse Energie zu- oder abgeführt wird oder ebenfalls bei dissipativen Prozessen. In einer reibungsfreien Unter- oder Überschallströmung ist sie jedoch im gesamten Strömungsgebiet konstant.

Lösungsvariablen

Die primären Lösungsvariablen des Stromlinien-Verfahrens für kompressible Strömungen sind:

- Statischer Druck p ,
- Totaldruck p_t ,
- Totaltemperatur T_t .

Diese Werte werden in jedem Stützpunkt einer Stromlinie gespeichert. Alle weiteren thermodynamischen und strömungsmechanischen Größen lassen sich daraus eindeutig bestimmen:

| | | | | |
|-----|--------------|---|--|----------|
| 1.) | $Ma(p, p_t)$ | : | $\frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$ | Gl. 2.15 |
| 2.) | $T(Ma, T_t)$ | : | $\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2$ | Gl. 2.14 |
| 3.) | $\rho(p, T)$ | : | $p = \rho RT$ | Gl. 2.1 |
| 4.) | $v(Ma, T)$ | : | $v = Ma \sqrt{\kappa RT}$ | Gl. 2.13 |

Tabelle 2.1: Berechnung der abhängigen Größen aus den Lösungsvariablen.

Obwohl mit Gl. 2.15 eine Isentropenbeziehung verwendet wird, ist diese Vorgehensweise nicht eingeschränkt auf isentrope Strömungen, da sich alle Werte auf denselben Stromlinienpunkt beziehen.

Der Grund für die Wahl dieser Lösungsvariablen ist, dass die Totaltemperatur in einem Strömungsfeld nur variiert, wenn dissipative Prozesse z.B. durch die Wirkung der Viskosität, Wärmeleitung, Verdichtungsstöße oder chemische Reaktionen statt finden. Für reibungsfreie, kompressible Unter- und Überschallströmungen bleibt sie jedoch im gesamten Strömungsfeld konstant. Der Totaldruck ändert sich in einer stoßfreien Strömung nur, wenn mechanische Arbeit zugeführt wird oder kinetische Energie durch viskose Effekte dissipiert wird. Für reibungsfreie reine Unter- oder Überschallströmungen bleibt er konstant. Über Verdichtungsstöße kann die Änderung des Totaldrucks analytisch mit Gl. 8.11 ermittelt werden. Die Variation der beiden totalen Zustandsgrößen ist also entweder null oder sie ist analytisch einfach berechenbar. Die Wahl des statischen Drucks als dritte Lösungsvariable ist nicht zwingend. Ebenso könnte die Machzahl verwendet werden. Für den statischen Druck spricht in Bezug auf die Datenstruktur

im Programm, dass er auch für inkompressible Strömungen definiert ist. Die Schallgeschwindigkeit inkompressibler Fluide ist hingegen unendlich groß.

Volumenstrom

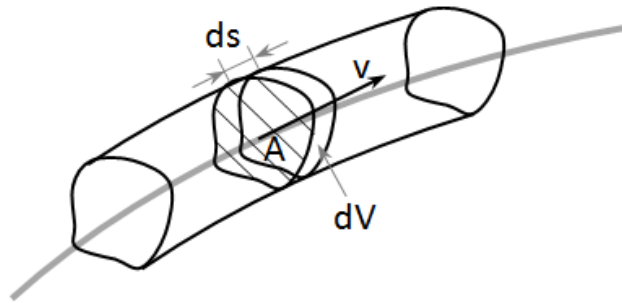


Abbildung 2.3: Volumenstrom durch eine Stromröhre der Fläche A mit der Strömungsgeschwindigkeit v .

Der Volumenstrom \dot{V} durch eine Stromröhre ist

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt}. \quad (2.16)$$

Das totale Differential dV des Volumens lautet ausgeschrieben

$$dV = d(A \cdot s) = A \cdot ds + s \cdot dA. \quad (2.17)$$

Wenn die Querschnittsänderung dA im Vergleich zur Verschiebung ds vernachlässigt werden kann, also $dA \ll ds$, gilt

$$dV \approx A \cdot ds. \quad (2.18)$$

Es wird also angenommen, dass der Querschnitt A überall genau senkrecht durchströmt wird. Das ist jedoch nur dann korrekt, wenn eine Stromröhre einen konstantem Querschnitt hat.

Eingesetzt in Gl. 2.16 ergibt sich

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} \approx \frac{d(A \cdot ds)}{dt} = A \frac{ds}{dt} = A\bar{v}, \quad (2.19)$$

mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} normal zur Querschnittsfläche.

Massenstrom in einer Stromröhre

Der Massenstrom \dot{m} in einer Stromröhre mit bekanntem Querschnitt A bei einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} und der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ ist gegeben durch

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\bar{\rho} \cdot V)}{dt} = V \frac{d\bar{\rho}}{dt} + \bar{\rho} \frac{dV}{dt} = \bar{v} \cdot \dot{\bar{\rho}} + \bar{\rho} \cdot \dot{V}. \quad (2.20)$$

Für stationäre Strömungen, also $\dot{\bar{p}} = 0$ ergibt sich unter Verwendung von Gl. 2.19

$$\dot{m} = \bar{\rho}\dot{V} = \bar{\rho}A\bar{v}. \quad (2.21)$$

Die Mittelwerte für die Dichte und die Geschwindigkeit zwischen zwei Stromlinien können approximiert werden durch

$$\bar{\rho} = \frac{\rho + \rho_N}{2}, \quad (2.22)$$

$$\bar{v} = \frac{v + v_N}{2}, \quad (2.23)$$

mit den Werten ohne Index auf der betrachteten Stromlinie und dem Index N für die jeweilige Nachbarstromlinie.

Die Größen auf den Nachbarstromlinien können z.B. im entsprechenden Punkt aus den Werten der jeweils stromauf- beziehungsweise stromabwärts gelegenen Stützpunkten interpoliert werden. In Bezug auf die Konvergenz und die Parallelisierung erweist es sich jedoch als sinnvoll, diese statt dessen zu approximieren.

Für die Approximation des statischen Drucks auf einer Nachbarstromlinie wird der Impulserhaltungssatz in radialer Richtung für reibungsfreie Strömungen (Euler-Gleichung) angewendet

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r}, \quad (2.24)$$

mit dem Druckgradient radial zur betrachteten Stromlinie $\partial p/\partial r$, der Dichte ρ , der Strömungsgeschwindigkeit v und dem lokalen Krümmungsradius r .

Der approximierte statische Druck auf der Nachbarstromlinie p_N^* mit einem radialen Abstand dr ist damit

$$p_N^* = \frac{\partial p}{\partial r} dr. \quad (2.25)$$

Dieser Wert ist nur für eine auskonvergierte Lösung (beinahe) gleich dem Wert, den eine Interpolation entlang der Nachbarstromlinie liefern würde. Wie in Bild 2.4 illustriert, weicht also z.B. der interpolierte Druck p_l auf der linken Nachbarstromlinie von dem approximierten Wert p_l^* ab.

Außer dem statischen Druck müssen auch die beiden übrigen Lösungsvariablen p_t und T_t auf der Nachbarstromlinie approximiert werden. Bild 2.5 zeigt, wird dazu aus allen radialen Gradienten der jeweiligen Größe ein mittlerer Gradient $\partial p_t/\partial r$ bzw. $\partial T_t/\partial r$ ermittelt, der ähnlich der Vorgehensweise beim statischen Druck dazu verwendet wird, den approximierten Totalzustand p_t^* und T_t^* auf der Nachbarstromlinie zu approximieren.

Die Kenntnis aller (approximierter) Lösungsvariablen auf der Nachbarstromlinie erlaubt die Bestimmung des Massenstroms zwischen beiden Stromlinien nach Gl. 2.21 (siehe Kapitel 8.2 für die Besonderheiten bei 3D-Strömungen).

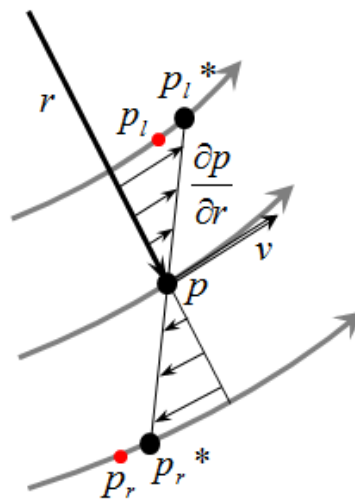


Abbildung 2.4: Approximation des statischen Drucks auf benachbarten Stromlinien.

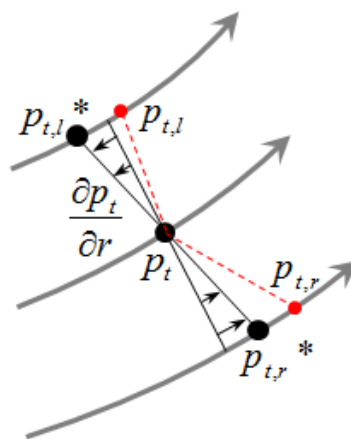


Abbildung 2.5: Approximation des Totaldrucks auf benachbarten Stromlinien. Die Vorgehensweise für die Approximation der Totaltemperatur ist analog.

Machzahl in einer Stromröhre

Der Massenstrom \dot{m} in einer Stromröhre mit bekanntem Querschnitt A bei einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} und der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ ist für stationäre Strömungen gegeben durch Gl. 2.21, die hier wiederholt angegeben wird

$$\dot{m} = \bar{\rho} A \bar{v}.$$

Die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ kann nun mit Hilfe der thermischen Zustandsgleichung für ein ideales Gas (Gl. 2.1) durch einen mittleren Druck \bar{p} ersetzt werden

$$\dot{m} = \frac{\bar{p} A \bar{v}}{RT}. \quad (2.26)$$

Wird die Geschwindigkeit durch die Machzahl ausgedrückt, ergibt sich

$$\dot{m} = A \frac{\bar{p}}{RT} \overline{Ma} \sqrt{\kappa RT} = A \bar{p} \overline{Ma} \sqrt{\frac{\kappa}{RT}}. \quad (2.27)$$

Die statischen Zustandsgrößen p und T können mit Hilfe der Gleichungen 2.14 und 2.15 durch die totalen Größen ersetzt werden

$$\begin{aligned} \dot{m} &= A \frac{\bar{p}_t}{\sqrt{T_t}} \frac{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \overline{Ma}^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \overline{Ma}^2\right)^{-\frac{1}{2}}} \overline{Ma} \sqrt{\frac{\kappa}{R}} \\ &= A \bar{p}_t \overline{Ma} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \overline{Ma}^2\right)^{-\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \sqrt{\frac{\kappa}{RT_t}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit von Gl. 2.28 sind also noch einmal zusammengefasst:

- stationäre Strömung (siehe Gl. 2.21),
- adiabate Strömung (wegen der Verwendung der Gleichungen Gl. 2.14 und 2.15)
- ideales Gas (siehe Gleichungen 2.1, 2.12 und 2.13),
- kleine Querschnittsänderungen der Stromröhre (siehe Gl. 2.18).

Die Strömung muss also zwischen beiden Querschnitten adiabat aber nicht isentrop sein, da die Relationen zwischen statischem und Totalzustand nur im jeweils selben Querschnitt verwendet werden.

In dem Kontext, in dem Gl. 2.28 angewendet wird, sind die Werte für den Massenstrom \dot{m} , die Totaltemperatur T_t , den Totaldruck p_t und den Stromröhrenquerschnitt A bekannt und die Gleichung wird verwendet, um die Machzahl in diesem Querschnitt zu berechnen. Zu diesem Zweck eignet sich die Form

$$\underbrace{\frac{\dot{m}}{A \bar{p}_t} \sqrt{\frac{RT_t}{\kappa}}}_{LS} = \underbrace{\overline{Ma} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \overline{Ma}^2\right)^{-\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}}_{RS}. \quad (2.29)$$

Die Berechnung der Machzahl besteht also darin, die Nullstelle einer Funktion f zu berechnen, die der Differenz zwischen der rechten Seite RS und der linken Seite LS dieser Gleichung besteht, also

$$f(Ma) := RS - LS \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.30)$$

Bild 2.6 zeigt den typischen Verlauf der Funktion f für eine Austrittsfläche, die der 1,1-fachen Größe der Eintrittsfläche entspricht (der absolute Betrag der Fläche ändert den Funktionswert nicht) für Strömungs-Machzahlen von 0,1, 0,5 und 0,9. Dieses Stromröhren-Segment entspricht also einem Diffusor.

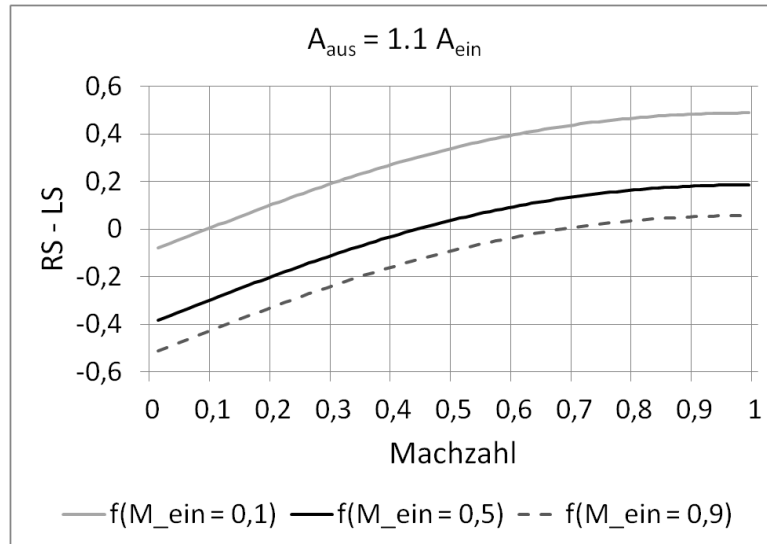


Abbildung 2.6: Typischer Verlauf der Machfunktion f für eine Austrittsfläche des Stromröhren-Segments, die der 1,1-fache Größe der Eintrittsfläche entspricht, für die drei verschiedenen Strömungs-Machzahlen 0,1, 0,5 und 0,9, mit $\kappa = 1,4$ und $R = 287,1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Die Werte für Totaldruck und Totaltemperatur sind jeweils so ermittelt, dass im Einström-Querschnitt ein statischer Druck von 100000 Pa und eine statische Temperatur von 300 K vorliegt.

Bei der niedrigen Machzahl von 0,1 verzögert sich die Strömung nur geringfügig, bei einer Machzahl von 0,9 hingegen liegt die Ausström-Machzahl nur noch bei rund 0,68.

Der Verlauf der Funktion ist glatt, die Änderung der Krümmung ist mäßig und sie hat jeweils nur eine Nullstelle im Unterschall- und im Überschallbereich. Damit ist ein Newton-Verfahren (siehe z.B. [38, S. 362]) eine geeignete Wahl für die effiziente Berechnung der Nullstelle. Als Startwert wird die Einström-Machzahl verwendet.

Gl. 2.29 ist eine Kombination aus Gleichungen für die Massenerhaltung (Gl. 2.21), der kinetischen Energie (Gl. 2.15) und der inneren Energie (Gl. 2.14).

Für inkompressible reibungsfreie Fluide ohne Volumenkräfte lautet der Satz von Bernoulli

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_t = \text{const.} \quad (2.31)$$

entlang einer Stromröhre. Dieser Satz ist auch unter dem Namen *Bernoulli'sche Energiegleichung* bekannt. Er kann jedoch auch aus dem 2. Newton'schen Gesetz $F = ma$ hergeleitet werden, der die Basis jeder Impulserhaltungsgleichung ist, also ohne die Verwendung einer Energieerhaltungsgleichung. Dies soll in einem kurzen Einschub gezeigt werden.

Betrachtet wird ein Rohr mit einer Fläche A , welches mit einem Fluid der Dichte ρ gefüllt ist, das sich, getrieben durch einen Druckgradienten dp , mit der Geschwindigkeit $v = dx/dt$ bewegt. Körperkräfte wie die Gravitation werden vernachlässigt. Wendet man nun Newtons zweites Gesetz auf ein Fluidvolumen $A dx$ an, erhält man

$$\begin{aligned}
 F &= ma \\
 pA - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) A &= m \frac{dv}{dt} \\
 -dpA &= \rho A dx \frac{dv}{dt} \\
 \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{dp}{dx}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

In einer stationären Strömung ist v nur vom Ort und nicht von der Zeit abhängig, also gilt

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right). \tag{2.33}$$

Verwendet man diesen Zusammenhang in Gl. 2.32, erhält man

$$\frac{d}{dx} \left(\rho \frac{v^2}{2} + p \right) = 0. \tag{2.34}$$

Daraus folgt der Satz von Bernoulli

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = \text{const.} \tag{2.35}$$

Die Konstante entspricht dem Totaldruck in der Stromröhre. Das verdeutlicht, dass die Erhaltung des Totaldrucks in diesem Fall auch einer Impulserhaltungsgleichung entspricht.

Für kompressible Strömungen ist es erforderlich, zusätzlich eine Form der Energieerhaltungsgleichung zu verwenden. Daher lässt sich der Satz von Bernoulli für kompressible Fluide nicht mehr allein aus Newtons zweitem Gesetz herleiten. Das der Impuls in einer Stromröhre mit konstantem Totaldruck trotzdem erhalten ist, soll an dem in Bild 2.7 dargestellten Kontrollvolumen für eine isentrope Strömung demonstriert werden.

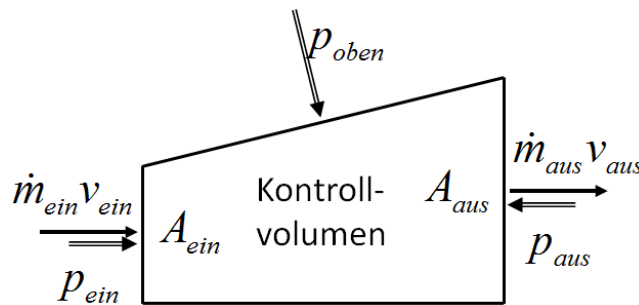


Abbildung 2.7: Stromliniensegment mit Querschnittsänderung zur Abschätzung des Fehlers in der Impulserhaltung.

Es wird angenommen, dass die Lösungsvariablen p , p_t und T_t im Einström-Querschnitt, sowie die Geometrie des Kontrollvolumens bekannt sind. In einer isentropen Strömung sind der Totaldruck und die Totaltemperatur konstant. Damit kann für den gegebenen Einström-Massenstrom

mit Gl. 2.29 der statische Druck im Ausströmquerschnitt berechnet werden. Der Impulserhaltungssatz vereinfacht sich, wenn keine äußere Arbeit an den Begrenzungen des Kontrollvolumens verrichtet wird, zu

$$\sum F_p = \sum \dot{m}v, \\ p_{ein}A_{ein} + F_{x,oben} - p_{aus}A_{aus} = \dot{m}_{ein}v_{ein} - \dot{m}_{aus}v_{aus}, \quad (2.36)$$

mit der Summe der aus den Normalspannungen resultierenden Kräften $\sum F_p$ und der x-Komponente der Druckkraft auf die Oberseite des Kontrollvolumens $F_{x,oben}$, die approximiert wird als

$$F_{x,oben} = \frac{p_{ein} + p_{aus}}{2} (A_{aus} - A_{ein}). \quad (2.37)$$

Da diese Approximation nicht dem tatsächlichen Druckverlauf entspricht, ist der Impulserhaltungssatz 2.36 nicht erfüllt. Eine genauere Näherung für den Druckverlauf erhält man, wenn man Gl. 2.29 verwendet, um den Druck in zusätzlichen Zwischenquerschnitten zu berechnen. Bild 2.8 zeigt die Lage der Hilfs-Schnitte zwischen Ein- und Ausström-Querschnitt des Kontrollvolumens.

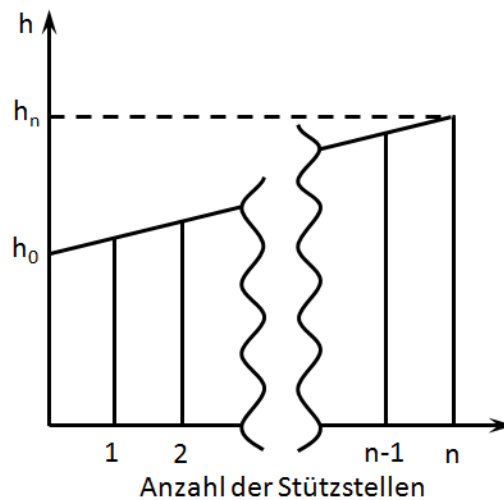


Abbildung 2.8: Stromliniensegment mit zusätzlichen Hilfs-Querschnitten zur Abschätzung des Fehlers in der Impulserhaltungsgleichung in Strömungsrichtung.

Die x-Komponente der Druckkraft auf die gesamte obere Fläche des Kontrollvolumens ist für n zusätzliche Schnittebenen nun angenähert durch

$$F_{x,oben} = \sum_{i=1}^n \frac{p_{n-1} + p_n}{2} (A_n - A_{n-1}). \quad (2.38)$$

Bild 2.9 zeigt, dass sich der normierte Fehler in der x-Impulserhaltungsgleichung 2.36 mit steigender Anzahl an Hilfs-Ebenen bis auf Rundungsgenauigkeit reduziert. Die Erhaltung des Totaldrucks entspricht daher auch für kompressible Medien einer Impulserhaltungsgleichung.

Zusammenfassend kann also festgehalten werden, dass Gl. 2.29 eine Kombination aus den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie darstellt.

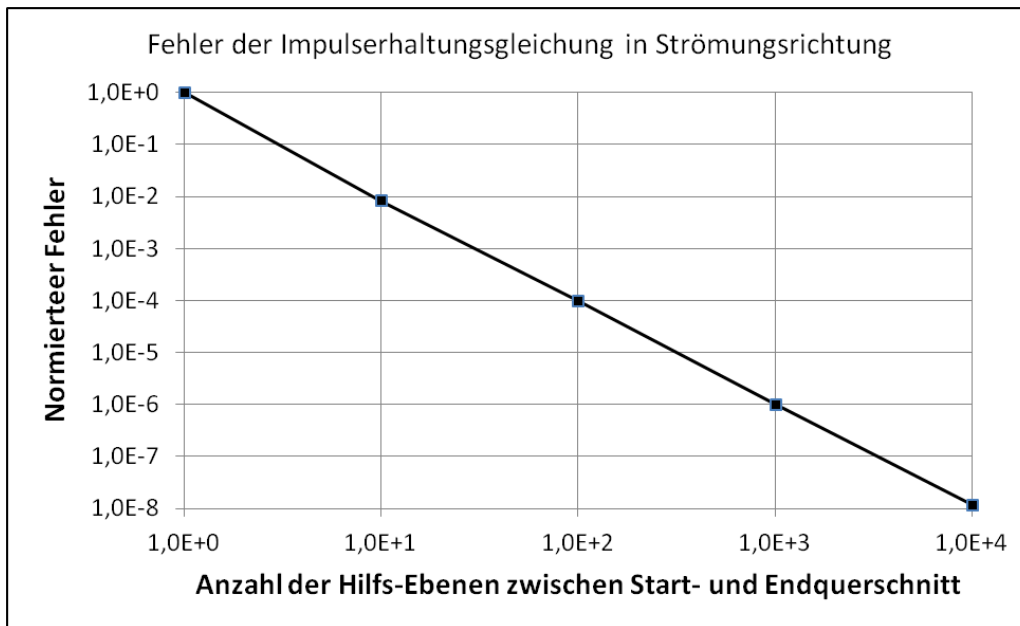


Abbildung 2.9: Numerischer Betrag des Fehlers in der Kräftebilanz über ein Stromröhrensegment in Strömungsrichtung.

Energieerhaltung

Die Energieerhaltungsgleichung, z.B. in Form der Totalenthalpieerhaltung lautet nach [37, S. 4] für einen adiabaten Prozess

$$h_t = c_p T_t = c_p T + \frac{v^2}{2}. \quad (2.39)$$

Mit Gl. 2.13 kann die Geschwindigkeit für ein ideales Gas durch die Machzahl ausgedrückt werden

$$c_p T_t = c_p T + \frac{\kappa T}{2} R M a^2. \quad (2.40)$$

Ersetzt man R mit Hilfe von Gl. 2.11, erhält man

$$\begin{aligned} c_p T_t &= c_p T + \frac{\kappa T}{2} c_p \frac{\kappa - 1}{\kappa} M a^2 \\ \Leftrightarrow T_t &= T + \frac{\kappa - 1}{2} M a^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Für ein ideales Gas ist Gl. 2.41, die für die Berechnung der Machzahl in einer Stromröhre verwendet wird (Gl. 2.28), folglich äquivalent zur Erhaltungsgleichung für die Totalenthalpie, Gl. 2.39.

2.3 Modellierung viskoser Effekte

Die Viskosität eines Fluids führt beim Auftreten von Scherströmungen zu einer Impuls-Dissipation, also einer Umwandlung von kinetischer in innere Energie. Diese wird beim Stromlinien-Verfahren durch Quellterme für den Totaldruck und die Totaltemperatur modelliert. Für die Herleitung dieser Größen wird ein Kontrollvolumen um ein Stromliniensegment definiert, dass

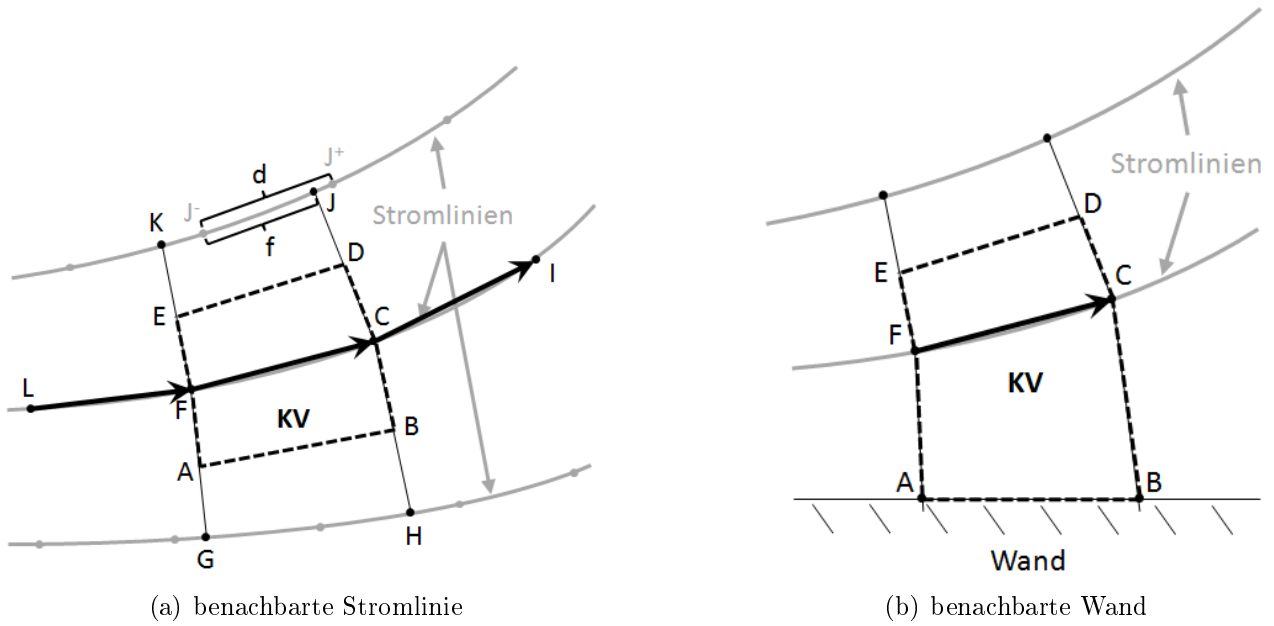


Abbildung 2.10: Kontrollvolumen für die Bestimmung der viskositätsbedingten Quellterme für Totaldruck und -temperatur.

wie in Bild 2.10 gezeigt, bis zur Hälfte des Abstandes zu einer benachbart gelegenen Stromlinie reicht (a) oder bis zu einer benachbarten Wand (b).

In Bild 2.10 (a) ist angedeutet, dass die Punkte D und E auf den Verbindungslinien zwischen zwei Stromlinien liegen, die jeweils senkrecht zur mittleren Strömungsrichtung verlaufen. Die Punkte A und B in Bild 2.10 (b) sind die Schnittpunkte der senkrecht zur Strömungsrichtung verlaufenden Linien mit der Wand. Die Kontrollvolumina werden jeweils durch die Strecken zwischen den Punkten A, B, C, D, E, F und wieder A begrenzt.

Wird der Wert eines Skalars ϕ in einem Eckpunkt des Kontrollvolumens, z.B. im Punkt D benötigt, wird er erster Ordnung interpoliert

$$\phi_D = \frac{1}{2} (\phi_J + \phi_C), \quad (2.42)$$

mit den Werten ϕ_N im jeweiligen Punkt N . Der Punkt J liegt jedoch zwischen zwei Stützpunkten auf der Nachbarstromlinie. Der Wert in diesem Punkt wird ebenfalls erster Ordnung entlang der Stromlinie mit den Werten aus dem stromauf- und stromabwärts gelegenen Stützpunkten J^- und J^+ interpoliert

$$\phi_J = \frac{f}{d} \phi_{J^+} + \left(1 - \frac{f}{d}\right) \phi_{J^-}. \quad (2.43)$$

2.3.1 Quellterm für den Totaldruck

Der Quellterm für den Totaldruck dient der Kompensation der Schubspannungen in der Kräftebilanz in Strömungsrichtung über das Kontrollvolumen, also der Impulserhaltung.

Im Vergleich zur Kräftebilanz in Strömungsrichtung für eine reibungsfreie Strömung aus Gl. 2.36 kommt nun der Beitrag der Schubspannungen auf der linken Seite der Gleichung hinzu, die auf die seitlichen Begrenzungen des Kontrollvolumens wirken, also in Strömungsrichtung

links der Fläche $A_l = \overline{DE} \cdot t$ (mit der Einheitstiefe $t = 1m$) und rechts $A_r = \overline{AB} \cdot t$. Diese müssen entweder durch eine Impulsänderung innerhalb des Kontrollvolumens oder durch eine Änderung der Normalspannungen auf der Ausströmfläche $A_a = \overline{BCD} \cdot t$ kompensiert werden.

Für Newton'sche Fluide im thermodynamischen Gleichgewicht gilt für eine ebene Strömung der folgende lineare Zusammenhang zwischen der Schubspannung τ , der dynamischen Viskosität μ und dem Geschwindigkeitsgradienten normal zur Strömungsrichtung $\partial v / \partial r$

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (2.44)$$

Damit ist die Kraft in Strömungsrichtung, die durch Schubspannungen verursacht wird gleich

$$F_\tau = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_l A_l + \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_r A_r \right], \quad (2.45)$$

mit den mittleren Geschwindigkeitsgradienten normal zur Strömungsrichtung $(\partial v / \partial r)_l$ und $(\partial v / \partial r)_r$ auf den Flächen A_l und A_r , die erster Ordnung approximiert werden

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_D + \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_E \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_J - v_C}{\overline{JC}} + \frac{v_K - v_F}{\overline{KF}} \right), \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_B + \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_A \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_H - v_C}{\overline{HC}} + \frac{v_G - v_F}{\overline{GF}} \right), \quad (2.47)$$

$$(2.48)$$

mit den Geschwindigkeiten v_N im jeweiligen Punkt N in Bild 2.10 (a). Die Geschwindigkeiten in den Eckpunkten des Kontrollvolumens müssen entsprechend Gl. 2.42 interpoliert werden.

Damit die Kräftebilanz ausgeglichen ist, muss der aus den Schubspannungen resultierenden Kraft F_τ eine gleich große, entgegengesetzt wirkende Druckkraft F_p gegenüber stehen

$$F_p = -F_\tau. \quad (2.49)$$

Diese Druckkraft $F_p = \Delta p A_a$ entsteht durch eine Änderung des statischen Drucks, der auf den Ausströmquerschnitt A_a wirkt. Δp ist dabei die Differenz zwischen dem Wert, mit dem die Kräftebilanz der reibungsbehafteten Strömung ausgeglichen ist minus dem, der im Ausströmquerschnitt vorliegt, wenn der Totaldruck gleich dem im Einströmquerschnitt ist, also

$$\Delta p = \frac{F_p}{A_a}. \quad (2.50)$$

Für die, zu Beginn der Iteration vorliegende Machzahl im Ausströmquerschnitt, ist das Verhältnis zwischen statischem und Totaldruck nach Gl. 2.15

$$\frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Um eine gewünschte Änderung im statischen Druck Δp zu erhalten, muss sie mit dem, von der Machzahl abhängigen „Proportionalitäts-Faktor“ multipliziert werden

$$\Delta p_t = \Delta p \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}. \quad (2.51)$$

Ob sich die Änderung des Totaldrucks nun in einer Verzögerung der Strömung bei gleichbleibendem statischem Druck auswirkt, wie es z.B. bei einer Grenzschicht entlang einer parallel angeströmten ebenen Platte der Fall ist oder in einem Druckverlust entlang eines Kanals mit konstantem Querschnitt bei gleichbleibender Strömungsgeschwindigkeit, hängt davon ab, ob die benachbarten Stromlinien sozusagen „ausweichen“ können. Bei der Berechnung des viskositätsbedingten Quellterms für den Totaldruck müssen diese beiden Fälle nicht unterschiedlich behandelt werden.

2.3.2 Quellterm für die Totaltemperatur

Der Quellterm für die Totaltemperatur modelliert die Dissipation von kinetischer in innere Energie. Er sorgt also für die Energieerhaltung unter Einwirkung viskositätsbedingter Einflüsse.

Die dissipierte Energie pro Einheitsvolumen $\Delta e_{\tau,v}$ ist (z.B. nach [1, S. 252]) gegeben durch

$$\Delta e_{\tau,v} = \tau : \nabla \mathbf{v} = \mu \Phi_\tau, \quad (2.52)$$

mit der Dissipationsfunktion Φ_τ

$$\begin{aligned} \Phi_\tau &= 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &+ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 \\ &- \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Das Kontrollvolumen der Länge $ds = \overline{FC}$ ist beim Stromlinien-Verfahren immer tangential zur Stromlinie ausgerichtet. Somit existiert nur eine einzige Geschwindigkeits-Komponente u mit einem Betrag ungleich null. Bei einer zweidimensionalen Strömung kann nur die Ableitung dieser Geschwindigkeit in radialer (Index r) und in Strömungs-Richtung (Index s) ungleich null sein. Damit kann Gl. 2.53 entlang einer Stromlinie vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} \Phi_\tau &= 2 \left(\frac{\partial v_s}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial v_s}{\partial s} \right)^2 \\ &= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.54)$$

mit $v_s = v$ und

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{v_C - v_F}{CF}. \quad (2.55)$$

Der mittlere radiale Geschwindigkeitsgradient im Kontrollvolumen wird als der arithmetische Mittelwert der beiden in Gl. 2.46 und 2.47 berechneten radialen Geschwindigkeitsgradienten angenommen

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_l + \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_r \right). \quad (2.56)$$

Die innerhalb des Kontrollvolumens (mit dem Volumen V_{KV} , der gesamten darin befindlichen Fluidmasse m_{KV}) pro Einheitsmasse dissipierte Energie $\Delta e_{\tau,m}$ beträgt also

$$\Delta e_{\tau,m} = \mu \Phi \frac{V_{KV}}{m_{KV}} = \frac{\mu \Phi}{\rho_{KV}}, \quad (2.57)$$

mit der mittleren Dichte im Kontrollvolumen $\overline{\rho_{KV}}$, berechnet aus den teilweise nach Gl. 2.43 interpolierten Werten

$$\rho_{KV} = \frac{1}{6} (\rho_A + \rho_B + \rho_C + \rho_D + \rho_E + \rho_F). \quad (2.58)$$

Für ein kalorisch ideales Gas gilt

$$e = c_v T. \quad (2.59)$$

Der Quellterm für die Totaltemperatur aufgrund viskositätsbedingt dissipierter, spezifischer Energie pro Einheitsmasse $\Delta e_{\tau,m}$, beträgt also

$$\Delta T_t = \frac{\Delta e_{\tau,m}}{c_v}. \quad (2.60)$$

2.4 Grenzschichtströmungen

Ein viskoses Fluid haftet an einer Wandoberfläche. Ist die Strömungsgeschwindigkeit weiter entfernt von der Wand ungleich der Wandgeschwindigkeit, bildet sich durch den Einfluss der Viskosität ein Geschwindigkeitsprofil normal zur Wandoberfläche aus. Man unterscheidet zwischen laminaren und turbulenten Grenzschichten. Der entscheidende strömungsmechanische Ähnlichkeitsparameter, der einen Hinweis darauf gibt, welche dieser beiden Strömungstypen vorliegt, ist die Reynoldszahl. Ist diese Zahl für zwei Strömungen gleich, liegt eine mechanische Ähnlichkeit zwischen beiden vor. Die dimensionslose Kennzahl ist definiert als das Verhältnis zwischen Trägheitskraft und Reibungskraft

$$Re = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = \frac{\rho v L}{\mu}, \quad (2.61)$$

mit einer charakteristischen Länge L .

Beispielsweise liegt die kritische Reynoldszahl für eine ebene Plattengrenzschicht nach [39, S. 418] zwischen $3,5 \cdot 10^5$ bis $1 \cdot 10^6$. Die charakteristische Länge ist dabei die Länge der Platte. Für Rohrströmungen liegt sie, bezogen auf den Durchmesser, bereits bei etwa 2300. Unterhalb dieser Werte ist die Grenzschicht laminar, oberhalb turbulent, wobei je nach Situation ein ausgeprägtes Übergangsgebiet vorliegen kann.

Im folgenden werden nun nur die Grundlagen der Grenzschichttheorie aus diesem umfassenden Gebiet herausgegriffen, die für diese Arbeit relevant sind. Für eine umfassende Übersicht über dieses Thema sei auf Referenz [39] verwiesen. Da für einige ausgezeichnete Grenzschichten analytische Lösungen der für diese Fälle vereinfachten Navier-Stokes Gleichungen vorliegen, werden diese zur Validierung herangezogen.

Poiseuille-Kanalströmung

Als Poiseuille-Strömung wird eine voll-ausgebildete, ebene und stationäre Kanalströmung bezeichnet, wie sie in Bild 2.11 dargestellt ist. Die analytische Lösung für das Geschwindigkeitsprofil dieser Strömung ist nach [1, S. 98]

$$c(n) = \frac{3c_m}{2} \left(1 - \frac{n^2}{H^2} \right), \quad (2.62)$$

für eine Kanalhöhe von $2H$, und eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit c_m .

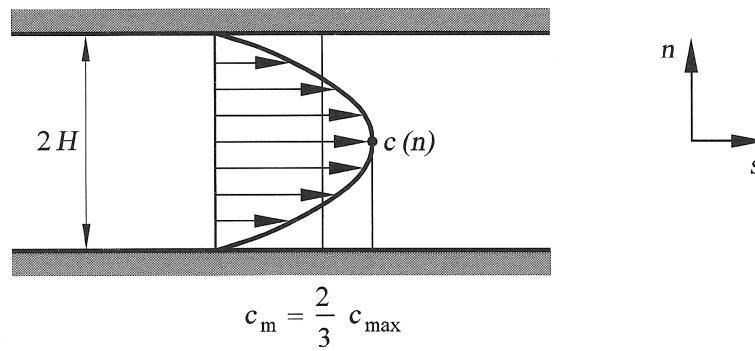


Abbildung 2.11: Geschwindigkeitsprofil einer Poiseuille-Kanalströmung (aus [1, S. 98]).

Blasius-Plattengrenzschicht

Die laminare Grenzschicht einer parallel angeströmten ebenen und halbunendlichen Platte ohne Druckgradient in Strömungsrichtung ist bekannt unter dem Namen Blasius-Grenzschicht, die Bild 2.12 schematisch zeigt.

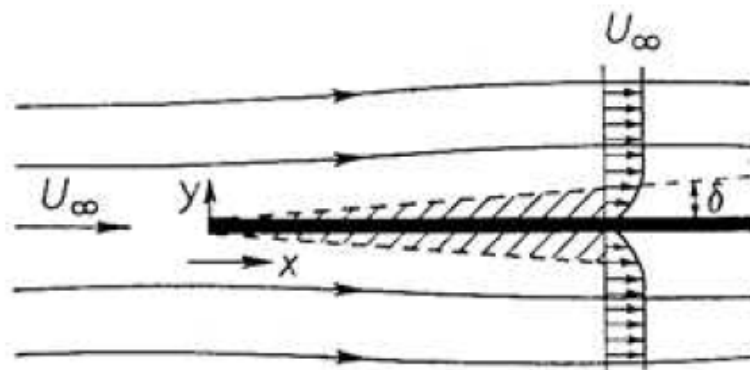


Abbildung 2.12: Schematische Darstellung der Grenzschicht einer längsangeströmten ebenen Platte (aus [39, S. 156]).

Diese Lösung der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen ergibt eine Differentialgleichung 3. Ordnung für die Stromfunktion

$$f''' + f f'' = 0, \tag{2.63}$$

wobei f eine Funktion der dimensionslosen Variable η ist

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} = y \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{2\mu x}} \tag{2.64}$$

und f' die Differentiation nach η bedeutet.

Die beiden Geschwindigkeitskomponenten parallel zur Plattenoberfläche u und senkrecht dazu

v können aus der Funktion f wie folgt ermittelt werden:

$$u = U_\infty f', \quad (2.65)$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu U_\infty}{2\rho x}} (\eta f' - f), \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{2\mu x}} f''. \quad (2.67)$$

Zur Lösung der Blasius-Gleichung werden die drei Randbedingungen verwendet:

$$y = 0 \quad : \quad u = 0, v = 0;$$

$$y \rightarrow \infty \quad : \quad u = U_\infty,$$

bzw. geschrieben in den dimensionslosen Koordinaten:

$$\eta = 0 \quad : \quad f = 0, f' = 0;$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad : \quad f' = 1,$$

Gl. 2.63 kann z.B. mit einem Runge-Kutta Verfahren gelöst werden. Für praktische Anwendungen liegt die Lösung auch in tabellierter Form vor (z.B. [40] oder die hier verwendete Tabelle aus [41], die im Anhang 11.1 reproduziert ist).

2.5 Fehlerabschätzung

Da numerische Lösungen aus verschiedenen Gründen immer nur Näherungslösungen des eigentlichen physikalischen Problems sind, ist es wichtig, die einzelnen Fehlerquellen genau zu kennen und möglichst genau zu quantifizieren. Üblicherweise wird zwischen drei Fehlern unterschieden, dem Modellfehler, dem Diskretisierungsfehler und dem Iterationsfehler (siehe z.B. [42, S. 393 ff]). Jedoch sollte auch die endliche Genauigkeit der Rechenmaschine, also der daraus resultierende Rundungsfehler, nicht vernachlässigt werden. Diese Fehler sollen mit Bezug auf das hier vorgestellte Verfahren beschrieben und bestimmt werden.

2.5.1 Modellfehler

Der Modellfehler ist der Unterschied zwischen dem realen Zustand (eines Gases, einer Strömung, etc.) und der exakten Lösung der angewendeten Modellierung.

Ein Beispiel dafür ist die thermische Zustandsgleichung idealer Gase. Sie beschreibt das Verhältnis der thermodynamischen Zustandsgrößen in einem moderaten Druck- und Temperaturbereich mit akzeptabler Genauigkeit, vernachlässigt aber z.B. das Eigenvolumen der Moleküle und idealisiert Stöße zwischen Molekülen als vollkommen elastisch, was bei hohen Drücken zu deutlichen Abweichungen des Zustandes vom idealen Gasgesetz führt.

Daher ist es wichtig, die Grenzen der Modellierung zu kennen (beispielsweise die Limitierung der Anwendbarkeit der für das Stromlinien-Verfahren wichtigen Gl. 2.29) und mit den Anforderungen der Problemstellung zu vergleichen.

2.5.2 Rundungsfehler

Rundungsfehler entstehen durch die endliche Menge an Speicher für eine Gleitkommazahl in einer Rechenmaschine und durch sogenannte Unter- oder Überläufe beim Verrechnen zweier Zahlen, da sie zunächst in denselben Wertebereich gebracht werden müssen.

Eine binäre Zahl mit 32-Bit hat im Dezimalsystem eine Genauigkeit von 7 signifikanten Ziffern, bei 64-Bit sind es mindestens 15. Diese Anzahl ergibt sich aus der Überlegung, dass für eine doppelt genaue Gleitkomma-Zahl 53 Bit für die Mantisse, 10 für den Exponenten und ein Bit für das Vorzeichen verwendet werden. Die Präzision im Dezimalsystem ist also näherungsweise $53 \log_{10}(2) \approx 15,955$.

Aus diesem Grund sollte die Verrechnung zweier Zahlen mit deutlich unterschiedlicher Größenordnung bereits bei der Programmierung möglichst vermieden werden.

2.5.3 Iterationsfehler

Der Iterationsfehler ist der Unterschied zwischen der perfekten algebraischen Lösung der angewendeten Modellierung auf einer Rechenmaschine mit endlicher Genauigkeit der Zahlendarstellung, also inklusive dem Rundungsfehler und deren iterativer Lösung.

Iterative Lösungen können zwar prinzipiell bis zur Rundungsgenauigkeit der verwendeten Rechenmaschine genau gelöst werden. Zum Einen ist aber auch diese immer endlich, zum Anderen wird in der Praxis meist eine deutlich höhere Abbruchtoleranz vorgegeben. Schließlich ist es unnötig, eine Modellgleichung mit einem deutlich kleineren Fehler zu berechnen, als dem Modellfehler selbst.

2.5.4 Diskretisierungsfehler

Der Diskretisierungsfehler ist der Unterschied zwischen der Lösung der angewendeten Modellierung inklusive Rundungs- und Iterationsfehler aber mit unendlich feiner Diskretisierung der Gleichungen, verglichen mit der tatsächlich verwendeten, endlichen Diskretisierung.

Im Fall einer Strömungssimulation hat man es mit räumlichen Diskretisierungsfehlern zu tun, da ein Rechnernetz mit endlicher Zellgröße verwendet wird und im Fall transienter Simulationen auch mit der zeitlichen Diskretisierung, also einem endlichen Zeitschritt. Das Stromlinien-Verfahren ist in der aktuellen Form nur für stationäre Strömungen anwendbar, daher liegen hier nur räumliche Diskretisierungsfehler durch Stromlinien-Segmente endlicher Länge vor.

Die Auswertung der Vergleichsrechnungen zur Verifikation des Stromlinien-Verfahrens folgt den Richtlinien des *ASME Journal of Fluids Engineering* für die Abschätzung und Dokumentation von Diskretisierungsfehlern in CFD Anwendungen [43]. Die darin empfohlene Vorgehensweise besteht aus fünf Schritten, die hier kurz zusammenfassend beschrieben werden:

Schritt 1

Definition einer repräsentativen Zellgröße bzw einer Referenzgröße, die die räumliche Diskretisierung widerspiegelt. Für zweidimensionale Simulationen eignet sich

$$h = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta A_i) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.68)$$

wobei ΔA_i die Fläche der i -ten Zelle und N die Gesamtanzahl der Zellen des Rechengebietes ist.

Nachdem h dem mittleren Abstand der Datenpunkte (Zellzentren oder Knotenpunkte) eines Finite-Volumen-Netzes entspricht, wird beim Stromlinien-Verfahren analog das Gesamtvolumen des Rechengebiets durch die Anzahl der Stromlinien-Stützpunkte dividiert.

Schritt 2

Die Simulation sollte auf drei systematisch verfeinerten Netzen durchgeführt werden. Der Faktor, der die Änderung der Netzgröße beschreibt, indem die Referenzgrößen zweier Netze ins Verhältnis gesetzt werden

$$r = \frac{h_{grob}}{h_{fein}}, \quad (2.69)$$

sollte dabei erfahrungsgemäß mindestens 1,3 betragen.

Ein für die Auswertung relevanter Skalar ϕ wird gewählt, dessen Änderung in den Lösungen auf den drei Netzen deutlich ungleich null sein sollte. Das kann eine globale Größe, wie z.B. ein Druckverlust oder eine Wiederanlegelänge sein aber auch lokale Skalarwerte in den Zellen bzw. Stromlinien-Segmenten. Da die meisten Validierungsrechnungen isentrope Strömungen sind, bei denen Totaldruck und Totaltemperatur konstant sind, ist die einzig variierende Größe der statische Druck.

Voraussetzung für die Verwendung der Ergebnisse der drei Netze ist eine monotone Konvergenz.

Schritt 3

Wenn nun $h_1 < h_2 < h_3$, $r_{21} = h_2/h_1$ und $r_{23} = h_3/h_2$ ist, kann die Ordnung des Verfahrens p mit dem folgenden Ausdruck berechnet werden

$$p = \frac{1}{\ln(r_{21})} \left| \ln \left| \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{21}} \right| + q(p) \right|, \quad (2.70)$$

$$q(p) = \ln \left(\frac{r_{21}^p - s}{r_{32}^p - s} \right), \quad (2.71)$$

$$s = 1 \cdot \text{sign} \left(\frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{21}} \right), \quad (2.72)$$

mit $\epsilon_{32} = \phi_3 - \phi_2$ und $\epsilon_{21} = \phi_2 - \phi_1$, wobei ϕ_k die Lösung auf dem k -ten Netz repräsentiert.

Zuerst wird das Vorzeichen der Änderung der Lösung mit Gl. 2.72 bestimmt. Dann werden die Gl. 2.71 und 2.70 iterativ gelöst, indem für Gl. 2.71 zunächst ein konstanter geschätzter Startwert für die Ordnung p des Verfahrens angenommen wird. Anschließend kann ein verbesserter Werte von p mit 2.70 berechnet werden, der wiederum die Korrektur von $q(p)$ erlaubt. Im Allgemeinen sind nur einige wenige Schritte erforderlich, um die Ordnung des Verfahrens mit Rundungsgenauigkeit zu bestimmen.

Wird eine globale Größe ϕ verwendet, wird die Ordnung des Diskretisierungsfehlers nur mithilfe der drei Werte ϕ_1 , ϕ_2 und ϕ_3 berechnet. Beim Vergleich lokaler Größen wird p für jede Zelle bzw. für jedes Stromlinien-Segment berechnet und für die Extrapolation zu einer netzunabhängigen Lösung verwendet.

Wenn die Verhältnisse der repräsentativen Referenzgrößen r_{21} und r_{32} gleich sind, ist $q(p) = 0$ und es gilt vereinfacht

$$p = \frac{\left| \ln \left| \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{21}} \right| \right|}{\ln(r_{21})}. \quad (2.73)$$

$\epsilon_{32}/\epsilon_{21} < 0$ deutet darauf hin, dass die Lösung oszilliert. Nach Möglichkeit ist der Anteil der Zellen anzugeben, in denen oszillatorische Konvergenz auftritt. Ursache hierfür kann im ungünstigen Fall eine nicht-monotone Konvergenz sein, im günstigsten Fall kann es auch bedeuten, dass die Lösung auf dem feinsten Netz bereits sehr nah an der netzunabhängigen Lösung liegt, so dass die Differenzen nicht mehr aussagekräftig sind.

Schritt 4

Ist die Ordnung des Verfahrens bekannt, kann aus den Ergebnissen von zwei unterschiedlichen Netzen die netzunabhängige Lösung für $h \rightarrow 0$ extrapoliert werden

$$\phi_{ext}^{21} = \frac{r_{21}^p \phi_1 - \phi_2}{r_{21}^p - 1}, \quad (2.74)$$

bzw. analog auch ϕ_{ext}^{32} .

Schritt 5

Der relative Fehler zweier Lösungen auf unterschiedlichen Netzen ist

$$\epsilon_a^{21} = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{\phi_1} \right| \quad (2.75)$$

und der extrapolierte relative Fehler

$$\epsilon_{ext}^{21} = \left| \frac{\phi_{ext}^{21} - \phi_1}{\phi_{ext}^{21}} \right|. \quad (2.76)$$

Der Netz-Konvergenzindex, auch GCI (Grid Convergence Index) genannt, kann nun berechnet werden

$$GCI_{fine}^{21} = \frac{1,25\epsilon_a^{21}}{r_{21}^p - 1}. \quad (2.77)$$

Dieser Wert entspricht der, durch den Diskretisierungsfehler verursachten numerischen Unsicherheit des Ergebnisses, der in Form von Fehlerbalken in Diagramme aufgenommen werden kann.

2.6 Eigenschaften des Verfahrens

Im Folgenden wird das Stromlinien-Verfahren in Bezug auf die wichtigsten Eigenschaften eines numerischen Verfahrens untersucht.

2.6.1 Konsistenz

Nach [42, S. 37] bedeutet Konsistenz, dass die Diskretisierung für eine gegen null strebende Diskretisierungs-Schrittweite exakt werden soll und in die ursprüngliche mathematische Formulierung übergehen soll.

Diese Eigenschaft hat das Stromlinien-Verfahren uneingeschränkt, weil die zugrunde liegende mathematische Formulierung nicht diskretisiert, sondern direkt gelöst wird. Eine besondere Bedeutung haben hierbei die Gleichungen 2.29 (gekoppelte Massen-, Impuls- und Energieerhaltung) und 2.24 (radiale Impulserhaltung). Zwar wird die mathematische Beschreibung in diskreten Stellen berechnet, jedoch in unveränderter Form.

2.6.2 Stabilität

Ein numerisches Verfahren ist stabil, wenn numerische oder physikalische Störungen nicht angefacht werden.

Liegen Stromlinien-Stützpunkte im Vergleich zum Abstand zweier Stromlinien sehr nahe zusammen, kann eine kleine Verschiebung eines Stützpunktes in Richtung der Nachbarstromlinie dazu führen, dass sich die Krümmung der Stromlinie stark ändert, was zu einem stark veränderten radialen Druckgradienten führt und damit auch zu einem stark reduzierten, approximierten Druck auf der Nachbarstromlinie. Zusammen mit dem (zumindest im Fall einer isentropen Strömung) konstanten approximierten Totaldruck auf der Nachbarstromlinie führt das zu einer deutlich höheren approximierten Strömungs-Geschwindigkeit und dadurch zu einem *erhöhten* Massenstrom in der Stromröhre (die Reduktion der Dichte aufgrund des niedrigeren Drucks wird in ihrem Einfluss auf den Massenstrom meist überkompensiert durch die Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit). Durch die Verschiebung des Punktes in Richtung der Nachbarstromlinie sollte jedoch eine *Reduktion* des Massenstroms zwischen beiden Stromlinien erreicht werden. Diese Umkehrung der Wirkung eines Anpassungsvorgangs kann zur Divergenz führen.

Dieses Problem kann entweder vermieden werden, wenn immer nur die Krümmung der Stromlinie vor der Anpassung der Lage der Stützpunkte verwendet wird und nicht die jeweils aktuelle Krümmung. Das wirkt sich jedoch negativ auf die Konvergenz aus.

Besser ist es dagegen, einen relativen Mindestabstand der Stützpunkte einer Stromlinie, bezogen auf den Abstand der Nachbarstromlinie, von mindestens eins einzuhalten. Schwierig wird das nur in der Nähe eines Staupunkts, da dort die Stromlinien aufgrund der geringen Strömungsgeschwindigkeit weit auseinander liegen. Einerseits sollten aufgrund der Stabilität deswegen die Abstände der Stützpunkte erhöht werden, andererseits ist die Krümmung der Stromlinie dort auch besonders groß, was aus Diskretisierungsgründen für kleine Stützpunktabstände spricht. In diesem Fall sollten zusätzliche, nur aus wenigen Segmenten bestehende, kurze Hilfs-Stromlinien zwischen der ursprünglichen Staustromlinien und dem Staupunkt eingefügt werden um kurze Stützpunkt-Abstände verwenden zu können, ohne Stabilitätsprobleme zu bekommen.

2.6.3 Konvergenz

Konvergenz bedeutet nach [44, S. 144] „die Eigenschaft eines Diskretisierungsverfahrens, wenn der numerische Fehler mit größer werdender Anzahl von Diskretisierungsstellen abfällt“. Wie schnell das bei einer systematischen Verfeinerung der Diskretisierung der Fall ist, wird durch die Konvergenzrate beschrieben.

Nach dem Äquivalenz-Theorem von Lax [45] gilt für den Fall, dass ein gut gestelltes Anfangswertproblem und eine konsistente Finite-Differenzen-Approximation verwendet wird, dass Stabilität eine notwendige und ausreichende Bedingung für die Konvergenz ist.

Nachdem das Stromlinien-Verfahren uneingeschränkt konsistent ist, hängt es einzig von der Stabilität ab, ob das Verfahren auch konvergent ist.

2.6.4 Konservativität

Die dem Stromlinien-Verfahren zugrunde liegende mathematische Formulierung repräsentiert Erhaltungsgleichungen. Die numerische Umsetzung muss diese Eigenschaft ebenfalls sowohl lokal, als auch global erfüllen.

Bei Finite-Differenzen- oder Finite-Volumen-Verfahren bezieht sich dieses Kriterium hauptsächlich darauf, dass die Approximation der Differentialgleichungen dazu führen kann, dass beispielsweise entweder lokal oder global die Summe aller Quellen und Senken in einem Kontrollvolumen oder dem gesamten Rechengebiet nicht zwingend gleich dem Nettofluss einer Erhaltungsgröße durch die Ränder des Kontrollvolumens ist. Dieses Problem gibt es bei dem Stromlinien-Verfahren nicht, da die exakte mathematische Formulierung für die Berechnung verwendet wird.

Im Fall einer zweidimensionalen Strömung werden die thermodynamischen und strömungsmechanischen Größen so angepasst, dass der Massenstrom in jeder Iteration konstant ist innerhalb einer Stromröhre, die durch die beiden Nachbarstromlinien um eine zentrale Stromlinie gebildet wird und vom Einström- bis zum Ausströmrand reicht. Da die Berechnung aller Größen in einer Stromröhre mit einer gekoppelten Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichung (Gl. 2.29) durchgeführt wird, ist die Erhaltung in jedem Stromröhrenquerschnitt in jeder Iteration gegeben. Bezüglich der Impuls- und Energieerhaltung ist die Konservativität noch offensichtlicher dadurch gegeben, dass Totaldruck und Totaltemperatur entlang der Stromlinie (für reibungsfreie Strömungen) konstant sind. Im Fall von reibungsbehafteten Strömungen ist durch die raumfüllende Unterteilung des Rechengebiets in Kontrollvolumina und die konsistente Berechnung der Geschwindigkeitsgradienten auf Rändern, die von benachbarten Kontrollvolumina geteilt werden, die Konservativität des Impulses gewährleistet.

Wenn jedoch die Nachbarstromlinie wechselt oder ein Staupunkt in einer Stromröhre liegt und zwei benachbarte Stromlinien einen Körper auf unterschiedlichen Seiten passieren, ist die Konservativität bezüglich des Massenstroms und des Impulses nicht mehr zwangsläufig gegeben. In diesen Fällen müssen geeignete Maßnahmen ergriffen werden, die zumindest eine globale Erhaltung aller Größen gewährleisten. Bei einem Wechsel der Nachbarstromlinie kann das z.B. die Auswertung des Massenstroms in einer größeren Stromröhre sein, die den Bereich umschließt, in dem der Wechsel der Nachbarstromlinie stattfindet.

3 Räumliche Diskretisierung

DAS WICHTIGSTE IN KÜRZE

- Das Verfahren benötigt kein Rechnetz, nur die diskretisierten Ränder des Rechengebiets und die Stromlinien.
- Für die Berechnung des Massenstroms zwischen einer Stromlinie und einer Nachbarstromlinie wird der Fußpunkt einer Linie, die senkrecht zur mittleren Strömungsrichtung verläuft, in relativen Koordinaten (Index des Nachbarstromlinien-Segments und die Lage des Punktes relativ zur Segmentlänge) gespeichert. Nur die absolute Lage der Nachbarpunkte wird in jeder Iteration neu berechnet. Die Relative nur alle 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 128, 128 , ... Iterationen um Rechenzeit zu sparen.
- Der Abstand der Stromlinien wird durch Einfügen Zusätzlicher so angepasst, dass der Diskretisierungsfehler ausreichend klein bleibt. Dasselbe gilt für den Abstand der Stromlinien-Stützpunkte.
- Die Verläufe der Lösungsvariablen wird quer zur Strömungsrichtung mit einer Funktion erster Ordnung, die Form der Stromlinie mit einer Funktion dritter Ordnung approximiert.
- Die Vorgehensweise bei Rezirkulation, Ablösung und Wiederanlegen wird beschrieben.
- Die globale Ordnung des Diskretisierungs-Schemas liegt bei den vorgestellten Testfällen zwischen zwei und drei. Die Druckapproximation quer zur Strömungsrichtung ist meistens der limitierende Faktor.

3.1 Rechengebiet

Für das Stromlinien-Verfahren ist prinzipiell kein Rechnetz erforderlich. Nur die Geometrie der Ränder des Rechengebietes wird benötigt um die Orte festzulegen, an denen die Randbedingungen gelten. Die diskretisierte Geometrie der Ränder muss die Körpergeometrie ausreichend genau abbilden. Die Lösungsvariablen werden ausschließlich in Stromlinien-Stützpunkten gespeichert.

In der aktuellen Version den Stromlinien-Verfahrens werden jedoch die Stromlinien-Stützpunkte durch die Schnittpunkte der Stromlinien mit Netzlinien (Zellflächen in 2D, Verbindungslinien zweier Knotenpunkte) definiert. Das ist jedoch willkürlich und nur durch die Entwicklungsge-

schichte des Verfahrens begründet. In einer früheren Variante hatten die Netzlinien noch eine Funktion bei der Aktualisierung des Druckfeldes, der hier kurz zusammengefasst ist:

- Bestimmung der Schnittpunkte der Stromlinien mit den Netzlinien.
- Berechnung des radialen und tangentialen Druckgradienten im Schnittpunkt.
- Die Tangential-Komponente des Druckgradienten wird für jede geschnittene Netzlinie gespeichert und für alle Netzlinien ohne Schnittpunkt interpoliert. Für das gesamte Rechengebiet liegt nun ein Druckgradientenfeld vor.
- Ausgehend von einer Druckrandbedingung wird der statische Druck im gesamten Rechengebiet auf der Basis des Gradientenfeldes aktualisiert.

Diese Vorgehensweise wird nicht mehr angewendet. In der aktuellen Form des Stromlinien-Verfahrens wird der statische Druck im Rechengebiet entlang der Stromlinien aktualisiert (siehe dazu die detaillierte Beschreibung in Kapitel 4.2). Eine Unterteilung des Rechengebiets in Zellen ist daher nicht mehr erforderlich. Allerdings stammen aus dieser Zeit noch einige Programmteile, die mit der Organisation der Stützpunkt-Verteilung entlang der Stromlinien zu tun haben. Das ist der einzige Grund, weswegen auch in der aktuellen Version noch ein Netz benützt wird.

3.2 Stromlinien

3.2.1 Geometrie

Die kontinuierlichen Stromlinien werden durch diskrete Stützpunkte approximiert. Diese Stützpunkte liegen in der aktuellen Version des Stromlinien-Verfahrens in den Schnittpunkten der Stromlinien mit den Netzlinien des kartesischen Gitters. Wenn kein Volumen-Netz verwendet wird, kann der Abstand der Stützpunkte bspw. in Abhängigkeit des Abstandes zu Nachbarstromlinien gewählt werden oder umgekehrt proportional zur Krümmung der Stromlinie.

Um eine möglichst äquidistante Verteilung der Stützpunkte zu erhalten, werden wie in Bild 3.1 dargestellt, nur Schnittpunkte berücksichtigt, deren Winkel zur Netzlinie größer oder gleich 45° ist.

Die Krümmung der Stromlinien in diesem Punkt ist gleich der eines Kreises durch diesen und die beiden stromauf- und stromabwärts gelegenen Punkte. Im ersten und letzten Punkt einer Stromlinie ist die Krümmung gleich null. Diese Annahme impliziert, dass die Gradienten der thermodynamischen Größen auf den Rändern des Rechengebiets gleich null sind. Im Fall einer Neumann-Randbedingung für den Druck wird die Krümmung der Stromlinien aus dem vorgegebenen Druckgradienten berechnet.

Generell gilt, dass zwei Stützpunkte derselben oder zweier benachbarter Stromlinien nur so weit auseinander liegen sollten, dass:

- die Interpolation erster Ordnung der thermodynamischen Daten zwischen zwei Stützpunkten und
- die Annahme eines linearen radialen Druckgradienten über den Stromröhrenquerschnitt

akzeptable Näherungen sind.

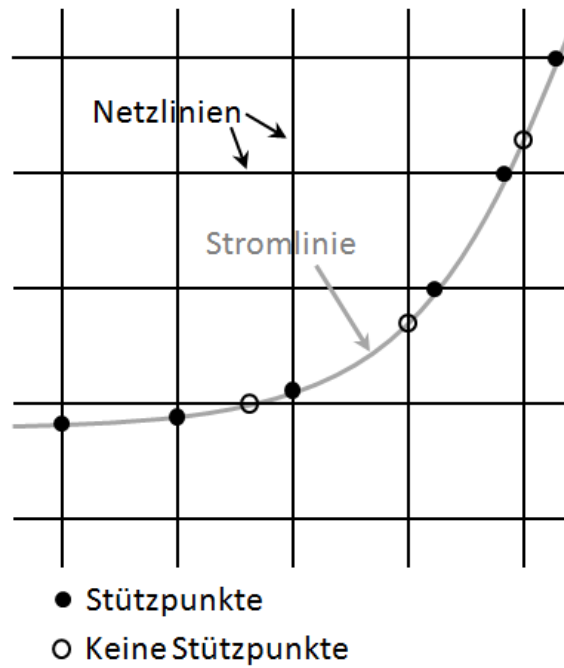


Abbildung 3.1: Stromlinienstützpunkte.

3.2.2 Bestimmung der nächstgelegenen Punkte auf Nachbarstromlinien

Bild 3.2 illustriert die folgende Beschreibung der Bestimmung des nächstgelegenen Punktes auf der Nachbarstromlinie.

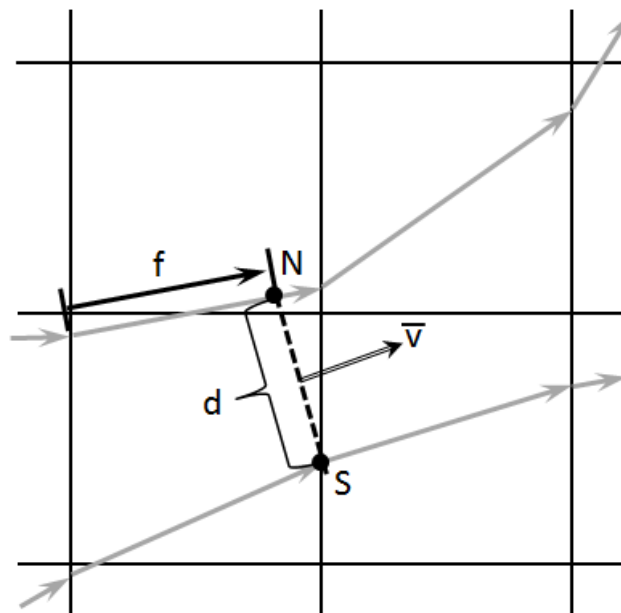


Abbildung 3.2: Bestimmung der nächstgelegenen Punkte auf den Nachbarstromlinien oder einer Wand.

Zunächst wird der Stützpunkt auf der benachbarten Stromlinie mit dem geringsten Abstand zu dem Punkt S auf der betrachteten Stromlinie gesucht. Die mittlere Strömungsrichtung zwischen

beiden Stromlinien wird gleich der Tangente an den Krümmungskreis im Stützpunkte S angenommen. Der nächstgelegene Punkt N auf der Nachbarstromlinie liegt im Schnittpunkt einer Linie senkrecht zur mittleren Strömungsrichtung durch den Punkt S und dem Nachbarsegment. Gespeichert wird er in baryzentrischen Koordinaten, indem der Index des Nachbarsegments gespeichert wird und ein Faktor f , der die Lage des Punktes N relativ zur Länge des Segments festlegt.

Im Vorgriff auf die spätere Beschreibung des iterativen Berechnungsverfahrens in Kapitel 4 soll an dieser Stelle nur kurz erwähnt werden, dass der Grund für die Speicherung in baryzentrischen Koordinaten darin besteht, dass zwar die absolute Lage der Nachbarpunkte in jeder Iteration aktualisiert wird, die relative Lage jedoch deutlich seltener, da die Ermittlung des nächstgelegenen Stromlinien-Stützpunktes auf einer benachbarten Stromlinie relativ teuer ist.

Ist zu Beginn der Rechnung noch nichts über die Nachbarschaftsbeziehungen der Stromlinien bekannt, muss einmalig der nächste Punkt von jeder anderen Stromlinie gesucht werden. Aus all diesen Punkten wird dann der Nächste ermittelt. Ist dies einmal für alle Punkte durchgeführt, kann bei jeder folgenden Aktualisierung auf die bereits vorliegenden Informationen zurückgegriffen werden. Auch wenn z.B. bei einer dreidimensionalen Rechnung eine andere Stromlinie näher herangerückt ist, als die bisher Nächstgelegene, müssen nur in einem bestimmten Radius alle Stromlinien geprüft werden. Also erst die bei der letzten Überprüfung nächstgelegenen Punkte, dann die Nächstgelegenen dieser Punkte und möglicherweise sicherheitshalber noch die Nächstgelegenen der im letzten Schritt neu hinzugekommenen Punkte. Im Fall einer zweidimensionalen Rechnung vereinfacht sich das Verfahren dadurch, dass die nächstgelegene Stromlinie immer auch die ist, die im Einströmquerschnitt benachbart ist, da sich Stromlinien definitionsgemäß nie schneiden.

3.2.3 Krümmungskorrektur

Je stärker die Krümmung der Stromlinie ist, desto größer ist der Fehler in der Lage des Punktes auf der Nachbarstromlinie bzw. einer Wand durch die abschnittsweise lineare Form der Stromlinien- bzw. Wand-Segmente. Die Qualität der Lösung kann auch ohne eine verbesserte räumliche Diskretisierung in Form von enger zusammen liegenden Stromlinien und -Stützpunkten deutlich verbessert werden, wenn der Ort des nächstgelegenen Punktes auf der Nachbarstromlinie unter Berücksichtigung der lokalen Krümmung der Stromlinie korrigiert wird.

Teil (a) von Bild 3.3 zeigt die Situation, in der zum Stützpunkt S auf der Stromlinie I die Lage des nächstgelegenen Punktes N auf der Nachbarstromlinie II korrigiert werden soll. Punkt N liegt zwischen denen mit 1 und 2 bezeichneten Endpunkten eines Segments. Der Krümmungskreis für Punkt 1 mit dem Radius r_1 ist dadurch definiert, dass er durch Punkt 1 selbst und durch den stromauf- und stromabwärts gelegenen Punkt verläuft. Dasselbe gilt für den Krümmungskreis des Punktes 2 mit dem Radius r_2 . Die Krümmung im Punkt N wird nun abhängig von seiner baryzentrischen Koordinate f (im Teil (b) des Bildes) linear aus den Krümmungen in den Punkten 1 und 2 interpoliert.

Die Krümmung eines Kreises c ist gleich

$$c = \frac{1}{r}. \quad (3.1)$$

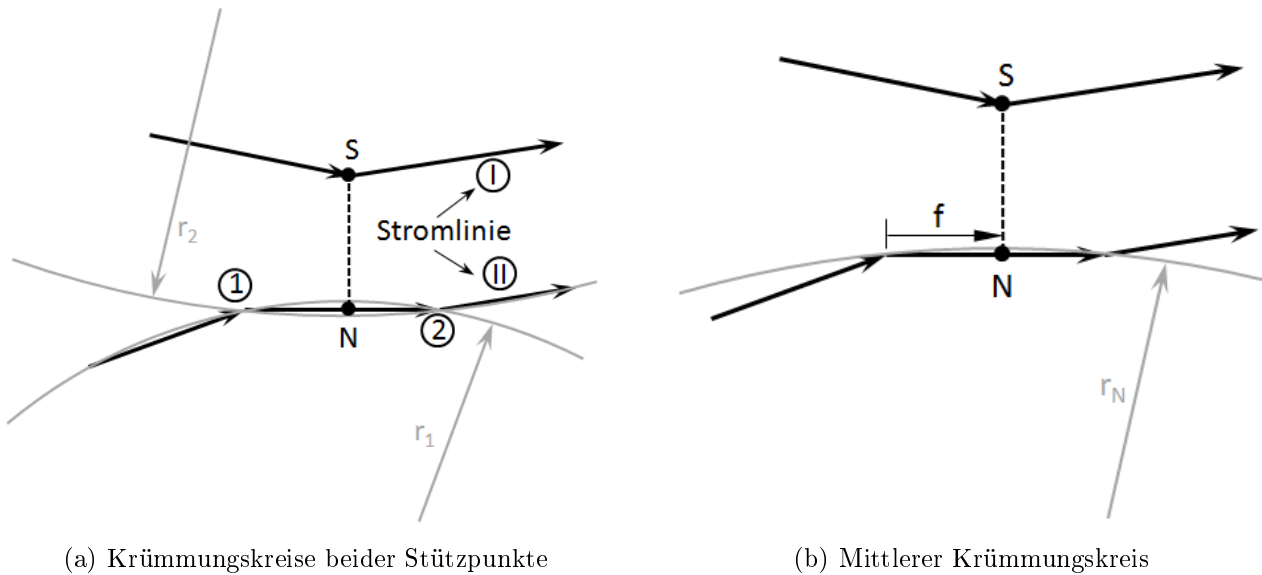


Abbildung 3.3: Bestimmung der mittleren Krümmung im nächstgelegenen Punkt auf einer Nachbarstromlinie.

Die mittlere Krümmung am Ort N ist also

$$c_N = f \frac{1}{r_2} + (1 - f) \frac{1}{r_1}. \quad (3.2)$$

Der mittlere Radius R_N ist damit wiederum

$$r_N = \frac{1}{c_N}. \quad (3.3)$$

Allgemein gilt für die in Bild 3.4 gezeigte Sekante der Länge L des Kreises mit dem Radius r für den Abstand h des Kreismittelpunktes von der Sekante

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - L^2}. \quad (3.4)$$

Wendet man dies nun auf die Situation in Bild 3.5 an, das das benachbarte Stromlinien-Segment mit der Länge L_s zeigt, für das der mittlere Krümmungskreis um dessen Zentrum Z mit dem Radius r_N für den Ort mit der baryzentrischen Koordinate f dargestellt ist, ist der Abstand d des nächstgelegenen Punktes N von dem Segment gegeben durch

$$d(\varphi) = r_N \sin \varphi - \frac{1}{2} \sqrt{4r_N^2 - L_s^2}. \quad (3.5)$$

Der Winkel φ abhängig vom Faktor f und der Länge des Segments L_s ist dabei

$$\varphi(f) = \arccos \left(\frac{|f - 0,5| L_s}{r_N} \right). \quad (3.6)$$

Der Abstand des nächstgelegenen Punktes auf der Nachbarstromlinie bzw. der Wand muss also um den Betrag $d(\varphi)$ aufgrund der Krümmung der Stromlinie korrigiert werden.

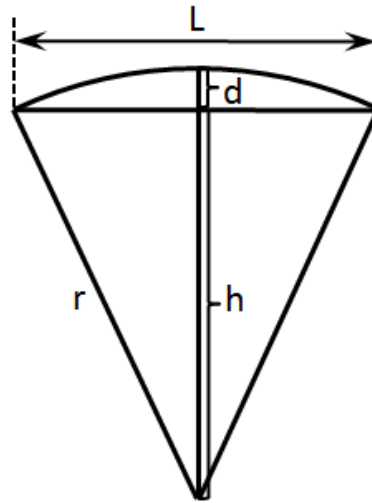


Abbildung 3.4: Länge einer Sekante.

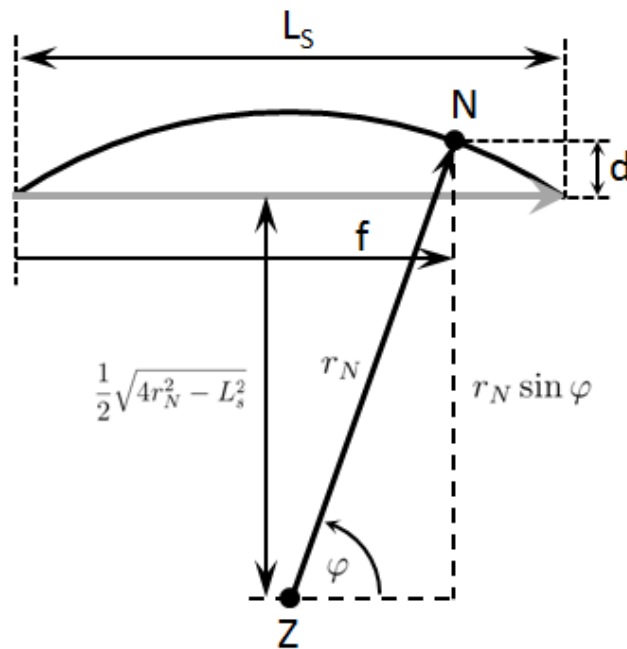


Abbildung 3.5: Krümmungskorrektur - korrigierte Lage des nächstgelegenen Punktes N auf dem Nachbarsegment.

Durch die lineare Interpolation der Krümmung zwischen zwei Stützpunkten wird die Stromlinienform durch eine Kurve dritter Ordnung approximiert, die Wendepunkte zwischen zwei Stützpunkten abbilden kann.

Auch wenn die Korrektur $d(\varphi)$ in den meisten Fällen recht klein ist, wirkt sie sich trotzdem vor allem bei eng zusammen liegenden Stromlinien in einer signifikanten relativen Querschnittsänderung aus, die in die Berechnung des Massenstroms oder des statischen Drucks in der Stromröhre einfließt.

3.2.4 Aktualisierung der nächstgelegenen Punkte auf Nachbarstromlinien

Ist die topologische Nachbarschaft seit der letzten Aktualisierung gleich geblieben, also der nächstgelegene Punkt auf der Nachbarstromlinie liegt immer noch auf demselben Segment, muss nur der Faktor f aktualisiert werden. Im Gegensatz zur Erstbestimmung ist der nächstgelegene Punkt nun bereits näherungsweise bekannt. Das erlaubt die genauere Bestimmung der mittleren Strömungsrichtung zwischen beiden Stromlinien. Die Krümmung der Nachbarstromlinie ist in den beiden Endpunkten bekannt. Die mittlere Krümmung im Punkt N wird mit dem alten Faktor f' linear interpoliert. Die Geometrie der Nachbarstromlinie zwischen den beiden nächstgelegenen Stützpunkten wird nun genauer approximiert durch die Annahmen, dass der Punkt f' auf dem mittleren Krümmungskreis durch beide nächstgelegene Stützpunkte mit der interpolierten Krümmung liegt. Der mittlere Strömungsvektor wird dann gebildet, indem der normierte Tangentialvektor an diesen mittleren Krümmungskreis der Nachbarstromlinie mit dem Tangentialvektor an den Krümmungskreis im Punkt S addiert wird. Anschließend wird der nächstgelegene Punkt auf der Nachbarstromlinie dadurch ermittelt, dass eine Linie senkrecht zu diesem mittleren Strömungsvektor mit dem Nachbarsegment geschnitten wird. Aus dem neuen Schnittpunkt wird dann der aktualisierte Faktor f bestimmt.

Ändert sich die relative Lage der Stromlinien nur noch wenig, ist der Fehler durch die veraltete relative Lage der Nachbarpunkte vernachlässigbar klein, da eine kleine Verschiebung entlang des Segments sich nur sehr wenig auf den Abstand der Punkte S und N auswirkt.

3.2.5 Anpassung der Stromliniendichte

Wie bereits im Abschnitt zur Stabilität des Stromlinien-Verfahrens beschrieben, hängt diese von dem Verhältnis zwischen Stromlinien-Abstand zu Stützpunkt-Abstand ab. Auch die Genauigkeit wird durch einen zu großen Stromlinien-Abstand negativ beeinflusst, da die Approximationen von Werten auf einer Nachbar-Stromlinie mit einem linearen Gradienten zu Fehlern führt. Daraus folgt, dass die Stromlinien-Dichte an die Strömungstopologie angepasst werden sollte. Das geschieht automatisiert auf der Basis des Stabilitätskriteriums als Steuergröße. Übersteigt der Stromlinien-Abstand den Stützpunkt-Abstand um einen Faktor von 1,5, wird eine zusätzliche Stromlinie eingefügt, deren Startpunktes in der Mitte zwischen den beiden Startpunkten der Nachbarstromlinien liegt. Anschließend werden Stromlinien-Stützpunkte hinzugefügt, die jeweils denselben Abstand zu beiden Nachbarstromlinien haben. Dieser Prozess wird so lange wiederholt, bis eines der folgenden Abbruch-Kriterien erfüllt ist:

- die Stromlinie schneidet einen durchströmbaren Rand,
- sie erreicht eine, vom Benutzer vorgegebene, maximale Länge,

- sie erreicht ein Gebiet, in dem der mittlere Abstand zu beiden Nachbarstromlinien weniger als halb so groß ist, wie der Abstand der Stützpunkte,
- der Startpunkt der Stromlinie wird als Nachbarpunkt ermittelt, was im Fall einer Rezirkulation auftreten kann.

Nachdem die Ziel-Anzahl an Stützpunkten für die neue Stromlinie erreicht ist, wird ihre Lage relative zu beiden Nachbarstromlinien mit dem regulären Algorithmus angepasst, indem zunächst der Druck entlang dieser einen Stromlinie separat aktualisiert wird, dann der Totalzustand und anschließend die Lage der Stützpunkte. Während alle anderen Stromlinien unangetastet bleiben, werden so mehrere Iterationen nur für die neue Stromlinie durchgeführt, bis sich deren Lage kaum mehr ändert. Erst dann wird die reguläre Anpassung aller Stromlinien inklusive der Neuen fortgesetzt.

3.2.6 Behandlung von Rezirkulation, Ablösung und Wiederanlegen

Die Behandlung von Strömungen mit Rezirkulation, Ablösung und Wiederanlegen werden am Beispiel einer rückwärts-gewandten Stufe erläutert, wie sie in Bild 3.6 gezeigt ist. Diese Strömungstopologie ist nur mit viskosen Fluiden möglich. Eine reibungsfreie Strömung würde einfach parallel vom Ein- zum Ausströmrand verlaufen, ohne ihren Strömungs-Querschnitt zu vergrößern, da der einzige Mechanismus zur Aufweitung der Impulsverlust der untersten Stromlinie zum, zunächst noch ruhenden, Rezirkulationsgebiet ist.

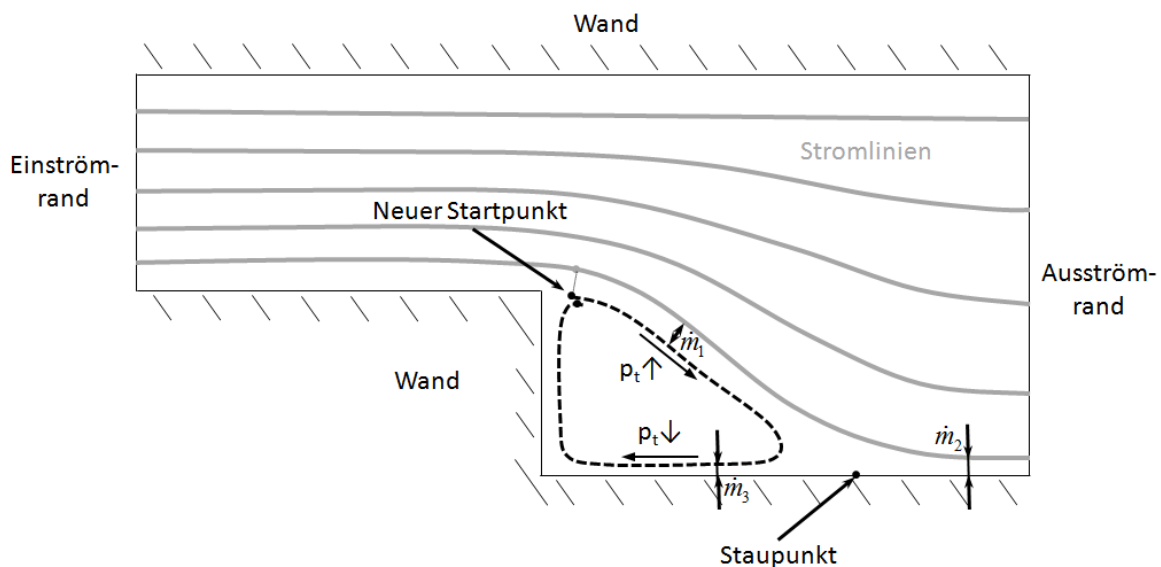


Abbildung 3.6: Rückwärts gewandte Stufe.

Zunächst werden am Einströmrand die grau gezeichneten Stromlinien gestartet und bis zum Ausströmrand verlängert. Die Form richtet sich anfangs danach, dass jede Stromlinie möglichst den gleichen Abstand zu beiden Nachbarstromlinien hat. Der, von den Stromlinien eingenommene Strömungsquerschnitt, weitet sich dadurch (künstlich) vom Ein- zum Auströmquerschnitt auf, ohne jedoch dass eine Rezirkulation entsteht.

Ausgehend von diesem Zustand wird nach der Initialisierung die Notwendigkeit überprüft, ob zusätzliche Stromlinien eingefügt werden müssen (siehe dazu auch das vorangegangene Kapitel *Anpassung der Stromliniendichte*). Dabei zeigt sich, dass die wandnahe Stromlinie über eine bestimmte Länge keine Nachbarpunkte auf Stromlinien oder Wänden innerhalb eines maximalen

Such-Radius hat. Es liegt also eine geometrisch bedingte Ablösung vor. Daraufhin wird neben dem ersten Punkt, der keinen Nachbarn mehr hat, mit demselben Abstand wie die Stromlinie zur anderen Seite ein neuer Startpunkt eingefügt.

Der Totaldruck in diesem Punkt ist anfangs gleich dem statischen Druck im benachbarten Punkt auf der Wandstromlinie und die Totaltemperatur ist auf beiden Stromlinien gleich. Der Hintergrund für die Wahl des Totaldrucks ist, dass sich dadurch entlang der neuen Stromlinie aufgrund der Beschleunigung durch viskose Kräfte ein niedrigerer statischer Druck ergibt, der für eine Umlenkung in Richtung des noch nicht mit Stromlinien diskretisierten Bereichs sorgt.

Anschließend werden parallel zur wandnahen Stromlinie weitere Stromlinien-Segmente hinzugefügt. In dem Punkt, in dem sich die wandnahe Stromlinie wieder an die untere Wand hinter der Stufe anlegt, wird der Massenstrom zwischen dieser und der Wand \dot{m}_2 ermittelt und mit dem vorläufigen Wert zwischen der Neuen und der wandnahen Stromlinie \dot{m}_1 verglichen. Ist $\dot{m}_2 > \dot{m}_1$, wird sie zwischen der wandnahen Stromline und der Wand hinter der Stufe bis zum Ausströmrand verlängert. Ist $\dot{m}_2 < \dot{m}_1$, wie in Bild 3.6 illustriert, wird sie von dem neu erkannten Staupunkt weg, stromaufwärts umgelenkt. Allgemein gilt für den Wandabstand von Stromlinien stromabwärts von Staupunkten, dass $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$. Weitere Elemente werden angefügt, bis eines der vier Abbruchkriterien erreicht ist, die im Abschnitt *Anpassung der Stromliniendichte* genannt sind - in diesem Fall ist es das Auffinden des eigenen Startpunktes als Nachbarpunkt. Anschließend wird die neue Stromlinie mit dem normalen Algorithmus angepasst, mit einer Besonderheit, da es sich um eine „geschlossene“ Stromlinie handelt: der Totaldruck auf der neuen Stromlinie, der sich durch viskose Kräfte bis zum Staupunkt erhöht und anschließend entlang der Wand wieder reduziert, wird im letzten Stützpunkt nicht denselben Wert wie im Startpunkt haben, was bei einer (nahezu) geschlossenen Stromlinie jedoch der Fall sein muss. Deswegen werden alle Änderungen im Totaldruck vom Startpunkt bis zum Endpunkt mit einem konstanten Faktor skaliert, so dass im Endpunkt derselbe Wert wie im Startpunkt erreicht wird. Nachdem die neue Stromlinie einige Iterationen lang separat angepasst wurde, wird die reguläre Anpassung aller Stromlinien inklusive der Neuen wieder aufgenommen. Das Kräftegleichgewicht quer zu den Stromlinien bestimmt die Form des Rezirkulationsgebiets sowie die Lage des Staupunkts hinter der Stufe.

Bei der nächsten Überprüfung der Stromlinien-Dichte stellt sich dann wiederum heraus, dass auf der Innenseite der neuen Stromlinie keine Nachbarstromlinie zu finden ist. Daraufhin wird eine Weitere nach demselben Algorithmus eingefügt. Dieser Prozess wird so lange fortgesetzt, bis die innere Stromlinie innerhalb des vorgegebenen Such-Radius immer nur sich selbst als Nachbarstromlinie findet.

3.2.7 Gespeicherte Daten

Grundsätzlich kann bei der Implementation eines Algorithmus der Bedarf an Arbeitsspeicher und Rechenzeit in gewissen Grenzen variiert werden. Zwingend ist ein Mindestsatz an Informationen, aus denen alle benötigten Größen berechnet werden können. Wird eine Größe in einer Iteration wiederholt benötigt, kann es sinnvoll sein, diese abzuspeichern. Die optimale Lösung ist meistens weder, nur den absoluten Minimalersatz an Werten zu speichern und alle anderen bei Bedarf daraus zu berechnen, noch alle mehr als einmal pro Iteration benötigten Werte komplett abzuspeichern. Das Optimum hängt u.a. auch von der verfügbaren Computer-Architektur ab. Es ist meistens nur durch aufwändiges „Profiling“ zu finden. Dabei werden detailliert die Rechenzeiten einzelner wichtiger Teilschritte des Algorithmus ermittelt, um die besonders Kritischen herauszufinden und separat zu optimieren.

Vor diesem Hintergrund wird nun zunächst der Mindestsatz an Informationen aufgelistet, die in Stromlinien-Stützpunkten gespeichert werden müssen.

- Index des Stützpunktes (nur bei Verwendung von Indizes statt Zeigern)
- Index (Zeiger) der stromauf- und stromabwärts gelegenen Stützpunkte (der Speicherbedarf ist identisch, ob Indizes oder Zeiger gespeichert werden)
- Liste aller Indizes (Zeiger) direkt benachbarter Stromliniensegmente
- Liste aller Faktoren f , die die relative Lage der nächstgelegenen Punkte auf diesen Segmenten beschreiben
- Geometrischer Ort (absolute Koordinaten oder Index der Netzlinie und relativer Ort auf dieser)
- Thermodynamische Daten:
 - Statischer Druck
 - Totaldruck
 - Totaltemperatur

Weitere Werte, die während einer Iteration mehr als einmal benötigt werden, sind:

- Index der Stromlinie (z.B. um direkt auf den Startpunkt der Stromlinie zugreifen zu können und damit auf die Randbedingung am Einströmrand; prinzipiell könnte man auch entlang der Stromlinie Element für Element stromaufwärts bis zum Startpunkt gehen.)
- Einen Index, der besagt, ob der Stützpunkt auf einer horizontalen oder einer vertikalen Netzlinie liegt
- Liste der Koordinaten aller Nachbarpunkte
- Liste der Abstände aller Nachbarpunkte
- Koordinaten des Zentrums und der Radius des Krümmungskreises
- Tangentialvektor des Segments
- Radialvektor des Segments (Vektor vom Zentrum des Krümmungskreises zum Stützpunkt)
- Exakter Strömungsvektor (Tangentialvektor des Krümmungskreises)
- Mittlere Strömungsvektoren zu allen Punkten auf Nachbarstromlinien / Wänden
- Tangentialer Druckgradient
- Radialer Druckgradient
- Mittlerer tangentialer Druckgradient entlang des Segments
- Weitere thermodynamische Daten:
 - Statische Temperatur
 - Dichte
 - Machzahl
 - Geschwindigkeit

3.3 Konvergenzordnung des Verfahrens

Bei einem Navier-Stokes Verfahren müssen (nichtlineare, partielle) Differentialgleichung zweiter Ordnung diskretisiert werden, also erste, zweite und gemischte Ableitungen. Beim Stromlinien-Verfahren ist die Situation anders, da nur algebraische Gleichungen sequentiell gelöst werden. Die mathematische Beschreibung der physikalischen Prozesse wird also nicht in einer diskretisierten Form gelöst, sondern direkt (bis auf Rundungsgenauigkeit). Was jedoch diskretisiert wird, ist die Stromlinienform und der radiale Verlauf der Lösungsvariablen p , p_t und T_t für die Massenstrom-Berechnung zwischen zwei Stromlinien.

Wie im Abschnitt zur *Krümmungskorrektur* beschrieben ist, wird die Krümmung der Stromlinie zwischen den Stützpunkten linear interpoliert. Die Form der Stromlinie wird daher dritter Ordnung genau approximiert.

Für die Berechnung des Massenstroms in einer Stromröhre (siehe Kapitel *Thermodynamische und strömungsmechanische Grundlagen des Verfahrens*) wird der radiale Verlauf des statischen Drucks, des Totaldrucks und der Totaltemperatur über den Stromröhrenquerschnitt mit einer Funktion erster Ordnung approximiert.

Die einzige Aussage die daraus abgeleitet werden kann ist, dass das Stromlinien-Verfahren insgesamt eine Konvergenzordnung zwischen eins und drei hat, die sich nur durch die Anwendung auf eine konkrete Simulationsaufgabe genauer ermitteln lässt. Vorgreifend sei gesagt, dass sich für die, im Folgenden untersuchten Validierungsfälle, eine Konvergenz zwischen zweiter und dritter Ordnung ergibt. Das bedeutet, dass die Diskretisierungsgenauigkeit der Stromlinienform die gesamte Konvergenz meistens dominiert. Verlaufen die Isobaren (überwiegend) senkrecht zu den Stromlinien, wirkt sich der Diskretisierungsfehler der linearen Approximation des Druckverlaufs zwischen zwei Stromlinien überhaupt nicht aus. In diesem Fall sollte die Konvergenzordnung Werte nahe drei ergeben (siehe dazu z.B. die Auswertungen der Validierungsfälle 7.2.2 und 7.3.1). Verlaufen die Isobaren spitzwinklig zu den Stromlinien und weisen eine deutliche Krümmung auf, wird die Konvergenzordnung etwas niedriger ausfallen (siehe dazu die Auswertung des Validierungsfalls 7.2.1).

Eine Approximation des Verlaufs des statischen Drucks quer zur Stromlinie zweiter Ordnung kann realisiert werden, indem ein Polynom zweiten Grades (z.B. eine Parabel) verwendet wird, das definiert ist über die folgenden drei Randbedingungen:

- der Wert des statischen Drucks im Stützpunkt der betrachteten Stromlinie ist gleich dem dort gespeicherten Wert,
- der Wert der ersten Ableitung in diesem Punkt, sowie dem Punkt auf der benachbarten Stromlinie, wird mit Hilfe der radialen Impulserhaltungsgleichung $\partial p / \partial r = (\rho v^2) / r$ ermittelt.

Eine Approximation dritter Ordnung würde zusätzlich noch den radialen Gradienten der Nachbarstromlinie auf der anderen Seite (im Fall einer 2D Strömung) berücksichtigen.

Die Berechnung des Massenstroms zwischen zwei Stromlinien ist von zentraler Bedeutung für das Stromlinien-Verfahren, da sie sowohl Bestandteil der Druckaktualisierung, als auch der Stromlinienform-Anpassung ist. In diese gehen alle erwähnten Diskretisierungsfehler ein. Daher soll der Einfluss der Diskretisierungsfehler dieser Größen auf den Massenstrom genauer betrachtet werden. Nach den Gleichungen 2.21, 2.22 und 2.23 wird der Massenstrom mit den arithmetischen Mittelwerten für Dichte und Geschwindigkeit berechnet, also

$$\dot{m} = \frac{\rho + \rho_N}{2} \frac{v + v_N}{2} A. \quad (3.7)$$

Nach der thermischen Zustandsgleichung 2.1 ist die Abhängigkeit der Dichte vom Druck gleich

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{RT}. \quad (3.8)$$

Für Luft mit $R = 287,1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ bei einer Temperatur von $T = 300 \text{ K}$ bedeutet das, dass ein auf eins normierter Fehler im statischen Druck einen Fehler der Größenordnung $1 \cdot 10^{-5}$ in der Dichte verursacht. Ein Fehler in der Abschätzung des statischen Drucks auf der Nachbarstromlinie wirkt sich also nur sehr geringfügig auf den Betrag des Massenstroms aus.

Um die Abhängigkeit zwischen statischem Druck und Strömungsgeschwindigkeit zu berechnen, werden die folgenden Gleichungen kombiniert:

$$1.) \quad Ma(p, p_t) \quad : \quad \frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{Gl. 2.15}$$

$$2.) \quad T(Ma, T_t) \quad : \quad \frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2 \quad \text{Gl. 2.14}$$

$$3.) \quad v(Ma, T) \quad : \quad v = Ma \sqrt{\kappa RT} \quad \text{Gl. 2.13}$$

zu

$$p = p_t \left[1 + \frac{1}{\frac{2\kappa RT_t}{v^2(\kappa-1)} - 1} \right]^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} = p(p_t, T_t, v). \quad (3.9)$$

Wählt man eine beliebige Machzahl zwischen null und eins und berechnet für einen statischen Druck von z.B. $p = 100000 \text{ Pa}$ und eine statische Temperatur von z.B. $T = 300 \text{ K}$ die entsprechende Machzahl (Gl. 2.13), sowie den Totaldruck (Gl. 2.15) und die Totaltemperatur (Gl. 2.14), ist Gleichung 3.9 identisch erfüllt. Behält man die Werte für p_t und T_t bei und berechnet den Druck p einmal für $v - 0,1 \text{ m/s}$ und $v + 0,1 \text{ m/s}$ erhält man die numerisch ermittelte Änderung des Drucks in Abhängigkeit einer Änderung der Geschwindigkeit, also

$$\frac{dp}{dv} = \frac{p(v - 0,1 \text{ m/s}) - p(v + 0,1 \text{ m/s})}{\Delta v = 0,2 \text{ m/s}}. \quad (3.10)$$

Da jedoch das Verhältnis zwischen Geschwindigkeitsänderung und Druckänderung in Abhängigkeit der Machzahl gesucht sind, zeigt Bild 3.7 den Kehrwert $\frac{dv}{dp}$.

Z.B. bei einer Machzahl von 0,25 führt ein Approximationsfehler des Drucks zu einem Fehler in der Geschwindigkeit, der etwa zwei Größenordnungen kleiner ist. Da ein Fehler in der Geschwindigkeit linear in die Massenstromberechnung eingeht, beeinflussen Druckfehler den Massenstrom über die Geschwindigkeit mit einem Faktor von 10^{-2} bei einer Machzahl von 0,25. Der Fehler in der Geschwindigkeit wird größer für kleine Machzahlen, weil die Differenz zwischen Totaldruck und statischem Druck in diesem Fall kleiner wird und ein gleicher absoluter Druckfehler bei kleinen Machzahlen zu einem vergleichsweise größeren relative Fehler führt.

Ein auf eins normierter Fehler in der Approximation des Drucks auf der Nachbarstromlinie verursacht somit aufgrund des daraus resultierenden Fehlers in der Dichte einen Fehler von 10^{-5} und aufgrund des daraus resultierenden Fehlers in der Geschwindigkeit einen Fehler der Größenordnung $10^{-3} - 10^0$ auf den Massenstrom.

Außer dem statischen Druck werden auch Totaldruck und Totaltemperatur mit konstanten Gradienten über dem Stromröhrenquerschnitt approximiert. Beide Werte sind außerhalb einer Grenzschicht konstant. Der Fehler im Massenstrom verursacht durch den Diskretisierungsfehler

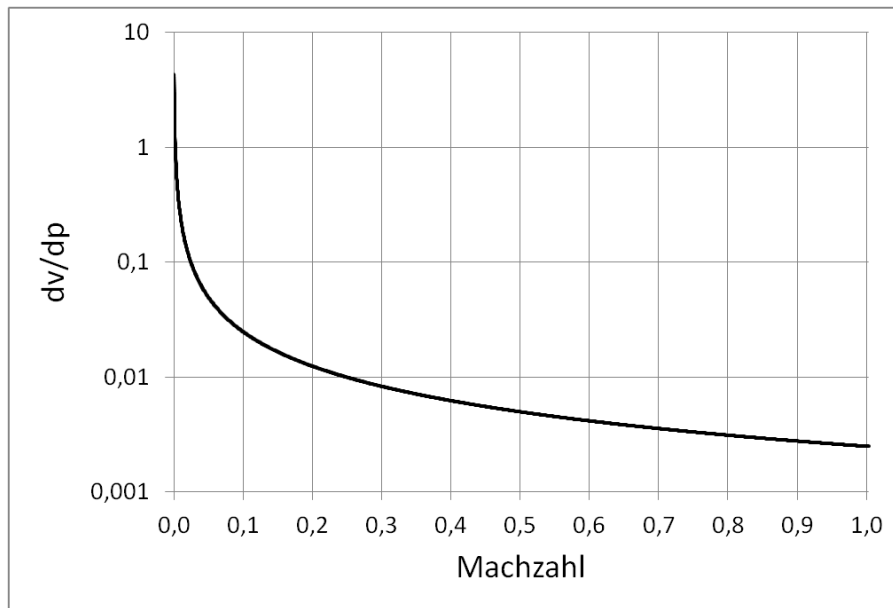


Abbildung 3.7: Verhältnis zwischen Geschwindigkeitsänderung und Druckänderung in Abhängigkeit der Machzahl für $\kappa = 1,4$, $R = 287,1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ und einen statischen Druck von $p = 100000 \text{ Pa}$ und einer statischen Temperatur von $T = 300 \text{ K}$.

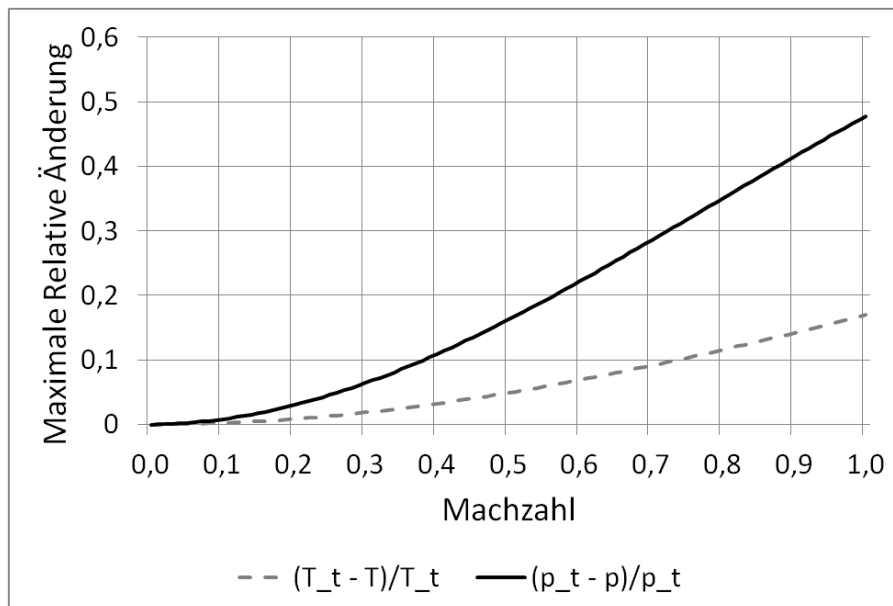


Abbildung 3.8: Maximale relative Totaldruck- und Totaltemperaturänderung in einem Strömungsfeld abhängig von der maximalen Strömungs-Machzahl.

beider Größen wirkt sich also nur innerhalb von Grenzschichten aus. Die maximale relative Änderung des Totaldrucks und der Totaltemperatur in Abhängigkeit der maximalen Strömungsmachzahl ist in Bild 3.8 dargestellt.

Aufgrund des Exponent $\kappa/(\kappa - 1)$ der Gl. 2.15 im Vergleich zu Gl. 2.14 ist die relative Änderung des Totaldrucks betragsmäßig größer, als die der Totaltemperatur. Eine Änderung beider Werte von maximal 3 % ist beim Totaldruck für Machzahlen bis 0,2 gegeben, bei der Totaltemperatur bis zu einer Machzahl von knapp 0,4. Ein Fehler bedingt durch eine konstante Approximation der Gradienten beider Größen zwischen zwei Stromlinien wirkt sich bei geringen Machzahlen daher kaum aus. Bei höheren Machzahlen ist das aber durchaus der Fall, da sich die gesamte Änderung auf den räumlich eher kleinen Bereich der Grenzschicht konzentrieren.

4 Iterativer Lösungsalgorithmus

DAS WICHTIGSTE IN KÜRZE

- Nur die Ränder des zweidimensionalen Rechengebietes müssen in diskretisierter Form vorliegen.
- Ein Vektorfeld, das den Verlauf der Start-Stromlinien vorgibt, wird durch eine Überlagerung der vorgegebenen Start-Strömungsrichtung mit der Richtung der Tangente des nächstgelegenen Wandsegments, die bis zu einem Maximalabstand mit dem inversen Abstand gewichtet wird.
- Die Startpunkte der Stromlinien werden mit einem vorgegebenen Abstand auf den Einströmrändern erzeugt. Anschließend werden die Stromlinien parallel zu dem Richtungsfeld verlängert bis sie entweder (a) eine vorgegebene Maximallänge erreichen, (b) einen durchströmbaren Rand kreuzen oder (c) ihren eigenen Startpunkt als Nachbarnpunkt finden.
- Der Abstand der Stromlinien wird durch Einfügen Zusätzlicher so angepasst, dass der Diskretisierungsfehler ausreichend klein bleibt. Dasselbe gilt für den Abstand der Stromlinien-Stützpunkte.
- Der Lösungsalgorithmus besteht aus drei Schritten pro Iteration:
 - Der statische Druck wird entlang von Stromlinien, ausgehend von der Druckrandbedingung am Ausströmrand, mit einem Raumschritt-Verfahren entgegen der Strömungsrichtung unter Verwendung der gekoppelten Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichung (Gl. 2.29) aktualisiert.
 - Um die Einström-Randbedingung für das neue Druckfeld einzuhalten, müssen Totaldruck und Totaltemperatur im Startpunkt jeder Stromlinie angepasst werden. Diese Änderung wird dann entlang der Stromlinie auf jeden Stützpunkt angewendet. Dieser Schritt ermöglicht eine unendlich große Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen durch das Rechengebiet, was die Konvergenz der Berechnung kompressibler Strömungen verbessert.
 - Als letztes wird die Stromlinienform in einem Raumschritt-Verfahren in Strömungsrichtung so angepasst, dass das Verhältnis der Massenströme zu Nachbarstromlinien in einem Stützpunkt gleich dem ist, das im stromaufwärts Gelegenen vorliegt.

4.1 Initialisierung

Ziel der Initialisierung ist es, Startwerte für die erforderlichen thermodynamischen Größen und eine vorläufige Form der Stromlinien bereitzustellen, die die Anwendung des iterativen Rechenverfahrens ermöglicht.

Zuerst wird entweder ein Finite-Volumen-Netz importiert, auf das anschließend die Lösung interpoliert werden soll, oder zumindest die Ränder des Rechengebietes in diskretisierter Form. Für jeden Einströmrand ist vom Benutzer ein konstanter initialer Abstand der Startpunkte der Stromlinien vorzugeben, sowie eine Hauptströmungsrichtung im Rechengebiet.

Dann wird entweder für jedes Zellzentrum oder in äquidistant im Rechengebiet verteilten Punkten die mittlere Strömungsrichtung an jedem dieser Orte berechnet. In Punkten die nicht in der Nähe einer Wand liegen, ist diese Richtung gleich der vorgegebenen Hauptströmungsrichtung. Für die Punkte, die innerhalb eines vom Benutzer festgelegten Abstandes zu einer Wand liegen, wird der Vektor der Hauptströmungsrichtung und ein wandtangentialer Vektor addiert, der mit dem inversen Abstand zur Wand gewichtet ist. Dadurch ist gewährleistet, dass bereits die initialen Stromlinien innerhalb einer festgelegten Distanz von einer Wand kontinuierlich um einen nicht-durchströmten Bereich des Rechengebiets umgelenkt werden. Soll die Strömung in einem beliebig gekrümmten Kanal initialisiert werden, sorgt die berechnete mittlere Strömungsrichtung zwischen den Kanalwänden unabhängig von der Hauptströmungsrichtung dafür, dass die Stromlinien überall parallel zu den Wänden verlaufen.

Nachdem die durch den vorgegebenen Abstand der Startpunkte festgelegte Anzahl an Stromlinien an einem Einströmrand erzeugt sind, wird deren Abstand nach bestimmten Kriterien beurteilt. Z.B. das Verhältnis des lokalen Abstands zu den Nachbarstromlinien und der Kantenlänge der durchquerten Zellen oder der Krümmung der Stromlinie. Überschreiten diese Kriterien die im Programm festgelegten Grenzwerte, werden so lange zwischen zwei Stromlinien-Startpunkten weitere Startpunkte eingefügt, bis das gesamte Rechengebiet ausreichend mit Stromlinien abgedeckt ist. Die Form der zusätzlichen Stromlinien ist dadurch bestimmt, dass sie zu allen bereits vorhandenen Nachbarstromlinien denselben Abstand einhalten. Dann werden die benutzerdefinierten Startwerte der thermodynamischen Größen auf alle Stromlinien-Stützpunkte angewendet.

Besonders bei hohen Stromlinien-Anzahlen und komplizierten Geometrien ist es sinnvoll, eine vorläufige Adaption der Stromlinienform durchzuführen, bevor der reguläre Lösungsalgorithmus angewendet wird. Diese besteht darin, dass die Form aller Stromlinien so angepasst wird, dass sie jeweils möglichst gleiche Abstände zu allen Nachbarstromlinien hat. Die thermodynamische Größen bleiben dabei unangetastet.

4.2 Aktualisierung des statischen Drucks

Die Aktualisierung des statischen Drucks ist der erste Schritt innerhalb einer Iteration.

Er wird in den Stützpunkten der Stromlinie bei einer Unterschallströmung entgegen der Strömungsrichtung von der, geeigneter Weise am Ausströmrand gelegenen, Druckrandbedingung aus aktualisiert. Im letzten Stützpunkt der Stromlinie wird der Druck gleich dem der Randbedingung gesetzt. Von dort ausgehend wird der Druck nach und nach im jeweils stromaufwärts gelegenen Stützpunkt bestimmt, bis der Einströmrand erreicht ist.

Die Prozedur, anhand der der statische Druck nun im jeweils stromaufwärts gelegenen Stromlinien-Stützpunkt aktualisiert wird, soll an dem in Bild 4.1 dargestellten Stromliniensegment zwischen den Punkten A und B erläutert werden. Die in Strömungsrichtung links gelegenen Punkte auf den Nachbarstromlinien sind mit dem Index 'l', die Rechten mit 'r' bezeichnet.

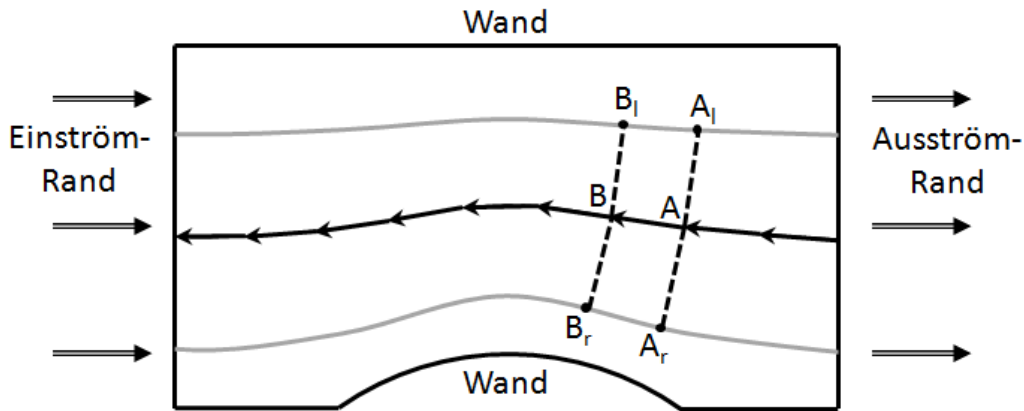


Abbildung 4.1: Aktualisierung des statischen Drucks.

Für die Aktualisierung des statischen Drucks in B wird nun ein Stromröhrensegment zwischen den Punkten A und B gebildet. Liegen die Punkte A_l und B_l auf derselben Stromlinie (was z.B. bei einer Rezirkulation nicht immer der Fall ist), zählt der Bereich zwischen der mittleren und der linken Stromlinie zu dieser Stromröhre. Ist das bei A_r und B_r ebenfalls der Fall, zählt auch der rechtsseitige Bereich dazu. Falls z.B. A_r und B_r auf unterschiedlichen Stromlinien liegen, besteht das Stromröhrensegment nur aus dem Teil, der durch die Punkte A , A_l , B_l und B begrenzt wird. Je nachdem, welche Nachbarstromlinien gültige Begrenzungen des Stromröhrensegments sind, wird der Massenstrom zwischen der mittleren Stromlinie und diesen zum Gesamt-Massenstrom des lokalen Stromröhrensegments addiert.

Mit den alten Werten des statischen Drucks, des Totaldrucks und der Totaltemperatur im Punkt B wird der Gesamt-Massenstrom zu den gültigen Nachbarstromlinien berechnet. Da die thermodynamischen Größen über den Stromröhren-Querschnitt jedoch variieren können, wird zunächst mit Gl. 2.28 für den Massenstrom der vorherigen Iteration und die sonstigen thermodynamischen Größen in Punkt B der äquivalente Querschnitt einer quasi-eindimensionalen Stromröhre berechnet. Das ist die Höhe, die eine Stromröhre hätte, durch die der berechnete Massenstrom fließt und für die alle thermodynamischen Größen konstant über den gesamten Querschnitt gleich den Werten in Punkt B sind. Diese Höhe ist gleich oder kleiner als der tatsächliche geometrische Querschnitt. Diese äquivalente Querschnittsfläche sowie der Totaldruck, die Totaltemperatur und der Gesamt-Massenstrom im Stromröhrensegment (aus Querschnitt A) werden nun in Gl. 2.29 eingesetzt, um die aktualisierte Machzahl im Punkt B zu berechnen. Die neue Machzahl, der alte Totaldruck und die alte Totaltemperatur erlauben nun die Berechnung der aktualisierten Werte für den statischen Druck (Gl. 2.15), die statische Temperatur (Gl. 2.14) und die Dichte (Gl. 2.1). Dabei ist es nicht erforderlich, dass der Totaldruck oder die Totaltemperatur über dieses Stromröhrensegment konstant ist, da die Relation zwischen Total- und statischem Zustand jeweils nur im selben Punkt angewendet wird. Die Grundlage der Aktualisierung der thermodynamischen Größen ist ausschließlich die Massenerhaltung im Segment. Folglich ist der Algorithmus für reibungsfreie wie reibungsbehaftete Strömungen identisch.

Hinter der Berechnung des äquivalenten Stromröhren-Querschnitts in Punkt B auf der Basis

der alten Werte steht die Annahme, dass sich das Verhältnis zwischen geometrischem und äquivalentem Querschnitt durch die Aktualisierung nicht ändert. Diese Annahme ist nur für die auskonvergierte Lösung korrekt. Allerdings ist sie bereits dann schon ausreichend genau erfüllt, wenn sich die Topologie des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes qualitativ nicht mehr wesentlich ändert, was meistens schon nach einem kleinen Teil der insgesamt benötigten Iterationen der Fall ist.

Die Druckaktualisierung mit Gl. 2.29 entspricht der Anwendung einer impliziten, nichtlinearen algebraischen Gleichung, die eine Kombination aus Massen-, Impuls- und Energieerhaltung entlang der Stromlinie in einer quasi-eindimensionalen Form darstellt. Echt eindimensional ist sie deswegen nicht, weil in die Massenstromberechnung die radialen Gradienten der Lösungsvariablen (statischer Druck, Totaldruck, Totaltemperatur) eingehen.

4.3 Aktualisierung des Totaldrucks und der Totaltemperatur

Der Totaldruck und die Totaltemperatur werden während der Druckaktualisierung nicht verändert. Dies erfolgt nun im zweiten Schritt innerhalb jeder Iteration. Die aktualisierten Werte des statischen Drucks und der statischen Temperatur, die von der Druckrandbedingung zum Einströmquerschnitt transportiert sind, führen bei einer noch nicht vollständig auskonvergierten Rechnung dazu, dass die Einström-Randbedingungen nicht mehr korrekt erfüllt sind. Ist beispielsweise die Einströmgeschwindigkeit vorgegeben und hat sich der statische Druck im Einströmquerschnitt reduziert, erhöht sich dadurch die Strömungsgeschwindigkeit bei unverändertem Totaldruck. Deswegen werden nach der Druck-Aktualisierung im Einströmquerschnitt die Werte für Totaldruck und -temperatur berechnet, die wieder für eine Übereinstimmung mit der Einström-Randbedingung sorgen. Die Differenz zwischen Ziel- und Istwert wird dann konstant in jedem Stützpunkt der Stromlinie angewendet. Das Totaldruck und -temperaturniveau wird also entlang der gesamten Stromlinie um diesen konstanten Korrekturfaktor gesenkt oder erhöht. Die Korrektur muss dabei natürlich limitiert werden, damit die korrigierten totalen Größen nicht kleiner als die entsprechenden statischen Größen werden.

4.4 Einschub für reibungsbehaftete Strömung

Bei reibungsbehafteten Strömungen wird nach der Aktualisierung des Totaldrucks und der Totaltemperatur noch ein Schritt vor der Anpassung der Stromlinienform eingefügt. In diesem Schritt wird nach Gl. 2.51 die Änderung des Totaldrucks und nach Gl. 2.60 die der Totaltemperatur aufgrund viskoser Effekte relativ zu den Werten im stromaufwärts gelegenen Stützpunkt berechnet und unter-relaxiert angewendet. Dabei hat die Reihenfolge, in der dies für die einzelnen Stromlinien durchgeführt wird, keinen Einfluss auf das Ergebnis, da für die Berechnung der Geschwindigkeits-Gradienten zu den Nachbar-Stromlinien bzw. Wänden aus Stabilitätsgründen die Werte aus der vorangegangenen Iteration verwendet werden.

Für die Ermittlung des Abstandes der ersten wandnahen Stromlinie sowie der Geschwindigkeit in deren Stützpunkten wird eine Wandfunktion verwendet. In diesem Bereich ist die lineare Approximation des Geschwindigkeits-Profiles unzureichend. Da in einer der folgenden Validierungsrechnungen eine Blasius-Grenzschicht berechnet wird, wird eine tabelliert vorgegebene Form der Lösungen der Blasius-Gleichung 2.63 verwendet. Diese liefert die Geschwindigkeit,

sowie die für die Massenstrom-Berechnung erforderliche mittlere Geschwindigkeit in der wandnächsten Stromröhre, in Abhängigkeit des Wandabstands. Die wandnächste Stromlinie spiegelt also direkt die analytische Lösung der Blasius-Gleichung wieder. Für alle weiter entfernten Stromlinien werden die Geschwindigkeits-Gradienten quer zur Strömungsrichtung linear approximiert und die Quellterm für Totaldruck und -temperatur auf dieser Basis berechnet.

4.5 Aktualisierung der Stromlinienform

Nach der Aktualisierung des statischen Drucks, des Totaldrucks und der Totaltemperatur folgt als letzter wichtiger Punkt jeder Iteration die Aktualisierung der Stromlinienform.

Analog zur Anpassung des Druckfeldes, bei der der Druck ausgehend von der entsprechenden Randbedingung durch das Rechengebiet transportiert wird, ist es auch bei der Aktualisierung der Stromlinienform sinnvoll, von der „Strömungsrichtungs-Randbedingung“ ausgehend durch das Rechengebiet fortzuschreiten. Die Strömungsrichtung ist nur an Wänden eindeutig festgelegt und im übrigen Bereich nur schwach durch das Druckfeld festgelegt. Deswegen beschleunigt es die Konvergenz erheblich, wenn die Stromlinien nach ihrem Abstand zur nächstgelegenen Wand sortiert aktualisiert werden. Diese Reihenfolge wird nach der Initialisierung ermittelt und im Verlauf der Rechnung noch einige wenige Male aktualisiert um eventuelle Änderungen in der Strömungstopologie widerzuspiegeln.

Ist bei einer Außenströmung das Rechengebiet quer zur Strömungsrichtung auf der einen Seite durch eine Wand und auf der Anderen durch eine Druckrandbedingung begrenzt, ist es in Bezug auf die Anpassung der Stromlinienform sinnvoll, die Korrektur stärker zu gewichten, die relativ zur wandnäheren Stromlinie berechnet wird. In diesem Fall erweisen sich Gewichtungsfaktoren von rund 0,8 - 0,95 als geeignet. In einer Kanalströmung hingegen sollten die Korrekturen auf der Basis beider Nachbarstromlinien gleich gewichtet in die Verschiebung eines Stützpunktes auf der mittleren Stromlinie eingehen. Der Gewichtungsfaktor ist also 0,5.

In einer Außenströmung werden also die Stromlinienformen ausgehend von den körpernahen zu den körperfernen Stromlinien aktualisiert und die Korrektur relativ zur körpernahen Stromlinie stärker gewichtet. Gelangt man nun während des Anpassungsvorgangs der Form zu einer Stromlinie, die einen gewissen Abstand zur Körperoberfläche hat, haben sich quer zur Strömungsrichtung bereits die Verschiebungen der körpernäheren Stromlinien akkumuliert. Im Fall einer einseitigen Gewichtung der Verschiebungs-Korrektur erweist es sich als hilfreich, die aktuell anzupassende Stromlinie zunächst ebenfalls, versehen mit einem Unterrelaxationsfaktor im Bereich von 0,6 - 0,8, um den Betrag der Verschiebung der stärker gewichteten Nachbarstromlinie zu verschieben. Bevor der reguläre Anpassungsprozess für eine Stromlinie durchgeführt wird, wird sie also zunächst so verschoben, dass die Verschiebung der Nachbarstromlinie kompensiert wird, auf die sich die höher gewichtete Verschiebungs-Korrektur bezieht.

Die Anpassung der Lage der Stromlinien-Stützpunkte verläuft in Strömungsrichtung ausgehend vom Startpunkt der Stromlinie. Zunächst wird dafür im ersten Stützpunkt der Massenstrom zu allen Nachbar-Stromlinien als Steuergröße für die Formanpassung ermittelt. Solange die Nachbar-Stromlinien dieselben bleiben, werden diese Werte unverändert für stromabwärts gelegene Stützpunkte verwendet. Sobald mindestens ein Massenstrom zu einem Nachbarn bekannt ist, beginnt die Anpassung der Lage der Stützpunkte. Ansonsten werden so lange stromabwärts gelegene Punkte besucht, bis zum ersten Mal eine Nachbarstromlinie oder eine Wand „sichtbar“ ist (die Entfernung, in der relevante Nachbarpunkte berücksichtigt werden, ist aus praktischen

Gesichtspunkten limitiert) und der Massenstrom zu mindestens einem Nachbarn bestimmbar ist.

Daraufhin wird in jedem stromabwärts gelegenen Punkt wiederum der Massenstrom zu allen Nachbar-Stromlinien oder Wänden ermittelt. Hat eine Stromlinie nur einen Nachbarn, wird der Stützpunkt so verschoben, dass dieser Massenstrom erhalten bleibt. Hat sie jedoch zwei oder mehrere Nachbarn, wird die neue Lage des Punktes so gewählt, dass das Verhältnis der Massenströme zu den Nachbarn gleich dem im stromaufwärts gelegenen Punkt bleibt. Es wird also nicht versucht, den Massenstrom konstant zu halten. Ist die Lösung auskonvergiert, führen konstante Verhältnisse auch zu identischen absoluten Massenströmen.

Um den Hintergrund dieses Ansatzes zu erläutern wird eine Stromlinie betrachtet, die zwar perfekt mittig zwischen ihren Nachbarn liegt aber der Querschnitt des Stromröhren-Segments zwischen einem stromaufwärts gelegenen Stützpunkt und dem anzupassenden Stützpunkt sich z.B. noch fälschlicherweise zu stark verringert. In diesem Fall ist zwar die relative Lage der Stromlinie korrekt, die Massenströme zu den Nachbar-Stromlinien werden aber noch nicht erhalten. Die Verwendung der absoluten Massenströme als Steuergröße würde zu dem Ergebnis führen, dass der Stützpunkt sich von allen Nachbarn etwa gleich weit wegbewegen muss. Wenn sich die daraus resultierenden Korrekturen auch rechnerisch genau aufheben, ist alles in Ordnung und die korrekte relative Lage bleibt erhalten. In der Praxis ist die Summe aller Verschiebungen jedoch häufig aufgrund von akkumulierten Rechen-, Rundungs- und Abbruchfehlern nicht gleich null, so dass dadurch eine unphysikalische Störung der Stromlinienform resultiert. Wird jedoch das Verhältnis der Massenströme untereinander zu erhalten versucht, sind die resultierenden Korrekturen aufgrund der korrekten relativen Lage des Stützpunktes von vorn herein gleich null und können keine Störung verursachen.

Für die Bestimmung der Verschiebung aufgrund eines Fehlers im Massenstrom zu einer Nachbar-Stromlinie wird die Abhängigkeit des Massenstroms vom Abstand linearisiert. Sollte der Massenstrom z.B. 10 % größer sein als er ist, wird angenommen, dass der korrekte Abstand zu dieser Nachbarstromlinie der 1,1-fache des aktuellen Wertes ist. Diese Annahme ist nur für kleine Verschiebungen korrekt, da sich durch die Verschiebung des Stützpunktes bedingt, wiederum auch die thermodynamischen Größen sowohl in diesem Punkt selbst, als auch im Nachbar-Stützpunkt ändern. Für eine auskonvergierte stationäre Lösung sind schließlich alle Verschiebungen theoretisch gleich null. Diese Annahme hat also keinen Einfluss auf die Endlösung. Wie allerdings bei beinahe jeder Korrektur, die auf einer Linearisierung basiert, ist es auch in diesem Fall sinnvoll, einen Unterrelaxationsfaktor anzuwenden. Die angewendete Verschiebung des Stützpunktes ist also die Berechnete multipliziert mit einem Faktor zwischen null und eins. In der Praxis haben sich Werte um 0,5 bewährt. Darüber hinaus ist es insbesondere bei Stromlinien mit sehr geringem Abstand zueinander sinnvoll, den Abstand pro Iteration maximal zu halbieren, weil sich ansonsten der statische Druck so stark ändern würde, dass die Linearisierung des Massenstroms so falsch ist, dass daraus keine sinnvolle Verschiebung mehr bestimmt werden kann.

Die Anpassung der Stromlinienform entspricht der Anwendung einer Kombination aus Massenerhaltung in Strömungsrichtung und Impulserhaltung normal zur Strömungsrichtung.

5 Randbedingungen

DAS WICHTIGSTE IN KÜRZE

- Verschiedene mögliche Kombinationen von Randbedingungen für Unter- und Überschallströmungen werden genannt, sowie ihr Einfluss den in Kapitel 4 beschriebenen, iterativen Lösungsalgorithmus.

5.1 Kombinationen von Randbedingungen für Unterschallströmungen

Voraussetzung für die im Folgenden beschriebenen Schritte zur Einhaltung der Randbedingungen ist im Unterschall immer der im gesamten Rechengebiet aktualisierte statische Druck nach der in Kapitel 4.2 beschriebenen Vorgehensweise.

5.1.1 Einströmrand: Machzahl, Temperatur - Ausströmrand: Druck

Die fehlenden Größen am Einströmrand werden nun wie folgt berechnet:

- Die vorgegebene Machzahl am Einströmrand zusammen mit dem aktualisierten statischen Druck erlaubt nach Gl. 2.15 die Berechnung des Totaldrucks.
- Die Totaltemperatur ist am Einströmrand mit Gl. 2.14 bestimmbar, wenn die Machzahl und die statische Temperatur gegeben ist.
- Die Dichte kann über die thermische Zustandsgleichung 2.1 mit der Temperatur und dem statischen Druck ermittelt werden.

5.1.2 Einströmrand: Geschwindigkeit, Temperatur - Ausströmrand: Druck

Die Vorgehensweise in diesem Fall ist analog zu der in Kapitel 5.1.1 beschriebenen, außer dass zunächst aus der statischen Temperatur am Einlass die Schallgeschwindigkeit mit Gl. 2.12 berechnet wird, die dann nach Gl. 2.13 zusammen mit der vorgegebenen Einström-Geschwindigkeit die Machzahl festlegt.

5.1.3 Einströmrand: Totaltemperatur, Totaldruck, Strömungsrichtung - Ausströmrand: Druck

Sind Totaldruck und -temperatur am Einströmrand vorgegeben, können die übrigen Größen wie folgt berechnet werden:

- Mit dem aktualisierten statischen und dem gegebenen Totaldruck wird nach Gl. 2.15 die Machzahl ermittelt.
- Mit der vorgegebenen Totaltemperatur und der Machzahl ist über Gl. 2.14 die statische Temperatur festgelegt.
- Die thermische Zustandsgleichung Gl. 2.1 liefert die Dichte abhängig von Temperatur und Druck.

5.1.4 Einströmrand: Massenstrom, Temperatur - Ausströmrand: Druck

Für einen vorgegebenen Massenstrom und einer statischen Temperatur sind folgende Schritte zur Bestimmung der übrigen Größen am Einströmrand erforderlich:

- Die Dichte ist über Gl. 2.1 abhängig von Druck und Temperatur gegeben.
- Die Querschnittsfläche der Stromröhren um eine Stromlinie ist über den Abstand der Startpunkte berechenbar.
- Sind Massenstrom und Dichte bekannt, kann für die berechnete Querschnittsfläche nach Gl. 2.21 die Einströmgeschwindigkeit ermittelt werden.
- Die Schallgeschwindigkeit ist aufgrund der vorgegebenen Temperatur nach Gl. 2.12 gegeben.
- Mit der Geschwindigkeit und der Schallgeschwindigkeit ist über Gl. 2.13 die Machzahl festgelegt.
- Nun kann nach Gl. 2.15 der Totaldruck aus dem statischen Druck und der Machzahl bestimmt werden.
- Analog kann mit Gl. 2.14 die Totaltemperatur aus der vorgegebenen Statischen und der Machzahl berechnet werden.

5.2 Kombinationen von Randbedingungen für Überschallströmungen

Im Gegensatz zu einer Unterschallströmung ist im Überschall kein Informationstransport entgegen der Strömungsrichtung möglich. Das erklärt, warum bei rein supersonischen Strömungen der statische Druck auch am Einströmrand festgelegt sein muss. Die Aktualisierung des statischen Drucks wird also in Strömungsrichtung durchgeführt.

5.2.1 Einströmrand: Machzahl, Temperatur, Druck - Ausströmrand: Druck

Aus den vorgegebenen Größen am Einströmrand können die Übrigen wie folgt ermittelt werden:

- Über die Machzahl und den Druck ist nach Gl. 2.15 der Totaldruck gegeben.
- Mit der Machzahl und der statischen Temperatur kann mit Gl. 2.14 die Totaltemperatur berechnet werden.
- Für den Fall, dass ein Unterschallgebiet hinter einem starken Stoß den Ausströmrand erreicht, wird zusätzlich ein statischer Druck festgelegt, der in diesem Fall die erforderliche Unterschall-Austrittsrandbedingung darstellt.

6 Verifikation der Implementation

DAS WICHTIGSTE IN KÜRZE

- Die Implementation der Algorithmen für die Druckanpassung, die Anpassung der Stromlinienform und der Quellerme für die Viskosität ergeben nur noch Abweichungen im Bereich der Rundungsgenauigkeit.

In diesem Kapitel werden Ergebnisse gezeigt, die die korrekte Implementation der folgenden Komponenten des Berechnungsalgorithmus des Stromlinien-Verfahrens demonstrieren:

- Anpassung des statischen Drucks entlang der Stromlinie in Übereinstimmung mit einer Druckrandbedingung.
- Anpassung des Totaldrucks und der Totaltemperatur in Übereinstimmung mit den Randbedingungen.
- Anpassung der Stromlinienform mit dem Ergebnis konstanter Massenströme zwischen Stromlinien (im Fall einer zweidimensionalen Rechnung).
- Quellterm für den Totaldruck um die Wirkung viskoser Kräfte auf das Fluid zu modellieren.

6.1 Druckanpassung - gerade Stromröhre, variabler Querschnitt

Mit dieser Simulation wird die korrekte Berechnung des statischen Drucks entlang einer Stromlinie mit variablem Querschnitt in Übereinstimmung mit der Druckrandbedingung am Ausströmrand überprüft. Um das möglichst unbeeinflusst durch eventuelle Fehler in anderen Bereichen machen zu können, ist der Testfall so gewählt, dass weder eine Anpassung der Stromlinienform, noch des Totaldrucks oder der Totaltemperatur erforderlich ist, um die Randbedingungen zu erfüllen.

Geometrie

Diese quasi-eindimensionale Geometrie, dargestellt in Bild 6.1, besteht aus einer einzigen, geraden Stromlinie im Mittelschnitt eines zweidimensionalen Kanals mit variablem Querschnitt. Die Länge des Kanals beträgt 0,3 m, Einström- und Ausströmhöhe ist mit 0,02 m gleich, die maximale Kanalhöhe beträgt 0,028 m und die Minimale 0,012 m.

In diesem Fall ist das Netz absichtlich so gestaltet, dass die gerade Stromlinie orthogonal zu den Netzlinien verläuft, die Stromlinien-Stützpunkte äquidistant sind und die Wandsegmente mit

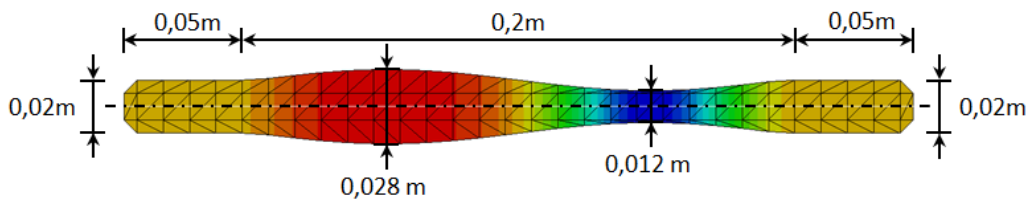


Abbildung 6.1: Gerade Stromröhre mit variablem Querschnitt, Geometrie

konstantem Querschnitt am Ein- und Ausströmrand parallel zur Stromlinie verlaufen. Damit sollen die Einflüsse der Geometrie oder der räumlichen Diskretisierung möglichst gering gehalten werden.

Randbedingungen

Am linken Einströmrand ist die Einström-Machzahl mit 0,1 sowie die statische Temperatur mit 300 K vorgegeben. Am rechten Ausströmrand beträgt der statische Druck $1 \cdot 10^5$ Pa. Die oberen und unteren Wände haben eine Gleitrandbedingung.

Das Fluid ist thermisch und kalorisch ideale, trockene Luft mit den in Tabelle 6.1 zusammengefassten thermodynamischen Eigenschaften.

| | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| Molare Masse | $28,9664 \frac{kg}{kmol}$ |
| Spezifischen Wärmekapazität | $1003,62 \frac{J}{kgK}$ |
| Dynamische Viskosität | $0 Pa \cdot s$ (reibungsfrei) |

Tabelle 6.1: Thermodynamische Eigenschaften thermisch und kalorisch idealer, trockener Luft.

Die Stromlinienform wird hierbei nicht angepasst, die initiale Form entspricht der korrekten Lösung. Es handelt sich um eine isentrope Strömung, da viskose Effekte vernachlässigt werden. Da die Stromröhrenquerschnitte am Ein- und Ausströmrand identisch sind, muss auch der statische Druck am Ein- und Ausströmrand identisch sein und zwar gleich dem durch die Druckrandbedingung vorgegebenen Wert. Das hat zur Folge, dass Totaldruck und -temperatur entlang der Stromlinie gegenüber den initialen Werten nicht verändert werden müssen, da der initiale Totaldruck zur Einhaltung der vorgegebenen Geschwindigkeitsrandbedingung am Einlass unverändert bleibt.

Auswertung

Der statische Druck ist also die einzige Größe, die entlang der Stromlinie variiert. Dessen Werte zeigt Bild 6.2.

Ein Fehler in der Druckberechnung entsteht zum Einen daraus, dass in jedem Stromröhrenquerschnitt der Massenstrom neu bestimmt wird und zum Anderen durch den Abbruchfehler der iterativen Berechnung der Machzahl (mit einer Abbruch-Toleranz von $1 \cdot 10^{-10}$) im stromaufwärtigen Element sowie sonstiger akkumulierter Rundungsfehler wie z.B. bei der Berechnung des statischen Drucks in Abhängigkeit der Machzahl.

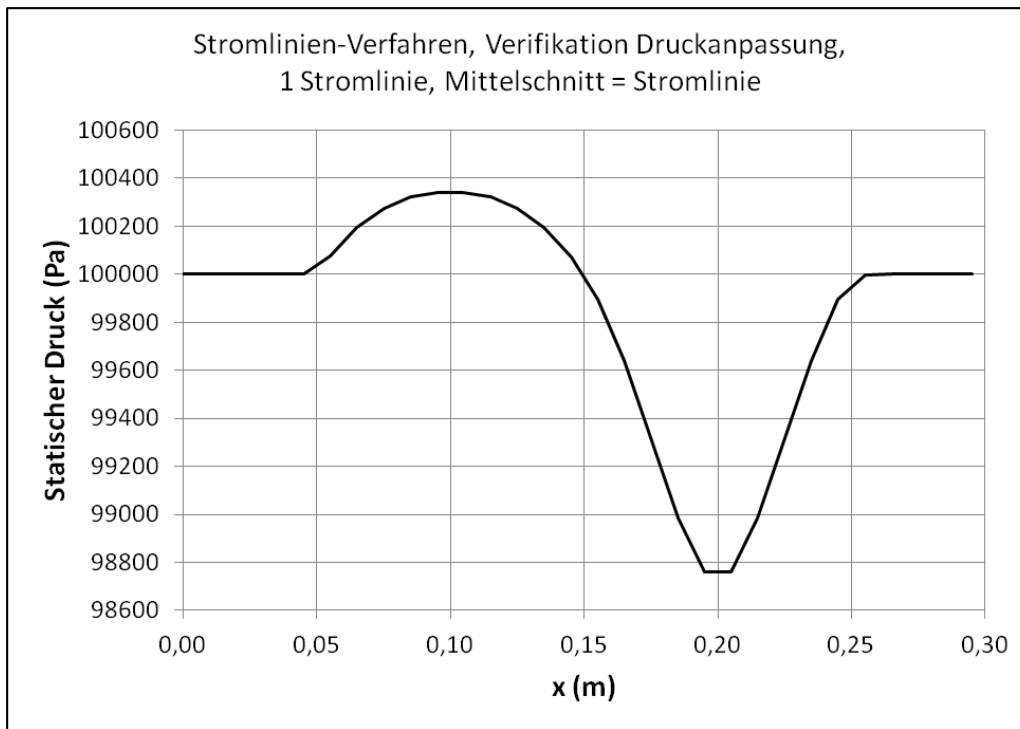


Abbildung 6.2: Gerade Stromröhre mit variablem Querschnitt, Statischer Druckverlauf entlang der Stromlinie.

Über die 31 Stromlinienstützpunkte transportiert liegt der Druck am Einströmrand bei $x = 0,0$ um $6,2 \cdot 10^{-9}$ Pa unterhalb der $1 \cdot 10^5$ Pa, die am Ausströmrand vorgegeben sind. Bei einer Gesamtanzahl von 31 Stromlinien-Segmenten entsteht also pro Segment ein Fehler in der 15. signifikanten Stelle des Drucks ($2 \cdot 10^{-10}$ Pa bei einem statischen Druck der Größenordnung $1 \cdot 10^5$ Pa). Die iterative Berechnung des statischen Drucks hat also für jedes Segment nur einen Fehler im Bereich der Rundungsgenauigkeit.

Zur Validierung der Implementation der iterativen Machzahlberechnung nach Gl. 2.29 wird Microsoft Excel verwendet. Die Software enthält einen iterativen Löser und arbeitet ebenfalls mit doppelt genauen Gleitkommazahlen. Einzig entscheidend für die Wahl des Referenz-Lösers ist, dass die Berechnung mit einem Programm durchgeführt wird, die nicht vom Autor des Stromlinien-Verfahrens geschrieben ist. Ausgehend von den bereits erwähnten Randbedingungen ist der gesamte Rechenweg inklusive der Berechnung der spezifischen Gaskonstante, des Isentropenexponenten, des Totaldrucks, der Totaltemperatur und des Massenstroms in der Stromröhre, sowie der iterativen Bestimmung der Machzahl und der darauf folgenden Berechnung des statischen Drucks nach Gl. 2.15 in Excel implementiert. Einzig die numerisch ermittelte Höhe der Stromröhre an den 31 Stützpunkten ist vom Stromlinien-Verfahren übernommen. Der Grund dafür ist, dass nicht direkt der vertikale Abstand zwischen Stromlinie und Wand verwendet wird, sondern die Länge einer Linie, die senkrecht zur mittleren Strömungsrichtung verläuft. Diese hat bei einer Querschnittänderung eine kleine x-Komponente, was zu ungeraden Werten für die Höhe führt. Diese Werte wurden nur auf Plausibilität überprüft. Darüber hinaus haben sie keine weitere Relevanz für die Validierung der Machzahl- und Druckberechnung. Wären sie falsch, würden sie schlicht eine leicht andere Geometrie repräsentieren, für die der Druck ebenso korrekt berechnet werden können muss.

Diagramm 6.3 zeigt mit einer durchgezogenen grauen Linie die Differenz der mit Excel er-

mittelten Machzahl entlang der Stromlinie und den Werten des Stromlinien-Verfahrens. Die maximale Differenz der mit beiden Verfahren berechneten Machzahlen liegt bei rund $6,5 \cdot 10^{-8}$. Um die Ursache des, für eine Rechnung mit doppelter Genauigkeit, recht hohen Fehlers herauszufinden, ist der Abbruchfehler der iterativen Berechnung der Machzahl im selben Diagramm mit einer gestrichelten schwarzen Linie dargestellt. Die Differenz der Machzahl zwischen Excel und dem Stromlinien-Löser sind nahezu identisch zu dem Abbruchfehler von Excel. Damit ist die Ursache des Fehlers geklärt, die beinahe ausschließlich bei Excel liegt, weil das Stromlinien-Verfahren eine zwei Größenordnungen niedrigere Abbruchtoleranz von $1 \cdot 10^{-10}$ verwendet. Der Abbruchfehler in Excel konnte auch durch die Angabe einer geringeren Toleranz nicht weiter reduziert werden.

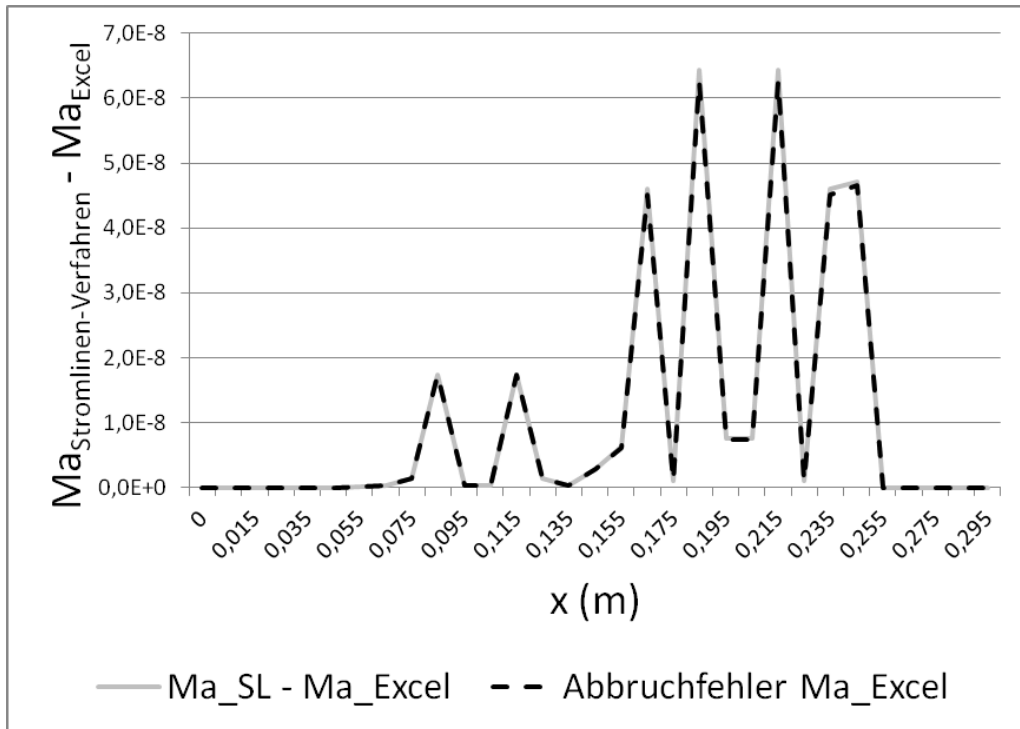


Abbildung 6.3: Differenz zwischen der mit Excel und dem Stromlinien-Verfahren berechneten Machzahl.

Da nicht nur die Berechnung der Machzahl validiert werden soll, sondern die des statischen Drucks, zeigt Bild 6.4 die Differenz des mit Excel berechneten Drucks und den Werten des Stromlinien-Verfahrens. Da das Druckniveau bei rund $1 \cdot 10^5$ Pa liegt, erhöht sich die Differenz von dem, durch die Machzahlberechnung verursachten Fehler der Größenordnung $1 \cdot 10^{-8}$, auf rund $1 \cdot 10^{-3}$. Der qualitativ ähnliche Verlauf der Abweichung mit dem des Abbruchfehlers der Machzahlberechnung verraten deren Ursache. Ein zusätzlicher signifikanter Fehler bei der Druckberechnung aus der Machzahl ist nicht zu erkennen. Die Implementation der Druckberechnung ist damit erfolgreich validiert.

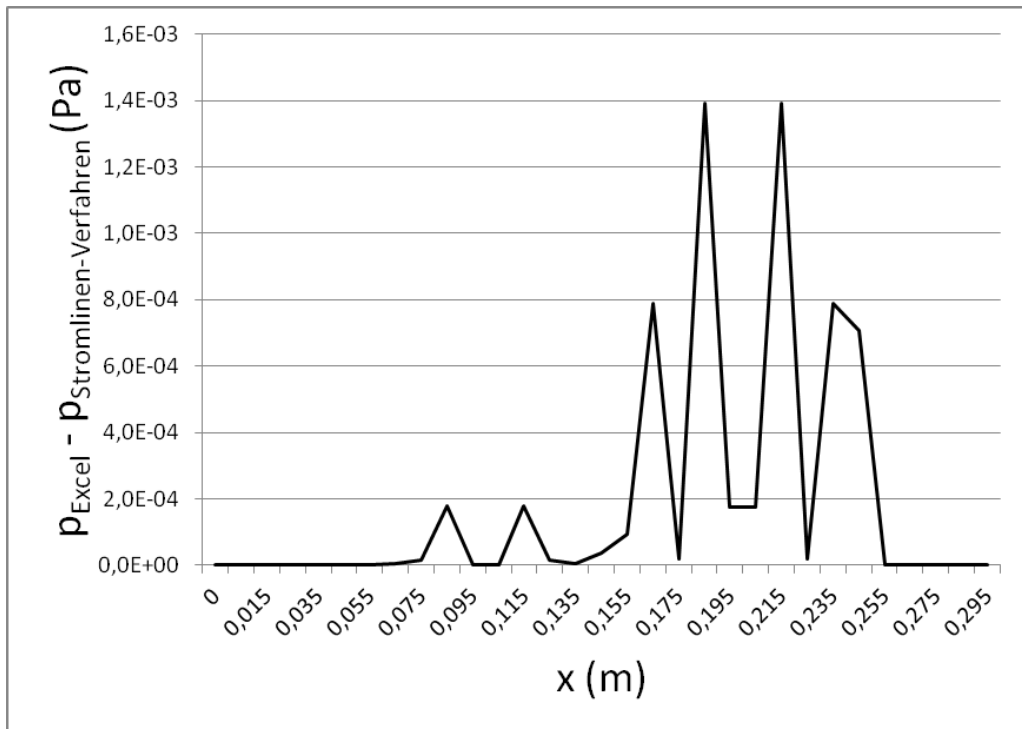


Abbildung 6.4: Differenz zwischen der Druckberechnung in Excel und mit dem Stromlinien-Verfahren.

6.2 Druckanpassung - kreisförmige Stromröhre, konstanter Querschnitt

Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel, in dem der Einfluss der räumlichen Diskretisierung weitestgehend vernachlässigbar ist, soll in diesem Beispiel genau dieser Fehler betrachtet werden. Das begründet die Auswahl einer Geometrie, bei der die Stromlinie die Netzlinsen unter allen Winkeln schneidet. Auch die wichtige Querschnittsbestimmung der Stromröhre wird für jede Ausrichtung relativ zum Netz überprüft.

Des Weiteren eignet sich dieser Fall auch zur Validierung der Stromlinienform-Anpassung, da die Stromlinie auch nach erfolgter Anpassung (zumindest in dem Bereich, der ein Stück von Ein- und Ausströmrand entfernt ist) wieder kreisförmig sein muss (siehe dazu die Geometrie des Falls in Bild 6.5). Der genaue Radius der Stromlinie nach der Formanpassung kann analytisch nicht ganz genau spezifiziert werden, die Abweichungen von der Kreisform dagegen erlauben eine Quantifizierung des Fehlers der Stromlinienform-Anpassung.

Geometrie

Die Geometrie dieses Falls ist ein kreisförmiger Kanal, der im Gegen-Uhrzeigersinn über einen Bereich von $1,8 \pi$ durchströmt wird. Er hat einen Radius von 0,1 m im Mittelschnitt und eine konstante Höhe von 0,01 m. In Bild 6.5 sind zwei gerade Segmente erkennbar, die mit jeweils 0,02 m Länge tangential an beide Enden des kreisförmigen Teils anschließen. Diese sind erforderlich, um eine korrekte Druckrandbedingung am Ausströmrand festzulegen. Im kreisförmigen Bereich des Kanals liegt ein radialer Druckgradient vor, in der aktuellen Version des Stromlinien-Verfahrens können auf einem Rand mit einer Druckrandbedingung nur ein konstanter Druck vorgegeben werden. Die geraden Segmente sorgen also dafür, dass alle Zustandsgrößen zu den Rändern hin konstant werden und physikalisch korrekte Randbedingungen verwendet werden.

Um einen maximalen Diskretisierungsfehler zu erreichen, ist das Rechengebiet mit vergleichsweise großen Zellen der Kantenlänge von $4,52 \cdot 10^{-3}$ m vernetzt. So passen beispielsweise horizontal neben dem Kanalzentrum gerade noch gut zwei ganze Zellen in den 0,01 m breiten Kanal hinein.

Randbedingungen

Am Einströmrand ist die Machzahl mit 0,2 und die statische Temperatur mit 300 K festgelegt. Am Ausströmrand der Druck mit $1 \cdot 10^5$ Pa. Alle anderen Ränder sind adiabate Wände mit Gleit-Randbedingungen. Die hohe Strömungsgeschwindigkeit ist deswegen gewählt, um für den Vergleich möglichst große Druckschwankungen und Rechenfehler zu bekommen.

Als Fluid wird wieder ideale, trockene und reibungsfreie Luft verwendet, deren thermodynamischen Eigenschaften Tabelle 6.1 entnommen werden können.

Auswertung

Theoretisch bleibt der Mittelwert des Drucks in einem Kanal mit konstantem Querschnitt ebenfalls konstant. Deswegen müssen auch weder der Totaldruck noch die Totaltemperatur am Einströmrand angepasst werden um die vorgegebene Machzahl einzuhalten, da die initialen Werte gleichermaßen die korrekte Lösung sind. Die Stromlinienform hingegen muss jedoch

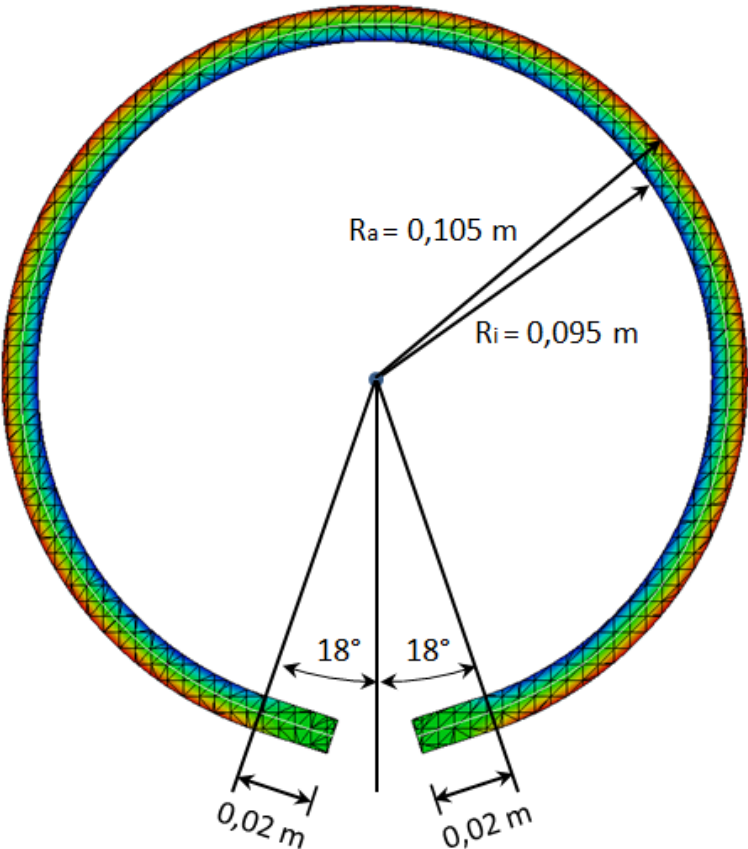


Abbildung 6.5: Kreisförmige Stromröhre, Geometrie

angepasst werden. Der radiale Druckgradient im kreisförmigen Teil des Kanals hat zur Folge, dass die Strömungsgeschwindigkeit in Richtung Kreiszentrum steigt weil der Druck sinkt und umgekehrt Richtung Kreisaußenseite sinkt weil der Druck steigt. Es handelt sich bei dieser reibungsfreien Kanalströmung also um einen Ausschnitt eines Potentialwirbels. Die höhere mittlere Strömungsgeschwindigkeit auf der Innenseite der Stromlinie sorgt dafür, dass der Massenstrom dort größer ist als auf der Außenseite. Zwar verursacht ein höherer Druck auch eine höhere Dichte, die genauso linear in die Berechnung des Massenstroms eingeht wie die Strömungsgeschwindigkeit. Für Luft überwiegt jedoch die Änderung der Geschwindigkeit. Die Anpassung der Stromlinienform muss also zur Folge haben, dass sich diese etwas zum Kreiszentrum hin verschiebt, da die Massenströme im geraden Teil am Einströmrand auf beiden Seiten der Stromlinie gleich sind.

Bild 6.6 zeigt zunächst die numerisch ermittelte Stromröhrenhöhe entlang der Stromlinie, da diese entscheidend für die Berechnung des Massenstroms für die Anpassung der Stromlinieform und für die Druckberechnung ist. Sie sollte idealerweise überall gleich $0,01\text{ m}$ sein. Es sind allerdings Oszillationen mit einer maximalen Amplitude von etwa $1,75 \cdot 10^{-5}\text{ m}$ erkennbar.

Die Ursache dafür ist ein systematischer Diskretisierungsfehler, der wie die periodischen Oszillationen in Bild 6.6 vermuten lassen, von dem Winkel abhängt, in dem die Stromlinie die Netzlinien schneidet. Eigentlich sollten die Kanalwände und die Stromlinie selbst perfekte Kreise sein. Wie in Bild 6.7 zu erkennen ist, sind die Kanalwände durch Sekanten approximiert, die die Zellen schneiden. Nur die mit schwarzen Kreuzen markierten Schnittpunkte der Kanalwände mit den Netzlinien liegen genau auf den jeweiligen Kreisen. Das bedeutet, dass es bei der Bestimmung der Stromröhrenhöhe darauf ankommt, ob die nächstgelegenen Punkte auf der diskretisierten Wand z.B. genau auf einem Stützpunkt der Wandkontur liegen (siehe Bild 6.7) oder im schlechtesten Fall in der Mitte zwischen zwei Stützpunkten (siehe Bild 6.8). Abgesehen davon, dass die Berechnung der Stromröhrenhöhe dadurch erheblich betroffen ist, kommt noch dazu, dass die Kanalgeometrie im Fall von Bild 6.8 auch noch ein Stück zum Kreiszentrum hin versetzt erscheint, da beide Nachbarpunkte auf den Kanalwänden nahe der Mitte der Sekanten der Wandelemente liegen. Das bewirkt, dass auch die Stromlinienform falsch angepasst werden würde und sie im auskonvergierten Zustand nicht kreisförmig wäre.

Ein Fehler in der Stromröhrenhöhe von $1,75 \cdot 10^{-5}\text{ m}$ scheint zwar nicht besonders groß zu sein, er bewirkt jedoch bei der absichtlich hoch gewählten Strömungsgeschwindigkeit Druckschwankungen mit einer maximalen Amplitude von etwa 10 Pa , wie Bild 6.9 zeigt. Er demonstriert deutlich die Notwendigkeit der in Kapitel 3 erläuterten Krümmungskorrektur.

Wie in Bild 6.10 zu erkennen ist, weicht die Stromröhrenhöhe bei Verwendung der Krümmungskorrektur nur noch maximal um $4 \cdot 10^{-7}\text{ m}$ vom theoretischen Wert von $0,1\text{ m}$ ab. Das entspricht einer Reduktion des krümmungsbedingten Fehlers um rund zwei Größenordnungen. Zu bedenken ist auch, dass die Stützpunkte der Geometrie in einfacher Genauigkeit, also mit 7 signifikanten Stellen eingelesen wird. Der Diskretisierungsfehler kann also praktisch nicht weiter reduziert werden, da die Genauigkeit der Ausgangsdaten in derselben Größenordnung liegt.

Deutlich erkennbar ist in Bild 6.11 dementsprechend auch die Reduktion des Druckfehlers. Die maximale Abweichung beträgt nun weniger als $0,3\text{ Pa}$. Die hohe Strömungsgeschwindigkeit ist deswegen gewählt, damit er in diesem Fall noch gut erkennbar ist.

Mit der Krümmungskorrektur ist keine signifikante, systematische Abhängigkeit des Druckverlaufs von der Richtung erkennbar, in der die Stromlinie die Netzlinien schneidet. Die Werte „rauschen“ aufgrund unsystematischer Überlagerung von Rundungs-, Abbruchs- und Diskretisierungsfehlern. Es kann also festgehalten werden, dass der Diskretisierungsfehler bei Verwen-

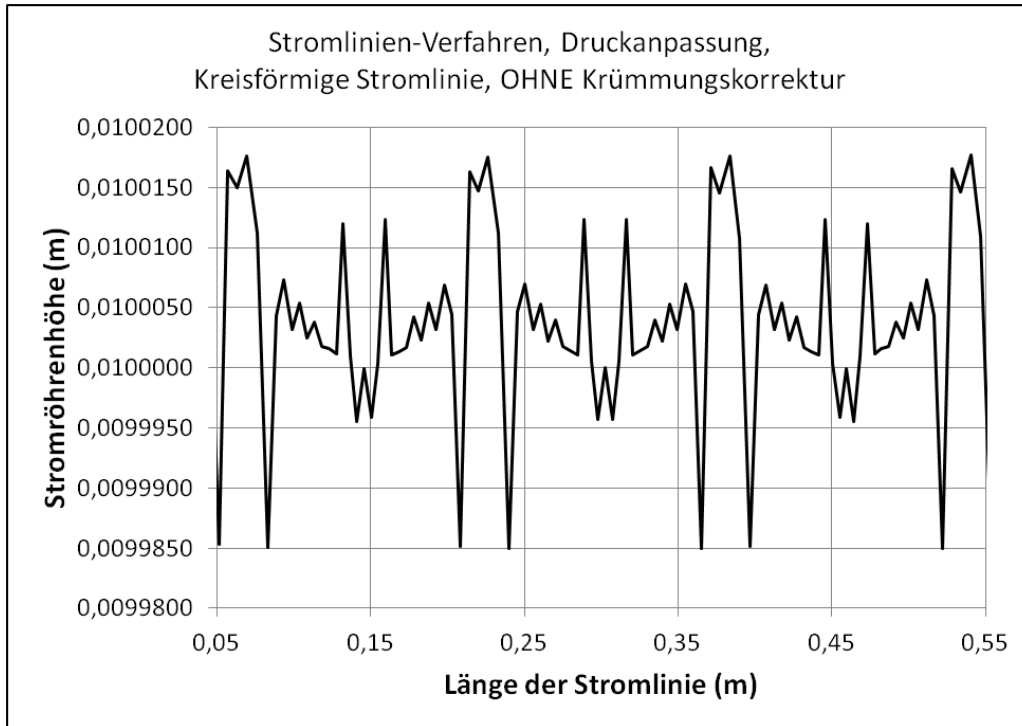


Abbildung 6.6: Kreisförmige Stromröhre, grobes Netz, numerisch ermittelte Höhe der Stromröhre über der Länge der Stromlinie

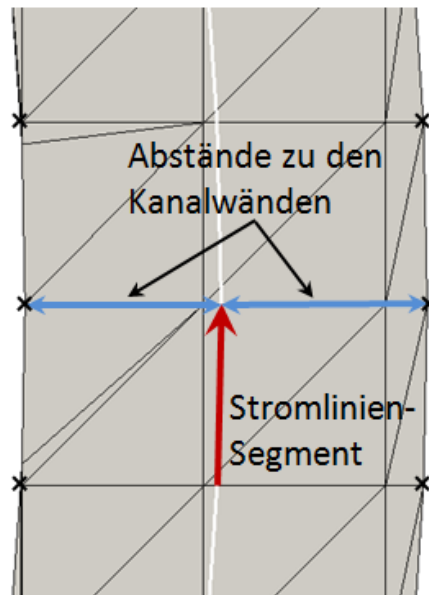


Abbildung 6.7: Kreisförmige Stromröhre, kleiner Fehler bei der Bestimmung der Stromröhrenhöhe

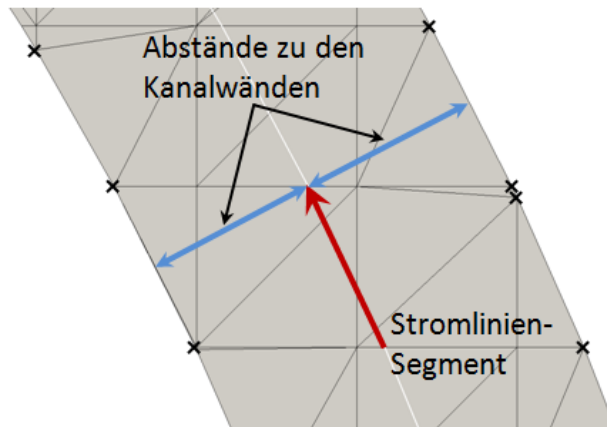


Abbildung 6.8: Kreisförmige Stromröhre, großer Fehler bei der Bestimmung der Stromröhrenhöhe

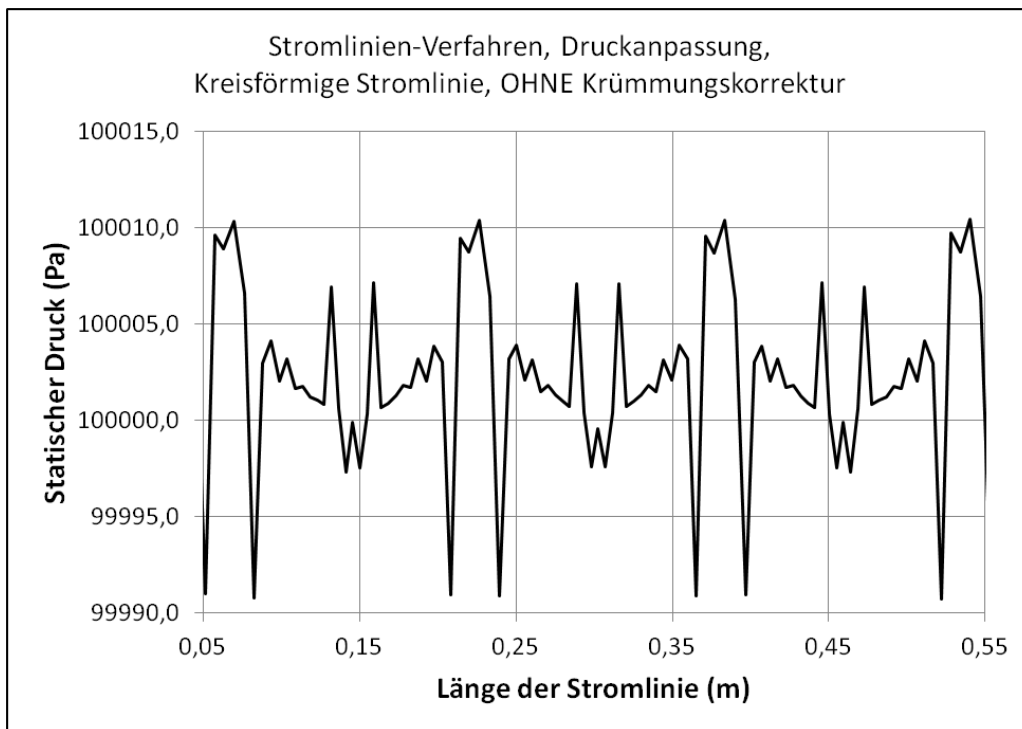


Abbildung 6.9: Kreisförmige Stromröhre, grobes Netz, statischer Druck über der Länge der Stromlinie, ohne Krümmungskorrektur.

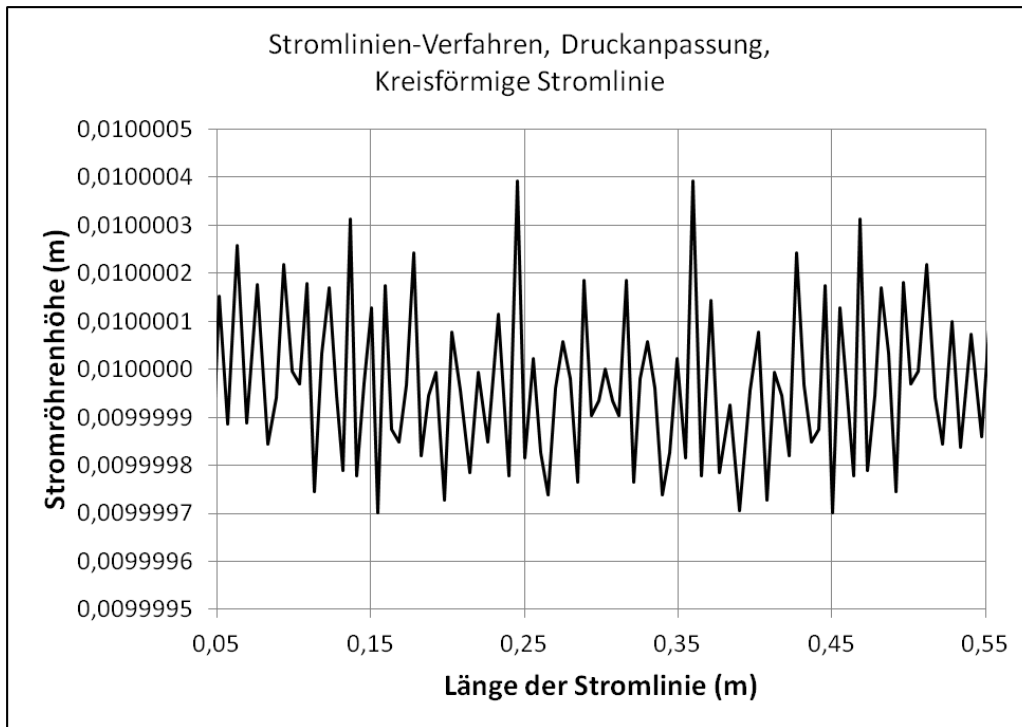


Abbildung 6.10: Kreisförmige Stromröhre, grobes Netz, numerisch ermittelte Höhe der Stromröhre über der Länge der Stromlinie

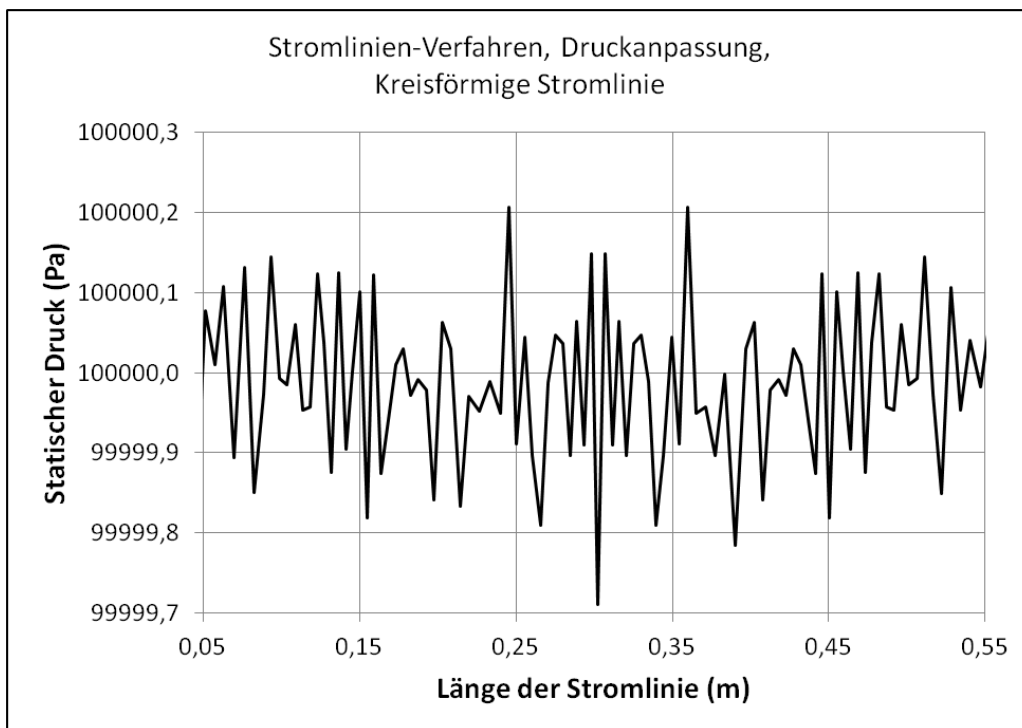


Abbildung 6.11: Kreisförmige Stromröhre, grobes Netz, statischer Druck über der Länge der Stromlinie

dung der Krümmungskorrektur akzeptabel klein ist, d.h in diesem Fall in der Größenordnung sonstiger Fehler.

Im Folgenden wird die Anpassung der Stromlinienform überprüft. Diagramm 6.12 zeigt dazu die Differenz zwischen dem Abstand der einzelnen Stromlinien-Stützpunkte und dem Radius des Mittelschnitts des kreisförmigen Kanals von 0,1 m, der gleichzeitig der Startlage der Stromlinie entspricht. Wie bereits erwähnt, sollte die Anpassung der Stromlinien-Form dazu führen, dass die Stützpunkte etwas nach innen versetzt werden. Nach Bild 6.12 beträgt die Verschiebung im Schnitt etwa $-6,06 \cdot 10^{-5}$ m. Entscheidend ist jedoch, dass die Abweichung der Lage der einzelnen Stützpunkte in einem Intervall der Breite $3 \cdot 10^{-7}$ m liegen. In Anbetracht der Tatsache, dass die Kanal-Geometrie nur mit einfacher Genauigkeit eingelesen wurde, also $\pm 1 \cdot 10^{-7}$ m, ist dieser Fehler im Bereich der Rundungsgenauigkeit.

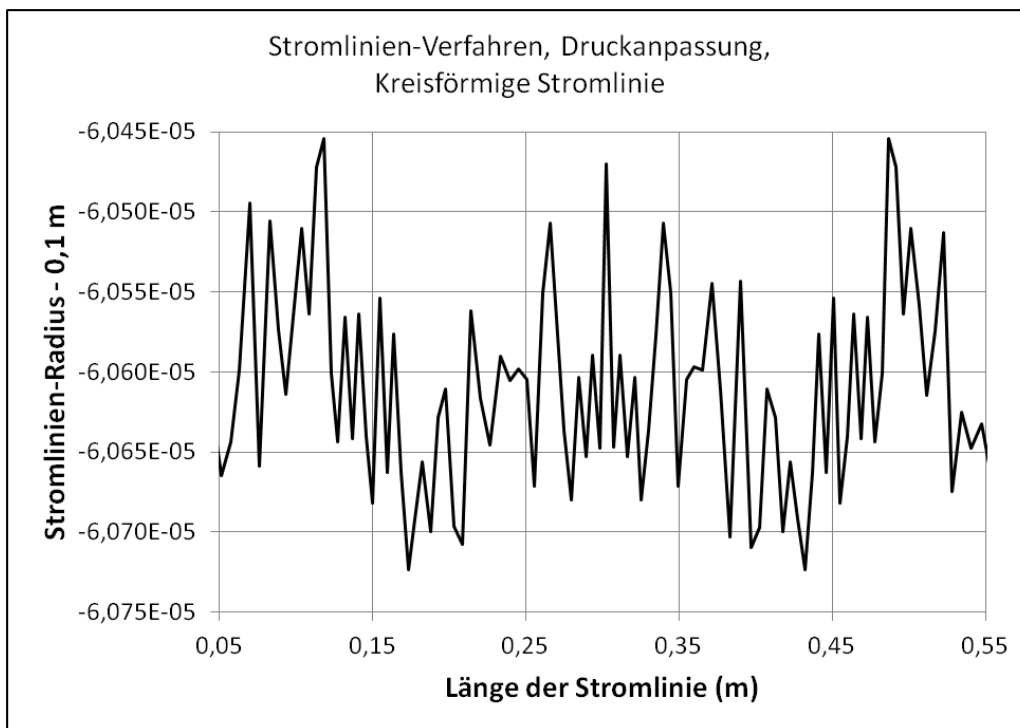


Abbildung 6.12: Abweichung der Lage der Stromlinien-Stützpunkte von einem Kreis mit Radius $r = 0,1$ m

6.3 Anpassung von Druck und Stromlinienform - gekrümmte Stromröhre, variabler Querschnitt

Gegenstand dieses Verifikationsfalls ist die Überprüfung der Anpassung der Stromlinienform. Im Gegensatz zu dem Testfall mit dem kreisförmigen Kanal ist hier jedoch keine analytische Lösung für die Stromliniengeometrie bekannt. Die korrekte Adaption kann aber indirekt überprüft werden. Steuergröße für die Anpassung der Lage eines Stromliniepunktes ist der links- und rechtsseitige Massenstrom. Das dieser richtig berechnet wird, haben die vorangegangenen Verifikationsfälle gezeigt, die das Druckfeld überprüft haben. In die Druckberechnung geht der Massenstrom (siehe Gl. 2.29) maßgeblich mit ein. Die Anpassung der Stromlinienform sollte in diesem Fall zur Folge haben, dass für das auskonvergierte Druckfeld die links- und rechtsseitigen Massenströme identisch sind, da die Stromlinie in der Mitte des Einströmquerschnitts startet.

Geometrie

Bei dem in Bild 6.13 gezeigten Fall, handelt es sich ebenfalls um eine einzelne Stromlinie in einem gekrümmten Kanal mit veränderlichem Querschnitt. Diese Geometrie soll eine typische Situation einer einzelnen Stromröhre darstellen, die aus einem Strömungsfeld herausgegriffen ist. Zur einfacheren Bewertung des Druckfeldes sind jedoch auch hier wieder Ein- und Ausströmquerschnitt gleich.

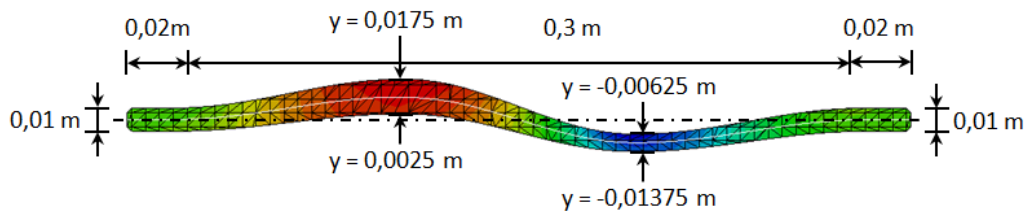


Abbildung 6.13: Gekrümmte Stromröhre, Geometrie

Randbedingungen

Am Einströmrand ist die Machzahl mit 0,1 und die statische Temperatur mit 300 K festgelegt. Am Ausströmrand der Druck mit $1 \cdot 10^5$ Pa. Alle anderen Ränder sind adiabate Wände mit Gleit-Randbedingungen.

Das Fluid ist ideale, trockene und reibungsfreie Luft, deren thermodynamischen Eigenschaften in Tabelle 6.1 entnommen werden können.

Auswertung

Zur Überprüfung der Konvergenz wird der Druck am Einlass mit dem Sollwert verglichen. Dieser weist einen, über 55 Stromlinienelemente akkumulierten Fehler von $-2,2 \cdot 10^{-7}$ Pa auf. Damit wird auch hier die aus den vorher beschriebenen Fällen bekannte Größenordnung (12. signifikante Stelle des Drucks) dieses Fehlers bestätigt. Auch variierende radiale Druckgradienten vergrößern diesen Fehler nicht erkennbar.

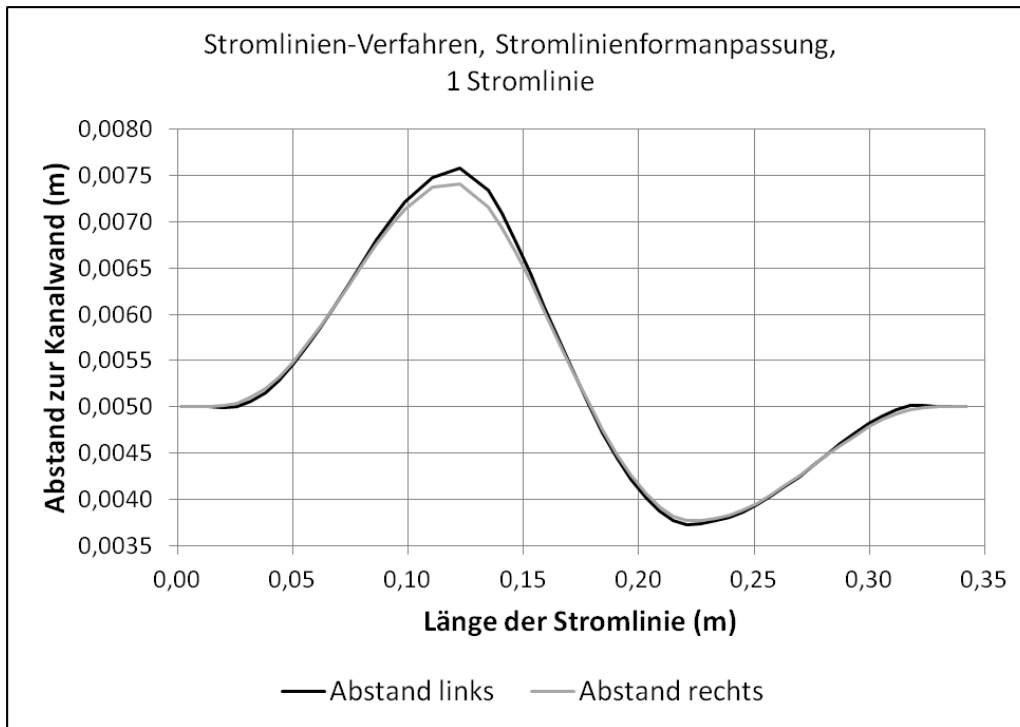


Abbildung 6.14: Gekrümmte Stromlinie, links- und rechtsseitiger Abstand zu den Kanalwänden.

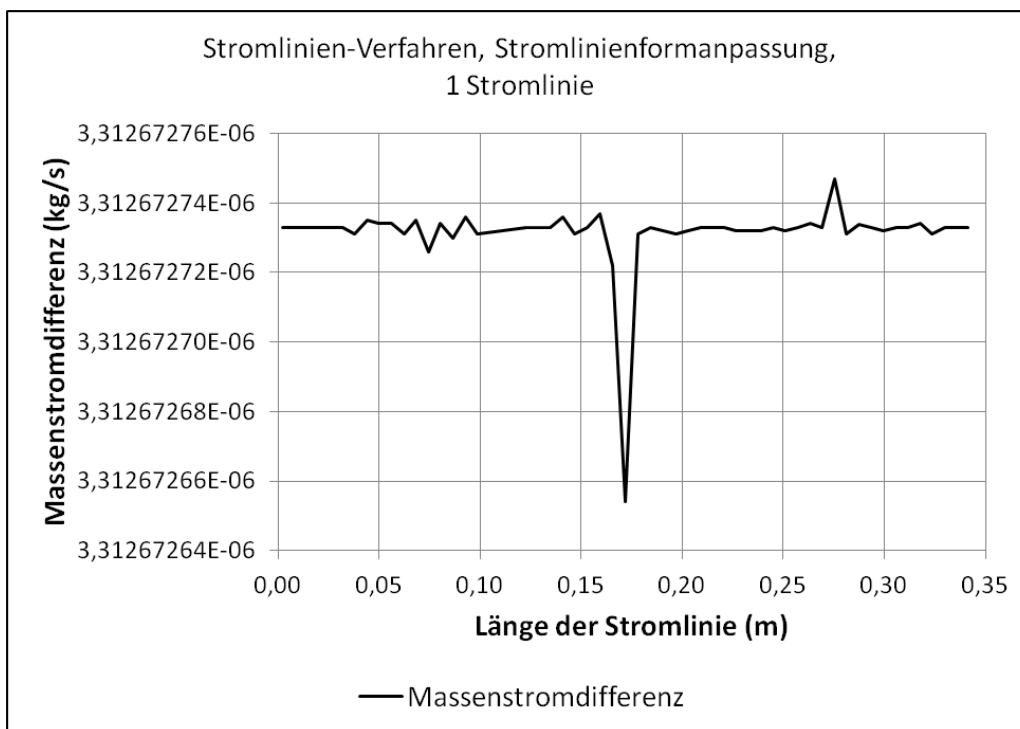


Abbildung 6.15: Gekrümmte Stromlinie, links- und rechtsseitiger Massenstrom.

In Bild 6.14 sind die seitlichen Abstände der Stromlinie von der jeweiligen Kanalwand dargestellt. Z.B. bei einer Länge der Stromlinie vom etwa 0,12 m ist deutlich zu sehen, dass der radiale Druckgradient dazu führt, dass die Stromlinie zum Krümmungszentrum hin abgelenkt wird.

Die entscheidende Steuergröße für die Stromlinienformanpassung sind die links- und rechtsseitigen Massenströme. Die Unterschied zwischen beiden Massenströmen ist in Bild 6.15 dargestellt. Die Differenz zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Wert beträgt $1 \cdot 10^{-13} \frac{kg}{s}$ und das auch nur wegen des einen „Ausreißers“ nach unten. Die anderen Werte oszillieren eher mit Beträgen von rund $1 \cdot 10^{-14} \frac{kg}{s}$ um den Zielwert. Die Stromlinienformanpassung erreicht also beinahe Rundungsgenauigkeit.

Eine weitere Möglichkeit, die Anpassung der Stromlinienform zu verifizieren wäre es, ihre Geometrie direkt mit einer Referenzlösung zu vergleichen. Ein Navier-Stokes Verfahren auf der Basis finiter räumlicher Diskretisierung ist dafür jedoch nicht geeignet, da die Stromlinien erst in einem Auswertungs-Schritt aus Segmenten, die in jeder Zelle parallel zum Geschwindigkeitsvektor stehen. Für eine unendlich feine räumliche Diskretisierung liefert dieser Ansatz auch die korrekte Stromlinienform. Für endliche Zellgrößen „driftet“ die Stromlinie jedoch mit jedem Krümmungswechsel ein wenig zur kurvenäußeren Seite weg. Da sich alle Diskretisierungsfehler entlang der Stromlinie bei diesem Ansatz addieren, werden sie in der Summe deutlich zu groß, um als Referenz für das Stromlinien-Verfahren verwendbar zu sein. Beispielsweise im Fall des im Folgenden behandelten Validierungsfalls der schwach kompressiblen Kanalströmung erreicht selbst auf dem feinsten Netz mit STAR-CCM+ keine im Einströmquerschnitt gestartete Stromlinie überhaupt den Austrittsquerschnitt. Alle enden irgendwo dazwischen an einer Kanalwand.

Sinnvoller ist es daher, ein Referenzverfahren auf der Basis kompressibler Potential-Gleichungen zu verwenden. Das liefert eine Stromlinien-Form, die für einfache Testfälle überhaupt nicht von Diskretisierungsfehlern beeinträchtigt sind. Selbst bei komplexeren, allgemeinen Geometrien ist der Fehler zwar aufgrund der finiten Diskretisierung der Körpergeometrie endlich, er kann aber auf ein beliebig niedriges Niveau reduziert werden. Dieses Verfahren erfüllt alle Anforderungen an ein Referenzverfahren zur Verifikation der Stromlinienform-Anpassung. Dem Autor liegt jedoch kein derartiges Programm vor.

Eine Erweiterung des Stromlinien-Verfahrens auf inkompressible Strömungen würde es ermöglichen, die Stromlinienform für bestimmte Strömungstopologien auf der Basis einer analytisch bekannten Lösung, z.B. Hyperbeln im Fall einer ebenen Staupunktströmung, zu verifizieren.

6.4 Druckverlust einer laminaren Kanalströmung

Um die Korrektheit des in Kapitel 2.3.1 beschriebenen Quellterms für den Totaldruck sowie dessen Implementation zu überprüfen, wird der Druckverlust einer laminaren Kanalströmung simuliert und mit dem Wert der analytischen Lösung verglichen.

Geometrie

Die Geometrie des dafür verwendeten Testfalls ist in Bild 6.16 dargestellt. Es handelt sich um einen Kanal mit einer Länge von 0,1 m und einer Höhe von 0,01 m. Am Ein- und Ausströmrand ist der Kanal jeweils noch um eine halbe Zelle, also 0,0025 m verlängert. Für das erste und letzte Stromliniensegment wird allerdings kein Quellterm für den Totaldruck berechnet, da angenommen wird, dass sich der thermodynamische Zustand der Strömung auf diesen beiden Elementen nicht ändert. Durch diese Geometrie haben die Stromlinien-Segmente, auf denen die durch die Viskosität verursachten Quellterme angewendet werden, eine effektive Gesamtlänge von genau 0,1 m, auch wenn der Kanal tatsächlich 0,105 m lang ist. Das vereinfacht den Vergleich mit der analytischen Lösung.

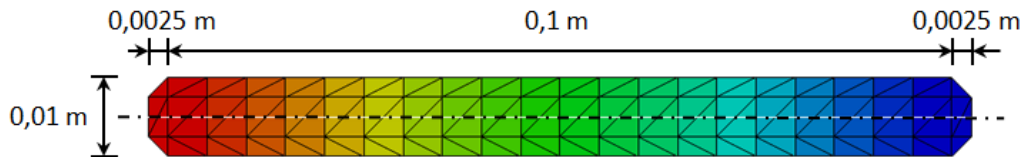


Abbildung 6.16: Druckverlust einer laminaren Kanalströmung, Geometrie

Randbedingungen

Am Einströmrand ist die Geschwindigkeit mit $1 \frac{m}{s}$ und die statische Temperatur mit 300,0 K festgelegt. Am Ausströmrand der Druck mit $1 \cdot 10^5$ Pa. Alle anderen Ränder sind adiabate Wände mit einer Haft-Randbedingungen.

Das Fluid ist ideale, trockene und reibungsfreie Luft, deren thermodynamischen Eigenschaften in Tabelle 6.1 aufgelistet sind. Allerdings ist die dynamische Viskosität willkürlich zu $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Pa s gewählt, um über die kurze Kanallänge einen deutlichen Druckverlust zu verursachen.

Da der Kanalquerschnitt konstant ist, ist auch die Strömungsgeschwindigkeit nahezu konstant. Eine kleine Abweichung von maximal $4 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}$ kommt daher, dass sich die Dichte entlang der Stromlinie aufgrund der Druckerhöhung zum Einströmrand hin etwas erhöht. Mit der aktuellen Version des Stromlinien-Verfahrens können jedoch keine Fluide konstanter Dichte modelliert werden.

Für diesen Testfall wird keine Wandfunktion verwendet. Der Grund dafür ist, dass dann der Geschwindigkeits-Gradient normal zur Wand einfach analytisch berechnet werden kann, ebenso wie der daraus folgende Druckverlust der Kanalströmung.

Auswertung

Da für diesen Testfall keine Wandfunktion verwendet wird, ist der Geschwindigkeitsgradient normal zu der einzelnen, in der Kanalmitte verlaufenden Stromlinie durch die beiden seitlichen

Wänden mit einer Haftrandbedingung festgelegt zu

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{1 \frac{m}{s}}{0,005m} = -200 \frac{1}{s}. \quad (6.1)$$

Aufgrund des konstanten Kanalquerschnitts liegt keine Impulsänderung der Fluids im Rechengebiet vor, daher lautet die Kraftbilanz in integraler Form über den gesamten Kanal der Länge L mit der Höhe h und der Einheitstiefe t

$$\Delta p h t = 2\mu \frac{\partial v}{\partial n} L t. \quad (6.2)$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht die Druckdifferenz über den Kanal in Strömungsrichtung, multipliziert mit der Kanalquerschnittfläche, also die Kraft, die die Strömung antreibt. Auf der rechten Seite die verzögernde Kraft der Schubspannungen, die proportional zur dynamischen Viskosität und dem Geschwindigkeitsgradienten ist und auf die Ober- und Unterseite des Kanals wirkt, die jeweils eine Fläche gleich dem Produkt aus Kanallänge und Einheitstiefe hat.

In diesem Fall ergibt sich also für den Druckverlust

$$\Delta p = 2\mu \frac{\partial v}{\partial n} \frac{L}{h} = 2 \left(1 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s\right) \cdot \left(-200 \frac{1}{s}\right) \cdot \frac{0,1m}{0,01m} = -4Pa. \quad (6.3)$$

Bild 6.17 bestätigt diesen Wert des Druckverlusts über die Kanallänge und zeigt außerdem den physikalisch korrekten linearen Verlauf des Drucks.

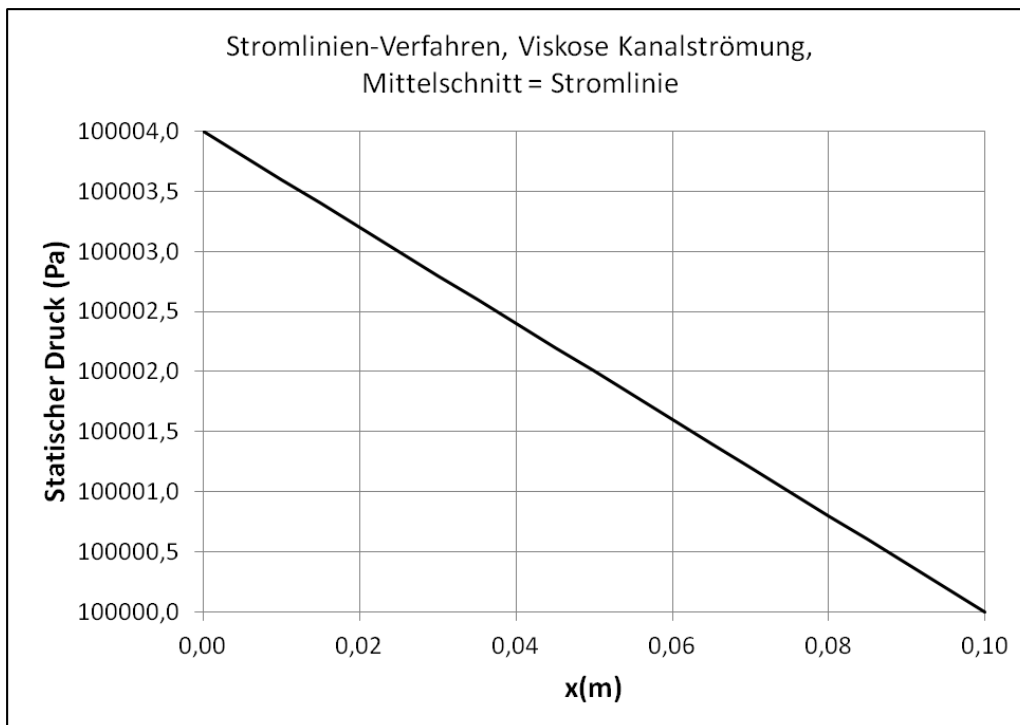


Abbildung 6.17: Kanalströmung, Druckverlust

Die Wirkung viskoser Kräfte auf ein Fluid wird in diesem Fall durch das Stromlinien-Verfahren korrekt abgebildet.

7 Validierung

DAS WICHTIGSTE IN KÜRZE

- Für die Validierung der komplexeren Testfälle, für die keine analytischen Lösungen verfügbar sind, wird die kommerzielle Software STAR-CCM+ der Firma CD-adapco verwendet.
- Für alle Testfälle werden mit beiden Simulations-Programmen jeweils drei Rechnungen mit systematisch verfeinerter räumlicher Diskretisierung durchgeführt. Damit kann eine Lösung extrapoliert werden, die von der Diskretisierung unabhängig ist und eine Quantifizierung des räumlichen Diskretisierungsfehlers erlaubt.
- Bei den Validierungsfällen für interne Strömungen, einer schwach kompressiblen Kanalströmung und einer stark kompressiblen Düsenströmung, zeigt sich, dass die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen durch die Vorgehensweise zur Anpassung des Totalzustandes zu einer Reduktion der Rechenzeit im Vergleich zu STAR-CCM+ um einen Faktor von 100-1000 führt.
- Bei der Simulation einer reibungsfreien Außenströmung um ein NACA 0012 Flügelprofil ist der Totalzustand bei der Initialisierung gleich dem der Endlösung. Damit kann die Rechenzeit dieses Falls unabhängig von dem Vorteil bei der Totalzustands-Anpassung beurteilt werden. Aufgrund der Vereinfachungen in der mathematischen Modellierung wird aber auch hier eine Reduktion der Rechenzeit um einen Faktor von 2 erreicht.
- Die Berechnung des Geschwindigkeitsprofils einer ebenen Poiseuille-Strömung und die einer ebenen Plattengrenzschicht zeigen, dass die Modellierung der viskosen Effekte über Quellterme für den Totaldruck und die Totaltemperatur sinnvolle Ergebnisse liefern.
- In allen getesteten Fällen stimmen die Ergebnisse des Stromlinien-Verfahrens stimmen sehr gut mit den Referenzlösungen überein.

7.1 Referenzsoftware - STAR-CCM+

STAR-CCM+ ist eine integrierte, multi-disziplinäre CAE (Computer Aided Engineering) Umgebung der Firma **CD-adapco**. Zu dieser Software-Umgebung gehört ein CFD (Computational Fluid Dynamics) Simulations-Programm zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen, das in

dieser Arbeit als Referenz-Verfahren verwendet wird. Es handelt sich dabei um ein dichte-basiertes, zell-zentriertes Finite-Volumen-Verfahren, das sowohl mit strukturierten, als auch mit unstrukturierten Netzen arbeitet, die mit dem integrierten Vernetzungs-Programm erzeugt werden können.

Für die konvektiven Flüsse wird ein von Weiss und Smith modifiziertes Roe-Schema oder ein AUSM+ Schema von Liou verwendet (siehe [47] und [46]), für die diffusiven Flüsse eine Zentral-Differenz-Approximation jeweils zweiter Ordnung verwendet. Ein Gauss-Seidel Löser für das lineare Gleichungssystem wird durch ein algebraisches Mehrgitter-Verfahren [46] beschleunigt. Für stationäre Strömungen findet ein implizites Pseudo-Zeitschritt-Verfahren Anwendung. Die Druckkorrekturgleichung wird mit Hilfe des SIMPLE-Algorithmus gelöst. Bezüglich weiterer Details sei hier auf das Benutzerhandbuch von STAR-CCM+ und [47] verwiesen.

7.1.1 Erhaltungsgleichungen

Die Eigenschaften der reibungsbehafteten Strömung eines Newton'schen Fluids werden durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die gemittelten Strömungseigenschaften für beliebig geformte Kontrollvolumina V mit der differentiellen Oberfläche a .

In STAR-CCM+ werden die folgenden Erhaltungsgleichungen in integraler Form berechnet:

Masse

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_A \rho dV + \oint_A \rho \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) \cdot d\mathbf{a} = \int_V S_u dV, \quad (7.1)$$

mit dem Geschwindigkeits-Vektor \mathbf{v} , dem Netzgeschwindigkeits-Vektor \mathbf{v}_g und einem benutzerdefinierten Massen-Quellterm S_u .

Impuls

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \oint_A \rho \mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) \cdot d\mathbf{a} = \\ - \oint_A p \mathbf{I} \cdot d\mathbf{a} + \oint_A \mathbf{T} \cdot d\mathbf{a} + \int_V (\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_u + \mathbf{f}_\omega + \mathbf{f}_L) dV, \end{aligned} \quad (7.2)$$

mit dem Einheitstensor \mathbf{I} , dem Spannungstensor \mathbf{T} , den Volumenkräften aufgrund von Rotation \mathbf{f}_r , Gravitation \mathbf{f}_g , porösen Medien \mathbf{f}_p , benutzerdefinierten Volumenkräften \mathbf{f}_u und Lorentzkräften \mathbf{f}_L .

Energie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \oint_A [\rho H (\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) + \mathbf{v}_g p] \cdot d\mathbf{a} = - \oint_A \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{a} + \oint_A \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{a} + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V S_u dV, \quad (7.3)$$

mit der spezifischen totalen Energie E , der spezifischen totalen Enthalpie H , dem Wärmestrom-Vektor \mathbf{q} und dem Vektor der Volumenkräfte \mathbf{f} , der unter anderem die Beiträge von Rotation und Gravitation enthält. S_u repräsentiert wieder einen benutzerdefinierten Energie-Quellterm.

Die spezifische totale Energie ist gegeben durch

$$E = H - \frac{p}{\rho}, \quad (7.4)$$

mit der spezifischen Totalenthalpie

$$H = h + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \quad (7.5)$$

und der spezifischen Enthalpie

$$h = c_p T. \quad (7.6)$$

Der Spannungstensor für laminare Strömungen lautet

$$\mathbf{T} = \mu \left[\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right]. \quad (7.7)$$

Für turbulente Strömungen wird der turbulente Spannungstensor (auch Reynolds-Spannungstensor genannt) verwendet. Wird kein Reynolds-Spannungsmodell verwendet, wird die Boussinesq-Näherung angewendet, so dass der gesamte Spannungstensor wie folgt aussieht

$$\mathbf{T} = \mu_{eff} \left[\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right], \quad (7.8)$$

mit einer effektiven Viskosität μ_{eff} , die gleich der Summe der laminaren und der turbulenten Viskosität ist

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t. \quad (7.9)$$

Zur Schließung des Gleichungssystems im Fall turbulenter Strömungen sind verschiedene Turbulenzmodelle implementiert, die jedoch bei den in dieser Arbeit gerechneten Validierungsfällen nicht angewendet werden.

7.1.2 Validierungsfälle

STAR-CCM+ ist vielfach für die unterschiedlichsten Anwendungszwecke validiert. Einige, für die Anwendung in dieser Arbeit relevante Referenzen, werden stellvertretend herausgegriffen.

In [48] wird eine Hochauftriebs-Konfiguration des *AIAA High-Lift Prediction Workshop (HiLift-PW-1)* mit ausgeschlagenem Vorflügel und Klappe auf Netzen zwischen 10 und 34 Millionen Zellen berechnet und die Ergebnisse mit experimentellen Daten aus den Jahren 1998-2003 verglichen.

Referenz [49] dokumentiert die Strömungs-Simulation um eine Rakete bei Machzahlen von 0,5 bis 1,3 mit Anstellwinkeln von -5° bis $+25^\circ$ mit verschiedenen Turbulenzmodellen auf Netzen zwischen 4 und 9 Millionen Zellen. Die Ergebnisse werden mit Windkanaldaten verglichen.

In dem Bericht [50] aus der (öffentlich zugänglichen) Technischen Bibliothek von CD-adapco sind die Ergebnisse mehrerer Validierungs-Rechnungen zusammenfassend ausgewertet:

- RAE 2822
- Onera M6
- Multi-Element Airfoil

- Drag-Prediction Workshop (Wing-Body)
- Joint Common Missile (Lockheed Martin Missiles and Fire Control)
- Missile Validation Cases (NAVAIR China Lake)
- Impinging Jet & Supersonic Nozzle

Ebenfalls aus dieser Quelle stammt der Bericht [51], in dem die Lärmausbreitung im Fernfeld eines NACA0012-Profiles untersucht und mit der experimentellen Referenz der NASA [52] verglichen wird.

7.2 Interne Strömung

Bei der Validierung wird zwischen internen und externen Strömungen unterschieden, weil sie etwas unterschiedlich behandelt werden. Wie in Kapitel 4.5 beschrieben, wird die Form der Stromlinien der Reihe nach mit steigendem Wandabstand durchgeführt. Die Verschiebung der beiden benachbarten Stromlinien wird dabei mit einem Gewichtungsfaktor versehen und unter-relaxiert auch auf die gerade anzupassende Stromlinie angewendet. Bei einer Außenströmung ist dieser Gewichtungsfaktor, der immer das Gewicht der wandnäheren Nachbarstromlinie repräsentiert, gleich eins. Bei internen Strömungen, z.B. der als erstes vorgestellten schwach kompressiblen Kanalströmung, ist er dagegen 0,5 um den Einfluss beider Kanalwände gleichermaßen zu berücksichtigen.

7.2.1 Schwach kompressible Kanalströmung

Der Zweck dieser Rechnung ist die Validierung des Stromlinien-Verfahrens für schwach kompressible, reibungsfreie Strömungen. Daher wurden die Randbedingungen so gewählt, dass die maximale Machzahl von rund 0,14 deutlich unter 0,3 bleibt, was üblicherweise als die Grenze angesehen wird, ab der kompressible Effekte relevant werden. Trotzdem wird das Gas in dieser Rechnung als kompressibel modelliert, da mit der aktuellen Version des Stromlinien-Verfahrens nur kompressible Strömungen gerechnet werden können.

Sowohl STAR-CCM+, als auch das Stromlinien-Verfahren, verwenden dieselbe thermische Zustandsgleichung zur Beschreibung des hier verwendeten Fluids. Daher wird diesbezüglich keine Abschätzung des Modellfehlers vorgenommen, da dieser als identisch für beide Rechnungen angenommen wird.

Die Behandlung von Randbedingungen ist bei beiden Verfahren nicht ganz identisch. Vorgreifend sei jedoch erwähnt, dass sich bis auf die, in Kapitel 6.2 behandelte Validierung der Druckberechnung am Beispiel des kreisförmigen Kanals, kein erkennbarer Einfluss auf die Ergebnisse der Testfälle gezeigt hat. Deswegen besteht keine Notwendigkeit diesen zu quantifizieren.

Alle Simulationen sind soweit auskonvergiert, dass keine weitere Reduktion des Iterationsfehlers mehr erkennbar ist (siehe Bild 7.3 und 7.9). Deswegen wird dieser Fehler für die einzelnen Rechnungen auch nicht quantifiziert.

Geometrie

Der von links nach rechts durchströmte zweidimensionale Kanal, der in Bild 7.1 dargestellt ist, hat eine Gesamtlänge von 1,5 m. Er besteht aus einem Einströmsegment von 0,25 m Länge mit

einer konstanten Höhe von 0,04 m. Daran schließt tangential ein kosinusförmiges Segment der Länge 0,25 m an, über das die Kanalhöhe auf 0,03 m reduziert wird. Darauf folgt ebenfalls ein kosinusförmiges Segment über dessen Länge von 0,75 m die Kanalhöhe wieder auf 0,075 m erweitert wird. Das am Ausströmrand gelegene Segment von 0,25 m Länge hat wiederum eine konstante Höhe von 0,075 m.

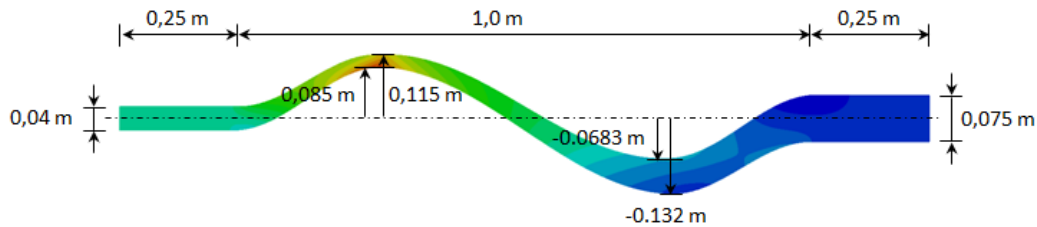


Abbildung 7.1: Schwach kompressible Kanalströmung, Geometrie.

Randbedingungen

Das Fluid ist thermisch und kalorisch ideale Luft, deren thermodynamische Eigenschaften Tab. 6.1 entnommen werden können.

Am linken Einströmrand sind ein Totaldruck von 100175,11 Pa, eine Totaltemperatur von 300,15 K und ein Einströmwinkel von 0° , also normal zum Einströmrand, vorgegeben.

Am rechten Ausströmrand ist ein statischer Druck von $1 \cdot 10^5$ Pa vorgegeben. Da es sich um eine reibungsfreie Strömung handelt, sind Totaldruck und -temperatur im gesamten Rechengebiet konstant.

Die Einström-Machzahl beträgt demnach 0,05, was einer Geschwindigkeit von etwa $17,36 \frac{m}{s}$ entspricht.

Die oberen und unteren Kanalwände sind adiabat und haben eine Gleit-Randbedingung.

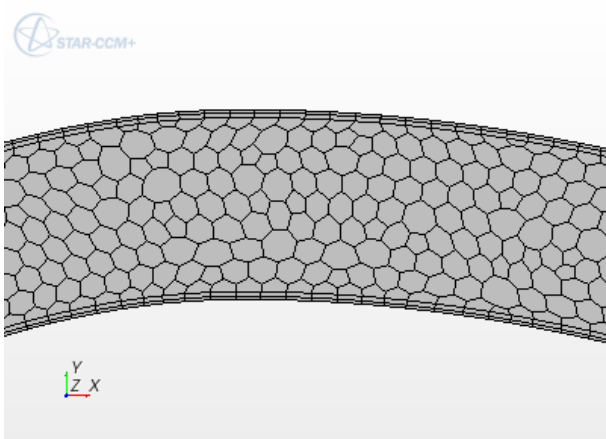
Ergebnisse: STAR-CCM+

Die Rechennetze von STAR-CCM+ bestehen aus polyederförmigen Zellen, sowie zwei Schichten prismatischer Zellen entlang der Wände. Bild 7.2 zeigt beispielhaft einen Ausschnitt der drei zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers verwendeten Netze.

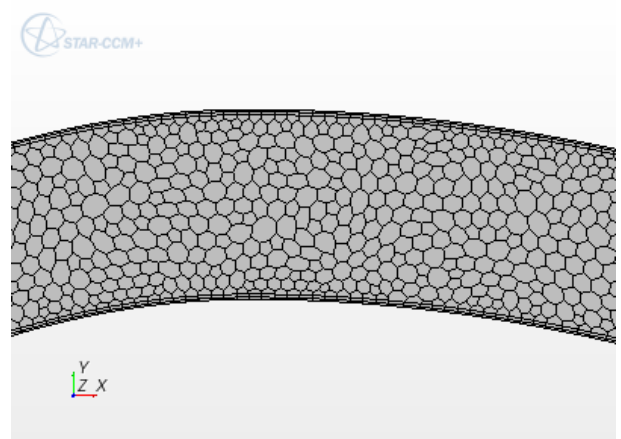
Als Voraussetzung für die folgende Auswertung zeigt Bild 7.3 die unnormierten Residuen der Rechnungen auf drei unterschiedlich feinen Netzen. Alle drei Rechnungen sind soweit auskonvergiert, dass keine nennenswerte weitere Reduktion des Iterationsfehlers erreicht wird.

Im Vorgriff auf den dritten Schritt der in Kapitel 2.5.4 beschriebenen Vorgehensweise zur Ermittlung des Diskretisierungsfehlers werden die Unterschiede in den Druckverläufen auf der oberen und der unteren Kanalwand zwischen den drei verschiedenen Netzen in den Bildern 7.4 und 7.5 dargestellt.

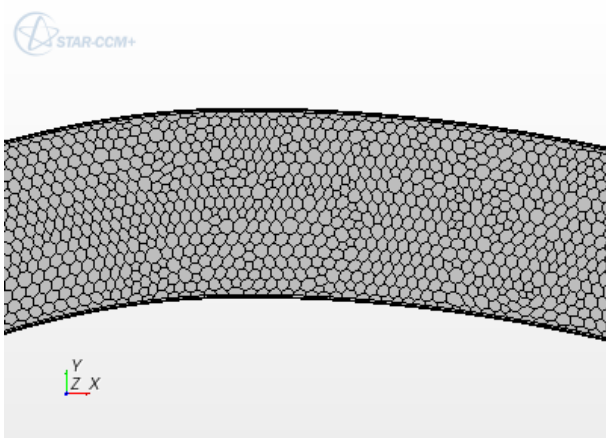
Zwischen der Lösung auf dem groben und dem mittleren Netz sind noch signifikante Unterschiede in den Druckverläufen zu erkennen, zwischen dem mittleren und dem feinen Netz jedoch kaum mehr. Damit ist eine der Voraussetzungen für eine Extrapolation der Ergebnisse im positiven Sinn verletzt, nämlich dass die Änderung der Werte auf den drei Netzen deutlich ungleich



(a) Grobes Netz (6703 Zellen)

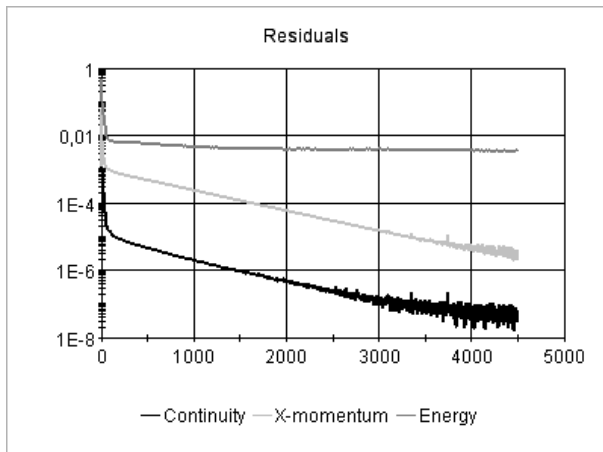


(b) Mittleres Netz (15106 Zellen)

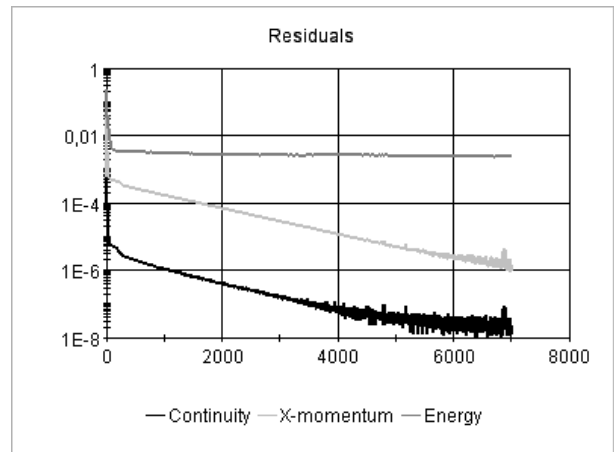


(c) Feines Netz (34029 Zellen)

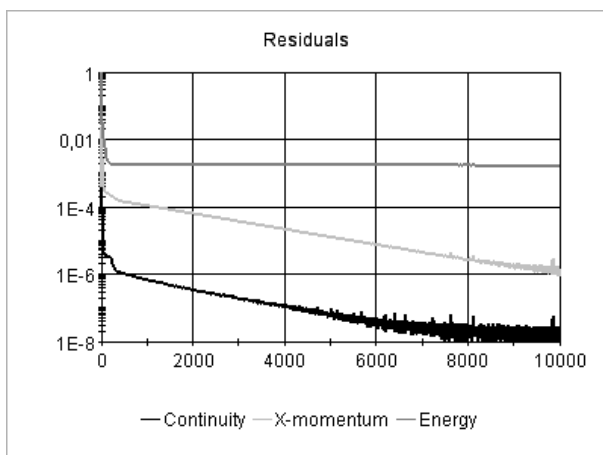
Abbildung 7.2: Schwach kompressible Kanalströmung, Ausschnitte der STAR-CCM+ Netze mit 6703, 15106 und 34029 Zellen.



(a) Grobes Netz (6703 Zellen)



(b) Mittleres Netz (15106 Zellen)



(c) Feines Netz (34029 Zellen)

Abbildung 7.3: Schwach kompressible Kanalströmung, unnormierte Residuen.

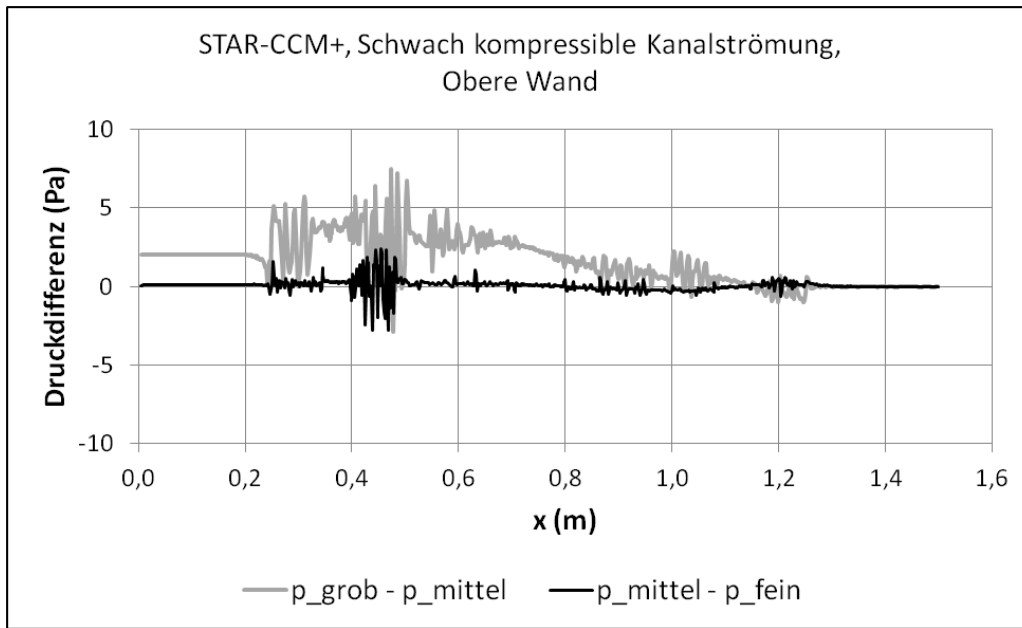


Abbildung 7.4: Schwach kompressible Kanalströmung, Druckdifferenzen der Lösungen mit STAR-CCM+ auf der oberen Wand der drei verschiedenen Netze.

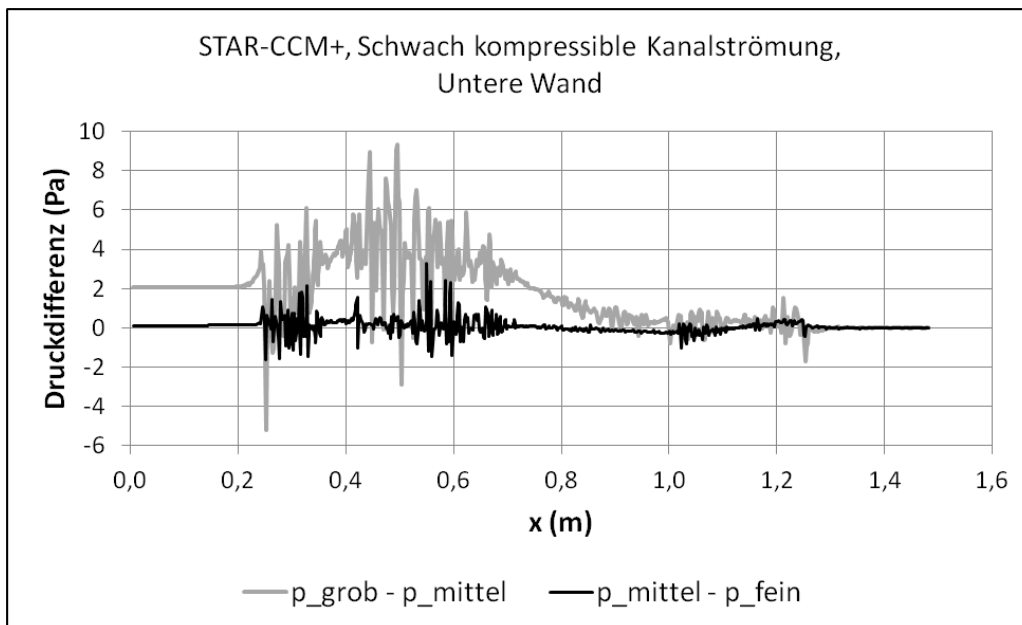


Abbildung 7.5: Schwach kompressible Kanalströmung, Vergleich der Druckdifferenzen der Lösungen mit STAR-CCM+ auf der unteren Wand mit unterschiedlich feinen Netzen.

null sein muss. Da die Residuen in Bild 7.3 darauf hinweisen, dass alle drei Fälle gut auskonvergiert sind und die maximale Druckdifferenz zwischen der Lösung auf dem feinen und dem mittleren Netz nach Bild 7.4 kleiner als $\pm 2,8 Pa$ ist, wird in diesem Fall die Lösung auf dem feinen Netz direkt als Referenzlösung verwendet.

Abgesehen vom Diskretisierungsfehler gibt es noch eine weitere Quelle für einen Fehler im Druckverlauf. Der Totaldruck, der eigentlich konstant gleich $100175,11 Pa$ sein muss, weicht wie in Bild 7.6 zu erkennen ist, von diesem Wert maximal um etwa $2,5 Pa$ auf der oberen Wand und maximal etwas über $3,0 Pa$ auf der unteren Wand vom Sollwert ab.

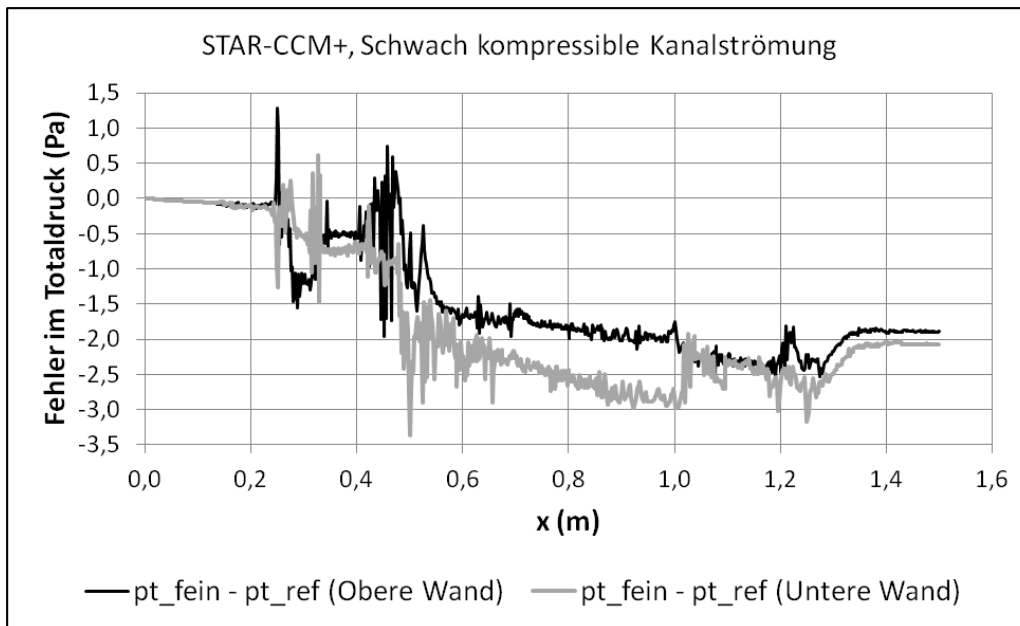


Abbildung 7.6: Schwach kompressible Kanalströmung, Fehler im Totaldruck der Lösungen mit STAR-CCM+ entlang der oberen und der unteren Wand mit dem feinsten Netz.

Wegen der geringen Machzahl ist der daraus resultierende Fehler im statischen Druck etwa gleich groß.

Die Totaltemperatur in Bild 7.7 zeigt eine durchweg sehr geringe Abweichung von der analytisch korrekten Lösung von $300,15 K$ auf. Das liegt daran, dass die Totalenthalpie eine Lösungsvariable ist die nur über den Faktor spezifische Wärmekapazität mit der Totaltemperatur zusammenhängt. Eine Abweichung von $1 \cdot 10^{-3} K$ liegt also in der sechsten von sieben signifikanten Stellen (die Rechnung mit STAR-CCM+ ist mit einfacher Genauigkeit durchgeführt).

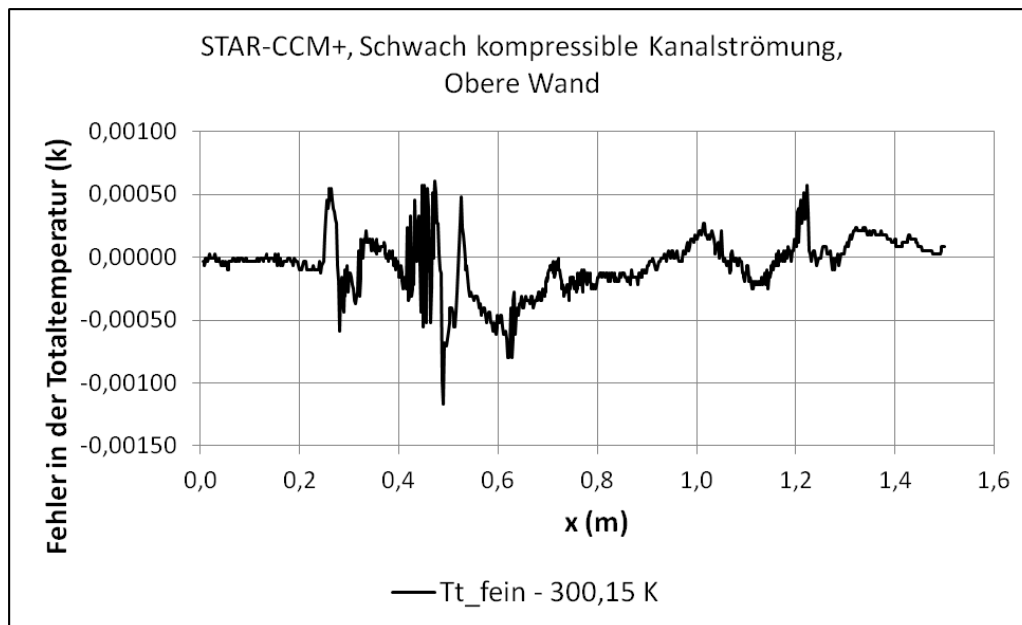
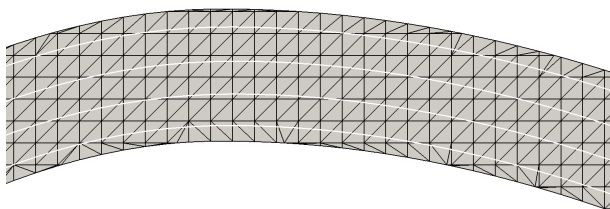


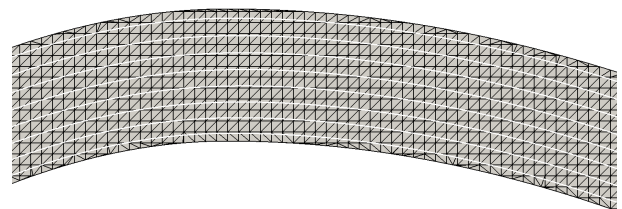
Abbildung 7.7: Schwach kompressible Kanalströmung, Fehler in der Totaltemperatur der Lösungen mit STAR-CCM+ auf der oberen Wand mit dem feinsten Netz.

Ergebnisse: Stromlinien-Verfahren

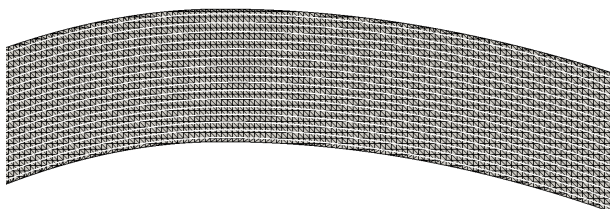
Ein Ausschnitt der drei systematisch verfeinerten Netze, die für die Rechnungen mit 4, 8 und 16 Stromlinien verwendet werden, sind in Bild 7.8 zu sehen.



(a) Grobes Netz (4 Stromlinien)



(b) Mittleres Netz (8 Stromlinien)

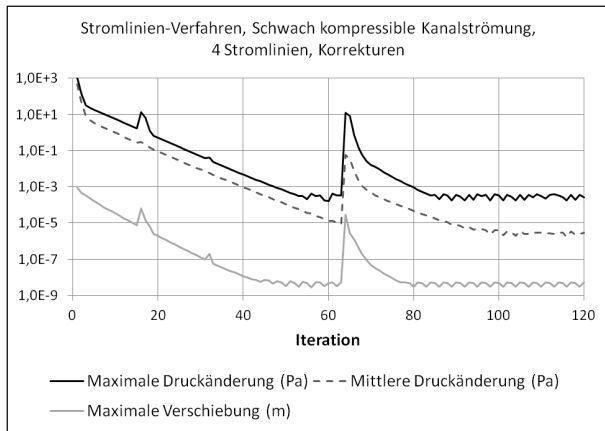


(c) Feines Netz (16 Stromlinien)

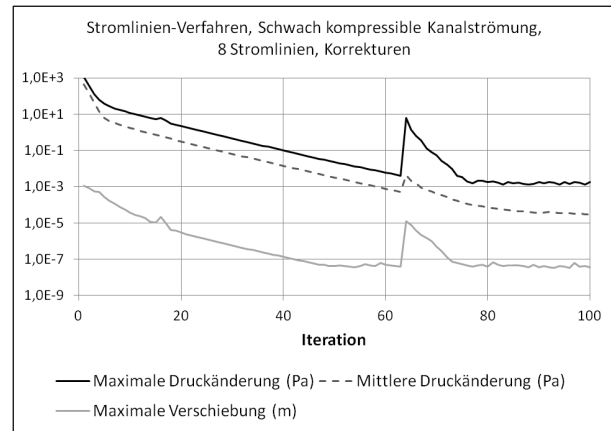
Abbildung 7.8: Schwach kompressible Kanalströmung, Ausschnitte der Netze des Stromlinien-Verfahrens mit 4, 8 und 16 Stromlinien.

Auch diese drei Rechnungen sind so lange fortgeführt, bis keine weitere Reduktion des Iterationsfehlers mehr erreicht werden kann. Die maximalen und mittleren Druckkorrekturen sowie die maximale Verschiebung eines Stromlinien-Stützpunktes zeigt Bild 7.9. Die Sprünge, die bei

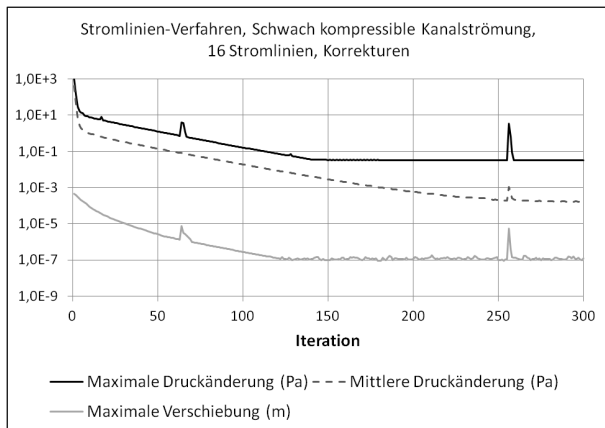
4, 8, 16, 32 und alle weiteren Vielfachen von 64 Iterationen zu erkennen sind, sind dadurch begründet, dass zu diesen Zeitpunkten die relative Lage der Punkte auf den benachbarten Stromlinie bzw. Wänden aktualisiert werden (siehe hierzu die Beschreibung in Kapitel 4).



(a) 4 Stromlinien



(b) 8 Stromlinien



(c) 16 Stromlinien

Abbildung 7.9: Schwach kompressible Kanalströmung, Stromlinien-Verfahren, maximale Druckänderung pro Iteration (Pa), mittlere Druckänderung pro Iteration (Pa) und maximale Verschiebung eines Stromlinien-Stützpunktes (m), jeweils für 4, 8, 16 Stromlinien.

Die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers folgt der Vorgehensweise aus Kapitel 2.5.4. Zunächst wird die Referenzgröße der räumlichen Diskretisierung (Fläche des Rechengebiets geteilt durch die Anzahl der Stromliniensegmente) für alle drei Fälle ermittelt und in Tabelle 7.2.1 zusammengefasst.

| Netzindex i | Stromlinien | Stromlinien-Segmente | h (10^{-3} m) |
|---------------|-------------|----------------------|--------------------|
| 1 | 16 | 12841 | 2,446768 |
| 2 | 8 | 3390 | 4,762032 |
| 3 | 4 | 940 | 9,043328 |

Tabelle 7.1: Schwach kompressible Kanalströmung, mittlere Stromlinien-Segmentlänge.

Für die Bestimmung der Ordnung des Diskretisierungsfehlers wird die einzige variierende Größe verwendet, der statische Druck. Die Differenzen der Werte auf den unterschiedlichen Netzen sowie der extrapolierte Verlauf ist in den Bildern 7.10 für die obere und 7.11 für die untere Wand dargestellt.

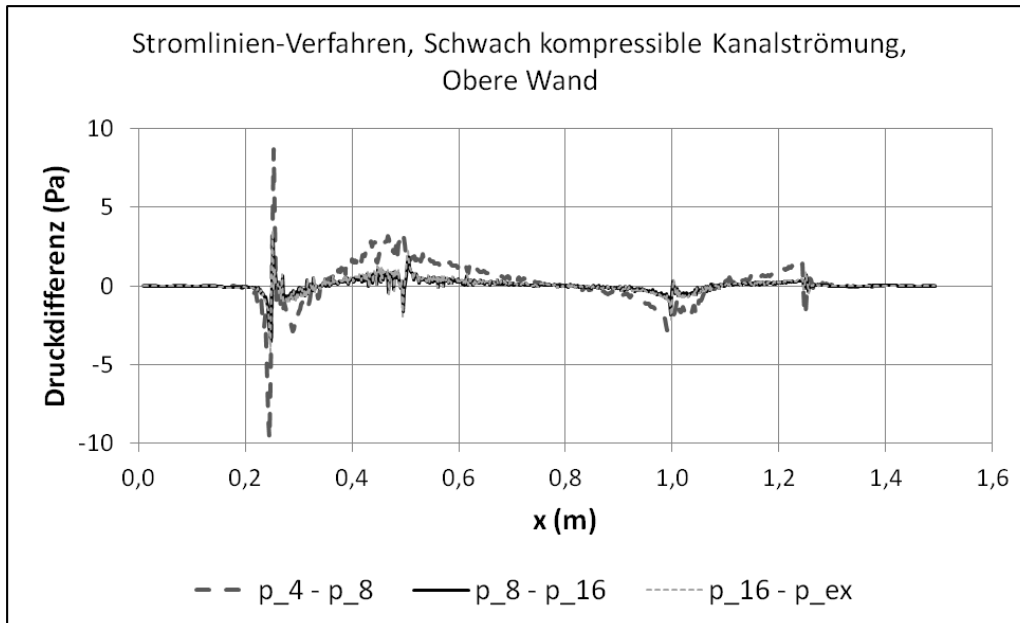


Abbildung 7.10: Schwach kompressible Kanalströmung, Vergleich der Druckdifferenzen der Lösungen mit dem Stromlinien-Verfahren sowie der extrapolierten Lösung auf der oberen Wand mit unterschiedlicher Stromlinienanzahl.

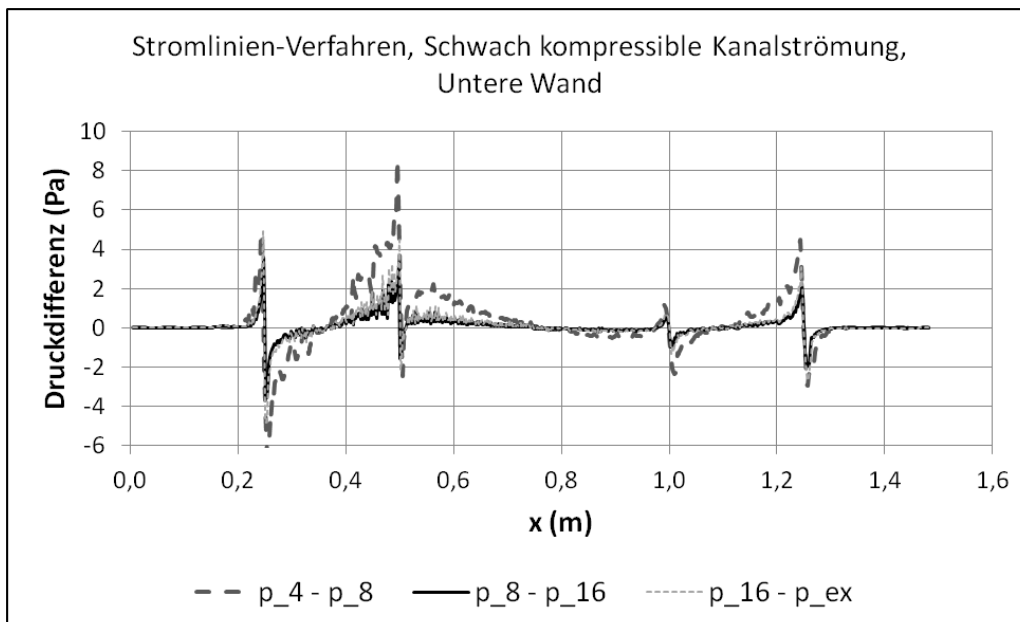


Abbildung 7.11: Schwach kompressible Kanalströmung, Vergleich der Druckdifferenzen der Lösungen mit dem Stromlinien-Verfahren sowie der extrapolierten Lösung auf der unteren Wand mit unterschiedlicher Stromlinienanzahl.

Die Ergebnisse der Auswertung des Diskretisierungsfehlers sind in Tabelle 7.2.1 zusammenge-

fasst.

| | Obere Wand | Untere Wand |
|-------------------|-----------------|-----------------|
| r_{21} | 1,946254 | 1,946254 |
| r_{32} | 1,899048 | 1,899048 |
| p_{min} | 0,0044 | 0,0045 |
| p_{av} | 2,8356 | 1,9994 |
| p_{max} | 13,7233 | 12,5422 |
| e_a^{21} | 0,0002 % | 0,0002 % |
| e_{ext}^{21} | 0,0000 % | 0,0001 % |
| GCI_{fine}^{21} | 0,0043 % | 0,0098 % |
| f_o | 14,36 % | 12,84 % |

Tabelle 7.2: Schwach kompressible Kanalströmung, Ergebnisse der Beurteilung des Diskretisierungsfehlers.

Die Verhältnisse der mittleren Segmentlängen r liegen alle nahe 2, da die Zellgröße halbiert wurde, weswegen sich im Mittel die Segmentlänge ebenfalls etwa halbiert hat. Die extrapolierten Werte des statischen Drucks sind jeweils mit dem arithmetischen Mittelwert der lokalen Werte für die Ordnung des Diskretisierungsfehlers p_{av} berechnet. Dieser liegt, wie in Kapitel *Konvergenzordnung des Verfahrens* beschrieben, erwartungsgemäß zwischen eins und drei, je nachdem, ob der Einfluss des Diskretisierungsfehlers der Druck- oder der Stromlinienform-Approximation überwiegt. Die Fehlerabschätzungen e_a für den Fall mit 16 Stromlinien sowie der extrapolierten Lösung e_{ext} liegen alle auf einem sehr niedrigen Niveau vom unter 0,0002 %. Auch der Gesamtfehler GCI ist mit etwa 0,01 % sehr niedrig. Der Anteil der Zellen, in denen oszillatorische Konvergenz vorliegt f_o ist mit rund 15 % im erwarteten Bereich, da die Lösung mit 16 Stromlinien bereits sehr nahe an der extrapolierten Lösung liegt. Je näher man der netzunabhängigen Lösung kommt, desto höher wird naturgemäß der Anteil der Zellen mit oszillatorischer Konvergenz. Insgesamt weisen diese Werte übereinstimmend auf eine allgemein gute Konvergenz hin. Dementsprechend ist in den Bildern 7.10 und 7.11 zumindest für die Fälle mit vier und acht Stromlinien auch noch eine systematische Reduktion der Druckunterschiede zu erkennen. Etwas schwer zu erkennen ist, dass die Lösung mit 16 Stromlinien bereits beinahe identisch mit der extrapolierten Lösung ist.

Vergleich der Ergebnisse

Die Druckverläufe der Lösungen mit dem Stromlinien-Verfahren mit 8 Stromlinien und der Lösung auf dem feinsten Netz mit STAR-CCM+ auf der oberen Wand in Bild 7.12 und auf der unteren Wand in Bild 7.13 zeigen optisch übereinanderliegende Linien. Das Stromlinien-Verfahren gibt die Physik dieser Strömung also in guter Übereinstimmung mit der Referenzlösung wieder.

Für eine genauere Bewertung zeigt Bild 7.14 und 7.15 die Differenzen der extrapolierten Lösungen beider Verfahren auf der oberen und der unteren Wand. Abgesehen davon, dass die Druckwerte um maximal 0,01 % differieren, kommt noch dazu, dass das Stromlinienverfahren

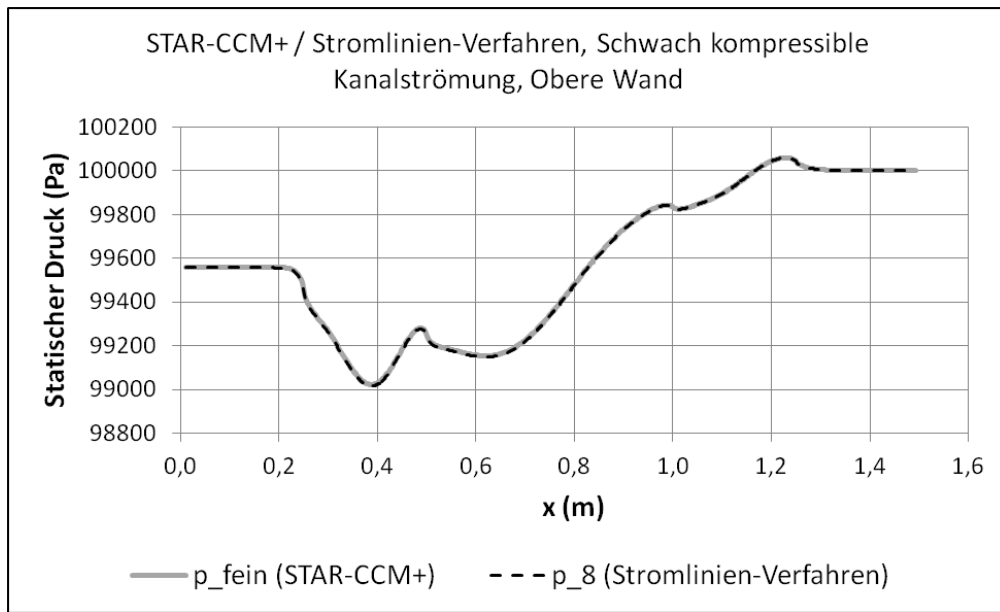


Abbildung 7.12: Schwach kompressible Kanalströmung, Verlauf des statischen Drucks der Lösungen mit STAR-CCM+ und dem Stromlinien-Verfahren auf der oberen Wand.

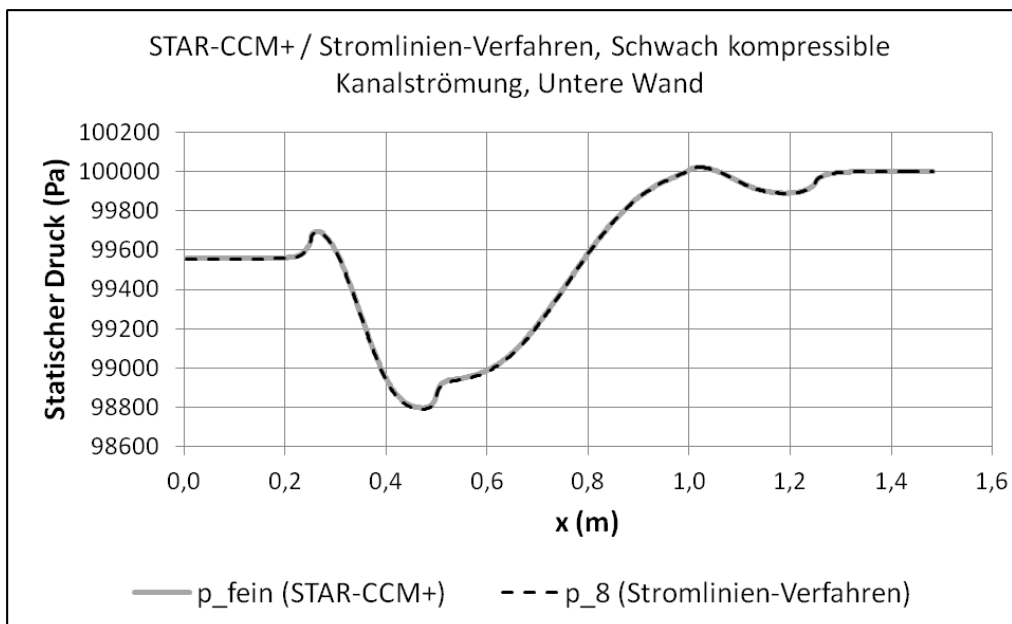


Abbildung 7.13: Schwach kompressible Kanalströmung, Verlauf des statischen Drucks der Lösungen mit STAR-CCM+ und dem Stromlinien-Verfahren auf der unteren Wand.

im Gegensatz zu STAR-CCM+ den Druck im Einströmquerschnitt korrekt wiedergibt. Die Differenzen bei $x = 0$ m sind Fehler von STAR-CCM+, bedingt durch den in Bild 7.6 gezeigten Fehler im Totaldruck.

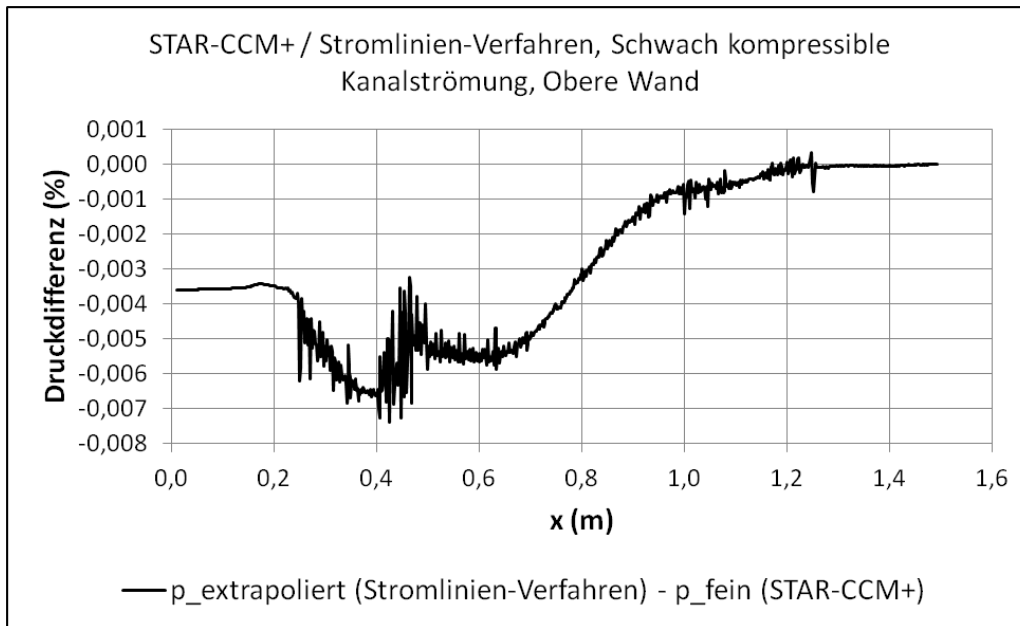


Abbildung 7.14: Schwach kompressible Kanalströmung, Vergleich der Druckdifferenzen der Lösungen mit STAR-CCM+ und dem Stromlinien-Verfahren auf der oberen Wand.

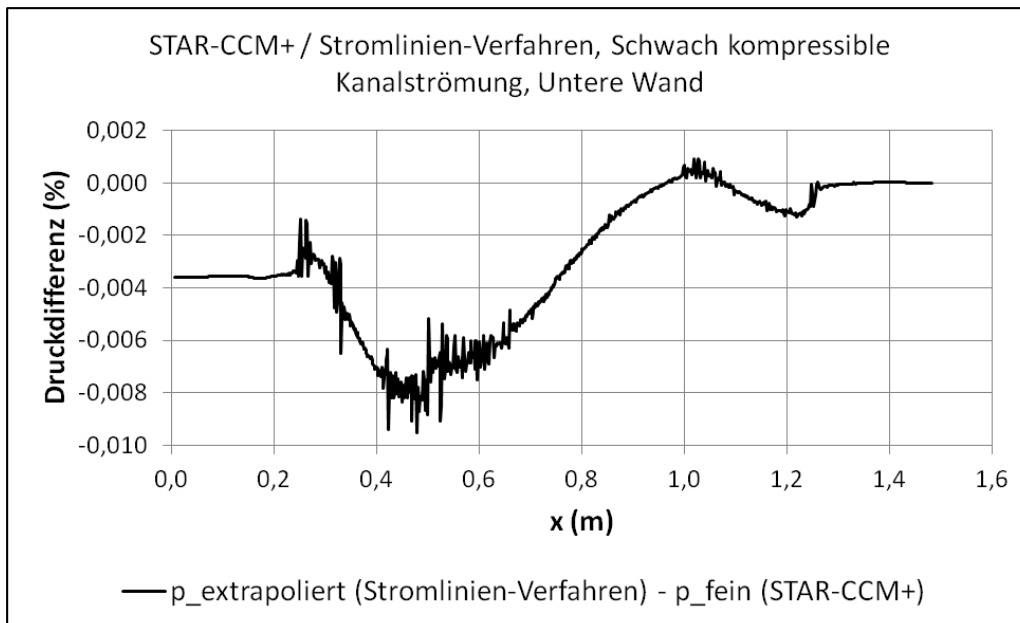


Abbildung 7.15: Schwach kompressible Kanalströmung, Vergleich der Druckdifferenzen der Lösungen mit STAR-CCM+ und dem Stromlinien-Verfahren auf der unteren Wand.

Vergleich der Rechenzeiten

Die Rechenzeiten können nur näherungsweise verglichen werden, da gerechter Weise zwei Simulationen beider Verfahren für den Vergleich herangezogen werden sollten, die eine etwa gleich große Abweichung zur jeweiligen netzunabhängigen Lösung haben. Das dies bei drei Rechnungen pro Verfahren zufällig bei Zweien übereinstimmt, ist dabei recht unwahrscheinlich.

Beide Rechnungen wurden auf demselben Computer jeweils nur auf einem Prozessorkern durchgeführt, da das Stromlinienverfahren noch nicht parallelisiert ist. Die absoluten Zeiten sind daher irrelevant, das Verhältnis ist entscheidend.

Eine ähnliche Größenordnung der Abweichungen von der extrapolierten Lösung des jeweiligen Verfahrens haben die Rechnung auf dem mittleren Netz mit STAR-CCM+ und der Fall mit 8 Stromlinien. Die Druckdifferenzen beider Verfahren sind stellvertretend auf der oberen Wand in Bild 7.16 dargestellt.

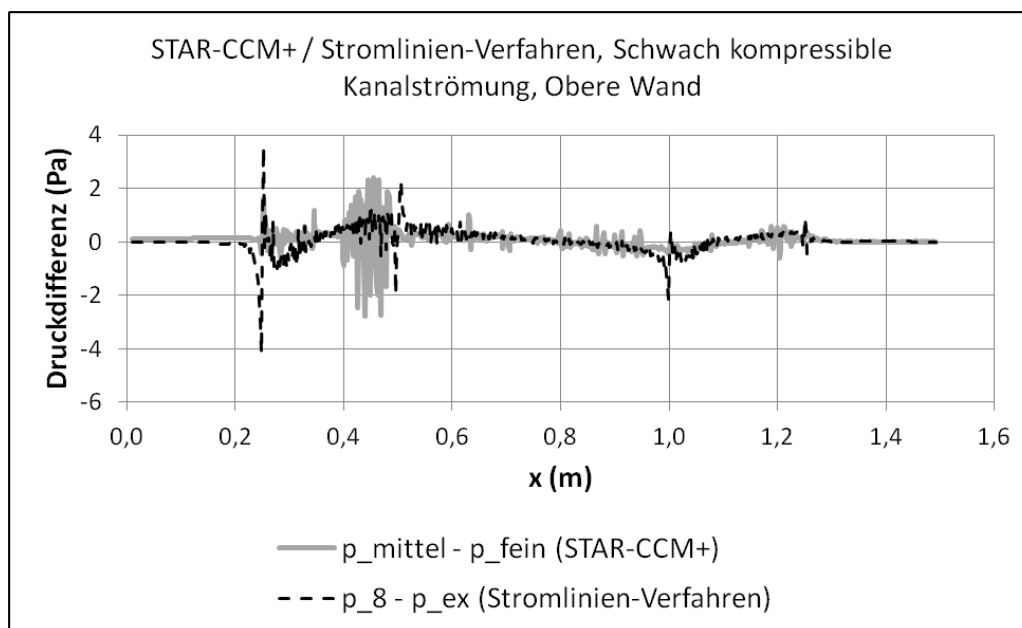


Abbildung 7.16: Schwach kompressible Kanalströmung, Vergleich der Druckdifferenzen der Lösungen mit STAR-CCM+ und dem Stromlinien-Verfahren auf der oberen Wand.

Mit STAR-CCM+ dauerte diese Rechnung 563,56 s, mit dem Stromlinienverfahren 6,44 s, also nur etwa 1,14 % der Rechenzeit von STAR-CCM+.

Zusammenfassung

Grundsätzlich ist die Übereinstimmung der Druckverläufe beider Verfahren sehr gut. Das Stromlinien-Verfahren ist in der Lage, die Physik dieser Strömung in guter Übereinstimmung mit der Referenzlösung wiederzugeben. Die maximale Abweichung im Druckverlauf liegt unter 0,01 %. Die Rechenzeit des Stromlinien-Verfahrens beträgt jedoch bei vergleichbarem Fehler nur etwa 1,14 % der Rechenzeit von STAR-CCM+.

7.2.2 Stark kompressible Kanalströmung

Mit dieser Rechnung soll das Stromlinien-Verfahren für deutlich kompressible, reibungsfreie Strömungen validiert werden. Aus diesem Grund sind die Randbedingungen so gewählt, dass eine maximale Machzahl von 0,8513 auftritt (siehe Bild 7.17).

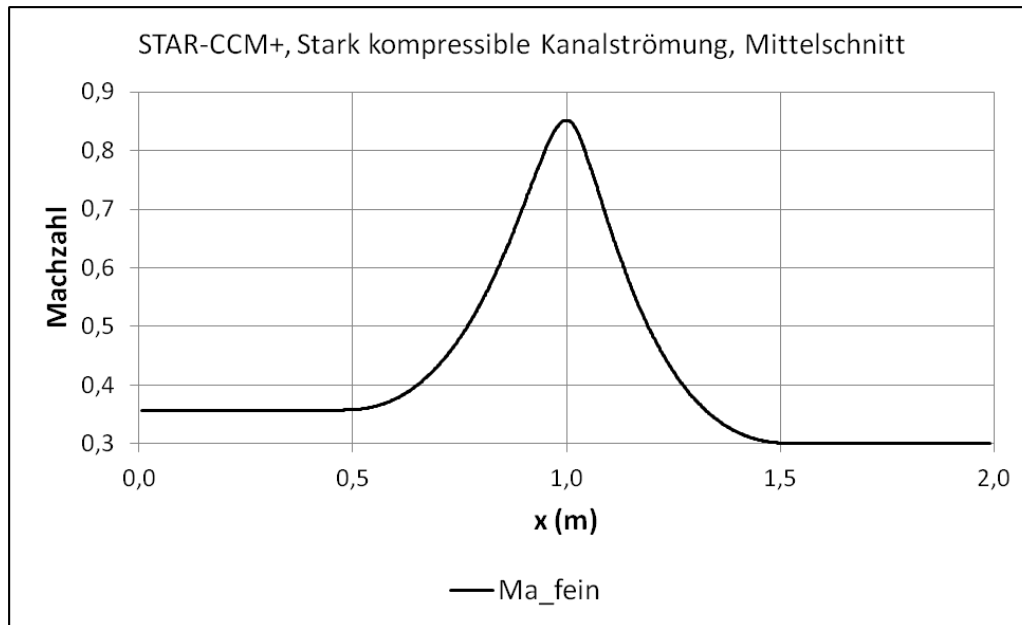


Abbildung 7.17: Stark kompressible Strömung, STAR-CCM+, Machzahl im Mittelschnitt des Kanals auf dem feinsten Netz.

Da beide Simulationsprogramme grundsätzlich dieselben Modellierungsansätze für Zustandsänderungen des Gases, die Randbedingungen sowie für die Strömungsberechnung verwenden, ist ein Vergleich der Ergebnisse uneingeschränkt möglich. Daher wird auch bei diesem Beispiel für die Validierungsrechnungen keine Abschätzung des Modellfehlers vorgenommen, da dieser wieder als identisch für beide Rechnungen angenommen wird.

Alle Simulationen sind soweit auskonvergiert, dass keine weitere Reduktion des Iterationsfehlers mehr erkennbar ist (siehe Bild 7.20 und 7.27), weswegen der dadurch bedingte Fehler für die einzelnen Rechnungen ebenfalls nicht separat quantifiziert wird.

Geometrie

Der von links nach rechts durchströmte zweidimensionale Kanal, der in Bild 7.18 dargestellt ist, hat eine Gesamtlänge von 2,0 m. Er besteht aus einem Einströmsegment von 0,5 m Länge und einer konstanten Höhe von 0,12 m. Daran schließt tangential ein kosinusförmiges Segment der Länge 0,5 m an, über das die Kanalhöhe zunächst von 0,12 m auf 0,07 m reduziert und anschließend wieder auf 0,14 m erweitert wird. Daraus folgt ein 0,5 m langes Segment mit einer konstantem Höhe von 0,14 m bis zum Ausströmrand. Es handelt sich also um eine typische, kompressible Düsenströmung.

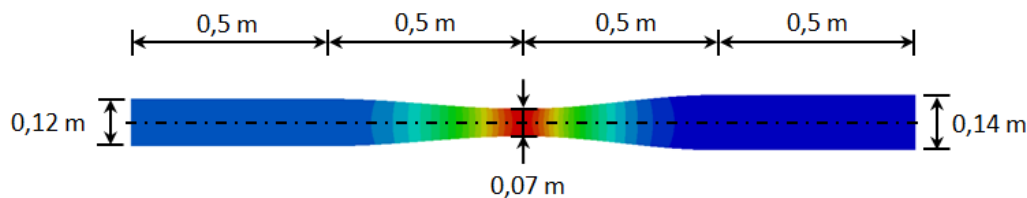


Abbildung 7.18: Stark kompressible Kanalströmung, Geometrie.

Randbedingungen

Das Fluid ist thermisch und kalorisch ideale Luft, deren thermodynamische Eigenschaften in Tab. 6.1 aufgelistet sind.

Am linken Einströmrand sind ein Totaldruck von 106445,63 Pa, eine Totaltemperatur von 305,41 K und ein Einströmwinkel von 0° also normal zum Einströmrand, vorgegeben.

Am rechten Ausströmrand ist der statische Druck auf $1 \cdot 10^5$ Pa festgelegt. Da es sich um eine reibungsfreie Euler-Rechnung handelt, sind Totaldruck und -temperatur im gesamten Rechengebiet konstant.

Die obere und untere Kanalwand ist adiabat und hat eine Gleit-Randbedingung.

Ergebnisse: STAR-CCM+

Die Rechenetze von STAR-CCM+ bestehen aus polyeder-förmigen Zellen, sowie vier Schichten prismatischer Zellen entlang der Wände. Bild 7.19 zeigt beispielhaft das größte Netz mit 6205 Zellen.

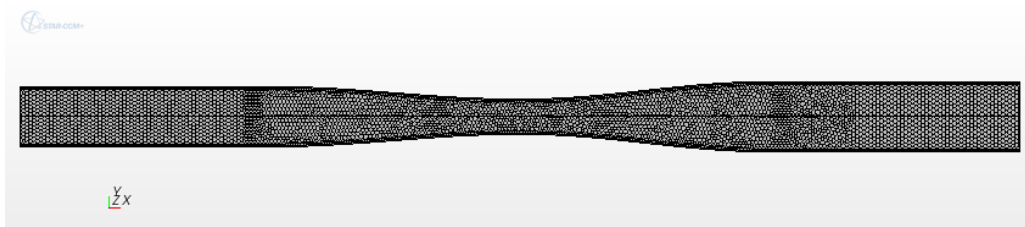
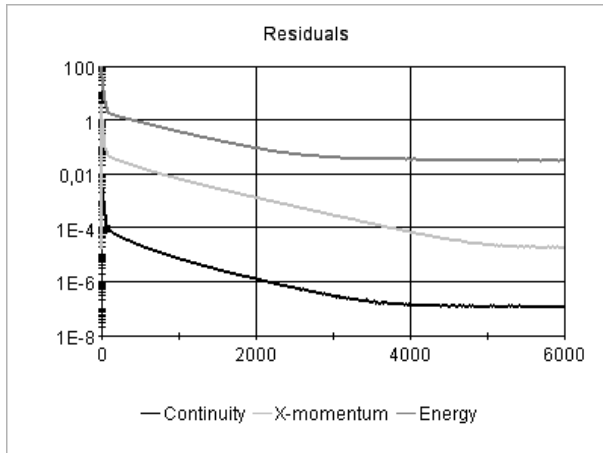


Abbildung 7.19: Stark kompressible Strömung, STAR-CCM+, unstrukturiertes grobes Netz (6205 Zellen).

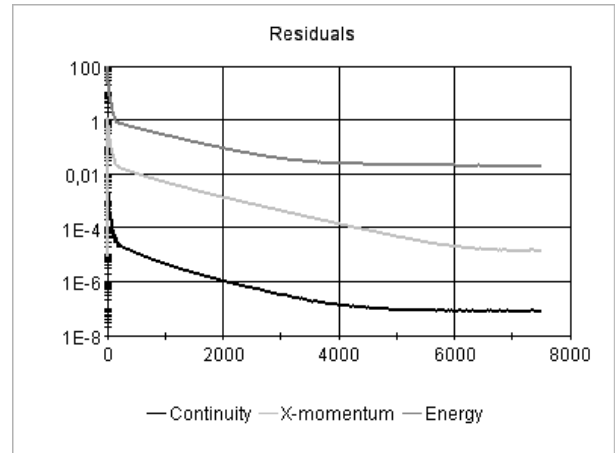
Als Voraussetzung für die folgende Auswertung zeigt Bild 7.20 die unnormierten Residuen der Rechnungen auf drei unterschiedlich feinen Netzen. Alle drei Rechnungen sind soweit auskonvergiert, dass keine weitere Reduktion des Iterationsfehlers erreicht wird. Um die Übersichtlichkeit zu verbessern, wurden in den Diagrammen die Residuen der Impulserhaltung in y-Richtung entfernt.

Zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers werden die Ergebnisse auf mehreren, systematisch verfeinerten Netzen verglichen. Bild 7.21 zeigt zum Vergleich jeweils denselben Ausschnitt der verschiedenen feinen Netze an der engsten Stelle des Kanals. Die horizontale, durchgezogene Linie am unteren Rand der Bilder ist der Mittelschnitt des Kanals.

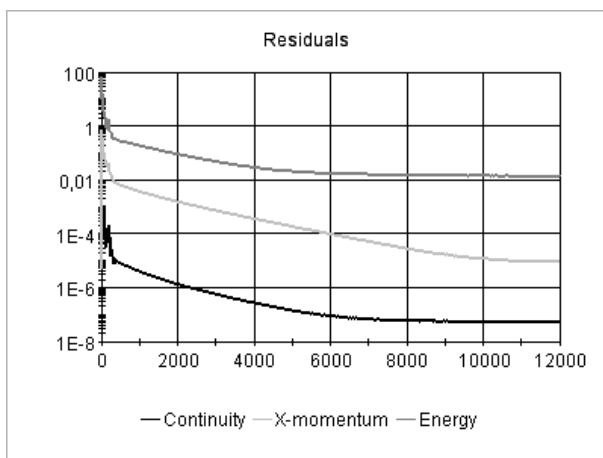
Auch bei diesem Fall ist der statische Druck der Skalar, der für die Bestimmung des Diskretisierungsfehlers verwendet wird. Dessen Verlauf entlang des Mittelschnitts des Kanals zeigt Bild 7.22.



(a) Grobes Netz (6205 Zellen)

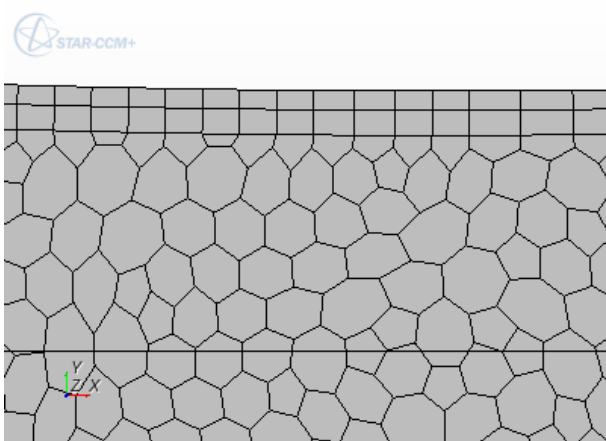


(b) Mittleres Netz (13965 Zellen)

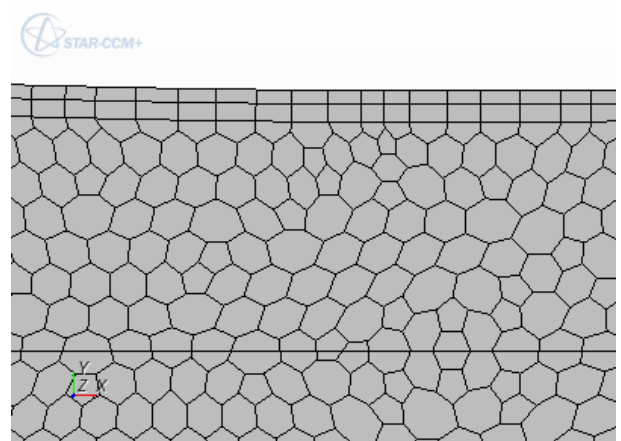


(c) Feines Netz (31980 Zellen)

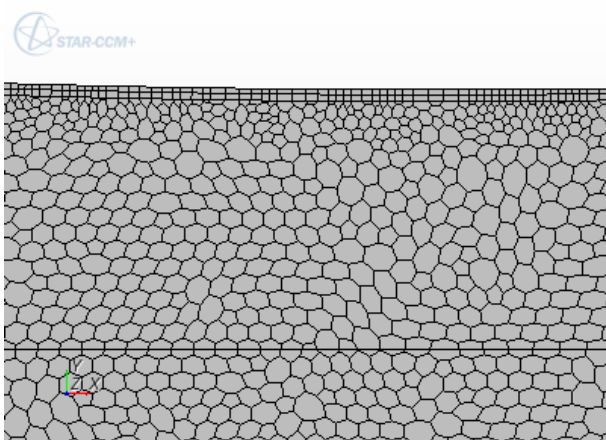
Abbildung 7.20: Stark kompressible Kanalströmung, STAR-CCM+, unnormierte Residuen.



(a) Grobes Netz (6205 Zellen)



(b) Mittleres Netz (13965 Zellen)



(c) Feines Netz (31980 Zellen)

Abbildung 7.21: Stark kompressible Kanalströmung, STAR-CCM+, systematisch verfeinerte unstrukturierte Netze.

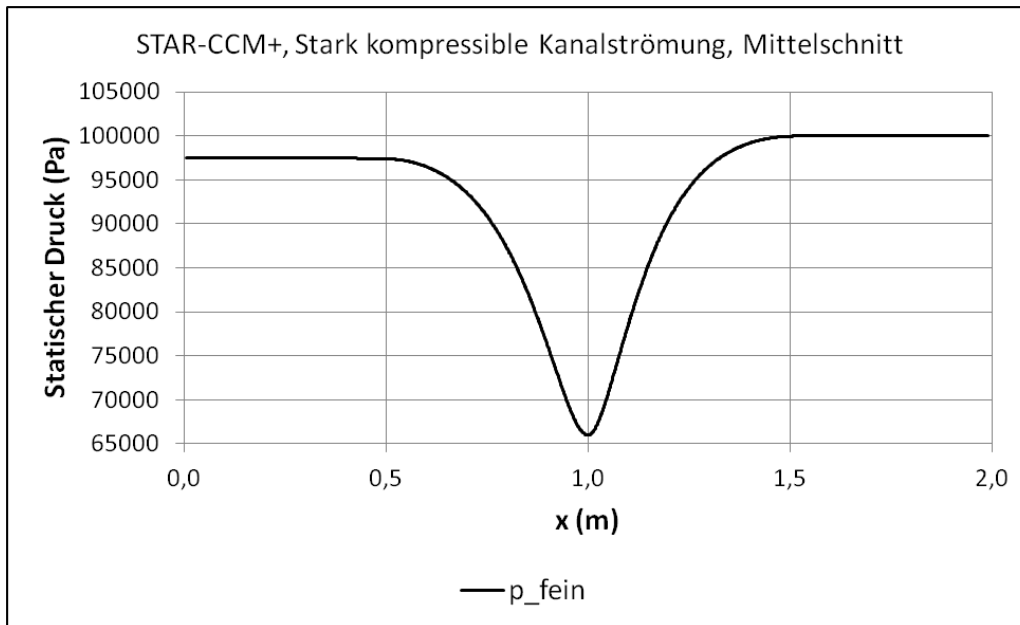


Abbildung 7.22: Stark kompressible Strömung, STAR-CCM+, Druckverlauf entlang des Mittelschnitts des Kanals auf dem feinsten Netz.

Die Vorgehensweise folgt wieder den Schritten, die in Kapitel 2.5.4 beschrieben sind. Daher werden die Ergebnisse direkt in Tabelle 7.2.2 zusammengefasst.

| Bezeichnung | Formelzeichen | Wert (STAR-CCM+) |
|--|-------------------|-------------------------|
| Mittlere Zellgröße, feines Netz | h_1 | $2,683 \cdot 10^{-3}$ m |
| Mittlere Zellgröße, mittleres Netz | h_2 | $4,058 \cdot 10^{-3}$ m |
| Mittlere Zellgröße, grobes Netz | h_3 | $6,088 \cdot 10^{-3}$ m |
| Verhältnis der Zellgrößen, grobes/mittleres Netz | r_{21} | 1,5133 |
| Verhältnis der Zellgrößen, mittleres/feines Netz | r_{32} | 1,5002 |
| Minimale lokale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{min} | 0,0010 |
| Mittlere globale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{av} | 2,1870 |
| Maximale lokale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{max} | 19,5754 |
| Geschätzter relativer Fehler, feines Netz | e_a^{21} | 0,0276 % |
| Geschätzter relativer Fehler, extrapolierte Lösung | e_{ext}^{21} | 0,0188 % |
| Grid Convergence Index, feines Netz | GCI_{fine}^{21} | 2,3431 % |
| Anteil der Zellen mit oszillatorischer Konvergenz | f_o | 35,11 % |

Tabelle 7.3: Stark kompressible Kanalströmung, Ergebnisse der Beurteilung des Diskretisierungsfehlers für die Rechnungen mit STAR-CCM+.

Die mittleren Zellgrößen h erhöhen sich mit jeder Netzvergrößerung systematisch etwa um den Faktor $r = 1,5$. Die mittlere Ordnung des Diskretisierungsfehlers auf der Basis der lokalen

Änderungen des statischen Drucks auf den unterschiedlichen Netzen p_{av} beträgt 2,19. Das liegt nahe an dem für dieses Verfahren erwarteten Wert von 2,0. Der durchschnittliche Druckfehler GCI ist jedoch auf einem recht hohen Niveau von etwa 2,34 %. Die Ursache dafür ist der hohe Anteil an Zellen mit oszillatorischer Konvergenz f_o , der bei rund 35 % liegt. Bedenkt man, dass etwas mehr als die Hälfte der Zellen in den Segmenten mit konstantem Querschnitt am Anfang und Ende des Kanals liegen, liegt also im überwiegenden Anteil der Zellen, in denen sich der Druck überhaupt nennenswert ändert, oszillatorische Konvergenz vor. Das wird bestätigt durch den Vergleich der Druckdifferenzen zwischen zwei aufeinander folgender Netz-Niveaus in Bild 7.23.

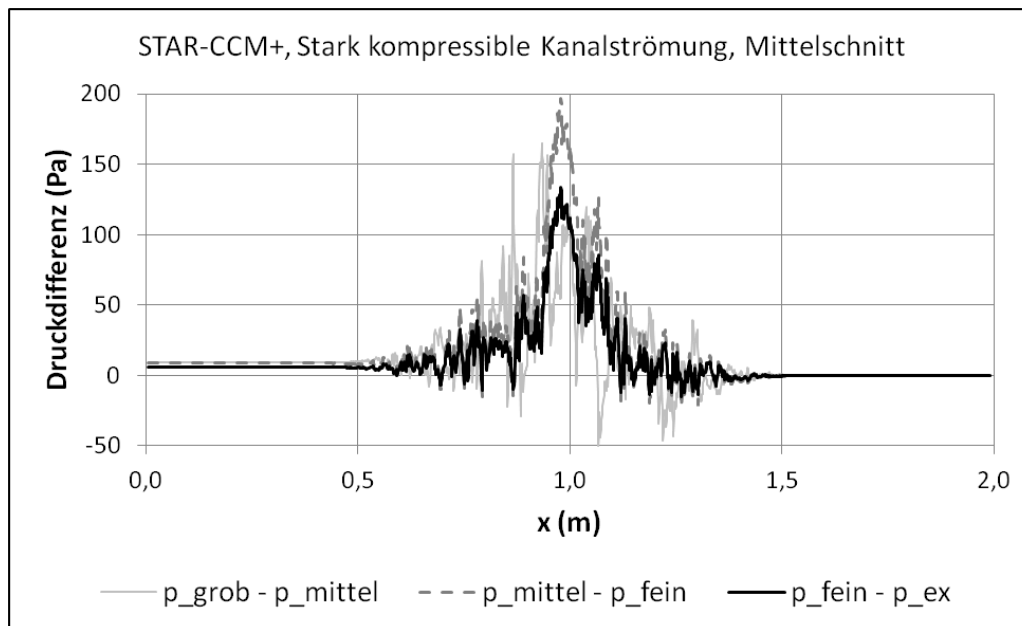


Abbildung 7.23: Stark kompressible Strömung, STAR-CCM+, Druckdifferenz der Lösungen auf den drei unstrukturierten Netzen.

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Drücke in einem Großteil des Bereichs zwischen $0,5 \text{ m} \leq x \leq 1,5 \text{ m}$ stark oszillieren. Dementsprechend ist kaum eine Reduktion der Differenz der Lösung zwischen dem groben und dem mittleren Netz im Vergleich zu der Differenz zwischen dem feinen Netz und den extrapolierten Werten zu erkennen, die mit $p_{av} = 2,19$ von der Lösung auf dem feinsten Netz extrapoliert ist. Auch die zweimalige systematische Netzverfeinerung verbessert das Ergebnis also nur unwesentlich. Relativ zum Maximalbetrag der Druckänderung entlang des Mittelschnitts von 33719,03 Pa (siehe Bild 7.22) entspricht die maximale Differenz des statischen Drucks zwischen dem feinen Netz und der extrapolierten Lösung mit 133,22 Pa jedoch trotzdem nur 0,4 %.

Dagegen ist der Fehler im Totaldruck in Bild 7.24, der eigentlich konstant 106445,63 Pa sein sollte, vergleichsweise gering. Die Werte liegen auf dem feinsten Netz alle innerhalb eines Korridors von 14,21 Pa.

Die Totaltemperatur in Bild 7.25 weicht erwartungsgemäß nur um maximal $3 \cdot 10^{-4} \text{ K}$ vom korrekten Wert von 305,41 K ab.

Insgesamt ist deutlich zu erkennen, dass die Fehler bei stärker kompressiblen Strömungen schnell zunehmen. Trotzdem liegt die durch Diskretisierungsfehler bedingte Unsicherheit im statischen Druck mit 2,34 % noch auf akzeptablen Niveau.

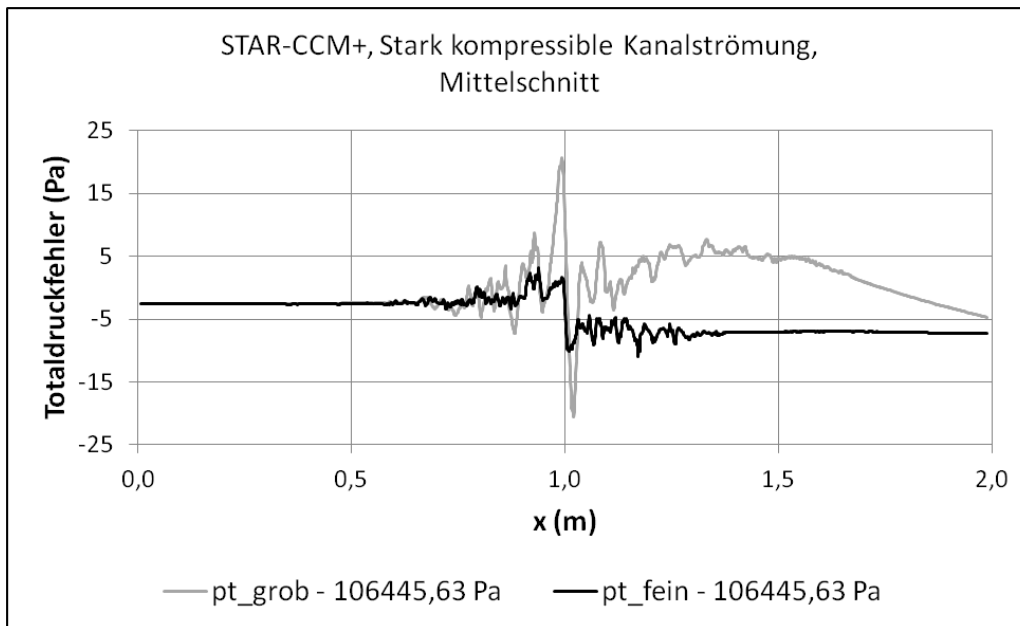


Abbildung 7.24: Stark kompressible Strömung, STAR-CCM+, Totaldruckfehler auf dem feinsten Netz.

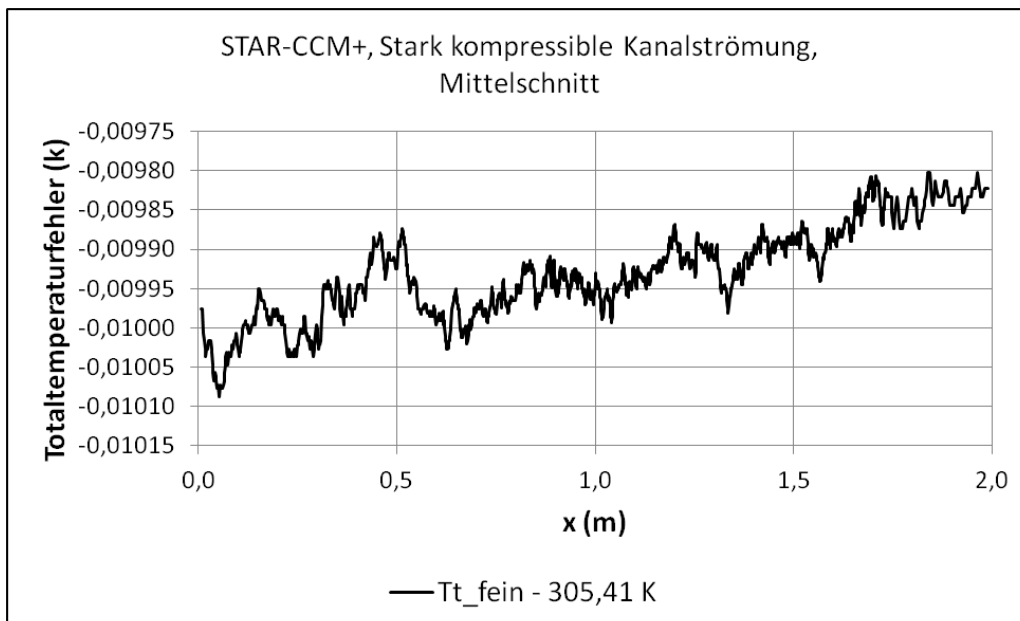


Abbildung 7.25: Stark kompressible Strömung, STAR-CCM+, Totaltemperaturverlauf auf dem feinsten Netz.

Ergebnisse: Stromlinien-Verfahren

Mit dem Stromlinien-Verfahren ist dieser Fall mit 4, 8, 16 und 32 Stromlinien gerechnet. Es werden kartesische Netze verwendet. Bei jeder Netzverfeinerung halbiert sich die Zellgröße und damit auch die mittlere Länge der Stromlinien-Segmente. Bild 7.26 zeigt beispielhaft das Netz des Falls mit 8 Stromlinien.

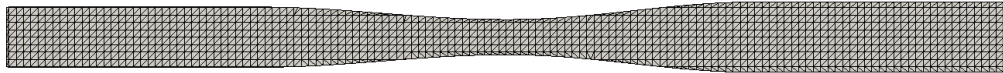
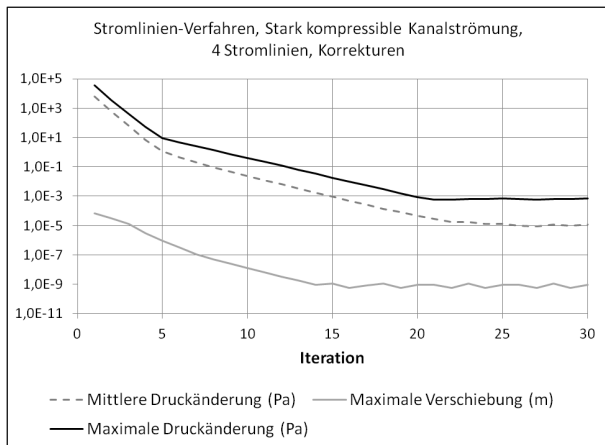
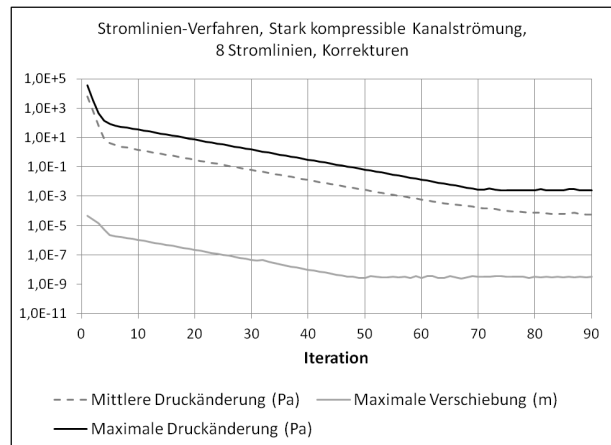


Abbildung 7.26: Stark kompressible Strömung, Stromlinien-Verfahren, grobes Netz mit 8 Stromlinien.

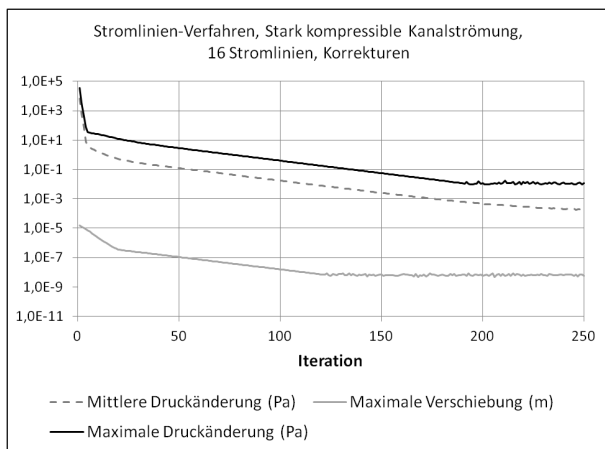
Die Maximalanzahl der Iterationen ist in allen Fällen so gewählt, dass keine signifikante weitere Reduktion der Korrekturen erreicht werden kann. In Bild 7.27 sind die maximalen und mittleren Druckkorrekturen sowie die maximale Verschiebung eines Stromlinien-Punktes über den Iterationen aufgetragen.



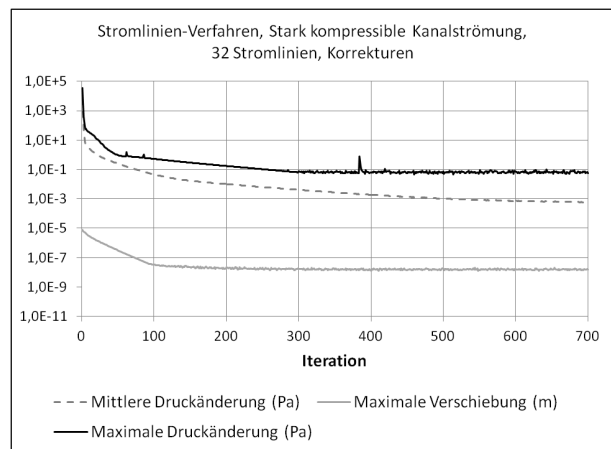
(a) Grobes Netz (4 Stromlinien)



(b) Grobes Netz (8 Stromlinien)



(c) Grobes Netz (16 Stromlinien)



(d) Grobes Netz (32 Stromlinien)

Abbildung 7.27: Stark kompressible Kanalströmung, Stromlinien-Verfahren, Korrekturen.

Die Kurven der Rechnung mit 4 Stromlinien enden vor dem Erreichen der vorgegebenen Iterationszahl, da die Korrekturen gleich null sind, was auf einer logarithmischen Skala nicht darstellbar ist.

Analog zur Auswertung der STAR-CCM+ Lösung wird auch hier der statische Druck verwendet um den räumlichen Diskretisierungsfehler zu quantifizieren. Die Differenzen zwischen den Lösungen jeweils benachbarter Diskretisierungs-Niveaus zeigt Bild 7.28.

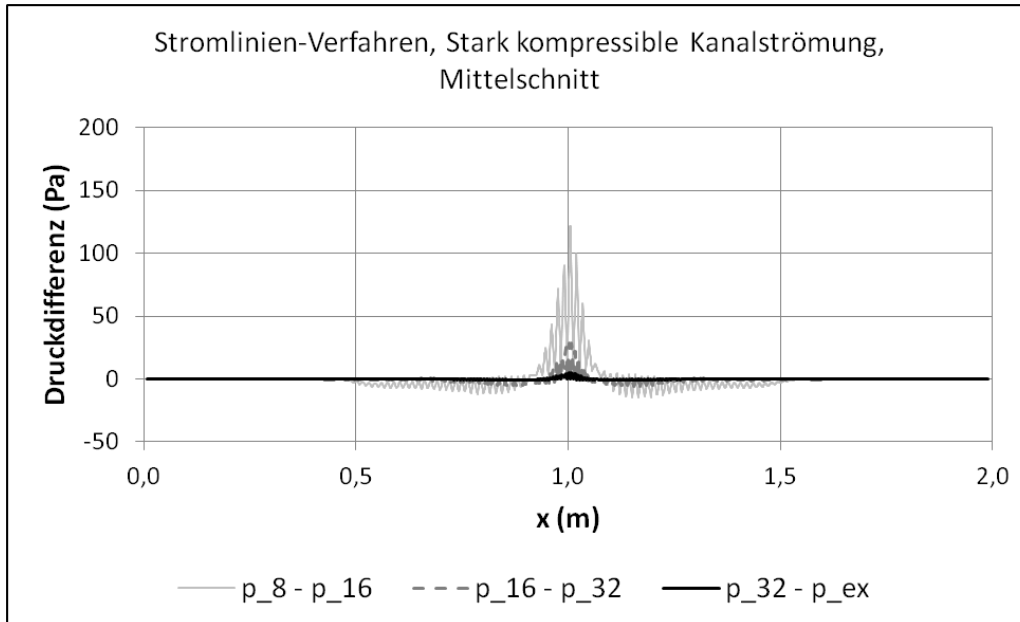


Abbildung 7.28: Stark kompressible Strömung, Stromlinien-Verfahren, Differenz der Lösungen mit unterschiedlicher Stromlinien-Anzahlen und zur extrapolierten Lösung.

Für die Extrapolation einer netzunabhängigen Lösung ist es dabei sehr positiv, dass die Differenzen mit höherer Stromlinien-Anzahl bzw. Diskretisierungs-Genauigkeit systematisch kleiner werden. Im Gegensatz zu den STAR-CCM+ Ergebnissen auf unterschiedlich feinen Netzen ist hier eine deutliche Verbesserung des Ergebnisses bei einer Netzverfeinerung zu erkennen. Zudem ist das Niveau der Differenzen bei höherer Diskretisierungs-Genauigkeit niedriger. In Tabelle 7.2.2 sind die Ergebnisse der Ermittlung des räumlichen Diskretisierungsfehlers zusammen gefasst.

Die Halbierung der Zellgröße spiegelt sich in den Verhältnissen der Segmentlängen r von etwa 2 wieder. Der arithmetische Mittelwert der lokalen Ordnungen des Diskretisierungsfehlers von $p = 2,7$ wird für die Extrapolation der Werte des Falls mit 32 Stromlinien verwendet, um eine netzunabhängige Lösung zu ermitteln. Auch hier liegt der Anteil der Zellen, mit oszillatorischer Konvergenz bei relativ hohen 19,03 %. Aufgrund der in Bild 7.28 deutlich erkennbaren Verbesserung der Lösung ist die Ursache hier eine andere. Die Lösung mit 32 Stromlinien liegt bereits sehr nahe der netzunabhängigen Lösung, weswegen sehr geringe Restschwankungen der Druckwerte zu diesem hohen Wert führen. Das wird auch untermauert durch den sehr niedrigen Wert der Gesamtunsicherheit (GCI) von nur 0,042 %.

Der Fehler im Totaldruck bzw. der Totaltemperatur ist beim Stromlinien-Verfahren aufgrund des Modellierungs-Ansatzes gleich null, da beide Größen direkt erhalten werden.

| Bezeichnung | Formelzeichen | Wert (Stroml.-Verf.) |
|--|-------------------|-------------------------|
| Mittlere Segmentlänge, feines Netz | h_1 | $3,592 \cdot 10^{-3}$ m |
| Mittlere Segmentlänge, mittleres Netz | h_2 | $7,180 \cdot 10^{-3}$ m |
| Mittlere Segmentlänge, grobes Netz | h_3 | $1,434 \cdot 10^{-2}$ m |
| Verhältnis der Segmentlängen, grobes/mittleres Netz | r_{21} | 1,9985 |
| Verhältnis der Segmentlängen, mittleres/feines Netz | r_{32} | 1,9977 |
| Minimale lokale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{min} | 0,0048 |
| Mittlere globale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{av} | 2,7020 |
| Maximale lokale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{max} | 12,2544 |
| Geschätzter relativer Fehler, feines Netz | e_a^{21} | 0,0018 % |
| Geschätzter relativer Fehler, extrapolierte Lösung | e_{ext}^{21} | 0,0003 % |
| Grid Convergence Index, feines Netz | GCI_{fine}^{21} | 0,0420 % |
| Anteil der Segmente mit oszillatorischer Konvergenz | f_o | 19,03 % |

Tabelle 7.4: Stark kompressible Kanalströmung, Ergebnisse der Beurteilung des Diskretisierungsfehlers für die Rechnungen mit dem Stromlinien-Verfahren.

Vergleich der Ergebnisse

Grundsätzlich zeigt Bild 7.29, dass beide Verfahren für diesen Fall zu sehr ähnlichen Ergebnissen kommen. Allerdings ist für diese stark kompressible Gasströmung der Anteil der Zellen mit oszillatorischer Konvergenz bei STAR-CCM+ mit 35,11 % etwa dreimal so groß wie beim Stromlinien-Verfahren, wo er bei 9,38 % liegt. Da sich die Druck-Oszillationen bei systematischer Netzverfeinerung bei STAR-CCM+ nur unwesentlich reduzieren, ist auch die Unsicherheit im Ergebnis auf dem feinen Netz mit 2,34 % erheblich höher im Vergleich zum Stromlinien-Verfahren mit 0,07 %.

Die Differenz der extrapolierten Lösungen beider Verfahren ist in Bild 7.30 dargestellt. Sie liegen in einem Korridor von 173,26 Pa. Allerdings ist dabei zu bedenken, dass bereits die Differenz zwischen der Lösung auf dem feinen Netz und der extrapolierten Lösung mit STAR-CCM+ in einem Korridor der Breite 133,22 Pa liegen. Dagegen liegen die Abweichungen der Lösung mit 32 Stromlinien zur extrapolierten Lösung des Stromlinien-Verfahrens in einem Korridor von nur 6,28 Pa Breite. Das deutet darauf hin, dass die Differenzen der Lösungen beider Verfahren nicht auf einen Fehler im Stromlinien-Verfahren zurückzuführen ist.

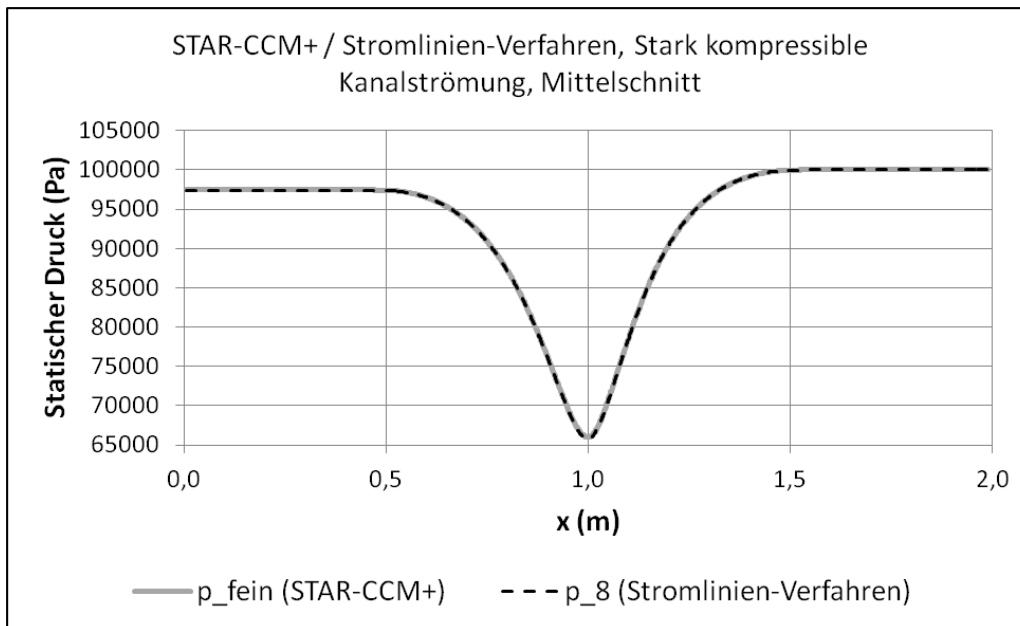


Abbildung 7.29: Stark kompressible Strömung, Stromlinien-Verfahren, Druckverläufe im Mittelschnitt des Kanals mit STAR-CCM+ und dem Stromlinien-Verfahren.

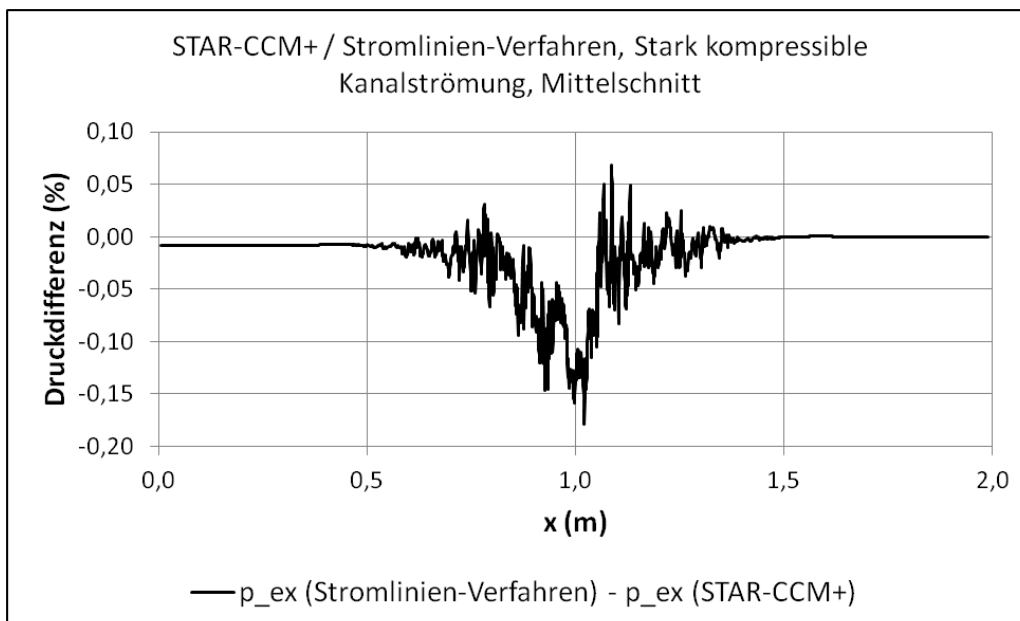


Abbildung 7.30: Stark kompressible Strömung, Stromlinien-Verfahren, Differenz der extrapolierten Lösungen mit STAR-CCM+ und dem Stromlinien-Verfahren.

Vergleich der Rechenzeiten

Für den Vergleich der Rechenzeiten werden jeweils Lösungen beider Verfahren herangezogen, die relativ zu den extrapolierten Werten desselben Verfahrens die gleiche Differenz aufweisen. Somit werden unabhängig davon, welches die richtige Lösung ist, Ergebnisse gleicher Güte verglichen. Bild 7.31 illustriert, dass die Abweichungen zu den extrapolierten Werten mit dem feinen Netz bei STAR-CCM+ ähnlich groß sind, wie die Ergebnisse mit 8 Stromlinien.

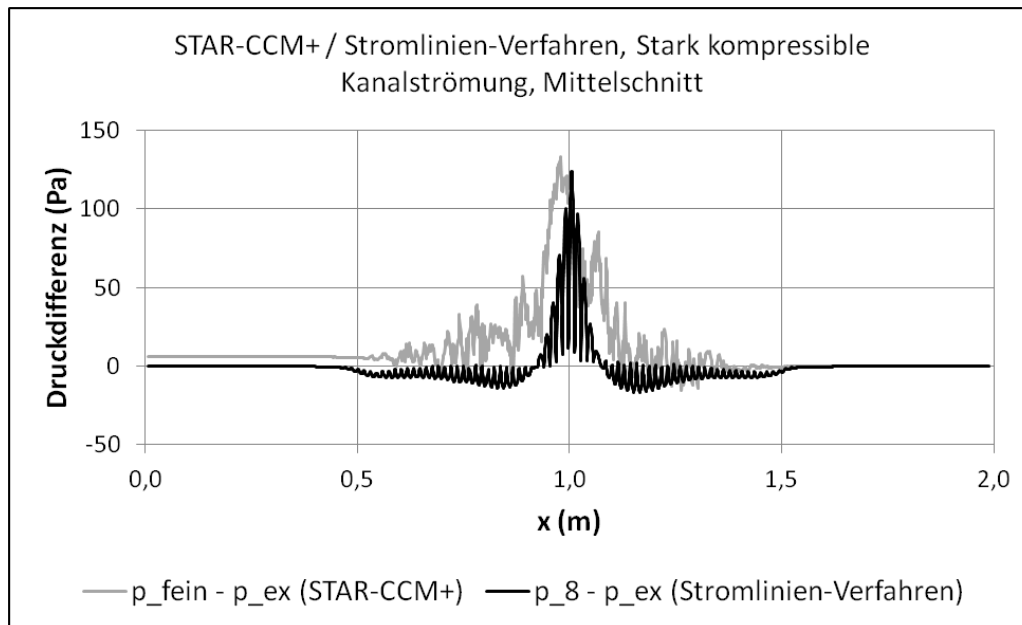


Abbildung 7.31: Stark kompressible Strömung, Differenz zwischen der Lösung auf dem feinen Netz mit STAR-CCM+ und der extrapolierten Lösung, sowie die Differenz zwischen der Lösung mit 8 Stromlinien mit dem Stromlinien-Verfahren und der extrapolierten Lösung.

Auf demselben Computer auf einem Prozessorkern dauert die Simulation mit STAR-CCM+ auf dem feinen Netz 2088,20 s, mit dem Stromlinien-Verfahren mit 8 Stromlinien 2,31 s. Für ein Ergebnis ähnlicher Genauigkeit ist mit dem Stromlinien-Verfahren also nur rund 0,11 % der CPU-Zeit erforderlich, die STAR-CCM+ benötigt.

Zusammenfassung

Insgesamt zeigt sich, dass das Stromlinien-Verfahren bei stark kompressiblen Strömungen deutlich besser konvergiert und deswegen auch zuverlässigere Ergebnisse liefert. Ein Grund hierfür ist sicher, dass Totaldruck und -temperatur beim Stromlinien-Verfahren (zumindest bei isentropen Strömungen) entlang der Stromlinien konstant sind. Somit hat die Strömung zwei Freiheitsgrade weniger im Vergleich zum Finite-Volumen Ansatz, obwohl dieselbe Physik modelliert wird.

Unter anderem deswegen liegt die Rechenzeit bei vergleichbarer Güte der Ergebnisse bei nur 0,11 % der von STAR-CCM+ benötigten CPU-Zeit.

7.3 Externe Strömung

7.3.1 Kompressible Profilströmung - NACA 0012

Die Validierung des Stromlinien-Verfahrens für Außenströmungen erfolgt an einem symmetrischen NACA-Tragflügelprofil mit 12 % relativer Dicke.

Geometrie

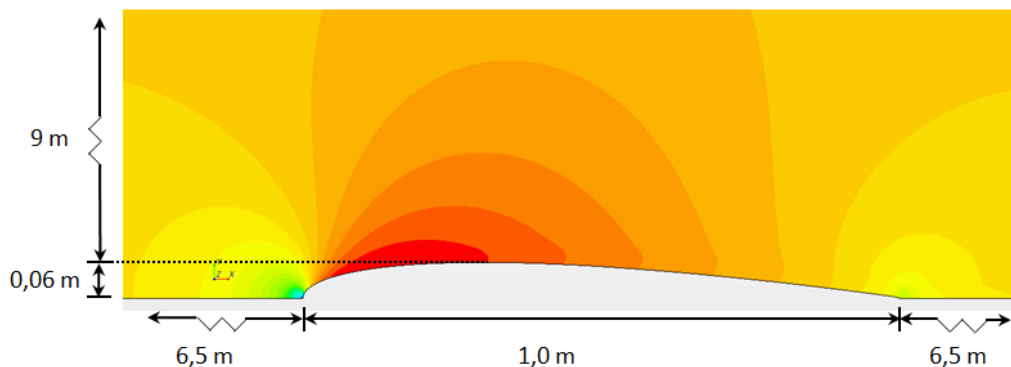


Abbildung 7.32: Kompressible Profilumströmung, Geometrie.

Aufgrund der Symmetrie des Profils wird, wie in Bild 7.32 gezeigt, nur die obere Hälfte der Gesamtgeometrie vernetzt und gerechnet. Die Netzausdehnung mit jeweils 6,5 m vor und hinter dem Profil in Strömungsrichtung und 9 m quer zur Strömungsrichtung ist nicht so groß, dass an den Rändern des Rechengebiets kein Einfluss der Profilgeometrie mehr erkennbar ist. Zum Einen ist er aber in dieser Entfernung bereits relativ klein und andererseits werden genau dieselben Randbedingungen verwendet, so dass deren Effekt auf die Strömung in beiden Fällen identisch ist und die Ergebnisse damit vergleichbar sind.

Randbedingungen

Das Fluid ist thermisch und kalorisch ideale Luft, deren thermodynamische Eigenschaften in Tab. 6.1 zusammengefasst sind. Viskose Effekte werden wieder vernachlässigt.

Am linken Einströmrand sind ein Totaldruck von 106445,53 Pa, eine Totaltemperatur von 305,41 K und eine Einströmrichtung normal zum Einströmrand, vorgegeben.

Am rechten und oberen Rand ist ein statischer Druck von $1 \cdot 10^5$ Pa vorgegeben.

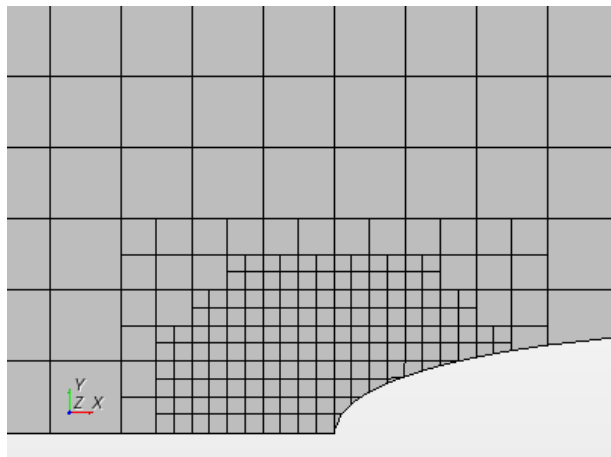
Die Einström-Machzahl beträgt bei diesem statischen Druck etwa 0,3, was einer Geschwindigkeit von etwa $104,18 \frac{m}{s}$ entspricht.

Da es sich um eine reibungsfreie Strömung handelt, sind Totaldruck und -temperatur im gesamten Rechengebiet konstant.

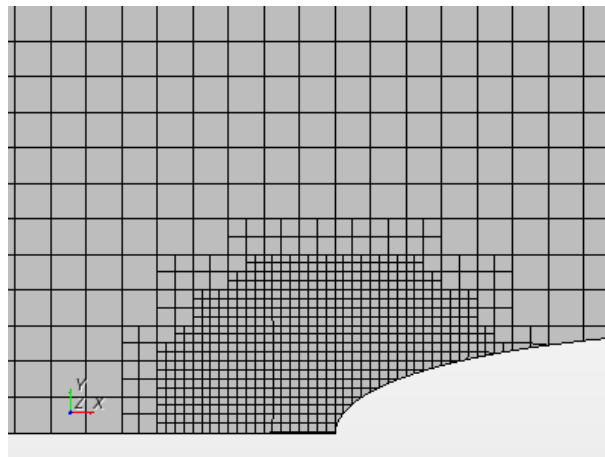
Der untere Rand und die Profiloberfläche sind adiabat und haben eine Gleit-Randbedingung.

Ergebnisse: STAR-CCM+

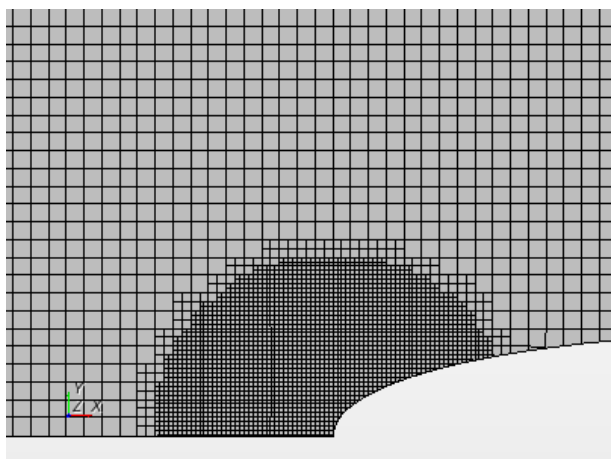
Für die Rechnung mit STAR-CCM+ werden Netze mit hexaedrischen Zellen verwendet, die in bestimmten Bereichen lokal verfeinert sind. Bild 7.33 zeigt beispielhaft den staupunktnahen Bereich der drei zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers verwendeten Netze.



(a) Grobes Netz (6703 Zellen)



(b) Mittleres Netz (15106 Zellen)



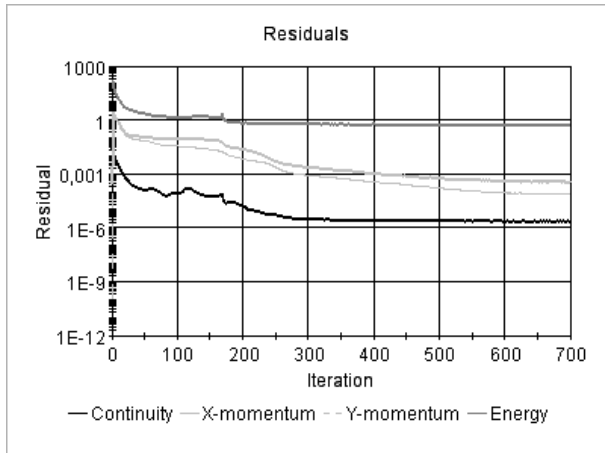
(c) Feines Netz (34029 Zellen)

Abbildung 7.33: Kompressible Profilmströmung, Ausschnitte der STAR-CCM+ Netze mit 6670, 25782 und 101596 Zellen.

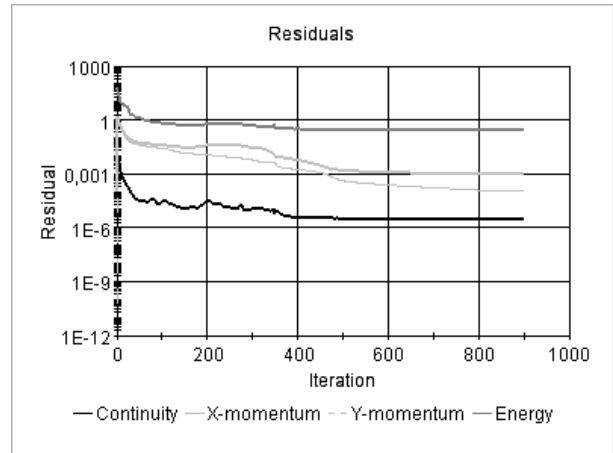
Als Voraussetzung für die folgende Auswertung zeigt Bild 7.34 die unnormierten Residuen der Rechnungen auf drei unterschiedlich feinen Netzen. Alle drei Rechnungen sind soweit auskonvergiert, dass keine nennenswerte weitere Reduktion des Iterationsfehlers erreicht wird.

In diesem Fall wird der Verlauf des statischen Drucks entlang der Wand für die Bestimmung des Diskretisierungsfehlers verwendet. Die bereits aus den vorher beschriebenen Validierungsrechnungen bekannte Vorgehensweise aus Kapitel 2.5.4 ergibt die in Tabelle 7.3.1 zusammengefassten Ergebnisse.

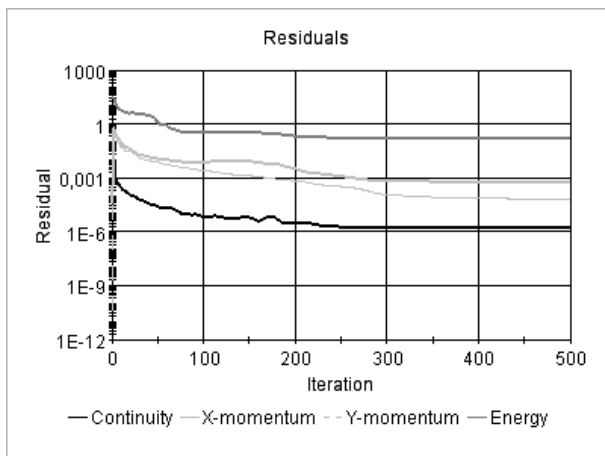
Die mittleren Zellgrößen h erhöhen sich mit jeder Netzvergrößerung systematisch etwa um den Faktor $r \approx 2,0$. Die mittlere Ordnung des Diskretisierungsfehlers auf der Basis der lokalen Änderungen des statischen Drucks auf den unterschiedlichen Netzen p_{av} beträgt wie bereits aus den vorangegangenen Rechnungen erwartet einen Wert nahe zwei, hier 2,16. Der durchschnitt-



(a) Grobes Netz (6670 Zellen)



(b) Mittleres Netz (25782 Zellen)



(c) Feines Netz (101596 Zellen)

Abbildung 7.34: Kompressible Profilumströmung, unnormierte Residuen.

| Bezeichnung | Formelzeichen | Wert (STAR-CCM+) |
|--|-------------------|-------------------------|
| Mittlere Zellgröße, feines Netz | h_1 | $3,524 \cdot 10^{-2}$ m |
| Mittlere Zellgröße, mittleres Netz | h_2 | $6,995 \cdot 10^{-2}$ m |
| Mittlere Zellgröße, grobes Netz | h_3 | $1,375 \cdot 10^{-1}$ m |
| Verhältnis der Zellgrößen, grobes/mittleres Netz | r_{21} | 1,9851 |
| Verhältnis der Zellgrößen, mittleres/feines Netz | r_{32} | 1,9661 |
| Minimale lokale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{min} | 0,0061 |
| Mittlere globale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{av} | 2,1622 |
| Maximale lokale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{max} | 8,6165 |
| Geschätzter relativer Fehler, feines Netz | e_a^{21} | 0,0076 % |
| Geschätzter relativer Fehler, extrapolierte Lösung | e_{ext}^{21} | 0,0022 % |
| Grid Convergence Index, feines Netz | GCI_{fine}^{21} | 0,2781 % |
| Anteil der Zellen mit oszillatorischer Konvergenz | f_o | 14,3058 % |

Tabelle 7.5: Kompressible Profilmströmung, Ergebnisse der Beurteilung des Diskretisierungsfehlers für die Rechnungen mit STAR-CCM+.

liche Druckfehler GCI liegt bei recht niedrigen 0,28 %, was auf eine ordentliche Konvergenz in Richtung netzungabhängiger Lösung hinweist. Zudem weisen auch nur 14,31 % der Zellen oszillatorische Konvergenz auf, was unter anderem auch darauf hinweist, dass die Lösung auf dem feinsten Netz noch nicht zu nahe der netzunabhängigen Lösung liegt.

Das bestätigt auch Bild 7.35, dass die Unterschiede im Druckverlauf zwischen den Lösungen auf den drei Netzen und der extrapolierten Lösung dargestellt.

Nachdem die Darstellung aber insbesondere im Bereich des Staupunktes etwas unübersichtlich ist, wird in Bild 7.36 auf die Differenz der Lösungen auf dem groben und dem mittleren Netz verzichtet.

Der Unterschied zwischen der Lösung auf dem feinsten Netz und der extrapolierten Lösung beträgt immer noch etwa 217,68 Pa. Die Unterschiede beschränken sich überwiegend auf den Bereich um den Staupunkt und die Hinterkante des Profils und sind entlang weiten Teilen der Profiloberfläche sehr klein. Allerdings sind vor Allem die Werte nahe des Staupunktes für den Auftrieb (Saugspitze) und den Druckwiderstand des Profils entscheidend.

Laut Bild 7.37, weist sogar die Rechnung auf dem feinsten Netz mit STAR-CCM+ immer noch einen Fehler im Totaldruck von maximal 365,27 Pa und minimal -497,34 Pa auf. Dieser beschränkt sich auch nicht ausschließlich auf den Staupunktbereich und die Hinterkante. Nachdem z.B. bei $x = 0,1$ m der statische Druck zwischen der Lösung auf dem feinen Netz im Vergleich zur extrapolierten Lösung kaum mehr variiert, der Totaldruck jedoch um etwa 180 Pa vom korrekten Wert abweicht, wirkt sich der Totaldruckfehler also in einer falschen Strömungsgeschwindigkeit aus. Fälschlicherweise ergibt sich durch den Totaldruckfehler jedoch trotz reibungsfreier Rechnung ein Impulsverlust in der Nachlaufströmung.

Die Totaltemperatur in Bild 7.38 weicht wie in den anderen Fällen nur um maximal -0,1 K vom

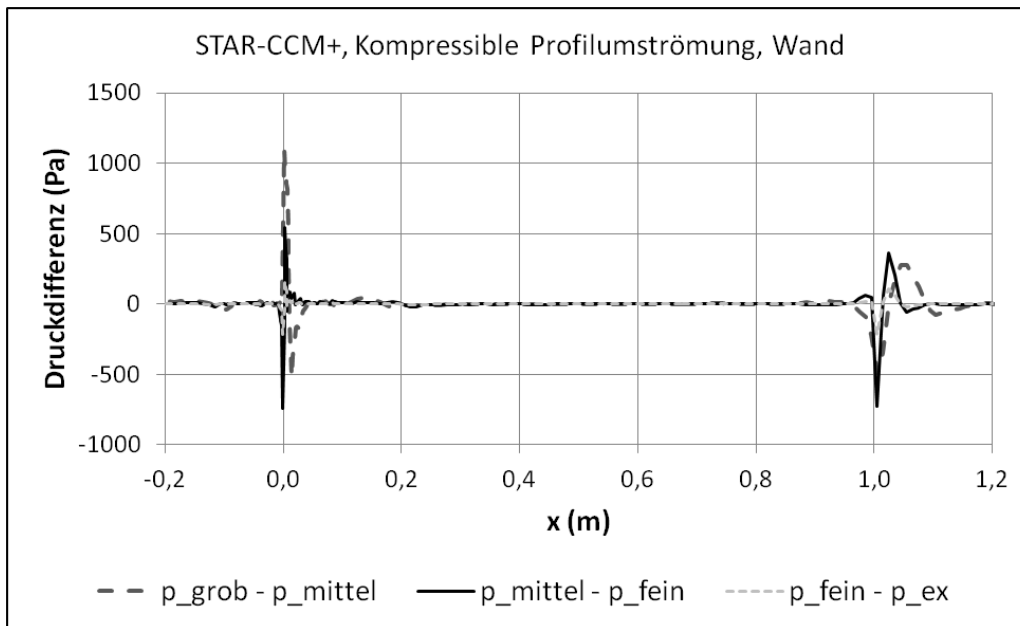


Abbildung 7.35: Kompressible Profilströmung, STAR-CCM+, Druckdifferenzen der Lösungen auf der Wand.

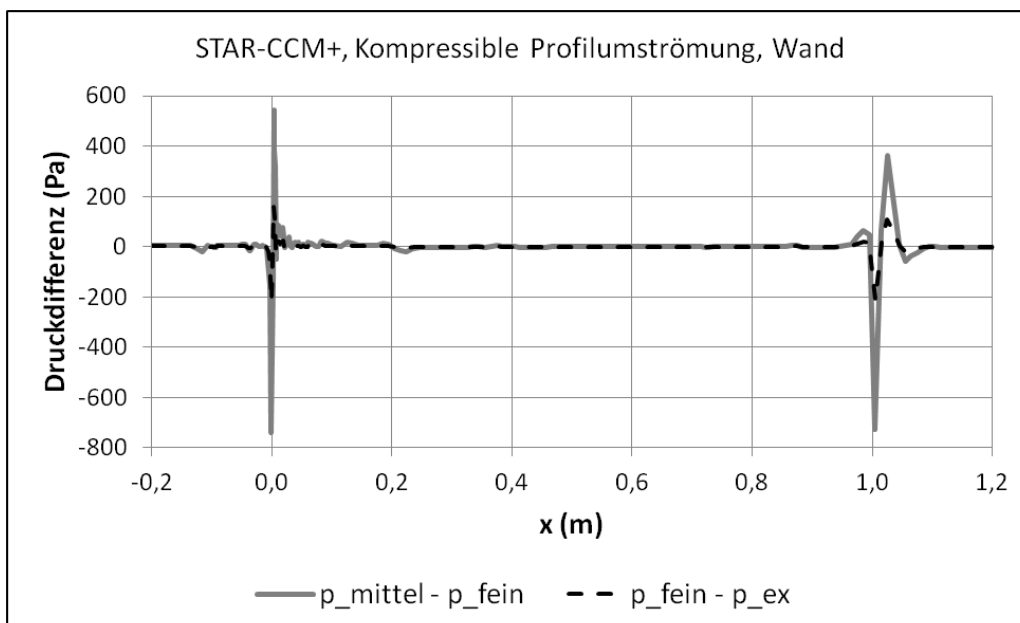


Abbildung 7.36: Kompressible Profilströmung, STAR-CCM+, Druckdifferenzen der Lösungen auf der Wand der zwei genauesten Lösungen.

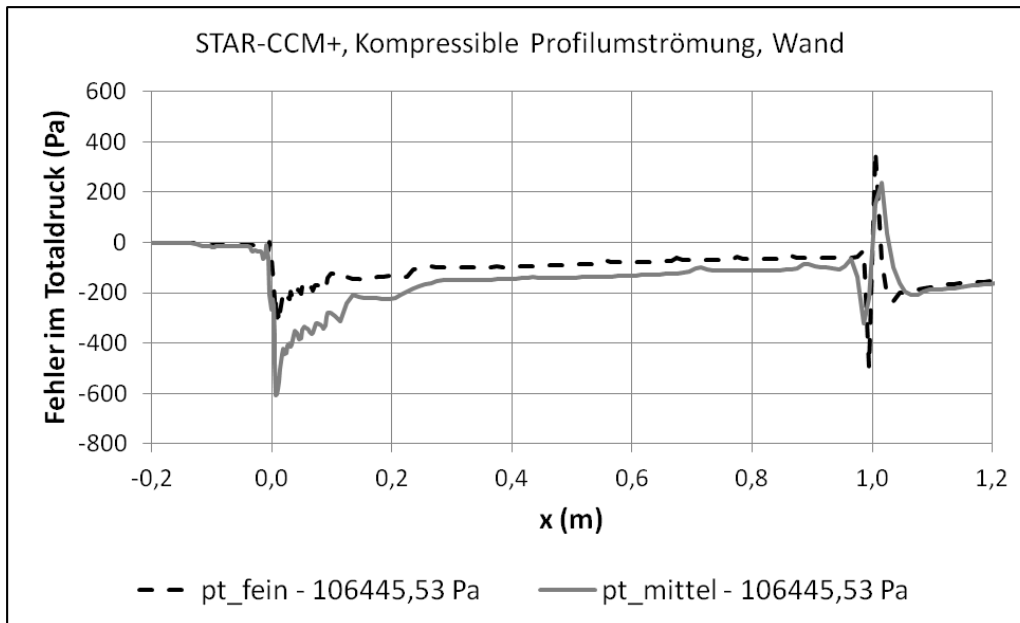


Abbildung 7.37: Kompressible Profilmströmung, STAR-CCM+, Totaldruckfehler auf der Wand.

korrekten Wert ab. Dieser Fehler dürfte einen vernachlässigbaren Einfluss auf das Gesamtergebnis (z.B. in Bezug auf die Machzahl) haben.

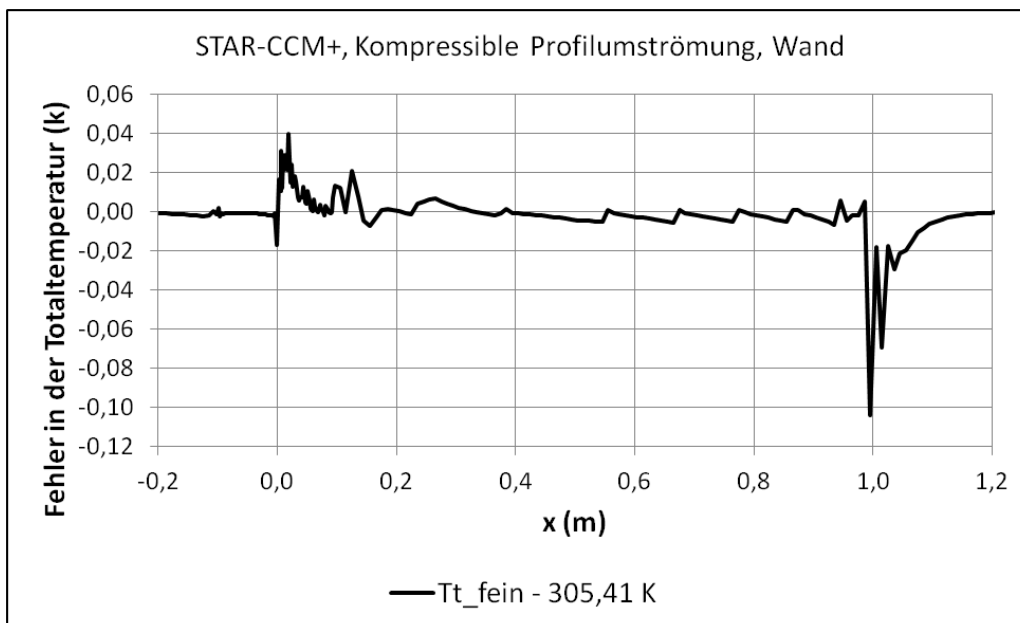


Abbildung 7.38: Kompressible Profilmströmung, STAR-CCM+, Totaltemperaturfehler auf der Wand.

Um auch den wandfernen Bereich des Strömungsfeldes vergleichen zu können, wird der statische Druck auch in einem vertikalen Schnitt 0,2 m hinter dem Staupunkt ausgewertet. Bild 7.39 zeigt die Differenzen der Lösungen auf den drei Netzen beginnend auf der Profilloberfläche, die an dieser Stelle bei etwa $y = 0,057$ m liegt.

Die Unterschiede sind grundsätzlich recht gering. Das die Differenz zwischen den Lösungen

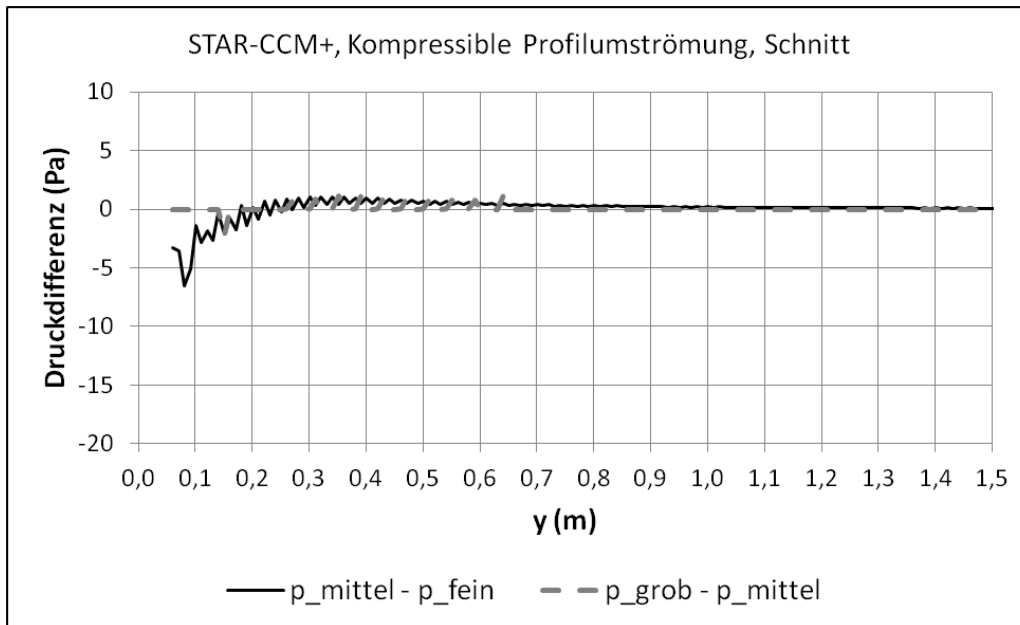


Abbildung 7.39: Kompressible Profilumströmung, STAR-CCM+, Druckdifferenzen der Lösungen im vertikalen Schnitt bei $x = 0,2$ m.

auf dem groben und dem mittleren Netz deutlich kleiner ist, als die zwischen dem mittleren und dem feinen Netz deutet jedoch darauf hin, dass auch auf dem feinen Netz noch keine netzunabhängige Lösung vorliegt.

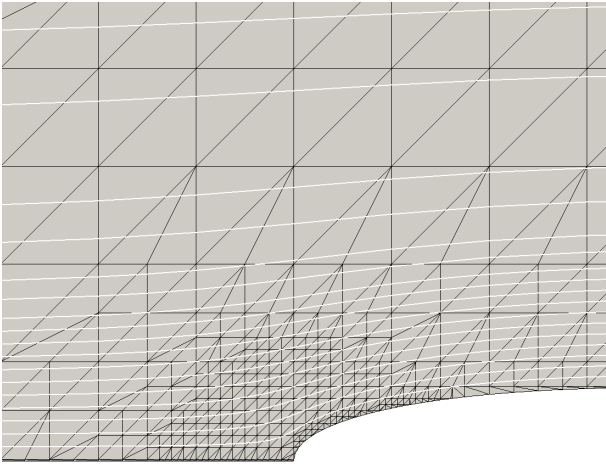
Ergebnisse: Stromlinien-Verfahren

Die drei Netze der Rechnungen mit dem Stromlinien-Verfahren in Bild 7.40 sind ebenfalls lokal verfeinert und haben 43, 64 und 114 Stromlinien.

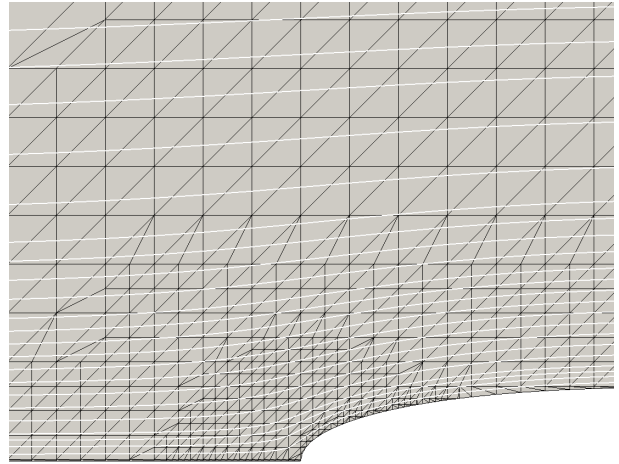
Die Korrekturen in Bild 7.41 weisen mehrere Sprünge auf. Im Fall (a) ist der Grund dafür nur die Aktualisierung der relativen Lage der Punkte auf den Nachbarstromlinien bzw. der Wand, wie in Kapitel 4 beschrieben. Der Sprung im Fall (b) bei 500 Iterationen und im Fall (c) bei 500 und 800 Iterationen sind dadurch begründet, dass ein automatisiertes, geometrisches Mehrgitterverfahren verwendet wird. Zuerst wird eine Lösung auf dem größten Netz mit 43 Stromlinien berechnet, dann wird das Netz verfeinert und automatisch zusätzliche Stromlinien eingefügt, so dass der Stromlinienabstand in etwa gleich der Größe der jeweils kleinsten, von der Stromlinie durchquerten Zelle ist. Im Fall (b) wird dieser Schritt nur einmal durchgeführt, in (c) noch ein weiteres Mal bei 800 Iterationen. Alle Rechnungen sind solange fortgesetzt, dass keine weitere signifikante Reduktionen der Korrekturen erkennbar ist.

Analog zur Auswertung der STAR-CCM+ Ergebnisse, wird auch mit dem Stromlinien-Verfahren die netzunabhängige Lösung extrapoliert. Daraus ergeben sich die in Tabelle 7.3.1 zusammengefassten Ergebnisse.

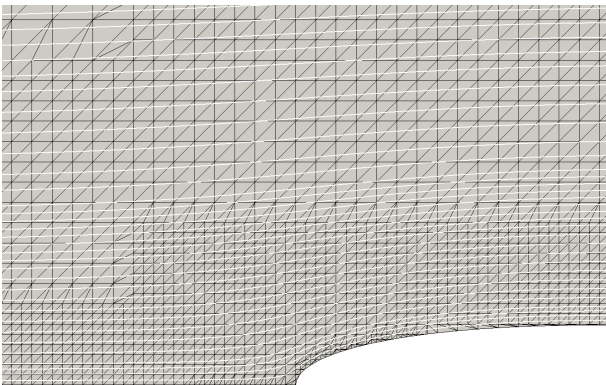
Dadurch, dass sich durch das Mehrgitter-Verfahren die Stromlinien-Anzahl nicht systematisch erhöht, ändert sich die Referenzgröße h bei jeder Netzverfeinerung um einen unterschiedlichen Betrag, $r_{32} = 1,64$ und $r_{21} = 1,74$. Die mittlere Ordnung des Diskretisierungsfehlers, auf der Basis der lokalen Änderungen des statischen Drucks auf den unterschiedlichen Netzen p_{av} , hat hier den recht hohen Wert von 2,98. Das deutet darauf hin, dass in diesem Fall der Fehler



(a) Grobes Netz (43 Stromlinien)

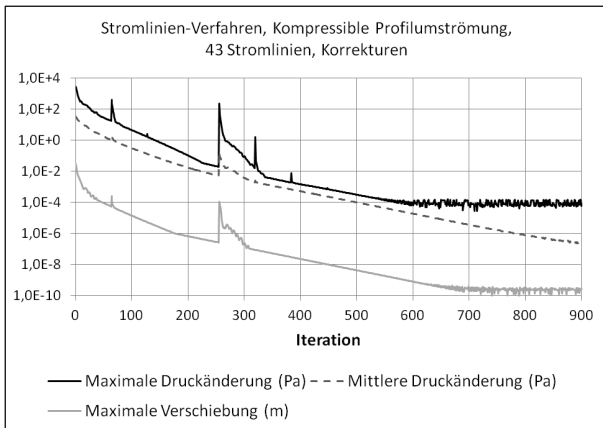


(b) Mittleres Netz (64 Stromlinien)

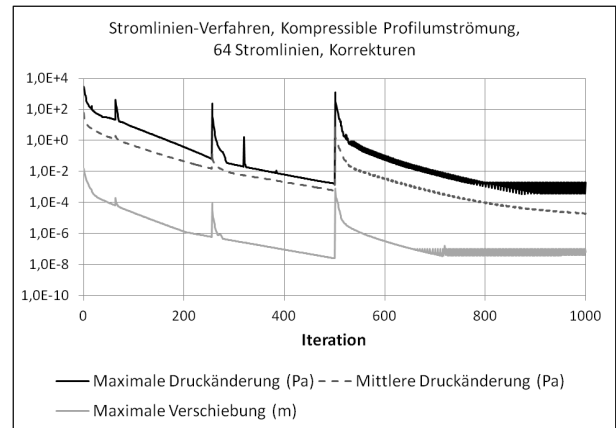


(c) Feines Netz (114 Stromlinien)

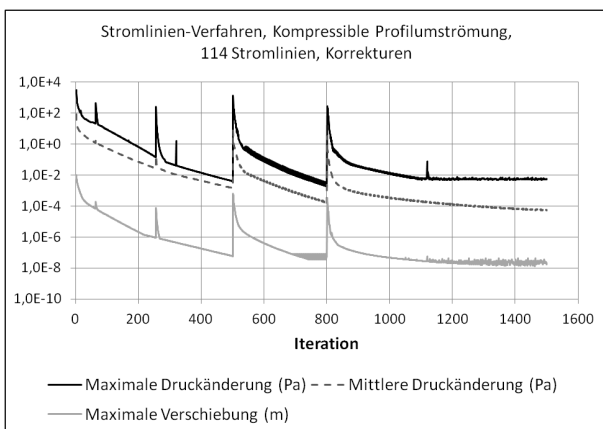
Abbildung 7.40: Kompressible Profilumströmung, Ausschnitte der Netze des Stromlinien-Verfahrens mit 43, 64 und 114 Stromlinien.



(a) Grobes Netz (43 Stromlinien)



(b) Mittleres Netz (64 Stromlinien)



(c) Feines Netz (114 Stromlinien)

Abbildung 7.41: Kompressible Profilströmung, Stromlinien-Verfahren, Korrekturen.

| Bezeichnung | Formelzeichen | Wert (Stroml.-Verf.) |
|--|-------------------|--------------------------|
| Referenzgröße, feines Netz | h_1 | $6,8345 \cdot 10^{-2}$ m |
| Referenzgröße, mittleres Netz | h_2 | $1,1870 \cdot 10^{-1}$ m |
| Referenzgröße, grobes Netz | h_3 | $1,9470 \cdot 10^{-1}$ m |
| Verhältnis der Zellgrößen, grobes/mittleres Netz | r_{21} | 1,7368 |
| Verhältnis der Zellgrößen, mittleres/feines Netz | r_{32} | 1,6403 |
| Minimale lokale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{min} | 0,0022 |
| Mittlere globale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{av} | 2,9812 |
| Maximale lokale Ordnung des Diskretisierungsfehlers | p_{max} | 13,3826 |
| Geschätzter relativer Fehler, feines Netz | e_a^{21} | 0,0012 % |
| Geschätzter relativer Fehler, extrapolierte Lösung | e_{ext}^{21} | 0,0003 % |
| Grid Convergence Index, feines Netz | GCI_{fine}^{21} | 0,0373 % |
| Anteil der Zellen mit oszillatorischer Konvergenz | f_o | 25,53 % |

Tabelle 7.6: Kompressible Profilmströmung, Ergebnisse der Beurteilung des Diskretisierungsfehlers für die Rechnungen mit dem Stromlinien-Verfahren.

durch die Druckapproximation erster Ordnung quer zur Strömungsrichtung kaum eine Rolle spielt, sondern die Approximation dritter Ordnung der Stromlinienform dominiert. Der durchschnittliche Druckfehler GCI liegt mit 0,037 % etwa eine Größenordnung unter dem Wert von STAR-CCM+. Die hohe Anzahl von Zellen mit oszillatorischer Konvergenz von 25,53 % deutet (auch im Vorgriff auf die weitere Auswertung) darauf hin, dass die Lösung mit 114 Stromlinien bereits recht nahe der netzunabhängigen Lösung liegt.

Die Bilder 7.42 und 7.43 zeigen die Druckdifferenzen der Lösungen mit unterschiedlichen Stromlinien-Anzahlen (in gleicher Skalierung, wie die entsprechenden Diagramme 7.35 und 7.36 der Auswertung der STAR-CCM+ Rechnung).

Deutlich zu erkennen sind die wesentlich kleineren Unterschiede in den Druckverläufen an der Wand zwischen den verschiedenen Rechnungen. Insbesondere im Bereich des Staupunktes ist bereits die Lösung mit 64 Stromlinien kaum mehr zu unterscheiden von der extrapolierten Lösung.

In dem vertikalen Schnitt bei $x = 0,2$ m weichen die Lösungen mit 43 und 64 Stromlinien noch deutlich voneinander ab, die beiden Rechnungen mit 64 und 114 Stromlinien zeigen jedoch laut Bild 7.44 nur noch eine maximale Abweichung von 4,05 Pa auf.

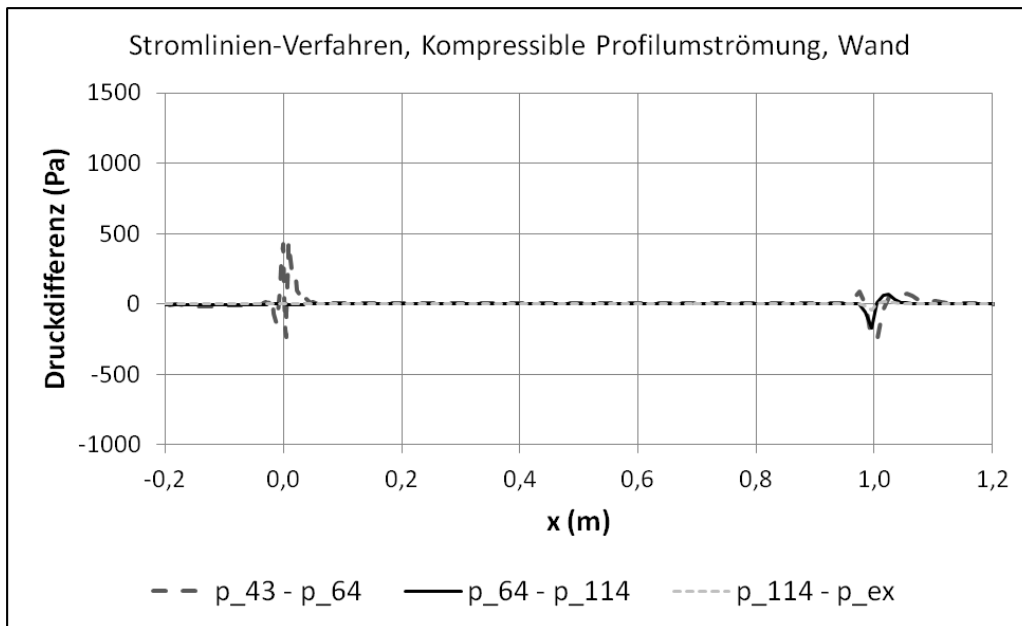


Abbildung 7.42: Kompressible Profilströmung, Stromlinien-Verfahren, Druckdifferenzen auf der Wand.

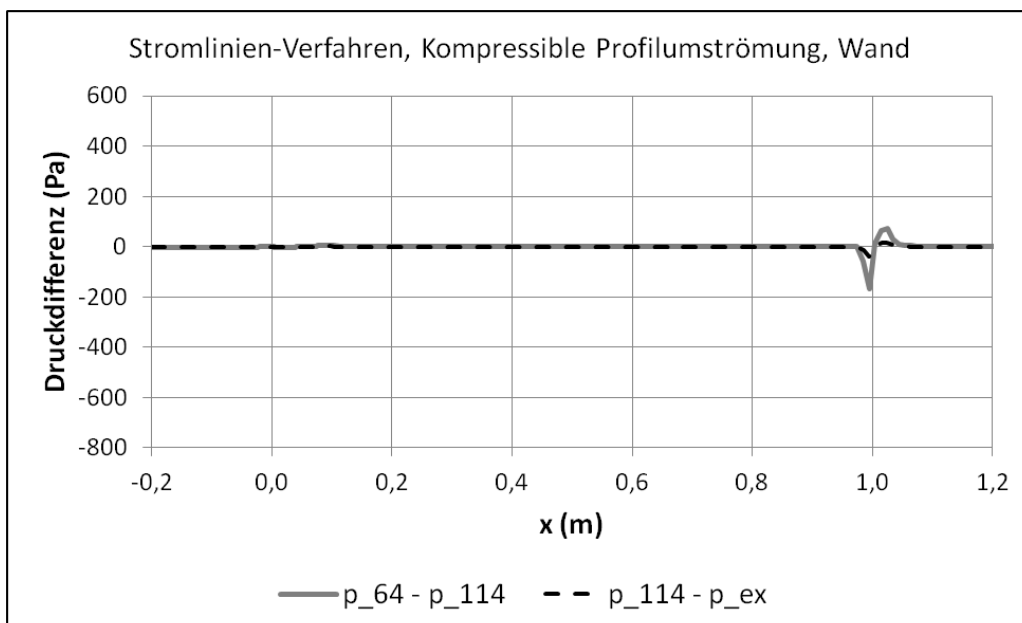


Abbildung 7.43: Kompressible Profilströmung, Stromlinien-Verfahren, Druckdifferenzen auf der Wand der beiden genauesten Lösungen.

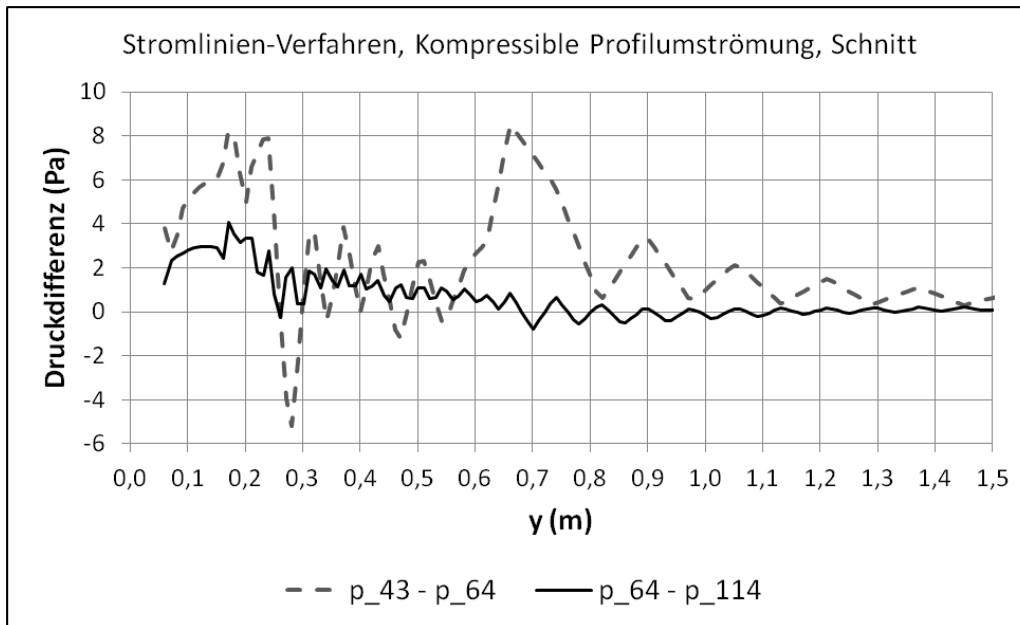


Abbildung 7.44: Kompressible Profilmströmung, Stromlinien-Verfahren, Druckdifferenzen der Lösungen im vertikalen Schnitt bei $x = 0,2$ m.

Vergleich der Ergebnisse

Der Druckverlauf entlang der Wand, gezeigt in Bild 7.45 wird von beiden Verfahren mit hoher Übereinstimmung wieder gegeben.

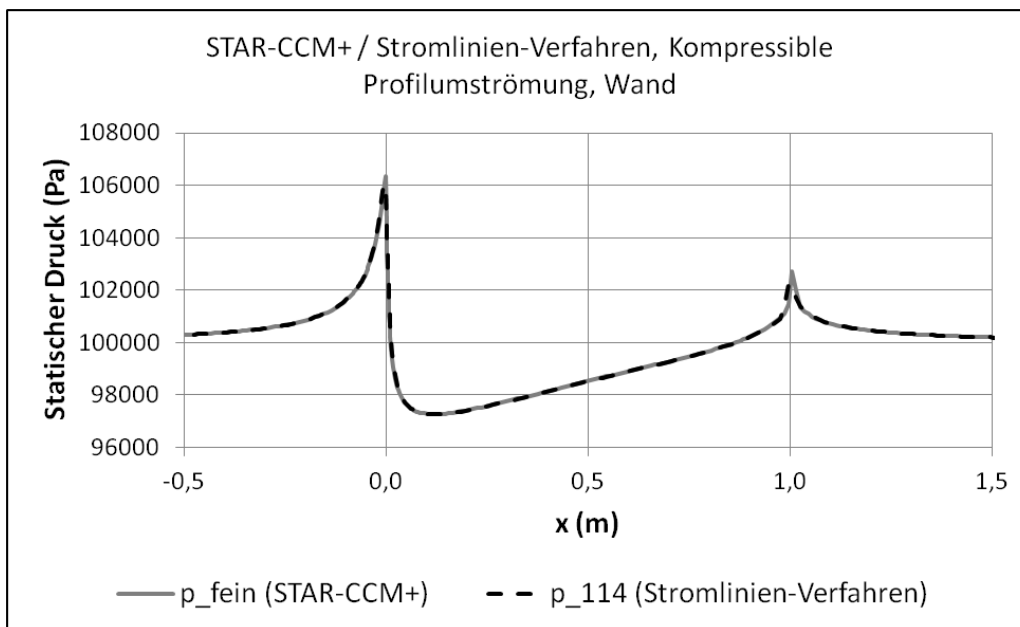


Abbildung 7.45: Kompressible Profilmströmung, STAR-CCM+ / Stromlinien-Verfahren, Vergleich des Druckverlaufs der jeweils genauesten Lösung entlang der Wand.

Nennenswerte Unterschiede gibt es nur im Bereich des Staupunktes und der Hinterkante des Profils. Um das genauer zu beurteilen, ist in Bild 7.46 der absolute Unterschied der Lösungen mit bester räumlicher Diskretisierung beider Verfahren im Vergleich zur jeweiligen netz-

unabhängigen Lösung dargestellt. Im Bereich des Staupunktes weist die Rechnung mit 114 Stromlinien im Vergleich zur Lösung auf dem feinsten Netz mit STAR-CCM+ eine deutlich kleinere Abweichung zum extrapolierten Ergebnis auf. Allerdings sind diese Unterschiede bei beiden Verfahren lokal sehr begrenzt. Entlang der übrigen Profilloberfläche sind die Ergebnisse praktisch identisch.

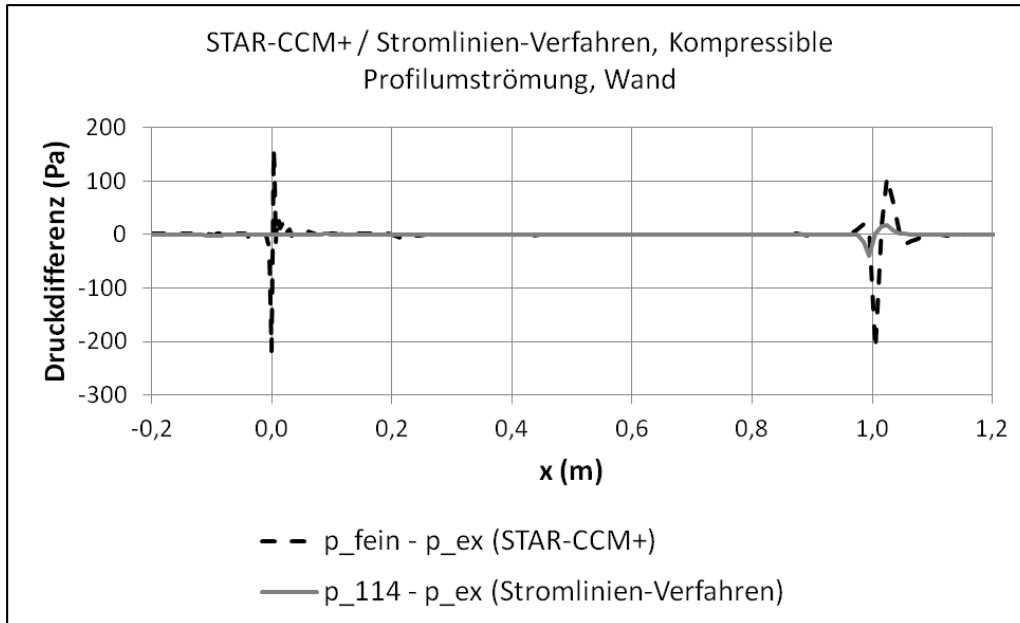


Abbildung 7.46: Kompressible Profilumströmung, STAR-CCM+ / Stromlinien-Verfahren, Vergleich der Druckdifferenzen der jeweils genauesten mit der extrapolierten Lösung entlang der Wand.

Auch die maximale prozentuale Differenz der netzunabhängigen Ergebnisse ist mit 0,84 % akzeptabel, zumal auch die mittlere Abweichung deutlich unter diesem Wert liegt.

Im wandfernen Bereich ist die Übereinstimmung der Ergebnisse laut Bild 7.48 ebenfalls sehr gut. Prozentual ist der Unterschied der jeweils am feinsten diskretisierten Rechnungen, dargestellt in Bild 7.49 sogar nur bei maximal 0,0048 %.

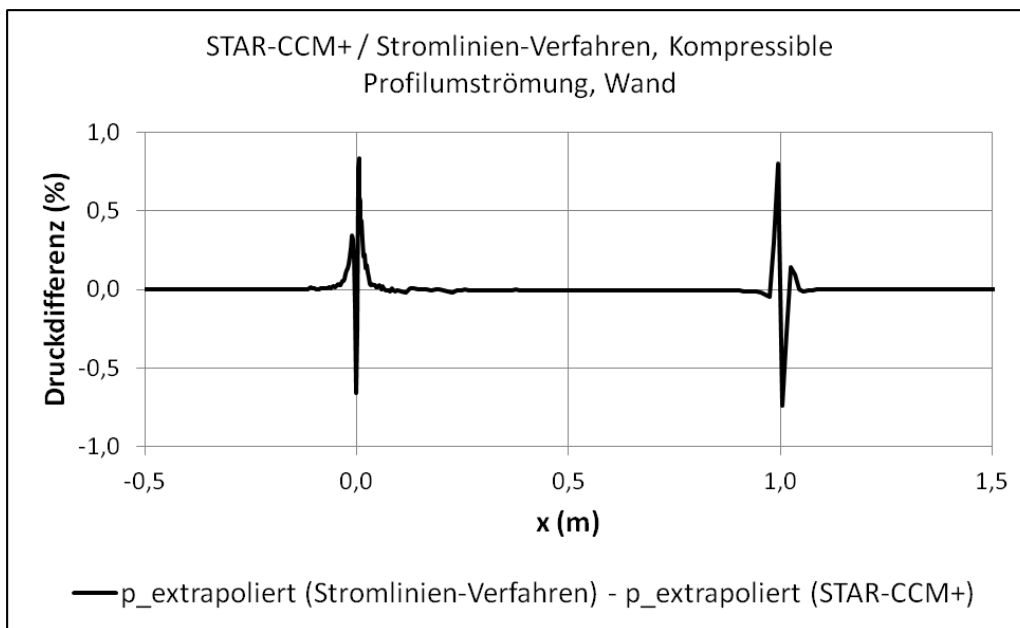


Abbildung 7.47: Kompressible Profilumströmung, STAR-CCM+ / Stromlinien-Verfahren, Vergleich der Druckdifferenzen der extrapolierten Lösungen entlang der Wand.

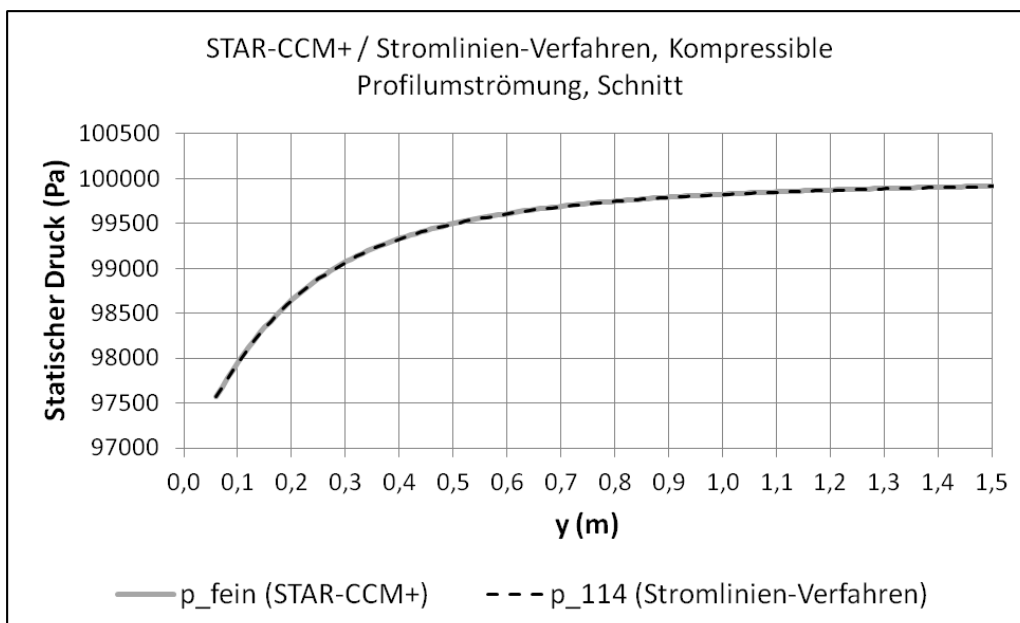


Abbildung 7.48: Kompressible Profilumströmung, STAR-CCM+ / Stromlinien-Verfahren, Vergleich des Druckverlaufs im vertikalen Schnitt bei x = 0,2 m.

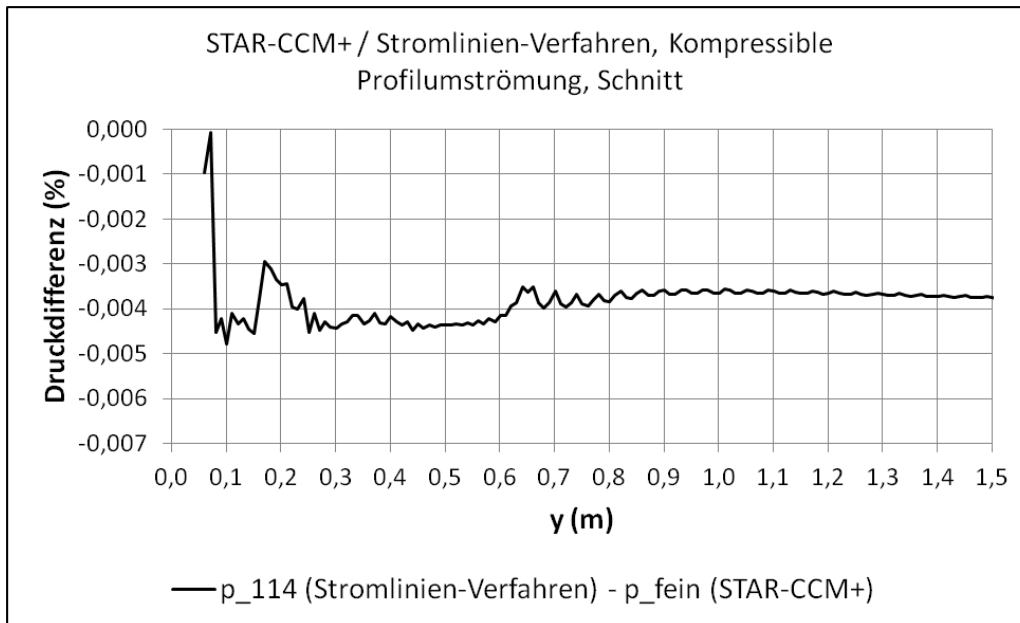


Abbildung 7.49: Kompressible Profilströmung, STAR-CCM+ / Stromlinien-Verfahren, Vergleich der prozentualen Druckdifferenzen der beiden genauesten Lösungen im vertikalen Schnitt bei $x = 0,2$ m.

Vergleich der Rechenzeiten

Für den Rechenzeitvergleich wird von beiden Verfahren wieder eine Rechnung ausgesucht, die einen vergleichbaren Fehler zur netzunabhängigen Lösung hat. Bild 7.50 zeigt, dass dies für die Rechnung auf dem feinen Netz mit STAR-CCM+ und dem Fall mit 64 Stromlinien gegeben ist.

Auf einem Prozessorkern desselben Computers dauert die Rechnung mit STAR-CCM+ 182,54 s und die Rechnung mit dem Stromlinien-Verfahren 95,51 s, also 52,32 % der CPU-Zeit von STAR-CCM+. Der Unterschied in der Rechenzeit ist in diesem Fall nicht so groß, wie bei den anderen Validierungsfällen. Das liegt daran, dass einer der Hauptvorteile des Stromlinien-Verfahrens hier nicht zum tragen kommt: die Anpassung des Totaldrucks im Rechenggebiet. Dieser ist hier theoretisch überall konstant.

Zusammenfassung

Die Übereinstimmung der Ergebnisse des Stromlinien-Verfahrens ist auch bei diesem Beispiel wieder sehr gut. Im Staupunktbereich ist die Qualität der Ergebnisse des Stromlinien-Verfahrens bereits bei schlechter räumlicher Diskretisierung besser, als mit STAR-CCM+. Die Rechenzeit beträgt 52,32 % der von STAR-CCM+ benötigten Zeit.

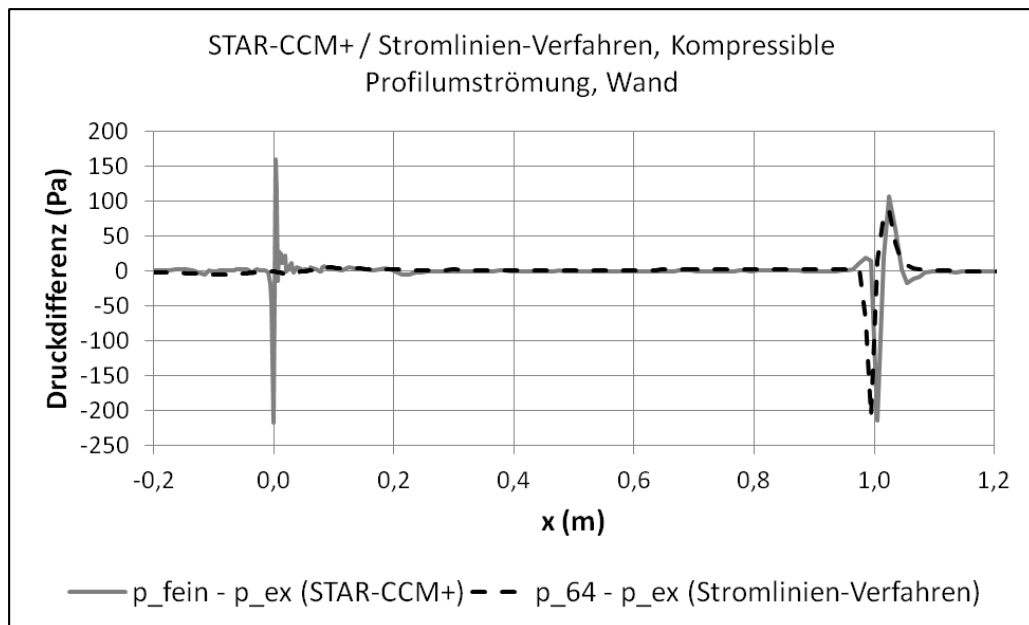


Abbildung 7.50: Kompressible Profilumströmung, STAR-CCM+ / Stromlinien-Verfahren, Vergleich der Druckdifferenzen entlang der Wand zweier Rechnungen mit ähnlich großer Differenz zur jeweiligen extrapolierten Lösung für den Rechenzeitvergleich.

7.4 Reibungsbehaftete Strömung

7.4.1 Ebene Poiseuille-Stömung

In diesem Fall wird das iterativ berechnete Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Strömung in einem unendlich langen Kanal mit dem analytischen Ergebnis verglichen.

Geometrie

Der Vergleich des normierten Geschwindigkeitsprofils einer voll ausgebildeten laminaren Kanalströmung ist unabhängig von der Kanalhöhe, dem Wert der Viskosität oder anderen Fluideigenschaften, da es sich um eine Ähnlichkeitslösung handelt. Einzig entscheidend ist, dass der Kanal parallele Wände hat. Für einen unendlich langen Kanal stellt sich für jede Kanalhöhe dasselbe normierte Geschwindigkeitsprofil ein. In diesem Fall, dargestellt in Bild 7.51 ist der Kanal 0,02 m hoch. Obwohl das Geschwindigkeitsprofil flächensymmetrisch zum Mittelschnitt des Kanals ist, wird trotzdem der gesamte Kanal simuliert, weil in der aktuellen Version des Stromlinien-Verfahrens keine Symmetrierandbedingung implementiert ist (nur eine Wand mit Gleit-Randbedingung; der Unterschied zwischen beiden ist, dass eine Symmetrierandbedingung zusätzlich null-Gradienten aller Größen normal zum Rand verlangt). Die Länge des Kanals ist nicht entscheidend, da eine periodische Randbedingung verwendet wird. Drei Zellen in Strömungsrichtung sind daher eine mehr oder weniger willkürliche Wahl.

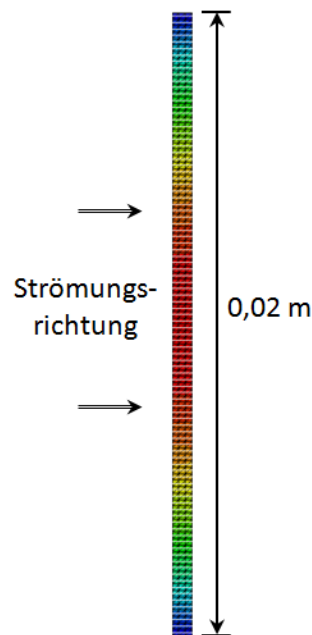


Abbildung 7.51: Vollentwickelte Kanalströmung, Geometrie

Randbedingungen

Die oben und unten gelegenen Kanalwände haben jeweils eine Haftbedingung. Der linke Einströmrand ist über eine periodische Randbedingung mit dem rechten Ausströmrand verbunden. Auf das Totaldruckprofil am Ausströmrand wird ein konstanter Skalierungsfaktor angewendet,

der das Geschwindigkeitsprofil auf den vom Benutzer vorgegebenen Mittelwert skaliert. In diesem Fall wird eine Erwärmung durch viskose Effekte vernachlässigt. Das bedeutet, dass sich zwar ein Temperaturprofil einstellt, die Totaltemperatur jedoch konstant ist.

Auswertung

In Bild 7.52 vergleicht das analytische Geschwindigkeitsprofil mit dem Ergebnis des Stromlinien-Verfahrens.

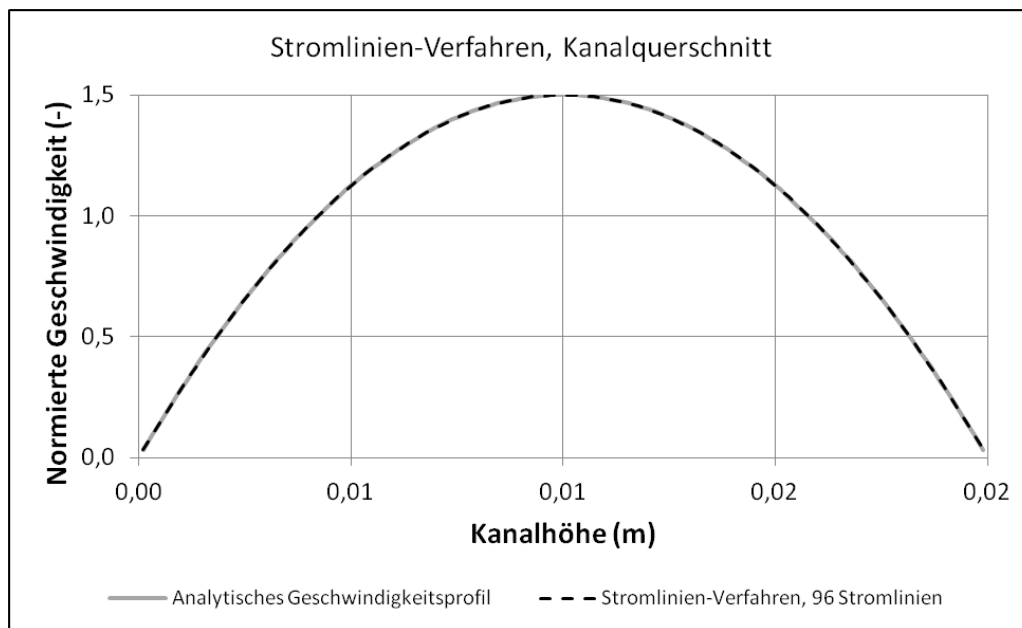


Abbildung 7.52: Vollentwickelte Kanalströmung, Profil der normierten Geschwindigkeit

In dieser Skalierung ist grafisch kein Unterschied zu erkennen. Um die Abweichungen genauer untersuchen zu können, ist in Bild 7.53 die prozentuale Abweichung der Geschwindigkeit bezogen auf den normierten theoretischen Maximalwert von 1,5 für 24, 48 und 96 Stromlinien aufgetragen.

Eine erste wichtige Erkenntnis aus diesem Bild ist, dass die Profile symmetrisch sind, da die Differenz zum symmetrischen analytischen Profil ebenfalls symmetrisch sind. Das ist insofern von Bedeutung, als das der gesamte Kanal und nicht nur eine Hälfte mit einer Symmetrie-Randbeingung gerechnet ist.

Zum Anderen ist deutlich zu erkennen, dass der Fehler mit jeder Netzverfeinerung systematisch abnimmt. Eine perfekte Übereinstimmung mit einem nicht-trivialen analytischen Ergebnis ist mit einem numerischen Verfahren nur mit unendlich feiner Diskretisierung (und nur wenn alle Modell- und Iterationsfehler gleich null sind) zu erreichen. Eine kleine Abweichung ist also mit endlicher Diskretisierungsgenauigkeit unvermeidbar. Bei 96 Stromlinien beträgt die Abweichung der normierten Geschwindigkeit von der analytischen Lösung maximal -0,021 % der normierten Maximalgeschwindigkeit von 1,5.

Der Fehler bei der numerischen Simulation entsteht in diesem Fall hauptsächlich dadurch, dass der Gradient der Geschwindigkeit in der Mitte zwischen zwei Stromlinien-Stützpunkten erster Ordnung, also durch eine Gerade, approximiert wird. Tatsächlich ist der Verlauf aber parabolisch. Die exakte Steigung dieser Parabel in der Mitte zwischen zwei Stützpunkten ist jedoch

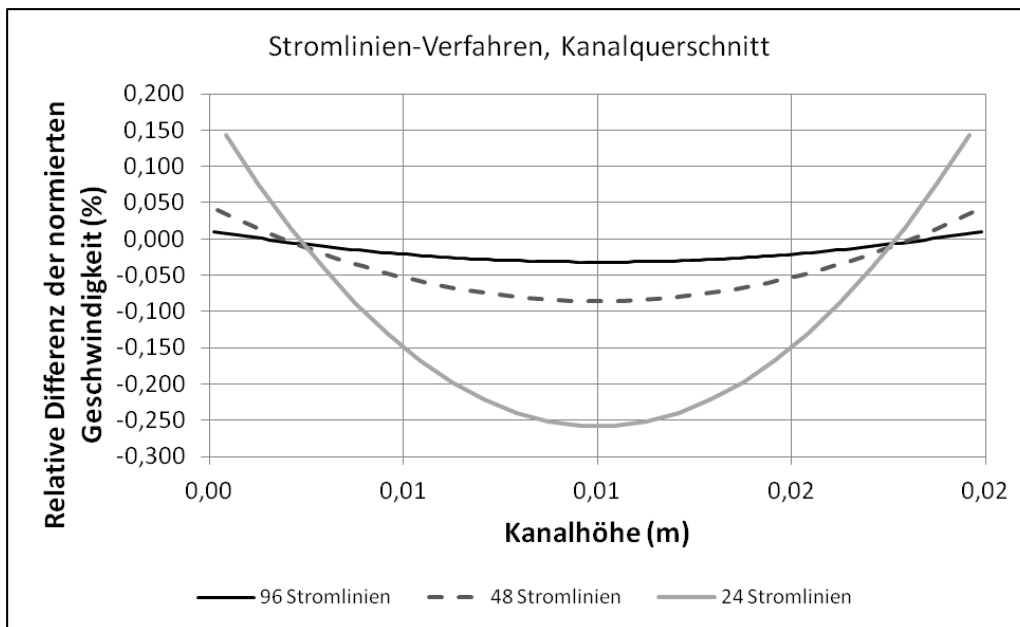


Abbildung 7.53: Vollentwickelte laminare Kanalströmung, Prozentuale Differenz der normierten Geschwindigkeit der Rechnungen mit dem Stromlinien-Verfahren mit 24, 48 und 96 Stromlinien und der normierten Geschwindigkeit des analytischen Profils.

nicht unbedingt gleich der Steigung der Sekante. Dadurch entsteht ein Fehler in der Berechnung des Geschwindigkeitsgradienten, der linear in die Berechnung der viskosen Kräfte eingeht. Eine Approximation zweiter Ordnung des Geschwindigkeitsverlaufs zwischen zwei Stromlinien-Stützpunkten hat sich in Tests jedoch häufig als zu instabil erwiesen.

Insgesamt zeigt dieser Fall, dass die Wirkung viskoser Kräfte auf das Geschwindigkeitsprofil korrekt modelliert werden, zu symmetrischen Ergebnissen führt und der Fehler bei systematischer Netzverfeinerung ebenfalls systematisch kleiner wird.

7.4.2 Blasius-Grenzschicht

Zwar ist der Ansatz für die Modellierung viskoser Effekte bereits an der vollausgebildeten laminaren Kanalgrenzschicht in Kapitel 7.4.1 verifiziert, allerdings ist in diesem Fall aufgrund der periodischen Randbedingung keine Anpassung der Stromlinienform erforderlich. Mit diesem Beispiel soll nun gezeigt werden, dass die Stromlinienform unter Berücksichtigung viskoser Effekte korrekt angepasst wird.

Als Testfall wird die Grenzschicht einer ebenen, parallel angeströmten Platte verwendet, für die wie in Kapitel 2.4 beschrieben, eine analytische Lösung vorliegt.

Geometrie

Bild 7.54 zeigt die hierfür verwendete Geometrie des Rechengebiets. Die Ausmaße des Rechengebiets sind erforderlich, damit die Randbedingungen keine unphysikalischen Störungen der Strömung verursachen.

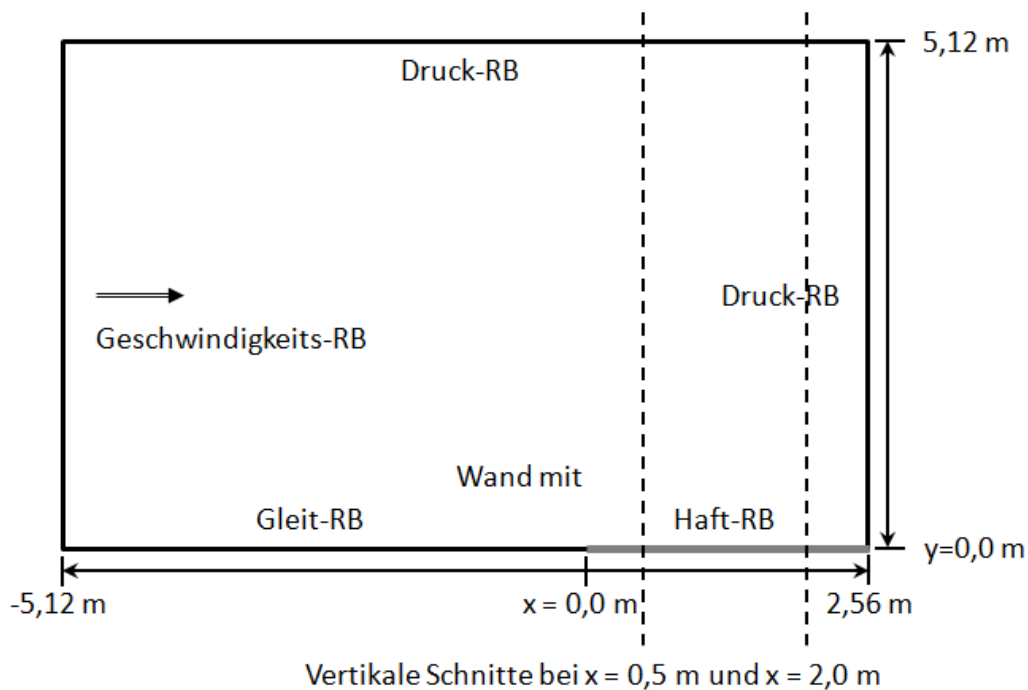


Abbildung 7.54: Blasius-Grenzschicht, Geometrie.

Die Stromlinien-Form und die Geschwindigkeits-Konturen der Rechnung mit 82 Stromlinien sind in Bild 7.55 qualitativ dargestellt.

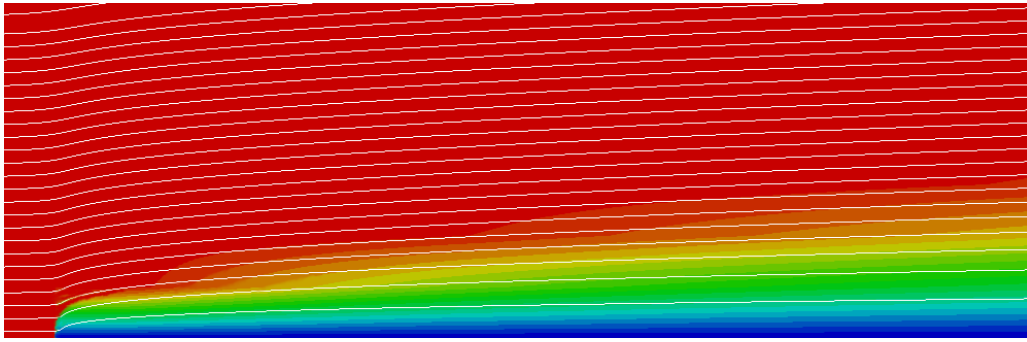


Abbildung 7.55: Blasius-Grenzschicht, Stromlinien (Darstellung ist in Strömungsrichtung gestaucht).

Randbedingungen

Das Fluid ist thermisch und kalorisch ideale Luft, deren thermodynamische Eigenschaften in Tab. 6.1 zu finden sind. Allerdings wird in diesem Fall eine, im Gegensatz zu Luft bei 300 K etwas erhöhte dynamische Viskosität von $\mu = 5,0 \cdot 10^{-5}$ Pa s verwendet, um die Grenzschichtdicke etwas zu erhöhen.

Am linken Einströmrand ist die Temperatur mit 300 K vorgegeben, sowie die Machzahl von $2,88 \cdot 10^{-3}$, die einer Einströmgeschwindigkeit von $1 \frac{m}{s}$ entspricht. Der Einströmwinkel beträgt 0° , das Fluid strömt also normal zum Rand ein.

Am rechten und oberen Rand ist ein statischer Druck von $1 \cdot 10^5$ Pa vorgegeben.

Der untere Rand ist adiabat und hat im Bereich von $-5,12 \text{ m} \leq x \leq 0 \text{ m}$ eine Gleit-Randbedingung und von $0 \text{ m} \leq x \leq 2,56 \text{ m}$ eine Haft-Randbedingung.

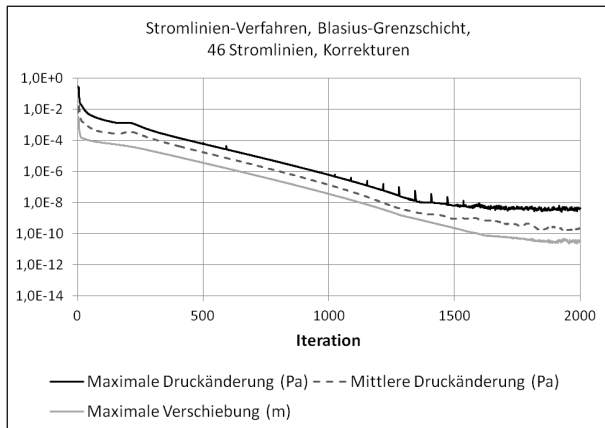
Die Reynolds-Zahl von 148 646 bezogen auf die Gesamtlänge der Platte von 2,56 m und der Anström-Geschwindigkeit von $1 \frac{m}{s}$ für eine Viskosität von $5 \cdot 10^{-5}$ Pa s und eine Dichte von etwa $1,16 \frac{kg}{m^3}$ liegt deutlich unterhalb der Grenze des turbulenten Bereichs von rund 350 000.

Ergebnisse: Stromlinien-Verfahren

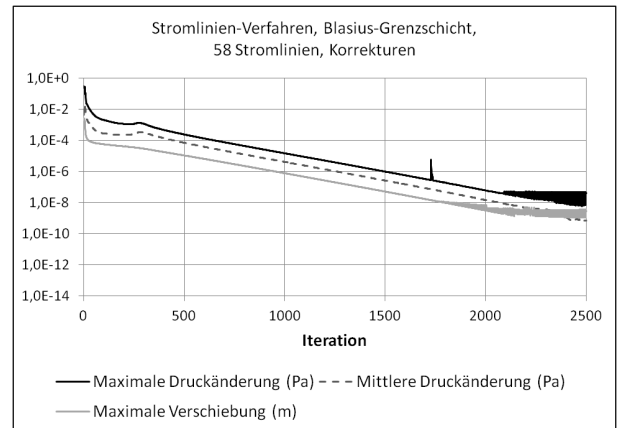
Auch in diesem Fall sind Rechnungen mit drei verschiedenen räumlichen Diskretisierungen durchgeführt. Bild 7.56 zeigt, dass alle Rechnungen vollständig auskonvergiert sind.

In diesem Fall wird das Geschwindigkeitsfeld in zwei senkrecht zur Strömung bei $x \approx 0,5$ m (tatsächlich liegt der Schnitt bei $x = 0,49\bar{3}$ m, da an diesem Ort bei allen drei Netzen eine vertikale Netzlinie verläuft, so dass die ausgewerteten Größen nicht interpoliert werden müssen) und $x = 2,0$ m (auch bei dieser x-Koordinate verläuft bei allen Netzen eine vertikale Netzlinie) gelegenen Schnitten ausgewertet, wie in Bild 7.54 durch die gestrichelten vertikalen Linien angedeutet ist.

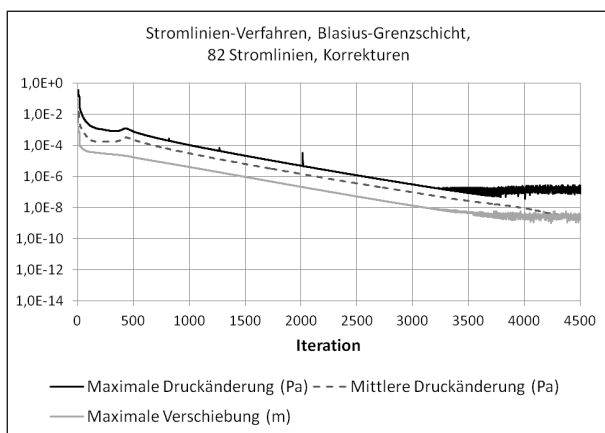
Im Gegensatz zu den anderen Validierungs-Fällen ist hier die Extrapolation einer netzunabhängigen Lösung nicht möglich, bzw. nicht sinnvoll. Der Grund dafür sind die beinahe übereinanderliegenden Geschwindigkeitsprofile in beiden Schnitten für die drei unterschiedlich feinen Diskretisierungen (siehe Bilder 7.57 und 7.60). Die Extrapolation erhöht in diesem Fall nur die Oszillationen ohne tatsächlich die durch die räumliche Diskretisierung verursachten Fehler zu eliminieren. Da für diesen Fall jedoch analytische Werte als Referenz vorliegen, können die Fehler der Geschwindigkeitsprofile für alle Rechnungen direkt angegeben werden.



(a) Grobes Netz (46 Stromlinien)



(b) Mittleres Netz (58 Stromlinien)



(c) Feines Netz (82 Stromlinien)

Abbildung 7.56: Blasius-Grenzschicht, Stromlinien-Verfahren, Korrekturen.

Tabelle 7.4.2 listet die Anzahl der Stromlinien auf, die für den jeweiligen Fall und beide Schnitte innerhalb der Grenzschicht liegen. Die Grenzschichtdicke ist dabei als die Höhe definiert, in der die Geschwindigkeit wieder 99 % des Wertes der Aussenströmung erreicht. Diese Dicke ist mit δ_{99} bezeichnet.

| Ges. Stromlinien | Stromlinien mit $y \leq \delta_{99}$ | |
|------------------|--------------------------------------|-------------|
| | $x \approx 0,5$ m | $x = 2,0$ m |
| 46 | 2 | 4 |
| 58 | 3 | 6 |
| 82 | 4 | 9 |

Tabelle 7.7: Anzahl der Stromlinien innerhalb der Grenzschicht.

Bild 7.57 zeigt die Geschwindigkeitsprofile mit 46, 58 und 82 Stromlinien bzw. einer Zell-Kantenlänge von $6,67 \cdot 10^{-3}$ m, $1 \cdot 10^{-2}$ m und $1,33 \cdot 10^{-2}$ m an der Wand und im Bereich der Grenzschicht. Kleine Abweichungen sind insbesondere im Bereich der größten Krümmung des Geschwindigkeitsprofils zu erkennen. Das lässt sich dadurch erklären, dass in der aktuellen Version des Stromlinien-Verfahrens für die Massenstromberechnung (Gl. 2.23) zwischen zwei Stromlinien ein linearer Geschwindigkeitsverlauf zwischen den Stromlinien angenommen wird (siehe dazu auch die Diskussion in Kapitel 3.3). Eine Approximation zweiter Ordnung hat sich jedoch insbesondere zu Beginn der Rechnung als recht instabil herausgestellt.

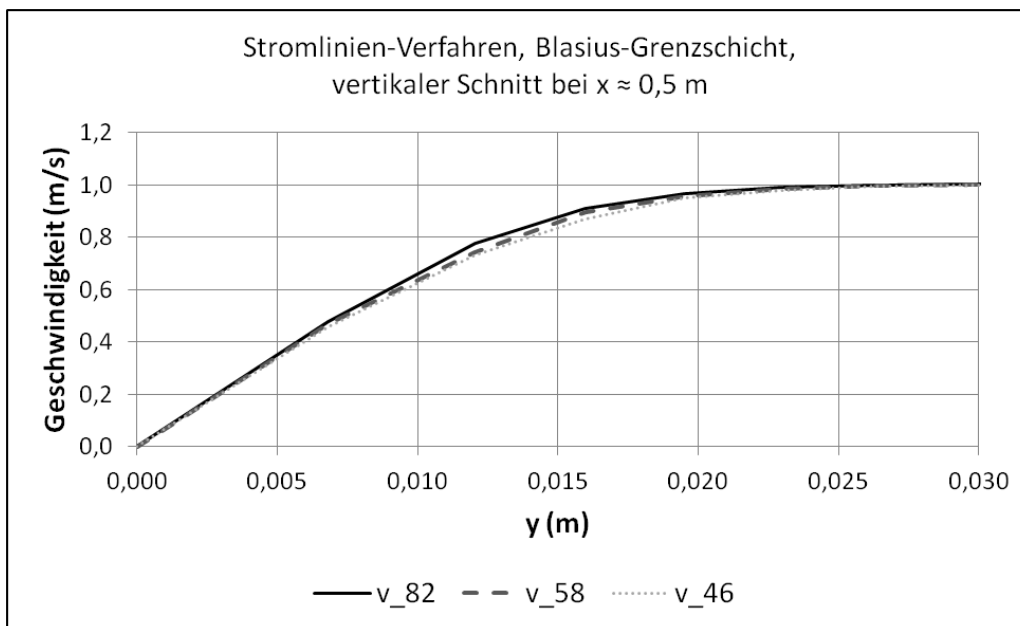


Abbildung 7.57: Blasius-Grenzschicht, Stromlinien-Verfahren mit 46, 58 und 82 Stromlinien, Geschwindigkeitsprofile im vertikalen Schnitt bei $x \approx 0,5$ m.

Zur genaueren Beurteilung zeigt Bild 7.58 die Geschwindigkeitsdifferenz zum analytischen Geschwindigkeitsprofil. Auch bei der geringen Grenzschichtdicke bei $x \approx 0,5$ m ist bereits eine Verringerung der Differenz mit steigender Stromlinien-Anzahl zu erkennen. Im Fall von 82 Stromlinien liegt die maximale Abweichung vom analytischen Wert bei $5,09 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$.

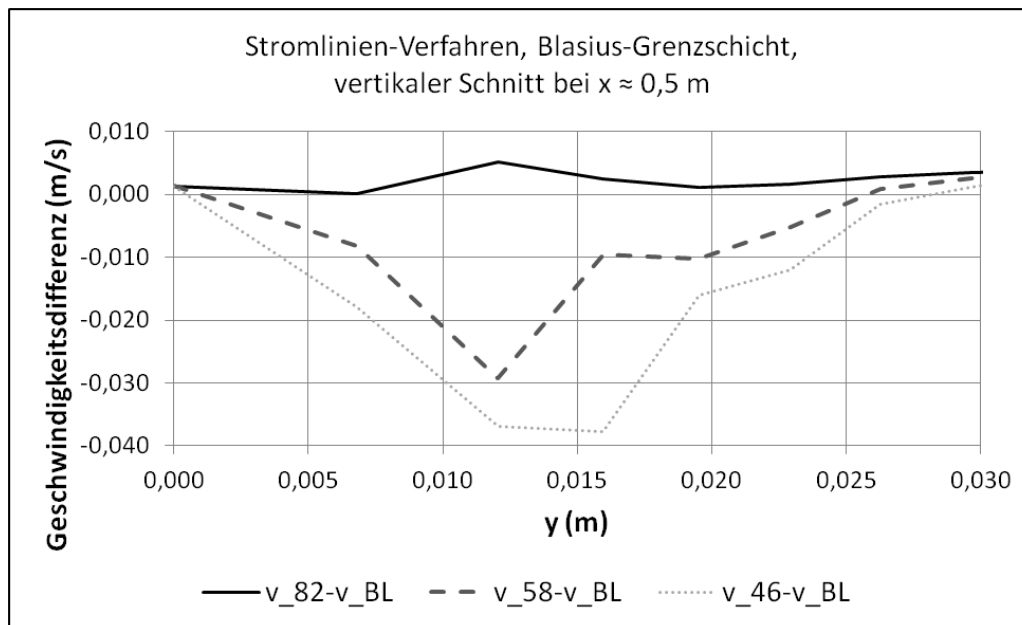


Abbildung 7.58: Blasius-Grenzschicht, Stromlinien-Verfahren mit 46, 58 und 82 Stromlinien, Differenz der Geschwindigkeiten im vertikalen Schnitt bei $x \approx 0,5$ m zur analytischen Blasius-Lösung.

Bei dieser Grenzschicht ist der Druckgradient normal zur Plattenoberfläche näherungsweise null. Dies wird in Bild 7.59 überprüft, das die vertikalen Druckprofile innerhalb der Grenzschicht für alle drei Rechnungen darstellt. Zwar sind bei $x \approx 0,5$ m noch deutliche Unterschiede zwischen den Fällen mit unterschiedlichen Stromlinien-Anzahlen zu erkennen, insgesamt sind sie jedoch auf einem sehr niedrigen Niveau unterhalb von $1 \cdot 10^{-3} Pa$. Bei einem Druck in der Außenströmung von $1 \cdot 10^5 Pa$ also ein Fehler in der neunten signifikanten Stelle. Erwartungsgemäß verringert sich die Differenz mit zunehmender Anzahl von Stromlinien.

Die Geschwindigkeitsprofile im Schnitt bei $x = 2,0$ m in Bild 7.60 liegen deutlich näher zusammen. Der Grund dafür ist, dass nach Tabelle 7.4.2 dort bereits mehr Stromlinien innerhalb der Grenzschicht liegen, als bei $x \approx 0,5$ m und somit die Fehler in der Approximation der Geschwindigkeitsgradienten normal zur Strömungsrichtung kleiner werden. Außerdem ist die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils aufgrund der größeren Grenzschichtdicke kleiner als im Schnitt bei $x \approx 0,5$ m.

Die Abweichungen der Rechnung mit 82 Stromlinien zur Blasius-Lösung in Bild 7.61 liegt mit $6,17 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$ in etwa auf demselben Niveau verglichen mit dem Schnitt bei $x \approx 0,5$ m. Insgesamt liegen die Fehler aller drei Rechnungen bei $x = 2,0$ m in einem Korridor von $1,59 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$ und damit deutlich näher beieinander, als noch bei $x \approx 0,5$ m, wo die Breite des Korridors der Abweichungen aller Lösung noch $4,28 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$ beträgt. Die Reduktion des Diskretisierungsfehlers mit 82 statt 58 Stromlinien ist nur noch gering, daher ist auch die Differenz zur analytischen Lösung im Fall von 82 Stromlinien nur noch leicht geringer.

Das wird auch durch Bild 7.62 bestätigt, das die vertikalen Druckprofile bei $x = 2,0$ m darstellt. Zum Einen ist die Differenz zwischen den drei Lösungen geringer geworden, zum Anderen ist aufgrund der höheren Stromlinien-Anzahl in der Grenzschicht auch der Unterschied zwischen der Rechnung mit 58 und der mit 82 Stromlinien deutlich kleiner, bedingt durch einen geringeren Diskretisierungsfehler. Ein Fehler-Niveau unter $4 \cdot 10^{-4} Pa$ bei einem Druck von $1 \cdot 10^5 Pa$ ist akzeptabel.

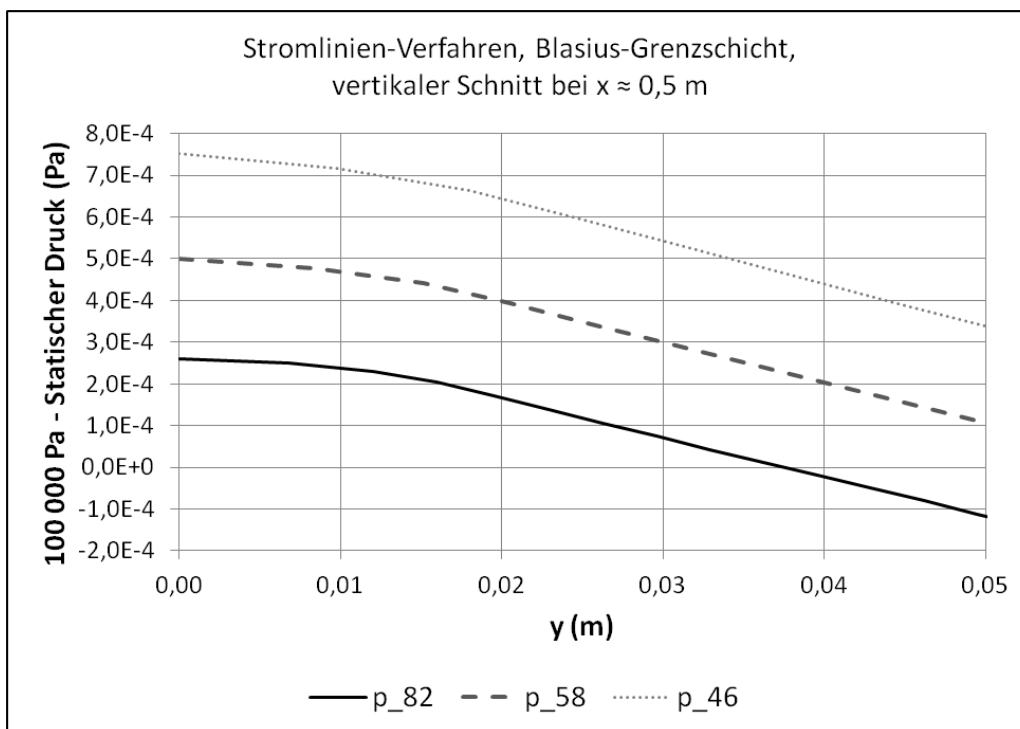


Abbildung 7.59: Blasius-Grenzschicht, Stromlinien-Verfahren mit 46, 58 und 82 Stromlinien, Druckprofile im vertikalen Schnitt bei $x \approx 0,5$ m.

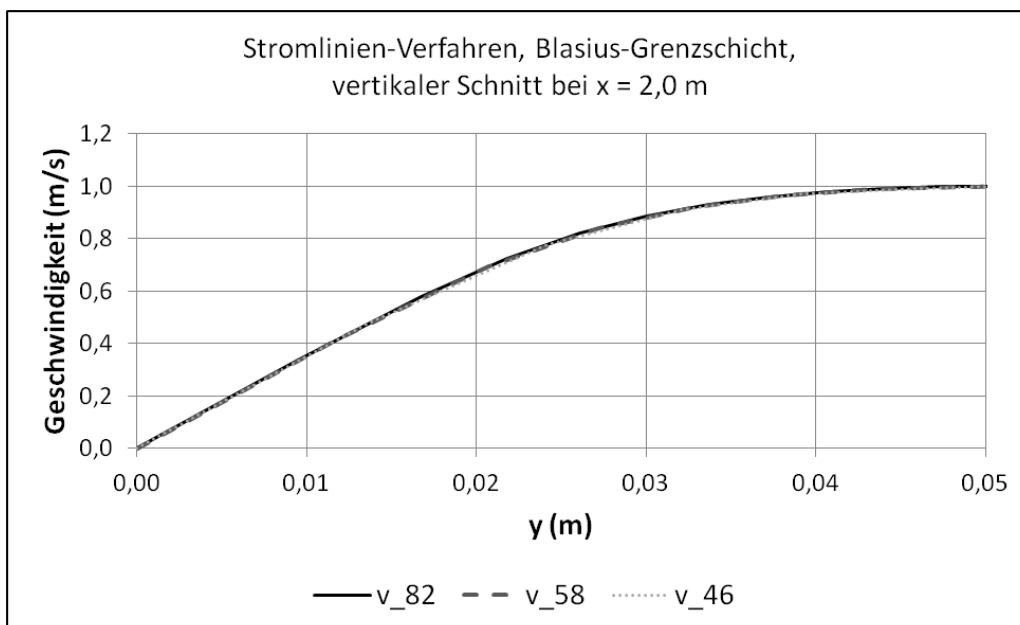


Abbildung 7.60: Blasius-Grenzschicht, Stromlinien-Verfahren mit 46, 58 und 82 Stromlinien, Geschwindigkeitsprofile im vertikalen Schnitt bei $x = 2,0$ m.

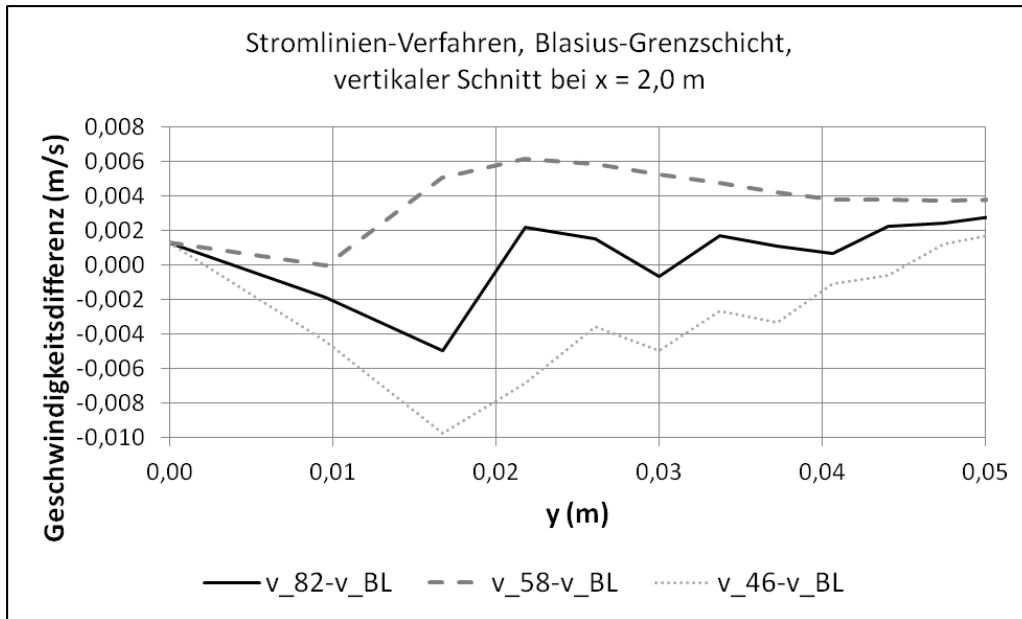


Abbildung 7.61: Blasius-Grenzschicht, Stromlinien-Verfahren mit 46, 58 und 82 Stromlinien, Differenz der Geschwindigkeiten im vertikalen Schnitt bei $x = 2,0$ m zur analytischen Blasius-Lösung.

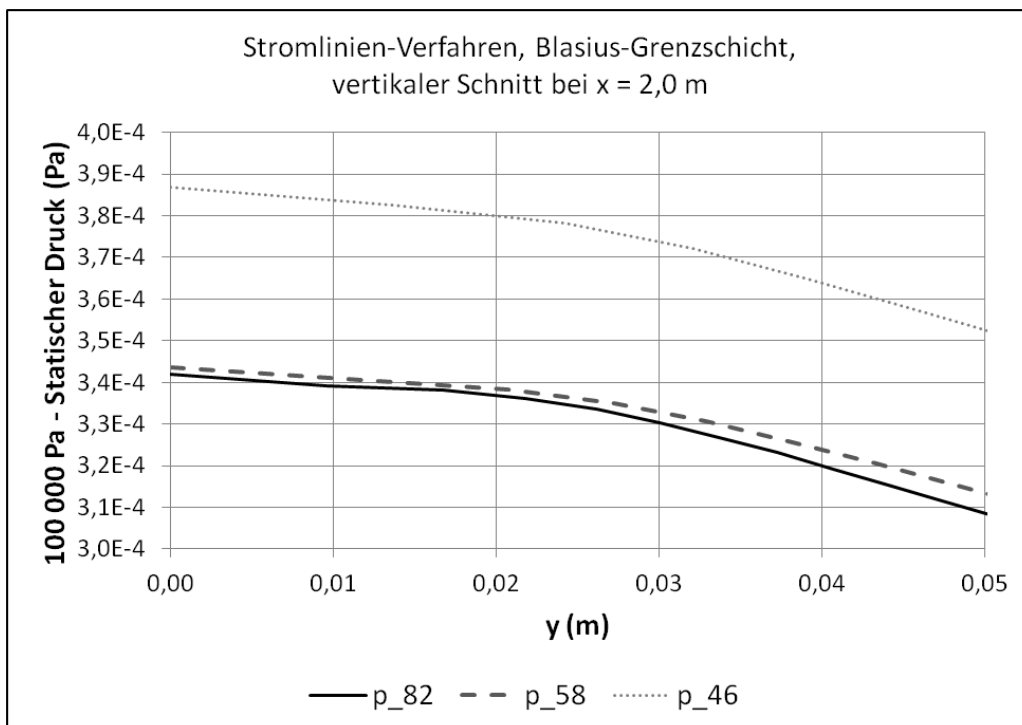


Abbildung 7.62: Blasius-Grenzschicht, Stromlinien-Verfahren mit 46, 58 und 82 Stromlinien, Druckprofile im vertikalen Schnitt bei $x = 2,0$ m.

Die Geschwindigkeiten in den Stromlinien-Stützpunkten in der Rechnung mit 82 Stromlinien stimmen also mit dem analytischen Ergebnis innerhalb eines Fehlers von rund 0,6 % überein. Das beweist aber zunächst nur, dass das Verhältnis von Totaldruck zu statischem Druck innerhalb einer gewissen Toleranz korrekt ist. Bei diesem Testfall soll jedoch auch überprüft werden, ob die Stromlinien-Form korrekt ermittelt wird. Bedenkt man, dass der Druck in einer Stromröhre so berechnet wird, dass ein konstanter Massenstrom in einer Stromröhre erhalten bleibt (gekoppelte Lösung der Masseen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichung 2.29), hätte eine kleinere Stromröhrenhöhe eine Reduktion des statischen Drucks zur Folge und eine größere Höhe eine Druckerhöhung. Da der Druck aber mit einer Toleranz von $4 \cdot 10^{-4} Pa$ mit dem korrekten Wert übereinstimmt, muss die Stromröhrenhöhe ebenfalls mit guter Genauigkeit korrekt sein. Stimmen die Höhen aller Stromröhren, ist damit auch die Lage der Stromlinien korrekt ermittelt.

Im Folgenden soll versucht werden, den Fehler in der Stromlinienform-Anpassung in diesem Fall quantitativ abzuschätzen. Bei einem Druck von $1 \cdot 10^5 Pa$, einer spezifischen Gaskonstante von $R = 287,027 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ und einer statischen Temperatur von $T = 300 K$ bewirkt eine Erhöhung des statischen Drucks von einem Ursprungswert von $1 \cdot 10^5 Pa$ um den, bei der Blasius-Grenzschicht beobachteten maximalen Wert des Druckfehlers von $4 \cdot 10^{-4} Pa$, einen Anstieg der Dichte um $4,65 \cdot 10^{-9} kg \cdot m^{-3}$. Bei gleichem Massenstrom (berechnet für eine Strömungsgeschwindigkeit von $1 m \cdot s^{-1}$ und eine Stromröhrenhöhe von $0,01 m$) hätte das eine betragsmäßig ebenso große Erhöhung des Stromröhrenquerschnitts von $4,65 \cdot 10^{-9} m$ zur Folge. Daraus kann näherungsweise geschlossen werden, dass die Lage der Stromröhren in etwa mit dieser Toleranz mit den analytisch korrekten Positionen übereinstimmen.

Zusammenfassung

Dieser Testfall demonstriert, dass die Anpassung der Stromlinien-Form auch unter dem Einfluss viskoser Effekte funktioniert und zu korrekten Geschwindigkeitsprofilen in der Grenzschicht mit einem Fehler durchweg unter 1 % führt.

8 Erweiterungen

DAS WICHTIGSTE IN KÜRZE

- Folgende Besonderheiten sind bei der Berechnung von Überschallströmungen zu beachten (das Konzept ist bereits für eine frühere Version des Stromlinien-Verfahrens erfolgreich verwendet worden):
 - Der statische Druck wird im Überschall *in* Strömungsrichtung aktualisiert.
 - In einem Unterschall-Gebiet zwischen einem abgehobenen Bogen-Stoß und der Schalllinie wird der statische Druck, wie im Unterschall üblich, ausgehend von der Schalllinie, auf der der Druck bekannt ist, *entgegen* der Strömungsrichtung bis hinter den Verdichtungsstoß angepasst.
 - Verdichtungsstöße werden diskret behandelt. Am Ort des Stoßes wird ein „Stoßpunkt-Operator“ eingefügt, in dem die Stromlinie einen Knick hat. Er ist, ähnlich einem Ring, entlang der Stromlinie verschiebbar und stellt den Startpunkt der stromabwärtigen Stromlinie dar. Alle erforderlichen Größen in diesem Punkt können analytisch mit den Rankine-Hugoniot Gleichungen berechnet werden.
 - Der Abstand und die Form eines starken Stoßes wird durch den Vergleich des numerisch ermittelten statischen Drucks direkt hinter dem Stoß mit den analytischen Ergebnissen der Rankine-Hugoniot Gleichungen bestimmt. Ist der numerische Druck größer/kleiner als der analytische Druck, wird der Stoßpunkt-Operator ein Stück stromaufwärts/stromabwärts geschoben.
- Die Berechnung dreidimensionaler Strömungen wird in mehrere Teilschritte zerlegt. Für jeden nahe gelegenen Nachbarpunkt wird jeweils eine Ebene gebildet, deren Normalenvektor senkrecht zum Geschwindkeitsvektor in einem Stromlinien-Stützpunkt und dem Richtungsvektor zu dem Nachbarpunkt steht. In diese Ebene werden die Algorithmen für 2D-Strömungen angewendet.
- Die entkoppelte Modellierung der Transportmechanismen in und quer zur Strömungsrichtung, wie sie das Stromlinien-Verfahren verwendet, eignet sich gut zur Parallelisierung, da wenig Datenaustausch erforderlich ist.

8.1 Überschallströmungen

Zunächst folgt eine kurze Übersicht, über die Grundlagen von Überschallströmungen, die für deren Behandlung mit dem Stromlinien-Verfahren relevant sind.

8.1.1 Grundlagen

Einflussgebiet

In einer Überschallströmung werden die aerothermodynamischen Eigenschaften an einem Punkt P im Strömungsfeld nur von dem Gebiet beeinflusst, dass in dem stromaufwärts geöffneten Kegel liegt, dessen Rotationsachse gleich dem Anström-Vektor ist und dessen Mantellinien die Mach-Linien sind. Im zweidimensionalen Fall, dargestellt in Bild 8.1, sind die Schnittlinien dieses Kegels mit der Strömungsebene durch die beiden durch diesen Punkt stromaufwärts verlaufenden Mach'schen Wellen gegeben.

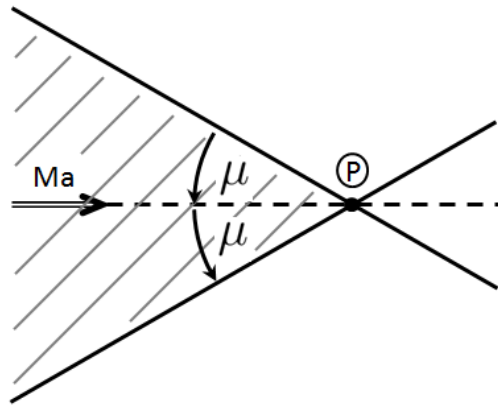


Abbildung 8.1: Bereich in dem ein Punkt in einer Überschallströmung von stromaufwärts gelegenen Störungen beeinflusst wird.

Eine Mach'sche Welle kann als ein Verdichtungsstoß der Stärke null betrachtet werden. Deren Winkel μ zur Anströmrichtung, auch Mach'scher Winkel genannt, hängt nur von der Machzahl Ma ab

$$Ma^2 \sin^2 \mu = 1, \quad (8.1)$$

$$\Leftrightarrow \tan \mu = \frac{1}{\sqrt{Ma^2 - 1}}, \quad (8.2)$$

$$\Leftrightarrow \mu = \arcsin \left(\frac{1}{Ma} \right). \quad (8.3)$$

Verdichtungs-Stöße

Da sich eine (schwache) Störung, verursacht z.B. durch einen Knick in einer Wand zu der die Strömung parallel verläuft, nur mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten kann, hat sie in einer Überschallströmung keinen Einfluss auf den stromaufwärts gelegenen Bereich. Daraus folgt, dass die Anpassung der Strömungsrichtung an die Wandkontur schlagartig erfolgen muss. Das geschieht

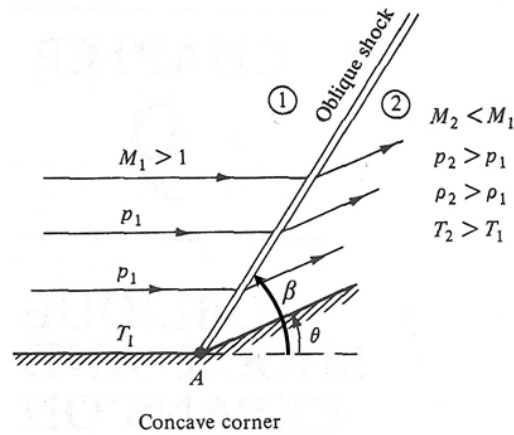


Abbildung 8.2: Schiefer Verdichtungsstoß einer Überschallströmung um eine konkave Kante (aus [53, S. 456]).

über einen anliegenden schrägen Verdichtungsstoß, in Bild 8.2 illustriert, wenn eine Umlenkung in die Hauptströmung hinein vorliegt. Dabei reduziert sich der Abstand der Stromlinien.

Der Umlenkungswinkel θ führt nach [53, S. 464] zu einem Stoßwinkel β , der sonst nur von dem Verhältnis der spezifischen Wärmen γ und der Anström-Machzahl abhängt

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{Ma^2 \sin^2 \beta - 1}{Ma^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (8.4)$$

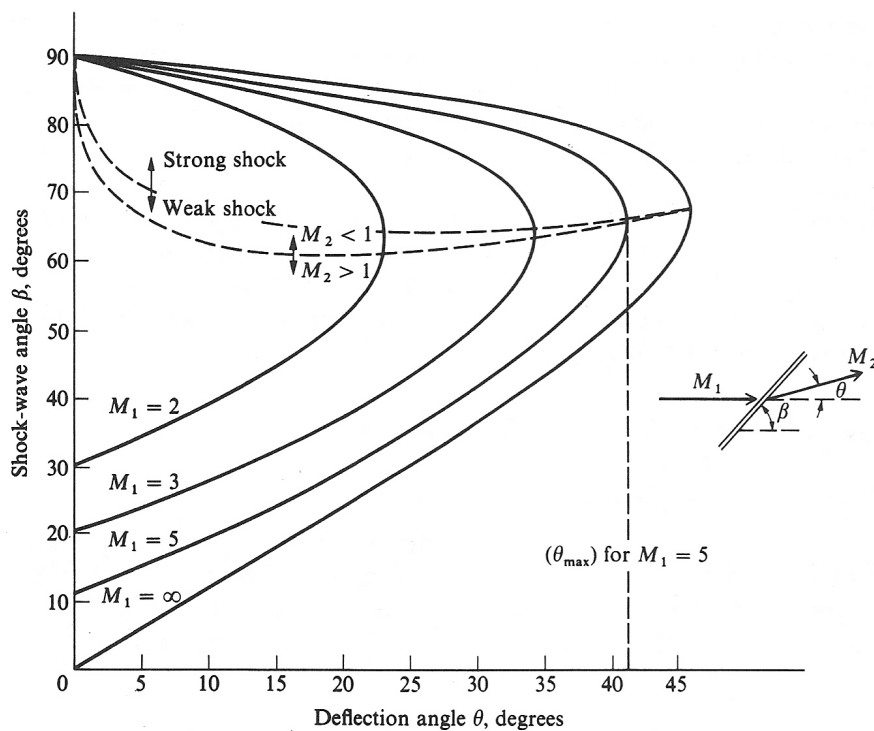


Abbildung 8.3: Stoßwinkel in Abhängigkeit des Umlenkungswinkels einer Überschallströmung (aus [54, S. 37]).

Bild 8.3 skizziert die Abhängigkeit des Stoßwinkels von dem Umlenkungswinkel. Daraus kann man zwei wichtige Eigenschaften einer Überschall-Strömung ableiten. Erstens gibt es für jede

Machzahl einen maximalen Umlenkungswinkel θ_{max} , auch kritischer Winkel genannt. Zweitens gibt es für jeden Umlenkungswinkel unterhalb des Maximalen zwei Lösungen. Die sogenannte schwache Lösung entspricht dem Stoßwinkel eines schiefen Stoßes, hinter dem weiterhin eine Überschallströmung vorliegt. Dieser Fall entspricht den beiden linken Skizzen des Bildes 8.4. Die starke Lösung entspricht dem Stoßwinkel eines starken Verdichtungsstoßes, der die Strömung auf Unterschallgeschwindigkeit verzögert. Stromabwärts eines starken Stoßes ist in der Unterschallströmung jede Umlenkung der Strömung möglich. Übersteigt der Umlenkungswinkel also den Maximalwert für die Anström-Machzahl, entsteht der in den beiden rechten Skizzen von Bild 8.4 gezeigte gekrümmte Verdichtungsstoß, der von der Körperkontur ablöst und durch den Staudruck ein Stück weit stromaufwärts gedrängt wird, so dass der Abstand zum Körper ausreicht, um die Strömung im Unterschall um diesen umzulenken. Der Stoßwinkel ist dabei im Bereich der Staustromlinie 90° und sinkt monoton mit steigendem Abstand von dieser bis auf den Wert des Mach-Winkels ab, wenn der Einfluss des umströmten Körpers in sehr großer Entfernung nur noch vernachlässigbar klein ist.

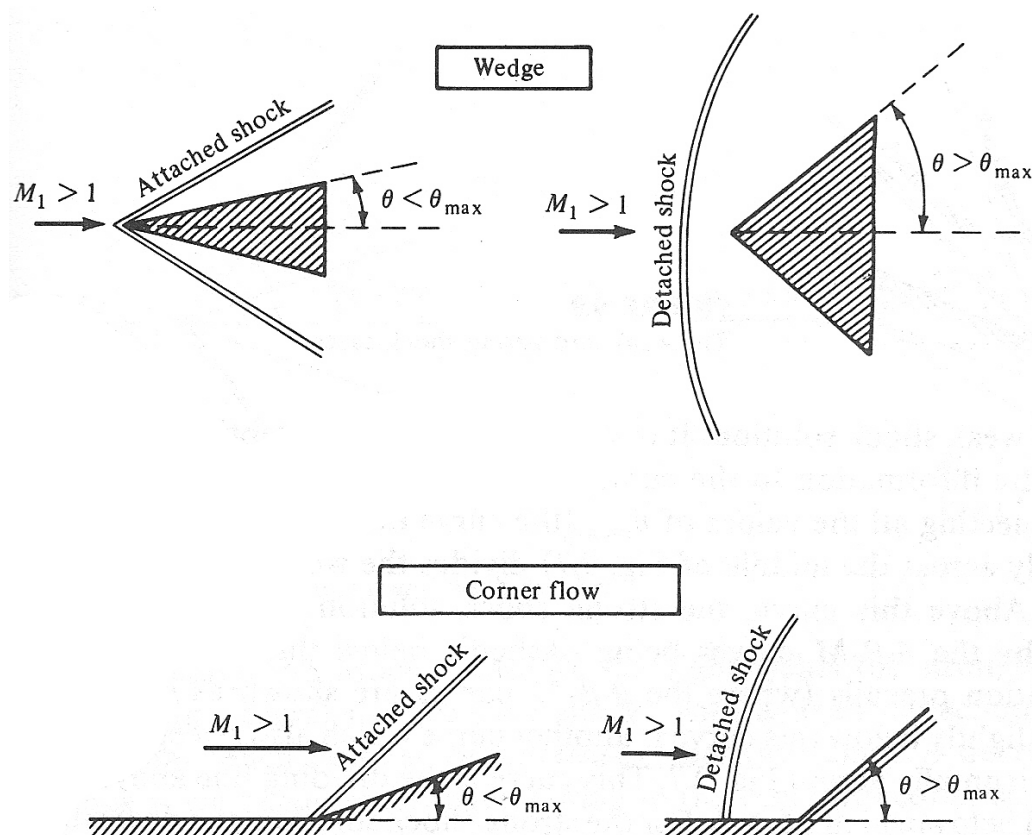


Abbildung 8.4: Anliegende schiefe Verdichtungsstöße links oben an einem Keil und links unten an einer Ecke; abgehobener gekrümmter Verdichtungsstoß rechts oben an einem Keil und rechts unten an einer Ecke (aus [53, S. 467]).

In Bild 8.5 ist diese Situation noch einmal detaillierter skizziert. Das Unterschallgebiet im Bereich des Staupunkts ist durch gestrichelte Linien begrenzt. Im Punkt a auf der Staustromlinie beträgt der Stoßwinkel 90° . Hier hat der Stoß den Abstand δ vom Staupunkt. Aufgrund des starken Stoßes wird die Strömung in den Punkten b und c auf Unterschallgeschwindigkeit verzögert. Der Punkt c' liegt an der Stelle des Stoßes, an dem der maximale Umlenkungswinkel θ_{max} für die Anström-Machzahl vorliegt. Die Machzahl nach dem Stoß ist hier, wie auch entlang der gestrichelten Linien gleich eins. Der Punkt d liegt auf dem schwachen Teil des Stoßes und

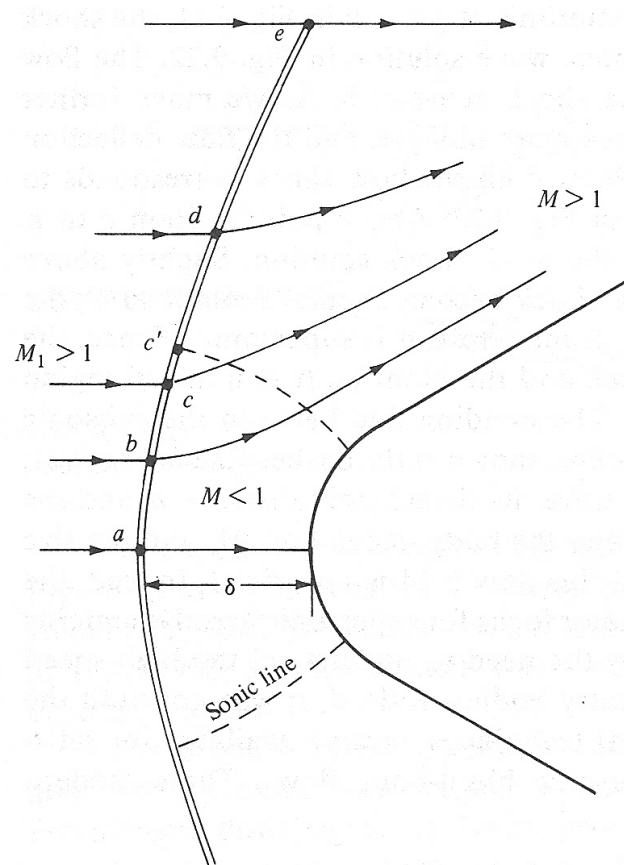


Abbildung 8.5: Abgelöster gekrümmter Stoß vor einem stumpfen Körper im Überschall (aus [53, S. 483]).

die Strömung bleibt auch nach dem Stoß im Überschall ¹.

Nach [37, S. 7] ist bei stationären Strömungen die Totalenthalpie über einen Stoß konstant, also

$$h_{t_1} = h_{t_2}, \quad (8.5)$$

wobei sich der Index 1 entsprechend der Notation in Bild 8.2 auf den Zustand stromaufwärts und 2 auf den Zustand stromabwärts des Stoßes bezieht. Für ideale Gase ist damit auch die Totaltemperatur über den Stoß konstant, also

$$T_{t_1} = T_{t_2}, \quad (8.6)$$

Das Verhältnis der thermodynamischen Größen über einen Verdichtungsstoß ist durch die Rankine-Hugoniot Beziehungen gegeben. Aus [37, S. 7] sind die für diese Anwendung relevanten Gleichungen hier zusammen gefasst.

Die Machzahl hinter einem Stoß:

$$M_2^2 (\beta - \theta) = \frac{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)}. \quad (8.7)$$

Das Verhältnis der statischen Drücke:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}. \quad (8.8)$$

Das Verhältnis der Dichten:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}. \quad (8.9)$$

Das Verhältnis der statischen Temperaturen:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \beta}. \quad (8.10)$$

Das Verhältnis der Totaldrücke:

$$\frac{p_{t_2}}{p_{t_1}} = \left[\frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \quad (8.11)$$

Prandtl-Meyer-Expansion

Eine Überschall-Expansion liegt vor, wenn die Strömung wie in Bild 8.6 skizziert, aus der Hauptströmung hinaus umgelenkt wird. Dabei vergrößert sich der Abstand der Stromlinien. Dieser Vorgang ist isentrop. Von einer scharfen Kante geht ein sogenannter Expansionsfächer aus. Dessen Strahlen sind Machlinien, entlang denen der thermodynamische und strömungsmechanische Zustand des Gases konstant ist. Alle Stromlinien, die eine Machlinie schneiden, tun dies unter demselben Winkel. Die Machlinien sind jedoch nicht immer Geraden.

¹Die Skizze 8.5 hat jedoch einen kleinen Fehler. Die Stromlinien stromabwärts des schwachen Stoßes sowie hinter dem Unterschallgebiet sind teilweise noch stetig konkav von der Körperoberfläche weg gekrümmt. Das würde einer isentropen Kompression entsprechen. Tatsächlich müssen alle Stromlinien im Überschallgebiet hinter dem Stoß konvex sein, da dort die Strömung wieder beschleunigt.

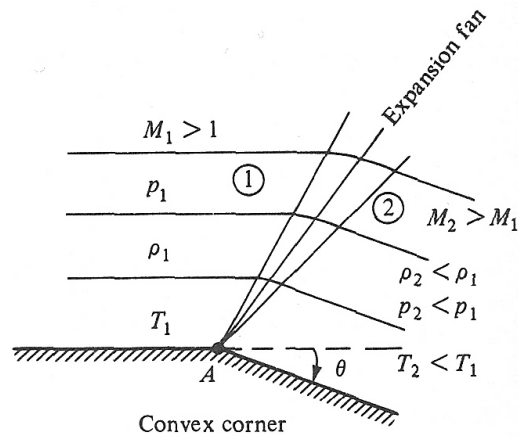


Abbildung 8.6: Expansionsfächer einer Überschallströmung um eine konvexe Kante (aus [53, S. 456]).

Bei einer Expansion sind alle Zustandsgrößen nur von der Anström-Machzahl und dem Umlenkungswinkel abhängig. Für die bekannten Größen stromaufwärts der Expansion kann der Wert der sogenannten Prandtl-Meyer-Funktion (siehe [53, S. 488]) berechnet werden

$$\nu(Ma) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (Ma^2 - 1)} - \arctan \sqrt{Ma^2 - 1}. \quad (8.12)$$

Addiert man dazu den Umlenkungswinkel θ , erhält man den Wert der Prandtl-Meyer-Funktion hinter der Expansion

$$\nu(Ma_2) = \nu(Ma_1) + \theta. \quad (8.13)$$

Daraus kann nach Gl. 8.12 implizit die Machzahl hinter der Expansion bestimmt werden. Da der Totaldruck und die Totaltemperatur über die Expansion konstant bleiben, kann mit Hilfe der Gleichung 2.15 der statische Druck und mit 2.14 die statische Temperatur stromabwärts der Expansion berechnet werden.

Isentrope Expansion oder Kompression

Schiefe Stöße und Prandtl-Meyer-Expansionsfächer haben ihren Ursprung jeweils an scharfen Kanten. Ist die Konturänderung jedoch stetig, sind die Machlinien einer Expansion wie in Bild 8.7 a) skizziert nicht in einem Punkt zentriert. Sie enden dann überall in dem gekrümmten Bereich der Oberfläche (wobei die Machlinien selbst natürlich theoretische Konstrukte sind, die im Gegensatz zu Verdichtungsstößen in einer Strömung nicht diskret auftreten). An der Berechnung dieser kontinuierlichen Expansion ändert sich jedoch nichts verglichen mit der Prandtl-Meyer-Expansion. Relativ zur Anströmrichtung ist nur die Richtungsänderung entscheidend für den thermodynamischen Zustand der Strömung.

Auch eine Richtungsänderung in die Hauptströmung hinein, wie in Bild 8.7 b), kann kontinuierlich erfolgen. Die Umlenkung der Strömung erfolgt im Gegensatz zu den, in Bild 8.4 auf der linken Seite skizzierten Fällen, hier nicht durch einen einzelnen Stoß, sondern durch unendlich viele, unendlich schwache Verdichtungsstöße, die in ihrer Gesamtheit auch Kompressionsfächer genannt werden. Schneiden sich diese Stöße schließlich in einem wandfernen Punkt, ist

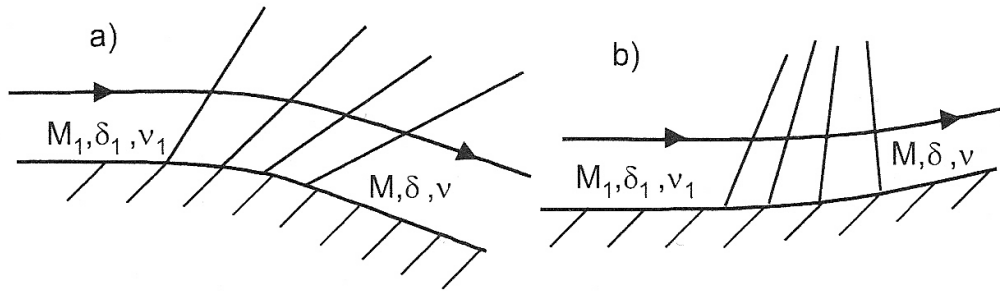


Abbildung 8.7: Isentrope Expansion a), isentrope Kompression b) einer Überschallströmung bei kontinuierlicher Richtungsänderung (aus [55, S. 176]).

die Umlenkung ab dort wieder schlagartig und der Kompressionsfächer vereinigt sich zu einem diskreten schiefen Stoß. Da die unendlich vielen wandnahen Stöße unendlich schwach sind, ist die Zustandsänderung näherungsweise isentrop, wie über eine Machwelle hinweg. Der thermodynamische Zustand nach einer Umlenkung wird ebenfalls mit der Prandtl-Meyer Funktion berechnet, einzig das Vorzeichen des Umlenkungswinkels in Gl. 8.13 ändert sich im Vergleich zur Expansion.

8.1.2 Initialisierung des Strömungsfeldes

Die Initialisierung einer Überschallströmung ist identisch zu der in Kapitel 4.1 beschriebenen Vorgehensweise für Unterschall. Zwar sind stetig gekrümmte Stromlinien um einen Körper herum im Überschall eine deutlich schlechtere Näherung der korrekten Lösung, es überwiegen aber die Vorteile einer ausgewogenen Stromliniendichte, dass die Stromlinien sich nicht kreuzen und einen ähnlichen Abstand zueinander haben. Sind die Stromlinien noch nicht vorläufig zueinander ausgerichtet und um einen Körper herum geleitet, haben diese an der Körperoberfläche scharfe Knicke und starke Querschnittsänderungen von einem Element zum nächsten und das zunächst noch ohne die „dazugehörigen“ Stöße, was auch im Überschall bei den Algorithmen zur Anpassung des Drucks und der Stromlinienform leicht zu Fehlern führt. Darüber hinaus hat die stetige Form den Vorteil, dass eventuell entdeckte Stöße anfangs nur eine schwache Richtungsänderung verursachen und damit auch den Totaldruck nur gering beeinflussen, so dass sich nicht schlagartig die Strömungstopologie dahingehend ändert, dass an mehreren Stellen Unterschallgebiete nach starken Stößen auftreten. Im Verlauf der Anpassung werden dann erst nach und nach aus schwachen starke Stöße, wenn der umliegende Bereich dieser Topologie auch bereits etwas angepasst ist.

8.1.3 Randbedingungen

In einer Überschallströmung kann keine Information entgegen der Strömungsrichtung transportiert werden. Daher müssen alle erforderlichen Randbedingungen am Einströmrand festgelegt sein, also Total- und statischer Druck, Totaltemperatur, Machzahl sowie die Strömungsrichtung. Am Ausströmrand werden im Fall einer Überschallströmung die Strömungsrichtung und alle thermodynamischen Größen 0-ter Ordnung extrapoliert. Für den Fall, dass die Strömung beispielsweise hinter einem starken Stoß bis zum Ausströmrand unterhalb der Schallgeschwindigkeit bleibt, wird die vom Benutzer für diesen Fall alternativ vorgegebene Unterschall-Druckrandbedingung verwendet.

Ein schwacher Verdichtungsstoß entspricht einer Überschall-Einströmrandbedingung. Stromabwärts sind Totaldruck, statischer Druck, Totaltemperatur, Machzahl und Strömungsrichtung wie am Einströmrand eindeutig definiert, da die Änderungen dieser Größen über den Stoß mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Beziehungen (Gleichungen 8.6, sowie 8.8 bis 8.11) bestimmt werden können.

Ein starker Verdichtungsstoß entspricht einer Unterschall-Einströmbedingung. Totaldruck und Totaltemperatur sowie Strömungsrichtung sind wieder über die Rankine-Hugoniot-Beziehungen festgelegt. Der statische Druck kann zwar auch hinter dem Stoß berechnet werden, dieser wird jedoch wie bei einer reinen Unterschallströmung entweder vom Ausströmrand oder vom kritischen Zustand am Beginn des Überschallgebiets entgegen der Strömungsrichtung bis zum Stoß transportiert und als Steuergröße für die Anpassung der Stoßform verwendet. Im kritischen Zustand auf der Grenze zwischen Unter- und Überschallgebiet hat die Strömung eine Machzahl von eins, wodurch zusammen mit den bekannten Werten für Totaldruck und -temperatur alle weiteren thermodynamischen Größen festgelegt sind. Durchquert eine Stromlinie sowohl Über- als auch Unterschallgebiete, ändert sich also entsprechend die Richtung in der die Druckaktualisierung durchgeführt wird.

8.1.4 Bestimmung der relevanten Punkte auf Nachbarstromlinien

Im Überschall ist die Bestimmung des Strömungsquerschnitts der mit der Nachbarstromlinie zusammen gebildeten Stromröhre etwas unterschiedlich zu der, für Unterschallströmungen in Kapitel 3.2.2 geschilderten Vorgehensweise. Da die Informationsausbreitung im Überschall auf das durch die Machlinien begrenzte Gebiet beschränkt ist, ist der am weitesten stromabwärts gelegene Punkt auf der Nachbarstromlinie, von dem aus ein Stützpunkt S beeinflusst werden kann, der Schnittpunkt der durch ihn stromaufwärts verlaufenden Machlinie und der Nachbarstromlinie. Dieser Punkt ist in Bild 8.8 mit N gekennzeichnet.

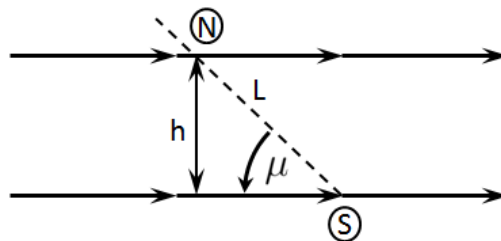


Abbildung 8.8: Relevanter Punkt auf der Nachbarstromlinie in einer Überschallströmung.

Es wird angenommen, dass die Machlinie zwischen zwei Stromlinien Geraden sind. Diese Annahme ist mit dem üblichen Diskretisierungsfehler behaftet, der umso geringer ist, je geringer der Abstand der Stromlinien ist. Das arithmetische Mittel der Strömungsrichtung in beiden Punkten S und N wird als die mittlere Strömungsrichtung über die Machlinie angenommen. Der senkrecht durchströmte Abstand zur Nachbarstromlinie in Abhängigkeit des bekannten Abstandes $L = \overline{SN}$ beträgt also

$$h = L \sin \mu. \quad (8.14)$$

Die genaue Strömungsrichtung in einem Stromlinien-Stützpunkt ist im Überschall nicht wie im Unterschall durch die Tangente an den Krümmungskreis gegeben, sondern direkt durch den Richtungsvektor des stromaufwärts bis zu diesem Stützpunkt hin verlaufenden Stromlinien-Segments. Der stromabwärts gelegene Punkt hat also keinen Einfluss auf die Strömungsrichtung.

8.1.5 Aktualisierung des statischen Drucks

In Unterschallgebieten nach starken Stößen erfolgt die Aktualisierung des statischen Drucks entsprechend dem, in Kapitel 4.2 beschriebenen, Algorithmus für die Druckanpassung im Fall einer reinen Unterschallströmung. Wie im vorangegangenen Kapitel erwähnt, ist die stromabwärts gelegene Druckreferenz entweder die alternativ am Ausströmrand vorgegebene Druckrandbedingung oder der kritische Zustand auf der Schalllinie.

Strömungsrichtung und Machzahl sind im Startpunkt der Stromlinie durch die Eintritts-Randbedingung festgelegt. Für einen stromaufwärts gelegenen Punkt sind also alle relevanten thermodynamischen Größen bekannt, so dass der Prandtl-Meyer-Winkel $\nu(Ma_1)$ nach Gl. 8.12 berechnet werden kann. Die Umlenkung der Strömung ist gleich dem Winkel zwischen dem stromaufwärts gelegenen und dem gerade betrachteten Stromlinien-Segment. Das Vorzeichen des Umlenkungswinkels θ in Gl. 8.13 ist positiv, wenn der Abstand zur Nachbarstromlinie im betrachteten Stützpunkt größer als im stromaufwärts gelegenen Stützpunkt ist. Dann liegt eine isentrope Kompression vor. Hat sich der Abstand im Fall einer isentropen Expansion verringert, ist das Vorzeichen negativ. Somit ist der Prandtl-Meyer-Winkel $\nu(Ma_2)$ für den betrachteten Stützpunkt bekannt, aus dem nach Gl. 8.12 implizit die Machzahl berechnet werden kann. Zusammen mit den bekannten Werten für Totaldruck und -temperatur lassen sich daraus wieder alle weiteren thermodynamischen Größen ermitteln. Es werden also zunächst alle Richtungsänderungen als isentrope Kompressionen oder Expansionen betrachtet, die keinen Einfluss auf Totaldruck und -temperatur haben. Ob statt einer isentropen Kompression ein Verdichtungsstoß vorliegt, ergibt die Anwendung eines im folgenden Kapitel 8.1.7 beschriebenen, separaten Algorithmus. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass nicht jede winzig kleine Richtungsänderung gleich einen schwachen Stoß zur Folge hat.

8.1.6 Adaption von Stromlinienform im stoßfreien Überschallgebiet

Die Anpassung der Stromlinienform wird analog zu dem in Kapitel 4.5 beschriebenen Algorithmus für Unterschall-Strömungen durchgeführt. Der einzige Unterschied ist die Bestimmung des Abstandes zur Nachbarstromlinie, die im Überschall nach der in Kapitel 8.1.4 erläuterten Methode ermittelt wird.

8.1.7 Erkennen eines Stoßes

Vom Benutzer wird ein Grenzwert vorgegeben, ab dem eine, durch eine Richtungsänderung einer Stromlinie verursachte isentrope Kompression, als ein diskreter Stoß behandelt werden soll. Dieser Grenzwert kann sich beispielsweise daran orientieren, ab wann der über einen entsprechenden schwachen Stoß verursachte Totaldruckverlust nicht mehr vernachlässigt werden kann. Ist ein solches Stromlinien-Segment identifiziert, werden die beiden möglichen Lösungen der Rankine-Hugoniot-Beziehungen (Gl. 8.4) für diesen Umlenkungswinkel bestimmt und die daraus resultierenden statischen Drücke hinter dem Stoß mit Gl. 8.8. Es wird dann die Lösung ausgesucht, deren Differenz geringer ist im Vergleich mit dem statischen Druck, der direkt hinter dem Stoß im Feld vorliegt. Direkt nach der Initialisierung ist das vorläufig immer die schwache Lösung. Die Lage des neu erkannten Stoßes wird zunächst in der Mitte des Elements angenommen. Dort wird ein Stoßpunkt, sozusagen als „Scharnier“ in das Element eingefügt und der stromabwärtige Teil des Segments entsprechend des Umlenkungswinkels ausgerichtet. Für

alle Elemente stromabwärts des neu erkannten Stoßes werden die Totaldrücke um den Betrag reduziert, der über den Stoß dissipiert wird.

Im Fall eines schwachen Stoßes wird die Stromlinienanpassung wie direkt hinter einem Überschalleinlass fortgesetzt. Möglicherweise folgen nun mehrere Elemente, auf denen ein schwacher Stoß liegt, bis der erforderliche Umlenkungswinkel erreicht ist.

Ein starker Stoß tritt dann auf, wenn

- der Umlenkungswinkel den maximalen Umlenkungswinkel übersteigt,
- der Druck hinter dem Stoß die starke Lösung erfordert oder
- der kritische Strömungsquerschnitt unterschritten wird.

Eine Querschnittsveringerung bewirkt im Unterschall eine Beschleunigung der Strömung und im Überschall eine Verzögerung. Der kritische Querschnitt ist der, in dem die Überschallströmung so weit verzögert, dass die Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Eine weitere Reduktion des Querschnitts führt nur zu einer Erhöhung des statischen Drucks, die Machzahl im engsten Querschnitt dieser Stromröhre, die quasi als konvergenten Düse betrachtet werden kann, bleibt jedoch unverändert gleich eins. Wird nach einem oder mehreren schwachen Stößen entweder der kritische Querschnitt der Stromröhre oder der maximale Umlenkungswinkel unterschritten, ist ein starker Stoß stromaufwärts erforderlich. Dieser muss auf jeden Fall in einem Bereich der Stromlinie liegen, in dem der Stromröhrenquerschnitt stromabwärts, wie erläutert, nicht weiter abnimmt. Dadurch ist es möglich, dass der starke Stoß mehrere Elemente weit stromaufwärts angesetzt werden muss.

Vor der eigentlich anstehenden Anpassung der Stromlinienform muss bei einem neu entdeckten starken Stoß zunächst eine Zwischenanpassung des statischen Drucks im Unterschallgebiet nach dem Stoß vorgenommen werden, da die Werte der in der vorherigen Iteration noch vorliegenden Überschallströmung sehr falsch sind. Dafür wird zunächst der Änderung des Totaldrucks auf den stromabwärts gelegenen Teil der Stromlinie angewendet. Die Druckanpassung hinter dem Stoß erfolgt dann wie in Kapitel 8.1.5 beschrieben.

8.1.8 Anpassung der Stoßform und des Stoßabstands

Zur Adaption von Stoßform und -abstand wird der statische Druck im Strömungsfeld direkt hinter dem Stoß mit dem Wert verglichen, den die Rankine-Hugoniot-Beziehungen (Gl. 8.8) hinter dem Stoß liefern. Liegt der analytische Wert über dem aktuell im Feld vorliegenden Druck, wird die Lage des Stoßpunktes entlang der Stromlinie stromabwärts verschoben und umgekehrt. Der Betrag der Verschiebung wird abgeschätzt, indem der Druckgradient entlang der Stromlinie hinter dem Stoß bestimmt wird und damit der Ort, an dem der Druck gleich dem analytischen Wert wäre. Die damit bestimmte Verschiebung wird pro Iteration limitiert und unterrelaxiert angewendet. Da die Strömung stationär ist, handelt es sich bei der Verschiebung jedoch nicht um eine Stoßgeschwindigkeit. Die Anpassung geschieht in jeder Iteration. Die Lage der Stoßpunkte wird in baryzentrischen Koordinaten relativ zum Stromlinien-Segment gespeichert. Auf diese Weise hängt die Genauigkeit der Stoßdiskretisierung nicht von der Länge oder dem Abstand der Stromlinien ab. Er wird also nicht wie bei Finite-Volumen-Verfahren über einige Zellen verschmiert (diese Aussage gilt nur für das üblicherweise angewendeten Shock-capturing Verfahren und nicht für den Shock-fitting Ansatz), weil nur kontinuierliche Änderungen der Lösungsvariablen berechnet werden können, da die Gradienten derselben Bestandteil der Erhaltungsgleichungen sind. Der Stoß ist eine Diskontinuität, über den die Ableitung nicht

definiert ist. Auch sehr große Gradienten sind bereits grundsätzlich schwer zu behandeln. Beim Stromlinien-Verfahren ist hingegen keine Anpassung der Stromlinien-Diskretisierung, also der Segmentlänge oder der Stromliniendichte abhängig von der Stoßlage erforderlich und Stöße werden korrekt als Diskontinuitäten behandelt.

Durch die Verschiebung (und auch die Anpassung der Stromlinienform vor und nach dem Stoß) ergibt sich ein anderer Umlenkungswinkel, der einen anderen Totaldruck nach dem Stoß zur Folge hat. Nach der Adaption wird zunächst der Totaldruck aktualisiert, anschließend der statische Druck bevor die Stromlinienform erneut angepasst wird.

Die Form des gesamten Stoßes ist durch die Verbindung der einzelnen Stoßpunkte gegeben. Er endet fernab des Körpers, wenn die Umlenkung so gering wird, dass der vorgegebene Grenzwert für den Totaldruckverlust über den Stoß vernachlässigbar klein wird. Dann geht der Stoß in eine Machwelle über, die nicht mehr diskret behandelt wird.

Diese Funktionalität ist noch nicht in der aktuellen Version des Stromlinien-Verfahrens enthalten. Der Autor hat jedoch die grundsätzliche Vorgehensweise bereits in einer früheren Version des Stromlinien-Verfahrens (bzw. eines ähnlichen Stromröhren-Verfahrens) demonstriert (siehe Referenzen [56] und [57]). Bild 8.9 zeigt die Mach-Zahl und das Druckfeld hinter einer zweidimensionalen, konvexen Doppel-Rampe für eine Anström-Machzahl von 3,5.

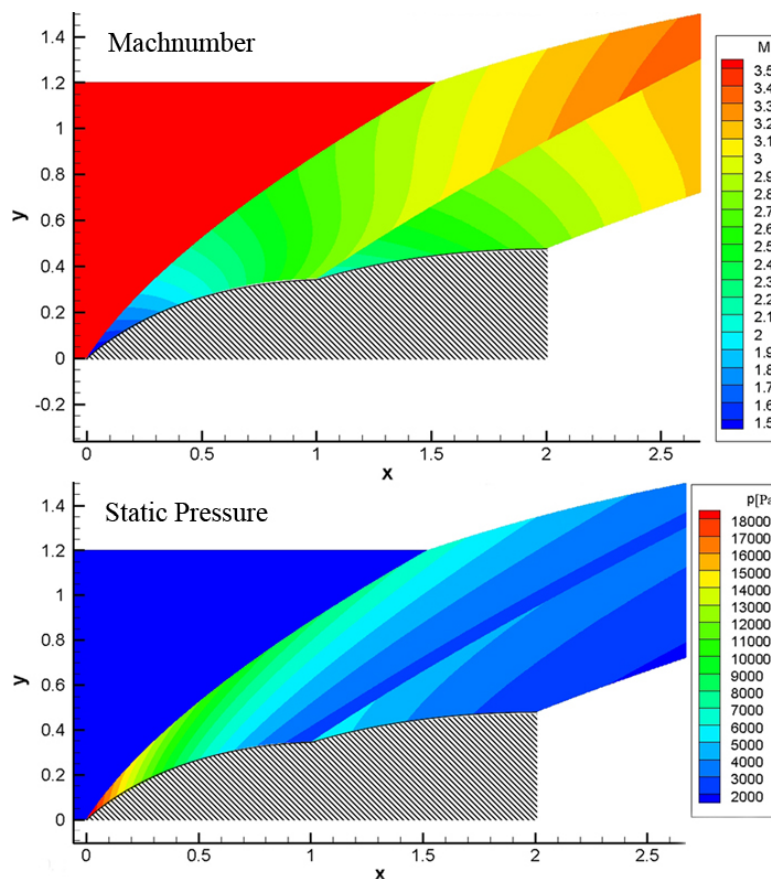


Abbildung 8.9: Machzahl- und Druckfeld hinter einer zweidimensionalen, doppelt konvexen Rampe (aus [56]).

8.2 Dreidimensionale Strömungen

Die Berechnung der Krümmung einer Stromlinie in einer dreidimensionalen Strömung erfolgt, genau wie bei einer zweidimensionalen Strömung, ebenfalls über die Bestimmung des Kreises, der durch den betrachteten Stützpunkt, sowie die beiden stromauf- und stromabwärts liegenden Punkte. Wird die Krümmung der Stromlinie in einem Punkt zwischen zwei Stützpunkten benötigt, wird sie wie in 2D linear zwischen den Krümmungen beider benachbart liegender Stützpunkte interpoliert. In 3D kommt dazu, dass außerdem der Normalenvektor der Ebene, in der der interpolierte Krümmungskreis liegt, ebenfalls durch eine lineare Interpolation der Komponenten der Normalenvektoren der beiden Ebenen, in denen die Krümmungskreise der benachbarten Stützpunkte liegen.

Für die Berechnung des Massenstroms zwischen einer betrachteten und ihrer Nachbar-Stromlinie, muss wie in 2D segmentweise eine Stromröhre gebildet werden. Im dreidimensionalen Fall ist die Vorgehensweise dafür folgendermaßen:

- Bestimmung der Schnittpunkte N aller Nachbarstromlinien mit einer Ebene, auf der ein Stützpunkt der betrachteten Stromlinie S liegt, deren Normalenvektor der Geschwindigkeitsvektor im Punkt S ist. Die Lage der Schnittpunkte in dieser Ebene ist in Abbildung 8.10 dargestellt.
- Die Ebene wird in vier Quadranten unterteilt (vielleicht zeigt die Praxis, dass auch drei 120° -Sektoren ausreichend sind) mit dem Punkt S im Zentrum.
- In jedem Quadranten wird der nächstgelegene Schnittpunkt einer Nachbarstromlinie ermittelt $N_1 - N_4$.

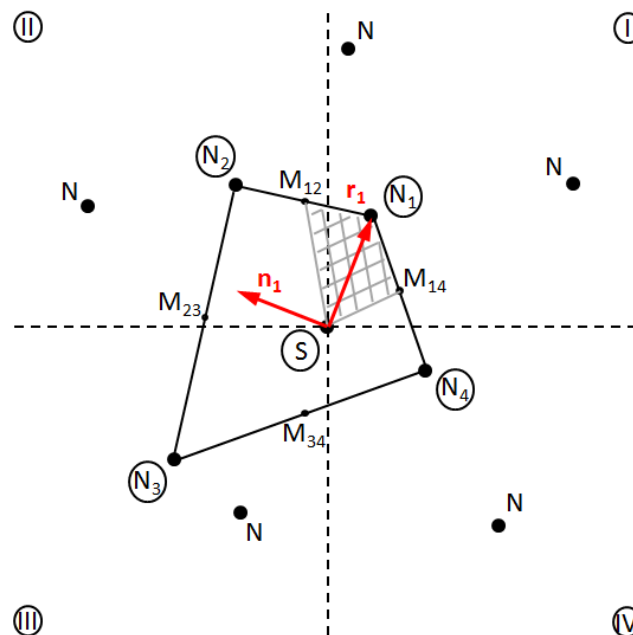


Abbildung 8.10: Querschnittsfläche der Stromröhre zwischen einer Stromlinie und ihrer Nachbarstromlinie für die Massenstromberechnung einer dreidimensionalen Strömung.

- Berechnung der Mittelpunkte ($M_{12}, M_{23}, M_{34}, M_{45}$) der Verbindungslinien zwischen den Nachbarpunkten $N_1 - N_4$.

- Die Stromröhre, die z.B. zwischen Punkt S und N_1 verläuft, wird durch die Punkte $S - M_{14} - N_1 - M_{12} - S$ gebildet (die grau schraffierte Fläche in Bild 8.10). Ihre Querschnittsfläche kann nach der Zerlegung in die beiden Dreiecke $S - M_{14} - N_1 - S$ und $S - N_1 - M_{12} - S$ mit der Heron'schen Flächenformel berechnet werden.
- Für die Berechnung des Massenstroms in einer Stromröhre wird nun eine weitere Ebene gebildet, deren Normalenvektor \vec{n}_i gleich dem Kreuzprodukt aus dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_S in Punkt S und dem Richtungsvektor $\vec{r}_1 = \vec{N}_1 - \vec{S}$ (Differenz der Ortsvektoren der Punkte S und N_1) zum Nachbarpunkt N_i ist, also $\vec{n}_i = \vec{v}_S \times \vec{r}_i$. In dieser Ebene wird ein lokales Koordinatensystem gebildet, dessen Ursprung im Punkt S liegt, dessen eine Achse x' gleich dem Geschwindigkeitsvektor im Punkt S ist und dessen andere Achse y' senkrecht dazu dem Richtungsvektor \vec{r}_i entspricht.
- Die Krümmungskreise der Stromlinie im Punkt S , sowie der Nachbarstromlinie im Punkt N_i werden in diese Ebene projiziert. Dadurch werden sie zu Ellipsen im lokalen t - n -Koordinatensystem.
- Anschließend müssen wie in 2D radiale Gradienten der Lösungsvariablen p , p_t und T_t gebildet werden. Dazu werden zunächst die normierten Richtungsvektoren zu den Nachbarpunkten \vec{r}_i jeweils mit dem erster Ordnung approximierten Gradienten des Totaldrucks beziehungsweise der Totaltemperatur multipliziert, also zum Nachbarpunkt N_i

$$\vec{p}_{t,i} = \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} \frac{p_t(N_i) - p_t(S)}{|\vec{r}_i|}. \quad (8.15)$$

Der mittlere Gradient des Totaldrucks, der für alle vier Teil-Stromröhren (zwischen S und N_1 , S und N_2 , S und N_3 , S und N_4) verwendet wird, entspricht den vektoriell addierten Gradienten zu den einzelnen Nachbarpunkten

$$\vec{p}_t = \sum_{i=1}^4 \vec{p}_{t,i}. \quad (8.16)$$

Der mittlere Gradient der Totaltemperatur wird analog ermittelt.

- Der radiale Gradient des statischen Drucks wird wie in 2D nach den Gleichungen 2.24 und 2.25 abhängig vom Krümmungsradius der Ellipse im Punkt S in der x' - y' -Ebene berechnet.
- Nachdem die radialen Gradienten aller Lösungsvariablen in der x' - y' -Ebene bekannt sind, kann der Massenstrom zwischen beiden Stromlinien in dieser Ebene mit dem berechneten Querschnitt ermittelt werden.

Die Massenströme in den Teil-Stromröhren zwischen S und N_i können dann entweder zur Aktualisierung des statischen Drucks oder zur Anpassung der Lage des Stützpunktes S in der jeweiligen x' - y' -Ebene verwendet werden. Es wird also für jeden Nachbarpunkt N_i der entsprechende Verschiebungsvektor \vec{s}_i des Punktes S entlang der y' -Achse des jeweiligen lokalen x' - y' -Koordinatensystems berechnet. Sind die \vec{s}_i für alle N_i bekannt, wird der Stützpunkt S um den Vektor

$$\vec{s} = \sum_{i=1}^4 \vec{s}_i \quad (8.17)$$

verschoben.

Die Behandlung von Verdichtungs-Stößen ist identisch zu der in zweidimensionalen Strömungen, da Stöße sind keine Linien in 2D und Flächen in 3D, sondern nur zusammengehörige Ansammlungen der auf Stromlinien liegenden Stoßpunkte sind.

8.3 Parallelisierung

Da die Entwicklung zur Zeit tendenziell eher in die Richtung geht, eine immer größere Anzahl von eher günstig zu produzierenden Prozessoren je Computer / Cluster zu verwenden, statt eine eher gleichbleibende Anzahl immer leistungsfähigerer Prozessoren, gewinnt die Eignung eines Simulations-Verfahrens zunehmend an Bedeutung, eine Aufgabenstellung effizient auf mehrere (dutzende bis tausende) Prozessor-Kerne verteilen zu können.

Abgesehen von Rechenzeit-Reduktionen durch Weiterentwicklungen im Bereich typischer Flaschenhalse auf der Hardware-Seite, wie z.B. der Kommunikation zwischen den Prozessorkernen eines Mehrkern-Rechners oder Clusters, sind es häufig prinzipielle Einschränkungen des Algorithmus, der einer guten Skalierung entgegen steht.

Wenn t_1 die Rechenzeit ist, die zur Lösung der Aufgabe auf einem Prozessor-Kern benötigt wird und t_n die Rechenzeit derselben Aufgabe auf n Prozessor-Kernen, kann man einen Skalierungsfaktor f definieren als

$$f = \frac{t_1}{n \cdot t_n}. \quad (8.18)$$

Bei einem Skalierungsfaktor von $f = 1$ verkürzt sich also die Rechenzeit mit n Kernen im Vergleich zu einer Rechnung auf einem Kern n um den Faktor $1/n$. Da jedoch die Kommunikation der Prozessoren untereinander aktuell noch deutlich langsamer ist, als der Datenaustausch zwischen Arbeitsspeicher und Prozessorkern, sinkt die Skalierung üblicherweise mit steigender Prozessorkern-Anzahl. Im Extremfall führt die Verwendung von zusätzlichen Prozessoren zu keiner weiteren Verkürzung der Rechenzeit bzw. sogar zu einer Verlängerung. Um noch in dem Bereich zu bleiben, in dem das Verhältnis von eingesetzten Rechen-Ressourcen zur Rechenzeit-Verkürzung noch sinnvoll ist, gibt es abhängig von der Problemgröße eine mehr oder weniger genau festlegbare sinnvolle Maximal-Anzahl von Prozessorkernen, auf die die Aufgabe verteilt werden sollte. Auch mit beliebigen Ressourcen könnte man eine Simulations-Aufgabe also nicht in beliebig kleiner Zeit lösen.

Vereinfacht gesagt, entscheidet also letztendlich die prinzipielle Parallelisierbarkeit des Algorithmus, welche Skalierungen erreicht werden können.

Wenn bei der Beurteilung der einzelnen Rechenschritte innerhalb einer Iteration von einer idealen Skalierung bis zu einer Anzahl an Prozessen z.B. gleich der Anzahl der Stromlinien die Rede ist, ist damit gemeint, dass dieser Rechenschritt so vorbereitet und aufgeteilt werden kann, dass für die Durchführung entlang einer Stromlinie keine Kommunikation erforderlich ist. Das heißt, es werden für die Berechnung keine Werte aus der aktuellen Iteration benötigt, sondern nur „alte“ Werte aus der vorherigen Iteration, die in einem separaten Schritt vorher ausgetauscht werden können.

Bei der folgenden Bewertung der einzelnen Rechenschritte innerhalb einer Iteration werden folgende Begriffe verwendet:

- *Ideale Skalierung auf Stützpunktebene*

Damit ist gemeint, dass für eine Operation, die für jeden Stromlinien-Stützpunkt durchgeführt wird, keine Informationen aus der aktuellen Iteration von anderen Objekten (z.B. anderen Stützpunkten oder Stromlinien) benötigt wird, sondern ausschließlich „alte“ Werte aus der vorherigen Iteration, die in einem separaten Schritt vorab ausgetauscht werden können. Dieser Rechenschritt kann also auf so viele Prozesse verteilt werden, wie es Stromlinien-Stützpunkte gibt, ohne dass die Berechnung für einen Stützpunkt auf

ein Ergebnis eines anderen Stützpunktes warten muss. Es muss also keine Reihenfolge eingehalten werden und es ist keine Kommunikation zwischen den Prozessen für diesen Rechenschritt erforderlich.

- *Ideale Skalierung auf Stromlinienebene*

Für diesen Rechenschritt werden Informationen anderer Stromlinien-Stützpunkte derselben Stromlinie gebraucht. Die Berechnung muss also in einer bestimmten Reihenfolge für die Stützpunkte einer Stromlinie durchgeführt werden, weil z.B. ein Raumschritt-Verfahren verwendet wird. Es werden in derselben Iteration jedoch keine Informationen von Nachbarstromlinien oder Stützpunkten benötigt. Bis zu einer Maximalanzahl von Prozessen gleich der Anzahl von Stromlinien ist keine Kommunikation zwischen den Prozessen für diesen Rechenschritt erforderlich, die den Skalierungsfaktor unter den Idealwert von eins reduzieren würde.

8.3.1 Aktualisierung des statischen Drucks

Für die Aktualisierung des Drucks in einem Stromlinien-Stützpunkt (eine detaillierte Beschreibung ist in Kapitel 4.2 nachzulesen) müssen zunächst die radialen Gradienten der Lösungsvariablen (statischer Druck, Totaldruck, Totaltemperatur) berechnet werden. Dieser Schritt erfordert vorher einmalig den Austausch von Informationen über die Lage der Punkte auf den jeweiligen Nachbar-Stromlinien und die Werte für Totaldruck und -temperatur. Die Berechnung der Gradienten skaliert ideal auf Stützpunktebene.

Anschließend ist für die Massenstromberechnung, außer den gerade berechneten Gradienten und der Lage der Nachbarpunkte, der gerade aktualisierte Wert des statischen Drucks im stromabwärts gelegenen Stützpunkt erforderlich. Das ist die einzige Information aus der aktuellen Iteration. Dieser Schritt skaliert daher nur ideal bis auf Stromlinienebene.

8.3.2 Aktualisierung des Totaldrucks und der Totaltemperatur

Die auf jeden Stützpunkt einer Stromlinie angewendete Korrektur des Totalzustandes zur Einhaltung der Einström-Randbedingung, die in Kapitel 4.3 beschrieben ist, erfordert eine Limitierung derselben, abhängig von den entlang dieser Stromlinie vorliegenden Totaldrücken und -temperaturen. Dadurch wird verhindert, dass z.B. Änderungen im Totaldruck angewendet werden, die zu Werten kleiner als dem statischen Druck führen würden. Da der minimal erlaubte Wert jedoch für alle Stützpunkte gleichzeitig berechnet werden kann, ohne das dafür Informationen von Nachbarpunkten erforderlich sind, skaliert dieser Schritt ideal bis auf Stützpunktebene.

Die Anwendung der limitierten Korrekturen hingegen kann in allen Stützpunkten gleichzeitig erfolgen und skaliert ebenfalls ideal bis auf Stützpunktebene.

8.3.3 Aktualisierung der Stromlinienform

Die Reihenfolge, in der die Lage der Stützpunkte aller Stromlinien angepasst wird, entspricht ihrem Abstand zu einer Wand, die einer kinematischen Randbedingung entspricht. Zuerst können also alle Stromlinien angepasst werden, die auf einer Seite eine Wand als direkten Nachbarn

haben. In einem zweiten Durchlauf dann Alle, die die im ersten Durchlauf angepassten Stromlinien als direkte Nachbarn haben, da deren Verschiebung mit berücksichtigt wird. Die Anpassung erfolgt also Schicht für Schicht von den wandnahen zu wandfernen Stromlinien. Diese Reihenfolge wird über die gesamte Simulationsdauer mehrmals aktualisiert. Falls zwei benachbarte, wandnahe Stromlinien „verdrillt“ sind, wird die Reihenfolge in jeder Iteration getauscht.

Dieser Schritt limitiert die Maximalanzahl an Prozessen, bis zu der parallelisiert werden kann, ohne dass Informationen während eines Rechenschritts ausgetauscht werden müssen.

Da jedoch üblicherweise die Stromliniendichte in Wandnähe am größten ist (wie auch bei einem Finite-Volumen Netz die meisten Zellen in Wandnähe liegen), stehen in den meisten Fällen genügend wandnahe Stromlinien zur Verfügung, um die vorhandenen Prozessorkerne auszunützen. Ein konkretes Limit hängt hier aber vom jeweiligen Fall ab und kann daher nicht allgemein angegeben werden.

8.3.4 Zusammenfassung und Bewertung

Grundsätzlich hat das Stromlinien-Verfahren gute Parallelisierungseigenschaften, bedingt durch die stärkere Entkopplung der Transportmechanismen in und quer zur Strömungsrichtung. Abgesehen von der Anpassung der Stromlinienform kann das Verfahren theoretisch ideal skalieren bis zu einer Anzahl von Prozessen gleich der Anzahl von Stromlinien. Je größer der Anteil der wandnahen Stützpunkte im Vergleich zur Gesamtanzahl ist, desto besser skaliert auch die Stromlinienform-Anpassung. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist recht hoch, da üblicherweise in Wandnähe deutlich feiner diskretisiert werden muss, als fern eines Körpers.

9 Abgrenzung gegenüber ähnlichen Verfahren bzw. Verfahren mit ähnlichem Anwendungsbereich

DAS WICHTIGSTE IN KÜRZE

- Existierende Stromlinien-Verfahren basieren häufig auf einer Potentialgleichung. Derartige Verfahren sind zwar sehr effizient, haben aber auch gravierende Einschränkungen bezüglich des Anwendungsbereichs. Die Wichtigsten sind, dass sie streng genommen nur für isentrope Strömungen anwendbar sind, die keine Rezirkulationen oder Ablösungen aufweisen, reibungsfrei sein müssen und keine Verdichtungsstöße im Rechengebiet auftreten dürfen.
- Speziell für isentrope reine Überschallströmungen ist das sehr effiziente Charakteristiken-Verfahren anwendbar. Dessen Vorgehensweise lässt sich sehr gut mit dem Stromlinien-Verfahren kombinieren.
- Navier-Stokes Verfahren sind sehr vielseitig anwendbar und zusätzliche Modellierungen sehr einfach über Quellterme und Linearisierungen für die Erhaltungsgleichungen zu integrieren. Ein Nachteil ist, dass das Rechengebiet diskretisiert werden muss und die Qualität der numerischen Lösung stark von der Güte der Diskretisierung abhängt. Da die Formulierung der Erhaltungsgleichungen nicht die Möglichkeiten zur Entkoppelung der Transportmechanismen in und quer zur Strömungsrichtung ausnützt, ist im Vergleich zum Stromlinien-Verfahren mehr Datenaustausch erforderlich, was sich nachteilig auf die Parallelisierbarkeit auswirkt.
- Speziell für die Berechnung in Turbomaschinen gibt es weit entwickelte Methoden, die auch auf einer Potential-Gleichung beruhen. Durch zusätzliche semiempirische Modelle können diese jedoch erfolgreich auf spezielle Aufgabenstellungen angewendet werden.

9.1 Potentialströmungs-Verfahren

Die zugrunde liegende mathematische Formulierung unterscheidet sich wesentlich für die Behandlung von inkompressiblen und kompressiblen Strömungen.

9.1.1 Inkompressible Strömungen

Für stationäre, quell- und drehungsfreie Strömungen kann das Geschwindigkeitsfeld als das Gradientenfeld eines Potentials dargestellt werden. Für inkompressible Strömungen erhält man die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0. \quad (9.1)$$

Diese Gleichung ist linear, Lösungen können superponiert, also addiert werden. Die Summe ist dann wieder eine Lösung der Laplace-Gleichung.

Definiert man eine Stromfunktion Ψ , deren Linien konstanter Funktionswerte die Stromlinien darstellen und für die (im Fall von zweidimensionalen Strömungen) gilt

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad (9.2)$$

$$v = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad (9.3)$$

so erhält man die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad (9.4)$$

$$v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \quad (9.5)$$

Die Linien konstanter Werte der Stromfunktion stehen immer senkrecht zu denen konstanten Potentials.

Der Vorteil der Laplace-Gleichung ist es, dass für die Lösung eines Geschwindigkeitsfeldes nur eine einzige Gleichung gelöst werden muss. Da sie nur für isentrope (konstante Enthalpie) und homentrope (konstante Entropie) Strömungen gilt kann der statische Druck in jedem Punkt über die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (9.6)$$

bestimmt werden, da die Konstante auf der rechten Seite der Gleichung im gesamten Strömungsfeld gleich ist, also auch z.B. über die vorgegebenen Einström-Randbedingungen berechnet werden kann.

Zusammenfassend gelten folgende Einschränkungen für Verfahren, die auf dieser Formulierung basieren:

- stationär,
- inkompressibel,
- drehungs- und deswegen auch reibungsfrei,
- homenstrop,
- homenthalp; aus den letzten beiden folgt, dass im Überschall nur sehr schwache Verdichtungs-Stöße auftreten dürfen,
- das Fluid ist ein ideales Gas,
- es liegen keine größeren Ablösungen vor,

- die Störungen müssen klein gegenüber der Anströmung sein, der umströmte Körper muss also schlank sein,
- es muss entweder eine reine Unter- oder eine reine Überschallströmungen vorliegen,
- der transsonische Bereich zwischen $0,8 \leq Ma \leq 1,2$ ist ausgeschlossen.
- der hypersonische Bereich für $Ma \geq 5,0$ ist ausgeschlossen.

Singularitäten-Verfahren

Eine Singularität in dem hier verwendeten Sinn bedeutet ein Punkt, in dem die Potentialgleichung nicht gilt. Überall außer in diesen Punkten ist sie jedoch erfüllt. Um drehungsbehaftete Strömungen oder Strömungen um Körper mit endlicher Dicke mit einem Potential-Ansatz berechnen zu können, werden folgende Singularitäten eingesetzt.

- Quelle / Monopol

Eine Quelle ist eine Singularität, die die Bedingung $\text{div} \mathbf{v} = 0$ der Potentialströmung verletzt. Sie kann eine positive oder negative Quellstärke haben. Letztere ist somit eine Senke. Ohne eine überlagerte Anströmung hat eine Quelle oder Senke radiale Stromlinien, die aus bzw. in die Singularität laufen.

- Wirbel

Im Zentrum eines Wirbels ist $\text{rot} \mathbf{v} \neq 0$. Die Stromlinien eines Wirbels sind konzentrische Kreise.

- Dipol

Ein Dipol ist eine Kombination einer Quelle und einer Senke direkt nebeneinander. Er führt zu flächensymmetrischen kreisförmigen Stromlinien, die alle durch die Singularität verlaufen und die Dipolachse als gemeinsame Tangente haben.

- Quadrupol

Ein Quadrupol ist eine Kombination aus zwei antiparallel liegenden Dipolen. In der Aeroakustik wird mit ihm z.B. die Schallabstrahlung eines Freistrahls modelliert.

Singularitäten-Verfahren arbeiten mit der Überlagerung von Singularitäten und eventuell einer ungestörten parallelen Anströmung. Das Ergebnis ist wieder eine Potentialströmung, abgesehen von den Punkten, in denen die Singularitäten liegen.

Der überwiegende Teil der auf dieser Basis entwickelten Verfahren dienen ausschließlich der Berechnung von Profilmströmungen im Unter- und Überschall. In diese Gruppe gehören z.B. rein zweidimensionale Verfahren wie die *Skelett-* oder *Profil-Theorie*. Ebenso das *einfache* oder *erweiterte Traglinien-Verfahren*, das *Tragflächen-Verfahren* sowie das *Wirbelleiter-Verfahren*, welche mit in dieser Reihenfolge steigender Modellierungs-Genauigkeit für die Berechnung der Eigenschaften dreidimensionaler Flügel (-Kombinationen) teilweise sogar heute noch im Flugzeug-Vorentwurf Anwendung findet.

Da in dieser Arbeit nur Verfahren mit einem ähnlich allgemeinem Anwendungsbereich wie der des Stromlinien-Verfahrens verglichen werden sollen, wird diese Klasse von Methoden hier nicht detailliert beschrieben.

9.1.2 Kompressible Strömungen

Vollständige und linearisierte Potentialgleichung

Um kompressible Strömungen behandeln zu können, muss eine vollständige Potentialgleichung gelöst werden, die z.B. nach [58, S. 237] folgendermaßen lautet:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\
 & - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{2vw}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{2wu}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \\
 & - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{2u}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - \frac{2v}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} - \frac{2w}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

mit der Schallgeschwindigkeit a . Es handelt sich dabei um eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die vollständige Potential-Gleichung 9.7 kann auf Strömungen angewendet werden, die folgende Voraussetzungen erfüllen:

- drehungs- und deswegen auch reibungsfrei,
- homentrop,
- homenthalp; aus den letzten beiden folgt, dass im Überschall nur sehr schwache Verdichtungs-Stöße auftreten dürfen, was die Anwendbarkeit in der Praxis auf Machzahlen vom maximal etwa 1,3 beschränkt,
- das Fluid ist ein ideales Gas,
- es liegen keine Ablösungen vor,
- es muss entweder eine reine Unter- oder eine reine Überschallströmungen vorliegen,
- der transsonische Bereich zwischen $0,8 \leq Ma \leq 1,2$ ist ausgeschlossen.
- der hypersonische Bereich für $Ma \geq 5,0$ ist ausgeschlossen.

Sie lässt sich unter den folgenden zusätzlichen Voraussetzungen weiter vereinfachen

- die Strömung ist stationär,
- die Störungen müssen klein gegenüber der Anströmung sein, der umströmte Körper muss also schlank sein.

Für Unterschall-Strömungen lautet die linearisierte Potentialgleichung dann

$$(1 - Ma^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{9.8}$$

und für Überschall-Strömungen

$$(Ma^2 - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{9.9}$$

Kompressibilitäts-Korrekturen

Da die linearisierte Potentialgleichung (Gl. 9.8 und 9.9) zur Berechnung von kompressiblen Strömungen mathematisch vom gleichen Typ ist wie die Laplace-Gleichung (Gl. 9.1), die für inkompressible Strömungen gilt, ist es durch eine affine Transformation der Körpergeometrie für eine bestimmte Machzahl möglich, beide ineinander zu überführen. Diese Korrekturen erweitern den Anwendungsbereich der Singularitäten-Verfahren auf kompressible Strömungen.

Göthert-Regel

Unterschall:

Wird der Körper z.B. in x-Richtung angeströmt, muss die Körpergeometrie in y- und z-Richtung mit dem Faktor

$$\beta = \sqrt{1 - Ma^2} \quad (9.10)$$

skaliert werden. Anschließend wird die inkompressible Vergleichs-Strömung um diese Geometrie berechnet. Die kompressible Lösung um die Original-Geometrie entspricht dann der rücktransformierten Lösung.

Überschall:

Im Überschall ist der Faktor β definiert als

$$\beta = \sqrt{Ma^2 - 1}. \quad (9.11)$$

Für Überschall-Strömungen ist es erforderlich, eine Überschall-Vergleichsrechnung durchzuführen. Da die linearisierte Potential-Gleichung im Überschall hyperbolischer Natur ist und die Laplace-Gleichung elliptischen Typs, können beide nicht über eine lineare Transformation ineinander überführt werden.

Es wird daher eine Überschall-Rechnung für $Ma = \sqrt{2}$ durchgeführt. Für diese Machzahl ist der Skalierungsfaktor nach Gl. 9.10 gleich eins. Für diese unveränderte Geometrie wird dann die kompressible Vergleichs-Rechnung durchgeführt. Um die Werte einer kompressiblen Strömung für eine andere Anström-Machzahl zu bekommen, müssen die Ergebnisse der Vergleichsrechnung mit dem Faktor $1/\beta^2$ skaliert werden.

Prandtl-Glauert-Regeln

Die Prandtl-Glauert-Regeln kombinieren die Göthert-Regel mit weiteren Vereinfachungen für inkompressible Strömungen. Dabei ist zu beachten, dass die kinematische Randbedingung (Strömung verläuft parallel zur Körperoberfläche) für die inkompressible Vergleichs-Strömung nicht eingehalten ist. Es wird also eine Strömung um eine leicht andere Geometrie berechnet.

1. Prandtl-Glauert-Regel

Bleibt die Körpergeometrie unverändert, müssen Druck, Auftrieb und Moment mit dem Faktor $1/\beta$ skaliert werden, um den Einfluss der Kompressibilität zu berücksichtigen.

2. Prandtl-Glauert-Regel

Sollen Druck-, Auftriebs- und Momentenbeiwert für die kompressible und inkompressible Strömung gleich sein, müssen sich die Geometrien um den Faktor β unterscheiden.

Panel-Verfahren

Das Panel-Verfahren ist für dreidimensionale Strömungen um beliebig geformte Körper geeignet, für die die entsprechenden Einschränkungen der zugrunde liegenden vollständigen Potential-Gleichung 9.7 gelten.

Bedingt durch die Komplexität des Verfahrens wird an dieser Stelle auf die Erläuterung der Herleitung verzichtet und auf die Referenzen [53] oder [59] verwiesen. Eine qualitative Beschreibung der Vorgehensweise reicht jedoch aus, um die Vor- und Nachteile dieser Methode im Vergleich zum Stromlinien-Verfahren beurteilen zu können.

Die Lösungs-Prozedur eines Panel-Verfahrens folgt prinzipiell den folgenden Schritten (angelehnt an [58]):

- Diskretisierung

Die Oberfläche eines dreidimensionalen Körpers wird üblicherweise durch viereckige und/oder dreieckige Panels diskretisiert. Dabei gilt wie bei jeder räumlichen Diskretisierung, dass die Größe der Panels an die Krümmung der Oberfläche angepasst werden sollte. Limitiert ist die Anzahl der Panels nur durch die Leistungsfähigkeit des verwendeten Computers. Die Bilder 9.1 und 9.2 zeigen Beispiele für diskretisierte Körper-Geometrien.

- Singularitäten-Verteilung

Anschließend wird die Art der Singularität(-en) festgelegt, die auf jedem Panel angewendet werden. Ausschlaggebend hierfür ist die Aufgabenstellung. Mit einer reinen Quellverteilung kann im Unterschall nur ein Verdrängungsproblem berechnet werden. Soll ein Auftriebsproblem gelöst werden, sind Dipol- oder Wirbel-Singularitäten bzw. eine Kombination beider erforderlich. Auch wenn Ansatzfunktionen höherer Ordnung für die Singularitäten-Verteilung auf den Panels verwendet werden können, so wird die Stärke der Singularität üblicherweise konstant angesetzt und falls erforderlich, eher die Oberfläche feiner diskretisiert.

- Kontrollpunkte

Auf jedem Panel muss mindestens ein Kontrollpunkt festgelegt werden. In den üblicherweise im Flächenschwerpunkt liegenden Kontrollpunkten wird die kinematische Randbedingung erfüllt, d.h. dort ist die Strömung parallel zur Panel-Oberfläche.

- Einfluss-Koeffizienten

Da die Potential-Gleichung elliptischen Typs ist, beeinflusst jeder Punkt eines Strömungsfeldes jeden anderen. Dieser Einfluss der Singularitäten untereinander wird durch einen rein geometrieabhängigen Einfluss-Koeffizienten beschrieben, der einmalig vor Beginn der Rechnung ermittelt werden muss.

- Lineares Gleichungssystem

Die Einfluss-Koeffizienten bilden die Koeffizienten-Matrix die zusammen mit den Randbedingungen auf der rechten Seite das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Quell-, Dipol- und/oder Wirbelstärken bilden. Dabei handelt es sich um eine vollbesetzte und üblicherweise nichtsymmetrische Matrix, die mit direkten oder iterativen Verfahren gelöst werden kann.

- Auswertung

Bei der häufig verwendeten Geschwindigkeits-Formulierung kann nun an jedem Punkt des Rechengebiets der Geschwindigkeits-Vektor ermittelt werden. Die Bernoulli-Gleichung liefert den statischen Druck in diesem Punkt. Da entsprechend der Voraussetzungen des

Verfahrens sowohl Entropie, als auch Enthalpie im gesamten Rechengebiet konstant sind, können anschließend alle weiteren thermodynamischen Größen abgeleitet werden.

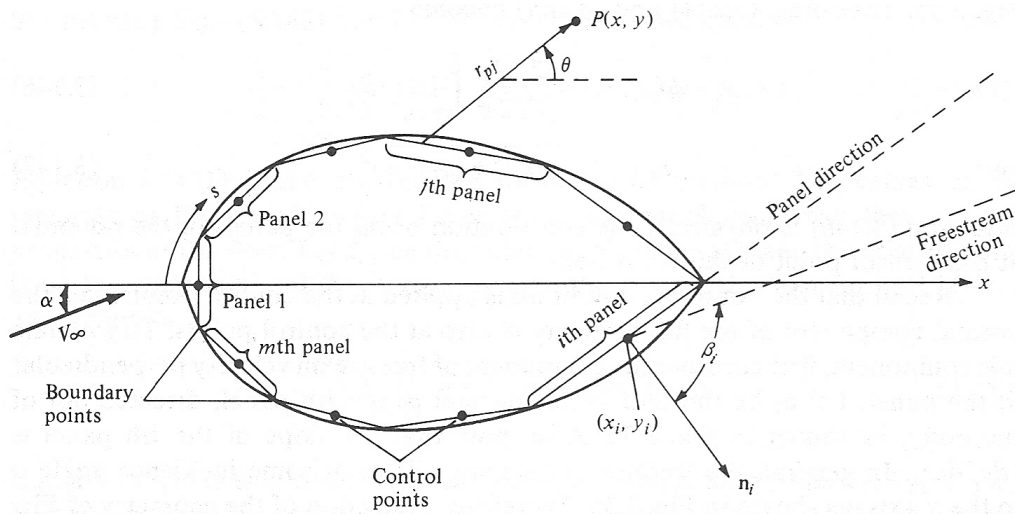


Abbildung 9.1: Verteilung von Quell-Panelen auf einem beliebig geformten Körper (aus [53, S. 221]).

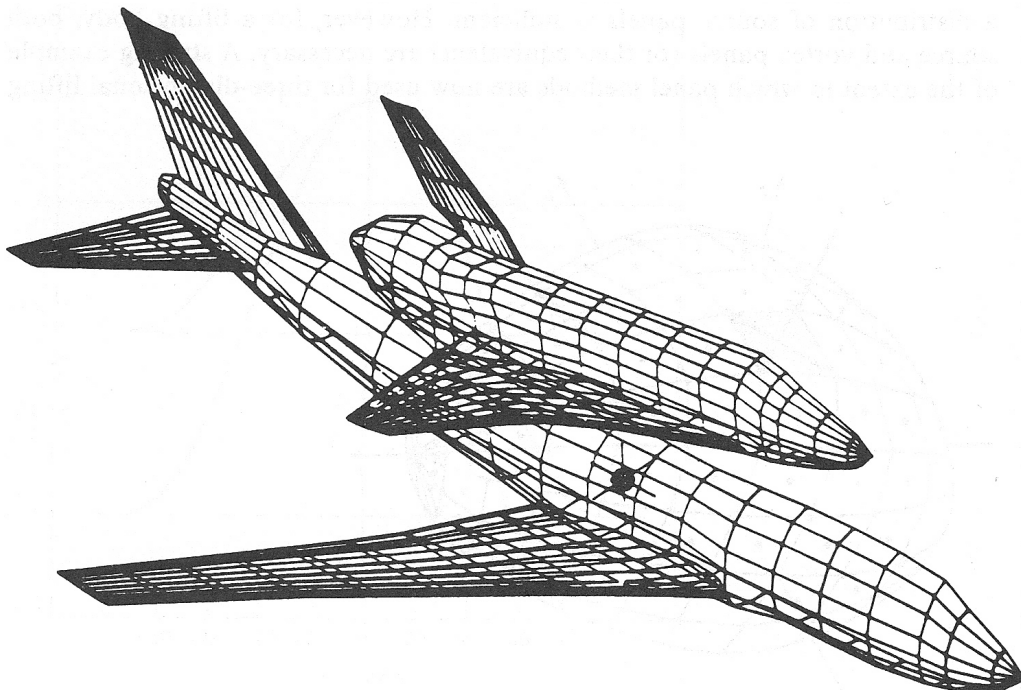


Abbildung 9.2: Panel-Verteilung auf einer Boeing 747 mit dem Space-Shuttle Orbiter huckepack (aus [53, S. 386]).

Vergleich der Panel-Methode mit dem Stromlinien-Verfahren:

Keine, der für die vollständige Potential-Gleichung 9.7 genannten Einschränkungen, gelten für das Stromlinien-Verfahren (einzige Ausnahme: in der aktuellen Version können ebenfalls nur Strömungen idealer Gase berechnet werden, was jedoch keine grundsätzliche Einschränkung ist, sondern nur eine noch nicht implementierte, grundsätzlich aber mögliche Funktionalität). Des Weiteren ist die Problemgröße beim Panel-Verfahren u.U. durch die Größe des Arbeitsspeichers begrenzt, da das linearisierte Gleichungssystem zur Lösung vollständig im Arbeitsspeicher verfügbar sein sollte (temporäres Auslagern auf die Festplatte ist zwar möglich, würde aber die Rechenzeit vervielfachen). Beim Stromlinien-Verfahren werden die Stromlinien sequenziell behandelt. Es reicht also, wenn jeweils eine in den Arbeitsspeicher passt.

9.2 Charakteristiken-Verfahren

Diese Methode erlaubt die vereinfachte Berechnung stationärer, reibungsfreier und isentroper also stoßfreier Überschall-Strömungen.

Hintergrund dieses Ansatzes ist die Vereinfachung der exakten Euler-Gleichungen für stationäre, reibungsfreie und isentrope Strömungen entlang der Charakteristiken. Ist eine Strömung drehungsfrei, gibt es zwei Charakteristiken in jedem Punkt. Im Fall einer zweidimensionalen Strömung sind das die nach links und rechts verlaufenden Machlinien, in 3D die entsprechenden kegelförmigen Flächen. Ist die Strömung drehungsbehaftet, kommt die Stromlinie als dritte Charakteristik hinzu. Die partielle Differentialgleichung lässt sich entlang der Charakteristiken zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung vereinfachen (eine detaillierte Herleitung ist z.B. in [54, S. 581 ff] zu finden). Für den Spezialfall einer drehungsfreien zweidimensionalen Strömung lässt sich diese sogar weiter zu einer rein algebraischen Gleichung vereinfachen. Die Zustandsgrößen eines Überschallgebiets lassen sich, ausgehend von stromaufwärts liegenden bekannten Datenpunkten, in den Schnittpunkten links- und rechts-laufender Charakteristiken vergleichsweise einfach berechnen. Da die Zahl der Charakteristiken unbegrenzt ist, lässt sich jede gewünschte Diskretisierungs-Genauigkeit erreichen.

Die Ausgangsbasis einer Rechnung ist eine Linie bzw. Fläche, die komplett in der Überschallströmung liegt, z.B. hinter einem schiefen Verdichtungsstoß oder hinter der kritischen Linie, die das Unterschallgebiet hinter einem abgehobenen gekrümmten Stoß begrenzt. Diese Linie darf selbst keine Charakteristik sein. Auf dieser Linie müssen alle Zustandsgrößen bekannt sein. Das bedeutet, dass die Lösung dort zunächst auf anderem Weg ermittelt werden muss. Für achsen- oder flächensymmetrische Strömungen hinter einem schwachen Stoß gibt es exakte Lösungsmethoden. Anders sieht es hinter einem abgehobenen starken Verdichtungsstoß aus. Für das Unterschallgebiet zwischen Stoß und Staupunkt sowie seitlich bis zur kritischen Linie, die das Unterschallgebiet begrenzt (siehe hierzu Bild 8.5), gibt es keine vereinfachten Verfahren.

Dies ist eine ziemlich starke Einschränkung dieses Verfahrens, da sie eine sehr wichtige Aufgabenstellung betrifft - die Strömung um einen stumpfen Körper im Über- oder Hyperschall. Der Grund dafür soll in einem Einschub kurz erläutert werden.

Betrachtet man einen Wiedereintritts-Flugkörper, hat dieser in großer Höhe eine hohe Geschwindigkeit und nach der Landung die Geschwindigkeit null. Auf dem Weg durch die Luft-hülle muss also die gesamte kinetische Energie in Wärme umgewandelt werden, die zum Teil an die Luft abgegeben wird und zum Teil den Körper erwärmt. Ist das Fluggerät spitz, entstehen schwache anliegende Stöße, über die die Temperatur des Gases nur wenig ansteigt. Dementsprechend muss also mehr Wärme an das Fluggerät abgegeben werden. Über einen abgehobenen

gekrümmten, also starken Stoß hinweg wird die Luft deutlich stärker erhitzt. So kann mehr Wärme an die Luft abgegeben werden und vom Fluggerät muss weniger aufgenommen werden. Tatsächlich ist nach [54, S. 256] der Wandwärmestrom im Staupunktbereich umgekehrt proportional zur Wurzel des Nasenradius, also

$$q_w \propto \frac{1}{\sqrt{R}}. \quad (9.12)$$

Vergleich der Charakteristiken-Methode mit dem Stromlinien-Verfahren:

Da das Charakteristiken-Verfahren einerseits beschränkt ist auf reine Überschall-Strömungen, andererseits jedoch nur stoßfreie Strömungen behandeln kann, wird es in der Praxis nahezu ausschließlich für isentrope Düsenströmungen verwendet. Dafür ist es wiederum ein ziemlicher Nachteil, dass keine Reibungseffekte berücksichtigt werden können. Diese Einschränkungen gelten nicht für das Stromlinien-Verfahren.

Düsenströmungen können auch mit dem Stromlinien-Verfahren berechnet werden, wie der Validierungsfall in Kapitel 7.2.2 zeigt.

Abgesehen davon ist das Charakteristiken-Verfahren jedoch in Bezug auf Rechenaufwand, Speicherbedarf und Effizienz prinzipiell mit dem Stromlinien-Verfahren vergleichbar.

9.3 Navier-Stokes Verfahren

Für eine kurze Beschreibung dieses Ansatzes wird auf Kapitel 7.1 verwiesen. Im Fokus des Vergleichs stehen Finite-Volumen Verfahren, grundsätzlich gelten alle folgenden Aussagen auch für Finite-Differenzen- und Finite-Elemente Diskretisierungen.

Vergleich von Navier-Stokes Verfahren mit dem Stromlinien-Verfahren:

Hierzu werden drei Punkte herausgegriffen:

- Räumliche Diskretisierung

Die Netzerzeugung ist heutzutage vergleichsweise einfach geworden, da aktuelle kommerzielle CFD-Programme üblicherweise auch mit unstrukturierten Netzen arbeiten können, deren Erstellung stark automatisiert werden kann. Ein wirklich gutes Netz für eine komplexe Simulation zu erstellen erfordert jedoch immer noch viel Erfahrung, da auch die Strömungstopologie mit berücksichtigt werden muss. D.h., man weiß erst nach der Rechnung sicher, ob das Netz gut ist bzw. wie es eigentlich idealerweise hätte aussehen sollen. Zwar lässt sich auch eine Adaption abhängig von Strömungsgrößen automatisieren, das ist aber noch nicht unbedingt allgemeiner Stand der Technik. Außer dem rein geometrischen Problem der Zellgrößen-Anpassung (es müssen weiterhin wichtige Qualitätskriterien eingehalten werden wie z.B. das Verhältnis der Volumina benachbarter Zellen oder das Seitenverhältnis) kommt noch hinzu, dass es nicht in jedem Fall trivial ist, die Lösungsvariablen so auf die neue Diskretisierung zu interpolieren, dass die Diskretisierungsänderung keinen negative Einfluss auf die Erhaltung wichtiger Größen bei transienten Simulationen hat.

In diesem Punkt hat das Stromlinien-Verfahren einen großen Vorteil, da kein Rechenetz benötigt wird. Die Algorithmen für die automatisierte Anpassung des Stützpunkt-Abstands sind sehr einfach. Wird beispielsweise ein Grenzwert für die Krümmung oder

einen Gradienten überschritten wird ein Stützpunkt eingefügt oder umgekehrt entfernt. Das Einfügen oder Entnehmen eines Stützpunktes hat keinerlei Einfluss auf die Diskretisierung der benachbarten Stromlinien. Ebenso können neue Stromlinien eingefügt werden, wo die lokale Diskretisierungsgenauigkeit zu gering ist. Die Anpassung der Stromlinien-Dichte und des Stützpunkt-Abstands sind in Kapitel 3.2.5 detailliert beschrieben.

- **Parallelisierbarkeit**

Ein grundsätzlicher Nachteil eines Finite-Volumen-Verfahrens ist es, dass innerhalb einer äußeren Iteration mehrere innere Iterationen zur Lösung des linearen Gleichungssystems erforderlich sind. Das hat zur Folge, dass auch innerhalb einer Iteration mehrmals Werte zwischen Prozessorkernen ausgetauscht werden müssen. Der hohe Anteil der Kommunikation stellt zumindest bei der heutzutage üblichen Architektur von Hochleistungs-Rechnern ein prinzipiellen Nachteil in Bezug auf die Parallelisierbarkeit dieser Methode dar.

Wie in Kapitel 8.3 erläutert, weist das Stromlinien-Verfahren günstige Eigenschaften bezüglich der Parallelisierung auf, da Transportmechanismen in und quer zur Strömungsrichtung entkoppelt behandelt werden können, was den Umfang der Kommunikation innerhalb einer Iteration reduziert. Ist die Skalierbarkeit der Stromlinienform-Anpassung nicht der limitierende Faktor, kann das Stromlinien-Verfahren zumindest theoretisch eine Skalierung nahe eins bis zu einer Anzahl an Prozessorkernen gleich der Stromlinien-Anzahl erreichen.

- **Vielfalt der Modellierung**

Hier ist der Finite-Volumen-Ansatz im Vorteil, da sich zusätzliche Modelle meist sehr einfach über Quellterme und entsprechende Linearisierungen zu den Erhaltungsgleichungen hinzufügen lassen. Diese Flexibilität hat zu einer großen Vielfalt an physikalischen Prozessen geführt, die mit diesem Verfahren abgebildet werden können.

Es ist zwar schwer bei dem aktuellen Entwicklungsstand des Stromlinien-Verfahrens in diesem Punkt eine endgültige Aussage zu treffen, die Struktur scheint jedoch im Vergleich nicht ganz so flexibel bezüglich Erweiterungen zu sein.

9.4 Stromlinien-Krümmungsverfahren für Turbomaschinen

In Referenz [23] ist erstmals ein Stromlinien-Krümmungsverfahren beschrieben, das für die Auslegung und Nachrechnung von axialen Verdichtern und Turbinen geeignet ist. Der Kern dieses Ansatzes ist die Berechnung der Strömung mit Hilfe von Stromlinien auf zwei Gruppen zweidimensionaler Flächen. Die eine Gruppe ist zylindrisch, verläuft parallel zur Rotationsachse und schneidet die Schaufeln in etwa senkrecht, die andere ist eben und enthält die Rotationsachse. Diese Vorgehensweise ersetzt für bestimmte wichtige Aufgabenstellungen, insbesondere der (Vor-) Entwurfsphase von Turbomaschinen, zumindest teilweise eine dreidimensionale Rechnung mit einem Navier-Stokes-Verfahren. Es basiert auf den Erhaltungsgleichungen für stationäre, achsensymmetrische, adiabate und reibungsfreie Strömungen, also einer problemangepassten Form der Euler-Gleichungen.

Im Fall einer *Auslegungsrechnung* werden wichtige geometrische Eigenschaften der Schaufeln in Abhängigkeit vorgegebener Größen wie der spezifischen Umfangsarbeit (in Form der Totalenthalpieänderung je Verdichter- oder Turbinenstufe) ermittelt. Eine *Kennfeldrechnung* dient der

Berechnung der spezifischen Umfangsarbeit und des Geschwindigkeitsfeldes für eine gegebene Geometrie.

In [60] sind einige Erweiterungen des seit den 60er Jahren intensiv benutzten Verfahrens aufgezählt, um es für die Simulation von Betriebszuständen im Teillastbereich anzuwenden, die vom Auslegungspunkt abweichen (off-design analysis). Diese betreffen z.B. die Berücksichtigung der Verdrängungsdicke der Grenzschichten, Profil- und Stoßverluste, Sekundärströmungen, Spaltverluste und Versperrung. Bezüglich der viskositätsbedingten Verluste wird in dem häufig verwendeten Programm von Novack und Hearsey [61] ein ähnlicher Ansatz wie bei dem in dieser Arbeit vorgestellten Stromlinien-Verfahren gewählt, da sie generell in Form von Totaldruckverlusten je Verdichterstufe in die Rechnung mit eingehen. Beim Stromlinien-Krümmungsverfahren für Turbomaschinen werden diese Verluste jedoch über den gesamten Strömungsquerschnitt „verschmiert“ und wirken nicht nur lokal, verursacht durch entsprechende Geschwindigkeitsgradienten in Grenz- oder Scherschichten.

Außerdem ist dieses Verfahren nach [60, S. 10] in Bezug auf Korrekturen der idealen, reibungs- und stoßfreien Strömung ohne Ablösung sehr auf empirische Abschätzungen der Verluste angewiesen.

Vergleich des Stromlinien-Krümmungsverfahrens für Turbomaschinen mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Stromlinien-Verfahren:

Die Formulierung, auf der das Stromlinien-Krümmungsverfahren für Turbomaschinen basiert, reduziert die Anwendbarkeit auf eine ganz bestimmte Aufgabenstellung. Alle über die Behandlung von stationären, achsensymmetrischen, adiabaten und reibungsfreien Strömungen hinausgehenden Modellierungen erfolgen über teils physikalisch herleitbare oder empirische Korrekturen und sind kein inhärenter Bestandteil der Formulierung. Aufgrund des eng umrissenen Einsatzgebiets werden jedoch trotzdem ausreichend gute Ergebnisse erzielt, die eine Verwendung z.B. im Rahmen von Optimierungen oder des Vorentwurfs erlauben.

Das hier vorgestellte Stromlinien-Verfahren ist dagegen wesentlich allgemeiner anwendbar. Die typische Aufgabenstellung des Stromlinien-Krümmungsverfahrens kann auch mit dem Stromlinien-Verfahren gelöst werden (vergleichbare Validierungsfälle sind in den Kapiteln 7.2.1 und 7.2.2 beschrieben). Auch beispielsweise der Einfluss der Viskosität ist physikalisch korrekt modelliert und geht nicht nur über vorgegebene Korrelationen und empirische Modelle in die Strömungsberechnung mit ein. Auch die im Rahmen der Stoß-Expansion-Theorie exakte Behandlung von Verdichtungsstößen ist ein Vorteil gegenüber dem Stromlinien-Krümmungsverfahren.

10 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird ein iteratives Verfahren für stationäre, kompressible, reibungsbehaftete, dreidimensionale, Unter- und Überschallströmungen mit Verdichtungsstößen vorgestellt, das auf der Basis von Stromlinien funktioniert. Prinzipiell wird kein Rechennetz, sondern nur eine diskretisierte Form der Ränder des Rechengebiets benötigt. Die Erhaltungsgleichungen können entlang einer Stromlinie zu einer impliziten, algebraischen Gleichung (Massen-, Impuls- und Energieerhaltung) entlang der Stromlinie und zu einer expliziten, algebraischen Gleichung quer zur Stromlinie (Massen- und Impulserhaltung) vereinfacht werden.

Die Vorgehensweise besteht aus drei Schritten je Iteration: zuerst wird der statische Druck entlang der Stromlinien aktualisiert. Zugrunde liegt die Annahme eines konstanten Massenstroms in einer Stromröhre, die abschnittsweise mit Nachbarstromlinien gebildet wird. Dann werden Totaldruck und -temperatur entlang der Stromlinie so angepasst, dass die Einström-Randbedingung erfüllt ist. Anschließend wird die Stromlinienform so angepasst, dass das Verhältnis der Massenströme zu benachbarten Stromlinien entlang der Stromlinie abschnittsweise konstant bleibt.

Die Implementation wird an fünf Beispielen mit analytischen Lösungen verifiziert. Im Rahmen von vier Validierungsfällen zweidimensionaler Strömungen wird das Verfahren auf schwach und stark kompressible Kanalströmungen, eine kompressible Profil-Außenströmung und eine ebene Plattengrenzschicht angewendet und die Ergebnisse entweder mit analytischen Lösungen verglichen oder mit denen der kommerziellen Navier-Stokes CFD-Software STAR-CCM+ der Firma CD-adapco. Die Übereinstimmung ist durchweg sehr gut. In den meisten Fällen kann eine deutliche Reduktion der Rechenzeit bei ähnlicher Güte der Ergebnisse im Vergleich zu STAR-CCM+ erzielt werden.

Die Algorithmen für Erweiterungen des Verfahrens auf trans-, supersonische und dreidimensionale Strömungen werden detailliert beschrieben. Verdichtungsstöße werden diskret und im Rahmen der Stoß-Expansions-Theorie exakt behandelt. Auch die Vorgehensweise zur Parallelisierung dieser Methode wird vorgestellt. Die separate Behandlung von Transportmechanismen in und quer zur Strömungsrichtung reduziert den Informationsaustausch innerhalb eines Rechenschritts, was einen positiven Effekt auf die Effizienz der Parallelisierung hat. Der Ansatz erlaubt auch eine einfach automatisierbare Anpassung der räumlichen Diskretisierung der Stromlinien.

Abschließend werden ähnliche Verfahren und solche mit vergleichbarem Anwendungsbereich kurz erläutert und die Unterschiede zu der hier vorgestellten Methode hervorgehoben.

Mögliche nächste Schritte zur Weiterentwicklung des Stromlinien-Verfahrens wären:

- Aufgrund der Entwicklungsgeschichte wird in der aktuellen Version immer noch ein kartesisches Hintergrund-Netz zur Festlegung der Stromlinien-Stützpunkte verwendet. Eine sinnvolle Erweiterung wäre es daher, das Verfahren dahingehend zu modifizieren, dass auf dieses Netz ganz verzichtet werden kann. Mit dieser Änderung könnte eine automatisierte Anpassung des Stützpunkt-Abstandes einher gehen. Eine automatische Anpassung der Stromlinien-Dichte ist auch schon in der vorliegenden Version enthalten.

-
- Erweiterung auf dreidimensionale Strömungen, wie in Kapitel 8.2 beschrieben.
 - Implementation des in Kapitel 8.1 erläuterten Algorithmus zur Stoßbehandlung.
 - Die Behandlung von molekularer Viskosität ist bereits Bestandteil der aktuellen Version. Darauf aufbauend könnten einfache Wirbelviskositäts-Turbulenzmodelle implementiert werden.
 - Darüber hinaus könnten z.B. einfache 1D Modelle zur Beschreibung von Nichtgleichgewichts-Effekten hinter starken Verdichtungsstößen im Hyperschall entlang der Stromlinien angewendet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Oertel jr., M. Böhle, and U. Dohrmann. *Strömungsmechanik, 5. Auflage*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [2] H. Schade and E. Kunz. *Strömungslehre*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2007.
- [3] W. Birnbaum. Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie, nach Rechnungen von W. Ackermann. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 3:pp. 209–297, 1923.
- [4] H. Glauert. Eine Theorie für dünne Flügelprofile, 1924.
- [5] H. Glauert. *The Elements of Airfoil and Airscrew Theory*, 1948.
- [6] J. L. Hess and A. M. O. Smith. Calculation of Nonlifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies. *Journal of Ship Research*, 8.2:pp. 22–44, 1964.
- [7] S. R. Ahmed and W. H. Hucho. *The Calculation of the Flow Field Past a Van with the Aid of a Panel Method*. Society of Automotive Engineers, 1977.
- [8] V. Bertram. *Numerische Schiffshydrodynamik in der Praxis*. Technische Universität Hamburg-Harburg, 1994.
- [9] C.-H. Lee. WAMIT Theory Manual. *MIT Report, Dept. of Ocean Eng.*, 95-2, 1995.
- [10] R. von Mises. Bemerkungen zur Hydrodynamik. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 7:125, 1927.
- [11] M. H. Martin. The flow of a viscous fluid. i. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 41:pp. 266–286, 1971.
- [12] M. S. Greywall. Streamwise Computation of Two-Dimensional Incompressible Potential flows. *Journal of Computational Physics*, 59:pp. 224–231, 1985.
- [13] R. M. Barron and R. K. Naeem. Numerical Solution of Transonic Flows on a Streamfunction Co-Ordinate System. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 9:pp. 1183–1193, 1989.
- [14] C.-F. An and R. M. Barron. Numerical Solution of Transonic Full-Potential-Equivalent Equations in von Mises Co-Ordinates. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 15:pp. 925–952, 1992.
- [15] C.-F. An, R. M. Barron, and S. Zhang. Streamfunction Coordinate Formulation for One-Dimensional Unsteady Flow. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 5:pp. 401–414, 1995.
- [16] F. P. Boynton and A. Thomson. Numerical Computation of Steady, Supersonic, Two-Dimensional Gas Flow in Natural Coordinates. *Journal of Computational Physics*, 3:pp. 379–398, 1969.
- [17] A. M. Latypov. Numerical solution of steady Euler equations in streamline-aligned orthogonal coordinates, 1994.

-
- [18] J. D. Stanitz. Design of two-dimensional channels with prescribed velocity distribution along the channel walls. *NACA Report*, 1115, 1953.
- [19] L. Zannetti. A Natural Formulation for the Solution of Two-Dimensional or Axisymmetric Inverse Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:pp. 451–463, 1986.
- [20] P. Hamala, P. Khosla, P. Morgan, and S. Rubin. Streamline Based Grid Adaptation for Euler and Navier-Stokes: Direct and Inverse Design Applications. *Computers & Fluids*, 26, No. 4:pp. 339–357, 1997.
- [21] J.-Y. Yang, Y.-H. Tang, and S.-T. Lee. A high-order streamline Godunov scheme for steady supersonic/hypersonic equilibrium flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159:pp. 261–289, 1998.
- [22] J. H. Giese. Stream Functions for Three Dimensional Flows. *Journal of Mathematical Physics*, 30:pp. 31–35, 1951.
- [23] C. H. Wu. A general theory of three-dimensional flow in subsonic or supersonic turbomachines. *NACA TN 264*, 1952.
- [24] C.-S. Yih. Stream Functions in Three Dimensional Flows. *La Houille Blanche*, 3:pp. 445–450, 1957.
- [25] C.-Y. Huang and G. S. Dulikravich. Stream Function and Stream-Function-Coordinate (SFC) Formulation for Inviscid Flow Field Calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59:pp. 155–177, 1986.
- [26] G. S. Dulikravich. Shape Inverse Design and Optimization for Three-Dimensional Aerodynamics. *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibition*, January 9-12, 1995.
- [27] P.K. Khosla and S. Abdallah. A review of streamline coordinate approach for inviscid flows. *Computers & Fluids*, 35:pp. 670–675, 2006.
- [28] C. E. Pearson. Use of Streamline Coordinates in the Numerical Solution of Compressible Flow Problems. *Journal of Computational Physics*, 42:pp. 257–265, 1981.
- [29] P.K. Khosla and S. Abdallah. Local, Point-Wise Rotational Transformations of the Conservation Equations into Stream-Wise Coordinates. *Computers and Mathematics with Applications*, 43:pp. 501–511, 2002.
- [30] S. G. Chung, S. C.-Y. Lu, and O. Richmond. Explicit streamline method for steady flows of non-Newtonian matter. *Physical Review A*, 39, Number 5, 1989.
- [31] S. V. Patankar and D. B. Spalding. A Calculation Procedure For Heat, Mass and Momentum Transfer in Tree-Dimensional Parabolic Flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, pages pp. 1787–1806, 1972.
- [32] Y. C. Vigneron, J. V. Rakich, and J. C. Tannehill. Calculation of Supersonic Viscous Flow Over Delta Wings. In *Proceedings of the AIAA 11th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, 1978.
- [33] M. D. Kirn, R. R. Thareja, and C. H. Lewis. Three-Dimensional Viscous Flowfield Computations in a Streamline Coordinate System. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 19, 1982.
- [34] S. G. Rubin and J. C. Tannehill. Parabolized/Reduced Navier-Stokes Computational Techniques. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 24:pp. 117–144, 1992.
- [35] L. Wang. On properties of fluid turbulence along streamlines. *Journal of Fluid Mechanics*, 648:pp. 183–203, 2010.

- [36] A. Datta-Gupta and M. J. King. *Streamline Simulation: Theory and Practice*. SPE Textbook Series - Volume 11, Society of Petroleum Engineers, 2007.
- [37] National Advisory Committee for Aeronautics. *Report 1135 - Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow*. Ames Aeronautical Laboratory, Moffett Field, California, 1953.
- [38] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C, Second Edition*. Cambridge University Press, 1992.
- [39] H. Schlichting and K. Gersten. *Grenzschicht-Theorie, 10. Auflage*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [40] L. Howarth. *On the solution of the laminar boundary layer equations*. Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 164, 547-579, London, 1938.
- [41] C. Stemmer. *Grenzschichttheorie*. Lehrstuhl für Aerodynamik, München, 2008.
- [42] M. Perić and J. H. Ferziger. *Numerische Strömungsmechanik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [43] I. Celik. Procedure for estimation and reporting of discretization error in CFD applications. *ASME Journal of Fluids Engineering*, C. Freitas (Ed.), Editorial Policy Statement on the Control of Numerical Accuracy, 2005.
- [44] H. Oertel jr. and E. Laurien. *Numerische Strömungsmechanik, 2. Auflage*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 2003.
- [45] P. D. Lax and R. D. Richtmyer. Survey of the Stability of Linear Finite Difference Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, IX:267–293, 1956.
- [46] J. M. Weiss, J. P. Maruszewski, and W. A. Smith. Implicit solution of preconditioned Navier-Stokes equations using algebraic multigrid. *AIAA Journal*, 37(1):29–36, 1999.
- [47] J. M. Weiss, J. P. Maruszewski, and W. A. Smith. Preconditioning applied to variable and constant density flows. *AIAA Journal*, 33(11):2050–2057, 1995.
- [48] P. Shankara and D. Snyder. Numerical Simulation of High Lift Trap Wing using STAR-CCM+. *30th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, 2012.
- [49] D. Snyder. Missile External Aerodynamics Using STAR-CCM+. *Star European Conference*, 2011.
- [50] CD-adapco. Validation of STAR-CCM+ for External Aerodynamics in the Aerospace Industry. *CD-adapco Technical Library*, 2011.
- [51] J. Ruiz. STAR-CCM+: NACA0012 Flow and Aero-Acoustics Analysis. *CD-adapco Technical Library*, 2011.
- [52] T. F. Brooks, D. S. Pope, and M. A. Marcolini. Airfoil Self-Noise and Prediction. *NASA Reference Publication 1218*, 1989.
- [53] J. D. Anderson Jr. *Fundamentals of Aerodynamics, Second Edition*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [54] J. D. Anderson Jr. *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*. AIAA American Institute of Aeronautics and Aerodynamics, Reston, Virginia, 2000.
- [55] E.-H. Hirschel. *Basics of Aerothermodynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [56] B. Thorwald and Ch. Mundt. Analytical Approach for the Solution of Super- Hypersonic Flow Fields. *First CEAS European Air and Space Conference*, 2007.

- [57] B. Thorwald and Ch. Mundt. Differential, Analytical, Streamline-based Solver for steady inviscid 2D-Flows. *Proceedings of 15th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference*, AIAA 2008-2615, 2008.
- [58] Th. Lutz. Flugzeug- und Flugkörperaerodynamik I und II. *Skript zur Vorlesung des Institut für Aerodynamik und Gasdynamik der Universität Stuttgart*, 2001.
- [59] J. Katz and A. Plotkin. *Low-Speed Aerodynamics - From Wing Theory to Panel Methods*. McGraw-Hill Inc., 1991.
- [60] K. M. Boyer. *An Improved Streamline Curvature Approach for Off-Design Analysis of Transonic Compression Systems*. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2001.
- [61] R.A. Novack and R. M. Hearsey. A Nearly Three-Dimensional Intrablade Computing System for Turbomachinery. *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 99:pp. 154–166, 1977.

11 Anhang

11.1 Tabellierte Lösung der Blasiusgleichung

| η | f'' | f' | f |
|--------|-----------|---------------|---------------|
| 0.0 | 0.4696000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.1 | 0.4695632 | 4.6959084E-02 | 2.3480002E-03 |
| 0.2 | 0.4693061 | 9.3905307E-02 | 9.3914503E-03 |
| 0.3 | 0.4686087 | 0.1408056 | 2.1127595E-02 |
| 0.4 | 0.4672542 | 0.1876051 | 3.7549283E-02 |
| 0.5 | 0.4650303 | 0.2342275 | 5.8642782E-02 |
| 0.6 | 0.4617344 | 0.2805755 | 8.4385693E-02 |
| 0.7 | 0.4571774 | 0.3265323 | 0.1147449 |
| 0.8 | 0.4511899 | 0.3719632 | 0.1496747 |
| 0.9 | 0.4436280 | 0.4167177 | 0.1891150 |
| 1.0 | 0.4343791 | 0.4606325 | 0.2329903 |
| 1.1 | 0.4233687 | 0.5035348 | 0.2812079 |
| 1.2 | 0.4105653 | 0.5452464 | 0.3336576 |
| 1.3 | 0.3959845 | 0.5855885 | 0.3902115 |
| 1.4 | 0.3796921 | 0.6243862 | 0.4507238 |
| 1.5 | 0.3618045 | 0.6614737 | 0.5150318 |
| 1.6 | 0.3424871 | 0.6966994 | 0.5829565 |
| 1.7 | 0.3219508 | 0.7299305 | 0.6543052 |
| 1.8 | 0.3004453 | 0.7610572 | 0.7288724 |
| 1.9 | 0.2782512 | 0.7899966 | 0.8064436 |
| 2.0 | 0.2556692 | 0.8166946 | 0.8867971 |

| η | f'' | f' | f |
|--------|---------------|-----------|-----------|
| 2.1 | 0.2330096 | 0.8411279 | 0.9697072 |
| 2.2 | 0.2105800 | 0.8633042 | 1.054947 |
| 2.3 | 0.1886739 | 0.8832614 | 1.142294 |
| 2.4 | 0.1675605 | 0.9010654 | 1.231528 |
| 2.5 | 0.1474751 | 0.9168077 | 1.322439 |
| 2.6 | 0.1286131 | 0.9306012 | 1.414825 |
| 2.7 | 0.1111247 | 0.9425760 | 1.508498 |
| 2.8 | 9.5113710E-02 | 0.9528752 | 1.603284 |
| 2.9 | 8.0637693E-02 | 0.9616498 | 1.699023 |
| 3.0 | 6.7710705E-02 | 0.9690544 | 1.795569 |
| 3.1 | 5.6307815E-02 | 0.9752428 | 1.892793 |
| 3.2 | 4.6370879E-02 | 0.9803647 | 1.990582 |
| 3.3 | 3.7815072E-02 | 0.9845628 | 2.088835 |
| 3.4 | 3.0535800E-02 | 0.9879701 | 2.187468 |
| 3.5 | 2.4415394E-02 | 0.9907084 | 2.286407 |
| 3.6 | 1.9329311E-02 | 0.9928874 | 2.385592 |
| 3.7 | 1.5151579E-02 | 0.9946044 | 2.484970 |
| 3.8 | 1.1759285E-02 | 0.9959438 | 2.584500 |
| 3.9 | 9.0360725E-03 | 0.9969784 | 2.684149 |
| 4.0 | 6.8746405E-03 | 0.9977697 | 2.783888 |
| 4.1 | 5.1783156E-03 | 0.9983687 | 2.883696 |
| 4.2 | 3.8618280E-03 | 0.9988179 | 2.983557 |
| 4.3 | 2.8514217E-03 | 0.9991513 | 3.083456 |
| 4.4 | 2.0844571E-03 | 0.9993963 | 3.183384 |
| 4.5 | 1.5086439E-03 | 0.9995746 | 3.283333 |
| 4.6 | 1.0810414E-03 | 0.9997030 | 3.383297 |
| 4.7 | 7.6693692E-04 | 0.9997946 | 3.483273 |
| 4.8 | 5.3868972E-04 | 0.9998592 | 3.583256 |
| 4.9 | 3.7461024E-04 | 0.9999045 | 3.683244 |
| 5.0 | 2.5791870E-04 | 0.9999357 | 3.783236 |

| η | f'' | f' | f |
|--------|---------------|-----------|----------|
| 5.1 | 1.7581212E-04 | 0.9999571 | 3.883231 |
| 5.2 | 1.1865282E-04 | 0.9999716 | 3.983227 |
| 5.3 | 7.9281395E-05 | 0.9999814 | 4.083224 |
| 5.4 | 5.2448042E-05 | 0.9999880 | 4.183223 |
| 5.5 | 3.4352062E-05 | 0.9999923 | 4.283222 |
| 5.6 | 2.2276283E-05 | 0.9999951 | 4.383221 |
| 5.7 | 1.4302107E-05 | 0.9999969 | 4.483221 |
| 5.8 | 9.0912981E-06 | 0.9999980 | 4.583220 |
| 5.9 | 5.7216521E-06 | 0.9999988 | 4.683219 |
| 6.0 | 3.5652340E-06 | 0.9999993 | 4.783219 |
| 6.1 | 2.1995147E-06 | 0.9999996 | 4.883220 |
| 6.2 | 1.3435056E-06 | 0.9999998 | 4.983220 |
| 6.3 | 8.1250766E-07 | 0.9999999 | 5.083220 |
| 6.4 | 4.8651094E-07 | 1.000000 | 5.183221 |
| 6.5 | 2.8842751E-07 | 1.000000 | 5.283221 |
| 6.6 | 1.6930186E-07 | 1.000000 | 5.383222 |
| 6.7 | 9.8394260E-08 | 1.000000 | 5.483222 |
| 6.8 | 5.6619125E-08 | 1.000000 | 5.583222 |
| 6.9 | 3.2258509E-08 | 1.000000 | 5.683223 |
| 7.0 | 1.8197667E-08 | 1.000000 | 5.783223 |
| 7.1 | 1.0164365E-08 | 1.000000 | 5.883224 |
| 7.2 | 5.6213532E-09 | 1.000000 | 5.983224 |
| 7.3 | 3.0782270E-09 | 1.000000 | 6.083224 |
| 7.4 | 1.6690254E-09 | 1.000000 | 6.183225 |
| 7.5 | 8.9604801E-10 | 1.000000 | 6.283225 |
| 7.6 | 4.7633170E-10 | 1.000000 | 6.383225 |
| 7.7 | 2.5072722E-10 | 1.000000 | 6.483226 |
| 7.8 | 1.3068074E-10 | 1.000000 | 6.583226 |
| ... | | | |
| 10.0 | 6.6008343E-18 | 1.000000 | 8.783235 |

Tabelle 11.1: Zahlenwerte der Lösung der Blasiusgleichung (aus [41]).