

Ein Beitrag zur Wölbkrafttorsion inhomogener Balken

Daniel Stegmair

Fakultät für Leichtbaustrukturen

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Luft- und Raumfahrt-
technik der Universität der Bundeswehr München zur Erlangung des
akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigten
Dissertation.

Vorsitzender:	Univ.-Prof. Dr. Steffen Marburg
1. Prüfer:	Univ.-Prof. Dr. Helmut Rapp
2. Prüfer:	Univ.-Prof. (em.) Dr. Rudolf Wörndle

Die Dissertation wurde am 07.11.2013 bei der Universität der Bun-
deswehr München eingereicht und durch die Fakultät für Luft- und
Raumfahrttechnik am 13.03.2014 angenommen.

Vorwort

Vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als externer Mitarbeiter am Institut für Leichtbau der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik an der Universität der Bundeswehr München. Die Idee zu dieser Arbeit wurde zusammen mit Herrn Prof. Dr. Rapp als Weiterführung seiner Arbeiten zu inhomogenen Balken unter Temperatur-, Zug- und Querkraftbiegebeanspruchung entwickelt.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Rapp für die Möglichkeit, diese Arbeit an seinem Lehrstuhl zu verfassen. Sein tiefgreifendes und kontinuierliches Engagement bei der Betreuung dieser Arbeit sowie seine konstruktiven Anmerkungen trugen entscheidend zum Gelingen derselben bei.

Für die Bereitschaft sich als Mitberichter einzubringen gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Wörndle. Für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission danke ich Herrn Prof. Dr. Marburg.

Darüber hinaus gilt mein Dank den derzeitigen und ehemaligen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Leichtbau - Herrn Dr.-Ing. Breuer, Herrn Dipl.-Ing. Birkel, Herrn Dipl.-Ing. Matzies und Frau Dipl.-Ing. Danneberg - für die administrative bzw. fachliche Unterstützung.

Besonders erwähnen möchte ich an dieser Stelle meine Ehefrau Birgit. Ich danke ihr für die zeitlichen Freiräume, welche diese Arbeit erst ermöglichten. In Zukunft können wir nun mehr gemeinsame Zeit mit unseren beiden Kindern Anna und Magdalena verbringen.

Nürnberg, im November 2013

Daniel Stegmair

Kurzfassung

„Ein Beitrag zur Wölbkrafttorsion inhomogener Balken“

Neben der Saint Venantschen Torsion ist insbesondere im Leichtbau bei Balken mit dünnwandigen Querschnitten und behinderter Verwölbung die sogenannte Wölbkrafttorsion zu berücksichtigen, da viele Schäden in der Praxis ihre Ursache in nicht beachteten Normalspannungen auf Grund von Verwölbungsbehinderungen haben.

Grundlage für die Berechnung der Verwölbung bei dünnwandigen Balken und der daraus resultierenden Wölbsteifigkeit und Wölbspannung sind die Arbeiten von Wlasow. Die Schwierigkeit bei der Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion liegt darin, dass die Ermittlung der dafür erforderlichen Wölbsteifigkeit für heute übliche inhomogene Balken aus anisotropen Werkstoffen nicht einfach möglich ist.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein bestehendes Programm zur Bestimmung der Steifigkeiten von beliebigen Balken so erweitert, dass die Wölbsteifigkeit und der dreidimensionale Spannungszustand eines Balkens mit inhomogenem Querschnitt infolge Wölbkrafttorsion berechnet werden kann. Dazu wird der dreidimensionale Verformungszustand des Balkens in einen zweidimensionalen Anteil in der Querschnittsebene und einen eindimensionalen Anteil in Balkenlängsrichtung aufgespalten. Das Verhalten in Balkenlängsrichtung kann analytisch beschrieben werden. Für die Beschreibung des dreidimensionalen Verformungszustandes ist damit in der Querschnittsebene eine zweidimensionale Finite Elemente Analyse ausreichend.

Für die Verifikation der dargestellten Vorgehensweise werden dessen Ergebnisse mit analytischen und numerischen Lösungen sowie Versuchen verglichen. Hierbei kann eine sehr gute Übereinstimmung gezeigt werden. Zusätzlich wird für ein C-Profil mit inhomogenem Querschnitt noch eine konventionelle dreidimensionale Finite Elemente Berechnung durchgeführt. Für die Steifigkeiten ergeben sich hinreichend genaue Übereinstimmungen.

Da die Wölbsteifigkeit die Torsionseigenfrequenzen wesentlich beeinflusst, wird ein dynamischer Versuch mit zuvor genanntem inhomogenen Balken zur Bestimmung der Wölbsteifigkeit durchgeführt. Die Übereinstimmung der experimentell ermittelten Wölbsteifigkeit mit der theoretisch ermittelten ist hinreichend genau. Damit ist die dargestellte Vorgehensweise auch hinreichend genau.

Abstract

„A contribution to non-uniform torsion of inhomogeneous beams“

Non-uniform Torsion has to be considered next to Saint Venant's Torsion especially for beams with thin-walled cross-sections and constrained warping, because many failures in reality are caused by neglected normal stresses due to warping constraints.

Basis for the calculation of warping for thin-walled beams, the resulting warping stiffness and stress is work done by Wlassow. The difficulty in considering the non-uniform torsion is based on the fact that the determination of the necessary warping stiffness for today's common non-homogeneous beams with anisotropic materials is not possible easily.

In the frame of the work an existing program for the determination of the stiffness of arbitrary beams is extended, that the warping stiffness and the three dimensional stress state of beams with non-homogeneous cross-section due to warping torsion can be calculated. For this the three dimensional deformation state of the beam is splitted up in a two dimensional portion in the plane of the cross-section and a one dimensional portion in the direction of the beam. The behaviour in the direction of the beam can be described analytically. For determination of the three dimensional deformation state a two dimensional Finite Element Analysis in the cross-section is sufficient.

The results of the proposed procedure are compared with analytical and numerical solutions for verification. Here a very good coincidence can be shown. Additionally a conventional three dimensional Finite Element Analysis is performed for a C-Profile with non-homogeneous cross-section. The deviation of the stiffness is of acceptable accordance.

Due to the fact that the warping stiffness has significant influence on the torsional eigenfrequencies a dynamic test with the above mentioned non-homogeneous beam for the determination of the warping stiffness is performed. The coincidence of experimentally determined and theoretically determined warping stiffness is of sufficient accuracy. Therefore the proposed procedure is of sufficient accuracy, too.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Zielsetzung der Arbeit	4
1.2	Stand der Technik	5
1.2.1	Statische Untersuchungen dünnwandiger Querschnitte	5
1.2.2	Dynamische Analysen	7
1.2.3	Geometrisch nichtlineare Untersuchungen	8
1.2.4	Stabilitätsuntersuchungen an dünnwandigen Balken aus Faser- verbundlaminate	9
1.2.5	Abgrenzung gegenüber der Variational Asymptotic Beam Sec- tion Analysis (VABS)	9
2	Grundlagen	12
2.1	Begriffe und Grundgleichungen	12
2.1.1	Homogener, homogenisierter, teilhomogenisierter und inho- mogener Querschnitt	12
2.1.2	Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen	14
2.1.3	Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen	14
2.1.4	Kompatibilitätsbedingungen	14
2.1.5	Ursprung und Achsen von Koordinatensystemen	15
2.1.6	Querkontraktion	16
2.2	Grundlagen der Finiten Elemente Methode	17
2.2.1	Finite Elemente Methode am Beispiel zweier in Reihe ge- schalteter Stäbe	20
2.2.2	Aufstellung und Lösung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	21
2.2.3	Forderung an Verschiebungsansätze und Koordinatentrans- formation	23
2.2.4	Verallgemeinerung Matrix-Steifigkeitsmethode	23
2.3	SABINA - Programm zur Bestimmung der Steifigkeiten von belie- bigen Balkenquerschnitten	24

3	Wölbkrafttorsion nach Wlassow	29
3.1	Voraussetzungen für Wölbkrafttorsion	31
3.2	Verwölbungen bei dünnwandigen Profilen	32
3.3	Entkoppelte Verwölbung	38
3.4	Wölbspannungen bei dünnwandigen Profilen nach Wlassow	39
3.5	Wölbsteifigkeit bei dünnwandigen Profilen	43
3.6	Wölbmoment	46
3.7	Torsionsmoment	47
3.8	Drillzentrum und Schubmittelpunkt	49
3.9	Allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die Wölbkrafttorsion	54
4	Berechnung der Wölbsteifigkeit	55
4.1	Festlegung der Verschiebungsansätze, Verzerrungen und Spannungen	56
4.2	Aufstellung der Differentialgleichung	64
4.3	Lösung mit der Finiten Elemente Methode	64
4.3.1	Prinzip der virtuellen Arbeit	66
4.3.2	Innere Formänderungsenergie	67
4.3.3	Äußere Formänderungsenergie	69
4.3.4	Bestimmung des elastischen Gesamtpotentials	71
4.4	Bestimmung der Elementsteifigkeits- und Gesamtsteifigkeitsmatrix .	72
4.5	Korrektur der Starrkörperverschiebung	77
4.6	Berechnung der Spannungen und Bestimmung der Wölbsteifigkeit .	79
5	Implementierung von SABINA-NG	80
6	Rechnerische und experimentelle Verifikation	82
6.1	Analytische und numerische Verifikation	82
6.1.1	Balken mit rechteckigem Vollquerschnitt	82
6.1.2	Balken mit kreisförmigem Vollquerschnitt	87
6.1.3	Balken mit elliptischem Vollquerschnitt	88
6.1.4	Balken mit dünnwandigem kreisförmigem Hohlquerschnitt .	90
6.1.5	Balken mit dünnwandigem quadratischem Hohlquerschnitt .	91
6.1.6	Balken mit dickwandigem quadratischem Hohlquerschnitt .	92

6.1.7	Balkenquerschnitt mit C-Profil	94
6.1.8	Balken mit inhomogenem Vollquerschnitt	105
6.2	Experimentelle Verifikation	113
6.2.1	Statischer Versuch	113
6.2.2	Dynamischer Versuch	120
7	Zusammenfassung und Ausblick	133
	Literaturverzeichnis	135
A	Anhang	147
A.1	Saint Venantsche Torsion	147
A.1.1	Grundlagen der Saint Venantschen Torsion	149
A.1.2	Herleitung der Spannungsfunktion ψ	149
A.1.3	Ermittlung der Randbedingungen für die Spannungsfunktion ψ	151
A.1.4	Differentialgleichung der Saint Venantschen Torsion	153
A.1.5	Schmales Rechteckprofil	155
A.1.6	Zusammengesetzte Querschnitte	156
A.1.7	Zusammenhang Verwölbungen und Spannungsfunktion ψ .	157
A.1.8	Spannungsfunktion ψ für ausgewählte Profile	159
A.2	Torsionsschwingung von masselosen Wellen	160
A.2.1	Masselose Welle mit Einzelmasse	160
A.2.2	Masselose Welle mit Einzelmasse und Wölbkrafttorsion . .	162
A.2.3	Massebehaftete Welle	164
A.2.4	Massebehaftete Welle mit Wölbkrafttorsion	166
A.2.5	Gekoppelte Biege-Torsionsschwingung	169
A.3	Iterative Steifigkeitsbestimmung aus den Eigenfrequenzen	173

Abbildungsverzeichnis

1	Querschnittsaufbau homogen - homogenisiert - teilhomogenisiert - inhomogen	12
2	Profil mit Koordinatensystemen	16
3	Einachsiger Zugversuch inklusive Dehnungen	17
4	Verschiebung an Knotenpunkten und im Element	18
5	Bilineare Formfunktion	19
6	Zwei in Reihe geschaltete Stäbe	20
7	Verformungsverhalten	26
8	Lagerungsbedingung für Biegung um die y -Achse	27
9	Torsionsbeanspruchung eines Balkens	29
10	Zusammenhang zwischen Verdrehung und Verschiebungen	30
11	Wölbfreie Profile	31
12	Momentanzentrum, Hauptpol und Drillzentrum	33
13	Verformungen für die Torsionstheorie nach Wlassow	34
14	Geometrische Beziehungen nach Wlassow	35
15	Differentiale in kartesischen Koordinaten	36
16	Verschiebung infolge Zug, Biegung und Wölbkrafttorsion	37
17	Verwölbung um Pol A und D	38
18	Normal- und Schubspannungsverteilung über die Wanddicke	39
19	Spannungen am dünnwandigen Flächenelement	41
20	Momentengleichgewicht um Pol A	44
21	Reine Biegung - Reine Torsion	52
22	Lagerungsbedingung für konstante Verwölbung	58
23	Verformungen infolge Wölbkrafttorsion am Beispiel eines I-Profiles	60
24	Elementkoordinatensystem und Materialkoordinatensystem	63
25	Transformation zwischen realer Geometrie und Einheitsquadrat	65
26	Längsspannung und Torsionsmoment bei drehstarrer, wölbfreier Einspannung	69
27	Torsionsmoment bei drehfreier, wölbstarrer Einspannung	70
28	Rechteckiger Vollquerschnitt	83
29	Konvergenzanalyse für die Torsionssteifigkeit GI_T und die Wölbsteifigkeit EC_W des rechteckigen Vollquerschnitts	84

30	Gegenüberstellung der Einheitsverwölbung für den rechteckigen Vollquerschnitt (lange Seite a) bei $y = b$	84
31	Relativer Fehler der Einheitsverwölbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (lange Seite a) bei $y = b$	85
32	Absoluter Fehler der Einheitsverwölbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (lange Seite a) bei $y = b$	85
33	Gegenüberstellung der Einheitsverwölbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (kurze Seite b) für $x = a$	86
34	Relativer Fehler der Einheitsverwölbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (kurze Seite b) für $x = a$	86
35	Absoluter Fehler der Einheitsverwölbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (kurze Seite b) für $x = a$	87
36	Kreisförmiger Vollquerschnitt	87
37	Elliptischer Vollquerschnitt	89
38	Dünnwandiger kreisförmiger Hohlquerschnitt	90
39	Dünnwandiger quadratischer Hohlquerschnitt Profil	91
40	Dickwandiger quadratischer Hohlquerschnitt	93
41	C-Profil	94
42	Einheitsverwölbung (links) und Längsspannung (rechts) für das C-Profil - homogener Querschnitt	96
43	Materialien im C-Profil	97
44	Einheitsverwölbung (links) und Längsspannung (rechts) für das C-Profil - homogenisierter Querschnitt	99
45	Lagerung für 3d-Vergleichsrechnung	100
46	Verschiebung in x -Richtung	101
47	Verschiebung in y -Richtung	102
48	Verschiebung in z -Richtung (Verwölbung)	102
49	C-Profil unverformt - verformt	103
50	Vergleich Längsverschiebung 3d-Vergleichsrechnung mit Einheitsverwölbung aus SABINA-NG	104
51	Geometrie und Idealisierung inhomogener Vollquerschnitt	105
52	Lagerung des Balkens mit inhomogenem Vollquerschnitt	107
53	Verschiebung in x -Richtung des inhomogenen Vollquerschnitts	108
54	Verschiebung in y -Richtung des inhomogenen Vollquerschnitts	108

55	Inhomogenes Profil unverformt - verformt	109
56	Vergleich der Verdrehung	110
57	Verwölbung (Verschiebung in z-Richtung) des inhomogenen Balkens	110
58	Vergleich der ersten Ableitung der Verdrehung	111
59	Ergebnisse für den inhomogenen Querschnitt	112
60	Vergleich der Dehnung in Balkenlängsrichtung	112
61	Schematische Darstellung des statischen Versuchsaufbaus	114
62	Versuchsaufbau des statischen Versuch	115
63	Einleitung des Torsionsmomentes	116
64	Verdrehung in Nähe der Einspannung	117
65	Verdrehung im ungestörten Bereich	118
66	Nichtlinearer Fit der Verdrehung	119
67	Dichteverteilung im C-Profil	122
68	Prinzipskizze für die Aufhängung im Schwerpunkt durch Shimmen	123
69	Flussbild für iterative Berechnung der Steifigkeiten	124
70	Frei-Frei Lagerung des dynamischen Versuchs	126
71	Positionierung des Beschleunigungsaufnehmers	127
72	Vergleich der Frequenzspektren der Versuche V003 und V019	128
73	Frequenzspektrum V015 gekoppelte Biegetorsionsschwingung	130
74	Vergleich der berechneten Eigenfrequenzen und der Eigenfrequenzen aus dem Versuch	132
75	Zusammenhang zwischen Verdrehung und Verschiebungen	147
76	Definition der Spannungsfunktion ψ	150
77	Spannungen am Profilrand	151
78	Ellipse	152
79	Schmales Rechteckprofil	155
80	Schubfluss im Rechteckprofil	156
81	Kreis	159
82	Dreieck	159
83	Rechteck	159
84	Torsion der masselosen Welle mit starrer Scheibe	160
85	Masselose Welle mit Torsionssteifigkeit und Wölbsteifigkeit	162

86	Torsion der massebehafteten Welle mit Torsionssteifigkeit	164
87	Infinitesimales Element mit Torsionssteifigkeit	165
88	Massebehaftete Welle mit Wölbsteifigkeit	166
89	Schwerpunkt und Schubmittelpunkt bei C-Profil	169
90	Infinitesimales Element bei der Biegetorsionsschwingung	169

Tabellenverzeichnis

1	Konvergenzanalyse rechteckiger Vollquerschnitt	83
2	Idealisierung kreisförmiger Vollquerschnitt	88
3	Idealisierung elliptischer Vollquerschnitt	89
4	Idealisierung dünnwandiger kreisförmiger Hohlquerschnitt	90
5	Idealisierung dünnwandiger quadratischer Hohlquerschnitt	92
6	Idealisierung dickwandiger quadratischer Hohlquerschnitt	93
7	Idealisierung C-Profil - homogener Querschnitt	95
8	Materialdaten für Steg und Flansch	97
9	Idealisierung C-Profil - homogenisierter Querschnitt	98
10	Vergleich der Idealisierung des C-Profiles - inhomogener Querschnitt	101
11	Vergleich der Idealisierung des inhomogenen Vollquerschnitts . . .	106
12	Materialien inhomogener Vollquerschnitt	106
13	Materialdaten für Steg und Flansch	121
14	Versuche - Anregung - Aufzeichnung	129
15	Gegenüberstellung der analytischen Lösung mit SABINA-NG . . .	131
16	η für ausgewählte Seitenverhältnisse	154
17	Schubspannungen für verschiedene Querschnitte	154
18	Einheitsverwölbung für ausgewählte Querschnitte	158
19	Auswertung dynamischer Versuch	173

Abkürzungsverzeichnis

α	Winkel
A	Fläche, Matrix von Differentialgleichungssystemen
a, b	geometrische Abmessungen
B	Belastungsmatrix
C	Steifigkeitsmatrix
D	Matrix der Differentialoperatoren, Untermatrix der Steifigkeitsmatrix aus der Laminattheorie
\vec{e}_0	Vektor der äußeren Belastung
ε	Dehnungsvektor
ε_i	Dehnung in i-Richtung
E	Elastizitätsmodul
e	Exzentrizität
EA	Zugsteifigkeit
EC_W	Wölbsteifigkeit
EI_i	Biegesteifigkeit um i-Achse
ES_ω	statisches Sektormoment
ES_i	statisches Moment um i-Achse
\vec{f}_k	Lastvektor
φ_i	Verdrehung um i-Achse
F	Kraft, Knotenkraft, Kraftvektor, Matrix des 1d-Anteils der Verschiebungen
f	Frequenz
γ_j	Gleitung in der Schnittebene i und in Richtung j
G	Schubmodul
g	Lot auf die Profillinie

GA_i	Schubsteifigkeit um i-Achse
GI_T	Torsionssteifigkeit nach Saint Venant
H	Hilfsmatrix
h	Lot auf die Normale zur Profillinie
H_i	Wichtungskoeffizient
\overline{J}_i	Massenträgheitsmoment um i-Achse
κ_i	Krümmung um i-Achse
K	Gesamtsteifigkeitsmatrix
k	Elementsteifigkeitsmatrix
k_{ii}	Eintrag in der Elementsteifigkeitsmatrix
K_i	Koeffizienten in allgemeiner Lösung der DGL für Wölbkrafttorsion
l_i	Länge des i-ten Elements
m'	kontinuierliche Massenverteilung
M_i	Biegemoment um i-Achse
M_T	Torsionsmoment
m_T	Torsionsstreckenlast
M_W	Torsionsmoment aufgrund Wölbkrafttorsion
ν	Querkontraktionszahl
ν_{ij}	Querkontraktionszahl für Kraftrichtung i und Kontraktionsrichtung j
N	Normalkraft, Matrix der Formfunktionen
n	Vektor der Formfunktionen
n_i	Formfunktion zu Knoten i
π	Elastisches Gesamtpotential
p_z	Längsstreckenlast

ϑ	Verdrehung
Q_i	Querkraft in i-Richtung
r	Radius
σ_i	Normalspannung in i-Richtung
s	Umfangskoordinate im mitdrehenden Koordinatensystem
S_0	Schubkraft bei $s=0$
S_i	Schnittkräfte im i-ten Element
S	Steifigkeitsmatrix
τ_{ij}	Schubspannung in der Schnittebene i und in Richtung j
T	Übertragungsmatrix
t	Wandstärke
\bar{u}, \bar{v}	Querschnittsverzerrung infolge Querkontraktion
\vec{u}	Verschiebungsvektor des 2d-Anteils der Verschiebungen
\vec{u}_0	Verschiebungsvektor der vorgegebenen Verdrehung
\vec{u}	Verschiebungsvektor
\vec{U}, \vec{V}	Vektor der Querschnittsverzerrungen der Knoten des gesamten Querschnitts
\vec{u}_n	Vektor der Knotenverschiebungen
U	Dehnungsenergiedichte
u, v, w	Verschiebungen
u_r	Verschiebung in Radialenrichtung
u_s, v_s	Translatorischer Verschiebungsanteil einer Bewegung in kartesischen Koordinaten
\vec{v}	Vektor der Knotenverschiebungen
v_i	Knotenverschiebung für Knoten i
v_t	Verschiebung in Tangentialenrichtung

ω	Einheitsverwölbung
ω_0	Integrationskonstante der Einheitsverwölbung
$\vec{\Omega}$	Vektor der Verwölbung der Knoten des gesamten Querschnitts
$\tilde{\omega}$	Einheitsverwölbung inklusive Starrkörperverschiebung
W	Wölbmoment
w_L	Längsverschiebung infolge Zugbeanspruchung
w_Q	Verwölbung infolge Querkraftschub
x^*, y^*, z^*	kartesische Koordinaten, Hauptachsensystem
$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$	kartesische Koordinaten im beliebigen Koordinatensystem
ξ, η	Koordinaten im Einheitsquadrat
ξ_i	Lagekoeffizient
x, y, z	kartesische Koordinaten, Schubmittelpunkt im Ursprung, Achsen parallel zu den Hauptachsen
ζ	Querschnittskordinate in VABS

1 Einleitung

Die Finite Elemente Methode stellt das universelle Berechnungsverfahren für Aufgaben der Strukturmechanik dar. Für komplexe Leichtbaustrukturen wie z.B. eine Flugzeugtür oder ein Rotorblatt eines Hubschraubers kommt heutzutage fast ausschließlich die Finite Elemente Methode zur Anwendung. Durch die immer größer werdenden Rechnerleistungen könnte man annehmen, dass in naher Zukunft Gesamtstrukturen vollständig dreidimensional idealisiert werden können. In frühen Phasen der Produktentwicklung trifft dies auf Komponenten dieser Strukturen jedoch häufig nicht zu, da diese nur im Entwurf vorliegen. In diesen Fällen werden oftmals analytische Handrechnungen durchgeführt. Ferner werden auch die zukünftigen Rechnerleistungen nicht ausreichen, um für vollständig dreidimensional idealisierte Gesamtstrukturen nichtlineare, komplexe dynamische implizite oder explizite numerische Simulationen in einer akzeptablen Zeit durchzuführen. Somit besteht weiterhin der Bedarf an Modellvereinfachungen. Diese Modellvereinfachungen unterscheiden sich je nach benötigtem Rechenverfahren und abzubildendem Bauteil. Abhängig davon werden unterschiedliche Eingabegrößen, z.B. Querschnittssteifigkeiten, elastischer Schwerpunkt oder Schubmittelpunkt, benötigt.

Mit Hilfe der Finiten Elemente Methode können Strukturen mit beliebigen Geometrien berechnet werden. Je nach Abbildung des dreidimensionalen Bauteils als Linie, Fläche oder Volumen spricht man von einer 1d-, 2d-, oder 3d-Idealisierung. Zusätzlich gibt es Hilfselemente, auch 0d-Elemente genannt.

Bei 0d-Elementen handelt es sich hauptsächlich um Federelemente. Sie liefern die Kräfte in den jeweiligen Federelementen und die Verformung der Knotenpunkte und werden daher häufig benutzt, um Schnittstellen zu idealisieren. Ferner bieten sie den Vorteil, dass sie die Rechenzeit nicht messbar erhöhen. Nachteilig an dieser Idealisierung ist jedoch, dass keine Information bzgl. der Spannungsverteilung im Element wiedergegeben wird und erhebliche Vorarbeit zur Bestimmung der Federsteifigkeiten nötig ist.

Für die Idealisierung von Spanten, Stringern, Wellen, Streben oder des Fahrwerks einer Gesamtstruktur bieten sich 1d-Elemente (Stäbe- und Balkenelemente) an. Sie haben den Vorteil einer geringen Rechenzeit. Als Nachteil ist anzuführen, dass die Steifigkeiten sowie die Lage von elastischem Schwerpunkt und Schubmittelpunkt als Eingabeinformationen benötigt werden. Ferner erhält man in diesem Fall keine Detailinformationen bzgl. des dreidimensionalen Spannungszustandes, sondern nur für die Spannungen der Technischen Biegetheorie (Normalspannung in Balkenlängsrichtung, Schubspannungen in der Querschnittsebene) in den Auswertepunkten.

Hautfelder von Gesamtstrukturen werden häufig mit 2d-Elementen (Schalen- und Plattenelemente) idealisiert. Eine derartige Idealisierung liegt für Hautfelder nahe,

wird aber auch für Detailrechnungen homogener oder homogenisierter dünnwandiger Balken angewendet. Für diese 2d-Elemente werden bei isotropen und orthotropen Materialien nur noch die Materialeigenschaften und die Dicke des Materials, bei anisotropen Materialien die Kopplungssteifigkeiten benötigt. Diese Art der Idealisierung weist eine erträgliche Rechenzeit auf, kann aber die Normalspannung in Dickenrichtung und die Schubspannungen, welche nicht in der Ebene liegen, nicht wiedergeben. Sollen diese Spannungen zusätzlich bestimmt werden, z.B. für dickwandige oder inhomogene Balken wie einem Hubschrauber-Rotorblatt, muss eine Idealisierung mit 3d-Elementen gewählt werden.

Die Idealisierung mit 3d-Elementen hat den Vorteil, dass nur noch die Materialeigenschaften sowie bei orthotropen und anisotropen Materialien zusätzlich die Materialorientierungen benötigt werden. Weiterhin werden bei unterschiedlicher Verformung der verschiedenen Materialien aufgrund unterschiedlicher Querkontraktionszahlen die daraus resultierenden Spannungen und Steifigkeitserhöhungen berücksichtigt. Zu den Nachteilen dieser Idealisierung zählen v.a. für dünnwandige Strukturen die hohe Komplexität dieser Modelle und die hohe Rechenzeit, welche für derartige Gesamtmodelle (Flugzeugtür oder -rumpf) benötigt würde. So erfordert die Berücksichtigung der Orthotropie bzw. Anisotropie besondere Aufmerksamkeit. Auch daher kommen 3d-Idealisierungen trotz sehr stark gesteigener Rechnerleistungen heute für Gesamtmodelle nicht zum Einsatz.

An dieser Stelle kann festgehalten werden, dass 1d-, 2d- und auch 3d-Idealisierungen für Balken abhängig vom benötigten Detaillierungsgrad, der Geometrie und des Materialaufbaus des Balkenquerschnitts verwendet werden können. Es wird für alle Balken eine 1d-Idealisierung angestrebt, da bei dieser im Allgemeinen die geringste Anzahl an Freiheitsgraden für die Idealisierung der Gesamtstruktur benötigt werden und sie damit am schnellsten gelöst werden kann. Zusätzlich sei noch erwähnt, dass eine 1d-Idealisierung dieselben Eingabegrößen benötigt wie analytische Handrechnungen.

Sehr häufig kommen als 1d-Elemente Balkenelemente zur Anwendung. Bei Balkenelementen (z.B. für Spante, Stringer, Wellen, Streben) werden in der Regel sechs Freiheitsgrade verwendet. Hierbei handelt es sich um drei translatorische und drei rotatorische Freiheitsgrade. Soll zusätzlich noch Wölbkrafttorsion berücksichtigt werden, kommt noch ein siebter Freiheitsgrad hinzu - die Verwölbung. Offene dünnwandige Balkenquerschnitte weisen eine niedrige Torsionssteifigkeit auf und zeigen daher besonders stark Effekte aus der Wölbkrafttorsion. Damit hat sich Wlassow in [87] für dünnwandige offene Balkenquerschnitte befasst. Für kompakte geschlossene Querschnitte (z.B. Rotorblatt) können diese Arbeiten aber nicht mehr verwendet werden. Wie erwähnt, wird die Wölbsteifigkeit infolge Wölbkrafttorsion (im Folgenden nur Wölbsteifigkeit genannt) bei Balken oft nicht berücksichtigt. Besonders auf

dynamische Analysen hat dies Einfluss, da die Wölbsteifigkeit die Torsionseigenfrequenzen erhöht. Auch auf statische Analysen hat die Wölbkrafttorsion Einfluss, da die aus der Wölbkrafttorsion resultierenden zusätzlichen Normalspannungsmaxima in der Regel in Bereichen liegen, in welchen bereits aufgrund von gleichzeitiger Biegung Normalspannungsmaxima vorliegen.

Zur Bestimmung der Eingabegrößen - der Steifigkeiten des Balkenquerschnitts, des elastischen Schwerpunktes und des Schubmittelpunktes - für die 1d-Idealisierung eines Balkens mit kommerziell verfügbaren Finite Elemente Programmen wären jedoch für homogene oder homogenisierte dünnwandige Balken 2d-Rechnungen und für dickwandige oder inhomogene Balken aufwändige und komplexe 3d-Rechnungen nötig. Bei inhomogenen Balkenquerschnitten ist der Einfluss der gegenseitigen Verformungsbehinderung infolge unterschiedlicher Querkontraktionszahlen der einzelnen Teilquerschnitte relevant. Im Gegensatz zu metallischen Werkstoffen, bei welchen die Querkontraktionszahlen zwischen 0,25 und 0,35 variieren, können die Querkontraktionszahlen wie in [22] beschrieben für faserverstärkte Kunststoffe sowohl im negativen Bereich als auch bei Werten über 5 liegen. Durch dieses weite Spektrum für die Querkontraktionszahl bei faserverstärkten Werkstoffen sind die entstehenden zusätzlichen Spannungen deutlich höher als die zusätzlichen Spannungen bei metallischen Werkstoffen und haben daher signifikanten Einfluss auf das Bauteilverhalten.

In einem vorhandenen Programm zur Bestimmung der Steifigkeiten von beliebigen Balkenquerschnitten wird die 3d-Rechnung vermieden. Dazu wird der dreidimensionale Verformungszustand des Balkens in einen 2d-Anteil in der Querschnittsebene und einen 1d-Anteil in Balkenlängsrichtung aufgespalten. Das Verhalten in Balkenlängsrichtung kann analytisch beschrieben werden. Dies führt dazu, dass die Verformungen in der Querschnittsebene mit der Finiten Elemente Methode und einer 2d-Idealisierung berechnet werden können. Damit werden nur ca. 1% der Freiheitsgrade des vergleichbaren 3d-Modells für die Bestimmung des vollständigen dreidimensionalen Spannungszustandes im ungestörten Balkenquerschnitt benötigt. Mit diesen Spannungen werden anschließend die Steifigkeiten des Balkenquerschnitts bestimmt, welche dann für 1d-Idealisierungen und analytische Rechnung verwendet werden können.

1.1 Zielsetzung der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit soll das vorhandene Programm zur Bestimmung der Steifigkeiten von beliebigen Balkenquerschnitten so erweitert werden, dass die Wölbsteifigkeit und der dreidimensionale Spannungszustand infolge Wölbkrafttorsion eines Balkens mit inhomogenem Querschnitt aus faserverstärkten Kunststoffen und anderen Materialien berechnet werden kann. Für die Berechnung mit der Finiten Elemente Methode wird keine 3d-Idealisierung des Balkens, sondern eine 2d-Idealisierung des Balkenquerschnitts durchgeführt, angelehnt an die Vorgehensweise des vorhandenen Programms zur Bestimmung der Steifigkeiten von beliebigen Balkenquerschnitten - SABINA. Dadurch kann die Anzahl der Freiheitsgrade auf ca. 1% gegenüber der 3d-Idealisierung reduziert werden und die Berechnungsdauer der Steifigkeiten für Querschnitte einzelner Balkenelemente überproportional verringert werden. Hierbei wird der dreidimensionale Spannungszustand infolge Wölbkrafttorsion und die Wölbsteifigkeit an inhomogenen Balken aus orthotropen Materialien berechnet, wobei die gegenseitige Querkontraktionsbehinderung zwischen den verschiedenen Materialien berücksichtigt wird. Dazu wird SABINA zu SABINA-NG erweitert.

Angelehnt an SABINA soll der Nutzer keinerlei Fallunterscheidungen bzgl. der Geometrie des Profilquerschnitts (offen oder geschlossen) treffen müssen. Aus dem gewählten analytischen Verformungsansatz in Balkenlängsrichtung - basierend auf den Arbeiten von Wlassow - und der Beschreibung des Verhaltens in der Balkenquerschnittsebene mit beliebigen zweidimensionalen Verformungsfunktionen setzt sich der Produktansatz für den dreidimensionalen Verformungszustand zusammen. Damit kann der dreidimensionale Spannungszustand infolge Wölbkrafttorsion mittels einer 2d-Idealisierung und Finiten Elemente Methode berechnet werden. Abschließend wird die Wölbsteifigkeit bestimmt, welche als Eingangsparameter in eine eindimensionale Balkenrechnung für Eigenfrequenzen oder statische Analysen verwendet werden kann. Die Ergebnisse sollen rechnerisch und experimentell überprüft werden. Die Relevanz der Wölbkrafttorsion kann auch aus dem dynamischen Versuch gezeigt werden, bei welchem die Wölbkrafttorsion signifikanten Einfluss auf die Torsionseigenfrequenz des Balkens hat.

1.2 Stand der Technik

In der Literatur können vielzählige, unterschiedliche Herleitungen für verschiedene Fragestellungen bzgl. Balken mit Verwölbungseffekten gefunden werden. Die häufigsten Kategorien hierfür sind statische Analysen an dünnwandigen Querschnitten, dynamische Analysen, Untersuchungen zur geometrischen Nicht-Linearität und Stabilitätsuntersuchungen an dünnwandigen Balken. Zusätzlich wird noch eine sehr ambitionierte Methode erläutert, namentlich die Variational Asymptotic Beam Sectional Analysis (VABS).

Gegenwärtig wird Wölbkrafttorsion an dünnwandigen, offenen Querschnitten auf Basis der Arbeiten von Wlassow [87] berechnet. Dort wird neben der sogenannten Einheitsverwölbung eine zusätzliche Steifigkeit - die Wölbsteifigkeit - und eine zusätzliche Schnittkraft - das Wölbmoment - eingeführt. Hierbei werden isotrope Werkstoffe betrachtet. Zugleich stellt Wlassow die Differentialgleichung für die Wölbkrafttorsion auf.

1.2.1 Statische Untersuchungen dünnwandiger Querschnitte

Die Forschungsaktivitäten auf dem Gebiet der dünnwandigen Querschnitte unter Wölbkrafttorsions- und Saint Venantscher Torsionsbelastung verfolgen größtenteils das Ziel, die analytischen Modelle auf orthotropes oder anisotropes Materialverhalten zu erweitern, ohne jedoch von der Vorgabe der dünnwandigen Querschnitte abzurücken.

Mit dünnwandigen Profilen - offen, einfach und mehrfach geschlossen - aus Faserverbundmaterialien oder Sandwichstrukturen beschäftigen sich [18], [20], [31], [41], [44], [65], [70] und [72]. Alle untersuchen Torsion und Wölbkrafttorsion an Balkenstrukturen und entwickeln Modelle, welche nur einen zweidimensionalen Spannungszustand berücksichtigen. Damit dieser bestimmt werden kann, muss für die Profile die Einheitsverwölbung bekannt sein. Somit sind analytische Vorbetrachtungen nötig. Die Modelle beinhalten neben den drei translatorischen und den drei rotatorischen Freiheitsgraden pro Knoten eines Balkenelements noch einen weiteren Freiheitsgrad pro Knoten für die Verwölbung des Balkens. In [73] werden auch dünnwandige Balken aus faserverstärkten Kunststoffen untersucht. Es werden Kombinationen aus Biege- und Torsionsbelastung betrachtet. Hierbei werden die Verwölbungen aber linear über die Wanddicke angesetzt. In [47] wird ein neues Element verwendet. Damit die Wölbkrafttorsion beschrieben werden kann, wird dort ein sogenanntes "Semiloof"-Balkenelement eingesetzt. Es wurde ursprünglich entwickelt, um Kombinationen aus Balken und Platten/Schalen zu behandeln. Dieses Element weist 17 Freiheitsgrade auf. Die Elementkontur wird durch drei Knoten - jeweils einer an den Enden und einer in der Mitte - festgelegt. An diesen drei Knoten sind die

translatorischen Freiheitsgrade definiert. Diese Knoten legen auch die quadratischen Formfunktionen für die translatorischen Freiheitsgrade fest. Für die rotatorischen Freiheitsgrade werden eigene Formfunktionen definiert, welche durch vier Knoten - Endknoten sind gleich, Mittelknoten sind andere - beschrieben werden. Die beiden Mittelknoten befinden sich an den Integrationspunkten der Gaußschen Regel zweiter Ordnung. Damit 17 Freiheitsgrade erreicht werden, müssen "diskrete Euler Balkenannahmen" angewendet werden. Diese Annahmen besagen, dass dieses Element beschränkt ist auf dünne Balken, bei welchen die Schubdehnungen gering sind gegenüber den Biegedehnungen.

In [43] wird eine Theorie höherer Ordnung zur Beschreibung der Schubverformung bei kurzen Balken aus faserverstärkten Kunststoffen angewendet. Dazu wird eine Formfunktion, welche die sogenannte "higher-order shear deformation beam/plate theory" beschreibt, vorgegeben. Mit deren Hilfe kann die Verwölbung infolge Querkraftschub berechnet werden.

Eine sehr effiziente Methode zur Bestimmung der Schubspannungen, Einheitsverwölbung und Querschnittssteifigkeiten wird in [28] für dünnwandige Balken beschrieben. Für die entsprechenden Finite Elemente Berechnungen ist nur eine Modellierung mit 1d-Elementen in der Querschnittsebene nötig. Alle Lastfälle haben die gleiche Steifigkeitsmatrix und unterscheiden sich nur im Lastvektor je nach gewünschter Querschnittssteifigkeit. Zudem wird eine "rekursive Superelement" Methode präsentiert.

In [13], [26], [27], [69] und [77] wurden Modelle zur Analyse von dünnwandigen Querschnitten unter Torsionsbelastung oder zur Bestimmung der Querschnittssteifigkeiten entwickelt, welche als Eingabegrößen die Einheitsverwölbung benötigen oder diese bestimmen. In den meisten Fällen wird die Einheitsverwölbung auf Basis von [87] ermittelt.

Zur Berechnung der Verschiebung bei dünnwandigen Balken mit geschlossenem Querschnitt unter Torsionsbelastung wurde in [49] die Hypothese vom Erhalt der Querschnittsgestalt gehalten, die Annahme der Unverwölbbarkeit des Querschnitts jedoch modifiziert. Der zentrale Punkt dieser Idee liegt in der Nutzung eines Macroelements, welches sich sehr gut für die Berechnung von dünnwandigen Balken eignet. Das Element wird als Macro-Element bezeichnet, da es die Idealisierung des Balkens in Längsrichtung mit wenigen Elementen erlaubt. Dies gelingt durch Verwendung eines speziellen Verschiebungsansatzes in Balkenlängsrichtung für die Verdrehung und Verdrillung. Es werden jedoch nur die Normalspannungen infolge Wölbkrafttorsion und die Torsionsschubspannungen berechnet. In [50] wird diese Theorie auf offene Querschnitte erweitert und auch dort wird das sogenannte Macroelement genutzt.

Ein abweichender Ansatz wird in [16] verfolgt. Hier werden Regionen des Bal-

kens, die als kritisch erachtet werden, nicht eindimensional, sondern zweidimensional idealisiert für Belastungen jeglicher Art. Gleiches ist auch für ein zweidimensionales Problem möglich, da dort die kritische Region entsprechend dreidimensional idealisiert werden müsste. Hierbei können alle Anisotropie-Eigenschaften abgebildet werden, es müssen aber entsprechende Übergangsbedingungen bei den Dimensionssprüngen von der eindimensionalen auf die zweidimensionale Idealisierung erstellt werden.

1.2.2 Dynamische Analysen

Damit Leichtbaustrukturen nicht in Resonanz geraten und überbelastet werden, ist die Kenntnis bzgl. der Eigenfrequenzen von Gesamtstrukturen nötig. Im Besonderen gilt dies für Hubschrauber-Rotorblätter. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen werden dynamische Analysen bzw. Schwingungsanalysen durchgeführt.

Schwingungsanalysen von dünnwandigen Balken mit I-Querschnitt aus Faserverbundlaminate werden in [33] und [66] durchgeführt. Die behinderte Verwölbung wird dabei unter Einbringung der Wlassowschen Annahmen eingeführt. Es wird jedoch entweder ein eindimensionaler oder ein zweidimensionaler Spannungszustand abgebildet, so dass interlaminare Schubspannungen nicht dargestellt werden können.

In [90] werden statische und dynamische Untersuchungen an Hubschrauber-Rotorblättern unter Biege- und Torsionsbelastung durchgeführt. Diese werden als einzelner geschlossener Querschnitt aus Faserverbundwerkstoffen - bestehend aus mehreren Schichten - modelliert. Es wird festgestellt, dass bei einer abschnittweisen Definition der Einheitsverwölbung in Dickenrichtung sukzessive Korrekturen - hierarchische Verwölbungsfunktionen - für die Analyse von dünnwandigen Balken aus metallischen und faserverstärkten Kunststoffen notwendig sind. Eine größere Rolle spielt dies aber für faserverstärkte Kunststoffe, da dort das Verhältnis zwischen Elastizitäts- und Schubmodul in einem größeren Bereich variiert als bei metallischen Werkstoffen. Diese "multilayer theory" sollte angewendet werden für statische Detailuntersuchung, für dynamische Untersuchung hingegen sei eine homogenisierte Schicht ausreichend [90].

Aufgrund von sogenannten hierarchischen Basisfunktionen wird in [40] eine sogenannte p-Version eines finiten Balkenelements entwickelt, welches Zug-, Biege- und Torsionsbelastungen abbilden kann, um Vibrationen infolge der geometrischen Nichtlinearität zu untersuchen. Hierbei werden jedoch nur beidseitig eingespannte Balken mit kreisförmigem Querschnitt aus isotropen Materialien untersucht, womit Wölbkrafttorsion keine Beachtung findet. Mit Hilfe dieser sogenannten "p-Version" eines finiten Balkenelements kann jedoch die Rechenzeit reduziert werden, da dort Verschiebungsansätze für Balken verwendet werden, welche nur die drei translatorischen

schen und einen rotatorischen Freiheitsgrad beinhalten und damit nur acht Freiheitsgrade pro Balkenelement benötigt werden.

Auch [52] befasst sich mit geometrischer Nichtlinearität. Unter Nutzung des linearisierten Prinzips der virtuellen Arbeit wird ein neues Modell für die generalisierte lineare Analyse von dünnwandigen Balken mit offenen oder geschlossenen Querschnitten aus faserverstärkten Kunststoffen entwickelt. Es werden Effekte aufgrund der Schubweichheit infolge von Biegung und Verwölbung betrachtet. Die Verwölbungsfunktion wird so definiert, dass unterschiedliche Materialien entlang der Querschnittskontur ebenso abgebildet werden wie Wandstärkeeffekte. Auf Basis der Wlassowschen Theorie wird die Einheitsverwölbung bestimmt.

Statische und dynamische Eigenschaften von dünnwandigen Balken mit geschlossenem einzelligem Querschnitt aus Faserverbundlaminaten werden in [68] untersucht. Hierbei werden anisotropes Material, Querkraftschub, Wölbbehinderung und weitere nicht-klassische Effekte berücksichtigt. Die Gleichungen basieren auf dem Prinzip von Hamilton und werden mit der erweiterten Galerkin-Methode gelöst. Hierbei kann ein Zusammenhang zwischen den Eigenfrequenzen und der Faserorientierung nachgewiesen werden. In diesem Fall wird die Einheitsverwölbung erneut nach Wlassow bestimmt.

1.2.3 Geometrisch nichtlineare Untersuchungen

Bei Hubschrauber-Rotorblättern ergeben sich aus der Fliehkraft geometrisch nichtlineare Effekte, die wiederum Einfluss auf die Dehnungen und Spannungen haben.

Unter Vorgabe der Einheitsverwölbung aus der Wlassowschen Theorie werden in [46] und [81] dünnwandige Balken unter Zug-, Biege- und Torsionbelastung betrachtet. Unter Berücksichtigung von Effekten aus der linearen und nicht-linearen Wölbkrafttorsion und aus der Schubweichheit wird ein Balkenelement mit 14 Freiheitsgraden unter Nutzung der Newton-Raphson-Methode abgeleitet. In [82] werden diese Ergebnisse verwendet, um numerische Ergebnisse bezüglich der geometrischen Nichtlinearität für Z- und I-Profile zu erhalten.

In [25] wird die aeroelastische nichtlineare Stabilität von gelenklosen Rotorblättern untersucht. Hierfür wird eine Balkentheorie mit kleinen Dehnungen (physikalisch linear) bei großen Verschiebungen (geometrisch nichtlinear) verwendet. Die Berücksichtigung von Saint Venantscher Torsion und Wlassowscher Wölbkrafttorsion wird durch Einführung einer Mischform erreicht. Ausgegangen wird aber nur von einem ebenen Verzerrungszustand. Ferner wird die torsionsrelevante Verwölbung vorgegeben.

In [30] wird die Berechnung der Steifigkeiten eines linearen und geometrischen nicht-linearen Platten- bzw. Schalenelements in zwei Stufen aufgespalten. Durch

Formfunktionen, welche eine realistischere Dehnungsverteilung abbilden können, wird das Verhalten eines 4-Knoten-Schalenelements verbessert. Damit die inkrementweise durchgeführte nichtlineare Berechnung effizient gehalten werden kann, wird die resultierende Kraft über die Dicke pre-integriert. Verwölbung wird dort nicht im Speziellen betrachtet. Die Aufspaltung der Berechnung in einen vorausgehenden Schritt und einen Hauptschritt verdient aber Erwähnung in dieser Arbeit.

1.2.4 Stabilitätsuntersuchungen an dünnwandigen Balken aus Faserverbundlaminaten

Dünnwandige Strukturen - aus Metall wie auch aus Faserverbundlaminaten - sind anfällig gegen Stabilitätsversagen.

In [32] werden unter Berücksichtigung von Zug-Torsions-Kopplungen und Querschnittsverwölbung Stabilitätsuntersuchungen an dünnwandigen Balken aus Faserverbundlaminaten mit symmetrischen und beliebigen Faserorientierungen unter Druckbelastung durchgeführt. Zur Lösung dieser Fragestellung wird ein numerisches Verfahren verwendet, welches ein allgemeines Eigenwertproblem mit den 14 Freiheitsgraden (Verschiebung in Längsrichtung und deren Ableitung, zwei Verschiebungen in der Querschnittsebene und jeweils deren erste drei Ableitungen, Verdrehung und deren erste drei Ableitungen) löst. Darüber hinaus muss die Einheitsverwölbung bekannt sein.

In [39] wird ein gekrümmtes Dreieckselement für geometrisch nichtlineare Untersuchungen von isotropen Schalen, welche kleinen Dehnungen aber großen Verschiebungen unterliegen, erarbeitet. Dabei wird besonders Wert auf die Verbesserung des Biegeverhaltens des Schalen-Elements mit fünf Freiheitsgraden pro Knoten (drei Translationen und zwei Rotationen des Normalenvektors im Knoten gegenüber der Mittelfläche) gelegt, so dass auch finite Krümmungsänderungen abgebildet werden können. Aus der Dehnungsenergie werden dann die Gleichgewichts- und Stabilitätsbedingungen hergeleitet. Die Verwölbung der Struktur wird durch die 2d-Idealisierung mit Schalenelementen abgedeckt.

1.2.5 Abgrenzung gegenüber der Variational Asymptotic Beam Section Analysis (VABS)

Im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten hat dieses Forschungsgebiet das Ziel den Rechenaufwand für einen dreidimensional idealisierten Balken in eine zweidimensionale Berechnung der Querschnittskennwerte und eine anschließende eindimensionale Balkenberechnung zu zerlegen. Erst danach kann der dreidimensionale Spannungszustand bestimmt werden. Diese Entwicklung wird in [4], [10], [11], [12],

[14], [83], [84], [85], [86] und [89] verfeinert. Zum besseren Verständnis soll nur die Dissertation von Cesnik [9] und das zusammenfassende Buch von Hodges [23] näher betrachtet werden, da diese die geleistete Arbeit am besten zusammenfassen und darstellen. Die VABS wurde von Hodges und seinen Kollegen derart weiterentwickelt, dass geometrische Nichtlinearität und Wölbkrafttorsion für beliebige Querschnitte auch bestehend aus anisotropen Materialien abgebildet werden kann. Hierfür sind keine Annahmen bzgl. des Verschiebungsansatzes in Balkenlängsrichtung nötig, da dieser so allgemein wie möglich angesetzt wird.

Cesnik hat das Ziel, ein dreidimensionales Problem in ein eindimensionales Problem zu überführen und es damit zu vereinfachen. Gleichzeitig soll die gegenseitige Querkontraktionsbehinderung und eine Verwölbung des Querschnitts aus der Querschnittsebene heraus abgebildet werden. Unter diesen Voraussetzungen sollen für die sechs globalen Verformungsgrößen (Zug, Biegung um zwei Achsen, Torsion und Schub um zwei Achsen) die Steifigkeiten bestimmt werden. Da auch die Kopplungsbeziehungen für anisotrope Laminat berücksichtigt werden sollen, wird die Berechnung der Steifigkeiten sehr kompliziert.

In der VABS werden keine Näherungen in den Verschiebungsansatz eingebracht (z.B. Verwendung eines Dickenparameters und Vernachlässigung entsprechender Terme). Vielmehr wird die Dehnungsenergiegedichte U im allgemeinsten Fall angesetzt und anschließend minimiert

$$\min \left(\int U \left[\bar{\epsilon}(x, \zeta) v(x, \zeta), \frac{\partial v(x, \zeta)}{\partial \zeta_\alpha}, v'(x, \zeta) \right] |A| dx + \text{terms ext forces} \right). \quad (1.1)$$

Der Zusammenhang zwischen Dehnungsenergiegedichte U und Steifigkeitsmatrix S lautet wie folgt:

$$2U = \vec{\epsilon}^T S \vec{\epsilon}. \quad (1.2)$$

Dies wird in mehreren Iterationen durchgeführt, so dass sich die Dehnungsenergiegedichte U asymptotisch dem korrekten Wert annähert.

Die vorliegende Arbeit und die Arbeiten von Cesnik und Hodges et al. unterscheiden sich in den Funktionen für die Verschiebungen in Balkenlängsrichtung. So wird in der vorliegenden Arbeit das Verhalten in Balkenlängsrichtung mit der analytischen Lösung beschrieben. Die analytische Lösung ist über die ganze Länge des Balkens gültig, d.h. ein Balkenelement ist ausreichend. Bei Hodges et al. werden die Verschiebungen zwar allgemeiner über Formfunktionen angesetzt (anisotrope Materialien und geometrische Nichtlinearität), jedoch wird hierfür eine ausreichende Knotenanzahl in Balkenlängsrichtung benötigt. Somit ergeben sich bei Hodges für den gleichen Diskretisierungsgrad Modelle, welche ein Vielfaches der Knotenanzahl in Balkenlängsrichtung benötigen als die Modelle der vorliegenden Arbeit. Ferner

kann die Steifigkeitsmatrix für die Balkenelemente aus [23] et al. nur in der VABS verarbeitet werden. Im Gegensatz dazu können die Steifigkeitskennwerte aus der vorliegenden Arbeit in jedes beliebige Finite Elemente Programm eingegeben werden. Der größte Unterschied zu der vorliegenden Arbeit besteht jedoch darin, dass [23] nur Balken mit offenen oder geschlossenen dünnwandigen Querschnitten oder homogenen Vollquerschnitten betrachtet. Das vorhandene Programm SABINA bietet ein breiteres Spektrum und wird im Rahmen dieser Arbeit noch um die Berechnung der Wölbsteifigkeit erweitert (SABINA-NG). Beide Programme haben gegenüber der VABS aber den Nachteil, dass nur orthotrope Materialien berücksichtigt werden und damit Zug-Torsions- und Biege-Torsionskopplungen nicht berücksichtigt werden können.

2 Grundlagen

Zur Vermeidung von Wiederholungen in den folgenden Kapiteln werden Grundlagen und Begriffe der Kontinuumsmechanik, der Finite Elemente Methode und von SABINA für diese Arbeit nachfolgend erläutert.

2.1 Begriffe und Grundgleichungen

Für Strukturberechnungen werden Eingabegrößen benötigt. In der Regel sind dies die Geometrie, die Materialeigenschaften und das Koordinatensystem.

2.1.1 Homogener, homogenisierter, teilhomogenisierter und inhomogener Querschnitt

Die Begriffe homogen, homogenisiert, teilhomogenisiert und inhomogen werden häufig für die Beschreibung des Querschnittsaufbaus verwendet und sollen hier noch einmal klar voneinander abgegrenzt werden (siehe Abbildung 1).

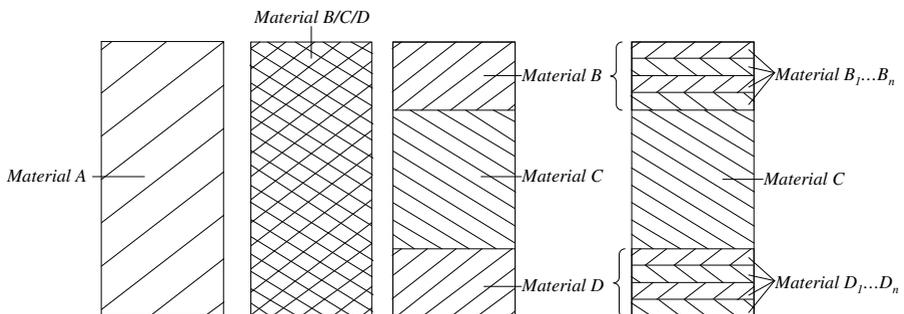


Abbildung 1: Querschnittsaufbau homogen - homogenisiert - teilhomogenisiert - inhomogen

Homogener Querschnitt

Der Querschnitt besteht vollständig aus einem Material. Hierbei kann es sich jeweils um ein isotropes, orthotropes oder anisotropes Material handeln.

Inhomogener Querschnitt

Abbildung 1 zeigt, dass der Querschnitt aus einer beliebigen Anzahl unterschiedli-

cher Materialien, Materialorientierungen und Schichten bestehen kann. Hierbei können isotrope, orthotrope und anisotrope Werkstoffe miteinander kombiniert werden. Die unterschiedlichen Materialien und Schichten werden dabei einzeln betrachtet.

Teilhomogenisierter Querschnitt

Bei teilhomogenisierten Balkenquerschnitten werden mehrere Schichten aus verschiedenen Materialien oder mit verschiedenen Materialorientierungen zu einer Schicht aus einem Material - meist unter Verwendung der klassischen oder erweiterten Laminattheorie - zusammengefasst und die jeweiligen Ingenieurkonstanten bestimmt. Es gehen zwar Informationen bzgl. der Lage der einzelnen Schichten verloren, es ergeben sich jedoch noch ausreichend genaue Ergebnisse.

Homogenisierter Querschnitt

Werden alle Schichten mit verschiedenen Materialien oder Materialorientierungen zu einem Material zusammengefasst und daraus Ingenieurkonstanten bestimmt, gehen alle Informationen bzgl. der Lage der einzelnen Schichten verloren. Infolgedessen erhält man auf Basis der Ingenieurkonstanten bei homogenisierten Querschnitten nur die Zugsteifigkeit korrekt, da diese nicht von der Lage der einzelnen Schichten abhängt. Die Biegesteifigkeit kann zwar aus den Ingenieurkonstanten nicht bestimmt werden, aber sehr wohl direkt aus dem Plattenquadrant der Laminattheorie ermittelt werden. Da sich die Verwendung der Ingenieurkonstanten als sehr hilfreich erweist, wird die Teilhomogenisierung bevorzugt.

2.1.2 Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen

Bezugnehmend auf [24] und [76] lauten die linearisierten Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen ε_i und γ_{ij} :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Die angeführten Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen gelten für infinitesimal kleine Verformungen.

2.1.3 Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen lauten gemäß [19], [21] und [78]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,\tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.\tag{2.4}$$

Die genannten allgemeinen Kompatibilitätsbeziehungen gelten nur unter der Bedingung, dass keine Volumen- bzw. Massenkkräfte vorliegen.

2.1.4 Kompatibilitätsbedingungen

Bezugnehmend auf [21] können mit den Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen aus Gleichung (2.1) aus den drei Verschiebungen u , v und w sechs Verzerrungen berechnet werden. "Dies bedeutet, dass zwischen den Verzerrungskomponenten Beziehungen bestehen müssen. Man gewinnt sie durch Eliminierung der Verschiebungen aus

den Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen und erhält die sogenannten Kompatibilitätsbedingungen für Verzerrungen (St. Venant 1860) dargestellt. Ihr physikalischer Inhalt besagt, dass der stetige Zusammenhalt des Materials bei der Verformung gewahrt bleiben muss, d.h. keine Risse oder Überlappungen vorkommen können” [21].

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right). \quad (2.10)$$

2.1.5 Ursprung und Achsen von Koordinatensystemen

Mit \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} bezeichnete Koordinatensysteme sind beliebige Koordinatensysteme, meistens das Eingabekoordinatensystem. Werden Koordinatensysteme mit x^* , y^* , z^* bezeichnet, liegt der Ursprung im elastischen Schwerpunkt und die Achsen sind in Richtung der Hauptachsen orientiert. In den nachfolgenden Ausführungen wird dies als Hauptachsenkoordinatensystem (HA-KS) bezeichnet. Bei Koordinatensystemen mit Bezeichnung x , y , z liegt der Ursprung im Schubmittelpunkt und die Achsen sind parallel zu den Hauptachsen orientiert. Dies wird im Folgenden als Schubmittelpunktkoordinatensystem (SMP-KS) bezeichnet. Der Schubmittelpunkt wird nach der Theorie von Wlassow in Kapitel 3 erklärt. Der Vollständigkeit halber wurde noch der Massenschwerpunkt in Abbildung 2 eingefügt, da dieser nicht zwangsläufig mit dem elastischen Schwerpunkt zusammenfällt. Alle Koordinatensysteme sind exemplarisch in Abbildung 2 dargestellt.

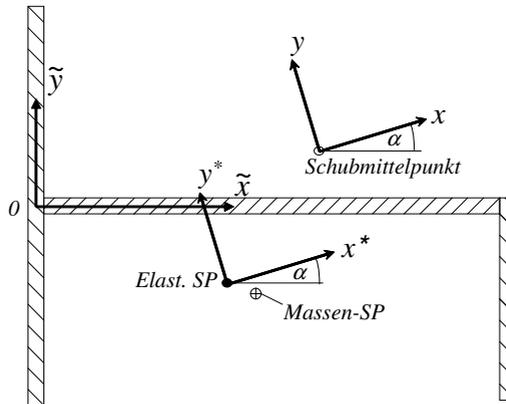


Abbildung 2: Profil mit Koordinatensystemen

2.1.6 Querkontraktion

Belastet man einen Stab in Längsrichtung, so verlängert sich der Stab in Zugrichtung. Gleichzeitig kontrahiert sich der Stab in Querrichtung (siehe Abbildung 3). Dieses Verhalten nennt man Querkontraktion. Die Querkontraktionszahl ν beschreibt bei einachsigem Zug das negative Verhältnis der Dehnungen quer zur Zugrichtung gegenüber der Dehnung entlang der Zugrichtung.

Es gilt für isotrope Werkstoffe:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}. \quad (2.11)$$

Für orthotrope Werkstoffe wird die Querkontraktionszahl mit ν_{ij} bezeichnet. Hierbei gibt i die Kraftrichtung und j die Kontraktionsrichtung an. Für die Probe aus Abbildung 3 folgt damit:

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}. \quad (2.12)$$

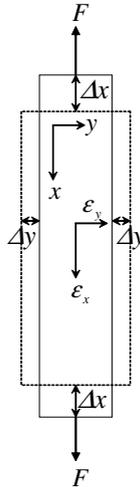


Abbildung 3: Einachsiger Zugversuch inklusive Dehnungen

2.2 Grundlagen der Finiten Elemente Methode

In den Naturwissenschaften beschreiben häufig partielle Differentialgleichungen technische Phänomene. Diese partiellen Differentialgleichungen können analytisch meistens nur für sehr einfache Probleme gelöst werden. Für alle anderen Fälle kommen somit Näherungsverfahren zur Anwendung.

Die Finite Elemente Methode stellt das wichtigste Näherungsverfahren der Strukturmechanik dar. Anwendungsgebiete der Finiten Elemente Methode finden sich in der linearen Elastizitätstheorie, in der Plastizitätstheorie, bei der Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten, Sickerströmungen poröser Stoffe, bei Potentialströmungen, Wärmeleitungsphänomenen, bei elektrischen oder magnetischen Feldern und bei Eigenwertproblemen (Schwingungen und Stabilität). Dieses Kapitel skizziert - basierend auf [2], [21], [34], [75] und [91] - die Grundlagen der Finiten Elemente Methode.

Vorbenannte Methode zerlegt das Kontinuum in einzelne endliche Teile. Diese endlichen Teile werden Finite Elemente genannt. Ein derartiges Finites Element ist durch mehrere Knotenpunkte und Ränder begrenzt. Die Anzahl der Knotenpunkte hängt zum einen von der Art des Elements (Linielement, Flächenelement oder Volumenelement) und zum anderen von dem gewählten Verschiebungsansatz innerhalb des Elements ab. Die Zerlegung des Kontinuums bezeichnet man als Diskretisierung oder Finitisierung. Dabei wird das Verformungsverhalten innerhalb der Elemente

durch die Knotenpunktparameter - die diskreten Verformungen in den Knoten - und durch sogenannte Formfunktionen beschrieben. Die Verschiebung im Inneren eines vierknotigen Elements (siehe Abbildung 4) lautet damit

$$v(x, y) = n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 + n_4 v_4. \quad (2.13)$$

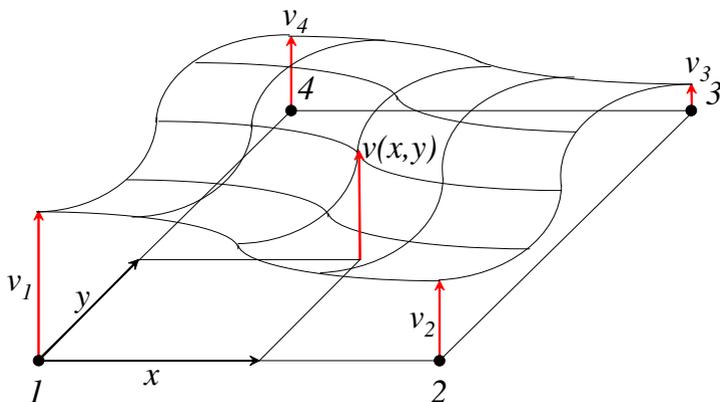


Abbildung 4: Verschiebung an Knotenpunkten und im Element

Für die Verträglichkeit eines Ansatzes müssen für Volumenelemente die Verformungen und zusätzlich für ein- oder zweidimensionale Elemente die Verdrehungen stetig und in der Regel differenzierbar sein. Dies gilt sowohl innerhalb eines Elements wie auch an den Rändern zusammenhängender Elemente. Nur Formfunktionen, die dieser Forderung genügen, dürfen zur Finitisierung von Kontinua verwendet werden.

Weiterhin darf keine Richtung durch die Formfunktionen bevorzugt werden. Dies erreicht man mit vollständigen (bilinearen, biquadratischen oder bikubischen) Polynomen. Die Entscheidung bzgl. des Polynomgrades der Formfunktion hängt von der gewünschten Auflösungsgenauigkeit ab. Diese ist aber auch an den Diskretisierungsgrad des Kontinuums gekoppelt. So liefert eine bilineare Formfunktion mit halber Elementkantenlänge dieselbe Genauigkeit bzgl. der Verformungen wie eine biquadratische Formfunktion über die ganze Länge. In beiden Fällen ergeben sich für das jeweilige Kontinuum nahezu identische Zahlen für Knotenpunkte und damit nahezu identische Rechenzeiten. Unterschiede ergeben sich jedoch bei Dehnungen und Spannungen. Bei biquadratischen Formfunktionen verlaufen diese linear innerhalb des Elements, für bilineare sind sie konstant innerhalb eines Elements. Das Verhalten der bilinearen Formfunktionen entspricht zwar weniger der Realität als das der

biquadratischen Formfunktionen, es liefert in der Regel aber hinreichend genaue Ergebnisse bei entsprechender Elementkantenlänge und findet daher in der Praxis auch am häufigsten Anwendung. Als Beispiel seien hier die bilinearen Formfunktionen für ein rechteckiges Viereckelement angegeben (siehe auch Abbildung 5):

$$n(x, y) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} & -\frac{x-x_1}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} & \frac{x-x_1}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_1-y_2} & -\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_1-y_2} \end{array} \right).$$

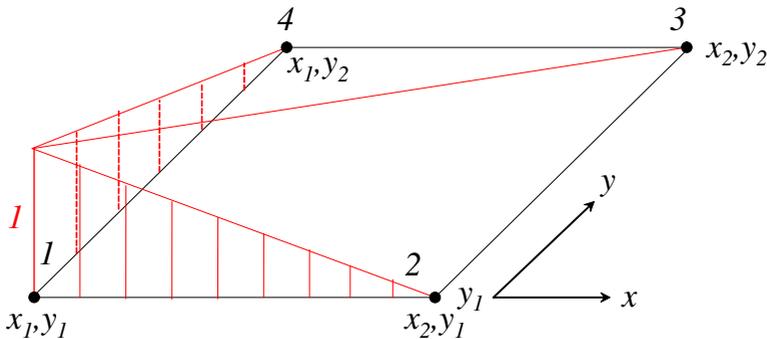


Abbildung 5: Bilineare Formfunktion

Wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, stellt die Finite Elemente Methode das wichtigste numerische Näherungsverfahren für die Lösung partieller Differentialgleichungen der Strukturmechanik dar. Analytische Näherungsverfahren sind die Energie- und Variationsprinzipien der Mechanik. Sie liefern durch "mathematische Vereinfachungen Funktionen, die sich den exakten Lösungsfunktionen der grundlegenden Differentialgleichungen annähern" [21].

Die numerischen Näherungsmethoden liefern auf verschiedenen Wegen direkte Näherungslösungen für die Differentialgleichungen. Sie sind hauptsächlich dadurch gekennzeichnet, dass im Verlauf der Rechnung numerische Werte der wichtigen Veränderlichen verwendet werden.

Bei jedem exakten Lösungsverfahren müssen ebenso wie bei jedem Näherungslösungsverfahren der Elastizitätstheorie die folgenden physikalischen Bedingungen erfüllt sein:

1. Kompatibilitätsbedingungen: Kinematische Verträglichkeit von Verschiebungen und Verzerrungen, d.h. kein Klaffen oder Überlappen des Materials
2. Gleichgewichtsbedingungen: Statische Verträglichkeit von Kräften und Spannungen

3. Stoffgesetz: Spannungs-Dehnungsbeziehungen

Bei der Finiten Elemente Methode wird ein Verschiebungsansatz für jedes Element angenommen, welcher im gesamten verformbaren Körper stetig ist. Die nichtbefriedigten Gleichgewichtsbedingungen werden dadurch erfüllt, dass die inneren Kräfte näherungsweise mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit berechnet werden. Somit sind bei einem Verschiebungsansatz, der immer die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt, die Spannungen an der Elementkante nicht im Gleichgewicht. Die Befriedigung der Gleichgewichtsbedingung erfolgt auf Elementebene "im Mittel", indem die angenäherte potentielle Energie minimiert wird. Diese Methode steht damit in enger Verwandtschaft zu den klassischen Näherungsverfahren nach Rayleigh-Ritz und Galerkin. Im Gesamtsystem wird das Gleichgewicht an den Knoten perfekt erfüllt.

2.2.1 Finite Elemente Methode am Beispiel zweier in Reihe geschalteter Stäbe

Zur Bestimmung von Elementsteifigkeitsmatrizen sei nachfolgendes Beispiel - in Anlehnung an [21] und [34] - angeführt. Es werden zwei in Reihe geschaltete Stäbe - wie in Abbildung 6 dargestellt - betrachtet, welche in den Knoten 1, 2 und 3 mit den Kräften F_1 , F_2 und F_3 belastet werden.

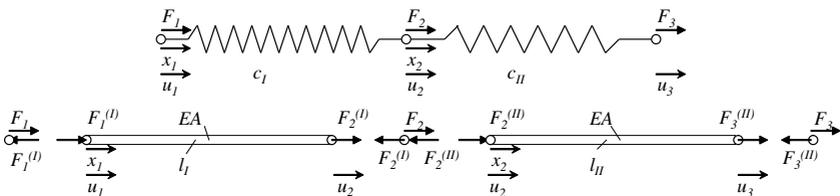


Abbildung 6: Zwei in Reihe geschaltete Stäbe

Folgende Verschiebungsansätze gelten in Stab *I* und *II* für die Verschiebungen u in Abhängigkeit der Knotenverschiebungen u_1 , u_2 und u_3 :

$$u_I = \begin{bmatrix} \frac{(l_I-x)}{l_I} & \frac{x}{l_I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$u_{II} = \begin{bmatrix} \frac{(l_{II}-x)}{l_{II}} & \frac{x}{l_{II}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Stellt man die Beziehungen für die Normalkraft im Element auf, erhält man mit den Material- und Geometrieigenschaften mit $N = EA \frac{\partial u}{\partial x}$ und unter Berücksichtigung

der Orientierung der Kraftvektoren $F_i^{(j)}$ die sogenannten Elementsteifigkeitsmatrizen:

$$\begin{pmatrix} F_1^{(I)} \\ F_2^{(I)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_I} & \frac{-EA}{l_I} \\ \frac{-EA}{l_I} & \frac{EA}{l_I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} F_2^{(II)} \\ F_3^{(II)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_{II}} & \frac{-EA}{l_{II}} \\ \frac{-EA}{l_{II}} & \frac{EA}{l_{II}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Aufstellung und Lösung der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Stellt man nun das Gleichgewicht an den Knoten auf, erhält man:

$$F_1^{(I)} = F_1 \quad (2.16)$$

$$F_2^{(I)} + F_2^{(II)} = F_2 \quad (2.17)$$

$$F_3^{(II)} = F_3 \quad (2.18)$$

Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_I} & \frac{-EA}{l_I} & 0 \\ \frac{-EA}{l_I} & \frac{EA}{l_I} + \frac{EA}{l_{II}} & \frac{-EA}{l_{II}} \\ 0 & \frac{-EA}{l_{II}} & \frac{EA}{l_{II}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \quad (2.19)$$

Bei der Matrix in Gleichung (2.19) handelt es sich nun um die Gesamtsteifigkeitsmatrix K . Diese stellt vorerst aber nur eine Beziehung zwischen Knotenpunktkräften sowie Knotenpunktverschiebungen dar und liefert noch keine Aussage über die Kräfte F_1 , F_2 und F_3 . Bei diesen handelt es sich entweder um aufgebrauchte Lasten (äußere Kräfte) oder Reaktionskräfte (Auflagerlasten). Ferner ist diese Matrix singulär und damit nicht invertierbar. Da der Grund für die Singularität der Matrix in den möglichen Starrkörperverschiebungen liegt, müssen diese behindert werden. Die Art der Behinderung beschreiben die Randbedingungen. Werden diese berücksichtigt, wird die Matrix nicht singulär und damit invertierbar. Im vorliegenden Beispiel soll die Verschiebung bei u_3 behindert werden, d.h. $u_3 = 0$. Damit ergibt sich für das Gleichungssystem aus Gleichung (2.19):

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l^{(I)}} & \frac{-EA}{l^{(I)}} & 0 \\ \frac{-EA}{l^{(I)}} & \frac{EA}{l^{(I)}} + \frac{EA}{l^{(II)}} & \frac{-EA}{l^{(II)}} \\ 0 & \frac{-EA}{l^{(II)}} & \frac{EA}{l^{(II)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$

Da die Reaktionskraft F_3 an der Stelle der Behinderung $u_3 = 0$ nicht bekannt ist, wird zuerst der Teil des Gleichungssystems mit den bekannten Kräften und den unbekanntem Verschiebungen gelöst. Man spricht hier auch von der Partitionierung der Gleichung (2.20).

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l(I)} & \frac{-EA}{l(I)} \\ \frac{-EA}{l(I)} & \frac{EA}{l(I)} + \frac{EA}{l(II)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.21)$$

Abschließend kann die Reaktionskraft F_3 aus den nunmehr bekannten Verformungen berechnet werden:

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-EA}{l(II)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.22)$$

Die Lösung von Gleichung (2.21) liefert die beiden verbliebenen unbekanntem Verschiebungen. Gleichung (2.22) liefert im Anschluss die unbekanntem Auflagerreaktion. Somit ist der Zusammenhang zwischen äußeren Kräften, Auflagerlasten, Randbedingungen und Knotenpunktverschiebungen hergestellt.

Die inneren Kräfte oder Schnittreaktionen lassen sich mit den entsprechenden Elementgleichungen (2.15) aus den nun bekannten Knotenpunktverschiebungen bestimmen:

$$S_I = \frac{EA}{l(I)} (u_2 - u_1) = -F_1, \quad (2.23)$$

$$S_{II} = \frac{EA}{l(II)} (u_3 - u_2) = -(F_1 + F_2). \quad (2.24)$$

Unter Verwendung eines Verschiebungsansatzes kann ausgehend von den Material- und Geometrieigenschaften über die Gleichgewichtsbeziehung an den Knoten ein Gleichungssystem zwischen Knotenkräften und Knotenverschiebungen aufgestellt werden. Berücksichtigt man dort die Randbedingungen kann dieses nach den unbekanntem Verschiebungen gelöst werden. Mit letzteren können sowohl die Auflagerkräfte als auch die Schnittkräfte bestimmt werden.

2.2.3 Forderung an Verschiebungsansätze und Koordinatentransformation

Die Verschiebungsansätze hängen vom Elementtyp (Linien-, Flächen- oder Volumenelement) und der Ordnung des Verschiebungsansatzes ab. Jeder Verschiebungsansatz muss den nachfolgenden Forderungen genügen:

1. Vollständigkeit des Ansatzes: Die Vollständigkeit des Ansatzes besteht im Erfassen der Starrkörperverrückungen und eines konstanten Verzerrungszustandes, d.h. der Verschiebungsansatz muss konstante und lineare Terme enthalten.
2. Kompatibilität des Ansatzes: Die Verschiebungen müssen innerhalb eines Elements und an den Rändern und Flächen zusammenhängender Elemente verträglich sein, d.h. sie dürfen keine Sprünge und Knicke aufweisen. Für Biegebalken, Platten und Schalen muss dies auch für die ersten Ableitungen - die Verdrehungen - gefordert werden.
3. Geometrische Isotropie des Ansatzes: Im Ansatz sollte keine Richtung vor den anderen bevorzugt sein. Im zweidimensionalen Fall wird dies mit vollständigen, bilinearen, biquadratischen oder bikubischen Polynomen erreicht.
4. Drehungsinvarianz des Ansatzes: Bei einer Koordinatentransformation bleibt die Anzahl der linear unabhängigen Terme der Ansatzfunktion erhalten. Bei vollständigen Polynomen ist dies stets der Fall.

2.2.4 Verallgemeinerung Matrix-Steifigkeitsmethode

Überwiegend werden die Elementsteifigkeitsmatrizen mit der Verschiebungsmethode aufgestellt, da diese ohne Unterschied sowohl für global statisch bestimmte als auch global statisch unbestimmte Lagerungsfälle verwendbar ist. Wenn m die Anzahl der Freiheitsgrade pro Element ist, ergibt sich folgender grundlegender Zusammenhang zwischen Knotenkräften und -verschiebungen (Elementgleichung):

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & \dots & \dots & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{Bmatrix}. \quad (2.25)$$

Nachdem die Steifigkeitsmatrizen für die einzelnen Elemente bekannt sind, kann daraus die Gesamtsteifigkeitsmatrix gebildet werden. Diese erhält man durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knotenpunkt. Dadurch ergibt sich

folgendes Gleichungssystem aus den äußeren Kräften an jedem Knotenpunkt \vec{F}_n , der Gesamtsteifigkeitsmatrix K und den Knotenverschiebungen \vec{u}_n :

$$\vec{F}_n = K \cdot \vec{u}_n. \quad (2.26)$$

Zusammengefasst sind folgende Schritte bei der Finiten Elemente Methode abzuarbeiten:

1. Gesamtsystem diskretisieren.
2. Elementsteifigkeitsmatrizen aufstellen, z.B. mit der Verschiebungsmethode und dem Prinzip der virtuellen Arbeit (eindeutiger Zusammenhang zwischen Knotenpunktverschiebungen und -kräften).
3. Gleichgewicht an den Knoten aufstellen. Daraus folgt die Gesamtsteifigkeitsmatrix (evtl. mit Hilfe von Koordinatentransformationen).
4. Randbedingungen einarbeiten.
5. Verschiebungen bestimmen.
6. Äußere Kräfte bzw. Auflagerkräfte berechnen.
7. Innere Kräfte bzw. Spannungen bestimmen.

2.3 SABINA - Programm zur Bestimmung der Steifigkeiten von beliebigen Balkenquerschnitten

Wie in Kapitel 1 erläutert, können Balkenstrukturen vielfältig idealisiert werden. In einem vorhandenen Programm zur Bestimmung der Steifigkeiten von beliebigen Balkenquerschnitten - SABINA - werden aufwendige 3d-Idealisierungen für Balkenstrukturen durch eine 2d-Idealisierung ersetzt ([57] und [58]).

In SABINA werden mittels zweidimensionaler Finiten Elemente Berechnung der dreidimensionalen Spannungszustand und daraus die Steifigkeiten beliebiger Balken im ungestörten Bereich ermittelt. Dies gelingt, da das Verhalten über die Länge bekannt ist und damit über die Länge problemlos integriert werden kann. Lasteinleitungseffekte bleiben bei diesem Vorgehen unberücksichtigt. Die aus dieser Betrachtung resultierenden Steifigkeiten des Balkens können als Eingabegrößen sowohl für nachfolgende eindimensionale Berechnungen, wie z.B. im Rahmen dieser Arbeit für die Bestimmung des Einflusses auf die Torsionseigenfrequenz des Balkens, als auch für die 1d-Idealisierungen von Balken in Gesamtflugzeugmodellen verwendet werden.

In [88] wurden spezielle zweidimensionale Elemente entwickelt, mit deren Hilfe sich die Querschnittsverwölbung infolge Querkraftbelastung inhomogener Balken beschreiben lässt. Es wird dort angenommen, dass die Querschnittsteile zwar miteinander verbunden sind, sich aber unabhängig voneinander verformen. Aus den Querschnittsverwölbungen wird die Schubspannungsverteilung und der mittlere Schubwinkel bestimmt. Durch Integration der Schubspannungsverteilung über die Querschnittsfläche erhält man die Querkräfte. Aus diesen und den mittleren Schubwinkeln erhält man die Schubsteifigkeiten. Zusätzlich wird noch das Torsionsmoment aus den Schubspannungen ermittelt, womit abschließend aus dem Momentengleichgewicht der Schubmittelpunkt berechnet wird. Als wesentliches Element der Arbeit [88] ist festzuhalten, dass die Querschnittskennwerte mittels einer zweidimensionalen Berechnung bestimmt werden und damit keine aufwendige dreidimensionale Betrachtung des Bauteils notwendig ist. Für die Lösung des Querkraftproblems wurden die Saint Venantschen Annahmen ($\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$) angewendet sowie die Störungen im Bereich der Einspannstelle bzw. der Krafteinleitung vernachlässigt. Ferner wurden Effekte aus der gegenseitigen Verformungsbehinderung aufgrund unterschiedlicher Querkontraktionszahlen nicht berücksichtigt. In einer dreidimensionalen Vergleichsrechnung konnte jedoch nachgewiesen werden, dass die Güte der Näherung der entwickelten zweidimensionalen Elemente brauchbare Ergebnisse erzielt. In [88] wurde aber eine Weiterführung der Arbeit auf dem Gebiet der gegenseitigen Behinderung infolge Inhomogenität vorgeschlagen. "Mit Hilfe von weiteren räumlichen Idealisierungen sollten allgemeine Aussagen über die Abhängigkeit des Spannungs- und Verformungsverhaltens in Balkenlängsrichtung ermittelt werden, um eine Lösungsmöglichkeit auf der Basis eines zweidimensionalen ebenen Problems zu schaffen" [88]. Das erweiterte Modell solle die Querschnittsverformungen unter Berücksichtigung von Querkontraktionseffekten wiedergeben, da diese eine Erhöhung der Steifigkeit bewirken können. Jedoch wurde von Wörndle bereits festgestellt, dass "die gegenseitige Behinderung von der Biegespannung hervorgerufen wird und damit auch von ihrem Verlauf abhängig ist" und damit "die Wölbsteifigkeitsmatrix bei geänderter Lastrichtung neu erstellt werden" müsste. Selbst für dieses zweidimensionale Problem wäre dann ein erhöhter Rechenaufwand nötig.

Diese Idee wird von Rapp in [53] und [56] aufgegriffen und zum Schwerpunkt dieser Arbeiten gemacht. Hierbei werden zunächst Zug-, reine Biege- und Temperaturbeanspruchung betrachtet. Mit den Annahmen aus der Technischen Biegetheorie nach Bernoulli - Ebenbleiben des Querschnitts und eindimensionaler Spannungszustand - konnte die Fragestellung auf ein zweidimensionales Problem reduziert werden. Somit "ist dann nur noch ein Problem des verallgemeinerten ebenen Verzerrungszustandes zu lösen" [53]. Für dickwandige, mehrschichtige Kreisrohre konnte dieses Problem analytisch gelöst werden. Für beliebige Querschnitte muss jedoch die Finite Elemente Methode angewendet werden. Da die Verformungsbehinderung infolge un-

terschiedlicher Querkontraktionszahlen “eine zusätzliche Zwangsbedingung für die Verformung des Balkens darstellt, ist mit ihr stets eine Erhöhung der Steifigkeit verbunden. Bezüglich der Temperaturexpansionskoeffizienten kann eine solche Aussage nicht getroffen werden.” [53] Darüber hinaus können mit diesen Arbeiten die Schälspannung und die interlaminaren Schubspannungen an den freien Rändern bestimmt werden. Diese sind u.a. wichtig, da sie die Festigkeit von Bauteilen erheblich beeinflussen können. Zur Verdeutlichung des Effekts aus der Querkontraktionsbehinderung dient Abbildung 7. Dort ist die Querschnittsverformung, welche Verformungen zwischen den einzelnen Materialien als unabhängig annimmt, dem realen Verhalten gegenübergestellt.

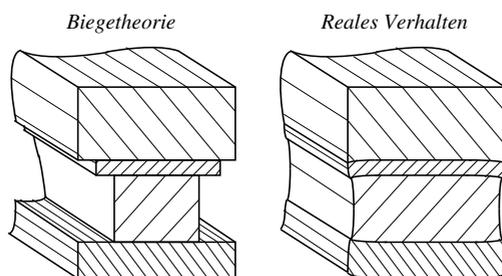


Abbildung 7: Verformungsverhalten

Querkraftbiegung wurde bei dieser Arbeit nicht berücksichtigt, da die Annahme vom Ebenbleiben des Querschnitts verletzt würde. Durch Kombination mit [88] kann diesem aber abgeholfen werden.

In SABINA [57] und [58] wurde die Bedingung vom Ebenbleiben des Querschnitts sowie vom Erhalt der Querschnittsgestalt aufgehoben. Bei einer Belastung in x -Richtung (Balkenkrümmung $\kappa_y = \frac{1}{x_0}$) werden für jeden Querschnittspunkt des Balkens folgende Verschiebungsansätze für die Lagerungsbedingungen aus Abbildung 8 aufgestellt:

$$u(x, y, z) = \bar{u}(x, y) \left(1 - \frac{z}{l}\right) + \frac{1}{x_0} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6l}\right), \quad (2.27)$$

$$v(x, y, z) = \bar{v}(x, y) \left(1 - \frac{z}{l}\right),$$

$$w(x, y, z) = w_Q(x, y) - \frac{x}{x_0} \left(z - \frac{z^2}{2l}\right).$$

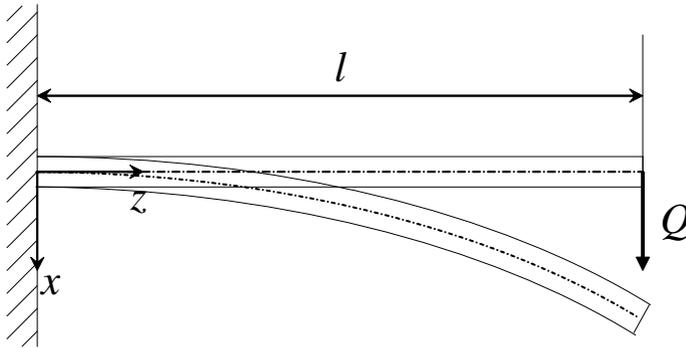


Abbildung 8: Lagerungsbedingung für Biegung um die y-Achse

Die Verschiebungsansätze aus Gleichung (2.27) berücksichtigen - jeweils in den ersten Termen - die Querschnittsverformungen infolge der Querkontraktion resultierend aus den Biegespannungen und die Verwölbung des Querschnitts in Balkenlängsrichtung. Aus den globalen Gleichgewichtsbedingungen werden die entsprechenden Differentialgleichungen für die Lösung der Lastfälle für Zug, Querkraftbiegung und Temperatur aufgestellt. Da inhomogene Balken und beliebige Querschnittsgeometrien betrachtet werden sollen, können diese Differentialgleichungen nicht analytisch gelöst werden. Somit bedarf es eines numerischen Lösungsverfahrens. Hierfür bedient man sich der Methode der Finiten Elemente und des Prinzips der virtuellen Arbeit. Als Ergebnis ergeben sich die Querschnittsverformungen. Aus diesen werden wiederum die Zug- und Biegesteifigkeiten sowie die Temperatureausdehnungskoeffizienten bestimmt. Ferner erhält man auch noch den elastischen Schwerpunkt und den Schubmittelpunkt.

SABINA arbeitet sequentiell folgende Berechnungsschritte ab:

1. Einlesen der Geometrie- und Materialdaten im beliebigen Koordinatensystem.
2. Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen für die Lastfälle Zug-, Querkraftbiegung und Temperatur.
3. Lösung nach den Querschnittsverzerrungen für die Lastfälle aus 2.
4. Berechnung der Spannungen für die Lastfälle aus 2.
5. Bestimmung der Zug- und Biegesteifigkeiten sowie der resultierenden Temperatureausdehnungs- und -krümmungskoeffizienten.
6. Ermittlung des elastischen Schwerpunktes und der Hauptachsen.

7. Bestimmung der entkoppelten Zug- und Biegesteifigkeiten sowie der Temperaturendeckungskoeffizienten im HA-KS.
8. Transformation der Knotenkoordinaten aus dem beliebigen Koordinatensystem in das HA-KS.
9. Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen für die Berechnung der Querschnittsverwölbung infolge Querkraftbiegung und Torsion.
10. Lösung nach der Querschnittsverwölbung infolge Querkraftbiegung und Torsion.
11. Berechnung der Spannungen und des mittleren Schubwinkels.
12. Bestimmung der Schub- und Torsionssteifigkeiten.
13. Ermittlung des Schubmittelpunktes.

Damit sind für den Balken die resultierenden Temperaturendeckungs- und -krümmungskoeffizienten und die sechs Steifigkeitskennwerte bekannt, mit denen Zug, Biegung, Querkraftschub und Saint Venantsche Torsion berechnet werden können. Da die Wölbsteifigkeit infolge Wölbkrafttorsion nicht berechnet wird, kann diese Steifigkeit nicht als Eingabegröße in andere Rechnungen weitergegeben werden, d.h. Wölbkrafttorsion bliebe in derartigen Rechnungen unberücksichtigt.

3 Wölbkrafttorsion nach Wlassow

Ausgehend von [19] und [87] wird nun die Wölbkrafttorsion dargestellt. Eine Torsionsbeanspruchung eines Balkens liegt vor, wenn eine Verdrehung $\vartheta(z)$ um eine Längsachse auftritt und sich gleichzeitig die Größe dieser Verdrehung über die Längsachse ändert, d.h. wenn der Träger um $\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \vartheta'(z)$ verdrillt bzw. verwunden wird. Abbildung 9 zeigt eine derartige Beanspruchung.

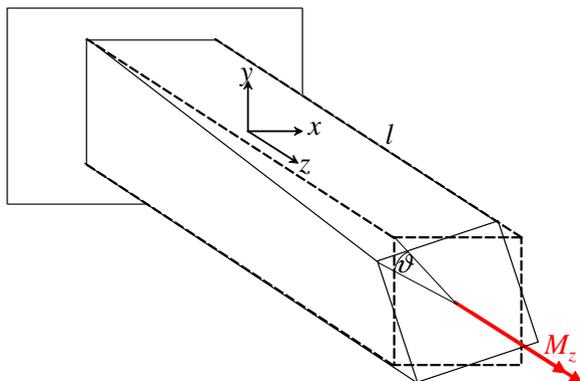


Abbildung 9: Torsionsbeanspruchung eines Balkens

Über die äußere Einwirkung ist eine Torsionsbeanspruchung nicht immer eindeutig gekennzeichnet. Nicht nur Querlasten, die außerhalb des Schubmittelpunktes angreifen, sondern auch außermittig angreifende Axialkräfte oder Einzelmomente können gemäß [87] einen Träger auf Torsion beanspruchen. In diesen Fällen bleibt der Querschnitt nicht mehr eben, sondern verwölbt sich. Damit sind die Voraussetzungen der Technischen Biegetheorie nicht mehr erfüllt. Bleibt diese Verwölbung unbehindert, entstehen keine zusätzlichen Spannungen im Balken. Wird diese Verwölbung jedoch behindert, entstehen zusätzliche Normalspannungen in Balkenlängsrichtung. Damit diese Torsionsbeanspruchung über die Schnittgrößen des Trägers beschrieben werden kann, wird außer des Torsionsmomentes M_T auch das Wölbmoment W als weitere Schnittgröße benötigt. Letzteres ist mit keiner der bekannten sechs Schnittgrößen der Technischen Elastizitätstheorie identisch und erfordert aufgrunddessen eine Erweiterung dieser Theorie. Es ist daher zwischen der Saint Venantschen Torsion und der Wölbkrafttorsion zu unterscheiden. Beide Torsionsbeanspruchungen sind immer mit Schubspannungen verbunden.

Für die Saint Venantsche Torsion müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Die Stab- bzw. Balkenachse ist gerade.
2. Es treten nur Verdrehungen $\vartheta(z)$ um die Längsachse auf, wobei sich die Drehachse frei einstellen kann. Verschiebungen normal zur Stabachse sind nicht vorhanden.
3. Querschnittsverformungen im belasteten Zustand treten nicht auf.
4. Es wird ein linear-elastisches Werkstoffgesetz (Hookesches Gesetz) angenommen, so dass die Gleichungen der Mathematischen Elastizitätstheorie gelten.
5. Es wird von einem isotropen Werkstoffverhalten ausgegangen.
6. Es werden kleine Verdrehungen vorausgesetzt, so dass alle geometrischen Beziehungen linearisiert werden können.
7. Der Querschnitt des Trägers sei homogen und abschnittsweise prismatisch.

Mit diesen Voraussetzungen können Verschiebungen eines beliebigen Querschnittspunktes, die sich aus einer Verdrehung eines Querschnitts um einen Pol D ergeben, rein geometrisch ermittelt werden. Der Kreisbogen, auf dem sich der beliebige Punkt P um die Drillachse D dreht, kann aufgrund des sehr kleinen Winkels $\vartheta(z)$ durch die Tangente an den Kreisbogen bei einer Bewegung von P_1 nach P_2 ersetzt werden (siehe Abbildung 10). Inwieweit die Drillachse D mit dem Schubmittelpunkt übereinstimmt, wird in diesem Kapitel geklärt. Die Beantwortung dieser Frage ist für die Berechnung der Wölbsteifigkeit wichtig, da eine verschobene Drillachse gemäß Tabelle 18 signifikanten Einfluss auf die Wölbsteifigkeit hat.

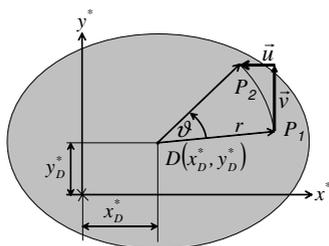


Abbildung 10: Zusammenhang zwischen Verdrehung und Verschiebungen

3.1 Voraussetzungen für Wölbkrafttorsion

Bei behinderter Verwölbung, z.B. durch Lagerung, Querschnittsänderungen oder veränderlicher Torsionsbelastung, liegt keine Saint Venantsche Torsion (siehe Anhang A.1) mehr vor. Man spricht dann von Wölbkrafttorsion. Bei Wölbkrafttorsion treten neben den Schubspannungen auch Normalspannungen auf. Ferner wird ein Teil des Torsionsmomentes über die Schubspannungen aus der Saint Venantschen Torsion (primäres Torsionsmoment) und ein Teil über die Wölb Schubspannungen (sekundäres Torsionsmoment) abgetragen. Der Einfluss der Wölbkrafttorsion bei offenen Profilen ist im allgemeinen größer als bei geschlossenen. Im angelsächsischen Raum spricht man auch von Warping Torsion oder Non-Uniform Torsion. Für dünnwandige Profile hat Wlassow [87] eine Theorie entwickelt, welche keine Spannungsfunktion wie in Anhang A.1 benötigt.

Für folgende Fälle können Ausnahmen gemacht werden, da dort auch bei Wölbbehinderung die Behandlung nach der Saint Venantschen Theorie ausreichend ist:

1. Träger mit wölbfreien Querschnitten erfüllen immer die Voraussetzungen der Saint Venantschen Torsion, sobald sie sich um den Schubmittelpunkt drehen können. Dies gilt für die Profile aus Abbildung 11, wenn die Wanddicke vernachlässigt wird.
2. Dünnwandige geschlossene Profile und Vollprofile verwölben sich zwar unter Torsion, aber die Verwölbungen bleiben relativ klein. Der weitaus größte Anteil der Belastung wird über die Saint Venantsche Torsion abgeleitet. In den meisten Fällen können daher die Effekte der Wölbkrafttorsion vernachlässigt werden. Die Berechnung nach der Saint Venantschen Torsion liefert ausreichend genaue Ergebnisse.

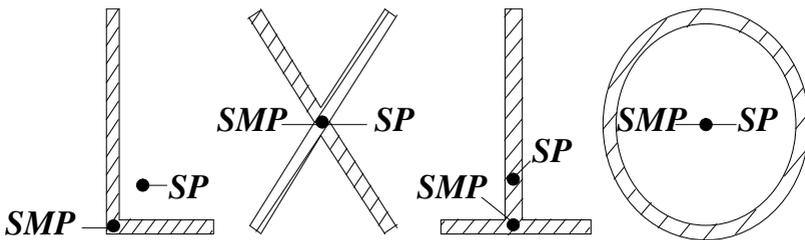


Abbildung 11: Wölbfreie Profile

Die Theorie dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil von Wlassow baut auf folgende Annahmen auf:

1. Der dünnwandige Stab mit offenem Profil wird betrachtet wie eine Schale mit starrer (nichtverformbarer) Querschnittskontur (Erhalt der Querschnittsgestalt).
2. Die Schubverzerrung in der Mittelfläche, die durch die Änderung des rechten Winkels zwischen den Koordinatenlinien $z = \text{const.}$ und $s = \text{const.}$ gekennzeichnet ist, wird zu Null angenommen. Somit verhält sich der Stab bei einer äußeren Querbelastung wie ein starrer Körper. Infolgedessen werden die Normal- und Schubspannungen im Stabquerschnitt aus dieser Belastung gleich Null. Diese Annahme ist in der Realität verletzt. In Wirklichkeit treten diese "Schubdeformationen in der Stabmittelfläche auf, werden aber aufgrund ihrer Kleinheit zu Null angenommen" [87]. Gleichung (3.1) spiegelt dies wieder:

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} = 0. \quad (3.1)$$

Hierbei wurde von Wlassow jedoch festgestellt, dass bei Wölbkrafttorsion an dünnwandigen Stäben die Annahme vom "Gesetz der ebenen Querschnitte" [87] nicht mehr gilt und verallgemeinert werden muss. Die Abweichung vom "Gesetz der ebenen Querschnitte" wird als Verwölbung bezeichnet.

3.2 Verwölbungen bei dünnwandigen Profilen

Bezugnehmend auf [87] soll der Aufwand zur Bestimmung der Einheitsverwölbung ω für dünnwandige Profile reduziert werden. Da der Weg über die Spannungsfunktion ψ - wie in Anhang A.1.7 dargestellt - einen großen Aufwand mit sich bringt, greift man auf die zweite Hypothese von Wlassow zurück und fordert die Schubverformung in der Mittelfläche zu Null. Bevor dies durchgeführt wird, werden aber noch Begrifflichkeiten geklärt.

Die Begriffe Momentanzentrum, Hauptpol und Drillzentrum werden synonym verwendet. Im Folgenden wird nur noch der Begriff Drillzentrum verwendet. Dieses definiert Wlassow in [87] wie folgt (siehe Abbildung 12):

Die Bewegung aus dem unverformten Zustand A und B über A' und B' (rotatorischer Anteil der Bewegung) in den verformten Zustand A'' und B'' (translatorischer Anteil der Bewegung) verdeutlicht, dass jede Bewegung in der Ebene in zwei translatorische und eine rotatorische Bewegung zerlegt werden kann. Bei kleinen Größen $u(z)$,

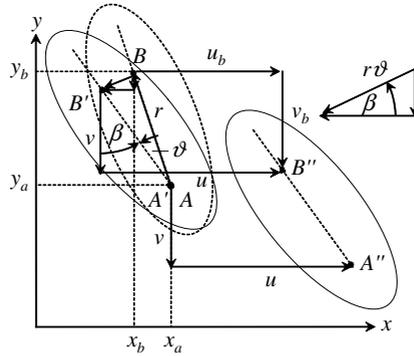


Abbildung 12: Momentanzentrum, Hauptpol und Drillzentrum

$v(z)$ und $\vartheta(z)$ kann man die Verschiebung des Stabprofils in der Querschnittsebene als Drehung um einen bestimmten Punkt - das Drillzentrum der Rotation - auffassen.

$$u - (r \cdot \cos \beta) \vartheta = u_b, \quad (3.2)$$

$$u - (y_b - y_a) \vartheta = u_b, \quad (3.3)$$

$$v + (r \cdot \cos \beta) \vartheta = v_b, \quad (3.4)$$

$$v + (x_b - x_a) \vartheta = v_b. \quad (3.5)$$

Die Lage dieses Drillzentrums ergibt sich aus der Bedingung, dass sich dieser Punkt bei kleinen Querschnittsbewegungen nicht verschiebt. Wenn der Punkt B das Drillzentrum darstellt, dann werden die Verschiebungskomponenten u_b und v_b dieses Punktes gleich Null. Damit ergibt sich für u und v in Abhängigkeit von ϑ und den Koordinaten des Punktes A :

$$u - (y_b - y_a) \vartheta = 0, \quad (3.6)$$

$$v + (x_b - x_a) \vartheta = 0. \quad (3.7)$$

Aus den Gleichungen (3.6) und (3.7) können die Koordinaten des Drillzentrums x_b und y_b bestimmt werden

$$x_b = x_a - \frac{v}{\vartheta}, \quad (3.8)$$

$$y_b = y_a + \frac{u}{\vartheta}. \quad (3.9)$$

Die Gesamtverschiebung eines beliebigen Punktes M ist eine vektorielle Größe, die auch in einem mitdrehenden Koordinatensystem beschrieben werden kann. Die Radialverschiebung wird mit u_r und die Tangentialverschiebung mit v_t bezeichnet. Da

die Längsverschiebung w auch entlang der Balkenlängsachse definiert ist, bleibt diese Bezeichnung unverändert erhalten.

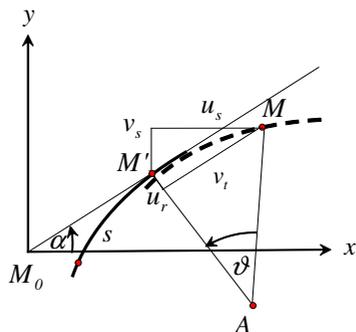


Abbildung 13: Verformungen für die Torsionstheorie nach Wlassow

Aus Abbildung 13 ergeben sich mit den Verschiebungen u und v des Punktes A für die Verschiebungen des beliebigen Punktes $M(x, y)$ in x - und y -Richtung folgende Größen u_s und v_s :

$$u_s = u - (y - y_a) \vartheta, \quad (3.10)$$

$$v_s = v + (x - x_a) \vartheta. \quad (3.11)$$

Weiterhin können mit dem Winkel α die Radialverschiebung u_r und die Tangentialverschiebung v_t wie folgt ausgedrückt werden:

$$u_r(z, s) = v_s \cos \alpha - u_s \sin \alpha, \quad (3.12)$$

$$v_t(z, s) = u_s \cos \alpha + v_s \sin \alpha. \quad (3.13)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (3.10) und (3.11) erhält man für die Gleichungen (3.12) und (3.13):

$$u_r(z, s) = -u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha + \vartheta [(x - x_a) \cos \alpha + (y - y_a) \sin \alpha], \quad (3.14)$$

$$v_t(z, s) = u \cdot \cos \alpha + v \cdot \sin \alpha + \vartheta [(x - x_a) \sin \alpha - (y - y_a) \cos \alpha]. \quad (3.15)$$

Aus Abbildung 14 können folgende geometrische Beziehungen bestimmt werden:

$$(x - x_a) \sin \alpha - (y - y_a) \cos \alpha = h(s), \quad (3.16)$$

$$(x - x_a) \cos \alpha + (y - y_a) \sin \alpha = g(s). \quad (3.17)$$

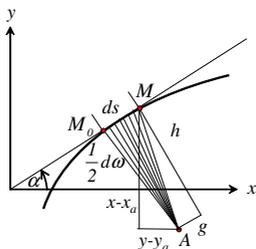


Abbildung 14: Geometrische Beziehungen nach Wlassow

Mit Abbildung 14 kann auch das Differential $d\omega$ veranschaulicht werden:

$$h(s) ds = d\omega. \quad (3.18)$$

Hierbei ist A das Drillzentrum, M_0 der Punkt an dem die Fläche den Wert Null annimmt und M ein beliebiger Punkt auf der Profillinie. Ferner ist $g(s)$ das Lot, welches vom Punkt A auf die Normale der Profillinie im Punkt M fällt und $h(s)$ das Lot, welches vom Punkt A auf die Tangente der Profillinie im Punkt M fällt.

Durch Einsetzen der Gleichungen (3.16) und (3.17) in die Gleichungen (3.14) und (3.15) folgt:

$$u_r(z, s) = -u(z) \cdot \sin \alpha(s) + v(z) \cdot \cos \alpha(s) + \vartheta(z) g(s), \quad (3.19)$$

$$v_t(z, s) = u(z) \cdot \cos \alpha(s) + v(z) \cdot \sin \alpha(s) + \vartheta(z) h(s). \quad (3.20)$$

Anschließend kann die Verschiebung w aus der zweiten Hypothese bestimmt werden:

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} = 0, \quad (3.21)$$

$$w(z, s) = w_L(z) - \int_{s_0}^s \frac{\partial v_t}{\partial z} ds. \quad (3.22)$$

$w_L(z)$ ist dabei eine beliebige Funktion, welche die Längsverschiebung infolge Zugbeanspruchung beschreibt. Das Integral erstreckt sich entlang der Profillinie über die Variable s vom Koordinatenursprung bis zu dem Punkt in dem die Längsverschiebung bestimmt werden soll. Für den Integranden aus Gleichung (3.22) ergibt sich

durch Differentiation von Gleichung (3.20) nach z und Multiplikation mit ds :

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} ds = u'(z) \cdot \cos \alpha(s) ds + v'(z) \cdot \sin \alpha(s) ds + \vartheta'(z) \underbrace{h(s) ds}_{d\omega}. \quad (3.23)$$

Aus Abbildung 15 können die Differentiale dx und dy hergeleitet werden:

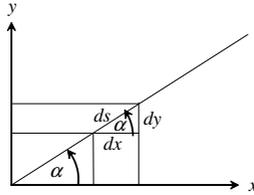


Abbildung 15: Differentiale in kartesischen Koordinaten

$$\cos \alpha(s) ds = dx, \quad (3.24)$$

$$\sin \alpha(s) ds = dy. \quad (3.25)$$

ds gibt hierbei das Bogendifferential der Profillinie an, $d\omega$ die doppelte Fläche des Dreiecks AMM_0 (Sektor) mit der Höhe h und der Grundlinie ds . dx und dy sind die zugehörigen Differentiale der kartesischen Koordinaten. Damit wird Gleichung (3.23) zu

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} ds = u'(z) \cdot dx + v'(z) \cdot dy + \vartheta'(z) \cdot d\omega. \quad (3.26)$$

Gleichung (3.26) in Gleichung (3.22) eingesetzt ergibt:

$$w(z, s) = w_L(z) - u'(z)x(s) - v'(z)y(s) - \underbrace{\vartheta'(z) \cdot \omega(s)}_{w_W}. \quad (3.27)$$

Hierbei stellt ω die Einheitsverwölbung und w_W die Verschiebung in Balkenlängsrichtung infolge Wölbkrafttorsion dar. Diese kann durch Integration von Gleichung (3.18) bestimmt werden:

$$\omega(s) = \int_{s_0}^s h(s) ds + \omega_0. \quad (3.28)$$

In [87] wird ω als doppelte Sektorfläche bezeichnet, wohingegen in Mitteleuropa der Begriff Einheitsverwölbung verbreitet ist. Im Folgenden wird daher ausschließlich der Begriff Einheitsverwölbung verwendet.

Somit sind die ersten drei Terme von Gleichung (3.27) für die Verschiebung in Balkenlängsrichtung unverändert gegenüber der Technischen Biegetheorie. Der letzte Term für die Verschiebung in Balkenlängsrichtung - der Verschiebungsanteil infolge Wölbkrafttorsion - kommt über die Verwölbung neu hinzu.

Die einzelnen Terme aus Gleichung (3.27) sind visualisiert in Abbildung 16.

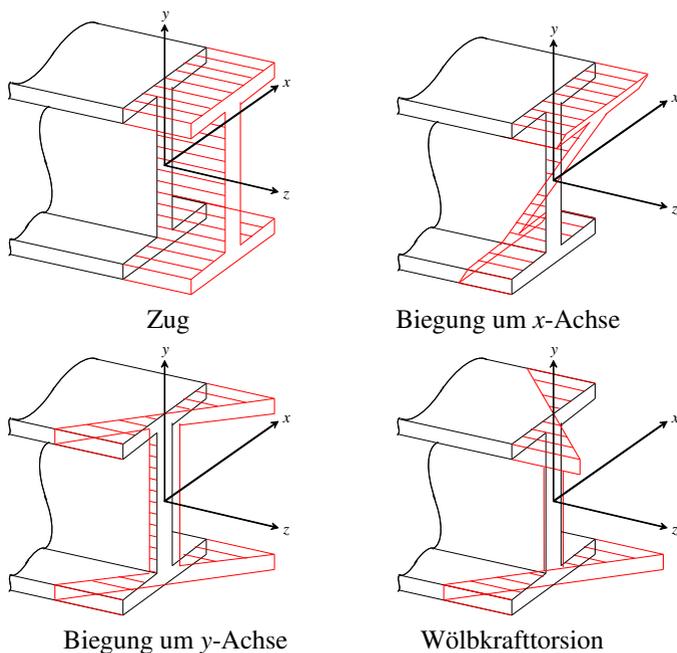


Abbildung 16: Verschiebung infolge Zug, Biegung und Wölbkrafttorsion

Die daraus resultierende Längsdehnung ε_z ergibt sich damit zu (Längsverschiebung, Biegewinkel bzgl. zwei Achsen, Schubwinkel bzgl. zwei Achsen, Torsionswinkel)

$$\varepsilon_z(x, s) = \varepsilon_L(z) - u''(z)x(s) - v''(z)y(s) - \underbrace{\vartheta''(z)\omega(s)}_{\varepsilon_W(x, s)}. \quad (3.29)$$

$$\varepsilon_W(x, s) \quad (3.30)$$

Die ersten drei Glieder in Gleichung (3.31) stellen die Längsdehnung infolge Zug

und Biegung dar. Das letzte Glied ε_W stellt die Längsdehnung infolge Wölbkrafttorsion dar und wird in [87] als “Gesetz der Sektorflächen” bezeichnet.

$$\varepsilon_W(x, s) = -\vartheta''(z) \omega(s). \quad (3.31)$$

3.3 Entkoppelte Verwölbung

Für dünnwandige Profile mit nichtdeformierbarer Querschnittskontur kann gezeigt werden, dass es Bedingungen gibt, unter denen die Längsdehnungen infolge Zug und Biegung Null werden und die Längsdehnung ε_z nur von der Verwölbung abhängt. Bei diesen Bedingungen handelt es sich um geometrische Bedingungen, welche eine Entkopplung der Verwölbung von Zug und Biegung ermöglichen.

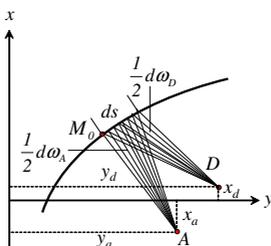


Abbildung 17: Verwölbung um Pol A und D

Es sei $A(x_a, y_a)$ der Momentanpol und $D(x_d, y_d)$ der unbekannte Punkt, welcher die geometrischen Bedingungen erfüllt, welche die Entkopplung der Verwölbung von Zug und Biegung bewirken. Der unbekannte Punkt D wird auch Drillzentrum genannt. Es ergeben sich für die Einheitsverwölbungen aus Abbildung 17 folgende Differentiale:

$$d\omega_A = (x - x_a) dy - (y - y_a) dx, \quad (3.32)$$

$$d\omega_D = (x - x_d) dy - (y - y_d) dx. \quad (3.33)$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (3.32) und (3.33) ergibt sich:

$$d(\omega_A - \omega_D) = (y_a - y_d) dx - (x_a - x_d) dy. \quad (3.34)$$

Durch Integration von Gleichung (3.34) folgt:

$$\omega_A = \omega_D + (y_a - y_d)x - (x_a - x_d)y + C. \quad (3.35)$$

Für den Anfangspunkt der Einheitsverwölbung $M_0(x_0, y_0)$ wird gefordert $\omega_A = \omega_D = 0$. Damit gilt für die Konstante C :

$$C = -(y_a - y_d)x_0 + (x_a - x_d)y_0. \tag{3.36}$$

Ersetzt man $\omega(s)$ in Gleichung (3.29) durch ω_A aus Gleichung (3.35) ergibt sich:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_L - C\vartheta'' - \left[u'' + (y_a - y_d)\vartheta'' \right] x - \left[v'' - (x_a - x_d)\vartheta'' \right] y - \vartheta'' \omega_D. \tag{3.37}$$

Die Längsdehnung ε_z hängt nur von der Verwölbung ab, wenn alle Terme bis auf den letzten Null werden, d.h. wenn reine Torsion mit D als Drillachse auftritt, darf infolge dieser Torsion keine Zug- oder Biegedehnung entstehen. Dies liefert drei Bedingungen. Auf die damit verbundenen geometrischen Bedingungen wird in Kapitel 3.8 eingegangen. Somit wird Gleichung (3.37) zu:

$$\varepsilon_W(x, s) = -\vartheta''(z)\omega_D(s). \tag{3.38}$$

3.4 Wölbspannungen bei dünnwandigen Profilen nach Wlassow

Im Kapitel 3.2 wurden dünnwandige Profile ausschließlich nach geometrischen Gesichtspunkten betrachtet. Beim Übergang des Stabes in den deformierten Zustand entstehen im Stabquerschnitt Normal- und Schubspannungen. Aufgrund der kräftefreien Ränder sind die Schubspannungen senkrecht zur Profillinie an den Rändern Null und über die Dicke sehr klein. Daher werden nur Schubspannungen tangential zur Profillinie betrachtet.

Weiterhin wird angenommen, dass die Normalspannungen konstant über die Wanddicke verlaufen und sich die Schubspannungen tangential zur Profillinie über die Wanddicke linear ändern (siehe Abbildung 18).

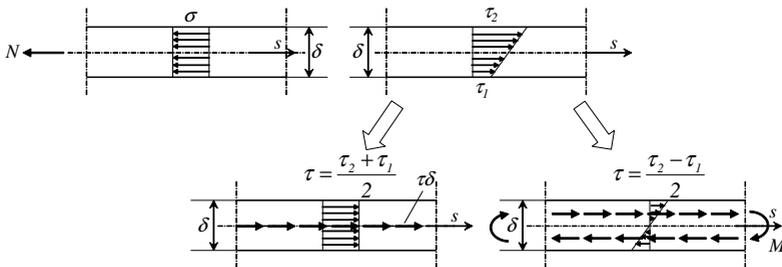


Abbildung 18: Normal- und Schubspannungsverteilung über die Wanddicke

Somit kann der Spannungszustand des Stabes in der Querschnittsebene

- durch die Normalspannungen $\sigma(z, s)$,
- die mittleren Schubspannungen $\tau(z, s)$ und
- durch einen linearen Anteil der Schubspannungen im Profil ausgedrückt werden.

Der lineare Anteil der Schubspannungen im Profil kann zu dem aus der Biegetheorie bekannten Torsionsmoment $M_W(z)$ zusammengefasst werden. Diese Schnittkraft ist nur abhängig von z .

Mit dem Hookeschen Gesetz kann aus Gleichung (3.29) die Normalspannung im Querschnitt bestimmt werden

$$\sigma_z(z, s) = E \left(\varepsilon_L(z) - u''(z)x(s) - v''(z)y(s) - \vartheta''(z)\omega(s) \right). \quad (3.39)$$

Gleichung (3.39) kann mit der Dehnung infolge Zug in z -Richtung ε_L und den Verdrehungen um die x - und y -Achse - φ_x und φ_y - aus der Biegetheorie auch wie folgt dargestellt werden:

$$\sigma_z(z, s) = E \left(\varepsilon_L(z) - \varphi_y'(z)x(s) + \varphi_x'(z)y(s) - \vartheta''(z)\omega(s) \right). \quad (3.40)$$

Der letzte Term gibt hierbei die Wölbnormalspannung an

$$\sigma_W(z) = -E \vartheta''(z)\omega(s). \quad (3.41)$$

Für das Saint Venantsche Torsionsmoment gilt gemäß Anhang A.1:

$$M_T = GI_T \vartheta'. \quad (3.42)$$

Gleichung (3.41) bringt zum Ausdruck, "dass im Querschnitt dünnwandiger Stäbe neben den Normalspannungen infolge Längskraft und Biegung (nach dem Gesetz der ebenen Querschnitte) auch Spannungen entstehen, die nach dem Gesetz der Sektorflächen (Gleichung (3.38) und (3.41)) verteilt sind" [87]. Demzufolge besteht der Unterschied der Wölbkrafttorsion zur Saint Venantschen Torsion darin, dass bei Wölbkrafttorsion aufgrund der Querschnittsverwölbungen Normalspannungen entstehen, die in der Theorie von Saint Venant zu Null angenommen werden.

Für das Saint Venantsche Torsionsmoment gelten weiterhin die Gleichungen (A.53) und (A.54) aus Anhang A.1.6. Die Schubspannungen ändern sich linear über die Wanddicke. Da die Schubdeformationen aufgrund der zweiten Hypothese aufgrund

“ihrer Kleinheit” [87] in der Profilmitte zu Null angenommen werden, können die mittleren Schubspannungen $\tau(z, s)$ nicht aus der analogen Elastizitätsgleichung bestimmt werden. Hierfür muss auf die entsprechende Gleichgewichtsbedingung in Längsrichtung am Element zurückgegriffen werden. Daraus wird im Folgenden die mittlere Schubspannung bestimmt. Zu berücksichtigen bleibt die äußere Flächenbelastung p_z .

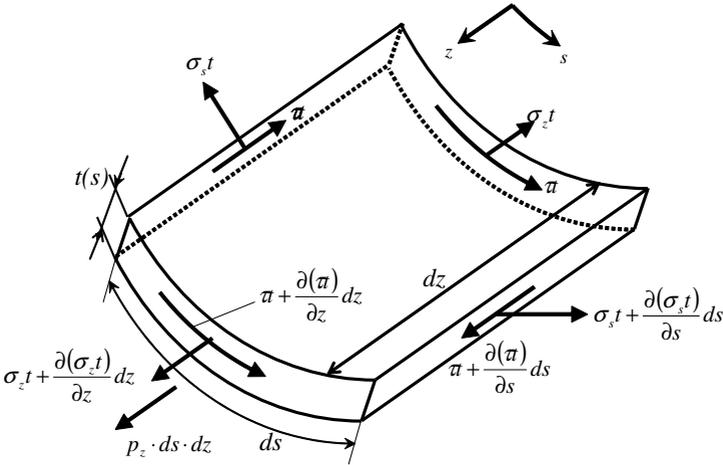


Abbildung 19: Spannungen am dünnwandigen Flächenelement

Für das Gleichgewicht in z erhält man aus Abbildung 19

$$\frac{\partial(\sigma_z t)}{\partial z} dz ds + \frac{\partial(\tau t)}{\partial s} ds dz + p_z ds dz = 0. \tag{3.43}$$

Nach Division durch ds und dz ergibt sich:

$$\frac{\partial(\sigma_z t)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau t)}{\partial s} + p_z = 0. \tag{3.44}$$

Nach Integration über ds erhält man für eine konstante Wanddicke folgendes Ergebnis für die Schubspannung:

$$\tau(z, s) = \frac{1}{t} \left[S_0(z) - \int_0^s p_z ds - \int_0^s \frac{\partial(\sigma_z t)}{\partial z} t ds \right]. \tag{3.45}$$

$S_0(z)$ ist zunächst nur eine Integrationskonstante. Die physikalische Bedeutung erschließt sich für den Fall $s = 0$:

$$\tau(z, 0) = \frac{1}{t} S_0(z). \quad (3.46)$$

Damit gilt:

$$S_0(z) = \tau(z, 0)t. \quad (3.47)$$

Somit beschreibt $S_0(z)$ die Schubkraft im Längsschnitt bei $s = 0$.

Durch Einsetzen der Längsspannung aus Gleichung (3.40) in Gleichung (3.45) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tau(z, s)t = & S_0(z) - \int_0^s p_z ds - \varepsilon'_L(z) \int_0^s E t ds + \varphi''_y(z) \int_0^s E x t ds - \\ & \varphi''_x(z) \int_0^s E y t ds + \vartheta'''(z) \int_0^s E \omega(s) t ds. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Aus der Definition von p_z als Flächenlast in z -Richtung ergibt sich:

$$p_z = -\frac{\partial^2 N}{\partial s \partial z} \quad (3.49)$$

$$\int p_z ds = -\frac{\partial N}{\partial z} = -\varepsilon'_L \int E t ds. \quad (3.50)$$

Gleichung (3.48) vereinfacht sich damit zu:

$$\tau(z, s)t = S_0(z) + \varphi''_y(z) \int_0^s E x t ds - \varphi''_x(z) \int_0^s E y t ds + \vartheta'''(z) \int_0^s E \omega(s) t ds. \quad (3.51)$$

Mit Gleichung (3.51) wird deutlich, dass eine Flächenbelastung in z -Richtung keinen Einfluss auf die Schubspannung hat. Wegen Gleichung (3.47) gilt für den kräftefreien Rand $S_0(z) = 0$. Der zweite Term gibt die Schubspannung infolge der Querkraft in x -Richtung, der dritte Term infolge der Querkraft in y -Richtung und der letzte Term infolge des Torsionsmomentes aufgrund von Wölbkrafttorsion an.

Mit den Abkürzungen $ES_x(s)$ und $ES_y(s)$ für die statischen Momente sowie des statischen Sektormomentes $ES_\omega(s)$ kann Gleichung (3.51) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\tau(z, s) = \varphi''_y(z) \frac{ES_y(s)}{t} - \varphi''_x(z) \frac{ES_x(s)}{t} + \vartheta''' \frac{ES_\omega(s)}{t}, \quad (3.52)$$

bzw.

$$\tau(z, s) = u'''(z) \frac{ES_y(s)}{t} + v'''(z) \frac{ES_x(s)}{t} + \vartheta''' \frac{ES_\omega(s)}{t}, \quad (3.53)$$

$$ES_x(s) = \int_0^s Eyt ds, \quad (3.54)$$

$$ES_y(s) = \int_0^s Ext ds, \quad (3.55)$$

$$ES_\omega(s) = \int_0^s E\omega t ds. \quad (3.56)$$

3.5 Wölbsteifigkeit bei dünnwandigen Profilen

Zur Bestimmung der Spannungen aus Gleichung (3.40) und (3.52) müssen die Funktionen $\varepsilon_L(z)$, $\varphi_y(z)$, $\varphi_x(z)$ und $\vartheta(z)$ bekannt sein. Diese können aus den Gleichgewichtsbedingungen am Element der Breite ds ermittelt werden. Die Kräftegleichgewichte werden nicht aufgestellt, können aber [87] entnommen werden. In dieser Arbeit wird nur auf das Momentengleichgewicht um einen beliebigen Punkt $A(x_a, y_a)$ eingegangen (siehe Abbildung 20). Hierbei gibt M_T das Saint Venantsche Torsionsmoment und L die Länge des Balkens an. Für die Illustration von α und h sei an dieser Stelle auf Abbildung 14 verwiesen.

$$\sum M_A = 0:$$

$$\int_L \frac{\partial(\tau t)}{\partial z} dz [(x - x_a) \sin \alpha - (y - y_a) \cos \alpha] ds + \frac{\partial M_T}{\partial z} dz + m_T dz = 0. \quad (3.57)$$

Es gilt:

$$(x - x_a) \sin \alpha - (y - y_a) \cos \alpha = h. \quad (3.58)$$

Durch Differentiation nach dz und mit Gleichung (3.18) und (3.58) folgt aus (3.57):

$$\int_L \frac{\partial(\tau t)}{\partial z} d\omega + \frac{\partial M_T}{\partial z} + m_T = 0. \quad (3.59)$$

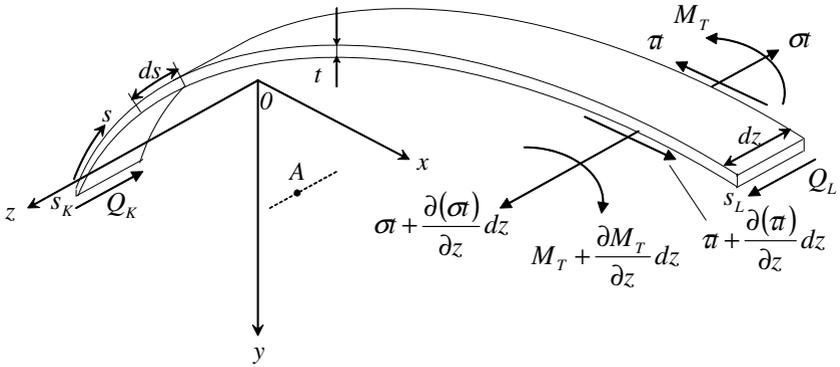


Abbildung 20: Momentengleichgewicht um Pol A

Durch partielle Integration des ersten Terms über $d\omega$ ergibt sich:

$$\left[\frac{\partial(\tau t)}{\partial z} \omega \right]_{s_K}^{s_L} - \int_L \omega \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial(\tau t)}{\partial z} \right) ds + \frac{\partial M_T}{\partial z} + m_T = 0. \quad (3.60)$$

Die Werte an den Rändern s_L und s_K werden bezeichnet mit:

$$\frac{\partial(\tau t)}{\partial z} \Big|_{s=s_K} = Q'_K(z), \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial(\tau t)}{\partial z} \Big|_{s=s_L} = Q'_L(z). \quad (3.62)$$

Q_K und Q_L beschreiben die Schubkräfte an den Längsrändern des Balkens. Analoge Bezeichnungen gelten auch für die Einheitsverwölbungen an der jeweiligen Stelle. Somit wird Gleichung (3.60) zu:

$$- \int_L \omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial(\tau t)}{\partial s} \right) ds + M'_T + m_T + Q'_L \omega_L - Q'_K \omega_K = 0. \quad (3.63)$$

Wird M_T durch Gleichung (A.53) ersetzt, kann Gleichung (3.63) mit Gleichung

(3.52) folgendermaßen dargestellt werden:

$$-\varphi_y'''(z) \int_0^s E \omega_x t ds + \varphi_x'''(z) \int_0^s E \omega_y t ds - \quad (3.64)$$

$$\vartheta^{IV}(z) \int_0^s E \omega^2 t ds + GI_T \vartheta''(z) + m_T + Q'_L \omega_L - Q'_K \omega_K = 0.$$

Gleichung (3.64) verdeutlicht, dass Torsions- und Querkraftverformung nicht voneinander entkoppelt sind. Es gibt aber sehr wohl Bedingungen die zu einer Entkoppelung führen. Soll eine Torsionsbelastung nur eine Torsionsverformung hervorrufen muss gelten:

$$EI_{\omega_x} = \int_A E x \omega t ds = 0, \quad (3.65)$$

$$EI_{\omega_y} = \int_A E y \omega t ds = 0. \quad (3.66)$$

Auf die Berücksichtigung dieser letzten geometrischen Bedingungen wird in Kapitel 3.8 eingegangen. Es folgt für Gleichung (3.64):

$$\vartheta^{IV}(z) \int_0^s E \omega^2 t ds - GI_T \vartheta''(z) = Q'_L \omega_L - Q'_K \omega_K + m_T. \quad (3.67)$$

Mit Einführung der Wölbsteifigkeit

$$EC_W = \int_0^s E \omega^2 t ds \quad (3.68)$$

folgt:

$$EC_W \vartheta^{IV}(z) - GI_T \vartheta''(z) = Q'_L \omega_L - Q'_K \omega_K + m_T. \quad (3.69)$$

Für den Fall, dass die Längsränder frei von Schubkräften sind und als äußere Last nur Momente m_T wirken, ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$EC_W \vartheta^{IV}(z) - GI_T \vartheta''(z) = m_T. \quad (3.70)$$

3.6 Wölbmoment

Aus der Längsspannungsverteilung $\sigma_z(z, s)$ im Querschnitt können für Längs- und Biegebelastung die bekannten Schnittgrößen N , M_x und M_y berechnet werden. Analog dazu soll im Folgenden eine Schnittlast für die Verwölbung definiert werden.

$$\sigma_z(z, s) = E \left(\varepsilon_L(z) - u''(z)x - v''(z)y - \vartheta''(z)\omega(s) \right). \quad (3.71)$$

Die Schnittlasten können aus der Arbeit, die alle infinitesimalen Längskräfte $\sigma_z dA$ bei einer entsprechenden virtuellen Längsverschiebung leisten, berechnet werden.

$$\delta w_z(z, s) = \delta w_L(z) - \delta u'(z)x(s) - \delta v'(z)y(s) - \delta \vartheta'(z) \cdot \omega(s). \quad (3.72)$$

Damit ergibt sich folgende virtuelle Arbeit:

$$\delta W = \underbrace{\delta w_L \int_A \sigma_z dA}_N - \underbrace{\delta u' \int_A \sigma_z x dA}_{M_y} - \underbrace{\delta v' \int_A \sigma_z y dA}_{M_x} - \delta \vartheta' \int_A \sigma_z \omega dA. \quad (3.73)$$

Gleichung (3.73) beinhaltet in den ersten drei Termen die bekannten Schnittgrößen der Technischen Biegetheorie. Analog zu diesen wird für den vierten Term eine neue Schnittgröße - das Wölbmoment W - definiert:

$$W = \int_A \sigma_z \omega dA. \quad (3.74)$$

Wird in Gleichung (3.74) für σ_z der Ausdruck aus Gleichung (3.71) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int E dA & -\int E y dA & -\int E x dA & -\int E \omega dA \\ \int E y dA & -\int E y^2 dA & -\int E x y dA & -\int E y \omega dA \\ -\int E x dA & \int E y x dA & \int E x^2 dA & \int E x \omega dA \\ \int E \omega dA & -\int E y \omega dA & -\int E x \omega dA & -\int E \omega^2 dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ u'' \\ v'' \\ \vartheta'' \end{Bmatrix}. \quad (3.75)$$

In Gleichung (3.75) sind alle Schnittgrößen von allen Verformungsgrößen abhängig. Die damit verbundenen vier Beanspruchungen können entkoppelt werden. Die ersten drei Beanspruchungen sind voneinander entkoppelt, sobald in einem Hauptachsensystem gerechnet wird. Die Bedingungen zur Entkopplung des Wölbmomentes können aus den Gleichungen (3.75) und (3.76) entnommen werden und schließen die

Bedingungen für die Entkopplung der Torsionsschubspannungen (Gleichung (3.65) und (3.66)) ein. Auf die geometrische Bedingung zur zusätzlichen Entkopplung des Wölbmomentes W wird in Kapitel 3.8 eingegangen. Sind alle Anteile der Längsspannung bzw. alle Schnittgrößen voneinander entkoppelt, ergibt sich für Gleichung (3.75):

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int EdA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\int Ey^2 dA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int Ex^2 dA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\int E\omega^2 dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ u'' \\ v'' \\ \vartheta'' \end{Bmatrix}. \quad (3.76)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.76) in (3.71) erhält man:

$$\sigma_z(z, s) = \frac{N}{EA} E(s) - \frac{M_y}{EI_y} E(s) x(s) + \frac{M_x}{EI_x} E(s) y(s) + \frac{W}{EC_W} E(s) \omega(s). \quad (3.77)$$

3.7 Torsionsmoment

Analog zu Kapitel 3.6 können auch die mittleren Schubspannungen über Schnittgrößen ausgedrückt werden. Es sei hier nochmals die Schubspannung aus Gleichung (3.53) für den Fall angegeben, dass bei dünnwandigen Profilen nur Querlasten wirken:

$$\tau(z, s) = u'''(z) \frac{ES_y(s)}{t} + v'''(z) \frac{ES_x(s)}{t} + \vartheta'''(z) \frac{ES\omega(s)}{t}. \quad (3.78)$$

Gleichung (3.26) über z integriert und nach s differenziert ergibt:

$$v_t(z, s) = u(z) \cdot \frac{dx}{ds} + v(z) \cdot \frac{dy}{ds} + \vartheta(z) \cdot \frac{d\omega}{ds}. \quad (3.79)$$

Die virtuellen Verschiebungen in Tangentialrichtung ergeben sich damit zu:

$$\delta v_t(z, s) = \delta u(z) \frac{dx}{ds} + \delta v(z) \frac{dy}{ds} + \delta \vartheta(z) \frac{d\omega}{ds}. \quad (3.80)$$

Für die virtuelle Arbeit folgt:

$$\delta W = \delta v_t \int_A (\tau t) ds \quad (3.81)$$

$$\delta W = \delta u \int_A (\tau t) dx + \delta v \int_A (\tau t) dy + \delta \vartheta \int_A (\tau t) d\omega. \quad (3.82)$$

Gleichung (3.82) beinhaltet in den ersten zwei Termen die Ausdrücke für die beiden Querkräfte. Der dritte Term stellt das Torsionsmoment der Wölbkrafttorsion aus den mittleren Schubspannungen, die tangential zur Querschnittskontur wirken, dar. Mit Gleichung (3.18) ergeben sich:

$$Q_x = \int_A (\tau t) dx, \quad (3.83)$$

$$Q_y = \int_A (\tau t) dy,$$

$$M_W = \int_A (\tau t) d\omega = \int_A (\tau t) h ds.$$

Gleichung (3.78) in Gleichung (3.83) eingesetzt, liefert ein Gleichungssystem, in welchem alle Querkräfte und Momente mit allen Verformungen gekoppelt sind. Aus diesem Gleichungssystem lassen sich folgende Orthogonalitätsbedingungen ableiten:

$$\begin{aligned} \int_A ES_x dx = 0, \quad \int_A ES_x d\omega = 0, \quad \int_A ES_\omega dx = 0, \\ \int_A ES_y dy = 0, \quad \int_A ES_y d\omega = 0, \quad \int_A ES_\omega dy = 0. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Diese Bedingungen sind durch Orthogonalisierungsbedingungen für das Hauptachsensystem und für das Wölbmoment W abgedeckt. Sind diese erfüllt und setzt man die Spannung τ aus Gleichung (3.78) in Gleichung (3.83) ein, folgt daraus:

$$Q_x = -EI_y u''', \quad (3.85)$$

$$Q_y = -EI_x v''', \quad (3.86)$$

$$M_W = -EC_W \vartheta'''. \quad (3.87)$$

Dies eingesetzt in Gleichung (3.78) ergibt:

$$\tau(z, s) = -\frac{1}{t} \left(\frac{Q_x}{EI_y} E(s) S_y(s) + \frac{Q_y}{EI_x} E(s) S_x(s) + \frac{M_W}{EC_W} E(s) S_\omega(s) \right). \quad (3.88)$$

Abschließend wird nun das Torsionsmoment aus der Verwölbung (Gleichung 3.87) mit dem Saint Venantschen Anteil (Gleichung A.53) summiert und ergibt damit:

$$M_T = M_T^{St. Venant} + M_W = GI_T \vartheta' - EC_W \vartheta'''. \quad (3.89)$$

3.8 Drillzentrum und Schubmittelpunkt

In Kapitel 3.5, 3.6 und 3.7 wird gezeigt, dass die drei Bedingungen für die Entkopplung des Wölbmomentes von Zug und Biegung, des Torsionsmomentes von den Querkräften und der Torsionsschubspannungen von Schubspannungen infolge der Querkräfte identisch sind. Diese Bedingungen lauten:

$$\int_A E \omega dA = 0, \quad (3.90)$$

$$\int_A E \omega x dA = 0, \quad (3.91)$$

$$\int_A E \omega y dA = 0. \quad (3.92)$$

In Kapitel 3.3 wird gezeigt, dass es auch drei geometrische Bedingungen gibt, unter deren Berücksichtigung nur Längsdehnungen infolge Wölbkrafttorsion auftreten.

Im Folgenden wird von diesen Bedingungen auf geometrische Größen rückgeschlossen. Der Punkt, welcher diese Bedingungen erfüllt, wird als Drillzentrum D bezeichnet. Für dessen Bestimmung wird aus Kapitel 3.3 Gleichung (3.34) in Gleichung (3.35) für den beliebigen Pol A und das Drillzentrum D eingesetzt. Damit folgt:

$$\omega_D = \omega_A + (y_d - y_a)x - (x_d - x_a)y + (x_d - x_a)y_0 - (y_d - y_a)x_0. \quad (3.93)$$

Ferner wird Gleichung (3.92) für das Drillzentrum D zu:

$$\int_A E \omega_D y dA = 0. \quad (3.94)$$

Mit Gleichung (3.93) folgt für Gleichung (3.94):

$$\begin{aligned} \int_A E \omega_D y dA &= \int_A E \omega_A y dA + \int_A E (y_d - y_a) x y dA - \int_A E (x_d - x_a) y^2 dA + \\ &\int_A E [(x_d - x_a) y_0 - (y_d - y_a) x_0] y dA = 0. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Da im Hauptachsensystem gilt:

$$\int_A E x y dA = 0, \quad (3.96)$$

$$\int_A E x dA = 0,$$

$$\int_A E y dA = 0,$$

folgt für Gleichung (3.95):

$$\int_A E \omega_A y dA = \int_A E (x_d - x_a) y^2 dA, \quad (3.97)$$

$$\alpha_x = x_d - x_a = \frac{1}{EI_x} \int_A E \omega_A y dA = \frac{EI \omega_{Ay}}{EI_x}.$$

Analog dazu kann α_y bestimmt werden:

$$\alpha_y = y_d - y_a = -\frac{1}{EI_y} \int_A E \omega_A x dA = -\frac{EI \omega_{Ax}}{EI_y}. \quad (3.98)$$

Die dritte Bedingung (siehe Gleichung (3.90)) liefert eine Geradengleichung, deren Schnittpunkt mit dem Profil die Stelle $\omega_D = 0$ beschreibt. Die Bedingung lautet:

$$\begin{aligned} \int_A E \omega_D dA &= \int_A E \omega_A dA + \int_A E (y_d - y_a) x dA - \int_A E (x_d - x_a) y dA + \\ &\int_A E [(x_d - x_a) y_0 - (y_d - y_a) x_0] dA = 0. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Alternativ dazu können die geometrischen Bedingungen auch rein arithmetisch ermittelt werden. Mit

$$\alpha = (x_d - x_a) y_0 - (y_d - y_a) x_0, \quad (3.100)$$

$$\alpha_x = x_d - x_a$$

$$\alpha_y = y_d - y_a,$$

wird Gleichung (3.93) wie folgt ausgedrückt:

$$\omega_D = \alpha_y x - \alpha_x y + \alpha + \omega_A. \quad (3.101)$$

Setzt man Gleichung (3.101) in die drei zuvor genannten Bedingungen ein, erhält man mit $\int_A E \omega_A dA = ES \omega_A$:

$$\begin{aligned} EI_y \alpha_y - EI_{xy} \alpha_x + ES_y \alpha &= -EI \omega_{Ay}, \\ EI_{xy} \alpha_y - EI_x \alpha_x + ES_x \alpha &= -EI \omega_{Ax}, \\ ES_y \alpha_y - ES_x \alpha_x + EA \alpha &= -ES \omega_A. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Löst man das Gleichungssystem aus Gleichung (3.102) nach den drei Unbekannten, können aus α_x und α_y die Koordinaten x_d und y_d des Drillzentrums D bestimmt werden. Zusätzlich erhält man noch die Lösung für α . Damit kann wiederum der Funktionsverlauf der Einheitsverwölbung ω_D aufgestellt und damit die Lage des Ursprungs der Einheitsverwölbung bestimmt werden.

Für $\omega = \omega_D = 0$ auf der Profilline und ein Koordinatensystem mit dem Drillzentrum D als Ursprung und den Hauptachsen als Ordinate und Abszisse ist damit gezeigt, dass das Wölbmoment von Zug und Biegung, das Torsionsmoment von den Querkräften und die Torsionsschubspannungen von Schubspannungen infolge der Querkräfte entkoppelt sind. Nachfolgend wird gezeigt, dass dieses Drillzentrum D mit dem Schubmittelpunkt zusammenfällt.

Wenn eine Querkraft - einschließlich der durch sie hervorgerufenen Reaktionskräfte - reine Biegung des Balkens bewirkt, dann greifen die Kräfte - wie in Abbildung 21 links dargestellt - im Schubmittelpunkt an. Würden die Kräfte nicht im Schubmittelpunkt angreifen - wie in Abbildung 21 rechts dargestellt - kämen zu der Biegebeanspruchung auch noch Beanspruchungen aus der Saint Venantschen Torsion und der Wölbkrafttortion.

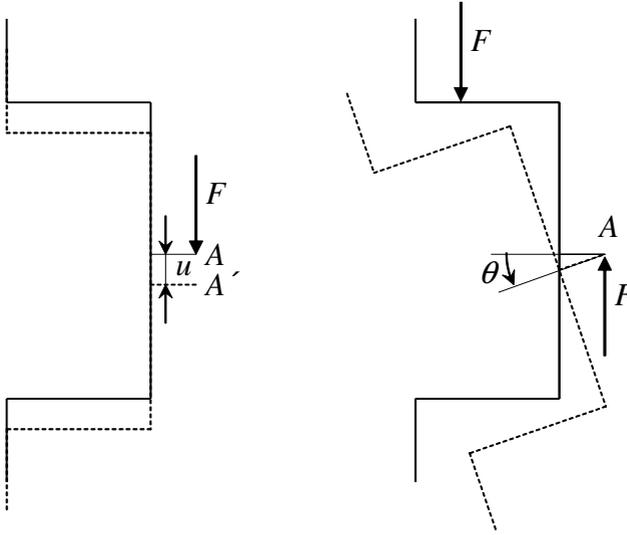


Abbildung 21: Reine Biegung - Reine Torsion

An dieser Stelle sei Gleichung (3.88) nochmals angeführt:

$$\tau(z, s) = -\frac{1}{t} \left(\frac{Q_x}{EI_y} ES_y(s) + \frac{Q_y}{EI_x} ES_x(s) + \frac{M_W}{EC_W} ES_\omega(s) \right). \quad (3.103)$$

Zur Berechnung des Torsionsmomentes mittels der Schubspannung τ aus Gleichung (3.88), multipliziert man diese mit dem Lot auf das Drillzentrum D und integriert sie anschließend über s . Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbeziehungen aus Gleichung (3.84) ergibt sich:

$$\int_A \tau t h ds = \int_A \tau t d\omega = -\frac{Q_x}{EI_y} \int_A ES_y(s) d\omega - \frac{Q_y}{EI_x} \int_A ES_x(s) d\omega = 0. \quad (3.104)$$

Das Torsionsmoment infolge Wölbkrafttorsion ergäbe sich aus dem letzten Term aus Gleichung (3.103) zu:

$$\int_A \tau t d\omega = -\frac{M_W}{EC_W} \int_A ES_\omega(s) d\omega = M_W. \quad (3.105)$$

Für $M_W = 0$ (Abbildung 21 links) und mit Gleichung (3.104) bedeutet dies, dass keine Schubspannungen infolge Wölbkrafttorsion, sondern nur aufgrund der Querkräfte

auftreten. Die Torsionsmomente ergeben aber in Summe Null, so dass die Querkräfte durch das Drillzentrum D verlaufen müssen. Das Drillzentrum D wird daher auch als Schubmittelpunkt bezeichnet.

Weiterhin sei hier noch die Bestimmung der Koordinaten des Schubmittelpunktes erläutert. Für Q_x und M_W gleich Null ergibt sich für eine Querkraft Q_y , welche in einem beliebigen Punkt A angreift, folgende Schubspannung τ :

$$\tau(z, s) = -\frac{1}{t} \frac{Q_y}{EI_x} ES_x(s). \quad (3.106)$$

Für das daraus resultierende Torsionsmoment gilt:

$$M_{W_A} = \int_A \tau t d\omega_A = -\frac{Q_y}{EI_x} \int_A ES_x d\omega_A = \frac{Q_y}{EI_x} EI_{\omega_{Ay}}. \quad (3.107)$$

Gleichzeitig steht dieses Torsionsmoment im Gleichgewicht mit der angreifenden Querkraft und der resultierenden Querkraft im Schubmittelpunkt

$$M_{W_A} = Q_y(x_d - x_a). \quad (3.108)$$

Das Gleichsetzen von Gleichung (3.107) mit Gleichung (3.108) ergibt:

$$x_d - x_a = \frac{EI_{\omega_{Ay}}}{EI_x}. \quad (3.109)$$

Analoges erhält man für eine Querkraft Q_x :

$$y_d - y_a = -\frac{EI_{\omega_{Ax}}}{EI_y}. \quad (3.110)$$

Die Gleichungen (3.109) und (3.110) für die Koordinaten des Schubmittelpunktes sind identisch mit den Koordinaten des Drillzentrums D aus den Gleichungen (3.97) und (3.98). Somit ist gezeigt, dass das Drillzentrum D dem Schubmittelpunkt entspricht und das Berechnungen bzgl. Wölbkrafttorsion in einem Hauptachsenkoordinatensystem, mit dem Schubmittelpunkt als Ursprung, durchgeführt werden müssen.

3.9 Allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die Wölbkrafttorsion

Die allgemeine Lösung zu Gleichung (3.89) aus Kapitel 3.7 lautet für konstante GI_T und EC_W , $\lambda = \sqrt{\frac{GI_T}{EC_W}}$ sowie $m_T(z) = konst.:$

$$\vartheta(z) = K_1 + K_2 \cdot z - m_T \frac{z^2}{2GI_T} + K_3 \cdot \sinh(\lambda z) + K_4 \cdot \cosh(\lambda z). \quad (3.111)$$

In [35], [36], [37] und [38] wurde die Lösung der Gleichung (3.111) hergeleitet und mittels Übertragungsmatrizen folgendermaßen dargestellt:

$$\begin{pmatrix} \vartheta(z) \\ \vartheta'(z) \\ \frac{W(z)}{GI_T} \\ \frac{M(z)}{GI_T} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda z & 1 - \cosh \lambda z & z - \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda z \\ 0 & \cosh \lambda z & -\lambda \sinh \lambda z & 1 - \cosh \lambda z \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \sinh \lambda z & \cosh \lambda z & \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta(0) \\ \vartheta'(0) \\ \frac{W(0)}{GI_T} \\ \frac{M(0)}{GI_T} \end{pmatrix}. \quad (3.112)$$

Im Gegensatz zum Saint Venantschen Torsionsproblem, bei dem nach der Ermittlung der Spannungsfunktion ψ für einen bestimmten Querschnitt die Berechnung der Verschiebungen, Spannungen und Steifigkeiten möglich ist, werden für diese Berechnung bei der Verdrehung infolge Wölbkrafttorsion folgende Eingabedaten benötigt.

- Schubmittelpunkt
- Einheitsverwölbung ω
- Wölbsteifigkeit EC_W
- Torsionssteifigkeit GI_T

Aus der Einheitsverwölbung ω und ϑ'' kann die Spannung an der jeweiligen Stelle im Balken bestimmt werden.

4 Berechnung der Wölbsteifigkeit

Das in Kapitel 3 dargestellte analytische Vorgehen zur Bestimmung der Wölbsteifigkeit kann für dünnwandige Balken mit homogenem Querschnitt aus isotropen Materialien verwendet werden. Darüber hinaus kann dieses Vorgehen für dünnwandige Balken mit homogenisierten Querschnitten aus orthotropen Materialien angewendet werden. In diesem Fall wird die Homogenisierung mit der klassischen oder erweiterter Laminattheorie durchgeführt. Die Effekte aus der Querkontraktionsbehinderung, z.B. interlaminare Spannungen, bleiben damit aber unberücksichtigt. Sollen dünnwandige Balken mit inhomogenen Querschnitten mit orthotropen Materialien oder gar dickwandige Balken berechnet werden, muss ein anderer Ansatz gewählt werden. Das Ziel dieses Ansatzes lässt sich wie folgt formulieren: Es ist die Wölbsteifigkeit von Balken mit

- beliebigen Querschnittsgeometrien
- inhomogenen Querschnitten
- orthotropen Materialien
- unter Berücksichtigung eines dreidimensionalen Spannungszustandes
- und Spannungen infolge gegenseitiger Querkontraktionsbehinderung
- ohne jegliche Fallunterscheidung

zu bestimmen. Dies wurde in SABINA bereits erfolgreich für die Lastfälle Zug, Biegung, Querkraft und Saint Venantsche Torsion umgesetzt.

Im Folgenden wird nun der dreidimensionale Spannungszustand an Balken beliebiger Querschnitte mit orthotropen Materialien, d.h. unter Ausschluss von Zug-Torsions- oder Biege-Torsionskopplungen, mittels einer zweidimensionalen Finite-Elemente-Berechnung bestimmt. Ausgehend von der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung für die Wölbkrafttorsion aus Gleichung (3.111) wird ein Verschiebungsansatz entwickelt. Dieser Verschiebungsansatz wird nicht von EC_W und GI_T abhängen. Das bestehende Programm SABINA liefert bereits die Torsionssteifigkeit GI_T und neben dieser noch den Schubmittelpunkt und die Lage der Hauptachsen. Damit ist das Koordinatensystem bekannt, in welchem die Wölbsteifigkeit EC_W bestimmt wird. Weiterhin werden in SABINA bereits der elastische Schwerpunkt, die Temperaturendehnungs- und -krümmungskoeffizienten, die Zug- und Biegesteifigkeiten, sowie Wölbsteifigkeiten infolge Querkraftschub unter Berücksichtigung von Zusatzspannungen aufgrund gegenseitiger Querkontraktionsbehinderung berechnet.

4.1 Festlegung der Verschiebungsansätze, Verzerrungen und Spannungen

Mit der Definition der Wölbsteifigkeit von Wlassow [87] aus Gleichung (3.68), der Definition des Wölbmomentes aus Gleichung (3.74) und der Wölbspannung aus Gleichung (3.41) wird in Gleichung (4.1) zwischen den Längsspannungen σ_z , der Einheitsverwölbung ω , der zweiten Ableitung der Verdrehung ϑ und der Wölbsteifigkeit EC_W folgender Zusammenhang hergestellt:

$$EC_W = -\frac{W(z)}{\vartheta''(z)} = \frac{\int_A \sigma_z(x, y, z) \omega(x, y) dA}{\vartheta''(z)}. \quad (4.1)$$

Zunächst sind die Längsspannungen σ_z , die Einheitsverwölbung ω und die zweite Ableitung der Verdrehung ϑ unbekannt. Weil die Längsspannung σ_z gemäß [87] von der Einheitsverwölbung ω abhängt, verbleiben zwei Unbekannte. Zusätzlich wird ϑ derart vorgegeben, dass die Forderung aus Kapitel 4 erfüllt ist, und ϑ nicht von der Wölbsteifigkeit EC_W abhängt. Ausgehend davon wird sodann die Einheitsverwölbung ω und damit die Längsspannung σ_z bestimmt.

Somit wird definiert:

$$\vartheta''(z) = \vartheta_0'' = \text{const.} \quad (4.2)$$

Gleichung (3.41) zeigt, dass $\sigma_z(x, y, z)$ proportional zu $\vartheta''(z)$ ist. Wird die Umfangskoordinate s durch die allgemeinere Darstellung mit den Koordinaten x und y ersetzt, resultiert daraus:

$$\sigma_z(x, y, z) = -E(x, y) \omega(x, y) \vartheta_0''(z). \quad (4.3)$$

Gleichung (4.3) zeigt, dass die Längsspannung σ_z mit einem Produkt beschrieben werden kann. Dieses besteht aus Funktionen in der Querschnittsebene ($x - y$ -Ebene) und aus einer Funktion in Längsrichtung des Balkens. Kennt man - aus analytischen 1d-Berechnungen - die Funktion in Längsrichtung des Balkens kann der dreidimensionale Spannungszustand mit einer zweidimensionalen Finite Elemente Berechnung bestimmt werden.

Für den Fall $\vartheta'' \neq f(z)$ aus Gleichung (4.2) wird die Längsspannung σ_z unabhängig von der Längskoordinate z . Somit kann an jeder beliebigen Längskoordinate der darin vorliegende dreidimensionale Spannungszustand zur Bestimmung der Wölbsteifigkeit herangezogen werden. Gleichung (4.1) vereinfacht sich damit zu:

$$EC_W = \frac{\int_A \sigma_z(x, y) \omega(x, y) dA}{\vartheta_0''} = -\frac{W}{\vartheta_0''}. \quad (4.4)$$

Mit den zuvor genannten Bedingungen und der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung für die Wölbkrafttorsion (3.111)

$$\vartheta(z) = K_1 + K_2 \cdot z - m_T \cdot \frac{z^2}{2GI_T} + K_3 \cdot \sinh(\lambda z) + K_4 \cdot \cosh(\lambda z) \quad (4.5)$$

kann $\vartheta''(z)$ nur konstant sein, wenn $K_3 = K_4 = 0$ gilt. Daraus folgt

$$\vartheta''(z) = -\frac{m_T}{GI_T} = \vartheta_0'' \quad (4.6)$$

Damit ergibt sich:

$$m_T = -GI_T \vartheta_0'' \quad (4.7)$$

Somit folgt zunächst

$$\vartheta'(z) = K_2 + \vartheta_0'' z \quad (4.8)$$

$$\vartheta(z) = K_1 + K_2 z + \vartheta_0'' \frac{z^2}{2} \quad (4.9)$$

Weiterhin reduziert sich

$$M_T = GI_T \vartheta' - EC_W \vartheta''' \quad (4.10)$$

wegen Gleichung (4.2) zu

$$M_T = GI_T \vartheta' \quad (4.11)$$

Die konstante zweite Ableitung der Verdrehung und damit einhergehend das konstante Linientorsionsmoment aus Gleichung (4.7) bedeuten für die Verdrehung und deren erster Ableitung:

Die Konstanten K_1 und K_2 werden nun so bestimmt, dass ein Ende des Balkens drehfrei und das andere Ende drehstarr gelagert wird. Mit der Längsverschiebung infolge Wölbkrafttorsion aus Gleichung (3.27)

$$w(x, y, z) = -\vartheta'(z) \omega(x, y), \quad (4.12)$$

wird der Zusammenhang zwischen Verwölbung w und Verdrehung ϑ hergestellt. Für die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= 0, \\ \vartheta'(l) &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

ergibt sich:

$$K_1 = 0, \quad (4.14)$$

$$\vartheta'(z=l) = K_2 + \vartheta_0'' l = 0, \quad (4.15)$$

$$K_2 = -\vartheta_0'' l. \quad (4.16)$$

Da nun alle zuvor unbekanntenen Koeffizienten aus Gleichung (3.111) bekannt sind, kann die Verdrehung ϑ und deren Ableitungen wie folgt angegeben werden:

$$\vartheta(z) = \vartheta_0'' \left(\frac{z^2}{2} - lz \right), \quad (4.17)$$

$$\vartheta'(z) = \vartheta_0'' (z - l), \quad (4.18)$$

$$\vartheta''(z) = \vartheta_0''. \quad (4.19)$$

Damit erzeugt der Lastfall - wie in Abbildung 22 dargestellt - $\vartheta''(z) = \vartheta_0''$. Dieser kann folgendermaßen beschrieben werden:

- Durch Aufbringen eines Linientorsionsmomentes $m_T = -GI_T \vartheta_0''$,
- der Behinderung der Längsverschiebung bei $z = l$ und
- der Behinderung der Verdrehung bei $z = 0$
- werden ein konstantes $\vartheta''(z) = \vartheta_0''$ und die Reaktionen von Wölbmomenten der Größe $EC_W \vartheta_0''$ (obwohl EC_W unbekannt ist) bei $z = 0$ und $z = l$ sichergestellt.

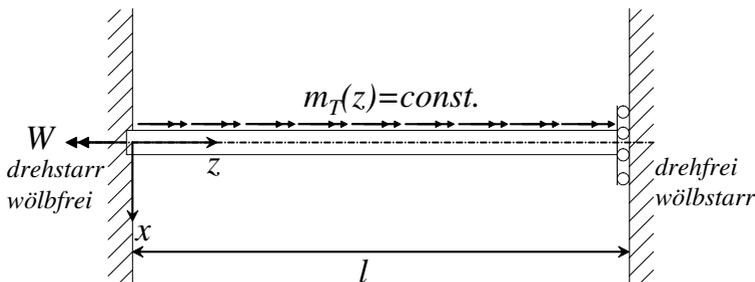


Abbildung 22: Lagerungsbedingung für konstante Verwölbung

Unter Verwendung von Gleichung (3.27), welche auf Wlassows Annahmen (nichtverformbare Querschnittskontur, Schubverzerrung in der Mittelfläche dünnwandiger Strukturen gleich Null) aus [87] und Gleichung (4.18) beruhen, kann die Längsverschiebung w infolge Wölbkrafttorsion mittels eines Produktansatzes beschrieben werden. Dieser besteht aus der analytischen Lösung für die Balkenlängsrichtung und einem Ansatz der Finiten Elemente Methode in der Querschnittsebene. Die sich daraus ergebenden Dehnungen werden zeigen, ob die Wlassowsche Annahme - Schubverzerrung in der Mittelfläche dünnwandiger Strukturen gleich Null - zutreffend ist.

Ferner können mit den Gleichungen (4.17) bis (4.19) Verschiebungsansätze formuliert werden, die keine Steifigkeiten des Querschnitts enthalten. Zusätzlich liefert dieser Verschiebungsansatz über die Länge konstante Längsspannungen. In deren Folge ergeben sich durch die Querkontraktion des Querschnitts Verschiebungen \bar{u} und \bar{v} in der Querschnittsebene, welche damit auch über die Länge als konstant angesetzt werden. Wie in Kapitel 3.8 dargestellt, muss die Berechnung im SMP-KS durchgeführt werden, um die Orthogonalitätsbedingungen zu erfüllen. Alle Verschiebungsansätze sind - angelehnt an [57] und [58] - Produktansätze.

Die Verschiebungsansätze lauten:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \bar{u}(x, y) - y\vartheta(z) \\ &= \bar{u}(x, y) - y\vartheta_0'' \left(\frac{z^2}{2} - lz \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= \bar{v}(x, y) + x\vartheta(z) \\ &= \bar{v}(x, y) + x\vartheta_0'' \left(\frac{z^2}{2} - lz \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} w(x, y, z) &= -\tilde{\omega}(x, y) \vartheta'(z) \\ &= -\tilde{\omega}(x, y) \vartheta_0''(z - l). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Terme \bar{u} und \bar{v} geben die Verformungen infolge Querkontraktion an. Der jeweils zweite Summand in den Gleichungen (4.20) und (4.21) beschreibt den rotatorischen Anteil der Verformung. Es sei hierbei erwähnt, dass $\tilde{\omega}$ sich aus der Einheitsverwölbung ω und einer Starrkörperverschiebung ω_0 folgendermaßen zusammensetzt:

$$\tilde{\omega}(x, y) = \omega(x, y) + \omega_0 \quad (4.23)$$

Die Starrkörperverschiebung ω_0 kann erst zu einem späteren Zeitpunkt bestimmt werden.

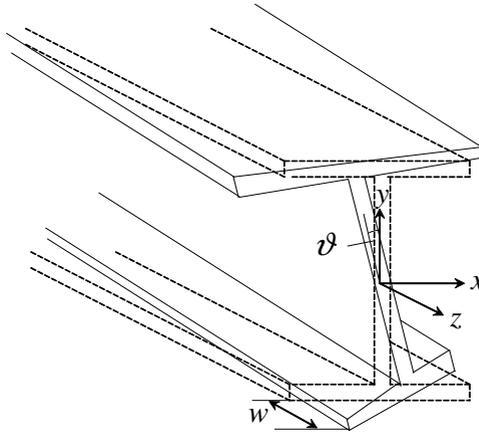


Abbildung 23: Verformungen infolge Wölbkrafttorsion am Beispiel eines I-Profiles

Mit den Abkürzungen

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\vec{\bar{u}} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} -y\vartheta_0'' \left(\frac{z^2}{2} - lz \right) \\ x\vartheta_0'' \left(\frac{z^2}{2} - lz \right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta_0''(z-l) \end{pmatrix}.$$

können die Gleichungen (4.20) bis (4.22) in Matrixschreibweise wie folgt dargestellt werden:

$$\vec{u} = F \vec{\bar{u}} + \vec{u}_0. \quad (4.25)$$

Setzt man die Verschiebungsansätze in die bekannten Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen ein, ergeben sich für die Verschiebungsansätze aus Gleichung (4.20) -

(4.22) folgende Dehnungen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad (4.26)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad (4.27)$$

$$\varepsilon_z = -\tilde{\omega} \vartheta_0'', \quad (4.28)$$

$$\gamma_{yz} = x \vartheta_0''(z-l) - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \vartheta_0''(z-l), \quad (4.29)$$

$$\gamma_{zx} = -y \vartheta_0''(z-l) - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \vartheta_0''(z-l), \quad (4.30)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \vartheta_0'' \left(\frac{z^2}{2} - lz \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \vartheta_0'' \left(\frac{z^2}{2} - lz \right) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}. \quad (4.31)$$

Hierbei kann bestätigt werden, dass sowohl die Dehnungen ε_x , ε_y , ε_z als auch die Gleitung γ_{xy} konstant in Balkenlängsrichtung sind und damit unabhängig von der Längskoordinate z . Da nur diese Dehnungen einen Beitrag zur Spannung σ_z und damit zum Wölbmoment W liefern, ist diese damit auch - wie vorgegeben - konstant über die Längskoordinate z . Die verbleibenden Gleitungen γ_{yz} und γ_{zx} verlaufen linear über die Längskoordinate z und werden wie erwartet bei $z = l$ Null, da die Lagerung dort kein Torsionsmoment aufnehmen kann.

Mit Hilfe der Belastungsmatrix B , der Matrix der Differentialoperatoren D und des Vektors der äußeren Belastung $\vec{\varepsilon}_0$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta_0'' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}, \vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \vartheta_0''(z-l) \\ -y \vartheta_0''(z-l) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

können die Verzerrungen aus Gleichung (4.26) bis (4.31) in Matrizenschreibweise dargestellt werden:

$$\vec{\varepsilon} = B \vec{u} + DF \vec{u} + \vec{\varepsilon}_0. \quad (4.33)$$

Der Verschiebungsansatz muss den Kompatibilitätsbeziehungen genügen, d.h. es darf keine Materialüberschneidungen und kein Klaffen im Material geben. Bezug-

nehmend auf die Gleichungen (2.5) bis (2.10) sind mit den Dehnungen und Gleitungen aus den Gleichungen (4.26) bis (4.31) die Kompatibilitätsbeziehungen erfüllt:

$$\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{q.e.d.} \quad (4.34)$$

$$0 - \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} \vartheta_0'' = - \frac{\partial^2 \tilde{\omega} \vartheta_0''}{\partial y^2} \quad \text{q.e.d.} \quad (4.35)$$

$$- \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} \vartheta_0'' + 0 = - \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} \vartheta_0'' \quad \text{q.e.d.} \quad (4.36)$$

Auch die letzten drei Kompatibilitätsbedingungen werden durch den Verschiebungsansatz erfüllt, da alle Terme mit einer partiellen Ableitung nach z Null werden und sich die verbleibenden Terme in der Klammer aufheben. Dies ist auf die konstante zweite Ableitung der Verdrehung in Balkenlängsrichtung zurückzuführen. Einzige Ausnahme ist die letzte Kompatibilitätsbedingung. Dort ergeben die Summe der Ableitungen in der Klammer einen Term abhängig von z , welcher - nach entsprechender Ableitung - der linken Seite der Gleichung entspricht.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right). \quad (4.39)$$

Da alle Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind, ist der angenommene Verschiebungsansatz zulässig.

Zu Beginn dieser Arbeit wurde das Ziel formuliert, Balken bestehend aus orthotropen Materialien berechnen zu können. Exakt formuliert bedeutet dies: Orthotropie bzgl. der Stabachse, nicht aber in der $x - y$ -Ebene. Da in dieser Ebene das Material um die Stabachse gedreht ist, muss das monoklin anisotrope Materialgesetz auf Elementebene angewendet werden. Dies veranschaulicht Abbildung 24.

Da das monoklin anisotrope Materialgesetz den allgemeineren Fall darstellt, wird in dieser Arbeit ausschließlich dieses Materialgesetz auf Elementebene angewendet:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

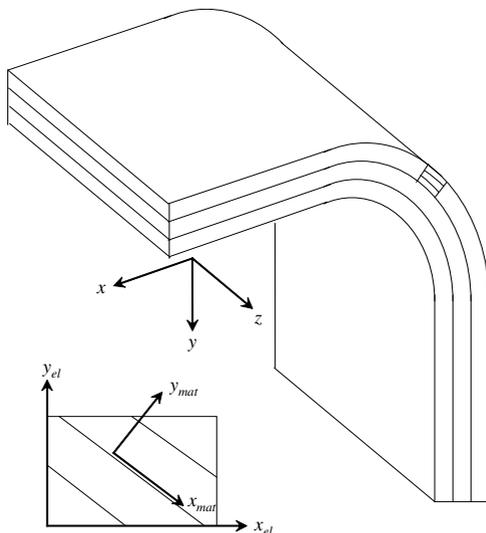


Abbildung 24: Elementkoordinatensystem und Materialkoordinatensystem

In Matrixschreibweise folgt damit für die Spannungen

$$\vec{\sigma} = C \vec{\epsilon}. \quad (4.41)$$

Mit Gleichung (4.33) wird Gleichung (4.41) zu

$$\vec{\sigma} = CB \vec{u} + CDF \vec{u} + C\vec{\epsilon}_0. \quad (4.42)$$

Für die Spannungen ergibt sich im Detail:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - C_{13} \tilde{\omega} \vartheta_0'' + C_{16} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ C_{12} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - C_{23} \tilde{\omega} \vartheta_0'' + C_{26} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ C_{13} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + C_{23} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - C_{33} \tilde{\omega} \vartheta_0'' + C_{36} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ \left[C_{44} \left(x - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \right) + C_{54} \left(-y - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \right) \right] \vartheta_0'' (z-l) \\ \left[C_{45} \left(x - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \right) + C_{55} \left(-y - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \right) \right] \vartheta_0'' (z-l) \\ C_{16} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - C_{36} \tilde{\omega} \vartheta_0'' + C_{66} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Für Querkontraktionszahlen $\nu = 0$ werden die Verschiebungen \bar{u} und \bar{v} sowie die Normalspannungen σ_x und σ_y Null. In diesem Fall wird die Normalspannung σ_z ausschließlich durch den Term $C_{33} \omega \vartheta_0''$ bestimmt und es liegt ein eindimensionaler Spannungszustand vor.

4.2 Aufstellung der Differentialgleichung

Weiterhin müssen die in Gleichung (4.43) berechneten Spannungen die globalen Gleichgewichtsbedingungen aus den Gleichungen (2.2) bis (2.4) befriedigen.

Durch Einsetzen der Gleichung (4.43) in die globalen Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich drei partielle Differentialgleichungen für die drei Unbekannten \bar{u} , \bar{v} und $\tilde{\omega}$:

$$\begin{aligned}
 & C_{11} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + C_{16} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + C_{26} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \\
 & + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} - (C_{13} + C_{55}) \vartheta_0'' \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} - (C_{36} + C_{45}) \vartheta_0'' \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = \vartheta_0'' (C_{55}y - C_{45}x), \\
 & C_{16} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + C_{26} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \\
 & + 2C_{26} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} - (C_{36} + C_{54}) \vartheta_0'' \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} - (C_{23} + C_{44}) \vartheta_0'' \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = \vartheta_0'' (C_{45}y - C_{44}x), \\
 & C_{44} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} + 2C_{45} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x \partial y} + C_{55} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} = 0. \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

Da das System aus partiellen Differentialgleichungen analytisch nicht lösbar ist, muss zur Lösung ein numerisches Lösungsverfahren angewendet werden. Wie in Kapitel 2.2 erläutert, ist dafür die Methode der Finiten Elemente besonders geeignet.

4.3 Lösung mit der Finiten Elemente Methode

Zur Lösung des Differentialgleichungssystems (4.44) wird zuerst das Prinzip der virtuellen Arbeit angewendet, um die innere und die äußere Formänderungsenergie zu bestimmen. Ausgehend davon werden die kontinuierlichen Verschiebungen \bar{u} , \bar{v} und $\tilde{\omega}$ mittels Formfunktionen und diskreten Verschiebungen an den Knotenpunkten beschrieben.

In dieser Arbeit wird ein sehr gängiges 2d-Element verwendet, namentlich das bilineare Viereckelement mit isoparametrischem Ansatz für die Formfunktionen. Beliebige Funktionen - in der Strukturmechanik Produkte aus den Formfunktionen und deren Ableitungen - können mittels Gaußscher Integration einfach über die Elementfläche numerisch integriert werden. Dazu wird die reale Geometrie zunächst auf ein Einheitsquadrat transformiert. Basierend auf [61] wird dies in Abbildung 25 illustriert:

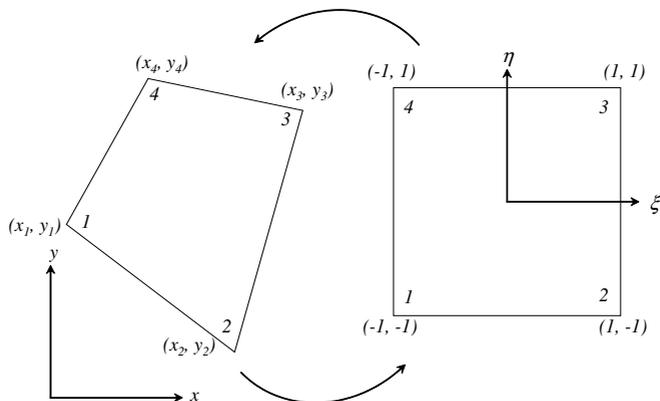


Abbildung 25: Transformation zwischen realer Geometrie und Einheitsquadrat

Man spricht von einem isoparametrischen Element, wenn die Darstellungsfunktion für die Geometrie und die Formfunktion, welche das Deformationsverhalten beschreibt, von der gleichen Art und Ordnung sind [34]. Mit derartigen Elementen können krummlinige Konturen beschrieben werden. Für die Formfunktion bzgl. des Knotens i gilt gemäß [61]:

$$n_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta). \quad (4.45)$$

Die numerische Integration über ein isoparametrisches Element - wie z.B. beim Prinzip der virtuellen Arbeit nötig - wird mit der Gaußschen Integration durchgeführt. Bezugnehmend auf [92] seien hier die wesentlichen Punkte kurz dargestellt. Mit sogenannten Lage- und Wichtungskoeffizienten (ξ_j und H_j) für die Gaußsche Integration gilt folgende Vereinfachung für n Stützstellen:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j). \quad (4.46)$$

Überträgt man Gleichung (4.46) nun auf ein bilineares isoparametrisches Viereckelement gilt:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_j, \eta_i). \quad (4.47)$$

Das Integral über $f(\xi, \eta)$ kann für n Stützstellen nur durch Summierung von n^2 Produkten aus den Wichtungskoeffizienten und den Funktionswerten der Lagekoeffizienten berechnet werden.

4.3.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Bezugnehmend auf die Arbeiten [21] und [76] wird das Prinzip der virtuellen Arbeit im Folgenden erläutert. Gemäß des Prinzips der virtuellen Arbeit muss die Summe der Potentiale aus der inneren Energie und aus den äußeren Lasten Null ergeben. Das Potential der inneren Energie (innere Formänderungsenergie) beschreibt die virtuelle Arbeit der Spannungen σ an den virtuellen Verzerrungen $\delta\varepsilon$, das Potential der äußeren Lasten (äußere Formänderungsenergie) beschreibt die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte an den virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{u}$.

“Solche Verschiebungen werden als virtuell bezeichnet. Sie erfolgen aus einer Gleichgewichtslage heraus, ihre Ursache braucht aber nichts mit den Kräften zu tun zu haben, die den Körper vorher verformt haben”[21]. Für die virtuellen Verschiebungen gelten folgende Bedingungen:

1. Sie müssen stetig, eindeutig und zudem in der Größenordnung der in der linearen Theorie zulässigen Verschiebungen sein.
2. Sie müssen mit den geometrischen Randbedingungen des Körpers verträglich sein. Wenn an der Oberfläche Verschiebungen vorgegeben sind, müssen dort die virtuellen Verschiebungen Null werden.
3. Während der virtuellen Verschiebungen werden alle Kräfte und Spannungen als konstant angenommen.

Man bezeichnet

$$\pi = \pi_i + \pi_a \quad (4.48)$$

als Gesamtpotential und es gilt gemäß [21]:

$$\delta\pi = \delta\pi_i + \delta\pi_a = 0, \quad (4.49)$$

d.h. bei einer virtuellen Verschiebung aus einer Gleichgewichtslage heraus verschwindet die erste Variation des Gesamtpotentials.

4.3.2 Innere Formänderungsenergie

Die Variation der inneren Formänderungsenergie beschreibt die Arbeit der virtuellen Verzerrungen $\delta\vec{\varepsilon}^T$ an den Spannungen. Es gilt:

$$\delta\pi_i = \int \delta\vec{\varepsilon}^T \sigma dV. \quad (4.50)$$

Die virtuellen Dehnungen $\delta\vec{\varepsilon}^T$ können mit Gleichung (4.33) und mit den virtuellen Verschiebungen

$$\delta\vec{u}^T = (\delta\vec{u}, \delta\vec{v}, \delta\vec{\omega}) \quad (4.51)$$

folgendermaßen formuliert werden:

$$\delta\varepsilon^T = \delta\vec{u}^T B^T + \delta\vec{u}^T F^T D^T. \quad (4.52)$$

Mit Gleichung (4.42) und (4.52) ergibt sich Gleichung (4.50) zu:

$$\delta\pi_i = \int_V \left(\delta\vec{u}^T B^T + \delta\vec{u}^T F^T D^T \right) \left(CB\vec{u} + CDF\vec{u} + C\vec{\varepsilon}_0 \right) dV, \quad (4.53)$$

$$\delta\pi_i = \int_V \left(\delta\vec{u}^T B^T CB\vec{u} + \delta\vec{u}^T B^T CDF\vec{u} + \delta\vec{u}^T B^T C\vec{\varepsilon}_0 + \delta\vec{u}^T F^T D^T CB\vec{u} + \delta\vec{u}^T F^T D^T CDF\vec{u} + \delta\vec{u}^T F^T D^T C\vec{\varepsilon}_0 \right) dV. \quad (4.54)$$

An dieser Stelle wird ein bilineares isoparametrisches Element mit den Formfunktionen \vec{n} (siehe Gleichung (4.45)) eingeführt. Zusätzlich wird das Volumen V des Balkens in k Elemente mit m Knoten zerlegt. Die Verformungen im Element werden als Funktion der Knotenverformungen beschrieben.

Mit

$$\vec{n}^T(x, y) = [n_1(x, y) \quad n_2(x, y) \quad \dots \quad n_m(x, y)] \quad (4.55)$$

ergeben sich die Verformungsfunktionen zu:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}(x,y) \\ \bar{v}(x,y) \\ \bar{\omega}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n}^T(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & \vec{n}^T(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & \vec{n}^T(x,y) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \\ \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \\ \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_m \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

$$\vec{u}(x,y) = \begin{bmatrix} \vec{n}^T(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & \vec{n}^T(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & \vec{n}^T(x,y) \end{bmatrix} \vec{v}, \quad (4.57)$$

$$\vec{u}(x,y) = N(x,y) \vec{v}. \quad (4.58)$$

Mit Gleichung (4.56) bis (4.58) können die kontinuierlichen Verformungsfunktionen $\vec{u}(x,y)$ über die Knotenverformungen \vec{v} und über die Formfunktionen $\vec{n}^T(x,y)$ ausgedrückt werden. Analoges gilt für die virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{u}^T$ und $\delta\vec{v}^T$. Unter Verwendung von Gleichung (4.58) und dadurch, dass die die virtuellen Knotenverformungen $\delta\vec{v}^T$ vor das Integral gezogen werden können, ergibt sich für die innere Formänderungsenergie:

$$\delta\pi_i = \delta\vec{v}^T \sum_{i=1}^m \int_{\Delta V_i} (N^T B^T C B N \vec{v} + N^T B^T C D F N \vec{v} + N^T F^T D^T C D F N \vec{v} + N^T F^T D^T C B N \vec{v} + N^T B^T C \vec{\epsilon}_0 + N^T F^T D^T C \vec{\epsilon}_0) dV. \quad (4.59)$$

Die Integration kann über die bekannten Formfunktionen $N(x,y)$, die äußere Belastung $\vec{\epsilon}_0$ und die unbekanntes - aber von x und y unabhängigen - Knotenverformungen \vec{v} durchgeführt werden.

4.3.3 Äußere Formänderungsenergie

Für die äußere Formänderungsenergie sind - neben dem Linientorsionsmoment aus Abbildung 22 - die Arbeiten, welche die Spannungen an den Verschiebungen der Balkenenden verrichten, aus den Abbildung 26 und 27 zu berücksichtigen.

1. Bei $z = 0$ wird ein Wölbmoment aufgebracht. Dieses führt zu einer Verschiebung w in Längsrichtung und ist daher zu berücksichtigen. Bei $z = 0$ tritt in der Einspannung ein Torsionsmoment auf. Da dieses jedoch zu keiner Verdrehung führt, liefert es keinen Beitrag zur äußeren Formänderungsenergie.

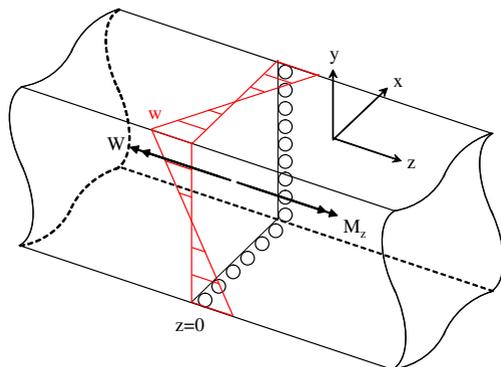


Abbildung 26: Längsspannung und Torsionsmoment bei drehstarrer, wölbfreier Einspannung

2. Bei $z = l$ ist der Balken zwar durch ein Wölbmoment belastet. Da die Verwölbung jedoch behindert ist, liefert es keinen Beitrag zur äußeren Formänderungsenergie. Da an dieser Stelle das Torsionsmoment Null ist, liefert auch dies - trotz einer vorliegenden Verdrehung - keinen Beitrag zur Formänderungsenergie.

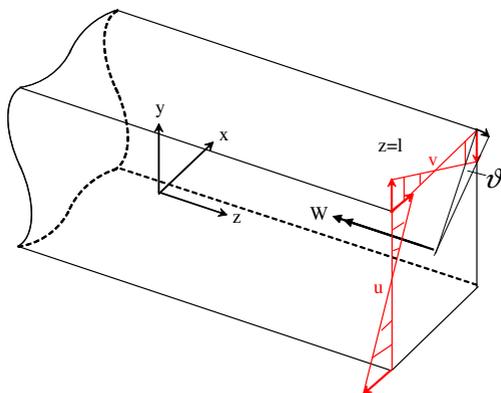


Abbildung 27: Torsionsmoment bei drehfreier, wölbstarrer Einspannung

Somit ergibt sich für die Variation der äußeren Formänderungsenergie:

$$\pi_a = \int_A \sigma_z(x, y) \delta w(z=0) dA + \int_l m_T(z) \delta \vartheta(z) dz. \quad (4.60)$$

Bezugnehmend auf [21] bzw. Kapitel 4.3.1, 2. sei an dieser Stelle nochmals Folgendes zitiert. „...wenn an der Oberfläche Verschiebungen vorgegeben sind, müssen dort die virtuellen Verschiebungen verschwinden.“ Im Gegensatz zu δw , welches auf der Variation der unbekanntnen Längsverschiebung w beruht, fusst $\delta \vartheta$ aus Gleichung (4.60) auf der vorgegebenen Verformung ϑ . Daher muss $\delta \vartheta = 0$ sein.

Somit gilt für die Variation der äußeren Formänderungsenergie:

$$\delta \pi_a = \int_A \delta \tilde{\omega} l \vartheta_0'' \sigma_z(z=0) dA. \quad (4.61)$$

Mit Gleichung (4.51) kann für Gleichung (4.61) auch:

$$\delta \pi_a = \int_A (\delta \bar{u}, \delta \bar{v}, \delta \tilde{\omega}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \vartheta_0'' \sigma_z(z=0) \end{pmatrix} dA, \quad (4.62)$$

geschrieben werden. Mit der Hilfsmatrix H

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l \vartheta_0'' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

kann der Spannungsvektor aus Gleichung (4.42) genutzt werden und die Variation der äußeren Formänderungsenergie wie folgt dargestellt werden:

$$\delta\pi_a = \int_A \delta\vec{u}^T H \sigma(z=0) dA \quad (4.64)$$

$$= \int_A \delta\vec{u}^T H \left(CB\vec{u} + CDF_0\vec{u} + C\vec{\epsilon}_0(z=0) \right) dA. \quad (4.65)$$

Unter Verwendung von Gleichung (4.58) können die kontinuierlichen Verformungsfunktionen $\vec{u}(x,y)$ durch die Knotenverformungen \vec{v} und die Formfunktionen $N(x,y)$ ausgedrückt werden. Somit folgt:

$$\delta\pi_a = \int_A \delta\vec{v}^T N^T H \left(CBN\vec{v} + CDF_0N\vec{v} + C\vec{\epsilon}_0(z=0) \right) dA. \quad (4.66)$$

In der Klammer des Integrals aus Gleichung (4.66) beschreibt der erste Summand die äußere Formänderungsenergie bei $z=0$ infolge der Normalspannungen aus der Längsdehnung in z -Richtung. Der zweite Summand beschreibt die äußere Formänderungsenergie bei $z=0$ infolge der Normalspannungen aus den Querkontraktionseffekten. Der letzte Summand beschreibt die äußere Formänderungsenergie bei $z=0$ infolge der Saint Venantschen Torsion. Dieser Anteil ergibt sich wie zuvor beschrieben zu Null, da dort keine Verformung vorliegt (siehe Abbildung 26 und 27).

Auch hier werden die virtuellen Knotenverformungen $\delta\vec{v}^T$ vor das Integral gezogen und die bekannten Formfunktionen N , die äußere Belastung $\vec{\epsilon}_0$ und die unbekannt - aber von x und y unabhängigen - Knotenverformungen \vec{v} über die Fläche A integriert.

4.3.4 Bestimmung des elastischen Gesamtpotentials

Die Summe aus der inneren und der äußeren Formänderungsenergie ergibt das elastische Gesamtpotential, welches für beliebige virtuelle Verrückungen $\delta\vec{v}^T$ Null ergeben muss.

$$\delta\pi = \delta\vec{v}^T \left[\int_V \left(N^T B^T CBN\vec{v} + N^T B^T CDFN\vec{v} + N^T F^T D^T CDFN\vec{v} + N^T F^T D^T CBN\vec{v} + N^T B^T C\vec{\epsilon}_0 + N^T F^T D^T C\vec{\epsilon}_0 \right) dV + \int_A \left(N^T HCBN\vec{v} + N^T HCDF_0N\vec{v} + N^T HC\vec{\epsilon}_0(z=0) \right) dA \right] = 0. \quad (4.67)$$

Das elastische Gesamtpotential wird durch bekannte mathematische Operatoren B , D , F und H , Materialwerte C und Formfunktionen N sowie durch unbekannte virtuelle Verrückungen $\delta \vec{v}^T$ und Knotenverschiebungen \vec{v} beschrieben. Aus dem elastischen Gesamtpotential wird nun die Elementsteifigkeitsmatrix abgeleitet.

4.4 Bestimmung der Elementsteifigkeits- und Gesamtsteifigkeitsmatrix

Das elastische Gesamtpotential ist aus Gleichung (4.67) bekannt. Da die virtuellen Verrückungen $\delta \vec{v}^T$ beliebig und ungleich Null sein müssen, kann das elastische Gesamtpotential nur Null werden, wenn die Summe der Integrale Null wird.

$$\begin{aligned} & \int_V (N^T B^T C B N \vec{v} + N^T B^T C D F N \vec{v} + N^T F^T D^T C D F N \vec{v} + \\ & N^T F^T D^T C B N \vec{v} + N^T B^T C \vec{\epsilon}_0 + N^T F^T D^T C \vec{\epsilon}_0) dV + \\ & \int_A (N^T H C B N \vec{v} + N^T H C D F_0 N \vec{v} + N^T H C \vec{\epsilon}_0(z=0)) dA = 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

In Gleichung (4.68) können die Knotenverformungen \vec{v} ausgeklammert werden, da sie keine Funktionen von x und y darstellen:

$$\begin{aligned} & \left[\int_V (N^T B^T C B N + N^T B^T C D F N + N^T F^T D^T C D F N + \right. \\ & \left. N^T F^T D^T C B N) + \int_A (N^T H C B N + N^T H C D F_0 N) dA \right] \vec{v} = \\ & \int_V (N^T B^T C + N^T F^T D^T C) \vec{\epsilon}_0 dV + \int_A N^T H C(z=0) \vec{\epsilon}_0 dA. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Demzufolge hat Gleichung (4.69) die allgemeine Form einer Gleichung der Finiten Elemente Methode:

$$k \cdot \vec{v} = \vec{f}_k. \quad (4.70)$$

Es kann damit für jedes Element die Elementsteifigkeitsmatrix k und der Lastvektor \vec{f}_k bestimmt werden.

Die jeweiligen Terme der Integranden aus Gleichung (4.69) werden im Folgenden einzeln aufgeführt.

$$N^T B^T C B N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \vartheta_0''^2 n^{\vec{T}} \vec{n} \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

$$N^T B^T C D F N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\vartheta_0'' n^{\vec{T}} \left(C_{13} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{36} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \right) & -\vartheta_0'' n^{\vec{T}} \left(C_{23} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{36} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

$$N^T B^T C \vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

$$N^T F^T D^T C B N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vartheta_0'' \left(-C_{13} \frac{\partial n^{\vec{T}}}{\partial x} \vec{n} - C_{36} \frac{\partial n^{\vec{T}}}{\partial y} \vec{n} \right) \\ 0 & 0 & \vartheta_0'' \left(-C_{23} \frac{\partial n^{\vec{T}}}{\partial y} \vec{n} - C_{36} \frac{\partial n^{\vec{T}}}{\partial x} \vec{n} \right) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.74)$$

$$N^T F^T D^T C \vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta_0''^2 (z-l)^2 \left(C_{44x} \frac{\partial n^{\vec{T}}}{\partial y} - C_{45y} \frac{\partial n^{\vec{T}}}{\partial y} + C_{45x} \frac{\partial n^{\vec{T}}}{\partial x} - C_{55x} \frac{\partial n^{\vec{T}}}{\partial x} \right) \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

$$N^T H C \vec{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

$$N^T H C B N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{33} l \vartheta_0''^2 n^{\vec{T}} \vec{n} \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

$$N^T H C D F N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ l \vartheta_0'' n^{\vec{T}} \left(C_{13} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{36} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \right) & l \vartheta_0'' n^{\vec{T}} \left(C_{23} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{36} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

$$N^T F^T D^T CDFN = \begin{bmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* & 0 \\ k_{21}^* & k_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & k_{33}^* \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$k_{11}^* = C_{11} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{16} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y}, \quad (4.80)$$

$$k_{12}^* = C_{12} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y}, \quad (4.81)$$

$$k_{21}^* = C_{12} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x}, \quad (4.82)$$

$$k_{22}^* = C_{22} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{26} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x}, \quad (4.83)$$

$$k_{33}^* = \vartheta_0''^2 (z-l)^2 \left(C_{44} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{45} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{54} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{55} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \right). \quad (4.84)$$

Die Terme $N^T HCBN$ und $N^T B^T CDFN$ geben die Steifigkeit infolge der Balkenlängsdehnung an, welche für die Bestimmung der Einheitsverwölbung und der Verschiebung infolge von Querkontraktionseffekten irrelevant sind. $N^T HCDFN$ und $N^T B^T CDFN$ geben die Steifigkeit infolge von Querkontraktionseffekten wieder und spielen für die Bestimmung der Einheitsverwölbung keine Rolle. $N^T F^T D^T C \vec{e}_0$ stellt den Lastvektor dar und zeigt, dass nur für die Einheitsverwölbung eine Komponente vorhanden ist. Für die Bestimmung der Verschiebungen infolge Querkontraktion ist keine äußere Last einzubeziehen. Die Matrix $N^T F^T D^T CDFN$ zeigt, dass die Einheitsverwölbung entkoppelt von den Verschiebungen infolge Querkontraktion und damit nur abhängig von der äußeren Belastung bestimmt werden kann. Ist die Einheitsverwölbung bestimmt, können mit $N^T B^T CDFN$ die Verschiebungen infolge Querkontraktion ermittelt werden.

Unter Verwendung von Gleichung (4.23) in vektorieller Schreibweise und nach Integration von (4.71) bis (4.79) über die Längskoordinate z sowie entsprechender Umsortierung kann Gleichung (4.70) durch folgendes lineares Gleichungssystem ausgedrückt werden:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{\omega} + \vec{\omega}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{pmatrix}. \quad (4.85)$$

Hierbei ist $\vec{\omega}_0$ ein Vektor, welcher auf jeder Position mit dem Wert ω_0 besetzt ist. Ferner gelten folgende Beziehungen in Gleichung (4.85):

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= l \int_A \left(C_{11} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{16} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \right) dA, \\
 k_{12} &= l \int_A \left(C_{12} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \right) dA, \\
 k_{13} &= l \vartheta_0'' \int_A \left(-C_{13} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \vec{n} - C_{36} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \vec{n} \right) dA, \\
 k_{21} &= l \int_A \left(C_{21} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{16} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \right) dA, \\
 k_{22} &= l \int_A \left(C_{22} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{26} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \right) dA, \\
 k_{23} &= l \vartheta_0'' \int_A \left(-C_{23} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \vec{n} - C_{36} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \vec{n} \right) dA, \\
 k_{31} &= 0, \\
 k_{32} &= 0, \\
 k_{33} &= \vartheta_0''^2 \frac{l^3}{3} \int_A \left(C_{44} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{45} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} + C_{55} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \right) dA, \\
 \vec{f}_1 &= 0, \\
 \vec{f}_2 &= 0, \\
 \vec{f}_3 &= \vartheta_0''^2 \frac{l^3}{3} \int_A \left[- \left(C_{44} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} + C_{45} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \right) x + \left(C_{45} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial y} + C_{55} \frac{\partial \vec{n}^T}{\partial x} \right) y \right] dA.
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Die Integration über die Elementfläche A kann leicht durchgeführt werden, da als einzige - von x und y abhängige Funktion - die bekannte Formfunktion n (inklusive deren Ableitungen) zu integrieren ist. Anschließend wird vom Elementkoordinatensystem auf das globale Koordinatensystem transformiert und man erhält im

globalen Koordinatensystem mit den Koeffizienten aus Gleichung (4.86) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} k_{11}^g & k_{12}^g & k_{13}^g \\ k_{21}^g & k_{22}^g & k_{23}^g \\ 0 & 0 & k_{33}^g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{\omega} + \vec{\omega}_0 \end{pmatrix}_{global} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix}_{global}. \quad (4.87)$$

Die Koeffizienten aus Gleichung (4.86) weisen folgende Besonderheiten auf. In den ersten beiden Zeilen des Gleichungssystems aus (4.87) kann l und in der letzten Zeile $\vartheta_0'' \frac{f_3}{3}$ ausgeklammert werden. Damit kann $\vec{\omega} + \vec{\omega}_0$ letztendlich unabhängig von der Bauteillänge und von der vorgegebenen Verdrehung berechnet werden kann. An dieser Stelle wird die Annahme von Wlassow (Schubverzerrung in der Mittel­fläche dünnwandiger Strukturen gleich Null) als nicht nötig zur Bestimmung der Einheitsverwölbung $\vec{\omega}$ betrachtet, da die Einheitsverwölbung $\vec{\omega}$ unabhängig von dieser Forderung aus Gleichung (4.87) berechnet werden kann. Stattdessen wird angenommen, dass der zwischen Längsverschiebung $w(x, y, z)$, erster Ableitung der Verdrehung $\vartheta'(z)$ und der Einheitsverwölbung $\omega(x, y)$ bestehende Zusammenhang auch für Balken mit inhomogenen Querschnitten gilt:

$$w(x, y, z) = -\omega(x, y) \vartheta'(z) \quad (4.88)$$

Die Bestimmung der Querschnittsverzerrungen \vec{u} und \vec{v} kann wiederum unabhängig von l durchgeführt werden. Ferner wird in diesem Fall $\vartheta_0'' = 1$ gesetzt. Nachdem dies für jedes Element geschehen ist, wird im nächsten Schritt das Gleichgewicht an jedem Knoten aufgestellt. Man erhält damit ein Gleichungssystem, welches den gesamten Querschnitt beschreibt. Dieses weist dieselbe Struktur wie das Gleichungssystem auf Elementebene auf, d.h. die Nulleinträge stehen an denselben Positionen. Der Verschiebungsvektor hat sich jedoch geändert (hier ausgedrückt durch die Verwendung von Großbuchstaben). Dieser enthält nicht mehr nur die Knotenverschiebungen eines Elements, sondern alle Knotenverschiebungen des gesamten Querschnitts

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & 0 & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{V} \\ \vec{\Omega} + \vec{\omega}_0 \end{pmatrix}_{global} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{F}_3 \end{pmatrix}_{global}. \quad (4.89)$$

Verkürzt kann Gleichung (4.89) folgendermaßen dargestellt werden:

$$K \cdot \vec{v}_{global} = \vec{F}_{global} \quad (4.90)$$

Da die letzte Zeile von Gleichung (4.89) nur abhängig von $\vec{\Omega} + \vec{\omega}_0$ ist, wird das lineare Gleichungssystem folgendermaßen partitioniert. Diese Matrix hat ca. 90%

weniger Elemente als die Gesamtsteifigkeitsmatrix aus (4.89). Die Rechenzeit verkürzt sich entsprechend.

$$K_{33} \left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}_0 \right) = \vec{F}_3, \quad (4.91)$$

$$\vec{\Omega} + \vec{\omega}_0 = (K_{33})^{-1} \vec{F}_3. \quad (4.92)$$

Durch nicht behinderte Starrkörperverschiebungen ist K_{33} singulär. In diesem Fall werden die Starrkörperverschiebungen beschränkt, indem die letzte Komponente von $\vec{\Omega} + \vec{\omega}_0$ zu Null gefordert wird. Dies erlaubt zwar die Lösung des Gleichungssystems, impliziert aber eine konstante Zug- oder Druckkraft auf dem Balken und muss daher noch korrigiert werden.

Mit dieser Lösung für $\vec{\Omega} + \vec{\omega}_0$ können die ersten beiden Zeilen des Gleichungssystems aus Gleichung (4.89) wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{13} \left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}_0 \right) \\ -K_{23} \left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}_0 \right) \end{pmatrix}. \quad (4.93)$$

Die anschließende Lösung dieses Gleichungssystems liefert die fehlenden Komponenten des Verschiebungsvektors. Hierbei muss jedoch erwähnt werden, dass diese Verschiebungen nur für den Fall $\vec{\omega}_0 = 0$, den Verschiebungen aufgrund von Querkontraktion infolge Wölbkrafttorsion entsprechen. Durch Einsetzen des gesamten Verschiebungsvektors in Gleichung (4.43) erhält man abschließend den dreidimensionalen Spannungszustand.

4.5 Korrektur der Starrkörperverschiebung

Die Lösungen für die Knotenverschiebungen $\overrightarrow{v_{global}}$ liegen im globalen Koordinatensystem vor. Mit den Knotenverschiebungen $\overrightarrow{v_{global}}$ werden die Spannungen im globalen Koordinatensystem berechnet und können bei Bedarf auf das Elementkoordinatensystem transformiert werden. Im Weiteren werden die Spannungen im globalen Koordinatensystem verwendet:

$$\vec{\sigma} = CBN\overrightarrow{v_{global}} + CDFN\overrightarrow{v_{global}} + C\vec{\epsilon}_0. \quad (4.94)$$

Reine Wölbkrafttorsion liegt nur vor, wenn gilt:

$$N = \int_A \sigma_z dA = 0. \quad (4.95)$$

Für diesen Fall ist dann auch

$$\omega_0 = 0. \quad (4.96)$$

Ferner gilt folgender Zusammenhang zwischen Normalkraft N , Längsdehnung infolge Zug ε_z und Zugsteifigkeit des Balkens mit inhomogenem Querschnitt EA :

$$N = EA\varepsilon_z = 0. \quad (4.97)$$

Die Gleichungen (4.28), (4.23) und (4.96) in Gleichung (4.97) eingesetzt, ergibt:

$$N = EA\vartheta_0''\omega = 0. \quad (4.98)$$

Nach Lösung von Gleichung (4.92) gilt aber zunächst der allgemeine Fall mit

$$\omega_0 \neq 0, \quad (4.99)$$

und

$$N = \int_A \sigma_z dA \neq 0. \quad (4.100)$$

In diesem Fall gilt

$$N = \int_A \sigma_z dA = EA\varepsilon_z. \quad (4.101)$$

Die Gleichungen (4.28) und (4.23) in Gleichung (4.101) eingesetzt, ergibt:

$$\int_A \sigma_z dA = EA\vartheta_0''(\omega + \omega_0). \quad (4.102)$$

An dieser Stelle wird $\vartheta_0'' = 1$ vorgegeben. Damit folgt aus Gleichung (4.98):

$$\int_A \sigma_z dA = EA\omega_0, \quad (4.103)$$

$$\omega_0 = \frac{\int_A \sigma_z dA}{EA}$$

4.6 Berechnung der Spannungen und Bestimmung der Wölbsteifigkeit

Durch Einsetzen von Gleichung (4.103) in Gleichung (4.92) erhält man die Knotenverschiebung der Einheitsverwölbung $\vec{\Omega}$ wie folgt:

$$\vec{\Omega} = (K_{33})^{-1} \vec{F}_3 - \vec{\omega}_0. \quad (4.104)$$

Somit ist die Starrkörperverschiebung erfolgreich eliminiert. Es liegt reine Wölbkrafttorsion vor. Für die Verschiebungen aufgrund von Querkontraktion infolge Wölbkrafttorsion muss daher Gleichung (4.93) folgendermaßen umformuliert werden:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{\Omega} \\ \vec{V}_{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{13} \vec{\Omega} \\ -K_{23} \vec{\Omega} \end{pmatrix}. \quad (4.105)$$

Durch die zuvor durchgeführte Bereinigung der Starrkörperverschiebung liegt nun reine Wölbkrafttorsion vor. Für $\vartheta_0'' = 1$ gilt damit:

$$\vec{v}_{\text{korrigiert}} = \begin{pmatrix} \vec{U}_{\Omega} \\ \vec{V}_{\Omega} \\ \vec{\Omega} \end{pmatrix}$$

In Gleichung (4.43) eingesetzt, liefern diese Knotenverschiebungen den dreidimensionalen Spannungszustand im globalen Koordinatensystem:

$$\vec{\sigma} = CBN \vec{v}_{\text{korrigiert}} + CDFN \vec{v}_{\text{korrigiert}} + C \vec{\epsilon}_0. \quad (4.106)$$

In SABINA-NG werden die Spannungen aus Gleichung (4.106) auf die Elementkoordinatensysteme transformiert.

Da $\vec{\epsilon}_0$ keinen Beitrag zu σ_z liefert, ist σ_z ausschließlich von der Einheitsverwölbung und der Knotenverschiebung infolge Querkontraktion abhängig. Für den Fall $\vartheta_0'' = 1$ ergibt sich für Gleichung (4.4):

$$EC_W = \int_A \sigma_z(x,y) \vec{n}(x,y) \vec{\Omega} dA. \quad (4.107)$$

Somit ist das Ziel dieser Arbeit erreicht und die Wölbsteifigkeit EC_W kann in eindimensionalen statischen oder dynamischen Berechnungen Verwendung finden. Eine dreidimensionale Finite Elemente Berechnung ist damit nicht erforderlich.

5 Implementierung von SABINA-NG

Die Theorie aus Kapitel 4 wird in SABINA-NG umgesetzt. Zusätzlich werden die Gemeinsamkeiten und Unterschiede des bestehenden Programmcodes von SABINA gegenüber dem von SABINA-NG erläutert.

Folgende Schritte werden in SABINA-NG sequentiell abgearbeitet:

1. Transformation der Knotenkoordinaten in das SMP-KS.
2. Aufstellung der Steifigkeitsmatrix K_{33} und des Lastvektors F_3 aus Gleichung (4.89) zur Berechnung der Einheitsverwölbung.
3. Lösung nach der Einheitsverwölbung (siehe Gleichung (4.92)).
4. Berechnung der Schubspannungen infolge Saint Venantscher Torsion.
5. Bestimmung des Momentes infolge Saint Venantscher Torsion und der Torsionssteifigkeit gemäß Gleichung (A.38).
6. Aufstellung der Steifigkeitsmatrix zur Berechnung der Querschnittsverzerrung infolge Wölbkrafttorsion (siehe Gleichung (4.85), (4.87) und (4.92)).
7. Berechnung der rechten Seite aus Einheitsverwölbung und entsprechenden Komponenten der Steifigkeitsmatrix aus 6. gemäß Gleichung (4.93).
8. Lösung nach den Querschnittsverzerrungen.
9. Berechnung der Spannungen infolge Wölbkrafttorsion.
10. Bestimmung der Normalkraft und der Starrkörperverschiebung gemäß Gleichungen (4.101) und (4.103) sowie Berechnung der Einheitsverwölbung gemäß Gleichung (4.104).
11. Wiederholung von 6. - 9.
12. Bestimmung der Wölbsteifigkeit gemäß Gleichung (4.107).

In SABINA-NG ist das grundsätzliche Vorgehen identisch zu dem Vorgehen in SABINA. Zusätzlich ist die Steifigkeitsmatrix $\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$, welche zur Berechnung der Querschnittsverzerrung infolge Wölbkrafttorsion bestimmt wird, identisch mit der Steifigkeitsmatrix für die Zug-, Biege- und Temperaturlastfälle. Ebenso ist die Steifigkeitsmatrix K_{33} zur Berechnung der Einheitsverwölbung bereits in

SABINA vorhanden. Da bei Torsion die Bewegung um den Schubmittelpunkt stattfindet (siehe Kapitel 3.8) wird in SABINA-NG im SMP-KS gerechnet. Dies ist unterschiedlich zu SABINA, da dort entweder in einem beliebigen Koordinatensystem oder im HA-KS gerechnet wird. Dort wird aber das SMP-KS bestimmt. Diese Informationen übernimmt SABINA-NG von SABINA. Für eine zukünftige Weiterentwicklung der produktiven Version sollte eine bessere Verknüpfung der einzelnen Subroutinen miteinander das Ziel sein. Die gemeinsamen Steifigkeitsmatrizen ($\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$ und K_{33}) oder deren Inversen sollten in den alten Subroutinen abgespeichert werden, um dann von den folgenden Subroutinen genutzt werden zu können. Dies würde die Berechnung der Wölbsteifigkeit nochmal beschleunigen, da damit keine Invertierung der Matrizen mehr nötig wäre, sondern die Einheitsverwölbung und die Querschnittsverzerrung sehr einfach durch Multiplikation der vorhanden Inversen mit dem Lastvektor in einem Schritt berechnet werden könnte.

6 Rechnerische und experimentelle Verifikation

Die Ergebnisse von SABINA-NG werden rechnerisch und experimentell verifiziert. Für Balken mit rechteckigen, kreisförmigen und elliptischen Vollquerschnitten sowie für Balken mit dünnwandigen kreisförmigen, dünn- oder dickwandigen quadratischen Hohlquerschnitten und für ein dünnwandiges C-Profil mit homogenem und homogenisiertem Querschnitt werden die analytischen Lösungen mit den Ergebnissen von SABINA-NG verglichen.

Zusätzlich wird für das genannte C-Profil noch ein numerischer Vergleich mittels einer konventionellen dreidimensionalen Finite Elemente Berechnung mit einem inhomogenem Querschnitt durchgeführt. Abschließend werden mittels eines statischen und eines dynamischen Versuchs die Steifigkeiten experimentell bestimmt. Diese Steifigkeiten werden ebenfalls mit den Steifigkeiten aus SABINA-NG verglichen.

6.1 Analytische und numerische Verifikation

Die Steifigkeiten, die aus der zuvor beschriebenen Theorie folgen, werden mit den Steifigkeiten der Technischen Biegetheorie verglichen. Der Vergleich findet immer für die Torsionssteifigkeit GI_T und - falls analytisch berechenbar - für die Wölbsteifigkeit EC_W statt. Da für ein Rechteckprofil keine analytische Lösung für die Wölbsteifigkeit vorliegt, wird dort der Vergleich über die Einheitsverwölbung ω geführt. Bezugnehmend auf Gleichung (3.111) wird als anschauliches Maß für das Abklingen der Wölbkrafttorsion an dieser Stelle die Größe $\frac{3}{\lambda} = 3 \cdot \frac{1}{\lambda} = 3 \cdot \sqrt{EC_W/GI_T}$ eingeführt. Sie beschreibt die Entfernung gegenüber einer wölbbehinderten Einspannung, an welcher das Torsionsmoment infolge Wölbkrafttorsion auf 5% des gesamten Torsionsmomentes abgefallen ist. Damit ist die Wölbkrafttorsion kaum noch relevant und der Großteil des Torsionsmomentes wird über die Saint Venantsche Torsion übertragen.

6.1.1 Balken mit rechteckigem Vollquerschnitt

Da die Finite Elemente Methode eine Näherungslösung ist, stellt sich die Frage nach deren Genauigkeit für die Querschnittssteifigkeiten und für die Einheitsverwölbung. Die Genauigkeit wird maßgeblich von der Feinheit des verwendeten Netzes beeinflusst. Um die benötigte Feinheit festzustellen, wird im Folgenden am Beispiel eines Balkens mit rechteckigem Vollquerschnitt eine Konvergenzanalyse mit vier Netzvarianten von grob (7x15 Elemente) bis sehr fein (50x125 Elemente) durchgeführt.

Für einen rechteckigen Vollquerschnitt (siehe Abbildung 28) mit den Abmessungen $a = 0,5$ m und $b = 0,1$ m und damit einem Seitenverhältnis von 5 ergibt sich unter

Verwendung eines isotropen Materialgesetzes mit einem Elastizitätsmodul $E = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und einem Schubmodul $G = 4,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ gemäß [76]:

$$GI_T = 16 \cdot G \frac{\eta}{3} ab^3 = 9,312 \cdot 10^1 \text{ Nm}^2. \quad (6.1)$$

$\frac{\eta}{3} = 0,291$ für ein Seitenverhältnis von 5 (siehe [76]).

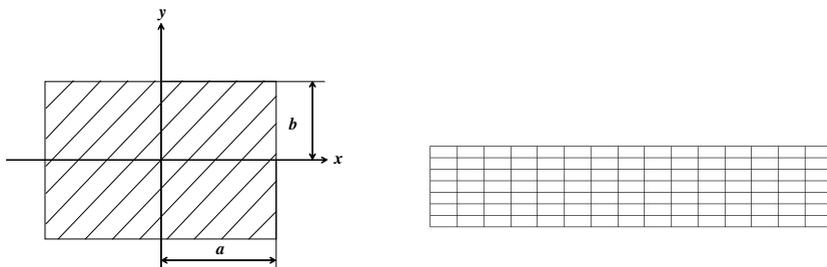


Abbildung 28: Rechteckiger Vollquerschnitt

Für die Berechnung mit SABINA-NG wird der rechteckige Vollquerschnitt gemäß Tabelle 1 idealisiert:

Idealisierung		grob	mittel	fein	sehr fein
Knoten		128	448	1664	6426
Scheibenelemente		105	403	1575	6250
Materialien		1	1	1	1
GI_T	$[\text{Nm}^2]$	$9,3931 \cdot 10^1$	$9,3403 \cdot 10^1$	$9,3267 \cdot 10^1$	$9,3233 \cdot 10^1$
EC_W	$[\text{Nm}^4]$	$4,7237 \cdot 10^6$	$4,7010 \cdot 10^6$	$4,6947 \cdot 10^6$	$4,6930 \cdot 10^6$

Tabelle 1: Konvergenzanalyse rechteckiger Vollquerschnitt

Wie aus Tabelle 1 ersichtlich wird, konvergieren die Werte für die Torsionssteifigkeit GI_T und die Wölbsteifigkeit EC_W sehr rasch gegen die analytische Lösung. Ebenso verhält es sich mit den Verschiebungen von Punkten auf den Kanten des rechteckigen Vollquerschnitts (siehe Abbildung 29). Auch dort liegt bereits die Lösung für die grobe Idealisierung sehr nahe an der Lösung der sehr feinen Idealisierung.

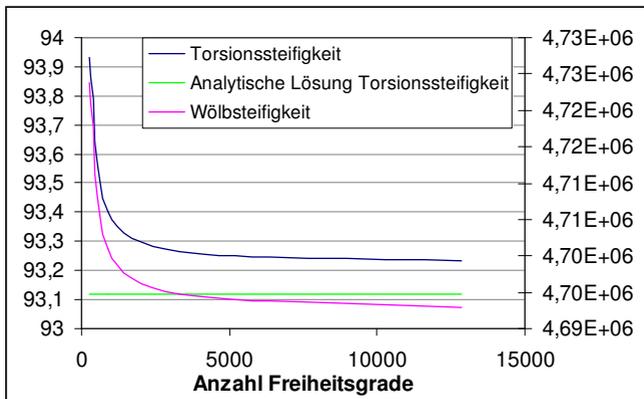


Abbildung 29: Konvergenzanalyse für die Torsionssteifigkeit $G I_T$ und die Wölbsteifigkeit $E C_W$ des rechteckigen Vollquerschnitts

Die relative Abweichung für die Torsionssteifigkeit $G I_T$ zwischen SABINA und analytischer Lösung beträgt weniger als 1%. Der Vergleich hinsichtlich der Wölbsteifigkeit $E C_W$ kann hier nicht erbracht werden, da keine analytische Lösung für $E C_W$ existiert. Aus diesem Grund wird der Vergleich über die Einheitsverwölbung ω an den Profilrändern erbracht.

Zuerst werden die Ergebnisse an der Kante der langen Seite a von SABINA-NG und der analytischen Lösung gegenübergestellt.

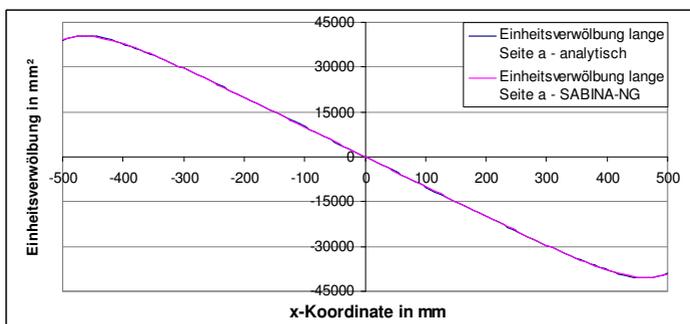


Abbildung 30: Gegenüberstellung der Einheitsverwölbung für den rechteckigen Vollquerschnitt (lange Seite a) bei $y = b$

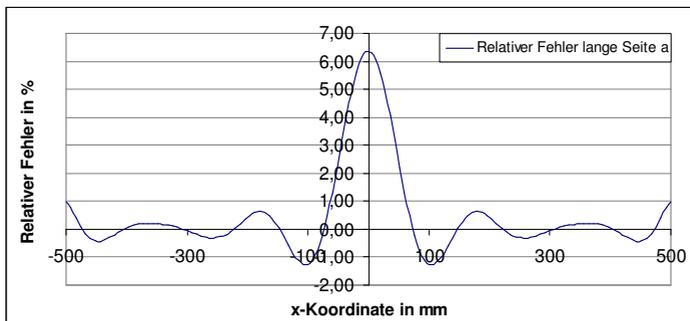


Abbildung 31: Relativer Fehler der Einheitsverwölbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (lange Seite a) bei $y = b$

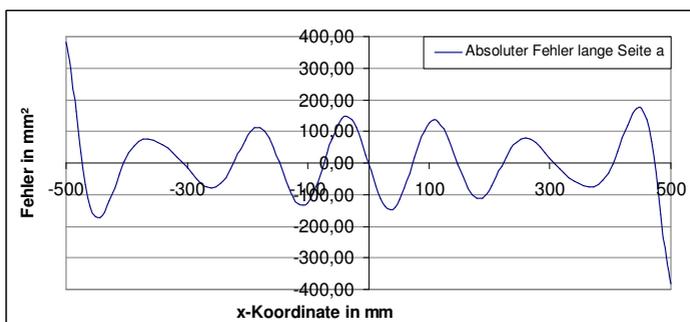


Abbildung 32: Absoluter Fehler der Einheitsverwölbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (lange Seite a) bei $y = b$

Der relative Fehler aus Abbildung 31 liegt unter 1% in den Außenbereichen. Damit kann für diesen Bereich der Beweis für die Übereinstimmung der Ergebnisse von SABINA-NG und analytischer Lösung erbracht werden. Im Bereich der Symmetrieachse kann der Fehler aber auf 6% ansteigen. Dies liegt daran, dass die Einheitsverwölbung um die Symmetrieachse nahe Null liegt. In diesem Fall hat der absolute Fehler eine bessere Aussagekraft. Es fällt hierbei auf, dass diese Abweichung eine Summe aus Sinusfunktionen darstellt. Dies wird auf die Summenbildung über Sinusfunktionen bis zum 10. Glied in der analytischen Lösung für die Einheitsverwölbung ω zurückgeführt, welche nur an der langen Seite des Rechtecks notwendig ist (siehe Kapitel A.1.7, Tabelle 18). Der absolute Fehler im Innenbereich (siehe Ab-

bildung 32) ist nur unwesentlich höher als in den Außenbereichen und wesentlich niedriger als der absolute Fehler direkt auf der Kante. Dies führt zu dem Schluß, dass SABINA-NG und die analytische Lösung gleichwertige Ergebnisse für die lange Seite a des Rechteckprofils liefern.

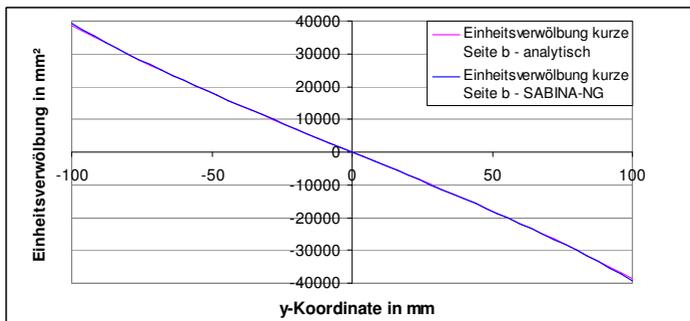


Abbildung 33: Gegenüberstellung der Einheitsverwölbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (kurze Seite b) für $x = a$

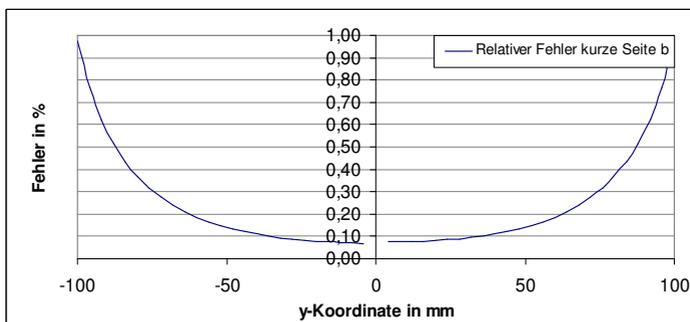


Abbildung 34: Relativer Fehler der Einheitsverwölbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (kurze Seite b) für $x = a$

Der relative Fehler entlang der kurzen Seite b liegt in den Außenbereichen immer unter 1% (siehe Abbildung 34). Damit stimmen die Ergebnisse von SABINA-NG und der analytischen Lösung gut überein. Zusätzlich fällt der Betrag des absoluten Fehlers zur Symmetrieachse hin auf Null (siehe Abbildung 35). Zusammen mit der guten Übereinstimmung von SABINA-NG und der analytischen Lösung für die Einheitsverwölbung in Abbildung 33 belegen diese Daten, dass SABINA-NG und die

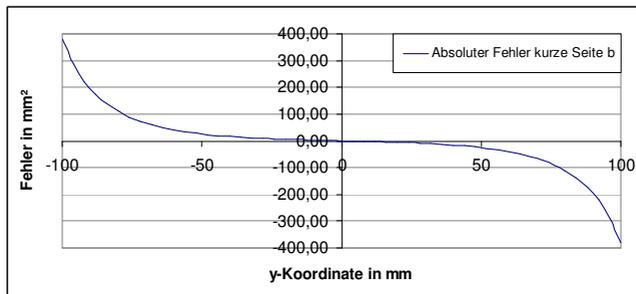


Abbildung 35: Absoluter Fehler der Einheitsverwöbung ω für den rechteckigen Vollquerschnitt (kurze Seite b) für $x = a$

analytische Lösung gleichwertige Ergebnisse für die kurze Seite des Rechteckprofils liefern.

6.1.2 Balken mit kreisförmigem Vollquerschnitt

Für einen kreisförmigen Vollquerschnitt mit Radius $r = 0,1 \text{ m}$ (siehe Abbildung 36) und unter Verwendung eines isotropen Materialgesetzes mit einem Elastizitätsmodul $E = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und einem Schubmodul $G = 4,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ergibt sich analytisch mit [19]:

$$GI_T = \frac{1}{2} Gr^4 \pi = 6,283 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2, \quad (6.2)$$

$$EC_W = 0 \text{ Nm}^4.$$

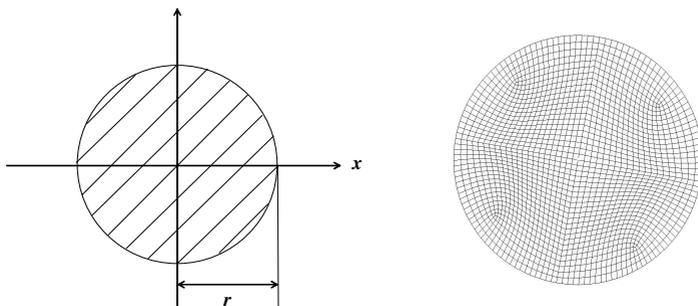


Abbildung 36: Kreisförmiger Vollquerschnitt

Für die Berechnung mit SABINA-NG wird der kreisförmige Vollquerschnitt gemäß Tabelle 2 idealisiert: Damit liefern SABINA und SABINA-NG folgende Ergebnisse:

FE-Modell	Anzahl
Knoten	1825
Scheibenelemente - Viereck	1757
Materialien	1

Tabelle 2: Idealisierung kreisförmiger Vollquerschnitt

$$\begin{aligned} GI_T &= 6,279 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2, \\ EC_W &= 2,194 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^4. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die relative Abweichung für die Torsionssteifigkeit GI_T zwischen SABINA und der analytischen Lösung beträgt weniger als 0,1%. Die Wölbsteifigkeit EC_W aus SABINA-NG ist numerisch Null und liegt damit auf dem Wert der analytischen Lösung. Damit ist dieses Profil - wie erwartet - wölbfrei.

6.1.3 Balken mit elliptischem Vollquerschnitt

Für einen elliptischen Vollquerschnitt (siehe Abbildung 37) mit den Halbachsen $a = 0,05 \text{ m}$ und $b = 0,03 \text{ m}$ und unter Verwendung eines isotropen Materialgesetzes mit einem Elastizitätsmodul $E = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und einem Schubmodul $G = 4,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ergibt sich mit Bezug auf [19] oder [76]:

$$\begin{aligned} GI_T &= G \cdot \frac{a^3 b^3 \pi}{a^2 + b^2} = 1,247 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2, \\ EC_W &= E \cdot \int \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy \right)^2 dA = 9,784 \text{ Nm}^4. \end{aligned} \quad (6.4)$$

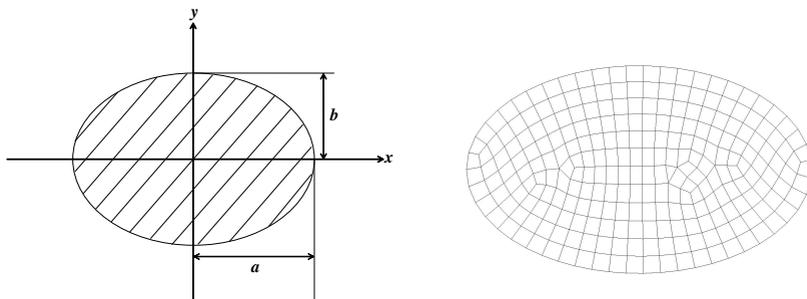


Abbildung 37: Elliptischer Vollquerschnitt

Für die Berechnung mit SABINA-NG wird der elliptische Vollquerschnitt gemäß Tabelle 3 idealisiert:

FE-Modell	Anzahl
Knoten	274
Scheibenelemente - Viereck	247
Scheibenelemente - Dreieck	1
Materialien	1

Tabelle 3: Idealisierung elliptischer Vollquerschnitt

Damit liefern SABINA und SABINA-NG folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
 GI_T &= 1,242 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2, \\
 EC_W &= 9,70 \text{ Nm}^4.
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Die relative Abweichung für die Torsionssteifigkeit GI_T zwischen SABINA und der analytischen Lösung beträgt weniger als 0,5% und für die Wölbsteifigkeit weniger als 1%. Auch hier sieht man eine sehr hohe Übereinstimmung von SABINA-NG mit der analytischen Lösung. Mit $\frac{3}{\lambda} = 3\sqrt{EC_W/GI_T} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ergibt sich jedoch für dieses Profil - wie erwartet - ein äußerst geringer Einfluss der Wölbkrafttorsion auf das gesamte Verhalten bzgl. Torsion.

6.1.4 Balken mit dünnwandigem kreisförmigem Hohlquerschnitt

Für einen dünnwandigen kreisförmigen Hohlquerschnitt mit Aussenradius $r = 0,1$ m (und Umfang s) und einer Wandstärke von $t = 2,0 \cdot 10^{-3}$ m ergibt sich für ein isotropes Material mit einem Elastizitätsmodul $E = 1,0 \cdot 10^{11}$ N/m² und einem Schubmodul $G = 4,0 \cdot 10^{10}$ N/m² mit [76]:

$$\begin{aligned}
 GI_T &= G \cdot \frac{4A^2 t}{s} = 4,877 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2 \\
 EC_W &= 0 \text{ Nm}^4
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

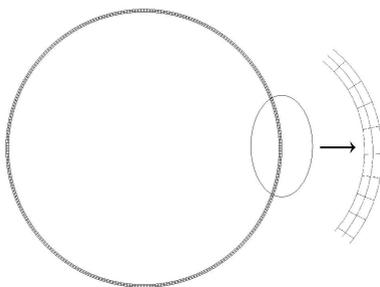


Abbildung 38: Dünnwandiger kreisförmiger Hohlquerschnitt

Für die Berechnung mit SABINA-NG wird der dünnwandige kreisförmige Hohlquerschnitt gemäß Tabelle 4 idealisiert:

FE-Eigenschaft	Anzahl
Knoten	900
Scheibenelemente - Viereck	600
Materialien	1

Tabelle 4: Idealisierung dünnwandiger kreisförmiger Hohlquerschnitt

Damit liefern SABINA und SABINA-NG folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
 GI_T &= 4,875 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2 \\
 EC_W &= 1,737 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}^4
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

Die relative Abweichung für die Torsionssteifigkeit GI_T zwischen SABINA und analytischer Lösung beträgt weniger als 0,1%. Wie in Kapitel 6.1.2 angeführt, ist die Wölbsteifigkeit EC_W aus SABINA-NG numerisch Null und liegt damit auf dem Wert der analytischen Lösung. Damit ist dieses Profil - wie erwartet - wölbfrei.

6.1.5 Balken mit dünnwandigem quadratischem Hohlquerschnitt

Für einen dünnwandigen quadratischen Hohlquerschnitt mit Aussenkantenlänge $a = 0,1$ m und einer Wandstärke von $t = 2,0 \cdot 10^{-3}$ m ergibt sich für ein isotropes Material mit einem Elastizitätsmodul $E = 1,0 \cdot 10^{11}$ N/m² und einem Schubmodul $G = 4,0 \cdot 10^{10}$ N/m² mit [76]:

$$\begin{aligned} GI_T &= G \cdot \frac{4A^2t}{s} = 6,210 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2 \\ EC_W &= 0 \text{ Nm}^4 \end{aligned} \quad (6.8)$$

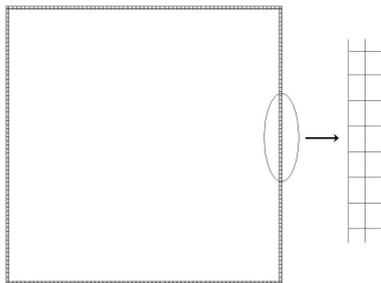


Abbildung 39: Dünnwandiger quadratischer Hohlquerschnitt Profil

Für die Berechnung mit SABINA-NG wird der dünnwandige quadratische Hohlquerschnitt gemäß Tabelle 5 idealisiert:

FE-Eigenschaft	Anzahl
Knoten	816
Scheibenelemente - Viereck	544
Materialien	1

Tabelle 5: Idealisierung dünnwandiger quadratischer Hohlquerschnitt

Damit liefern SABINA und SABINA-NG folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
 GI_T &= 6,247 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2, \\
 EC_W &= 3,482 \cdot 10^{-1} \text{ Nm}^4.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Die relative Abweichung für die Torsionssteifigkeit GI_T zwischen SABINA und analytischer Lösung beträgt weniger ca. 0,5%. Es ergibt sich $\frac{3}{\lambda} = 3\sqrt{EC_W/GI_T} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Damit ist gezeigt, dass Wölbkrafttorsion für dieses Profil keine Rolle spielt.

6.1.6 Balken mit dickwandigem quadratischem Hohlquerschnitt

Für einen dickwandigen quadratischen Hohlquerschnitt mit Aussenkantenlänge $a = 0,1 \text{ m}$ und einer Wandstärke von $t = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ergibt sich für ein isotropes Material mit einem Elastizitätsmodul $E = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und einem Schubmodul $G = 4,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ unter Zugrundelegung der Formeln für dünnwandige Querschnitte:

$$\begin{aligned}
 GI_T &= G \cdot \frac{4A^2}{s} = 2,744 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2, \\
 EC_W &= 0 \text{ Nm}^4.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

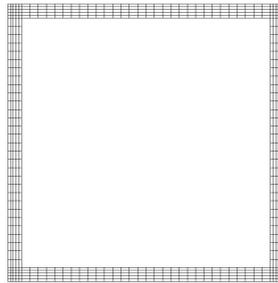


Abbildung 40: Dickwandiger quadratischer Hohlquerschnitt

Für die Berechnung mit SABINA-NG wird der dickwandige quadratische Hohlquerschnitt gemäß Tabelle 6 idealisiert:

FE-Eigenschaft	Anzahl
Knoten	840
Scheibenelemente - Viereck	700
Materialien	1

Tabelle 6: Idealisierung dickwandiger quadratischer Hohlquerschnitt

Damit liefern SABINA und SABINA-NG folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
 GI_T &= 2,819 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2, \\
 EC_W &= 2,841 \cdot 10^1 \text{ Nm}^4.
 \end{aligned}
 \tag{6.11}$$

Die relative Abweichung für die Torsionssteifigkeit GI_T zwischen SABINA und der analytischen Lösung für dünnwandige Profile beträgt 3%. In diesem Fall wird jedoch dem Wert aus SABINA mehr Vertrauen geschenkt, da das Profil eher als dickwandig zu betrachten ist. Auch bei diesem Profil spielt Wölbkrafttorsion keine Rolle, da $\frac{3}{\lambda} = 3\sqrt{EC_W/GI_T} = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Es ist aber die Tendenz erkennbar, dass ab einer bestimmten Dicke Wölbkrafttorsion berücksichtigt werden muss.

6.1.7 Balkenquerschnitt mit C-Profil

Alle zuvor genannten Querschnitte zeigen, dass SABINA-NG die analytischen Lösungen sehr gut wiedergibt, aber bei keinem dieser Profile Wölbkrafttorsion sehr stark ausgeprägt ist. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle ein C-Profil für alle Vergleiche verwendet.

Vergleich mit analytischer Lösung für homogenen Querschnitt

Im ersten Vergleich wird ein C-Profil aus isotropem Material mit einem Elastizitätsmodul $E = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und einem Schubmodul $G = 4,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ berechnet nach [19] und [87]:

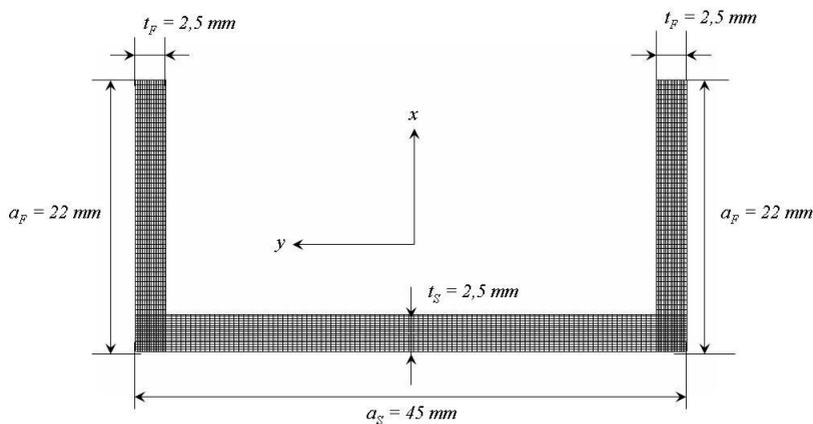


Abbildung 41: C-Profil

$$GI_T = \frac{G}{3} \sum_i a_i t_i^3 = 2,384 \cdot 10^1 \text{ Nm}^2, \quad (6.12)$$

$$EC_W = E \int \omega^2 dA = 3,047 \cdot 10^{-1} \text{ Nm}^4.$$

Für die Berechnung mit SABINA-NG wird das C-Profil gemäß Abbildung 41 und Tabelle 7 idealisiert:

Damit liefern SABINA und SABINA-NG folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} GI_T &= 2,383 \cdot 10^1 \text{ Nm}^2, \\ EC_W &= 3,102 \cdot 10^{-1} \text{ Nm}^4. \end{aligned} \quad (6.13)$$

FE-Eigenschaft	Anzahl
Knoten	4248
Scheibenelemente - Viereck	3995
Materialien	1

Tabelle 7: Idealisierung C-Profil - homogener Querschnitt

Die relative Abweichung für die Torsionssteifigkeit GI_T zwischen SABINA und der analytischen Lösung beträgt weniger als 0,1%. Die Abweichung für die Wölbsteifigkeit EC_W beträgt jedoch 2%. Dies wird sowohl auf die genauere Idealisierung des Profils in der Finiten Elemente Methode gegenüber der analytischen Lösung als auch auf den Unterschied in der Wölbspannungsverteilung zurückgeführt. So wird im analytischen Modell angenommen, dass die Wölbspannung und die Einheitsverwölbung konstant über der Profildicke sind. Die Lösung der Finiten Elemente Methode ergibt jedoch, dass die Einheitsverwölbung und damit die Wölbspannungen linear über die Profildicke verlaufen.

Da die Einheitsverwölbung im Quadrat in die Wölbsteifigkeit EC_W eingeht, führt dies zu einer Abweichung zwischen SABINA-NG und der analytischen Lösung sowie zu einem höheren Wert der Wölbsteifigkeit bei SABINA-NG. Der Wert $\frac{3}{\lambda} = \sqrt{EC_W/GI_T} = 3,4 \cdot 10^{-1} \text{m}$ für diesen Querschnitt zeigt, dass der Einfluss der Wölbkrafttorsion für dieses Profil signifikant ist.

Damit ist für diesen Querschnitt bewiesen, dass SABINA-NG für isotrope Materialien die Wölbsteifigkeit sehr gut wiedergibt. In Abbildung 42 sind nochmal die Einheitsverwölbung und die Längsspannung illustriert. Daraus ist erkennbar, dass die Einheitsverwölbung über die Profildicke nicht konstant ist, sondern sich linear ändert.

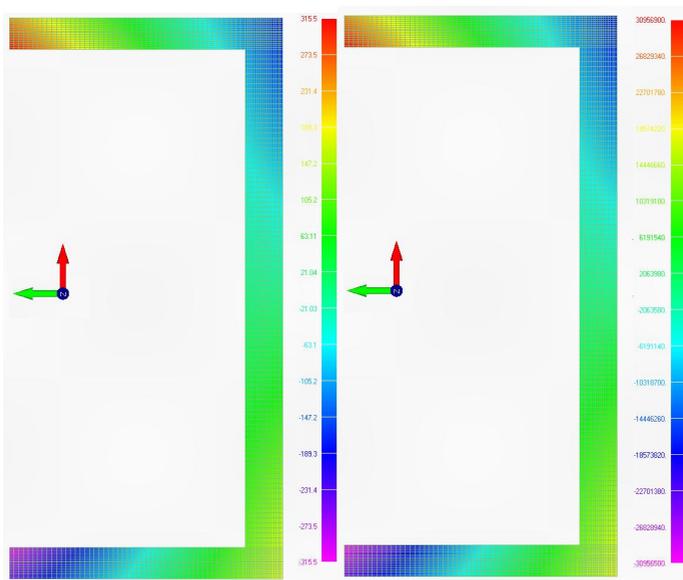


Abbildung 42: Einheitsverwölbung (links) und Längsspannung (rechts) für das C-Profil - homogener Querschnitt

Vergleich mit analytischer Lösung für einen homogenisierten Querschnitt

Als nächster Schritt wird nun der Vergleich für ein orthotropes Material, wie in Abbildung 43 dargestellt, zwischen SABINA-NG und der analytischen Lösung durchgeführt. Für die analytische Lösung von GI_T für den Steg und die Flansche wird direkt die Komponente D_{33} aus der erweiterten Laminattheorie weiterverwendet. Die Ingenieurkonstanten - E , G , etc. - werden aus dem Scheibenquadrant der Steifigkeitsmatrix der erweiterten Laminattheorie bestimmt [24]. Für die Berechnung mit SABINA-NG werden Steg und Flansch jeweils mit zwei Materialien abgebildet (siehe Abbildung 43) und die Materialdaten aus Tabelle 8 verwendet.

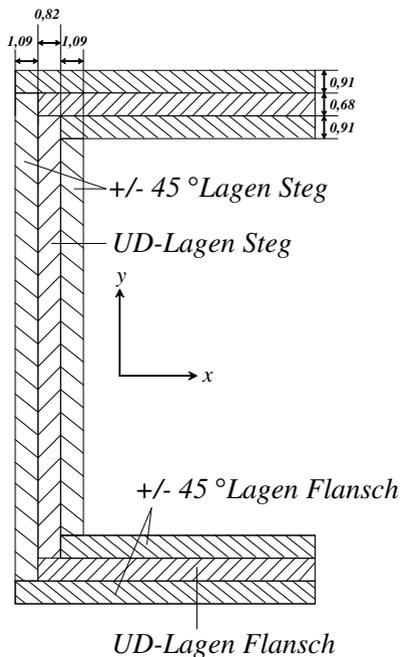


Abbildung 43: Materialien im C-Profil

		+/- 45° Flansch	UD Flansch	+/- 45° Steg	UD Steg
E_x	MPa	9267	7640	7940	6483
E_y	MPa	12447	7640	9980	6483
E_z	MPa	12447	112872	9980	94572
G_{xy}	MPa	2977	2616	2450	2202
G_{yz}	MPa	29189	3454	24388	2760
G_{zx}	MPa	2977	3454	2450	2760
ν_{xy}		0,066	0,460	0,069	0,472
ν_{yx}		0,088	0,460	0,087	0,472
ν_{yz}		0,802	0,020	0,811	0,021
ν_{zy}		0,802	0,289	0,811	0,299
ν_{zx}		0,088	0,289	0,087	0,299
ν_{xz}		0,066	0,020	0,069	0,021

Tabelle 8: Materialdaten für Steg und Flansch

Die analytische Lösung lautet damit:

$$\begin{aligned} GI_T &= \sum (GI_T)_i = 4 \sum D_{33}^i a_i = 1,531 \cdot 10^1 \text{ Nm}^2, \\ EC_W &= 1,155 \cdot 10^{-1} \text{ Nm}^4. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Für die Berechnung mit SABINA-NG wird das C-Profil gemäß Tabelle 9 idealisiert:

FE-Eigenschaft	Anzahl
Knoten	4248
Scheibenelemente - Viereck	3995
Materialien	4

Tabelle 9: Idealisierung C-Profil - homogenisierter Querschnitt

Damit liefern SABINA und SABINA-NG folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} GI_T &= 1,346 \cdot 10^1 \text{ Nm}^2, \\ EC_W &= 1,148 \cdot 10^{-1} \text{ Nm}^4. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die Abweichung für die Wölbsteifigkeit EC_W beträgt weniger als 1% und wird auf dieselben Gründe wie bei der Verwendung des isotropen Materialgesetzes zurückgeführt, d.h. SABINA-NG liefert die genaueren Werte. Natürlich spielt auch bei diesem Profil Wölbkrafttorsion eine Rolle, da sich für diesen Querschnitt $\frac{3}{\lambda} = \sqrt{EC_W/GI_T} = 2,8 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ ergibt. Die relative Abweichung für die Torsionssteifigkeit GI_T zwischen SABINA und der analytischen Lösung beträgt 13%. Dies wird darauf zugeführt, dass bei SABINA der Schubmodul in Dickenrichtung des Laminates berücksichtigt wird. Da dieser deutlich kleiner ist als der Schubmodul in der Laminebene, ergibt sich bei SABINA ein niedrigerer Wert als für die analytische Lösung.

Wie beim Vergleich der analytischen Lösung für den homogenen Querschnitt erwähnt, verläuft die Einheitsverwölbung linear über die Profildicke. Da der Kern aber eine wesentlich höhere Steifigkeit als die Randschichten aufweist, sind dort die Spannungen höher als in den Rändern.

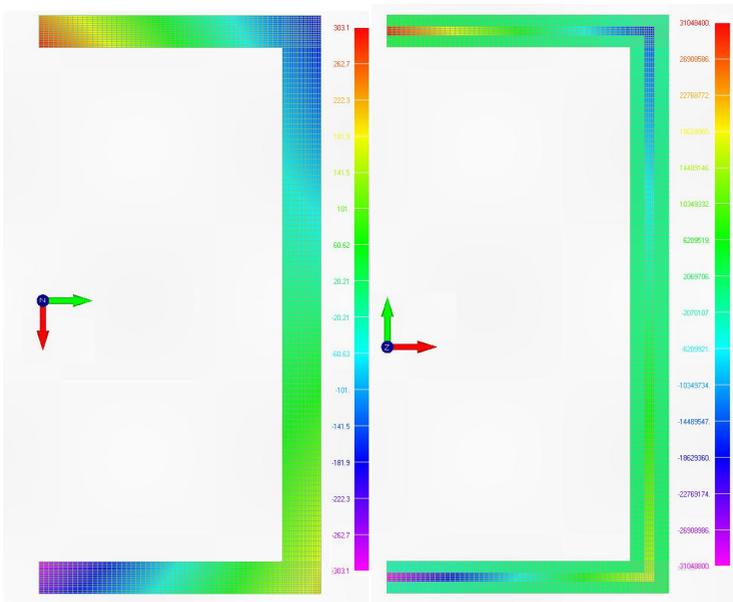


Abbildung 44: Einheitsverwölbung (links) und Längsspannung (rechts) für das C-Profil - homogenisierter Querschnitt

Vergleich mit dreidimensionaler Finiten Elemente Rechnung für inhomogenen Querschnitt

In diesem Kapitel werden für einen Balken mit Länge $l = 0,12\text{ m}$ und dem Querschnitt aus Abbildung 43 die Ergebnisse einer dreidimensionalen Finiten Elemente Rechnung mit den Werten aus SABINA-NG verglichen. Da die dreidimensionale Finite Elemente Rechnung explizit keine Steifigkeiten liefert, werden die Verformungen ϑ und ϑ' betrachtet. Der Balken wird dafür drehstarr und wölbbehindert bei $l = 0\text{ m}$ gelagert. Bei $l = 0,12\text{ m}$ wird ein Torsionmoment von $M = 4\text{ Nm}$ aufgebracht (siehe Abbildung 45).

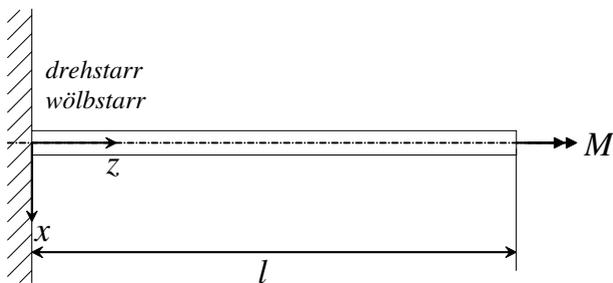


Abbildung 45: Lagerung für 3d-Vergleichsrechnung

Für den Lagerungsfall aus Abbildung 45 gelten folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= 0, \\ \vartheta'(0) &= 0, \\ \vartheta''(l) &= 0, \\ M_z(x) &= M.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Mit diesen Randbedingungen ergibt sich für die Differentialgleichung aus Gleichung (3.89) und deren allgemeiner Lösung aus Gleichung (3.111):

$$\begin{aligned}\vartheta(z) &= -\frac{M}{GI_T \lambda} [\sinh \lambda z - \lambda z - (\cosh \lambda z - 1) \tanh \lambda l], \\ \vartheta'(z) &= -\frac{M}{GI_T} (\cosh \lambda z - 1 - \sinh \lambda z \tanh \lambda l).\end{aligned}\tag{6.17}$$

An der Stelle $z = l$ resultieren damit folgende Größen:

$$\begin{aligned}\vartheta(l) &= -\frac{M}{GI_T \lambda} [-\lambda l + \tanh \lambda l], \\ \vartheta'(l) &= -\frac{M}{GI_T} \left(\frac{1}{\cosh^2 \lambda l} - 1 \right).\end{aligned}\tag{6.18}$$

Mit Hilfe der von SABINA-NG ermittelten Steifigkeiten aus Gleichung (6.15) ergeben sich für die Verdrehung und deren erster Ableitung aus Gleichung (6.18) folgende Werte:

$$\begin{aligned}\vartheta(l) &= 1,20 \cdot 10^{-2} \text{ rad}, \\ \vartheta'(l) &= 1,46 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}.\end{aligned}\tag{6.19}$$

Für die Berechnung mit SABINA-NG und für die dreidimensionale Finite Elemente Rechnung wird der Balken wie in Tabelle 10 dargestellt idealisiert:

FE-Eigenschaft	SABINA-NG	3d-FEM
Anzahl Knoten	4248	1278649
Anzahl Elemente	3995	1198500
Anzahl Materialien	4	4

Tabelle 10: Vergleich der Idealisierung des C-Profils - inhomogener Querschnitt

Die Ergebnisse aus der dreidimensionalen Finiten Elemente Rechnung für die Verschiebungen sind in den Abbildungen 46 - 48 illustriert:

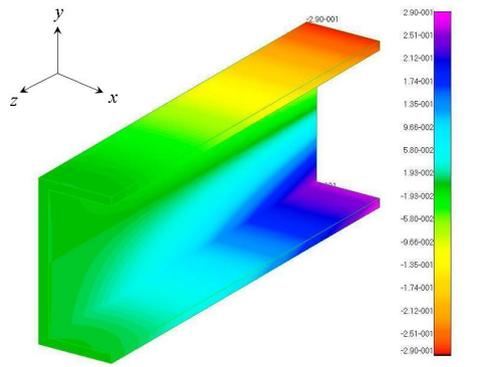


Abbildung 46: Verschiebung in x -Richtung

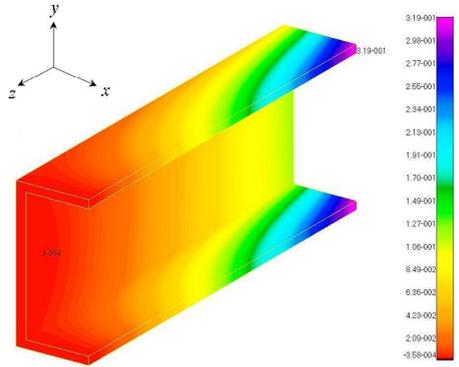


Abbildung 47: Verschiebung in y-Richtung

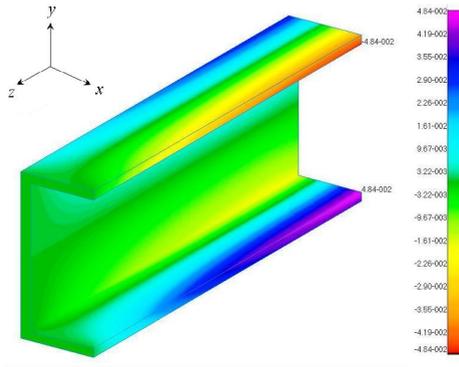


Abbildung 48: Verschiebung in z-Richtung (Verwölbung)

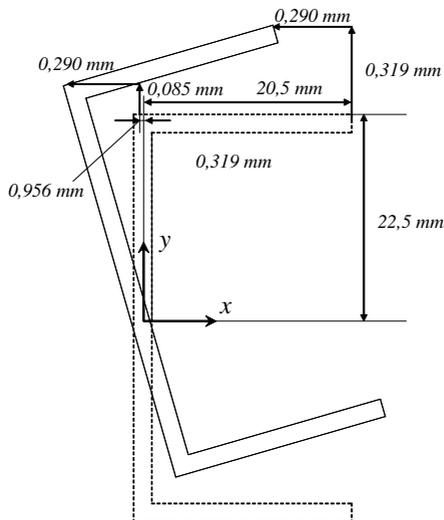


Abbildung 49: C-Profil unverformt - verformt

In Abbildung 49 ist das unverformte und das verformte C-Profil dargestellt. An zwei ausgewählten Punkten wurden die Verschiebungen bestimmt. Aus der Verschiebung in x -Richtung von $-0,290\text{ mm}$ bei der y -Koordinate $22,5\text{ mm}$ ergibt sich eine Verdrehung von $1,29 \cdot 10^{-2}\text{ rad}$. Aus der Verschiebung in y -Richtung von $0,319\text{ mm}$ bei der x -Koordinate $20,5\text{ mm}$ und aus der Verschiebung in y -Richtung von $0,085\text{ mm}$ bei der x -Koordinate $-0,956\text{ mm}$ ergibt sich eine Verdrehung von $1,09 \cdot 10^{-2}\text{ rad}$.

Die unterschiedlichen Verdrehungen in derselben Querschnittsebene werden auf die Änderung der Querschnittsgestalt zurückgeführt. Da diese aber nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist, wird sie nicht weiter untersucht. Bildet man jedoch den Mittelwert der beiden Werte für die Verdrehung, ergibt sich ein Wert, der nur um ca. 1% von der analytischen Lösung aus Gleichung (6.19) abweicht.

Zusätzlich wird noch die Verwölbung (Verschiebung in z -Richtung) verglichen (siehe Abbildung 50). Um von dieser auf ϑ' schließen zu können, wird die Einheitsverwölbung ω auf der Profilmittellinie benötigt. Diese wird in SABINA-NA berechnet. Da auf der Profilmittellinie kein Knoten liegt, wird die Einheitsverwölbung dort interpoliert. Es ergibt sich ein Wert von $\omega = 273\text{ mm}^2$. Die interpolierte Verschiebung beträgt $4,33 \cdot 10^{-2}\text{ mm}$, daraus folgt $\vartheta' = 1,58 \cdot 10^{-4}\frac{\text{rad}}{\text{mm}}$. Die Abweichung zwischen SABINA-NG und der dreidimensionalen Finiten Elemente Berechnung liegt damit bei ca. 7%.

Abschließend werden die Verschiebung in z -Richtung der dreidimensionalen Finiten

Elemente Rechnung und die Einheitsverwölbung von SABINA-NG gegenübergestellt.

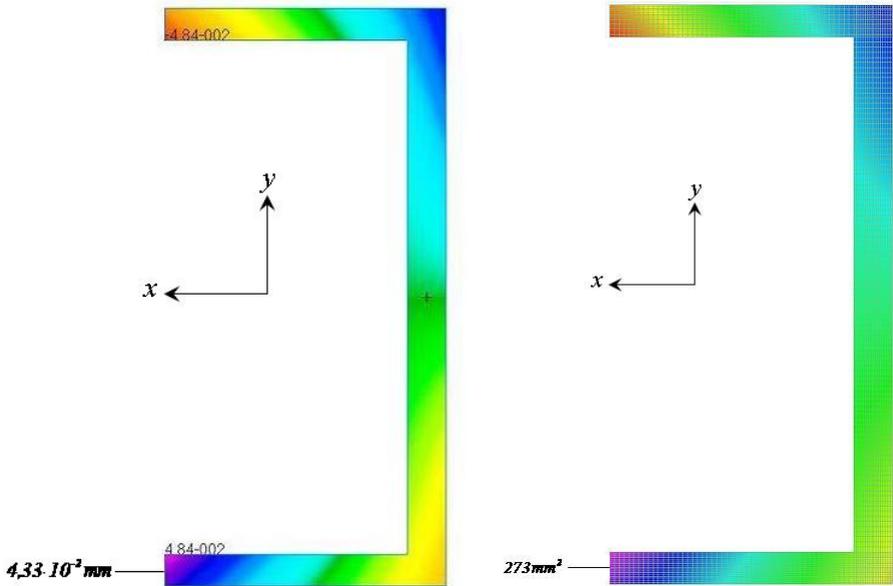


Abbildung 50: Vergleich Längverschiebung 3d-Vergleichsrechnung mit Einheitsverwölbung aus SABINA-NG

Abbildung 50 belegt, dass nicht nur die Maxima von SABINA-NG gut getroffen werden. Auch die Verteilung der Einheitsverwölbung über das ganze Profil wird sehr gut wiedergegeben. Abschließend sei an dieser Stelle erwähnt, dass für die dreidimensionale Berechnung vier Stunden auf einer sehr leistungsstarken Maschine benötigt wurden und für die korrekte Modellierung mehrere Anläufe nötig waren. Die Berechnung mit SABINA-NG konnte unter einer Minute auf einem handelsüblichen Laptop beendet werden.

6.1.8 Balken mit inhomogenem Vollquerschnitt

Bei dem Querschnitt für die Verifikation von SABINA-NG in Kapitel 6.1.7 handelt es sich um einen inhomogenen offenen Querschnitt. In diesem Kapitel soll SABINA-NG gegen einen inhomogenen Vollquerschnitt verifiziert werden. Da es für einen solchen Querschnitt keine analytische Lösung für die Wölbsteifigkeit gibt, wird SABINA-NG mit einer dreidimensionalen Finiten Elemente Berechnung verglichen.

Dafür wird ein Balken der Länge $l = 3,0\text{ m}$ mit dem in Abbildung 51 dargestellten Querschnitt idealisiert:

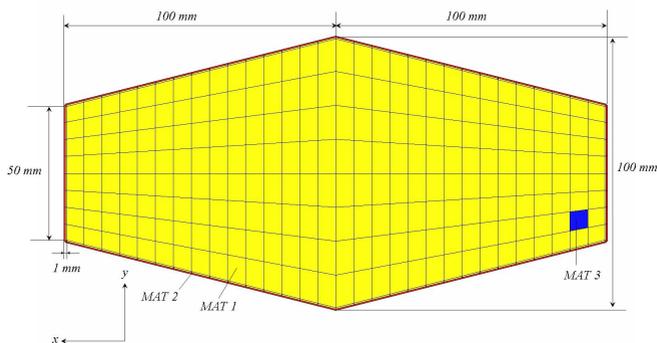


Abbildung 51: Geometrie und Idealisierung inhomogener Vollquerschnitt

Dem mit MAT 3 gekennzeichneten Element wurde das Materialverhalten von Stahl zugewiesen und den umliegenden restlichen Elementen (MAT 1) das Materialverhalten von Schaum. Die äußerste Elementreihe (MAT 2) wurde als UD-Lagen, bestehend aus P120-Fasern mit Faserorientierung in Balkenlängsrichtung und Epoxydharz mit einem Faservolumengehalt von 60%, idealisiert. Bei der dreidimensionalen FEM-Idealisierung wurden die Elementkanten in Balkenlängsrichtung mit der dreifachen Länge der Elementkanten in der Querschnittsebene idealisiert. In Tabelle 11 ist die zweidimensionale Idealisierung in SABINA-NG der dreidimensionalen FEM-Idealisierung gegenübergestellt:

FE-Eigenschaft	Anzahl - SABINA-NG	Anzahl - 3d
Knoten	1372	56079
Elemente	1288	63440
Materialien	3	3

Tabelle 11: Vergleich der Idealisierung des inhomogenen Vollquerschnitts

Folgende Materialdaten wurden für die Berechnungen verwendet:

		Schaum (MAT 1)	UD Haut (MAT 2)	Stahl (MAT 3)
E_x	MPa	36	3676	210000
E_y	MPa	36	3676	210000
E_z	MPa	36	479600	210000
G_{xy}	MPa	13	1290	80769
G_{yz}	MPa	13	306	80769
G_{zx}	MPa	13	3068	80769
ν_{xy}		0,385	0,425	0,300
ν_{yx}		0,385	0,425	0,300
ν_{yz}		0,385	0,003	0,300
ν_{zy}		0,385	0,356	0,300
ν_{zx}		0,385	0,356	0,300
ν_{xz}		0,385	0,003	0,300

Tabelle 12: Materialien inhomogener Vollquerschnitt

Für diesen Querschnitt liefern SABINA und SABINA-NG folgende Ergebnisse:

$$GI_T = 6,362 \cdot 10^3 \text{ Nm}^2,$$

$$EC_W = 1,609 \cdot 10^2 \text{ Nm}^4.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{3}{\lambda} = 0,477 \text{ m}$$

Damit ist der Einfluss der Wölbkrafttorsion auf das Torsionsverhalten eines Balkens mit diesem Querschnitt signifikant, obwohl es sich um einen inhomogenen Vollquerschnitt handelt. Die Lagerungsbedingungen für die 3d-Vergleichsrechnung werden

entsprechend Abbildung 52 gewählt. Der Balken wurde an beiden Enden wölbstarr und gleichzeitig an einem Ende drehstarr und am anderen Ende drehfrei gelagert. An dem drehfrei gelagerten Ende greift ein Torsionsmoment von 1,8 Nm an.

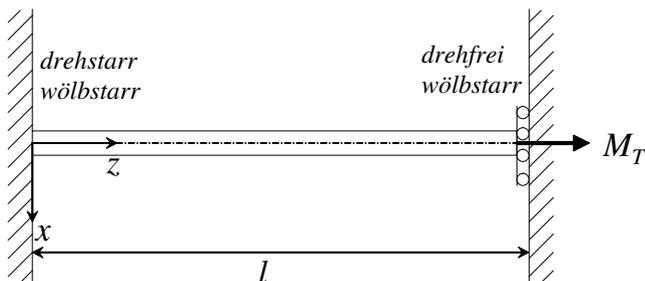


Abbildung 52: Lagerung des Balkens mit inhomogenem Vollquerschnitt

Für den Lagerungsfall aus Abbildung 52 gelten folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= 0, \\ \vartheta'(0) &= 0, \\ \vartheta'(l) &= 0, \\ M_z(x) &= M.\end{aligned}\tag{6.20}$$

Mit diesen Randbedingungen ergibt sich für die Differentialgleichung aus Gleichung (3.89) und deren allgemeiner Lösung aus Gleichung (3.111):

$$\begin{aligned}\vartheta(z) &= \frac{M}{GI_T \lambda} \left[-\sinh \lambda z + \lambda z + (\cosh \lambda z - 1) \frac{\cosh \lambda l - 1}{\sinh \lambda l} \right], \\ \vartheta'(z) &= \frac{M}{GI_T} \left(-\cosh \lambda z + 1 + \sinh \lambda z \frac{\cosh \lambda l - 1}{\sinh \lambda l} \right).\end{aligned}\tag{6.21}$$

Für die Stelle $z = l = 3000 \text{ mm}$ ergibt Gleichung (6.21) für die Verdrehung:

$$\vartheta(l) = \frac{M}{GI_T \lambda} \left[-\sinh \lambda l + \lambda l + \frac{(\cosh \lambda l - 1)^2}{\sinh \lambda l} \right] = 7,59 \cdot 10^{-4} \text{ rad}.\tag{6.22}$$

Für die Stelle $z = l/2 = 1500 \text{ mm}$ ergibt Gleichung (6.21) für die erste Ableitung der Verdrehung:

$$\vartheta'\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M}{GI_T} \left(-\cosh \frac{\lambda l}{2} + 1 + \sinh \frac{\lambda l}{2} \frac{\cosh \lambda l - 1}{\sinh \lambda l} \right) = 2,83 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{m}}.\tag{6.23}$$

Abbildung 53 und 54 zeigen die Verschiebungen in x - bzw. y -Richtung aus der dreidimensionalen Finite Elemente Berechnung.

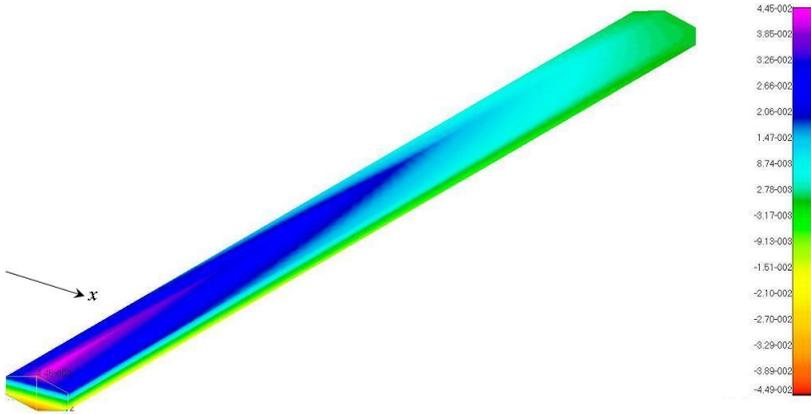


Abbildung 53: Verschiebung in x -Richtung des inhomogenen Vollquerschnitts

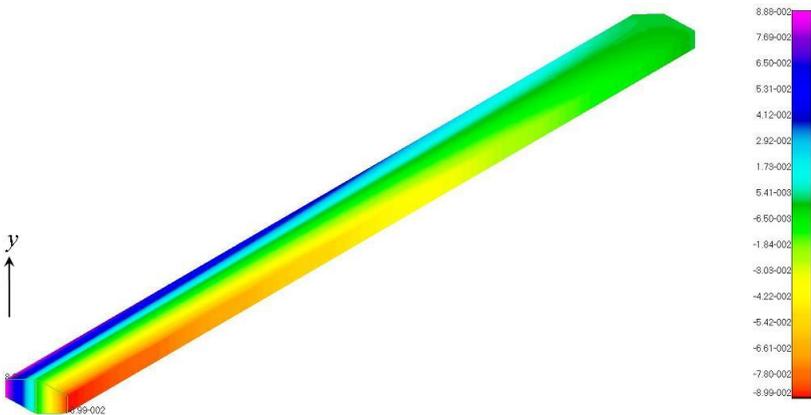


Abbildung 54: Verschiebung in y -Richtung des inhomogenen Vollquerschnitts

Idealerweise würden sich betragsgleiche Werte für die Maximalverschiebungen ergeben. Aufgrund der Inhomogenität des Querschnitts ergibt sich jedoch eine Abweichung zwischen den Maximalverschiebungen von ca. 1%. Die Verschiebungen sind in Abbildung 55 zusammengefasst.

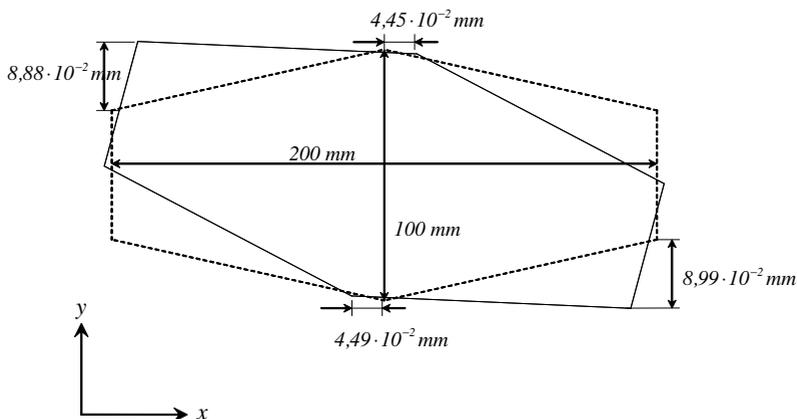


Abbildung 55: Inhomogenes Profil unverformt - verformt

Für die Verschiebung in x -Richtung ergeben sich Werte von $-4,49 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ und $4,45 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ sowie für die Verschiebung in y -Richtung von $-8,99 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ und $8,88 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$. Da der Querschnitt 100 mm hoch und 200 mm breit ist, ergibt sich jeweils eine Verdrehung von $8,94 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. Dieser Wert ist 15% höher als die Verdrehung auf Basis der berechneten Steifigkeiten aus Gleichung (6.22).

In Abbildung 56 ist die Verdrehung der dreidimensionalen Finiten Elemente Berechnung der analytischen Lösung über die Längskoordinate z gegenübergestellt. In der dreidimensionalen Finiten Elemente Berechnung ist der Einfluss der Wölbkrafttorsion nicht feststellbar. Grund dafür ist der Bredtsche Schubfluss, welcher ungleich Null ist. In Verbindung mit dem äußerst schubweichen UD-Laminat ergeben sich Gleitungen, welche nicht nur ungleich Null sind, sondern eine Größenordnung über den Längsdehnungen liegen. Damit ist eine wesentliche Annahme von Wlassow für die Herleitung der Differentialgleichung aus Gleichung (3.89) verletzt.

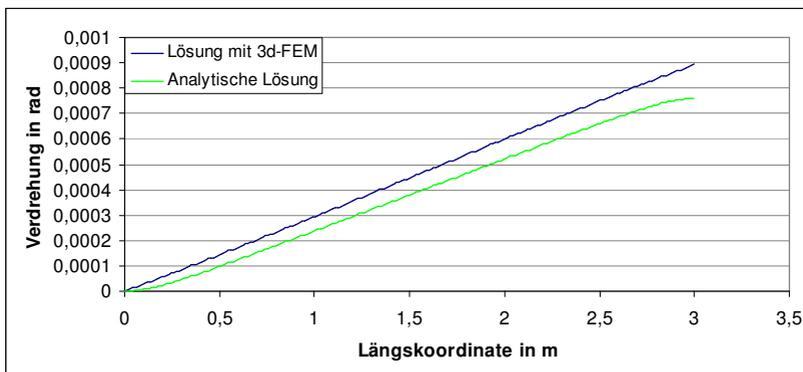
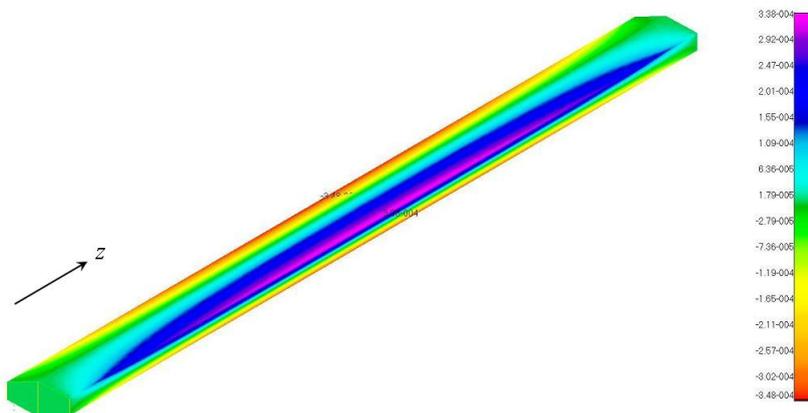


Abbildung 56: Vergleich der Verdrehung

Abbildung 57 zeigt die Verwölbung des Balkens.

Abbildung 57: Verwölbung (Verschiebung in z -Richtung) des inhomogenen Balkens

Bei $z = l = 1500\text{ mm}$ tritt bei den Koordinaten $x = -100\text{ mm}$ und $y = 25\text{ mm}$ eine Verwölbung in Höhe von $-3,08 \cdot 10^{-4}\text{ mm}$ auf. Die Einheitsverwölbung beläuft sich laut SABINA-NG an dieser Stelle auf $\omega = -1140\text{ mm}^2$. Mit Gleichung (6.23) ergibt dies an der Stelle $z = l = 1500\text{ mm}$ für die analytische Lösung eine Verwölbung von $3,22 \cdot 10^{-4}\text{ mm}$. In Abbildung 58 ist die analytische Lösung der dreidimensionalen Finiten Elemente Berechnung gegenübergestellt. Hierbei liegt das Maximum ca. 5%

unter dem Wert der analytischen Lösung. In den Bereichen der behinderten Verwölbung steigt dieser Fehler auf über 40% an. Dies wird wie bei der Verdrehung auf die Gleitungen in der Mittelebene der UD-Schichten sowie zusätzlich auf Randeffekte (z.B. Querkontraktionsbehinderung) an den beiden wölbbehinderten Lagerstellen zurückgeführt. Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass Verwölbungen für den betrachteten inhomogenen Vollquerschnitt von SABINA-NG und der analytischen Lösung in Balkenlängsrichtung überschätzt werden.

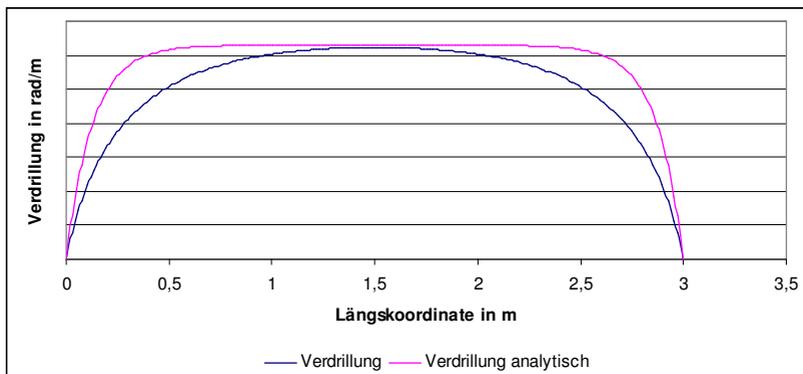


Abbildung 58: Vergleich der ersten Ableitung der Verdrehung

In Abbildung 59 sind die Dehnungen infolge Querkontraktion in der Querschnittsebene sowie die Verwölbung in der Mitte des Balkens bei der dreidimensionalen Finiten Elemente Rechnung dargestellt.

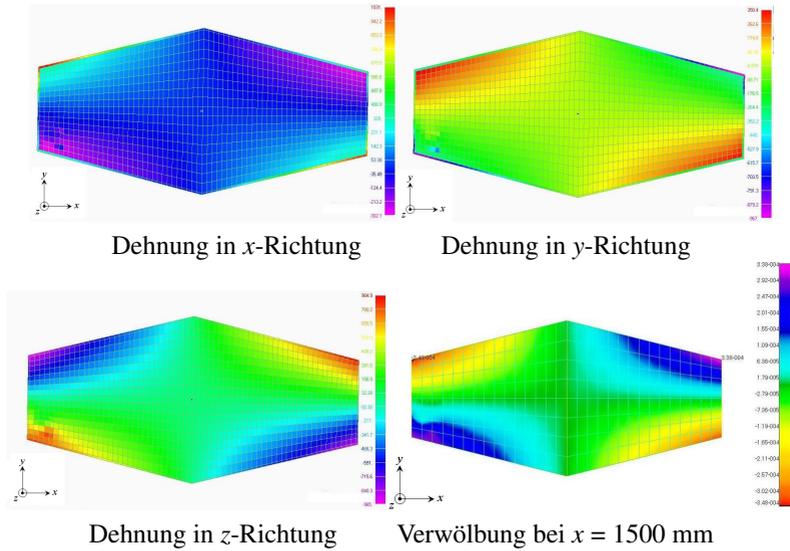


Abbildung 59: Ergebnisse für den inhomogenen Querschnitt

Abschließend seien in Abbildung 60 noch die Verläufe der Dehnungen in Balkenlängsrichtung der analytischen Lösung und der Lösung der 3d-FEM gegenübergestellt.

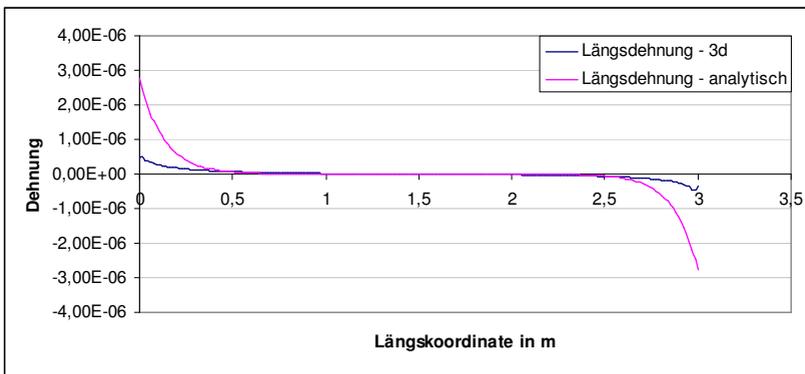


Abbildung 60: Vergleich der Dehnung in Balkenlängsrichtung

Die Dehnungen stimmen zwar qualitativ überein, jedoch ergibt sich im Bereich der Einspannung eine Abweichung um den Faktor 5. Diese Abweichung wird auf die Querkontraktionsbehinderung in den wölbbehinderten Lagerstellen und auf die großen Gleitungen in der Mittelebene der UD-Schicht zurückgeführt.

Beim betrachteten inhomogenen Vollquerschnitt ergeben sich deutliche Abweichungen zwischen der dreidimensionalen Finiten Elemente Berechnung und den mit SABINA-NG erzielten Ergebnissen. Prinzipiell wird der Sachverhalt von SABINA-NG zwar wiedergegeben, im Detail weichen die Ergebnisse jedoch um über 40% von den Ergebnissen der dreidimensionalen Finiten Elemente Berechnung ab. Ursächlich dafür können zum einen die behinderte Querkontraktion an den Kräfteleitungen der dreidimensionalen Finiten Elemente Berechnung sein sowie zum anderen die Verletzung der Voraussetzung von Wlassow, die Schubverzerrung in der Schalenmittelfläche sei gleich Null. Vor allem letzteres ist im Fall des untersuchten Querschnitts nicht gegeben, da in diesem inhomogenen Vollquerschnitt wie in geschlossenen Profilen der Bredtsche Schubfluss vorliegt, welcher eine Schubverzerrung bewirkt. Die größte Abweichung erhält man für die Längsdehnung, da diese um den Faktor 5 zu konservativ berechnet wird. Die Nutzung der Längsdehnung für Festigkeitsbetrachtungen wäre zulässig, wenn auch sehr konservativ.

6.2 Experimentelle Verifikation

In Kapitel 6.1 wurde gezeigt, dass SABINA-NG die Ergebnisse der analytischen Berechnung hinreichend genau für inhomogene offene Querschnitte wiedergibt. Zusätzlich wird nachfolgend eine experimentelle Verifikation von SABINA-NG durchgeführt. Dafür wird ein Balken mit einem C-Profil aus CFK - wie in Kapitel 6.1.7 beschrieben - verwendet. Dieser Balken wird statisch und dynamisch getestet, um die Wölbsteifigkeit experimentell zu bestimmen und mit der von SABINA-NG berechneten Wölbsteifigkeit zu vergleichen.

6.2.1 Statischer Versuch

Im Rahmen eines statischen Versuchs soll nach Aufbringung eines Torsionsmomentes M_T aus der Verformung die Torsionssteifigkeit GI_T und die Wölbsteifigkeit EC_W bestimmt werden. Darüber hinaus soll noch der Beweis der Theorie von Wlassow erbracht werden und das Abklingen der Verwölbung im Bereich der wölbbehinderten Einspannung gezeigt werden. Für diesen Beweis wird der Verlauf der Verdrillung über der Längskoordinate betrachtet.

Versuchsaufbau

Der Balken ist einseitig wölbbstarr gelagert und am freien Ende mit einem Torsionsmoment belastet. Abbildung 61 zeigt den schematischen Versuchsaufbau in einer um 90° gedrehten Darstellung.

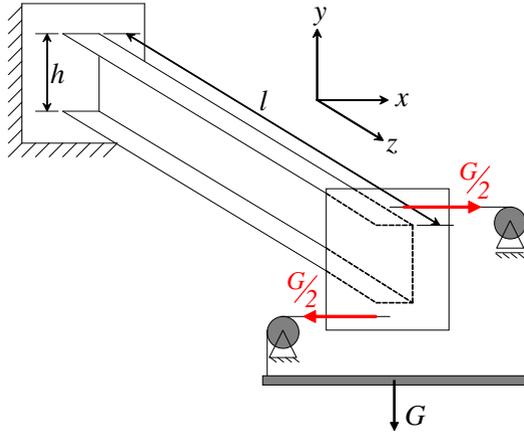


Abbildung 61: Schematische Darstellung des statischen Versuchsaufbaus

Wie aus Abbildung 62 ersichtlich ist, verläuft die Balkenachse vertikal. Damit werden Effekte aufgrund des Eigengewichts ausgeschlossen. Als Messsystem wurde ein Korrelationssystem mit zwei Kameras und entsprechender Auswertesoftware verwendet. Messbereich ist die lackierte obere Hälfte des Balkens zur wölbbehinderten Einspannung hin (siehe Abbildung 62).



Abbildung 62: Versuchsaufbau des statischen Versuch

Abbildung 62 zeigt die Realisierung der wölbbehinderten Einspannung. Die Stahlwinkel werden nicht nur verschraubt, sondern auch flächig mit dem Balken verklebt. Die Schrauben, welche Stahlwinkel und Balkenprüfling miteinander verbinden, unterstützen die wölbbehinderte Einspannung. Sie wurden aber hauptsächlich zur Vermeidung von Schälspannungen - insbesondere bei Montagearbeiten - angebracht. Wie aus Abbildung 63 ersichtlich ist, kommt bei der Einleitung des Torsionsmomentes dieselbe Konfiguration von Stahlwinkeln zur Anwendung wie bei der wölbbehinderten Einspannung.

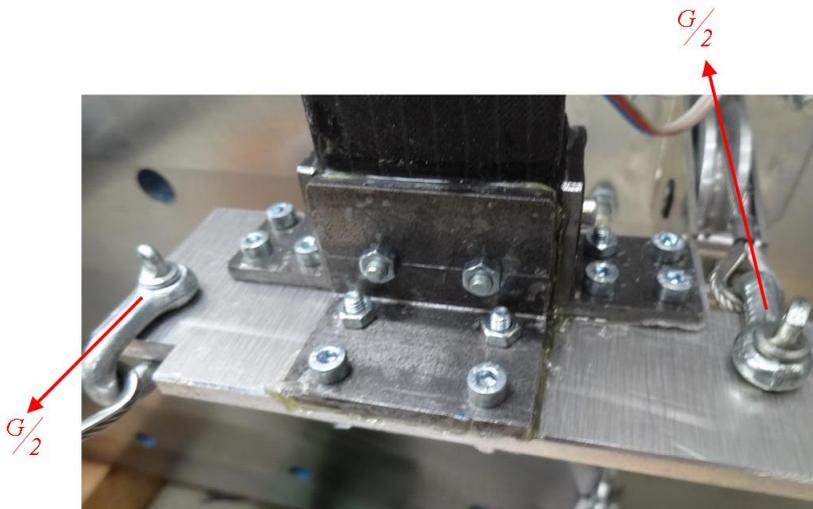


Abbildung 63: Einleitung des Torsionsmomentes

Abbildung 63 zeigt die querkraftfreie Einleitung des Torsionsmomentes über Rollen und Seile. Am Ende der Seile befindet sich ein Querbalken, an dem mittig ein Gewicht angebracht wird. Somit verteilt sich das Gewicht jeweils zur Hälfte auf die entsprechenden Seile. Damit liegt eine reine Torsionsbelastung vor.

Versuchsdurchführung

Zum Nachweis der Wölbkrafttorsion sieht man sich mit zwei Herausforderungen konfrontiert. Zum einen sind die Längsdehnungen gering und zum anderen kann nicht eindeutig nachgewiesen werden, dass die gemessenen Dehnungen auf der Oberfläche repräsentativ für die gesamte Dicke sind. Insbesondere bei Laminaten, wie in vorliegendem Fall verwendet, ist dies fraglich. Aus diesem Grund wird nicht die Längsdehnung, sondern die Verdrehung des Balkens bestimmt. Dazu werden die Verformungen in Normalenrichtung des Stegs (x -Richtung in Abbildung 61) ermittelt und in die entsprechende Verdrehung umgerechnet. Diese Verformungen sind gegenüber den Längsverformungen verhältnismäßig groß und mittels eines Korrelationssystems gut auflösbar. Ferner können sie über geometrische Beziehungen in die Verdrehung des Balkens umgerechnet werden. Zusätzlich beschreiben sie das gesamte Verhalten des Laminats und gelten damit als repräsentativ für das gesamte Laminat und nicht nur für einzelne Laminatschichten oder die Oberfläche des Laminats.

Probengeometrie

Die größte Fehlerquelle für den Versuch stellt der nicht perfekt gefertigte Balken dar. Aufgrund nicht konstanter Dicken in Flansch und Steg sowie produktionsbedingter größerer Dicke im Steg als in den Flanschen muss von vier verschiedenen orthotropen Materialien ausgegangen werden. Die Flansche und der Steg werden jeweils mit einem Kern aus UD-Laminat und äußeren Lagen aus $\pm 45^\circ$ -Lagen gefertigt (siehe Abbildung 43).

Versuchsergebnisse

In Abbildung 64 und 65 sind die Verdrehungen des Balkens über die ersten 160 mm bzw. 250 mm ab der Einspannung dargestellt.

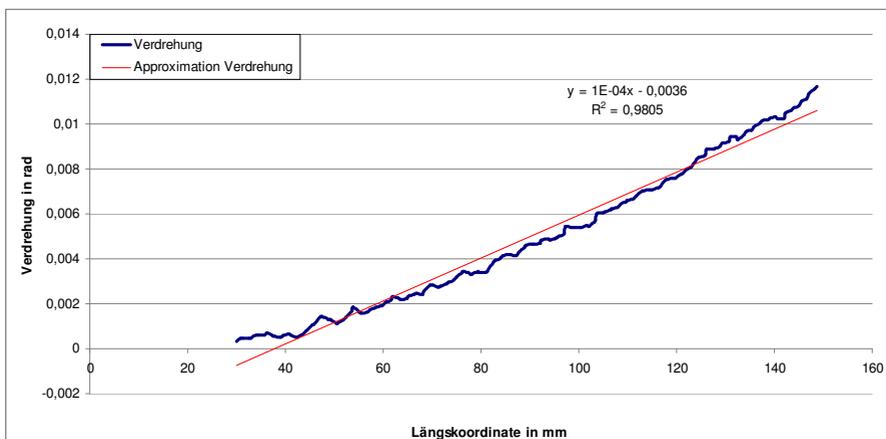


Abbildung 64: Verdrehung in Nähe der Einspannung

Eine qualitative Bewertung der Versuchsergebnisse zeigt, dass im Bereich der Einspannung die Verdrillung nichtlinear verläuft (Abbildung 64). Im ungestörten Bereich des Balkens, d.h. ab ca. 120 mm Entfernung zur Einspannung, ist die Nichtlinearität nicht mehr feststellbar, dort steigt die Verdrehung linear an (Abbildung 65).

Versuchsauswertung

Zur Bestimmung der Saint Venantschen Torsionssteifigkeit wird Abbildung 65 herangezogen. ϑ' im Bereich 120 - 250 mm beträgt $0,1525 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{m}}$ bei einem aufgetragenen Moment von 1,838 Nm. Somit ergibt sich eine Saint Venantsche Torsionssteifigkeit GI_T von $12,05 \text{ Nm}^2$. Die Torsionssteifigkeit GI_T weist damit eine Abweichung von ca. 10% gegenüber dem mit SABINA-NG berechneten Wert auf.

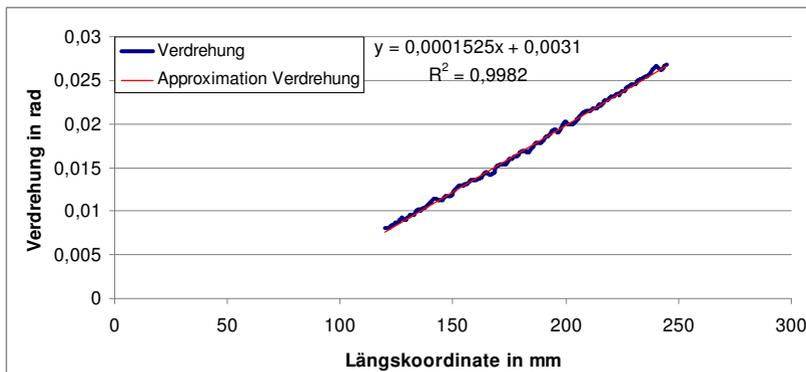


Abbildung 65: Verdrehung im ungestörten Bereich

Aus der allgemeinen Lösung der Wölbkrafttorsion für die Verdrehung ϑ (siehe Gleichung (3.111)) wird eine Funktion für ein nichtlineares Fitverfahren ermittelt. Hierbei werden die Freiwerte $\vartheta(0) = \vartheta_0$, $\vartheta'(0) = \vartheta'_0$ und der Aufzeichnungsbeginn a zuerst als unbekannt vorgegeben und anschließend neben $\lambda = \sqrt{\frac{GI_T}{EC_W}}$ mit dem nichtlinearen Fitverfahren im Bereich der Einspannstelle ermittelt:

$$\vartheta(x) = \frac{M}{GI_T} (x-a) + \left(\vartheta'_0 - \frac{M}{GI_T} \right) \frac{1}{\lambda} (1 - \cosh \lambda l) \frac{\cosh \lambda (x-a)}{\sinh \lambda l} + \quad (6.24)$$

$$\frac{1}{\lambda} \left(\vartheta'_0 - \frac{M}{GI_T} \right) \sinh \lambda (x-a) + \vartheta_0 - \left(\vartheta'_0 - \frac{M}{GI_T} \right) \frac{1}{\lambda} \frac{1 - \cosh \lambda l}{\sinh \lambda l}.$$

Diese Funktion berücksichtigt damit sowohl eine elastische Einspannung bzgl. Torsion ($\vartheta_0 \neq 0$) als auch eine nicht vollständig behinderte Verwölbung in der Einspannung ($\vartheta'_0 \neq 0$). Das nichtlineare Fitverfahren liefert folgenden Funktionsverlauf (siehe Abbildung 66):

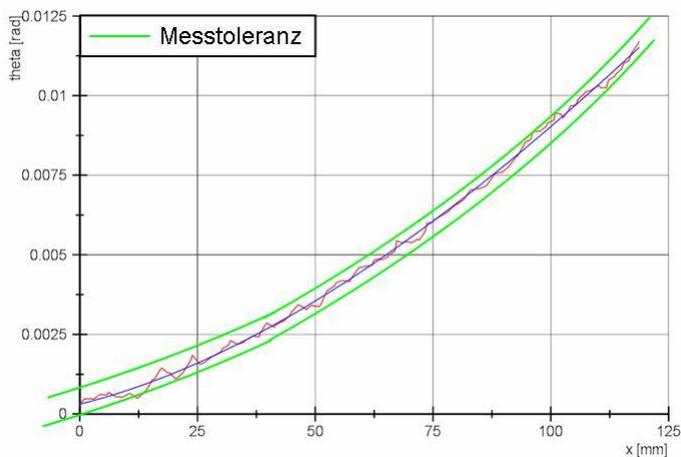


Abbildung 66: Nichtlinearer Fit der Verdrehung

Die grünen Linien in Abbildung 66 geben die Toleranz des Messverfahrens an. Die Toleranz wird von der Auswertesoftware des Korrelationssystems für jeden Messpunkt ausgegeben.

Qualitativ liefert das nichtlineare Fitverfahren an die Funktion aus Gleichung (6.24) eine gute Annäherung. Für die Wölbsteifigkeit EC_W ergibt sich jedoch ein Wert von $0,177 \text{ Nm}^4$. Dieser liegt damit 55% über dem mit SABINA-NG ermittelten Wert.

Die hohe Abweichung der Wölbsteifigkeit EC_W erfordert eine genauere Analyse des Messsystems im Hinblick auf dessen Auflösung. Hierzu wird das mittlere Fehlerquadrat des Korrelationsverfahrens über alle Messpunkte bestimmt. Dieses beträgt $2,45 \cdot 10^{-7} \text{ rad}^2$ und liegt damit eine Größenordnung über dem mittleren Fehlerquadrat des nichtlinearen Fitverfahrens $1,93 \cdot 10^{-8} \text{ rad}^2$. Dies bedeutet, dass die numerische Näherung zwar sehr gut ist, diese jedoch auf Versuchswerte angewendet wird, die nicht ausreichend genau sind. Somit ist der statische Versuch in Verbindung mit dem Korrelationssystem nicht geeignet, um die Wölbsteifigkeit EC_W quantitativ zu bestimmen. Er ist jedoch sehr wohl geeignet, um die Theorie von Wlassow qualitativ zu bestätigen.

6.2.2 Dynamischer Versuch

Da der statische Versuch nicht geeignet ist, die Wölbsteifigkeit EC_W quantitativ zu bestimmen, wird ein dynamischer Versuch durchgeführt. Um Einflüsse aus imperfekten Lagerungen zu minimieren, wird eine Frei-Frei-Lagerung gewählt. Somit handelt es sich bei allen auftretenden Wölbbehinderungen um interne und damit perfekte Wölbbehinderungen. Die Wölbsteifigkeit EC_W erhöht die Torsionseigenfrequenzen. Da bei einem C-Profil die Biege- und die Torsionsschwingung immer gemeinsam auftreten, werden auch immer Frequenzen beider Schwingungsformen. Mit Hilfe der ersten drei Eigenfrequenzen werden die Steifigkeitskennwerte bestimmt. Die detaillierte Vorgehensweise und die Zwischenergebnisse sind in Anhang A.3 beschrieben.

Probengeometrie

Es wird derselbe Prüfling verwendet wie in Kapitel 6.2.1 beschrieben. Zusätzlich gehen in den dynamischen Versuch noch die Masse und die Massenträgheitsmomente des Balkens ein. Aus der gemessenen Masse sowie den gemessenen Wandstärken und dem Flächengewicht der trockenen Gewebes ergibt sich der Faservolumengehalt, mit dem die Eingabewerte für die vier orthotropen Materialien für SABINA-NG bestimmt werden.

Faservolumengehalt

Für SABINA-NG werden für die verschiedenen Materialien die Ingenieurkonstanten benötigt. Diese können mittels der Laminattheorie bestimmt werden, wenn der Faservolumengehalt bekannt ist. Die Bestimmung des Faservolumengehaltes des Probenkörpers wird im Folgenden erläutert.

Der Balken weist bei einer Länge von 1,27 m eine Masse von 0,446 kg auf. Hierbei entfallen 0,426 kg auf den Balken und 0,020 kg auf die Befestigungsschraube für den Faden zur Realisierung der Frei-Frei-Lagerung. Dies entspricht einer konstanten Massenverteilung von $0,3512 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$. Für die Bestimmung der Dichte des Laminats wird weiterhin von einer Masse gleich 0,426 kg ausgegangen.

Das Flächengewicht des $\pm 45^\circ$ -Geleges beträgt $0,411 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ und das einer UD-Lage $0,125 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$. Der Lagenaufbau besteht aus fünf UD-Lagen und vier $\pm 45^\circ$ -Gelege-Lagen. Somit ergibt sich ein Flächengewicht aus der Faser von $2,269 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$. Der Hersteller gibt für die Dichte der Kohlefaser $1780 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ an. Damit entfällt von der Gesamtdicke der Flansche und des Stegs eine Dicke von $1,27 \cdot 10^{-3}$ m auf die Kohlefaser. Bei einer Gesamtdicke der Flansche von $2,5 \cdot 10^{-3}$ m ergibt dies einen Faservolumengehalt von 50,8 %. Für den durchschnittlich $3,0 \cdot 10^{-3}$ m dicken Steg bedeutet dies einen Faservolumengehalt von 42,3 %. Diese Faservolumengehalte werden

anschließend in einem Programm zur Berechnung der Laminatkennwerte und der Dichten weiterverwendet.

Laminatkennwerte

Da die Materialkennwerte der verwendeten Faser und des Epoxydharzes unbekannt sind, werden für die Berechnung der Ingenieurkonstanten typische Materialkennwerte der T300-Faser und von Epoxydharz verwendet. Somit ist mit Abweichungen zwischen den theoretischen und den realen Ingenieurkonstanten zu rechnen. Daher wird im weiteren Verlauf der Bestimmung der Balkensteifigkeiten noch eine Kalibrierung gegenüber Messwerten nötig sein.

Die Verteilung der Materialien ist in Abbildung 43 dargestellt. In Tabelle 13 sind die Elastizitäts- und Schubmoduli in MPa angegeben. Es ergeben sich für die vier orthotropen Materialien folgende Kennwerte:

		+/- 45° Flansch	UD Flansch	+/- 45° Steg	UD Steg
E_x	MPa	9267	7640	7940	6483
E_y	MPa	12447	7640	9980	6483
E_z	MPa	12447	112872	9980	94572
G_{xy}	MPa	2977	2616	2450	2202
G_{yz}	MPa	29189	3454	24388	2760
G_{zx}	MPa	2977	3454	2450	2760
ν_{xy}		0,066	0,460	0,069	0,472
ν_{yx}		0,088	0,460	0,087	0,472
ν_{yz}		0,802	0,020	0,811	0,021
ν_{zy}		0,802	0,289	0,811	0,299
ν_{zx}		0,088	0,289	0,087	0,299
ν_{xz}		0,066	0,020	0,069	0,021

Tabelle 13: Materialdaten für Steg und Flansch

Für die Flansche ergibt sich eine gemittelte Dichte von $1486,75 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und für den Steg von $1436,90 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Weist man nun gemäß Abbildung 67 die jeweiligen Dichten den Flanschen und dem Steg zu, ergibt sich eine gesamte Masse des Laminats von $0,4267 \text{ kg}$. Dies bestätigt die Erwartung, dass die ermittelten Dichten zu einer marginalen Abweichung in der Gesamtmasse führen.

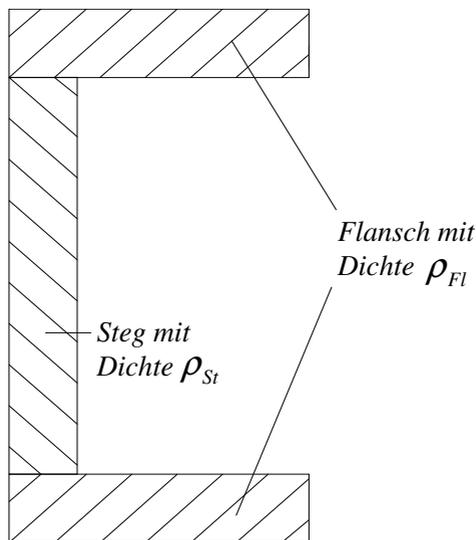


Abbildung 67: Dichteverteilung im C-Profil

Verteilte Massenträgheitsmomente und Massenschwerpunkt

Mit Abbildung 67 können die Massenträgheitsmomente bestimmt werden.

$$\bar{J}_y = \int_A \rho x^2 dx dy = \frac{\rho}{3} x^3 y, \quad (6.25)$$

$$\bar{J}'_y = 9,69 \cdot 10^{-5} \text{ kgm},$$

$$\bar{J}_z = \int_A \rho (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\rho}{3} (x^3 y + xy^3), \quad (6.26)$$

$$\bar{J}'_z = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}. \quad (6.27)$$

Darüber hinaus ergibt sich ein Massenschwerpunkt, welcher $4,66 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ in positiver x -Richtung gegenüber dem Koordinatenursprung verschoben ist (siehe Abbildung 68) Der Balken wird genau im Massenschwerpunkt aufgehängt.

Generelles Vorgehen

Aus dem dynamischen Versuch werden die ersten drei Eigenfrequenzen verwendet, um EI_y , EC_W und GI_T zu bestimmen. Dies erfolgt iterativ, da immer nur eine Eigenfrequenz ausgewertet werden kann. Alle Iterationen können Anhang A.3 entnommen

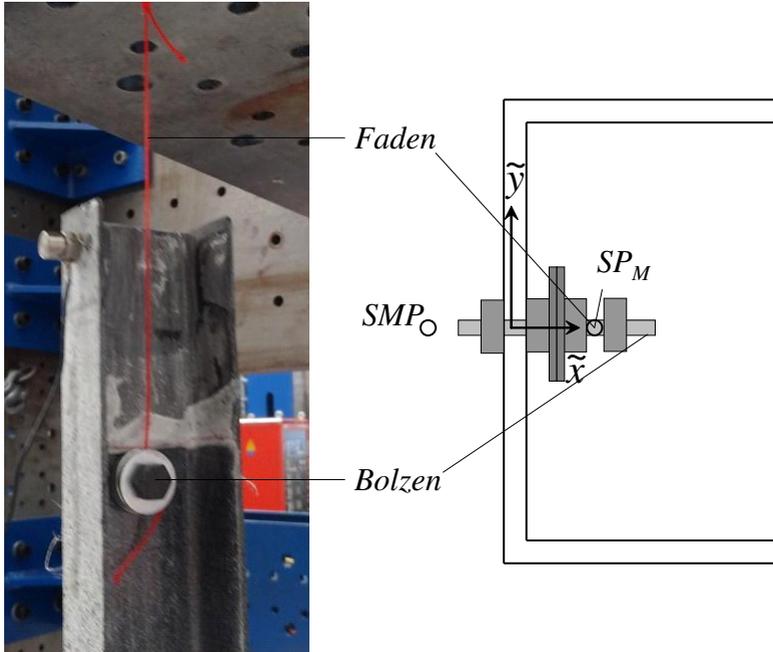


Abbildung 68: Prinzipskizze für die Aufhängung im Schwerpunkt durch Shimmen

werden. Abbildung 69 zeigt schematisch die iterative Bestimmung der realen Steifigkeiten für EI_y , EC_W und GI_T für die analytische Lösung (siehe Anhang A.2.5 Gleichung (A.138)).

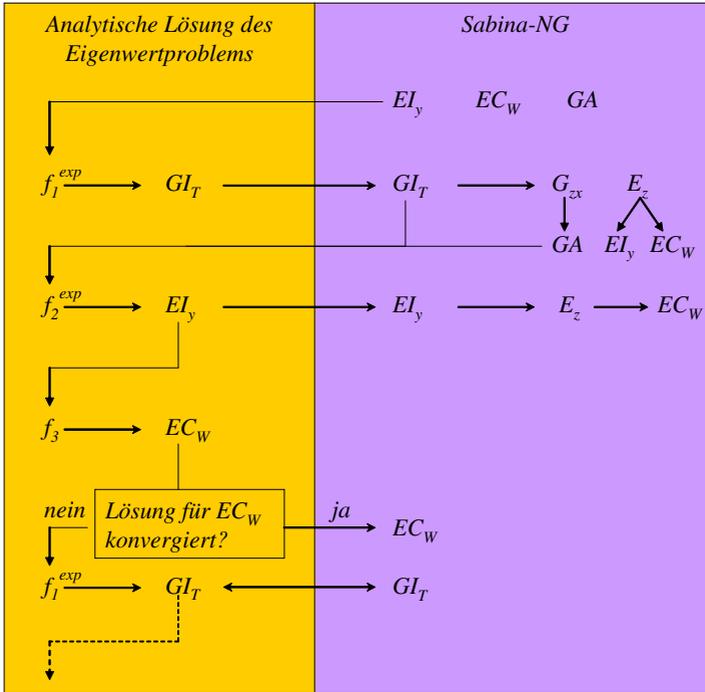


Abbildung 69: Flussbild für iterative Berechnung der Steifigkeiten

Für das in dieser Arbeit betrachtete Bauteil und die gewählte Lagerung, wird die 1. Eigenfrequenz durch die Saint Venantsche Torsionsteifigkeit GI_T dominiert und die 2. Eigenfrequenz durch die Biegesteifigkeit EI_y . Die 3. Eigenfrequenz wird wiederum durch die Saint Venantsche Torsionssteifigkeit dominiert. Allerdings ist auch ein signifikanter Einfluß der Wölbsteifigkeit EC_W festzustellen. Mittels Reihenentwicklung wird die Übertragungsmatrix der Biegetorsionsschwingung ermittelt (siehe Anhang A.2.5). Nach Bestimmung aller geometrischen und dichteabhängigen Größen aus Gleichung (A.125) und der Kenntnis der Größenordnung der Steifigkeitskennwerte können mittels des iterativen Prozesses - wie in Abbildung 69 dargestellt - aus der 1. Eigenfrequenz die Saint Venantsche Torsionsteifigkeit, aus der 2. Eigenfrequenz die Biegesteifigkeit und aus der 3. Eigenfrequenz die Wölbsteifigkeit ermittelt werden. Für diesen Vorgang muss die Anzahl der Glieder der Reihenentwicklung zur Bestimmung der Übertragungsmatrix der Biegetorsionsschwingung solange erhöht werden, bis sich die Lösungen für die Wölbsteifigkeit mit zusätzlichen Gliedern nur noch geringfügig ändern, d.h. die Lösung konvergiert ist.

Nach der Bestimmung der Torsionssteifigkeit GI_T aus der 1. Eigenfrequenz und der Biegesteifigkeit EI_y aus der 2. Eigenfrequenz wird der Elastizitätsmodul der UD-Schicht und der Schubmodul in der Ebene des $\pm 45^\circ$ Laminats auf die Versuchswerte angepasst, so dass SABINA-NG diese Werte sehr genau wiedergibt. Anschließend wird die Wölbsteifigkeit EC_W aus der 3. Eigenfrequenz mit Gleichung (A.138) berechnet und gegen die mit SABINA-NG - mittels der angepassten Werkstoffkennwerte - ermittelten Wölbsteifigkeit verglichen.

Ergebnisse aus SABINA und SABINA-NG

Mit den zuvor bestimmten Laminatkennwerten werden mit SABINA-NG die Ausgangsdaten für die iterative Berechnung der Steifigkeiten bestimmt. Diese lauten:

$$GA_x = 2,727 \cdot 10^6 \text{ N},$$

$$EI_y = 2,517285 \cdot 10^3 \text{ Nm}^2,$$

$$EC_W = 1,1475 \cdot 10^{-1} \text{ Nm}^4,$$

$$GI_T = 13,460 \text{ Nm}^2.$$

Damit einhergehend ergibt sich ein Schubmittelpunkt, welcher $7,40 \cdot 10^{-3}$ m in negativer x -Richtung gegenüber dem Koordinatenursprung verschoben ist (siehe Abbildung 68).

Versuchsaufbau

Um eine Beeinflussung durch nicht perfekte Randbedingungen zu vermeiden, wird als Lagerungsart frei-frei gewählt (siehe Abbildung 70).



Abbildung 70: Frei-Frei Lagerung des dynamischen Versuchs

Da diese Lagerungsart im waagrechten Zustand nicht dargestellt werden kann, wird der Balken senkrecht angebracht, d.h. an einem Faden im Schwerpunkt aufgehängt. Bei kleiner Auslenkung sind dann auch Effekte aus der Erdbeschleunigung vernachlässigbar.

Messsystem

Als Messsystem wird ein Frequenzanalysator verwendet. Es wird das Spektrum der Schwingungsantwort bis 1000 Hz in 800 Einzelschritten ausgewertet, d.h. die Frequenzauflösung beträgt 1,25 Hz. Die Schwingungsantwort des Balkens wird über einachsige Beschleunigungsaufnehmer erfasst. Da bei einem C-Profil die Biege- und die Torsionsschwingung bei fast allen möglichen Anregungen stets gemeinsam auftreten, werden auch immer Frequenzen beider Schwingungsformen erfasst, sofern die Beschleunigungsaufnehmer entsprechend angebracht werden und eine entsprechende Anregung gewählt wird.

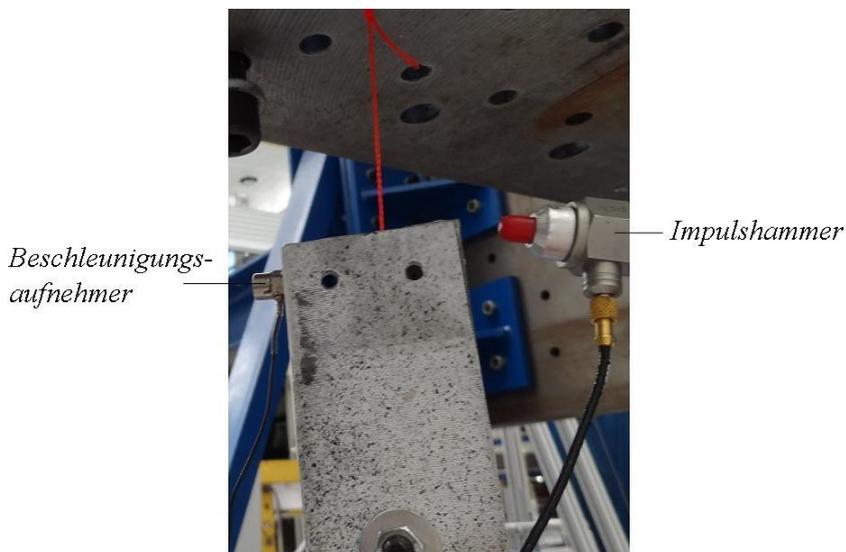


Abbildung 71: Positionierung des Beschleunigungsaufnehmers

Die Anregung erfolgt mittels eines Impulshammers. Hierfür wird ein instrumentierter Hammer verwendet. Eine derartige Anregung bietet folgende Vorteile: zum einen müssen keine Komponenten zur Anregung auf dem Balken angebracht werden, welche durch ihre Masse das Ergebnis verfälschen würden, zum anderen liefert dieser Schlag ein sehr breites Anregungsspektrum. Mit einigen Schlägen zur Kalibrierung kann die benötigte Sensitivität der Messinstrumente eingestellt werden. Die Schläge dürfen hierbei nicht zu stark sein, damit der Balken nicht zu stark ausgelenkt wird und zu pendeln beginnt.

Ein Nachteil der Anregung durch einen Schlag besteht darin, dass sowohl die Biege-Torsionsschwingung als auch die reine Biegeschwingung um die Symmetrieachse gemeinsam angeregt werden. Diesem kann abgeholfen werden, indem durch geeignete Positionierung des einachsigen Beschleunigungsaufnehmers und durch Anregung des Balkens hinsichtlich der Biegeschwingung um die Symmetrieachse nur die reine Biegeschwingung um die Symmetrieachse detektiert wird (siehe Tabelle 14). Regt man anschließend alle Schwingungsarten an und vergleicht dieses Spektrum mit jenem der reinen Biegeschwingung um die Symmetrieachse, können die Biege-Torsionseigenfrequenzen gut isoliert werden. In Abbildung 72 sind die Frequenzspektren der Versuche V003 und V019 dargestellt. Hierbei sind die Biegeeigenfrequenzen um die Symmetrieachse mit B und die Biege-Torsionseigenfrequenzen mit

BT gekennzeichnet.

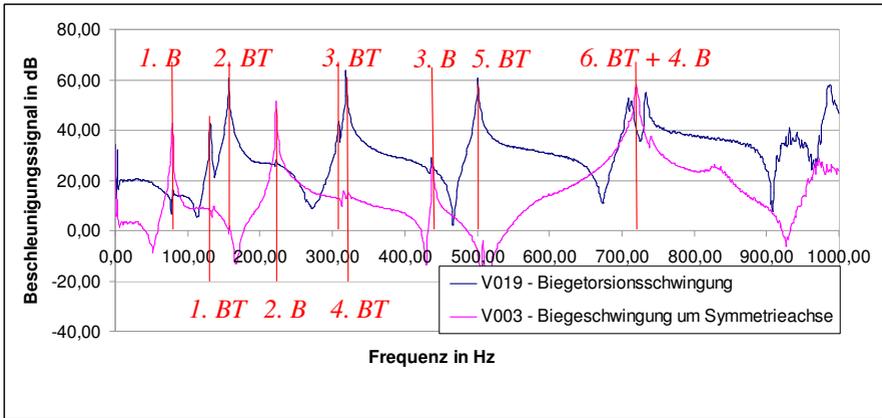


Abbildung 72: Vergleich der Frequenzspektren der Versuche V003 und V019

Zur Sicherstellung der Erfassung aller Moden wurde an verschiedenen Stellen des Balkens angeregt und das Antwortsignal des Beschleunigungsaufnehmers abgegriffen. Jede Kombination wurde mindestens zweimal gemessen.

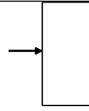
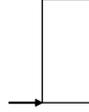
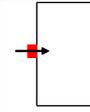
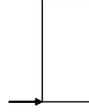
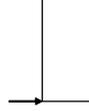
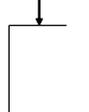
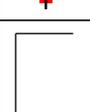
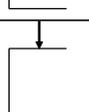
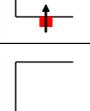
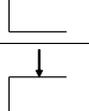
Versuchsnummer	Ort des Aufnehmers und des Schlages in Längsrichtung	Aufnehmer- richtung	Schlag- richtung	Bemerkung
V3	33%			
V11	5%			
V12	5%			
V13	50%			
V14	50%			
V15	50%			
V16	50%			
V19	5%			sehr gute Qualität

Tabelle 14: Versuche - Anregung - Aufzeichnung

Das qualitativ beste Ergebnis liefern die Messungen V011-V016. Zudem liefern diese eine sehr gute Separation der Eigenfrequenzen und nahezu identische Ergebnisse über die Länge des Balkens. Die erste und dritte gekoppelte Biege-Torsionseigenfrequenz sind für alle sechs Versuche identisch. Die zweite Biege-Torsionseigenfrequenz beträgt bei der Beschleunigungsaufnahme und Anregung am Ende des Balkens 158,75 Hz (V011 und V012) und in der Mitte des Balkens 157,5 Hz (V013-V016). Da die Frequenz in der Mitte besser reproduziert werden konnte und dort lokale Effekte ausgeschlossen werden können, wird das Spektrum der Versuche V013-V016 verwendet.

Versuchsergebnisse

Aus Abbildung 72 kann entnommen werden, dass bei ca. 70 Hz die 1. entkoppelte Biegeschwingung und bei ca. 220 Hz die zweite entkoppelte Biegeschwingung vorliegt. Somit sind die Frequenzen bei ca. 130 Hz, 155 Hz, 310 Hz und 320 Hz Frequenzen der gekoppelten Biegetorsionsschwingung. Bezugnehmend auf die am besten reproduzierbare Aufzeichnung V015 sind diese in Abbildung 73 dargestellt.

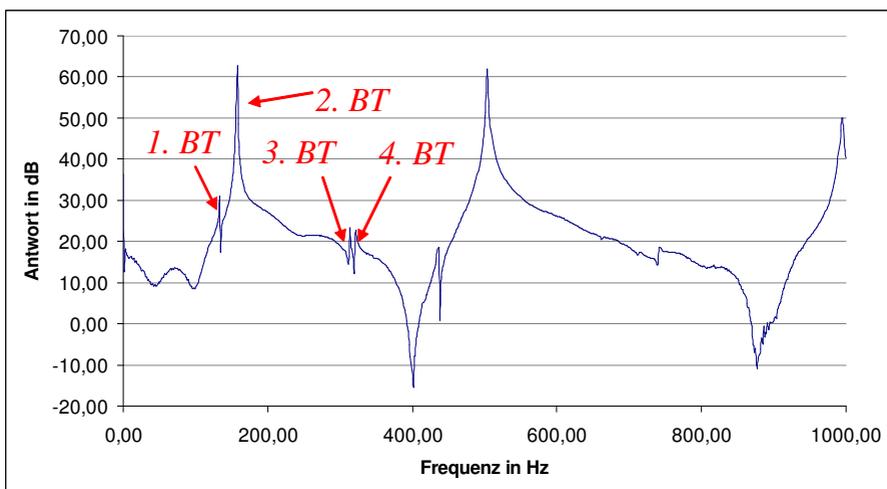


Abbildung 73: Frequenzspektrum V015 gekoppelte Biegetorsionsschwingung

Aus den o.a. Frequenzen sollen nun die Steifigkeitswerte für GI_T sowie die zweite Eigenfrequenz infolge Torsion mit Gleichung (A.109) aus Anhang A.2.3 abgeschätzt

werden.

$$GI_T = (2lf)^2 J'_z, \quad (6.28)$$

$$GI_T = (2 \cdot 1,27 \cdot 133)^2 \cdot 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}^2 = 12,55 \text{ Nm}^2.$$

Diese Schätzung liegt nur 4% über dem Wert des statischen Versuches und ist damit plausibel. Ausgehend von diesem und der Wölbsteifigkeit aus Kapitel 6.1.7 wird nun die zweite Eigenfrequenz infolge Torsion abgeschätzt (siehe Anhang A.2.4). Für ein $GI_T I^2 / EC_W = 173$ liegt die zweite Eigenfrequenz infolge Torsion gemäß [60] ca. 15-20% über der zweiten Saint Venantschen Eigenfrequenz (266 Hz). Damit ergibt sich ein Intervall von 306 Hz bis 320 Hz. In diesem Intervall sind zwei Eigenfrequenzen anzutreffen, so dass hier schon bzgl. der Größenordnung von EC_W im Gegensatz zum statischen Versuch eine gute Näherung erwartet werden kann.

Versuchsauswertung

Mit Gleichung (A.125) und (A.128) wird die Reihenentwicklung zur Bestimmung der charakteristischen Gleichung unter Berücksichtigung folgender geometrischer und dichteabhängiger Eingabegrößen des Balkens durchgeführt:

$$l = 1,27 \text{ m}, \quad (6.29)$$

$$e = 1,206 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$m' = 3,512 \cdot 10^{-1} \frac{\text{kg}}{\text{m}},$$

$$\bar{J}'_z = J'_z + m' e^2 = 1,62603 \cdot 10^{-4} \text{ kgm},$$

$$\bar{J}'_y = 9,692526 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}.$$

Die iterative Bestimmung der Steifigkeiten kann Anhang A.3 entnommen werden. Tabelle 15 zeigt die mit SABINA-NG berechneten Steifigkeitskennwerte und die mittels dem Auswerteverfahren aus Abbildung 69 bestimmten Steifigkeitskennwerte.

	Versuchsauswertung	SABINA-NG
GA_x [N]	$2,5443 \cdot 10^6$	$2,5443 \cdot 10^6$
EI_y [Nm ²]	$1,245 \cdot 10^1$	$1,249 \cdot 10^1$
GI_T [Nm ²]	$2,272 \cdot 10^3$	$2,273 \cdot 10^3$
EC_W [Nm ⁴]	$1,098 \cdot 10^{-1}$	$1,038 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 15: Gegenüberstellung der analytischen Lösung mit SABINA-NG

Die Abweichung zwischen SABINA-NG und dem ausgewerten Versuch für die Wölbsteifigkeit EC_W liegt unter 6%.

Abbildung 74 stellt die aus den Steifigkeiten von SABINA-NG (siehe Tabelle 15) berechneten Eigenfrequenzen den Eigenfrequenzen aus dem Versuch gegenüber.

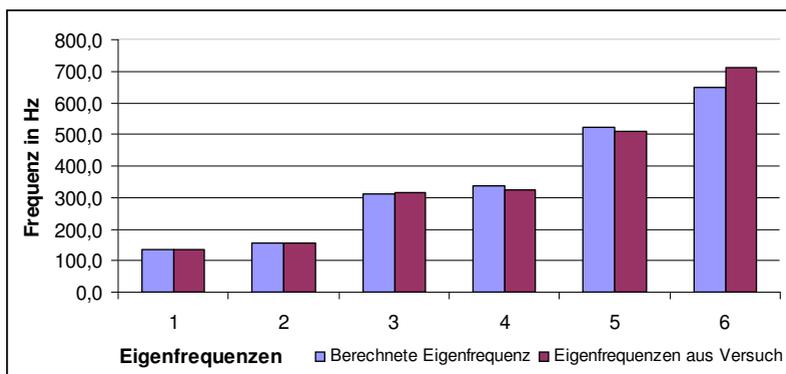


Abbildung 74: Vergleich der berechneten Eigenfrequenzen und der Eigenfrequenzen aus dem Versuch

Es ist erkennbar, dass ab der sechsten Eigenfrequenz diese nicht korrekt wiedergegeben werden. Diese können durch Effekte beeinflusst sein, welche von der verwendeten eindimensionalen Theorie nicht abgebildet werden können. Aufgrund der Anpassung der Torsionssteifigkeit GI_T und der Biegesteifigkeit EI_y gegen die ersten beiden Eigenfrequenzen werden diese - wie erwartet - sehr gut getroffen. Ferner ergeben sich für die Querschnittskennwerte aus SABINA-NG für die nächsten drei Eigenfrequenzen nur marginale Unterschiede gegenüber denen des Versuchs. Damit ist der Schluss zulässig, dass SABINA-NG brauchbare Steifigkeitskennwerte liefert und die Abweichungen aus der nicht exakten Massen- und Dickenverteilung herrühren.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein bestehendes Programm zur Bestimmung der Steifigkeiten von Balken so erweitert, dass die Wölbsteifigkeit und der dreidimensionale Spannungszustand eines Balkens mit inhomogenem Querschnitt aus faserverstärkten Kunststoffen und anderen Materialien infolge Wölbkrafttorsion berechnet werden kann. Dazu wird der dreidimensionale Verformungszustand des Balkens in einen 2d-Anteil in der Querschnittsebene und einen 1d-Anteil in Balkenlängsrichtung aufgespalten. Das Verhalten in Balkenlängsrichtung kann analytisch beschrieben werden. Dies führt dazu, dass die Verformungen in der Querschnittsebene mit der Finiten Elemente Methode und einer 2d-Idealisierung berechnet werden können. Durch die - gegenüber einer kompletten dreidimensionalen Finite Elemente Berechnung - erheblich reduzierte Anzahl an Freiheitsgraden verringert sich die Berechnungsdauer des vollständigen dreidimensionalen Spannungszustands im ungestörten Balkenquerschnitt überproportional. Damit wird die Berechnung des dreidimensionalen Spannungszustands für dünnwandige Balken mit vertretbarem Aufwand überhaupt erst möglich.

Grundlage für die Berechnung der Verwölbung und der Wölbsteifigkeit sind die Arbeiten von Wlassow. Auch wenn die Verwölbung von Wlassow für dünnwandige Profile hergeleitet wurde, werden die Annahmen von Wlassow für Balken mit beliebigen inhomogenen Querschnitten verwendet.

Für die Berechnung der Wölbsteifigkeit und des dreidimensionalen Spannungszustands infolge Wölbkrafttorsion wird die Querschnittsgeometrie in ein Koordinatensystem mit Schubmittelpunkt als Ursprung sowie den Richtungen der Hauptachsen als Ordinate und Abszisse transformiert. Die Verschiebungsansätze und damit auch die Randbedingungen werden derart gewählt, dass die Verdrehung sowie die ersten beiden Ableitungen der Verdrehung unabhängig von der Wölbsteifigkeit und Saint Venantscher Torsionssteifigkeit beschrieben werden können. Zudem wird die zweite Ableitung der Verdrehung in Balkenlängsrichtung konstant und ungleich Null angesetzt. Damit werden Verschiebungsansätze für die drei translatorischen Freiheitsgrade aufgestellt. Durch Darstellung des dreidimensionalen Verformungszustands als Produkt aus einem 2d-Anteil in der Querschnittsebene und einem 1d-Anteil in Balkenlängsrichtung lässt sich die Verformung in Balkenlängsrichtung von den Querschnittsdeformationen trennen. Ist der Verlauf der Verschiebungen in Balkenlängsrichtung bekannt, lässt sich die Querschnittsdeformation mittels einer zweidimensionalen Analyse ermitteln. Für beliebige Querschnittsgeometrien bietet sich dafür die Finite Elemente Methode an. Durch diese Vorgehensweise kann das eigentlich dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales zurückgeführt werden. Die Elementsteifigkeiten werden mittels des Prinzips der virtuellen Arbeit und eines isoparametrischen bilinearen Verschiebungsansatzes bestimmt. In der Gesamtsteifig-

keitsmatrix sind die Verwölbungen von den Verformungen in der Querschnittsebene entkoppelt und können daher unabhängig von diesen ermittelt werden. Anschließend werden mit den Verwölbungen die Verformungen in der Querschnittsebene bestimmt. Mit diesen Eingangsgrößen wird der dreidimensionale Spannungszustand berechnet. Aus der Einheitsverwölbung und der Längsspannung wird nach Integration über den gesamten Querschnitt die Wölbsteifigkeit EC_W bestimmt.

Zur Verifikation des erstellten Rechenprogramms werden dessen Ergebnisse mit analytischen und numerischen Lösungen verglichen. Für Balken mit rechteckigen, kreisförmigen und elliptischen Vollquerschnitten sowie für Balken mit dünnwandigen kreisförmigen, dünn- oder dickwandigen quadratischen Hohlquerschnitten und für ein dünnwandiges C-Profil mit homogenem Querschnittsaufbau kann eine sehr gute Übereinstimmung zwischen analytischer Lösung und den Ergebnissen des erstellten Berechnungsprogrammes gezeigt werden. Auch für ein C-Profil mit einem homogenisiertem Querschnitt ist die Übereinstimmung sehr gut.

Zusätzlich wird für dieses C-Profil noch eine konventionelle dreidimensionale Finite Elemente Berechnung mit inhomogenem Querschnitt durchgeführt. Der Vergleich der Steifigkeiten aus der dreidimensionalen Finiten Elemente Berechnung und den Steifigkeiten des erstellten Berechnungsprogramms zeigt eine Abweichung von ca. 7% und liefert damit eine brauchbare Übereinstimmung. Für die dreidimensionale Berechnung ist eine Berechnungsdauer von vier Stunden auf einer sehr leistungsstarken Maschine nötig. Die Berechnung mit dem erstellten Berechnungsprogramm konnte unter einer Minute auf einem handelsüblichen Laptop beendet werden.

Der inhomogene Vollquerschnitt weist einen Kern - zum großen Teil bestehend aus sehr weichem Schaum und einem geringem Anteil Stahl - und eine dünne Deckhaut - bestehend aus einer hochsteifen UD-Schicht - auf. Für diesen inhomogenen Vollquerschnitt liegen die Abweichungen der Verdrehung und deren erster Ableitung zwischen der dreidimensionalen Analyse und der eindimensionalen Analyse basierend auf den Steifigkeiten bestimmt mit dem erstellten Berechnungsprogramm zwischen 5 und 40%. Zudem werden die Längsdehnungen um den Faktor 5 von dem erstellten Berechnungsprogramm und der analytischen Lösung in Balkenlängsrichtung überschätzt. Zurückgeführt wird dies auf die Querkontraktionsbehinderung in den wölbbehinderten Lagerstellen und die Verletzung der Wlassowschen Annahmen. Die Nutzung dieser Längsdehnungen für Festigkeitsbetrachtungen wäre - wenn auch konservativ - zulässig.

Somit ist das erstellte Berechnungsprogramm für inhomogene offene Querschnitte gut geeignet. Für inhomogene geschlossene, kompakte oder Vollquerschnitte, welche nicht durch die Saint Venantsche Torsion dominiert sind, ist die Nutzung des erstellten Berechnungsprogrammes zu prüfen. Die zuletzt genannten Profile stellen eine Ausnahme dar, da Vollquerschnitt und geschlossene Profile in der Regel durch

die Saint Venantsche Torsion dominiert werden.

Für die experimentelle Verifikation wird ein C-Profil mit einer Breite von 22 mm, einer Höhe von 45 mm, einer Dicke zwischen 2,5 und 3 mm und einer Länge von 1270 mm - bestehend aus Kohlefaserverbundwerkstoff - verwendet.

In der Literatur existiert kein standardisierter statischer Versuch für die Bestimmung der Wölbsteifigkeit. Daher wird ein statischer Torsionsversuch mit einseitiger wölbbehinderter Einspannung gewählt, um die Wölbsteifigkeit infolge Torsion zu ermitteln. Aufgrund der geringen auftretenden Verschiebungen im Bereich der Einspannung und deren nicht ausreichender Auflösung, kann die Wölbsteifigkeit mittels eines statischen Versuchs nicht bestimmt werden.

Da die Wölbsteifigkeit die Torsionseigenfrequenzen beeinflusst, wird ein dynamischer Versuch mit zuvor beschriebenem Prüfling zur Bestimmung der Wölbsteifigkeit durchgeführt. Um Fehler aus der Einspannung des Prüflings zu vermeiden, wird die Lagerungsart frei-frei gewählt. Die berechnete Wölbsteifigkeit weicht von der aus dem dynamischen Experiment ermittelten um weniger als 6% ab. Aufgrund der geringen Abweichung wird die Berechnung mittels des erstellten Berechnungsprogrammes als hinreichend genau eingeschätzt.

Im Rahmen einer zukünftigen Arbeit könnte die Theorie von Wlassow für inhomogene geschlossene, kompakte und Vollquerschnitte überprüft und gegebenenfalls erweitert werden. Damit würde der letzte - nicht durch das erstellte Berechnungsprogramm abgedeckte - Spezialfall erforscht.

Ein Teil der Abweichung der berechneten Wölbsteifigkeit gegenüber der aus dem dynamischen Experiment geht auf die Homogenisierung der +/- 45°-Gelegelagen zurück. Eine zukünftige Arbeit zur weiteren Verbesserung des Berechnungsprogramms sollte die Zulassung anisotroper Werkstoffe zum Ziel haben. Dies würde auch die Berechnung aller Steifigkeiten von Balken unter Berücksichtigung von Zug-Torsions- und Biege-Torsions-Kopplungen erlauben.

Literatur

- [1] Agarwal B.D., Broutman L.J.
Analysis and Performance of Fibre Composites
Wiley Interscience, New York, 1980
- [2] Argyris J., Mlejnek H.-P.
Die Methode der Finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik, Band I-III
Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1988
- [3] Auricchio F., Carotenuto P., Reali A.
On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three dimensional finite-elasticity
International Journal of Solids and Structures, Volume 45, 2008, pp 4766-4781
- [4] Berdichevsky V.L.
Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells
Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM), Volume 43, No. 4, 1979, pp 664-687
- [5] Bornscheuer F.W.
Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion
Der Stahlbau 21, Volume 1, 1952, pp 1-9
- [6] Bornscheuer F.W.
Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt
Der Stahlbau 21, Volume 12, 1952, pp 225-232 und Der Stahlbau 22, Volume 2, 1953, pp 32-44
- [7] Broutman L.J., Krock R.H.
Composite Materials, Volume 1-8
Academic Press, 1974, New York
- [8] Büter A.
Untersuchung adaptiver Konzepte zur Reduktion von Hubschraubervibrationen zur Minderung des Hubschrauberlärms und der Steigerung der aerodynamischen Effizienz
Forschungsbericht 98-12, DLR, Braunschweig, 1998

- [9] Cesnik Carlos E. S.
Cross-Sectional Analysis of Initially Twisted and Curved Composite Beams
Ph.D. Thesis, Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, May 1994.
- [10] Cesnik Carlos E.S., Hodges Dewey H.
VABS: A New Concept for Composite Rotor Blade Cross-Sectional Modeling
Journal Of The American Helicopter Society, Volume 42, Issue 1, 1997, pp 27-38
- [11] Cesnik Carlos E.S., Sutyryn Vladislav G., Hodges Dewey H.
A Refined Composite Beam Theory Based on the Variational-Asymptotical Method
In Proceedings of the 34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, La Jolla, California, Apr 19-22, 1993, pp. 2710-2720, American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper 93-1616.
- [12] Cesnik Carlos E.S., Sutyryn Vladislav G., Hodges Dewey H.
Refined theory of composite beams: the role of short wavelength extrapolation
International Journal of Solids and Structures, Vol. 33, No. 10, 1996, pp. 1387-1408.
- [13] Cofie Emmanuel
Finite element analysis of the torsion behavior of thin walled members using a warping superelement
34th AIAA, 1993, pp 292-299
- [14] Danielson D.A., Hodges D.H.
Nonlinear Beam Kinematics by Decomposition of the Rotation Tensor
Journal of Applied Mechanics, Volume 54, No. 2, 1987, pp 258-262
- [15] Dankert J., Dankert H.
Technische Mechanik - Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik,
4. korrigierte und ergänzte Auflage
B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2006, pp198-199
- [16] Düster A., Niggel A., Rank E.
Applying the hp-d version of the FEM to locally enhance dimensionally reduced models
Computational Methods Applied Mechanical Engineering, Volume 196, 2007, pp 3524-3533

- [17] Fahmy A.A., Ragai-Ellozy A.N.
Thermal Expansion of Fiber Composites in the Thickness Direction
Journal of Composite Materials, Volume 8, January 1974, pp 90-92
- [18] Floros Matthew W., Smith Edward C.
Finite element modeling of open-section composite beams with warping restraint effects
AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, Struc Dyn&M at Conference, 1996, pp 1420-1430
- [19] Francke Wolfgang, Friemann Harald
Schub und Torsion in geraden Stäben, Grundlagen - Berechnungsbeispiele
Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Wiesbaden, 2005
- [20] Ganapathi M., Patel B.P., Polit O., Touratier M.
A C^1 Finite Element including Transverse Shear and Torsion Warping for rectangular Sandwich Beams
International Journal of Numerical Methods in Engineering., Volume 45, 1999, pp 47-75
- [21] Hahn H.G.
Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre, 2. Auflage
Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1982
- [22] Herakovic C.T.
Composite Laminates with Negative Through-the-Thickness Poisson Ratios
Journal of Composite Materials, Vol. 18, September 1984, pp 447-455
- [23] Hodges Dewey H.
Nonlinear Composite Beam Theory
American Institute of Aeronautics and Astronautics, Progress in Astronautics and Aeronautics Series, Volume 213, 2006
- [24] Jones R.M.
Mechanics of Composite Materials
Hemisphere Publishing Corporation, New York, Washington, Philadelphia, London, 1975
- [25] Jung Sung Nam, Kim Ki-Tae, Kim Seung Jo
Aeroelastic stability analysis of a hingeless rotor blade with composite flexures
AIAA/ASME/ASCE/ASC structures, Struc Dyn&M at Conference, 1997, pp 897-905

- [26] Jung Sung Nam, Nagaraj V.T., Chopra Inderjit
Refined Structural Model for Thin- and Thick-Walled Composite Rotor Blades
AIAA Journal, Volume 40, January 2002, pp 105-116
- [27] Jung Sung Nam, Park Il-Ju, Shin Eui Sup
Theory of thin-walled composite beams with single and double-celled sections
Composites: Part B, Volume 38, 2007, pp 182-192
- [28] Jönsson Jeppe
Determination of shear stresses, warping functions and section properties of thin-walled beams using finite elements
Computers and Structures, Volume 68, 1998, pp 393-410
- [29] Kappus R.
Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich
Luftfahrtforschung 14, 1937, pp 444-457
- [30] Kim Ki-Du, Han Sung-Cheon, Suthasupradit Songsak
Geometrically non-linear analysis of laminate composite structures using a 4-node co-rotational shell element with enhanced strains
International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 42, 2007, pp. 864-881
- [31] Kim Nam-Il, Shin Dong Ku
Torsional analysis of thin-walled composite beams with single- and double-celled sections
Engineering Structures, Volume 31, 2009, pp 1509-1521
- [32] Kim Nam-Il, Shin Dong Ku, Kim Moon-Young
Improved flexural-torsional stability analysis of thin-walled composite beam and exact stiffness matrix
International Journal of Mechanical Sciences, Volume 49, 2007, pp 950-969
- [33] Kim Nam-Il, Dong Ku Shin, Young-Suk Park
Dynamic stiffness matrix of thin-walled composite I-beam with symmetric and arbitrary laminations
Journal of Sound and Vibration, Volume 318, 2008, pp 364-388
- [34] Klein B.
Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode, 3. Auflage
Vieweg (Studium Technik), Braunschweig, Wiesbaden, 1999

- [35] Kollbrunner C.F., Basler K.
Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil, Teil I
Mitteilung der technischen Kommission, Heft 29, Schweizer Stahlbauvereinigung, Zürich
- [36] Kollbrunner C.F., Basler K.
Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil, Teil II
Mitteilung der technischen Kommission, Heft 30, Schweizer Stahlbauvereinigung, Zürich
- [37] Kollbrunner C.F., Basler K.
Statik der Wölb torsion und der gemischten Torsion
Mitteilung der technischen Kommission, Heft 31, Schweizer Stahlbauvereinigung, Zürich
- [38] Kollbrunner C.F., Basler K.
Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil
Mitteilung der technischen Kommission, Heft 32, Schweizer Stahlbauvereinigung, Zürich
- [39] Kuznetsov V.V, Levyakov, S.V.
Phenomenological invariant-based finite-element model for geometrically non-linear analysis of thin shell
Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, Volume 196, 2007, pp 4952-4964
- [40] Lopes Alonso R., Ribeiro P.
Flexural and torsional non-linear free vibrations of beams using a p-version finite element
Computers and Structures, Volume 86, 2008, pp 1189-1197
- [41] Loughlan J., Ata M.
The restraint torsional response of open section carbon fibre composite beams
Composite Structures, Volume 32, 1995, pp 13-31
- [42] Marguerre K.
Torsion von Voll- und Hohlquerschnitten
Der Bauingenieur 21, 1940, pp 317-322
- [43] Mechab I., Tounsi A., Benatta M.A., Abba bedia E.A.
Deformation of short composite beam using refined theories
Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 346, 2008, pp 468-479

- [44] Meek J.L., Ho P.T.S.
A Simple Finite Element Model for the Warping Torsion Problem
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 37, 1983,
pp 25-36
- [45] Megson T.H.G.
Aircraft Structures for engineering students, Second Edition
Edward Arnold, a division of Hodder and Stoughton Limited, Bristol, 1990
- [46] Mohri F., Eddinari A., Damil N., Potier Ferry M.
A beam finite element for non-linear analysis of thin-walled elements
Thin-Walled Structures, Volume 46, 2008, pp 981-990
- [47] Mottershead John E.
Warping Torsion in thin-walled Open Section Beams using the Semiloof Beam
Element
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 26, 1998,
pp 231-243
- [48] Murin J., Kutis V.
An effective finite element for torsion of constant cross-sections including war-
ping with secondary torsion moment deformation effect
Engineering Structures, Volume 30, 2008, pp 2716-2723
- [49] Musat Sorin D., Epureanu Bogdan I.
Study of Warping Torsion of thin-walled Beams with closed cross-section using
Macro-Elements
Communications in Numerical Methods in Engineering, Volume 12, 1996, pp
873-884
- [50] Musat Sorin D., Epureanu Bogdan I.
Study of Warping Torsion of thin-walled Beams with open cross-section using
Macro-Elements
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 44, 1999,
pp 853-868
- [51] Pagano N.J.
Thickness Expansion Coefficient of Composite Laminates
Journal of Composite Materials, Volume 8, July 1974, pp 310-312
- [52] Piovani Marcelo T., Cortinez Victor H.
Mechanics of shear deformable thin-walled beams made of composite
materials
Thin-Walled Structures, Volume 45, 2007, pp 37-62

- [53] Rapp H.
Inhomogene Balken unter Temperatur-, Zug- und reiner Biegebeanspruchung
Technische Universität München, Lehrstuhl für Leichtbau, München, 1988
- [54] Rapp H.
New computer codes for structural analysis of composite helicopter structures
Forum Proceedings of the 16th European Rotorcraft Forum, Paper No II.4.3,
Glasgow, UK, Sept. 1990
- [55] Rapp H., Wörndle R.
Influence of cross section variations on the structural behaviour of composite
rotor blades
Forum Proceedings of the 17th European Rotorcraft Forum, Paper 91-81, pp
629-637, 1991
- [56] Rapp H.
Non-homogeneous bars under tension, pure bending and thermal loads
Composite Science and Technology, Volume 44, 1992, pp 21-28
- [57] Rapp H.
SABINA - Berechnung der Spannungen und Verformungen von inhomogenen
Balken mit beliebigem Querschnitt
ECD-TN-DE133-93-0001
- [58] Rapp H.
Biegesteifigkeiten aus Faserverbundwerkstoffen - Spannungs- und Steifigkeits-
analyse
Technicki Vjesnik 3(1,2), pp13-29, ISSN 1330-3651, Ossiek, 1996
- [59] Rapp H.
Faserverbundstrukturen
Skript Institut für Leichtbau, UniBw München, 2002
- [60] Rapp H.
Strukturdynamik
Skript Institut für Leichtbau, UniBw München, 2002
- [61] Riedlbeck M.
Isoparametrische FEM
Vortrag, TU München, 27. Mai 2010
- [62] Roik K.H.
Vorlesungen über Stahlbau (Grundlagen)
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin/München/Düsseldorf, 1972

- [63] Roik K.H., Carl J., Lindner J.
Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin/München/Düsseldorf, 1972
- [64] Roik K.H., Sedlacek G.
Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformung - Analogiebetrachtung zur Betrachtung des querbelasteten Zugstabes
Der Stahlbau 36, 1966, pp 43-52; Berichtigungen auf p 160
- [65] Salim Hani A., Davalos Julio A.
Torsion of Open and Closed Thin-Walled Laminated Composite Sections
Journal of Composite Materials, Volume 39, 2005, pp 497-524
- [66] Sapountzakis E.J., Mokos V.G.
Vibration analysis of 3-D composite beam elements including warping and shear deformation effects
Journal of Sound and Vibration, Volume 306, 2007, pp 818-834
- [67] Sapountzakis E.J., Tsipiras V.J.
Non-linear elastic non-uniform torsion of bars of arbitrary cross-section by BEM
International Journal of Non-linear Mechanics, Volume 45, 2010, pp 63-74
- [68] Shadmehri F., Haddadpour H., Kouchakzadeh M.A.
Flexural-torsional behaviour of thin-walled composite beams with closed cross-section
Thin-walled Structures, Volume 45, 2007, pp 699-705
- [69] Sheikh A.H., Thomsen O.T.
An efficient beam element for the analysis of laminated composite beams of thin-walled open and closed cross sections
Composites Science and Technology, Volume 68, 2008, pp 2273-2281
- [70] Shin Dong Ku, Kim Nam-II, Kim Moon-Young
Exact stiffness matrix of mono-symmetric composite I-beams with arbitrary lamination
Composite Structures 79, 2007, pp 467-480
- [71] Silvestre N.
Non-classical effects in FRP composite tubes
Composites: Part B, Volume 40, 2009, pp 681-697

- [72] Smith Edward C., Chopra Inderjit
Formulation and Evaluation of an Analytical Model for Composite Box Beams
Journal of the American Helicopter Society, July 1991, pp 23-35
- [73] Stemple Alan D., Lee Sung W.
Finite-Element Model for Composite Beams with Arbitrary Cross-Sectional Warping
AIAA Journal, Volume 26, 1988, pp 1512-1520
- [74] Taliercio Alberto, Veber Daniele
Some problems of linear elasticity for cylinders in micropolar orthotropic material
International Journal of Solids and Structures, Volume 46, 2009, pp 3948-3963
- [75] Thieme D.
Einführung in die Finite-Element-Methode für Bauingenieure,
2. bearbeitete und erweiterte Auflage
Verlag für Bauwesen, Berlin, 1996
- [76] Timoshenko S.P., Goodier J.N.
Theory of Elasticity, Third Edition, International Student Edition
McGraw Hill Book Company Japan Ltd., 1982
- [77] Tracy Anita L., Chopra Inderjit
Aeroelastic Analysis of a Composite Bearingless Rotor in Forward Flight
Using an Improved Warping Model
Journal of the American Helicopter Society, July 1995, pp 80-91
- [78] Tsai S.W., Hahn H.T.
Introduction to Composite Materials
Technomic Publishing Co., Westport Connecticut, 1980
- [79] Uhrig R.
Elastostatik und Elastokinetik in Matrixschreibweise, Das Verfahren der Übertragungsmatrizen
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973
- [80] Vo Thuc Phuong, Jaehong Lee, Kihak Lee
On triply coupled vibrations of axially loaded thin-walled composite beams
Composite and Structures, Volume 88, 2010, 144-153
- [81] Vo Thuc Phuong, Jaehong Lee
Geometrically nonlinear theory of thin-walled composite box beams using

- shear-deformable beam theory
International Journal of Mechanical Sciences, Volume 52, 2010, pp 65-74
- [82] Vo Thuc Phuong, Jaehong Lee
Geometrically nonlinear analysis of thin-walled open-section composite beams
Computers and Structures, Volume 88, 2010, pp 347-356
- [83] Volovoi Vitali V., Hodges Dewey H.
Theory of Anisotropic Thin-Walled Beams
Journal of Applied Mechanics, Volume 67, September 2000, pp 453-459
- [84] Volovoi Vitali V., Hodges Dewey H., Berdichevsky V.L., Sutyurin Vladislav G.
Asymptotic theory for static behavior of elastic anisotropic I-beams
International Journal of Solids and Structures 36, 1999, pp 1017-1043
- [85] Volovoi Vitali V., Hodges Dewey H., Cesnik Carlos E.S., Popescu B.
Assessment of Beam Modeling Methods for Rotor Blade Applications
Mathematical and Computer Modelling 33, 2001, pp 1099-1112
- [86] Volovoi Vitali V., Hodges Dewey H.
Single- and Multi-Celled Composite Thin-Walled Beams
American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Volume 40, May 2002, pp 960-965
- [87] Wlassow W.S.
Dünnwandige elastische Stäbe, Band 1
Zweite überarbeitete und ergänzte Auflage, Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur, Moskau, 1959
- [88] Wörndle R.
Dissertation zur Ermittlung der Schubspannungsverteilung und der Schubsteifigkeit in querkraftbeanspruchten, homogenen oder inhomogenen Querschnitten beliebiger Form aus isotropen oder anisotropen Werkstoffen
Technische Universität Wien, Wien, April 1981
- [89] Wenbin Yu, Hodges Dewey H., Volovoi Vitali V., Fuchs Eduardo D.
A generalized Vlasov theory for composite beams
Thin-walled Structures, Volume 43, 2005, pp 1493-1511
- [90] Zhu Dechao
Analysis of thin-walled composite laminated helicopter rotor with hierarchical warping functions and finite element method
Acta Mechanica Sinica, Volume 7, n 3, 2001, pp 258-268

- [91] Zienkiewicz O.C.
The Finite Element Method
The third, expanded and revised edition of The Finite Element Method in Engineering Sciences
McCraw Hill Book Company (UK) Ltd., Maidenhead, Berkshire, England, 1977
- [92] Zienkiewicz O.C.
Methode der finiten Elemente
1. Auflage, Carl Hanser Verlag München, Wien, 1975

A Anhang

A.1 Saint Venantsche Torsion

Verschiebungen eines beliebigen Querschnittspunktes, die sich aus einer Verdrehung eines Querschnitts um einen Pol D ergeben, können rein geometrisch ermittelt werden. Der Kreisbogen, auf dem sich der beliebige Punkt P um die Drillachse D dreht, kann aufgrund des sehr kleinen Winkels $\vartheta(z)$ durch die Tangente an den Kreisbogen bei einer Bewegung von P_1 nach P_2 ersetzt werden (siehe Abbildung 75).

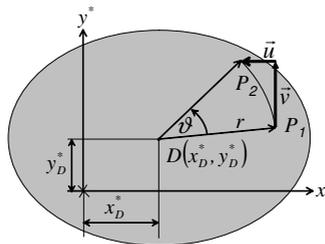


Abbildung 75: Zusammenhang zwischen Verdrehung und Verschiebungen

Bleiben nun Verschiebungen infolge von Längsspannungen und Querkontraktion unberücksichtigt, ergeben sich folgende Verschiebungen u , v und w in Abhängigkeit des Drillwinkels $\vartheta(z)$ und der Koordinaten x_D und y_D des Pols D :

$$u = -r \cdot \vartheta(z) \sin \varphi = -(y^* - y_D^*) \vartheta(z), \quad (\text{A.1})$$

$$v = r \cdot \vartheta(z) \cos \varphi = \psi(x^* - x_D^*) \vartheta(z), \quad (\text{A.2})$$

$$w = w(x, y, z). \quad (\text{A.3})$$

Die Axialverschiebung w wird zunächst nur in ganz allgemeiner Form angesetzt. Weiterhin ist es nur schwer vorstellbar, dass überhaupt Axialverschiebungen im Querschnitt auftreten sollen, die mit der Verdrehung ϑ und der Verdrillung ϑ' des Stabs gekoppelt sind. Aus den Verschiebungen ergeben sich folgende Verzerrungen mit

Gleichung (2.1):

$$\varepsilon_x = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon_y = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z^*}, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_{yz} = \left((x^* - x_D^*) \vartheta'(z) + \frac{\partial w}{\partial y^*} \right), \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_{zx} = \left(-(y^* - y_D^*) \vartheta'(z) + \frac{\partial w}{\partial x^*} \right). \quad (\text{A.9})$$

Durch Anwendung des Hookeschen Gesetzes mit einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0$ erhält man neben $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ für einen allgemeinen Querschnittspunkt aus den Dehnungen folgende Spannungen:

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z^*}, \quad (\text{A.10})$$

$$\tau_{yz} = G \left((x^* - x_D^*) \vartheta'(z) + \frac{\partial w}{\partial y^*} \right), \quad (\text{A.11})$$

$$\tau_{zx} = G \left(-(y^* - y_D^*) \vartheta'(z) + \frac{\partial w}{\partial x^*} \right). \quad (\text{A.12})$$

Durch Einsetzen der zuvor genannten Spannungen in die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen aus den Gleichungen (2.2) bis (2.4) ergeben sich folgende partielle Differentialgleichungen.

$$G \left(-(y^* - y_D^*) \vartheta''(z) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^* \partial z^*} \right) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$G \left((x^* - x_D^*) \vartheta''(z) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^* \partial z^*} \right) = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^{*2}} \right) + E \frac{\partial^2 w}{\partial z^{*2}} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass diese partiellen Differentialgleichungen mit den entsprechenden Indizes an den Schubmoduli auch für orthotrope Werkstoffe für $\nu = 0$ gültig wären.

Zusätzlich zu den in Kapitel 3 genannten Voraussetzungen wird in der von Saint Venant (1855) entwickelten Theorie der reinen Torsion angenommen, dass

- ein reiner Schubspannungszustand vorliegt,
- sich der Querschnitt frei verwölben kann und damit $\sigma_z = 0$ erfüllt ist, d.h. Normalspannungen nicht vorhanden sind.

Aus Gleichung (A.6) und (A.10) folgt für die Spannung σ_z und die Verwölbung w des Querschnitts:

$$\sigma_z = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow w = w(x, y). \quad (\text{A.16})$$

Damit muss die Verwölbung w des Querschnitts unabhängig von z sein.

A.1.1 Grundlagen der Saint Venantschen Torsion

Mit Gleichung (A.16) können die Gleichungen (A.13) und (A.14) vereinfacht werden und ergeben:

$$-G(y - y_D) \vartheta''(z) = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$G(x - x_D) \vartheta''(z) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Diese beiden Bedingungen können nur erfüllt sein, wenn $\vartheta''(z) = 0$ und damit $\vartheta'(z) = \text{konst.}$ gilt.

Da keine Normalspannungen in Längsrichtung vorhanden sind, vereinfacht sich die Gleichgewichtsbedingung (2.4) mit (A.16) zu:

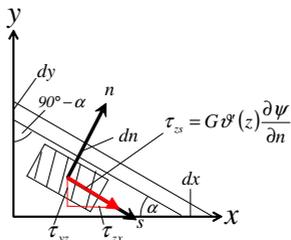
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.19})$$

Die Gleichung (A.15) liefert eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Verwölbung w . Da diese in der Saint Venantschen Torsionstheorie keinen unmittelbaren Einfluss auf die Schubspannungen haben, wird der Weg über eine Spannungsfunktion ψ zur Bestimmung der Schubspannungen gewählt.

A.1.2 Herleitung der Spannungsfunktion ψ

Hierfür definiert [19] eine Spannungsfunktion, welche sich in Normalenrichtung ändert (siehe Abbildung 76):

$$\tau_{zs} = G \vartheta'(z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Abbildung 76: Definition der Spannungsfunktion ψ

Aus der Schubspannung τ_{zs} lassen sich die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} unter Nutzung nachfolgender geometrischer Bedingungen berechnen.

$$\sin \alpha = \frac{dn}{dx}, \quad (\text{A.21})$$

$$\cos \alpha = \frac{dn}{dy}, \quad (\text{A.22})$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zs} \cos \alpha, \quad (\text{A.23})$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zs} \sin \alpha. \quad (\text{A.24})$$

Damit ergeben sich für die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} folgende Gleichungen:

$$\tau_{yz} = G \cdot \vartheta'(z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{A.25})$$

$$\tau_{zx} = G \cdot \vartheta'(z) \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (\text{A.26})$$

Es sei hier nochmals angemerkt, dass die Verwölbung keinen direkten Einfluss auf die Größe der Schubspannungen hat und dass ein reiner Schubspannungszustand vorliegt.

Zur Bestimmung der Spannungsfunktion ψ werden die Gleichungen (A.11), (A.12), (A.25) und (A.26) nach x und y partiell differenziert. Durch die anschließende Subtraktion der beiden Terme lässt sich die Verwölbung w eliminieren. Für folgendes Vorgehen muss ein homogener Querschnitt vorliegen:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = G \left(-\vartheta'(z) + \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right) - G \left(\vartheta'(z) + \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right), \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial \left(G \vartheta'(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(G \vartheta'(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}{\partial x}. \quad (\text{A.28})$$

Durch Gleichsetzen der beiden rechten Seiten aus Gleichung (A.27) und (A.28) erhält man folgenden Zusammenhang:

$$G\vartheta'(z) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -2G\vartheta'(z), \tag{A.29}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2. \tag{A.30}$$

Gleichung (A.30) wird als Potentialgleichung oder Prandtlsche Spannungsfunktion bezeichnet. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen werden Potentialfunktionen genannt. Die Schwierigkeit liegt jedoch nicht in der Lösung der Differentialgleichung, sondern in der Einarbeitung der Randbedingungen.

A.1.3 Ermittlung der Randbedingungen für die Spannungsfunktion ψ

Bei einem Profil, dessen Oberflächen spannungsfrei sind, müssen die Spannungen in jedem Querschnitt parallel zum Querschnittsrand verlaufen. Die Aufspaltung der Spannungen in ihre radialen und tangentialen Anteile ist in Abbildung 77 dargestellt.

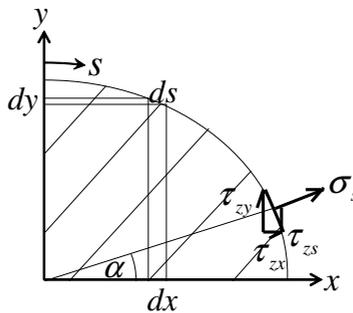


Abbildung 77: Spannungen am Profilrand

Werden die Spannung in Umfangsrichtung τ_{zs} über die Spannungen τ_{zx} und τ_{zy} ausgedrückt, ergibt sich für den Rand:

$$\tau_{yz} \sin \alpha - \tau_{zx} \cos \alpha = 0, \tag{A.31}$$

$$\sin \alpha = \frac{dx}{ds}, \tag{A.32}$$

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds}. \tag{A.33}$$

In Gleichung (A.31) die Gleichungen (A.25), (A.26), (A.32) und (A.33) eingesetzt, ergibt:

$$G\vartheta'(z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) = 0, \quad (\text{A.34})$$

$$G\vartheta'(z) \frac{d\psi}{ds} = 0. \quad (\text{A.35})$$

Die Bedingung aus Gleichung (A.35) muss für jeden freien Rand erfüllt sein. Sie liefert damit:

$$\psi_{Rand} = const. \quad (\text{A.36})$$

Da die Spannungsfunktion zur Berechnung der Spannung differenziert werden muss, spielt die Konstante ψ_{Rand} keine Rolle und wird daher zu Null gesetzt. Somit ergibt sich die Spannungsfunktion am Rand des Querschnitts zu Null.

Als veranschaulichendes Beispiel sei die Spannungsfunktion einer Ellipse angeführt (siehe Abbildung 78).

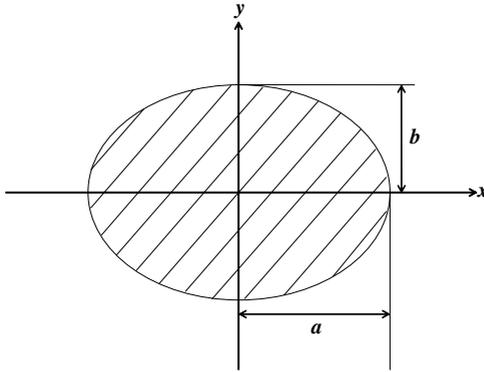


Abbildung 78: Ellipse

$$\psi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + -1 \right]. \quad (\text{A.37})$$

A.1.4 Differentialgleichung der Saint Venantschen Torsion

Das Torsionsmoment ergibt sich aus den Schubspannungen τ_{zx} und τ_{yz} sowie den entsprechenden Hebelarmen gegenüber dem Pol D und muss mit der daraus resultierenden inneren Schnittgröße identisch sein.

$$M_T = \int_A [\tau_{yz}(x - x_D) - \tau_{xz}(y - y_D)] dA. \quad (\text{A.38})$$

Die Gleichungen (A.25) und (A.26) in Gleichung (A.38) eingesetzt, ergibt für homogene Querschnitte:

$$M_T = -\vartheta'(z) G \int_A \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} (x - x_D) + \frac{\partial \psi}{\partial y} (y - y_D) \right] dA. \quad (\text{A.39})$$

Das Integral kann mittels partieller Integration gelöst werden und liefert das Torsionssträgheitsmoment I_T . Für einen homogenen Querschnitt ergibt es sich wie folgt:

$$I_T = - \int_y \int_x \frac{\partial \psi}{\partial x} (x - x_D) dx dy - \int_y \int_x \frac{\partial \psi}{\partial y} (y - y_D) dy dx. \quad (\text{A.40})$$

Da wie in Anhang A.1.3 erwähnt, die Spannungsfunktion an den Rändern des Querschnitts Null wird, resultiert damit für die Torsionssteifigkeit für homogene Querschnitte

$$I_T = 2 \int_x \int_y \psi(x, y) dx dy. \quad (\text{A.41})$$

womit sich Gleichung (A.39) folgendermaßen darstellen lässt:

$$M_T = +GI_T \vartheta'(z) = \text{konst.} \quad (\text{A.42})$$

Es ergeben sich damit für die Profile aus Anhang A.1.3 folgende Torsionssteifigkeiten für homogene Querschnitte:

Ellipse

$$GI_T = G \frac{a^3 b^3 \pi}{a^2 + b^2} \quad (\text{A.43})$$

Kreis

$$GI_T = \frac{1}{2}Gr^4\pi \tag{A.44}$$

Gleichseitiges Dreieck

$$GI_T^{\text{gleichseitiges Dreieck}} = \frac{1}{80}Gb^4\sqrt{3} \tag{A.45}$$

Rechteck

$$GI_T^{\text{Rechteck}} = \frac{1}{3}Gb^3h\eta \tag{A.46}$$

Hierbei gilt für η :

$\frac{h}{b}$	1,1	1,5	2	3	4	5	6	8	10	∞
η	0,42	0,59	0,69	0,79	0,84	0,88	0,90	0,92	0,94	1,00

Tabelle 16: η für ausgewählte Seitenverhältnisse

Für die Schubspannungen ergeben sich folgende Werte für die einzelnen Profile:

Querschnitt	τ_{yz}	τ_{zx}
Ellipse	$-2x \frac{M_T}{a^3 b \pi}$	$2y \frac{M_T}{a^3 b \pi}$
Kreis	$-2x \frac{M_T}{r^4 \pi}$	$2y \frac{M_T}{r^4 \pi}$
Rechteck	$-\frac{M_T}{I_T} \frac{\partial \phi}{\partial x}$	$\left(2y - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \frac{M_T}{I_T}$
Gleichseitiges Dreieck	$160 \frac{M_T}{b^5} \left(-x^2 + y^2 - \frac{2}{3}hx\right)$	$-160 \frac{M_T}{b^5} \left(xy - \frac{hy}{3}\right)$

Tabelle 17: Schubspannungen für verschiedene Querschnitte

mit

$$\phi(x, y) = 8b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^3 \cosh\left[\alpha_n \frac{h}{2b}\right]} \cos\left[\alpha_n \frac{x}{b}\right] \cosh\left[\alpha_n \frac{y}{b}\right]. \tag{A.47}$$

A.1.5 Schmales Rechteckprofil

Da bei Leichtbaustrukturen dünnwandige Profile mit offenen Querschnitten (I- oder C-Profile) eingesetzt werden und diese wie schmale Rechteckprofile betrachtet werden können, soll hier auf das schmale Rechteckprofil eingegangen werden.

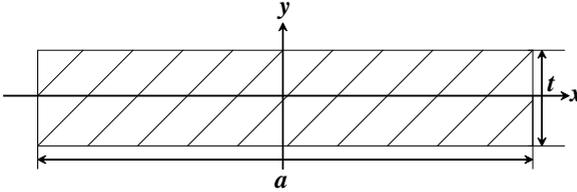


Abbildung 79: Schmales Rechteckprofil

Für das schmale Rechteckprofil wird das Verhältnis $a/b \rightarrow \infty$ gesetzt. Durch diesen Grenzübergang wird ϕ aus Gleichung (A.71) Null, $b = t$ und $\eta = 1$. Damit gilt

$$\psi = \frac{1}{4}t^2 - y^2, \quad (\text{A.48})$$

$$GI_T = \frac{1}{3}Gat^3. \quad (\text{A.49})$$

Da die Hilfsfunktion ϕ Null gesetzt wird, sind deren Ableitungen ebenfalls Null, so dass sich für die Schubspannungen τ_{yz} und τ_{zx} aus Tabelle 17 folgendes ergibt:

$$\tau_{yz} = 0 \quad (\text{A.50})$$

$$\tau_{zx} = 2y \frac{M_T}{I_T} \quad (\text{A.51})$$

Gleichung (A.51) verstößt jedoch gegen die Bedingung des kräftefreien Randes, d.h. am schmalen Rand wird die Spannung nicht wie gefordert Null. Berechnet man das resultierende Moment aus der Schubspannung folgt:

$$\begin{aligned} M_{res} &= \int_A \tau_{zx} y dA = \frac{M_T}{I_T} \int_x \int_y 2y^2 dy dx = \frac{M_T}{I_T} \int_x \left[\frac{2}{3} y^3 \right]_{-t/2}^{+t/2} dx = \\ &= \frac{M_T t^3}{6I_T} [x]_{-a/2}^{+a/2} = \frac{at^3}{6} \frac{M_T}{I_T} = \frac{I_T}{2} \frac{M_T}{I_T} = \frac{M_T}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Bei der Summierung der Schubspannungen ergibt sich ein Fehler von Faktor 2. Der Grund dafür liegt in der vernachlässigten Funktion ϕ . Vor allem für die Schubspannung τ_{yz} ergeben sich an den Profilrändern in Dickenrichtung Spannungen, die auf der Profilmittellinie ungefähr in die Größenordnung von τ_{zxmax} bei isotropen Werkstoffen kommen. Diese Spannungen klingen zwar rasch ab und erzeugen damit nur geringe resultierende Schubkräfte an den Profilrändern. Da diese aber an einem wesentlich größeren Hebel als $t/2$ wirken, ist das daraus resultierende Moment bei isotropen Materialien genau gleich groß wie das resultierende Moment aus (A.52). Abbildung 80 verdeutlicht dies.

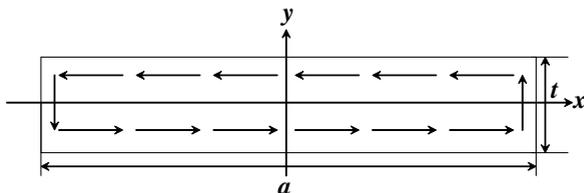


Abbildung 80: Schubfluss im Rechteckprofil

A.1.6 Zusammengesetzte Querschnitte

Dünnwandige Profile können als einzelne schmale Rechtecke mit jeweils konstanten Wanddicken aufgefasst werden. Da die Querschnittsgestalt erhalten bleibt und die Verdrehung für alle Teilprofile damit identisch sein muss, ergibt sich GI_T für beliebige dünnwandige Profile aus der Summe der Einzelsteifigkeiten der jeweiligen Profile.

$$M_T = \sum_i M_{T,i} = \vartheta'(z) \sum_i GI_{T,i} = \vartheta'(z) GI_{T,Ges.} \quad (\text{A.53})$$

Gleichung (A.53) gilt auch für homogenisierte Querschnitte. Bei homogenen Querschnitten kann der Schubmodul G aus der Summe herausgezogen werden. Es folgt:

$$I_{T,Ges.} = \frac{1}{3} \sum_i h_i t_i^3 \quad (\text{A.54})$$

Die maximale Schubspannung bei homogenen Querschnitten hängt hierbei von der maximalen Wanddicke ab und ergibt sich zu:

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_T} t_{max} \quad (\text{A.55})$$

A.1.7 Zusammenhang Verwölbungen und Spannungsfunktion ψ

Auch wenn die Verwölbungen in Anhang A.1 nicht zur Bestimmung der Verdrehung und der Spannungen bei der Saint Venantschen Torsion benötigt werden, sind sie für den Übergang zur Wölbkrafttorsion sehr wichtig und sollen daher im Folgenden erörtert werden. Durch Gleichsetzen von Gleichung (A.11) mit Gleichung (A.12) sowie von Gleichung (A.25) mit Gleichung (A.26) kann ein Zusammenhang zwischen der Verschiebung w und der Spannungsfunktion ψ hergestellt werden

$$G \left((x - x_D) \vartheta'(z) + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = G \cdot \vartheta'(z) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{A.56})$$

$$G \left(-(y - y_D) \vartheta'(z) + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \cdot \vartheta'(z) \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (\text{A.57})$$

Auflösung nach w ergibt:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \vartheta'(z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - (x - x_D) \right), \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta'(z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + (y - y_D) \right). \quad (\text{A.59})$$

Da $\psi = \psi(x, y)$ und die Terme in den Klammern nur von x und y abhängen, lässt sich die Verwölbung w mittels Produktansatzes wie folgt definieren:

$$w(x, y, z) = -\omega(x, y) \vartheta'(z). \quad (\text{A.60})$$

Gleichung (A.60) in die Gleichungen (A.58) und (A.59) eingesetzt, ergibt:

$$\vartheta'(z) \frac{\partial \omega}{\partial y} = \vartheta'(z) \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} + (x - x_D) \right), \quad (\text{A.61})$$

$$\vartheta'(z) \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\vartheta'(z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + (y - y_D) \right). \quad (\text{A.62})$$

Somit kann ein Zusammenhang in der Querschnittsebene zwischen Einheitsverwölbung ω und der Spannungsfunktion ψ hergestellt werden

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} + (x - x_D) \right), \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + (y - y_D) \right). \quad (\text{A.64})$$

Aus der partiellen Integration von Gleichung (A.63) nach y folgen die Einheitsverwölbung ω , eine Konstante ω_0 und eine von x abhängige Funktion $f(x)$:

$$\omega = - \int \frac{\partial \psi}{\partial x} dy + (x - x_D)y + f(x) + \omega_0. \tag{A.65}$$

Gleichung (A.65) in Gleichung (A.64) eingesetzt, führt zum Wegfall der Konstanten ω_0 und ergibt:

$$\int - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dy + y + f'(x) = - \frac{\partial \psi}{\partial y} - (y - y_D), \tag{A.66}$$

$$f'(x) = - \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dy - y - \frac{\partial \psi}{\partial y} - (y - y_D). \tag{A.67}$$

Damit sind alle Terme außer der Konstanten ω_0 aus Gleichung (A.65) bestimmt. Da ω_0 über den ganzen Querschnitt konstant ist, würde $\omega_0 \neq 0$ einer Verformung aus einer Zugbeanspruchung oder einer Starkkörperverschiebung entsprechen. Da beides hier nicht zutrifft, kann $\omega_0 = 0$ gesetzt werden. In Tabelle 18 sind für drei Profile die Einheitsverwölbungen ω angegeben (siehe [19]).

Querschnitt	Einheitsverwölbung ω
Ellipse	$\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy - x_D y + y_D x$
Kreis	$x_D y + y_D x$
Rechteck	$xy + 8b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^3 \cosh \left[a_n \frac{h}{2b} \right]} \sin \left[a_n \frac{y}{b} \right] \sinh \left[a_n \frac{x}{b} \right] - x_D y + y_D x$

Tabelle 18: Einheitsverwölbung für ausgewählte Querschnitte

Es bleibt festzuhalten, dass aus einer vorhandenen Spannungsfunktion ψ exakte Lösungen für die Einheitsverwölbung ω und damit für alle Verformungs-, Verzerrungs- und Spannungsgrößen in Balkenlängsrichtung hergeleitet werden können. Da die Herleitung aber sehr von der Spannungsfunktion und damit von der Geometrie des Querschnitts abhängt, bedeutet dies für komplexe Geometrien - darunter fallen schon verzweigte Profile - einen sehr großen Aufwand.

A.1.8 Spannungsfunktion ψ für ausgewählte Profile

Kreis

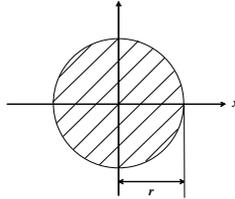


Abbildung 81: Kreis

$$\psi = \frac{1}{2} (r^2 - x^2 - y^2). \quad (\text{A.68})$$

Gleichseitiges Dreieck

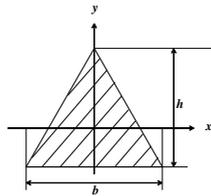


Abbildung 82: Dreieck

$$\psi = \frac{1}{2} h^2 \left(-\frac{x^3}{h^3} - \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{h^2} + 3\frac{xy^2}{h^3} + \frac{4}{27} \right). \quad (\text{A.69})$$

Rechteck

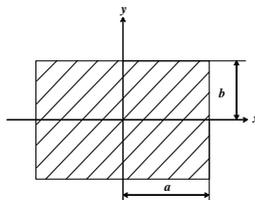


Abbildung 83: Rechteck

$$\psi = \frac{1}{4}b^2 - x^2 + \phi(x, y), \quad (\text{A.70})$$

mit

$$\phi(x, y) = 8b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^3 \cosh\left[\alpha_n \frac{h}{2b}\right]} \cos\left[\alpha_n \frac{x}{b}\right] \cosh\left[\alpha_n \frac{y}{b}\right], \quad (\text{A.71})$$

und

$$\alpha_n = (2n + 1)\pi. \quad (\text{A.72})$$

Wie aus (A.70) und (A.71) ersichtlich wird, ist die Lösung für das Rechteck im Gegensatz zu den übrigen Querschnitten durch die Summierung über die hyperbolischen Terme komplizierter.

A.2 Torsionsschwingung von masselosen Wellen

Da die mit SABINA-NG ermittelten Querschnittssteifigkeiten verifiziert werden sollen, werden statische und dynamische Versuche durchgeführt. Zur Auswertung des dynamischen Versuchs liefert das folgende Kapitel die Grundlagen. Hierbei wird ausgehend von der Torsionsschwingung einer masselosen Welle mit Einzelmasse ohne Wölbkrafttorison zur Biegetorsionsschwingung einer massebehafteten Welle mit Wölbkrafttorison hingeführt. Bezug genommen wird dabei auf [60].

A.2.1 Masselose Welle mit Einzelmasse

Zunächst soll eine masselose Welle mit einer starren Scheibe am Ende - wie in Abbildung 84 - dargestellt betrachtet werden:

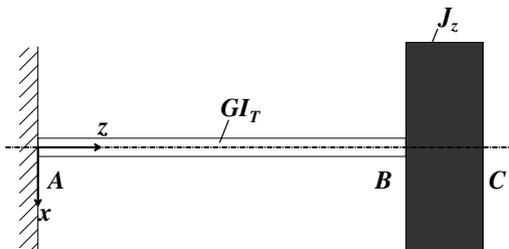


Abbildung 84: Torsion der masselosen Welle mit starrer Scheibe

Im Falle einer masselosen Welle ist das Massenträgheitsmoment der Welle Null. Ferner wird sie durch ein konstantes Torsionsmoment beansprucht. Somit ergibt sich der Drillwinkel φ_z am Ende der Welle (B) in Abhängigkeit des Drillwinkels an der Einspannung (A), der Länge l , dem Torsionsmoment M_T und der Torsionssteifigkeit GI_T zu:

$$\varphi_{z,B} = \varphi_{z,A} + \frac{M_T}{GI_T} l. \quad (\text{A.73})$$

In Matrixschreibweise ergibt sich aus Gleichung (A.73) für den Drillwinkel φ_z und für das Torsionsmoment im Balken M_z :

$$\{z\}_B = [T_{Welle}] \{z\}_A, \quad (\text{A.74})$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{GI_T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_A. \quad (\text{A.75})$$

Zur vollständigen Betrachtung dieses dynamischen Systems muss noch die Übertragungsmatrix der massebehafteten starren Scheibe aufgestellt werden:

Mit dem Torsionsträgheitsmoment J_z ergeben sich folgende Gleichungen:

$$M_{z,B} = J_z \overline{\ddot{\varphi}}_z - M_{z,C}, \quad (\text{A.76})$$

$$M_{z,C} = M_{z,B} + J_z \overline{\ddot{\varphi}}_z, \quad (\text{A.77})$$

$$\varphi_{z,C} = \varphi_{z,B}. \quad (\text{A.78})$$

Mit

$$\overline{\varphi}_z = \varphi_z(z) \sin(\omega t + \varphi), \quad (\text{A.79})$$

$$\overline{\ddot{\varphi}}_z = -\omega^2 \varphi_z(z) \sin(\omega t + \varphi), \quad (\text{A.80})$$

wird Gleichung (A.77) zu:

$$M_{z,C} = M_{z,B} - \omega^2 J_z \overline{\varphi}_{z,B}. \quad (\text{A.81})$$

In Matrixschreibweise lautet Gleichung (A.81):

$$\{z\}_C = [T_{Scheibe}] \{z\}_B, \quad (\text{A.82})$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_z & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_B. \quad (\text{A.83})$$

Für die Beschreibung des gesamten Systems gilt:

$$\{z\}_C = [T_{Scheibe}] [T_{Welle}] \{z\}_A. \quad (\text{A.84})$$

Unter Verwendung von Gleichung (A.75) und (A.83) erhält man:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{GI_T} \\ -\omega^2 J_z & -\omega^2 J_z \frac{l}{GI_T} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_A. \quad (\text{A.85})$$

Für ein momentenfreies Ende C ($M_{z,C} = 0$) und eine feste Einspannung bei A ($\varphi_{z,A} = 0$) ergibt sich folgende Frequenzgleichung:

$$\left(-\omega^2 J_z \frac{l}{GI_T} + 1 \right) M_{z,A} = 0. \quad (\text{A.86})$$

Diese kann nur erfüllt sein, wenn der Ausdruck in der Klammer Null wird. Gleichung (A.86) nach ω aufgelöst ergibt:

$$\omega = \sqrt{\frac{GI_T}{l \cdot J_z}}. \quad (\text{A.87})$$

A.2.2 Masselose Welle mit Einzelmasse und Wölbkrafttorsion

Ausgehend von Anhang A.2.1 wird in diesem Kapitel nun die masselose Welle mit Wölbkrafttorsion - wie in Abbildung 85 dargestellt - beschrieben.

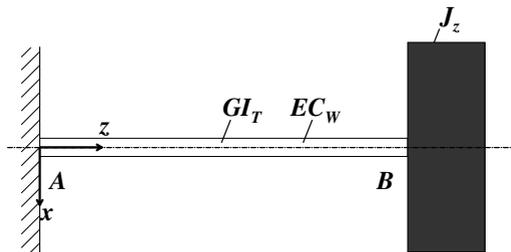


Abbildung 85: Masselose Welle mit Torsionssteifigkeit und Wölbsteifigkeit

Zusätzlich zu den bekannten Größen ist das Wölbmoment W relevant (siehe Kapitel 3).

Das Differentialgleichungssystem zu Abbildung 85 lautet wie folgt:

$$\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EC_W} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{GI_T} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_z \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.88})$$

Die Übertragungsmatrix für eine Welle der Länge l basierend auf Gleichung (A.88) kann mit $\lambda = \sqrt{\frac{GI_T}{ECW}}$ folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi_z' \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \end{array} \right\}_B = \left[\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda l & \frac{1 - \cosh \lambda l}{GI_T} & \frac{1}{GI_T} \left(l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda} \right) \\ 0 & \cosh \lambda l & -\frac{\lambda}{GI_T} \sinh \lambda l & \frac{1 - \cosh \lambda l}{GI_T} \\ 0 & -\frac{GI_T}{\lambda} \cosh \lambda l & \cosh \lambda l & \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varphi_z' \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \end{array} \right\}_A. \quad (\text{A.89})$$

Für die Übertragungsmatrix der massebehafteten starren Scheibe ergibt sich mit Bezug auf [79]:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi_z' \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \end{array} \right\}_C = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 J_z & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varphi_z' \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \end{array} \right\}_B. \quad (\text{A.90})$$

Durch Multiplikation der Matrix aus Gleichung (A.89) mit der Matrix aus Gleichung (A.90) und mit $s = \sinh \lambda l$ und $c = \cosh \lambda l$ erhält man die Gesamt-Übertragungsmatrix und damit folgendes Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi_z' \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \end{array} \right\}_C = \left[\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{\lambda} s & \frac{1}{GI_T} (1 - c) & \frac{1}{GI_T} \left(l - \frac{s}{\lambda} \right) \\ 0 & c & -\frac{\lambda}{GI_T} s & \frac{1}{GI_T} (1 - c) \\ 0 & -\frac{GI_T}{\lambda} c & c & \frac{1}{\lambda} s \\ -\omega^2 J_z & -\frac{\omega^2 J_z}{\lambda} s & -\frac{\omega^2 J_z}{GI_T} (1 - c) & -\frac{\omega^2 J_z}{GI_T} \left(l - \frac{s}{\lambda} \right) + 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varphi_z' \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \end{array} \right\}_A. \quad (\text{A.91})$$

Eine feste Einspannung bei $z = 0$ und ein freies Ende bei $z = l$ führt zu folgenden Randbedingungen:

$$\varphi_{z,0} = 0, \quad (\text{A.92})$$

$$\varphi_{z,0}' = 0, \quad (\text{A.93})$$

$$W_l = 0, \quad (\text{A.94})$$

$$M_{z,l} = 0. \quad (\text{A.95})$$

Damit ergibt sich folgende Matrix:

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}_C = \left[\begin{array}{cc} \cosh \lambda l & \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda l \\ -\frac{\omega^2 J_z}{GI_T} (1 - \cosh \lambda l) & -\frac{\omega^2 J_z}{GI_T} \left(l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda} \right) + 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} W \\ M_z \end{array} \right\}_A \quad (\text{A.96})$$

Dieses homogene Gleichungssystem kann nur erfüllt sein, wenn die Determinante der Matrix den Wert Null annimmt. Dies beschreibt die folgende Frequenzgleichung:

$$\left[-\omega^2 J_z \frac{1}{GI_T} \left(l - \frac{\sinh \lambda l}{\lambda} \right) + 1 \right] \cosh \lambda l + \omega^2 J_z \frac{1}{GI_T} (1 - \cosh \lambda l) \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda l = 0. \quad (\text{A.97})$$

Gleichung (A.97) nach ω aufgelöst, ergibt die Eigenfrequenzen des Systems:

$$\omega = \sqrt{\frac{GI_T}{J_z l} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda l} \tanh \lambda l}}. \quad (\text{A.98})$$

An dieser Eigenfrequenz ist der Einfluss der Wölbkrafttorsion ersichtlich. Die Wölbkrafttorsion führt zu einer Erhöhung der Eigenfrequenz und sollte daher mitberücksichtigt werden.

A.2.3 Massebehaftete Welle

Abbildung 86 zeigt einen Balken mit kontinuierlicher Massen- und Trägheitsverteilung J_z sowie der Torsionssteifigkeit GI_T .

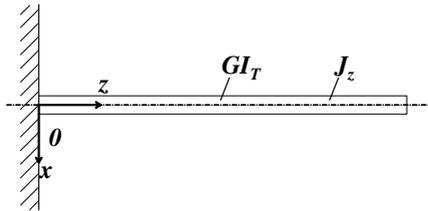


Abbildung 86: Torsion der massebehafteten Welle mit Torsionssteifigkeit

Abbildung 87 stellt das Gleichgewicht am infinitesimalen Element dar.

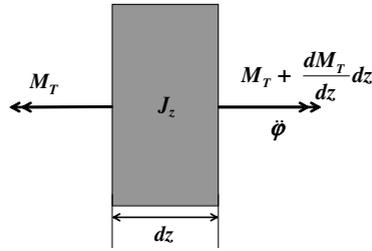


Abbildung 87: Infinitesimales Element mit Torsionssteifigkeit

Mit dem auf die Länge bezogenen Massenträgheitsmoment J'_z erhält man aus Abbildung 87:

$$-M_T - J'_z \phi dz + M_T + \frac{dM_T}{dz} dz = 0, \tag{A.99}$$

$$\frac{dM_T}{dz} = J'_z \phi. \tag{A.100}$$

Mit

$$\overline{\varphi}_z = \varphi_z(z) \sin(\omega t + \varphi), \tag{A.101}$$

$$\overline{\ddot{\varphi}}_z = -\omega^2 \varphi_z(z) \sin(\omega t + \varphi), \tag{A.102}$$

wird Gleichung (A.100) zu:

$$\frac{dM_T}{dz} = -\omega^2 J'_z \varphi. \tag{A.103}$$

Außerdem gilt der bekannte Zusammenhang zwischen Drillwinkel φ_z und Torsionsmoment M_T :

$$\varphi'_z = \frac{d}{dz} \varphi_z = \frac{M_T}{GI_T}. \tag{A.104}$$

In Matrixschreibweise lauten die Gleichungen (A.103) und (A.104):

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_z = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{GI_T} \\ -\omega^2 J'_z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_0. \tag{A.105}$$

Mit $\beta = \omega z \sqrt{\frac{J'_z}{GI_T}}$ ergibt sich aus (A.105) folgende Übertragungsmatrix:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_z = \begin{bmatrix} \cos\beta & \frac{z}{GI_T} \frac{\sin\beta}{\beta} \\ -\omega^2 J'_z z \frac{\sin\beta}{\beta} & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ M_z \end{Bmatrix}_0. \tag{A.106}$$

Für eine Welle mit freiem Ende ergibt sich wegen $M_{z,0} = M_{z,l} = 0$ folgende Frequenzgleichung:

$$-\omega^2 J'_z l \frac{\sin \beta}{\beta} \varphi_{z,0} = 0. \tag{A.107}$$

Diese ist nur erfüllt für $\sin \beta = 0$ und $\beta \neq 0$ bzw.:

$$\omega l \sqrt{\frac{J'_z}{GI_T}} = n\pi, \tag{A.108}$$

$$\omega = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{GI_T}{J'_z}}. \tag{A.109}$$

A.2.4 Massebehaftete Welle mit Wölbkrafttorsion

Zusätzlich zu den in Anhang A.2.4 beschriebenen Größen wird in diesem Kapitel eine Welle betrachtet, welche auch noch mit einer Wölbsteifigkeit EC_W belegt ist.

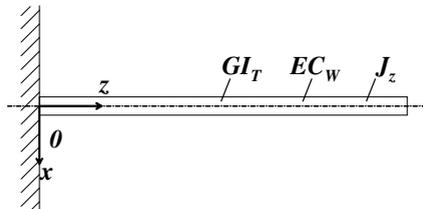


Abbildung 88: Massebehaftete Welle mit Wölbsteifigkeit

Aus der bekannten Differentialgleichung für den Torsionsstab und der zusätzlichen Berücksichtigung des Massenglieds analog zum massebehafteten Balkenschwinger in [79] (siehe Anhang A.2.3) wurde in [60] die Übertragungsmatrix für die Torsionsschwingung bestimmt:

$$\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ \varphi'_z \\ W \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EC_W} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{GI_T} & 0 & 1 \\ -\omega^2 J_z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_z \\ \varphi'_z \\ W \\ M_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_z \end{Bmatrix}. \tag{A.110}$$

Dieses Gleichungssystem ist nur gültig, wenn wie bei doppelsymmetrischen Profilen Schubmittelpunkt und Massenschwerpunkt zusammenfallen (z.B. I-Profil).

Damit folgt für die Übertragungsmatrix:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi_z' \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \\ 1 \end{array} \right\}_z = [T_{WKT}] \left\{ \begin{array}{c} \varphi_z' \\ \varphi_z \\ W \\ M_z \end{array} \right\}_0, \quad (\text{A.111})$$

$$[T_{WKT}] = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 + \frac{GI_T}{EC_W} N_3 & -\frac{1}{EC_W} N_2 & -\frac{1}{EC_W} N_3 & f_1 \\ -\frac{\beta^2}{EC_W} N_0 & N_0 + \frac{GI_T}{EC_W} N_2 & \frac{-N_1}{EC_W} + \frac{GI_T}{(EC_W)^2} N_3 & -\frac{1}{EC_W} N_2 & f_2 \\ -\beta^2 N_2 & N_4 & N_0 + \frac{GI_T}{EC_W} N_2 & N_1 + \frac{GI_T}{EC_W} N_3 & f_3 \\ -\beta^2 N_1 & -\beta^2 N_2 & \frac{\beta^2}{EC_W} N_3 & N_0 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.112})$$

mit:

$$\beta^2 = J_z' \omega^2, \quad (\text{A.113})$$

$$\mu = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{GI_T}{2EC_W}\right)^2 + \frac{\beta^2}{EC_W} + \frac{GI_T}{2EC_W}},}$$

$$\nu = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{GI_T}{2EC_W}\right)^2 + \frac{\beta^2}{EC_W} - \frac{GI_T}{2EC_W}},}$$

$$N_0 = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} [\nu^2 \cosh(\mu z) + \mu^2 \cos(\nu z)],$$

$$N_1 = \frac{1}{\mu \nu (\mu^2 + \nu^2)} [\nu^3 \sinh(\mu z) + \mu^3 \sin(\nu z)],$$

$$N_2 = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} [\cosh(\mu z) - \cos(\nu z)],$$

$$N_3 = \frac{1}{\mu \nu (\mu^2 + \nu^2)} [\nu \sinh(\mu z) + \mu \sin(\nu z)],$$

$$N_4 = - \left[GI_T N_1 + \left(\frac{(GI_T)^2}{EC_W} + \beta^2 \right) N_3 \right],$$

$$f_1 = -\frac{1}{\beta} \left[b_{0z} (N_0 - 1) + \frac{b_{lz}}{l} (N_1 - z) \right],$$

$$f_2 = \frac{b_{0z}}{EC_W} N_3 + \frac{b_{lz}}{l\beta} (N_0 - 1),$$

$$f_3 = -b_{0z} N_2 - \frac{b_{lz}}{l} N_3,$$

$$f_4 = -b_{0z} N_1 - \frac{b_{lz}}{l} \left[N_2 - \frac{GI_T}{\beta} (N_0 - 1) \right],$$

$$m_z = b_{0z} + b_{lz} \frac{z}{l}.$$

Die daraus resultierenden Frequenzgleichungen können nur noch numerisch gelöst werden. Aufgrund dessen soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden. Jedoch sei an dieser Stelle nochmals angemerkt, dass die Wölbsteifigkeit zu einer Erhöhung der Eigenfrequenzen führt (siehe Anhang A.2.2).

A.2.5 Gekoppelte Biege-Torsionsschwingung

Wie in Anhang A.2.4 erwähnt, ist die Torsionsschwingung nur entkoppelt von anderen Schwingungen, wenn der Schubmittelpunkt und der Massenschwerpunkt zusammenfallen. Bei nicht doppelsymmetrischen Profilen ist das für gewöhnlich nicht der Fall. Daher müssen die gekoppelten Biege-Torsionsschwingungen betrachtet werden. Ein derartiges Profil (C-Profil) ist in Abbildung 89 dargestellt.

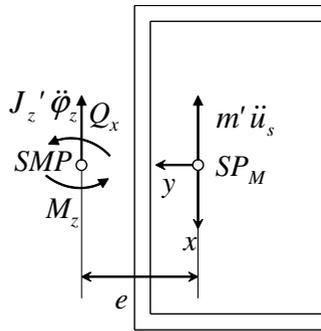


Abbildung 89: Schwerpunkt und Schubmittelpunkt bei C-Profil

Für die Verschiebung und die Beschleunigung des Massenschwerpunktes gelten mit dem Abstand Schubmittelpunkt - Massenschwerpunkt e folgende Zusammenhänge:

$$u_s = u + e\varphi_z, \tag{A.114}$$

$$\ddot{u}_s = \ddot{u} + e\ddot{\varphi}_z. \tag{A.115}$$

Bei der Bildung des Gleichgewichts sind die Massenkräfte, welche im Massenschwerpunkt angreifen, zu berücksichtigen:

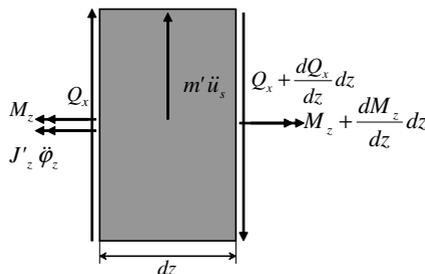


Abbildung 90: Infinitesimales Element bei der Biegetorsionsschwingung

Damit folgt für das Kräftegleichgewicht:

$$\frac{dQ_x}{dz} = m' \ddot{u}_s = m' \ddot{u} + m' e \ddot{\phi}_z. \quad (\text{A.116})$$

Das Momentengleichgewicht ergibt sich wie folgt:

$$\frac{dM_z}{dz} = m' \ddot{u}_s e + J'_z \ddot{\phi}_z = m' \ddot{u} e + m' e^2 \ddot{\phi}_z + J'_z \ddot{\phi}_z, \quad (\text{A.117})$$

$$\frac{dM_z}{dz} = m' \ddot{u} e + \bar{J}'_z \ddot{\phi}_z, \quad (\text{A.118})$$

mit

$$\bar{J}'_z = J'_z + m' e^2. \quad (\text{A.119})$$

Durch Verwendung der Produktansätze

$$\bar{u} = u(z) \sin(\omega t + \varphi), \quad (\text{A.120})$$

$$\bar{\ddot{u}} = -\omega^2 u(z) \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\bar{\varphi}_z = \varphi_z(z) \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\bar{\ddot{\varphi}}_z = -\omega^2 \varphi_z(z) \sin(\omega t + \varphi),$$

können die Gleichungen (A.116) und (A.118) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{d}{dz} Q_x = -\omega^2 m' u - \omega^2 m' e \varphi_z, \quad (\text{A.121})$$

$$\frac{d}{dz} M_z = -\omega^2 m' e u - \bar{J}'_z \omega^2 \varphi_z.$$

Ferner gelten:

$$\frac{d}{dz} \varphi'_z = \varphi''_z = -\frac{W}{EC_W}, \quad (\text{A.122})$$

$$\frac{d}{dz} W = \frac{d}{dz} (-EC_W \varphi''_z) = -EC_W \varphi'''_z = M_z - GI_T \varphi''_z. \quad (\text{A.123})$$

Damit kann folgende Matrix aufgestellt werden:

$$\{u'\} = [A] \{u\} \quad (\text{A.124})$$

mit

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{GA_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \bar{J}'_y & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 m' & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 m' e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EC_W} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI_T & 0 & 1 \\ -\omega^2 m' e & 0 & 0 & 0 & \bar{J}'_z \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.125})$$

und

$$\{u\} = \left\{ \begin{array}{c} u \\ \varphi_y \\ M_y \\ Q_x \\ \varphi_z \\ \varphi'_z \\ W \\ M_z \end{array} \right\}. \quad (\text{A.126})$$

Die Lösung für das Differentialgleichungssystem aus (A.124) ist die Exponentialfunktion:

$$\{u(x)\} = e^{[A]x} \{u(x_0)\}.$$

Mit

$$[T(x)] = e^{[A]x},$$

gilt:

$$\{u(x)\} = [T(x)] \{u(x_0)\}.$$

Mittels des Verfahrens nach Caley-Hamilton oder mittels Reihenentwicklung für die Matrix $[A]$ kann die Übertragungsmatrix $[T(x)]$ bestimmt werden. In diesem Fall wird das Vorgehen mittels Reihenentwicklung gewählt:

$$[T(x)] = e^{[A]x} = [A]x + \frac{1}{2!} [A]^2 x^2 + \frac{1}{3!} [A]^3 x^3 + \frac{1}{4!} [A]^4 x^4 + \dots \quad (\text{A.127})$$

Für einen Balken der Länge l ergibt sich die Übertragungsmatrix $[T(l)]$:

$$[T(l)] = e^{[A]l} = [A]l + \frac{1}{2!} [A]^2 l^2 + \frac{1}{3!} [A]^3 l^3 + \frac{1}{4!} [A]^4 l^4 + \dots, \quad (\text{A.128})$$

$$[T(l)] = \begin{bmatrix} T_{11} & \cdots & T_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{81} & \cdots & T_{88} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.129})$$

Der Zusammenhang für die Größen des Vektors $\{u\}$ zwischen der Stelle $x = 0$ und $x = l$ lautet:

$$\{u(l)\} = [T(l)] \{u(0)\}. \quad (\text{A.130})$$

Für die Randbedingung Frei-Frei ergeben sich folgende Schnittgrößen zu Null:

$$M_y(0) = M_y(l) = 0, \quad (\text{A.131})$$

$$Q_x(0) = Q_x(l) = 0, \quad (\text{A.132})$$

$$M_z(0) = M_z(l) = 0, \quad (\text{A.133})$$

$$W(0) = W(l) = 0. \quad (\text{A.134})$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (A.131) bis (A.133) ergibt sich aus (A.130) folgendes reduziertes Gleichungssystem:

$$\{u_{red}(l)\} = [T_{red}] \{u_{red}(0)\}, \quad (\text{A.135})$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{31} & T_{32} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{45} & T_{46} \\ T_{71} & T_{72} & T_{75} & T_{76} \\ T_{81} & T_{82} & T_{85} & T_{86} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ \varphi_y(0) \\ \varphi_z(0) \\ \varphi'_z(0) \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.136})$$

$$[T_{red}] = \begin{bmatrix} T_{31} & T_{32} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{45} & T_{46} \\ T_{71} & T_{72} & T_{75} & T_{76} \\ T_{81} & T_{82} & T_{85} & T_{86} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.137})$$

Da die Komponenten von $\{u_{red}(0)\}$ ungleich Null sind, muss die Determinante der Übertragungsmatrix - als Funktion der Eigenfrequenz - Null werden.

$$Det([T_{red}]) = f(\omega) = 0. \quad (\text{A.138})$$

Durch Lösung von Gleichung (A.138) erhält man die zugehörigen Eigenfrequenzen zu den gewählten Randbedingungen.

A.3 Iterative Steifigkeitsbestimmung aus den Eigenfrequenzen

Tabelle 19 zeigt die iterative Ermittlung der Steifigkeitskennwerte des Balkens. Die geometrischen Größen sind für alle Iterationen konstant, für die Steifigkeitskennwerte werden für Iteration 0 die theoretischen Werte aus SABINA und SABINA-NG verwendet. Diese sind nur theoretischer Art, da sie unter der Annahme von Kennwerten von T300-Fasern und Epoxydharz ermittelt wurden. Die ersten beiden Frequenzen der Biegetorsionsschwingung dienen daher einer Art Kalibrierung auf die Faserkennwerte.

It.	GA_x [N]	EI_y [Nm ²]	GI_T [Nm ²]	EC_W [Nm ⁴]	EC_W^{Sabina} [Nm ⁴]
0	$2,727 \cdot 10^6$	$2,517 \cdot 10^3$	$1,346 \cdot 10^1$	$1,148 \cdot 10^{-1}$	$1,148 \cdot 10^{-1}$
1	$2,727 \cdot 10^6$	$2,517 \cdot 10^3$	$1,243 \cdot 10^1$	$1,148 \cdot 10^{-1}$	$1,148 \cdot 10^{-1}$
2	$2,534 \cdot 10^6$	$2,272 \cdot 10^3$	$1,243 \cdot 10^1$	$1,074 \cdot 10^{-1}$	$1,074 \cdot 10^{-1}$
3	$2,534 \cdot 10^6$	$2,272 \cdot 10^3$	$1,243 \cdot 10^1$	$1,062 \cdot 10^{-1}$	$1,038 \cdot 10^{-1}$
4	$2,544 \cdot 10^6$	$2,272 \cdot 10^3$	$1,246 \cdot 10^1$	$1,062 \cdot 10^{-1}$	$1,038 \cdot 10^{-1}$
5	$2,544 \cdot 10^6$	$2,272 \cdot 10^3$	$1,246 \cdot 10^1$	$1,062 \cdot 10^{-1}$	$1,038 \cdot 10^{-1}$
6	$2,544 \cdot 10^6$	$2,272 \cdot 10^3$	$1,246 \cdot 10^1$	$1,062 \cdot 10^{-1}$	$1,038 \cdot 10^{-1}$
7	$2,544 \cdot 10^6$	$2,272 \cdot 10^3$	$1,246 \cdot 10^1$	$1,098 \cdot 10^{-1}$	$1,038 \cdot 10^{-1}$
8	$2,544 \cdot 10^6$	$2,272 \cdot 10^3$	$1,245 \cdot 10^1$	$1,098 \cdot 10^{-1}$	$1,038 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 19: Auswertung dynamischer Versuch

- Iteration 0: Kennwerte aus SABINA und SABINA-NG
- Iteration 1: GI_T wird aus der 1. Eigenfrequenz ($f_1 = 133,8$ Hz) berechnet. Anschließend werden die Elastizitäts- und Schubmoduli, welche in SABINA und SABINA-NG eingegeben werden, angepasst, so dass SABINA GI_T entsprechend des Versuchs berechnet. Dadurch ändern sich auch die Vorgabewerte von SABINA und SABINA-NG für GA und EC_W .
- Iteration 2: EI_y wird aus der 2. Eigenfrequenz ($f_1 = 157,7$ Hz) berechnet. Durch Anpassung des Elastizitätsmoduls wie in Iteration 1 ändert sich hier die Vorgabe für EC_W .
- Iteration 3: EC_W wird aus der 3. Eigenfrequenz ($f_1 = 313,8$ Hz) berechnet. In diesem Fall wird EC_W imaginär $(9,41103 \pm 0,20416i)^{-1}$ Nm⁴. Für die nächste Iteration wird der Betrag dieses Werts verwendet.
- Iteration 4: Erneute Berechnung von GI_T aus der 1. Eigenfrequenz unter Verwendung einer Reihe mit 40 Gliedern.

- Iteration 5: Berechnung von GI_T aus der 1. Eigenfrequenz unter Verwendung einer Reihe mit 48 Gliedern.
- Iteration 6: Berechnung von EI_y aus der 2. Eigenfrequenz unter Verwendung einer Reihe mit 48 Gliedern.
- Iteration 7: Berechnung von EC_W aus der 3. Eigenfrequenz unter Verwendung einer Reihe mit 48 Gliedern.
- Iteration 8: Berechnung von GI_T aus der 1. Eigenfrequenz unter Verwendung einer Reihe mit 48 Gliedern.

Die Iterationen 5 bis 8 dienen als Konvergenzbeweis, dass sich die Ergebnisse der 40-gliedrigen Reihenentwicklung nur marginal von den Ergebnissen der 48-gliedrigen Reihenentwicklung unterscheiden. Die Abweichung zwischen SABINA-NG und dem ausgewerteten Versuch für die Wölbsteifigkeit EC_W liegt unter 6% und damit ist die Berechnung der Wölbsteifigkeit mit SABINA-NG hinreichend genau.